ГЕОМЕТРИЈА ПОЛИНОМА У РАДОВИМА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА И ЊЕГОВИХ НАСЛЕДНИКА

РАДОШ БАКИЋ*

ЖАРКО МИЈАЈЛОВИЋ**

ГРАДИМИР В. МИЛОВАНОВИЋ***

А п с т р а к т. – Поред *Диференцијалних једначина*, где је Михаило Петровић био најуспешнији, *Геометрија полинома* је још једна математичка област у којој је он био веома успешан и где је постигао значајна достигнућа. Не само да је донео ову област код нас, већ је захваљујући његовом утицају, више значајних српских математичара радило у тој области и имало препознатљиве и вредне прилоге. Поред прегледа Петровићевих резултата из ове области, у овом раду дајемо кратку историју развоја области, доприносе Петровићевих наследника, као и општи тренд у развоју области у последњим деценијама.

Кључне речи: геометрија полинома, нуле полинома, тригонометријске суме, неједнакости

1. Увод

Главни доприноси Михаила Петровића у математици налазе се у области диференцијалних једначина, затим у реалној и комплексној анализи. Мада је скоро четвртина његовог научног опуса класификовано у алгебру (видети *Летопис живота и рада Михаила Петровића* аутора Д. В. Трифуновића [47]), и од тога више од половине је објављено у иностранству, углавном у француским часописима, ови радови такође су прожети идејама и методама математичке анализе и теорије диференцијалних једначина. Скоро да нема радова

* Учитељски факултет Универзитета у Београду, и-мејл: rados.bakic@uf.bg.ac.rs

** Математички факултет Универзитета у Београду, и-мејл: zarko.mijajlovic@gmail.com

*** Српска академија наука и уметности, и-мејл: gvm@mi.sanu.ac.rs

чисто алгебарског карактера. Ипак, први Петровићев рад *О једној модификацији Грефеовог метода решавања виших бројних једначина*, има алгебарско обележје. Споменимо да је Петровић овај рад написао већ у деветнаестој години, као студент прве године Велике школе у Београду 1886. године. Рад није објављен и постоји само у рукопису.

Петровићеви радови из алгебре могу се разврстати у три области: теорију полинома, теорију бројева и теорију детерминаната. У оквиру теорије полинома занимао се за неколико тема: геометрију полинома, тј. распоред нула полинома (са реалним и комплексним коефицијентима) у комплексној равни, опште проблеме у вези са алгебарским једначинама, теорију симетричних функција и нумеричко решавање алгебарских једначина. У теорији бројева Петровић је имао нарочито интересовање за својства простих бројева и Вилсонову теорему. Из теорије детерминаната има заправо пар радова који се углавном односе на њихову примену, пре свега у теорији полинома, али и ван математике, на пример у хемији.

Далеко најзначајнији и најдубљи Петровићеви радови из алгебре припадају области *геометрија полинома*. Погледајмо на шта се тачно односе ови Петровићеви радови.

Велики број резултата који се односе на полиноме успешно је пренет на важне класе других функција, као што су на пример, целе и мероморфне функције, и уопште функције комплексне променљиве представљене Тејлоровим редовима. Петровић је управо у овој области испољио велики таленат и оригиналност. Рад у области геометрије полинома и генерално у теорији функција започиње под утицајем Ермита (*C. Hermite*) и Адамара (*J. Hadamard*). Петровићеви радови из геометрије полинома додирују велики број напред описаних тема и метода.

У наредним секцијама размотрићемо укратко Петровићеве радове из ове области, кратку историју развоја области, као и доприносе Петровићевих наследника и општи тренд у развоју области у последњим деценијама.

2. Допринос Михаила Петровића у геометрији полинома

Један од првих радова из геометрије полинома је [23] из 1899. Рад се односи на распоред корена у комплексној равни алгебарске једначине $f(x) = 0$ у односу на дату кружницу C са центром у координантном почетку O. Овде Петровић одређује услове за спољашњи и унутрашњи полупречник кружног прстена P, такође са центром у O, а који садржи кружницу C. На основу полупречника кружница којим је дефинисан прстен P налази алгебарски израз, одакле одређује тачан број p „унутрашњих” корена ове једначине, тј. нула садржаних унутар кружнице C. Овај израз је логаритамски извод трансформисаног полинома $f(x)$. Трансформација коју примењује на полином добија се итерацијом алгебарског пресликавања $x \mapsto \sqrt{x}$. Споменимо да је рад презентовао Ермит у оквиру геометријске секције у часопису у којем је објављен.

У раду [25] (1901), штампан у Билтену француског математичког друштва, Петровић се бави одређивањем доњих граница модула нула датог Тејлоровог реда уз претпоставку да постоји зависност у низању коефицијената реда, или бар нумеричке вредности довољног броја тих коефицијената. У одређивању ове оцене полази од Адамарове неједнакости која се односи на норму детерминанте и модула вектора врсте исте детерминанте. Такође наводи више примера на којима су те оцене илустроване. Овим радом Петровић заправо наставља истраживање понашања функција представљених Тејлоровим редовима које је започео Адамар. Нарочито је занимљив Петровићев резултат о кругу у којем такве функције немају нула. Не само резултат већ и идеја доказа су Петровићева оригинална замисао. Рад је привукао пажњу неколико познатих математичара оног времена. На пример, немачки математичар Е. Ландау (*E. Landau*) изучава овај рад и четири године касније у истом часопису детаљно анализира поменути Петровићев резултат. Тако, доказује да је он последица Јенсенове неједнакости. Занимљиво је да је дански математичар Јенсен (*J. Jensen*) доказао своју неједнакост исте године када је Петровић објавио овај рад. И други познати математичари се надовезују и допуњују Петровићев рад: Фејер (*L. Fejér*), Харди (*G. E. Hardy*), Монтел (*P. Montel*).

У раду [27] (1906), Петровић утврђује за једну широку класу полинома област комплексне равни која садржи све нуле полинома из те класе. Реч је о полиномима $J(x) = \sum_{k \leq n} a_k x^k$ где су коефицијенти представљени интегралом:

$$a_k = \int_a^b A(t) r(t)^k \, dt,$$

где су $A(t)$ и $r(t)$ разне функције променљиве t, реалне и позитивне за све вредности t у размаку интеграције. Област се састоји из пресека сектора и кружних прстена, а углови сектора и пречници кружних прстена се прецизно описују утврђивањем аргумената и оцене модула полинома $p(x)$. Занимљиво је да се оцене вредности аргумената једноставно одређују на основу промене знака три функције $\sin(x)$, $\sin(nx)$ и $\sin((n+1)x)$. Рад садржи велики број интересантних примера за које су изведене оцене конкретизоване, тј. тачно су описане области комплексне равни наведене врсте. Такође утврђује реалан интервал који садржи све реалне корене полинома $J(x)$.

Први део рада [29] (1908) делимично се преплиће са једним претходним Петровићевим радом [28] и односи се на симетричне функције. При томе уводи низ рационалних функција $N_{k(x)}$ придружених датом полиному применом логаритамског извода на претходне чланове низа. У другом делу рада бави се распоредом нула у комплексној равни дате алгебарске једначине. Утврђује природну везу између низа $N_{k(x)}$ и броја корена једначине чији модул је ограничен неким позитивним реалним бројем ϱ. Као и остали радови, и овај је илустрован бројним нумеричким примерима.

У раду [30] (1913) Петровић најпре изводи, полазећи од основне Адамарове неједнакости, неколико нових неједнакости – оцена максималног модула детерминанте D n-тог реда над пољем комплексних бројева. Тако, користећи однос аритметичке и геометријске средине налази:

$$|D| \leq \frac{B^n}{\sqrt{n^n}},$$

где је B квадратни корен из суме квадрата модула свих елемената детерминанте. Потом користи ове неједнакости за разне оцене решења алгебарских једначина и система линеарних једначина. На пример, изводи оцену модула основне симетричне функције

$$s_n = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \cdots + \alpha_n^k$$

корена α_i алгебарске једначине n-тог реда. Надовезујући се на Адамарове теореме, Петровић даје оцене нула целих функција. На крају, користећи само цитирану неједнакост о модулу детерминанте, даје директан и у основи елементаран доказ теореме која се односи на нуле најмањег модула Тејлоровог реда. Овај доказ посебно је занимљив с обзиром да је Ландау доказао исту теорему на сасвим други (и тежи) начин користећи апарат аналитичких функција.

У раду [31] (1913) Петровић се бави следећим проблемом: *Одредити низове $\omega_0, \omega_1, \ldots$ реалних бројева такве да ако алгебарска једначина*

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

има све корене имагинарне, онда и једначина

$$\omega_0 a_0 + \omega_1 a_1 x + \cdots + \omega_n a_n x^n = 0$$

такође има све корене имагинарне.

Сличан задатак, али за реалан случај, расправљао је Лагер (*E. Laguerre*). Петровић даје опште решење проблема у виду производа релативно једноставних интеграла. Затим наводи више занимљивих примера бирајући конкретне примере интеграла. Исти проблем варира, да својство реалности, односно имагинарности корена буде одржано у случају да се испусти одређен број чланова полинома. У другом делу рада расправља сличне проблеме, али сада у случају степених редова. Све ове резултате користи у одређивању распореда нула ових функција, на пример, у налажењу доње границе модула нула функција представљених Тејлоровим редом. Рад је богато илустрован занимљивим примерима. Делове овог рада Петровић је саопштио на Међународном конгресу у Риму 1908. године и резултати рада имали су запажен одјек. На пример, даља проширења и генерализације дао је Полиа (*G. Pòlya*), док Р. Јенч (*R. Jentzsch*) наводи исти рад у својој тези. Према речима академика М. Томића, Јенчова теорема да одсечци Тејлоровог реда имају тачке нагомилавања на целој периферији круга конвергенције представља само крајњи домет ове врсте ставова.

Један од последњих Петровићевих списа посвећен у потпуности геометрији полинома је рад [33] (1919). И овде се Петровић бави распоредом нула алгебарске једначине $f(x) = 0$ у комплексној равни. Наиме, одређује кружни прстен C у којем полином $f(x)$ има бар један корен и то најмањег модула. Дакле, $f(x)$ нема нула окружених прстеном C. Примерима полинома показује да је тако добијен прстен C најбоље одређен. Овај рад је у вези са резултатима неколико других математичара који су се бавили истим питањем, између осталих Фејера и Ландауа.

У једном броју радова Петровић се бави разним питањима из теорије алгебарских једначина која нису у непосредној вези са геометријом полинома. Ови проблеми најчешће су везани за разне алгебарске и трансцендентне трансформације алгебарских једначина, симетричне функције, неједнакости и сумационе формуле из анализе. Занимљиво је да у основи неколико радова лежи Грефеова (*K. H. Graeffe*) трансформациона метода за издвајање нула највећег модула дате алгебарске једначине. Подсетимо се да је Петровић први пут о томе писао још као студент и већ у њему имао оригиналних доприноса. Детаљну анализу овог рукописа урадили су М. Стојаковић и Д. Трифуновић у чланку *Петровићева модификација Грефеове методе за решавање алгебарских једначина* који је објављен у књизи поводом стогодишњице Петровићевог рођења, „Споменица Михаила Петровића, 1868–1968". Стога се овом приликом нећемо детаљно бавити овим рукописом, али зато погледајмо о чему је Петровић писао у осталим радовима из ове области.

У доста опсежном раду [24] (1899) Петровић примењује трансцендентне трансформације на алгебарске једначине, али тако да трансформисана једначина остаје алгебарска. Петровић заправо решава следећи проблем: образовати нову алгебарску једначину J' из дате алгебарске једначине J такву да између корена α_i једначине J и корена β_i једначине J' постоји веза облика

$$\beta_i = R(e^{r\alpha_i}, e^{r\alpha_j}, \ldots)$$

или

$$\beta_i = R(\sin(r\alpha_i), \sin(r\alpha_j), \ldots)$$

или

$$\beta_i = R(\cos(r\alpha_i), \cos(r\alpha_j), \ldots),$$

где R означава некакву алгебарску, рационалну или симетричну функцију. Као што видимо, у овом раду се појављује одсјај идеја из првог Петровићевог необјављеног рукописа. Истина, овде се не бави поступцима за нумеричко израчунавање корена полинома већ ове трансформације уводи са циљем да утврди распоред и број нула датог полинома у комплексној равни. Дакле, овде најављује тему којом ће се са великим успехом бавити у следеће две деценије. У самом раду решава неколико проблема. Први је у вези са Хурвицовом теоремом, да се одреди број комплексних корена алгебарске једначине чији је реални део мањи од нуле. Други задатак који решава је да се за дату алгебарску једначину одреди полином чије су нуле једнаке парцијалним збировима корена полазне једначине. Најзад, у трећем делу, користећи већ добијене резултате, даје метод за израчунавање једне класе интеграла. Споменимо да је Петровић овај рад објавио у *Rad*-у JAZU, непосредно по пријему у чланство JAZU.

У раду [26] (1906) Петровић даје нов, и у основи елементаран, доказ једне Њутнове теореме која даје довољне услове за коефицијенте полинома да дата алгебарска једначина има корен који није реалан. Мада је Њутн теорему формулисао, доказ није објавио, нити је оставио наговештај доказа у било којем виду. Први доказ Њутнове теореме потиче од енглеског математичара Силвестера (*J. J. Sylvester*) из 1866. године. Заправо ова теорема је последица једне општије Силвестерове теореме о броју реалних корена алгебарске једначине у датом интервалу. У свом доказу Петровић уводи низ алгебарских трансформација да би на крају применио Ролову теорему. У другом делу рада детаљно анализира примену теореме у случају кубне једначине. На крају изводи применом Њутнове теореме занимљиву неједнакост за реални полином $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, степена n, са позитивним коефицијентима и чије су све нуле реалне:

$$f(x) \leq \left(1 + \frac{a_1}{na_0}x\right)^n.$$

У раду [28] (1907) Петровић налази аналитички израз за једну симетричну функцију корена датог полинома. Овај образац Петровић изводи на два начина. У првом користи својства логаритамског извода, док у другом извођењу примењује Грефеову методу, вршећи трансформације на полазној једначини тако да су корени трансформисаног полинома добијени применом итерације корене функције на нуле првобитног полинома. Сличним поступком изводи одговарајућу формулу за симетричне функције целих функција. Један део рада односи се на проблем раздвајања нула полинома у комплексној равни. Рад садржи неколико детаљних примера који илуструју Петровићеве методе.

Преостала два рада у овом избору из теорије алгебарских једначина немају исту тежину као остали радови на ову тему. Ипак и ови чланци илуструју одређене Петровићеве идеје. Тако, у раду [32] (1914) Петровић је уочио да се полином $f(x)$ парног степена $2n$ може представити у облику $f(x) = P^2 + Q^2 - M^2$, где су P, Q и M полиноми степена n. Користећи ово својство Петровић даје поступак свођења алгебарских једначина парног степена на алгебарске једначине двоструко мањег степена. Овај поступак примењује и детаљно анализира у случају алгебарских једначина степена 4 и 6. У раду [34] (1933), Петровић се бави бесконачним сумама S низа полинома истог степена. Уз претпоставку да производ коефицијената полинома уз x^{2k} и броја n^{2k} зависи једино од k, доказује да је сума S једнака вредности једног полинома $f(x)$ за $x = \pi^2$. У основи доказа лежи позната формула:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = A_{2n} B_{2n} \pi^{2k},$$

где је A_{2k} одређена рационална константа и B_{2k} је Бернулијев број.

Петровић је био веома плодан и разноврстан математичар. Објавио је пар стотина радова, већином у најпознатијим страним часописима. Изнео је нове и оригиналне идеје и учинио значајне продоре у светској науци. Ова чињеница мора се нарочито ценити имајући у виду околности и време у Србији када је Михаило Петровић стварао. Његови резултати из алгебре који су тесно везани за теорију функција, били су препознати, цитирани и даље развијани од стране водећих математичара: Ермита, Ландауа, Полиа, Фејера, Хардија, Монтела и других.

У немачком реферативном журналу из математике *Zentralblatt MATH*, који се сада уређује од стране *Европског математичког друштва* и *Хајделбершке академије наука*, и чија је база 2003. године обогаћена садржајем сличног журнала *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (JFM), који је егзистирао у периоду 1868–1942, налази се 228 Петровићевих публикација, укључујући 12 књига (претраживати као „ai:petrovitch.michel”). Његове теореме и радови из геометрије полинома забележени су у најпознатијој монографији из ове области: Morris Marden, *Geometry of Polynomials*, American Mathematical Society, 1949 (друго издање 1966. год.). Цитирана су четири Петровићева рада: [23, 25, 29] и [31]. Споменимо да је у овој монографији цитирано и неколико других наших математичара: Ј. Карамата, М. Томић, Б. Бајшански, Д. Марковић и Ш. Рађевић.

Стога се са разлогом може прихватити мишљење академика Томића, да је геометрија полинома, заједно са теоријом функција (области које се тешко могу раздвојити), можда најзначајнија Петровићева област и да је у њој постигао највеће достигнуће. Такође видимо да је Петровић донео ову област код нас и да је захваљујући његовом утицају више значајних српских математичара радило и ту имало препознатљиве и вредне прилоге.

3. Кратка историја развоја области

Геометрија полинома препозната је и под другим називима, као што су геометрија нула полинома комплексне променљиве, затим аналитичка теорија полинома, или аналитичка теорија једначина. Реч „аналитичка" овде се користи да би се нагласило да се једначине полиномног типа изучавају са неалгебарског становишта, односно методама теорије функција. Ипак, преовладао је једноставан назив геометрија полинома с обзиром да главно место у изучавању ових једначина има геометријска теорија функција комплексне променљиве. Проблеми ове теорије углавном се односе на разматрање распореда нула у комплексној равни полиномне функције $f(z)$ као функције неких, унапред изабраних параметара. Ови параметри најчешће су коефицијенти полинома $f(z)$, или нуле, или коефицијенти неког придруженог полинома добијеног алгебарском трансформацијом из $f(z)$, на пример применом оператора диференцирања. Ако се параметри варирају у некој области комплексне равни, централни је проблем одредити геометријско место тачака Γ нула полинома $f(z)$. Скуп G се може састојати из неколико дисјунктних региона G_1, G_2, $\ldots$, G_m, и тада се може поставити питање одређивање скупова G_i, као и броја нула у сваком региону G_i. Друго питање од интереса је, на пример, одређивање региона који садржи унапред задат број нула, или нула најмањег модула полинома $f(z)$. Може се десити да је одређивање региона Γ исувише компликовано и у том случају Γ се апроксимира неким једноставнијим скупом, на пример кругом или кружним прстеном C који садржи G. Тада тачно одређивање полупречника круга S даје горњу границу модула нула полинома $f(z)$, док се у случају прстена добија оцена горњих и доњих граница модула нула.

Методе истраживања укључују геометријске операције над комплексним бројевима, примену разних неједнакости и оцена, затим примену извесних принципа на којима су ове конструкције базиране. Међу овим најпознатији је такозвани *Принцип аргумента* и његове последице: *Rouché*-ова теорема, *Cauchy*-ева индексна теорема, теорема о непрекидности нула и *Hurwitz*-ова теорема. Дакле, не само по природи проблема, већ и по методама ова област највећим делом припада геометријској теорији функција.

Први проблеми везани за полиноме и њихове нуле јавили су се много раније него сам појам полинома. Наиме, у историји цивилизације врло рано се јавила потреба за решавањем линеарне и квадратне једначине. Све древне цивилизације (Вавилон, Грчка, Кина, Индија, Египат) су више или мање успешно решавале проблем решавања квадратне једначине. При томе су често решавани само неки облици ове једначине, а негативна и поготову комплексна решења су по правилу занемаривана. Једначине трећег и четвртог степена су успешно решене у 16. веку напорима италијанских математичара (*G. Cardano, L. Ferrari, N. Tartaglia*).

Као јасно формулисан математички објекат, полиноми се у савременом облику јављају први пут код Декарта (*R. Decartes*). Претходно се већ била појавила потребна нотација у радовима Симона Стевина (*S. Stevin*) и Франсоа Вијета (*F. Viète*). Декарт је у свом раду *La geometrie* из 1637. године увео неке елементе нотације који се користе до данашњих дана, као на пример коришћење латиничних слова са краја алфабета за обележавање променљиве, а са почетка за обележавање константи. У то време јављају се и прва тврђења о полиномима која нису везана за проблем одређивања његових нула. Тако Вијет открива правила, тј. везу између нула полинома и његових коефицијената (која су по њему и названа), док Декарт доказује да је сваки полином $p(x)$ дељив са $x-a$, ако је a једна његова нула. Декарт је такође у свом поменутом делу *La geometrie* доказао своје познато правило (тзв. *Декартово правило*) којим се за дати полином са реалним коефицијентима даје процена броја његових позитивних, односно негативних корена, и то полазећи од броја промена знакова суседних коефицијената.

Следећи важан моменат у развоју области, али и математике генерално, везан је за тзв. *Основну теорему алгебра* која тврди да сваки неконстантни полином са комплексним коефицијентима има бар један корен у скупу комплексних бројева. На овом проблему су радили највећи математичари 18. века али са половичним успехом. Први (некомплетан) покушај доказа дао је Даламбер (*J. d'Alembert*) 1746. а затим су следили нови покушаји да се докаже ово фундаментално тврђење, и то практично од стране свих великих математичара који су живели у то време. Тако Ојлер (*L. Euler*) (1749), Фонценек (*F. D. Foncenex*) (1759), Лагранж (*J. L. Lagrange*) (1772) и Лаплас (*P. S. Laplace*) (1795) решавају овај проблем условно. То значи да су они доказали егзистенцију комплексног корена, али под претпоставком да тај корен уопште постоји (при чему се априори ништа не зна о томе да ли је он комплексан или не). Другим речима, они су претпоставили егзистенцију онога што ће касније бити названо *поље разлагања полинома* или *коренско поље полинома*. У некомплетне доказе убраја се и Гаусов доказ из 1799. године, који је комплетиран тек 1920. године. Гаус (*K. F. Gauss*) је дао још три доказа: два 1816. и још један 1849. године. У овим радовима Гаус је дао и процене величине корена, а не само доказ њихове егзистенције. Тако је у доказу из 1799. показао да су сви корени полинома $p(z)=z^n+A_1z^{n-1}+\cdots+A_{n-1}z+A_n$, са реалним коефицијентима, по модулу не већи од R, где је $R=\max(1,\sqrt{2}S)$ и S је збир позитивних коефицијената A_i. У доказу из 1849. године показао је да се за R може узети $R = \max\left(\sqrt{2}n\lfloor A_k\rfloor\right)^{1/k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Најзад, у раду из 1849. показао је да се за R може узети позитивни корен једначине

$$z^n - \sqrt{2}\left(\lfloor A_1\rfloor z^{n-1} + \cdots + \lfloor A_n\rfloor\right) = 0,$$

при чему коефицијенти могу бити и комплексни.

4. Допринос Петровићевих наследника и даљи трендови

Михаило Петровић се појавио на међународној сцени у тренутку када је геометрија полинома почела да се постепено уобличава као релативно самостална математичка дисциплина. Његово интересовање за полиноме и њихове нуле у ствари потиче од најранијих дана. Као што је описано у уводу, његово интересовање за ову област је даље продубљено боравком у Француској, што је логично, посебно када се узме у обзир традиција која је постојала у једној тако великој математичкој школи каква је француска. Из историјата ове области се види да се та традиција протезала уназад све до Декарта. Због тога је било више него природно да се захваљујући Михаилу Петровићу ова област развије и у српској математичкој школи и то од самих њених почетака, при чему се истраживачка нит протеже све до данашњих дана.

Јован Карамата (1903–1967) био је докторанд Михаила Петровића код кога је докторирао 1926. године са тезом под називом „*О једној врсти граница сличних одређеним интегралима*". Бавио се углавном разним аспектима анализе који су у то време били актуелни. У свету је познат по својој теорији споро променљивих функција. У својој чувеној монографији [10] *Geometry of Polynomials*, Морис Марден у списку референци наводи два његова рада.

Миодраг Томић (1912–2001) био је докторанд Јована Карамате код кога је докторирао 1950. године са тезом „*О тригонометријским збировима*" [43]. Бавио се анализом, тригонометријским полиномима и редовима, као и диференцијалним једначинама.

Познату теорему Енестрема (*G. Eneström*) и Какеиа (*M. S. Kakeya*) по којој полином $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, са реалним коефицијентима за које важи $a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0 > 0$, има све нуле у јединичном диску $|z| \leq 1$, уопштио је М. Томић [42] геометријском интерпретацијом суме $\sum_{k=0}^{n} a_k e^{ik\theta}$ $(a_k \geq a_{k+1})$ и исти метод применио на одређивање граница тригонометријских полинома и редова.

За реални полином $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ за чије коефицијенте важи

$$a_m - a_{m+1} \geq a_{m-1} - a_{m+1} \geq \cdots \geq a_1 - a_{2m} \geq a_0 - a_{2m+1} \geq 0,$$

где су $m = [n/2]$ и $a_{2m+1} = 0$ ако је m парно, Томић је доказао да се не анулира на јединичном кругу. Ако је још испуњен услов $a_m \geq a_{m-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0$, тада овај полином има тачно m нула у јединичном диску.

Интересантно је да су 1967. године Јојал (*A. Joyal*), Лабел (*Q. Labelle*) и Рахман (*Q. I. Rahman*) одбацили претпоставку о позитивности низа a_k и задржали само услов монотоности у оригиналној теореми Енестрема и Какеиа, и тада доказали да све нуле полинома леже у диску $|z| \leq (a_n - a_0 + |a_0|)/|a_n|$. Након тога појављује се низ радова на ову тему и то траје све до данашњих дана. Недавно су Гарднер (*R. B. Gardner*) и Говил (*N. K. Govil*) публиковали историјски преглед [6] о развоју теореме Енестрема и Какеиа.

Користећи свој геометријски метод Томић [42] је доказао позитивност синусне суме

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta, \qquad 0 < \theta < 2\pi,$$

при чему коефицијенти a_k чине нерастући низ $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n > 0$. Како сам констатује у својој тези [43], као повод за испитивање позитивности тригонометријских редова, поред осталог, послужила је и Фејерова хипотеза из 2010. године да је, за свако $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin k\theta > 0, \qquad 0 < \theta < \pi,$$

коју су касније доказали Џексон (*D. Jackson*) (1911), Гронвал (*Th. Gronwall*) (1912), Ландау (*E. Landau*) (1933), као и сам Фејер (1928). Користећи исти геометријски метод, Карамата и Томић [8] су доказали (видети такође Томићеву докторску тезу [43]) да за општију синусну суму

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sin(\alpha k + \beta)\theta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

под условима $a_{k-1} \geq a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, важе следеће неједнакости за $0 < \theta < \pi$

$$-a_0 \sin^2\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\theta}{2} \leq \sin\frac{\alpha\theta}{2} S_n^{(\alpha,\beta)}(\theta) \leq a_0 \cos^2\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\theta}{2}.$$

Томић [43] је, такође, својом геометријском методом доказао један Фејеров резултат из 1925. године о позитивности косинусне суме

$$C_n(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta, \qquad 0 < \theta < 2\pi,$$

под условом да је низ a_k двоструко монотон, тј. да важе неједнакости $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} = 0$ и $\Delta^2 a_k = a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1} \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Штавише, Томић је добио и горњу границу,

$$C_n(\theta) \leq \frac{a_0 - a_1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2}, \qquad 0 < \theta < 2\pi,$$

као и низ других неједнакости, претпостављајући монотоност вишег реда. Посебно је интересантна сума $C_n(\theta)$, у случају специјалног низа $a_0 = 0$ и $a_k = 1/k$ $(k \geq 1)$, за који је Јунг (*W. H. Young*) 1913. године доказао неједнакост $C_n(\theta) > -1$ за $0 \leq \theta \leq \pi$. Томић [46] је побољшао овај резултат доказујући егзистенцију позитивне константе K, независне од n и θ, тако да важи $C_n(\theta) > -1+K$ (на пример, таква једна константа је $K = 1/20$, тј. $C_n(\theta) > -19/20$. Браун (*G. Brown*) и Коумандос (*S. Koumandos*) су 1997. године одредили најбољу могућу границу за $n \geq 2$, тј. $C_n(\theta) > -5/6$, а недавно су Алцер (*H. Alzer*) и Квонг (*M. K. Kwong*) [1] проширили овај резултат доказујући да свако $n \geq m-1$ $(m \geq 3)$ важи

$$C_n(\theta) \geq C_m(\pi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k},$$

као и неједнакости Турановог типа

$$-\frac{5}{12} \leq C_{n-1}(\theta) C_{n+1}(\theta) - C_n(\theta)^2 \leq \frac{7}{12}, \qquad n \geq 2.$$

Слично Јунговом тригонометријском полиному, Рогозински (*W. W. Rogosinski*) и Сеге (*G. Szegő*) су разматрали специјални косинусни полином

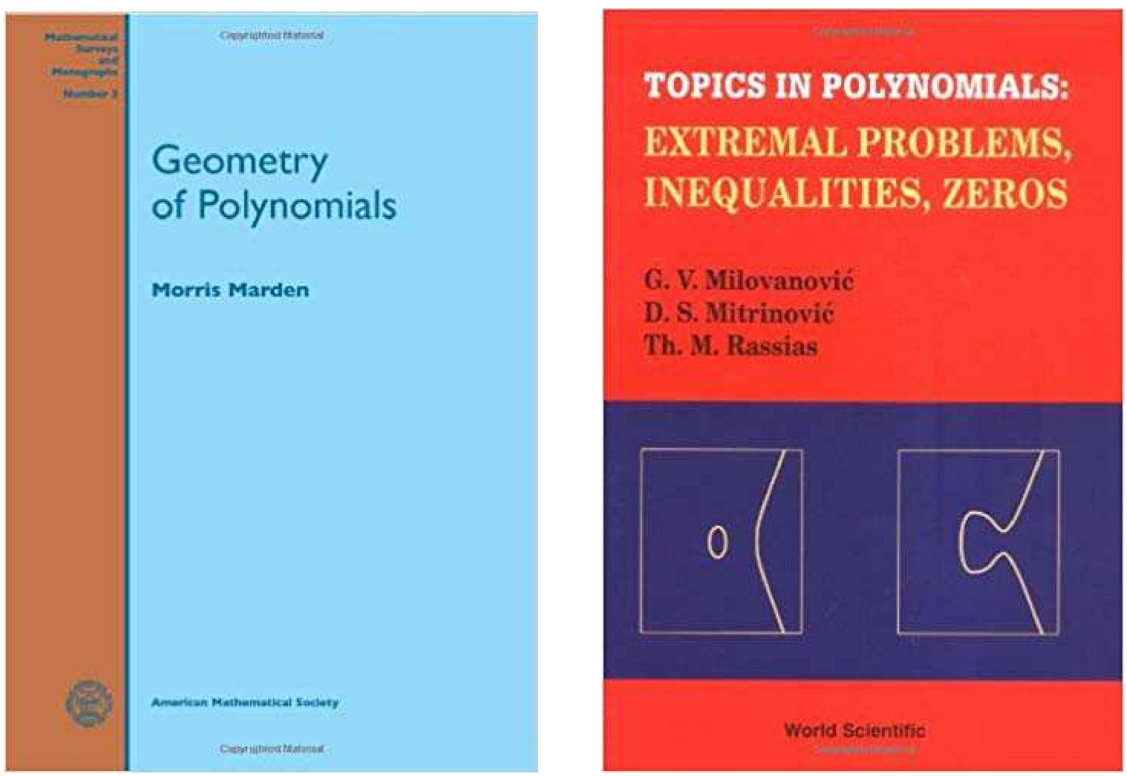
$$C_n^{(1)}(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\cos\theta}{2} + \frac{\cos 2\theta}{3} + \cdots + \frac{\cos n\theta}{n+1},$$

за који су доказали ненегативност за свако реално θ и свако $n \in \mathbb{N}$. Томић [46] је и за овај полином нашао побољшање за свако реално θ и свако $n \geq 2$,

$$C_n^{(1)}(\theta) > K > \frac{1}{168}.$$

На основу Томићеве идеје, константа K се у овој неједнакости може заменити са $1/73$, а за свако $n \geq 4$ може се доказати да је $K > 1/67$, како је наведено у монографији [19] Миловановића, Митриновића и Расиаса из 1994. године под насловом *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, у издању World Scientific.

Драгослав С. Митриновић (1908–1995) био је докторанд Михаила Петровића са тезом „*Истраживања једне важне диференцијалне једначине првог реда*" (1933), а бавио се диференцијалним и функционалним једначинама, неједнакостима, теоријом бројева, специјалним функцијама и комплексном анализом. Његов докторанд је Градимир В. Миловановић са тезом „*О неким функционалним неједнакостима*" (1976). Бави се нумеричком анализом и теоријом апроксимација, а посебно ортогоналним системима, интерполационим и квадратурним процесима, као и екстремалним проблемима, неједнакостима и нулама полинома.



Слика 1. Монографије о полиномима [10] и [19]

Драгољуб Марковић (1903–1965) био је докторанд Михаила Петровића, са тезом под називом „*О границама корена алгебарских једначина*" (1938). Као што се види, његов докторат је баш из области геометрије полинома, а ова област је и остала његово главно поље рада. У својој монографији, Марден у списку референци наводи чак седам Марковићевих радова. У самом тексту експлицитно су дата два Марковићева резултата која ћемо овде навести. У првом раду [11] је дато доње ограничење за модуле нула полинома $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Наиме, нека је дато $t > 0$ и нека је $M = \max\{|a_k| t^k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$. Тада све нуле полинома $p(z)$ леже у области $|z| \geq |a_0| t / (|a_0| + M)$. У другом раду [12] Марковић је одредио диск $|z| \leq Mr$ у коме се налазе све нуле тзв. композитног полинома $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k z^k$. Овде, r је позитивни корен једначине

$$|a_n| z^n = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| z^k,$$

а $M = \max |b_k / b_{k+1}|^{\frac{1}{n-k}}$, $0 \leq k \leq n-1$.

Јован J. Петрић (1930–1997) био је докторанд Марковића, са тезом „*Одређивање нула алгебарских и тригонометријских полинома помоћу репетитивног диференцијалног анализатора и примена на испитивање динамичке стабилности*" (1960). Интересантно је да је трећепотписани аутор овог чланка дипломирао код Петрића са темом „*Метода за симултано налажење нула алгебарских једначина и њена примена на испитивање стабилности система аутоматске регулације и решавање неких диференцијалних, диференцијских и трансцендентних једначина*" (1971), што је на неки начин определило његову усмереност ка полиномима и нумеричкој анализи. Иначе, један итеративни метод за нумеричку факторизацију полинома и симултано налажење његових нула објавио је Славиша Прешић (1933–2008) у радовима [37] и [38]. Прешић је био докторанд Тадије Пејовића, са тезом под називом „*Прилог теорији алгебарских структура*" (1963). Поред алгебре бавио се и логиком, теоријским програмирањем, функционалним једначинама, нумеричком анализом, и геометријом полинома.

Из последње наведене области Прешић је објавио неколико радова од којих се посебно издваја рад [35] из 1970. године, у коме он на елегантан начин доказује резултат из тезе грчког математичара Зервоса (*S. P. Zervos*) [48], који наводимо у даљем тексту. Нека је дат полином $p(x) = x^n - (a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)$, при чему су сви a_k ненегативни, а бар један је позитиван. Нека су $I_1, I_2, \ldots, I_n$ коначни скупови ненегативних бројева $\theta_{i,j} \in I_i$ и нека је $\sum_j \theta_{i,j} = i - t$, где је t фиксни број, $0 < t \leq 1$. Ако дефинишемо функцију

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\prod_j \alpha_i^{\theta_{i,j}}} \right)^{1/t},$$

тада, за произвољне позитивне $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, важи да су све позитивне нуле овог полинома по модулу не веће од ξ, где је $\xi = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\}$.

Варијацијом параметара $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, Зервос је успео да као специјалне случајеве своје теореме добије читав низ познатих резултата чији су аутори Коши (*A.-L. Cauchy*), Ландау, Монтел, Јенсен, Бирхоф (*G. D. Birkhoff*), Марковић, Кармишел (*R. D. Carmichael*), Волш (*J. L. Walsh*), Којима (*M. Kojiima*), итд. Прешић је, међутим, у раду [35] приметио да је услов $p(\alpha) = 0$ еквивалентан са $F(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) = \alpha$. Стога, за позитивне $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, и позитивни корен α полинома $p(x)$, важи следеће: ако је $\alpha \leq \max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, тада теорема Зервоса следи непосредно. У супротном, из чињенице да је $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ опадајућа функција по свим аргументима (ако су позитивни), следује да је $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq F(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) = \alpha$, па према томе теорема Зервоса опет важи. Мала екстензија овог резултата је дата у раду [41]. У раду [36] Прешић даје метод за налажење минималног растојања између нула полинома, под претпоставком да су све нуле различите.

Претходно поменути радови [37] и [38] третирају проблем нумеричке факторизације полинома. Нажалост, прва скраћена верзија [37] се појавила на само две странице на француском језику у општем часопису Француске академије наука, док је комплетна верзија рада [38] штампана на српском језику две године касније (1968), тако да је рад остао незапажен. Такође, постојао је још један хендикеп у презентацији резултата, што је пренаглашен део о $1-1-\cdots-1$ факторизацији, а што ће се касније показати да је то већ познат Вајештрасов (*K. Weierstrass*) резултат из 1903. Иначе, Прешићеви радови садрже доказ опште факторизације. У књизи [18] аутор се осврнуо на варијанту метода, познатог у литератури као Грауов метод (објављен у престижном специјализованом часопису *SIAM J. Numer. Anal.*), уз коментар да је Прешићев приступ факторизацији много елегантнији од Грауовог (*A. A. Grau*), а уз то се појавио пет година раније.

Шефкија Раљевић, са тезом под називом „*О једној класи полинома и распореду њихових нула*" докторирао је под руководством Јована Карамате 1955. године. Занимљиво је поменути да је у свом раду [39] показао да је једна теорема Мардена некоректна у свом исказу.

Богдан Бајшански (1930–2010) био је докторанд Николе Салтикова и Јована Карамате, са тезом под називом „*Општи поступци збирљивости Euler-Borel-овог типа и њихова примена на аналитичко продужење*" (1956). У свом раду [3] дао је једно занимљиво уопштење чувене Гаус-Лукашове теореме за рационалне функције.

Радош Бакић је докторанд Жарка Мијајловића, са тезом „*Семидиректна факторизација коначних група*" (2002). Поред радова из алгебре, објављује радове из комплексних неједнакости и геометрије полинома. Ако за полином $p(z)$ степена n, претпоставимо да круг K (отворени или затворени) садржи његових $n-1$ нула (рачунајући и вишеструкост), при чему се његов центар налази у њиховој аритметичкој средини, Бакић [4] је доказао да се у кругу K мора налазити бар $[(n-1)/2]$ критичних тачака датог полинома.

Жарко Мијајловић је докторанд Славише Прешића, са тезом под називом „*Прилог теорији модела и Булових алгебри*" (1977). Бави се математичком логиком, алгебром, теоријом бројева, комбинаториком, теоријом релативности и гравитационом теоријом, рачунарским наукама, као и проблемима дигитализације научне и културне баштине.

На крају дајемо неколико детаља о претходно поменутој монографији [19], која је у свету позната као *Библија о полиномима.* Монографија садржи најважније резултате из анализе полинома и њихових извода. Поред фундаменталних резултата, књига обезбеђује преглед резултата у области екстремалних проблема за полиноме, као и неједнакости за тригонометријске суме и алгебарске полиноме. Посебна пажња је посвећена хипотези Сендова, као и границама за нуле полинома и њихов број у датој области (видети, такође, радове [21] и [22]). С обзиром на значај, неједнакости повезане са тригонометријским сумама и ортогоналним полиномима се третирају у посебној глави. Напоменимо да је једна од таквих неједнакости,

$$\sum_{k=0}^{n} P_k^{(\alpha,0)}(x) > 0, \qquad -1 < x < 1,$$

где је $P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ Јакобијев полином, ортогоналан на интервалу $(-1,1)$ у односу на тежинску функцију $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, била кључна у доказу познате Бибербахове хипотезе (1916), коју је доказао Луј де Бранж (*L. de Branges*) 1985. године [5]. Иначе, ова неједнакост је партикуларни случај једне опште неједнакости коју су доказали Аски (*R. Askey*) и Гаспер (*G. Gasper*) 1976. године [2] (за детаље видети одељак 4.2.7 у [19] или [20]).

Захвалница. *Рад Г. В. Миловановића је подржан пројектом САНУ* (Ф-96).

Библиографија

[1] H. Alzer, M. K. Kwong. *On Young's inequality.* J. Math. Anal. Appl., 2019, 469, 480–492.

[2] R. Askey, G. Gasper. *Positive Jacobi polynomial sums, II.* Amer. J. Math., 1976, 98(3), 709–737.

[3] B. Bajšanski. *O nulama izvoda racionalne funkcije.* Zbornik radova Mat. inst. SAN, 1955, 43(4), 131–134.

[4] R. Bakić. *On the number of critical points of a polynomial in a disc.* C. R. Acad. Bulgare Sci., 2016, 69, 1249–1250.

[5] L. de Branges. *A proof of the Bieberbach conjecture.* Acta Math., 1985, 154(1–2), 137–152.

[6] R. B. Gardner, N. K. Govil. *Eneström-Kakeya theorem and some of its generalizations.* In: Current topics in pure and computational complex analysis, Trends Math., pp. 171–199, Birkhäuser/Springer, New Delhi, 2014.

[7] J. Karamata. *Sur la limite inférieure des modules des zéros des fonctions analytiques.* Publ. Acad. Roy. Serbe., 1927, 127, 103–117.

[8] J. Karamata, M. Tomić. *Considérations géométriques relatives aux polynômes et séries trigonométriques.* Acad. Serbe. Sci. Publ. Inst. Math., 1948, 2, 157–175.

[9] J. Karamata, M. Tomić. *Sur une inégalité de Kusmin-Landau relative aux sommes trigonométriques et son application à la somme de Gauss.* Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math., 1950, 207–218.

[10] M. Marden. *Geometry of Polynomials.* American Mathematical Society, Providence, R. I., 1966.

[11] D. Marković. *Sur la limmite supériuere des modules des zéros des polynômes.* Publ. Math. Univ. Belgrade 1938, (1939), 6-7, 36–47.

[12] D. Marković. *Sur la quelques limites supériueres des modules des zéros d'un polynome.* Mathematica (Cluj), 1939, 15, 8–11.

[13] D. Marković. *Sur la limite supérieure des modules des racines d'une équation algébrique.* Acad. Serbe. Bull. Acad. Sci. Mat. Nat. A. 1939, (1939), no. 6, 91–97.

[14] D. Marković. *Sur le théorème de Grace.* In: Premier Congrès des Mathématiciens et Physiciens de la R.P.F.Y., 1949. Vol. II, Communications et Exposés Scientifiques, pp. 67–71, Naučna knjiga, Beograd, 1951.

[15] D. Marković. *Extension d'un théorème de Hurwitz.* Bull. Soc. Math. Phys. Serbie, 1949, 1(3-4), 113–115.

[16] D. Marković. *Domaines contenant le zero du plus petit module des polynômes.* Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math., 1950, 3, 197–200.

[17] D. Marković. *On the composite polynomials.* Bull. Soc. Math. Phys. Serbie, 1951, 3(3-4), 11–14.

[18] G. V. Milovanović. *Numerička analiza i teorija aproksimacija – Uvod u numeričke procese i rešavanje jednačina.* Zavod za udžbenike, Beograd, 2014.

[19] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias. *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros.* World Scientific, Singapore – New Jersey – London – Hong Kong, 1994.

[20] G. V. Milovanović, Th. M. Rassias. *Inequalities connected with trigonometric sums.* In: Constantin Carathéodory: an international tribute, Vol. I, II, pp. 875–941, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1991.
[21] G. V. Milovanović, Th. M. Rassias. *Inequalities for polynomial zeros.* In: Survey on classical inequalities, pp. 165–202, Math. Appl., 517, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
[22] G. V. Milovanović, Th. M. Rassias. *Distribution of zeros and inequalities for zeros of algebraic polynomials.* In: Functional equations and inequalities, pp. 171–204, Math. Appl., 518, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
[23] M. Petrović. *Théorème sur le nombre de racines d'une équation algébrique comprises à l'intérieur d'une circonféerence donnee.* Comptes rendus, Paris. 1899, t. CXXIX, 16, 583–586.
[24] M. Petrović. *Transcendentne transformacije algebarskih jednačina.* Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 143, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 29, Zagreb, 1900, str. 107–141.
[25] M. Petrović. *Remarque sur les zéros des séeries de Taylor.* Bulletin de la Sociétè mathématique de France, Paris, 1901, t. XXIX, 303–312.
[26] M. Petrović. *O algebarskim jednačinama i imaginarnim korenima.* Srpska kraljevska akademija, Glas, knj. LXXI, Prvi razred, knj. 28, Beograd, 1906, str. 12–29.
[27] M. Petrović. *O rasporedu korena jedne opšte klase algebarskih jednačina.* Srpska kraljevska akademija, Glas, knj. LXXI, Prvi razred, knj. 28, Beograd, 1906, str. 99–121.
[28] M. Petrović. *Jedna simetrična funkcija korena i njene osobine.* Srpska kraljevska akademija, Glas, knj. LXXV, Prvi razred, knj. 30, Beograd, 1908, str. 75–100.
[29] M. Petrović. *Sur une suite des fonctions rationnelles ratachées aux équations algébriques.* Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1908, t. XXXVI, 141–150.
[30] M. Petrović. *Teorema o maksimalnom modulu determinante i nekolike njene analitičke primene.* Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 200, Razred matematičko--prirodoslovni, knj. 55, Zagreb, 1913, str. 1–18.
[31] M. Petrović. *Equations algébriques et transcendantes dépourvues de racines réelles.* Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1913, t. XLI, 3-4, 194–206.
[32] M. Petrović. *Teorema o algebarskim jednačinama parnog stepena.* Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 202, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 56, Zagreb, 1914, str. 124–131.
[33] M. Petrović. *Théorème général sur les équations algébriques.* Nouvelles annales de mathématiques, Paris, 1919, 4e serie, t. XIX, 9–12, 281–284. Revue sémestrielle, 1927, t. XXXIII (A 3 e).
[34] M. Petrović. *Sur les series de polynomes de meme degre.* Publications mathématiques de l'Universite de Belgrade, Belgrade, 1933, T. II, 82–84.
[35] S. B. Prešić. *Sur un théorème de S. Zervos.* Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.), 1970, 10 (24), 51–52.
[36] S. B. Prešić. *On the minimal distance of the zeros of a polynomial.* Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.), 1985, 38 (52), 35–38.
[37] S. B. Prešić. *Un procédé itératif pour la factorisation des polynòmes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 1966, 262, A862–A863.
[38] S. B. Prešić. *A certain iterative method for the factorization of a polynomial.* Mat. Vesnik, 1968, 5 (20), 205–216.

[39] Š. Raljević. *Sur une droite et sur un segment caractéristique dans les polygones des zéros des polynômes.* Zbornik radova Mat. inst. SAN, 1953, 35(3), 89–94.

[40] Š. Raljević. *Remarque sur un théorème de M. Marden.* Zbornik radova Mat. inst. SAN, 1957, 55(6), 69–72.

[41] M. R. Tasković. *Remark on some results of S. Prešić and S. Zervos.* Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.), 1971, 11 (25), 121–122.

[42] M. Tomić. *Généralisation et démonstration géométrique de certains théorèmes de Fejér et Kakeya.* Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math., 1948, 2, 146–156.

[43] M. Tomić. *O trigonometrijskim zbirovima.* Zbornik radova Mat. inst. SAN, 1952, 18(2), 13–52.

[44] M. Tomić. *Sur les zéros de séries trigonométriques à coefficients monotones.* Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math., 1954, 6, 79–90.

[45] M. Tomić. *Einige Sätze über die Positivität der trigonometrischen Polynome.* Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math., 1952, 4, 145–156.

[46] M. Tomić. *Sur les polynômes de Fejér.* Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math., 1958, 12, 39–52.

[47] D. V. Trifunović. *Letopis života i rada Mihaila Petrovića.* Srpska akademija nauka i umetnosti, Beograd, 1969.

[48] S. P. Zervos. *Aspects modernes de la localisation des zéros des polynomes d'une variable.* Ann. Sci. École Norm. Sup., 1960, (3) 77, 303–410.

Radoš Bakić
Žarko Mijajlović
Gradimir Milovanović

MIHAILO PETROVIĆ AND GEOMETRY OF POLYNOMIALS

S u m m a r y

Works in the field of geometry of polynomials occupy a prominent place in the scientific opus of Mihailo Petrović. He demonstrated interest in this field since his earliest days. His first scientific work, written at the age of 19, relates to one method for determination the roots of a polynomial. Petrović appeared on the international arena at a time when this field began to form as a relatively independent mathematical discipline. During his stay in France, his interest in this field deepened, among other things, and because the French mathematical school has traditionally dealt with these problems. The geometry of polynomials is one of those areas that Petrović founded and started in Serbian mathematics. The paper presents a short history of this area as well as the contribution of Mihailo Petrović and his students until today.