КОМПЈУТЕРСКА ЕРА И РАЗВОЈ НУМЕРИЧКЕ, СИМБОЛИЧКЕ И ЕКСПЕРИМЕНТАЛНЕ МАТЕМАТИКЕ

Градимир В. Миловановић
gvm@mi.sanu.ac.rs

Српска академија наука и уметности, Београд

УНИВЕРЗИТЕТ У ПРИШТИНИ

Природно-математички факултет

Косовска Митровица, 28. фебруар 2024.

Увод – Рађање експерменталне математике

- Не улазећи у прецизну дефиницију **експерименталне математике** и да ли је то посебна грана математике, за потребе овог предавања третираћемо је као **специфичан приступ математици** у коме долазе до изражаја израчунавања (нумеричка и/или симболичка) у циљу:

Увод – Рађање експерменталне математике

- Не улазећи у прецизну дефиницију **експерименталне математике** и да ли је то посебна грана математике, за потребе овог предавања третираћемо је као **специфичан приступ математици** у коме долазе до изражаја израчунавања (нумеричка и/или симболичка) у циљу:

  – истраживања математичких објеката и идентификацију разних особина и релација;

Увод – Рађање експерменталне математике

- Не улазећи у прецизну дефиницију **експерименталне математике** и да ли је то посебна грана математике, за потребе овог предавања третираћемо је као **специфичан приступ математици** у коме долазе до изражаја израчунавања (нумеричка и/или симболичка) у циљу:

  - истраживања математичких објеката и идентификацију разних особина и релација;
  - тестирање (и обарање) постојећих хипотеза;

Увод – Рађање експерменталне математике

- Не улазећи у прецизну дефиницију **експерименталне математике** и да ли је то посебна грана математике, за потребе овог предавања третираћемо је као **специфичан приступ математици** у коме долазе до изражаја израчунавања (нумеричка и/или симболичка) у циљу:
  - истраживања математичких објеката и идентификацију разних особина и релација;
  - тестирање (и обарање) постојећих хипотеза;
  - постављање нових хипотеза;

Увод – Рађање експерменталне математике

- Не улазећи у прецизну дефиницију **експерименталне математике** и да ли је то посебна грана математике, за потребе овог предавања третираћемо је као **специфичан приступ математици** у коме долазе до изражаја израчунавања (нумеричка и/или симболичка) у циљу:
  - истраживања математичких објеката и идентификацију разних особина и релација;
  - тестирање (и обарање) постојећих хипотеза;
  - постављање нових хипотеза;
  - боље сагледавање проблема (визуелизација), као и популаризација математичких метода;

Увод – Рађање експерменталне математике

- Не улазећи у прецизну дефиницију **експерименталне математике** и да ли је то посебна грана математике, за потребе овог предавања третираћемо је као **специфичан приступ математици** у коме долазе до изражаја израчунавања (нумеричка и/или симболичка) у циљу:
  - истраживања математичких објеката и идентификацију разних особина и релација;
  - тестирање (и обарање) постојећих хипотеза;
  - постављање нових хипотеза;
  - боље сагледавање проблема (визуелизација), као и популаризација математичких метода;
  - налажење формалних доказа;

Увод – Рађање експерменталне математике

- Не улазећи у прецизну дефиницију **експерименталне математике** и да ли је то посебна грана математике, за потребе овог предавања третираћемо је као **специфичан приступ математици** у коме долазе до изражаја израчунавања (нумеричка и/или симболичка) у циљу:
  - истраживања математичких објеката и идентификацију разних особина и релација;
  - тестирање (и обарање) постојећих хипотеза;
  - постављање нових хипотеза;
  - боље сагледавање проблема (визуелизација), као и популаризација математичких метода;
  - налажење формалних доказа;
  - супституције компликованих израчунавања у којима се избегавају грешке услед људског фактора;

Увод – Рађање експерменталне математике

- Не улазећи у прецизну дефиницију **експерименталне математике** и да ли је то посебна грана математике, за потребе овог предавања третираћемо је као **специфичан приступ математици** у коме долазе до изражаја израчунавања (нумеричка и/или симболичка) у циљу:

– истраживања математичких објеката и идентификацију разних особина и релација;
– тестирање (и обарање) постојећих хипотеза;
– постављање нових хипотеза;
– боље сагледавање проблема (визуелизација), као и популаризација математичких метода;
– налажење формалних доказа;
– супституције компликованих израчунавања у којима се избегавају грешке услед људског фактора;
– потврда аналитички добијених резултата, итд.

- На неки начин ово је аналогија са оним што се ради у лабораторијама, где су никле **експериментална физика, експериментална хемија, експериментална биологија,** ...

- На неки начин ово је аналогија са оним што се ради у лабораторијама, где су никле **експериментална физика, експериментална хемија, експериментална биологија,** ...
- Развој математике кроз векове се дуго одвијао кроз примере, али од 17. века почиње **апстрактно формулисање** општих резултата, уз навођење примера само као илустрације.

- На неки начин ово је аналогија са оним што се ради у лабораторијама, где су никле **експериментална физика, експериментална хемија, експериментална биологија,** ...
- Развој математике кроз векове се дуго одвијао кроз примере, али од 17. века почиње **апстрактно формулисање** општих резултата, уз навођење примера само као илустрације.
- Појава компјутера у 20. веку омогућила је научницима, посебно математичарима, да се могу упуштати у озбиљна и јако комплексна израчунавања на веома брз начин и са огромном прецизношћу!

- На неки начин ово је аналогија са оним што се ради у лабораторијама, где су никле **експериментална физика, експериментална хемија, експериментална биологија, ...**
- Развој математике кроз векове се дуго одвијао кроз примере, али од 17. века почиње **апстрактно формулисање** општих резултата, уз навођење примера само као илустрације.
- Појава компјутера у 20. веку омогућила је научницима, посебно математичарима, да се могу упуштати у озбиљна и јако комплексна израчунавања на веома брз начин и са огромном прецизношћу!
- Такву могућност нису имали научници у прошлости!

- Нагли развој рачунарске технике после II светског рата условио је брзи и систематски развој, пре свега нумеричке математике, али и многих других области.

- Нагли развој рачунарске технике после II светског рата условио је брзи и систематски развој, пре свега нумеричке математике, али и многих других области.

- Рад који су 1947. године објавили **John von Neumann** (1903–1957) и **Herman H. Goldstine** (1913–2004) под насловом *Numerical inverting of matrices of high order* [Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 1021–1099] узима се као почетак **модерне нумеричке анализе**.

- Нагли развој рачунарске технике после II светског рата условио је брзи и систематски развој, пре свега нумеричке математике, али и многих других области.
- Рад који су 1947. године објавили **John von Neumann** (1903–1957) и **Herman H. Goldstine** (1913–2004) под насловом *Numerical inverting of matrices of high order* [Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 1021–1099] узима се као почетак **модерне нумеричке анализе**.
- 60 година од овог догађаја, организован је симпозијум *The birth of numerical analysis* на Католичком универзитету у Лувену у Белгији (октобар 29–30, 2007), а 2010. године се појавио и Зборник са тог скупа.

- Нагли развој рачунарске технике после II светског рата условио је брзи и систематски развој, пре свега нумеричке математике, али и многих других области.
- Рад који су 1947. године објавили **John von Neumann** (1903–1957) и **Herman H. Goldstine** (1913–2004) под насловом *Numerical inverting of matrices of high order* [Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 1021–1099] узима се као почетак **модерне нумеричке анализе**.
- 60 година од овог догађаја, организован је симпозијум *The birth of numerical analysis* на Католичком универзитету у Лувену у Белгији (октобар 29–30, 2007), а 2010. године се појавио и Зборник са тог скупа.
- Поред свега, **John von Neumann** је радио на развоју првог електронског дигиталног рачунара **ENIAC** и био главни дизајнер рачунара **EDVAC** (Electronic Discrete Variable Automatic Computer).

John von Neumann
(1903–1957)

Herman H. Goldstine
(1913–2004)

Појам великих система једначина

- У матричним израчунавањима појам **великии систем једначина** историјски посматрано се значајно мењао.

Појам великих система једначина

- У матричним израчунавањима појам **великик систем једначина** историјски посматрано се значајно мењао.
- На сваких петнаестак година његова димензија се увећавала 10 пута, почев од педесетих година претходног столећа.

Појам великих система једначина

- У матричним израчунавањима појам **велики систем једначина** историјски посматрано се значајно мењао.
- На сваких петнаестак година његова димензија се увећавала 10 пута, почев од педесетих година претходног столећа.
- Први период је познат по радовима James Hardy Wilkinson-а (1919–1986), када се за такав систем сматрао сваки онај који је имао димензију већу од $n = 20$.

Појам великих система једначина

- У матричним израчунавањима појам **великим систем једначина** историјски посматрано се значајно мењао.
- На сваких петнаестак година његова димензија се увећавала 10 пута, почев од педесетих година претходног столећа.
- Први период је познат по радовима James Hardy Wilkinson-а (1919–1986), када се за такав систем сматрао сваки онај који је имао димензију већу од $n = 20$.
- Појавом књиге George E. Forsythe (1917–1972) и Cleve Barry Moler (1939 –) средином шездесетих година настаје тзв. Форсајт-Молерова ера, када се појам великог система помера на $n = 200$.

Појам великих система једначина

- У матричним израчунавањима појам **велики систем једначина** историјски посматрано се значајно мењао.
- На сваких петнаестак година његова димензија се увећавала 10 пута, почев од педесетих година претходног столећа.
- Први период је познат по радовима James Hardy Wilkinson-а (1919–1986), када се за такав систем сматрао сваки онај који је имао димензију већу од $n = 20$.
- Појавом књиге George E. Forsythe (1917–1972) и Cleve Barry Moler (1939 –) средином шездесетих година настаје тзв. Форсајт-Молерова ера, када се појам великог система помера на $n = 200$.
- Осамдесетих година, појавом пакета LINPACK (касније и пакета EISPACK), димензија се помера на $n = 2000$.

Појам великих система једначина

- У матричним израчунавањима појам **велики систем једначина** историјски посматрано се значајно мењао.
- На сваких петнаестак година његова димензија се увећавала 10 пута, почев од педесетих година претходног столећа.
- Први период је познат по радовима James Hardy Wilkinson-а (1919–1986), када се за такав систем сматрао сваки онај који је имао димензију већу од $n = 20$.
- Појавом књиге George E. Forsythe (1917–1972) и Cleve Barry Moler (1939 –) средином шездесетих година настаје тзв. Форсајт-Молерова ера, када се појам великог система помера на $n = 200$.
- Осамдесетих година, појавом пакета LINPACK (касније и пакета EISPACK), димензија се помера на $n = 2000$.
- Већ средином деведесетих, када се појављује LAPACK (наследник LINPACK и EISPACK пакета), граница постаје $n = 20000$.

James Hardy Wilkinson
(1919–1986)

George E. Forsythe
(1917–1972)

- Дакле, за непуних 50 година димензије матрица са којима једноставно оперишемо повећале су се за фактор 10^3.

- Дакле, за непуних 50 година димензије матрица са којима једноставно оперишемо повећале су се за фактор 10^3.
- Овај импресивни прогрес је, међутим, у великој мери узрокован много већим прогресом који је постигнут у истом периоду у рачунарском хардверу, подизањем брзине са фактором од 10^9 (од секунде до нано секунде по операцији)!

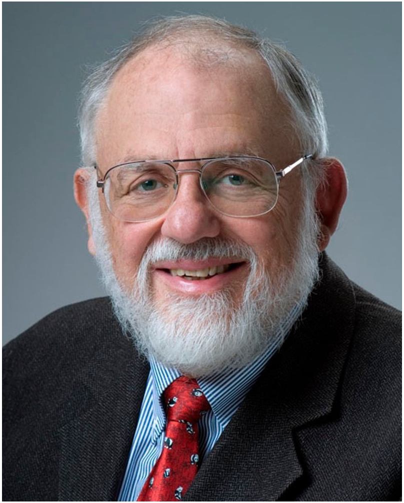
- Дакле, за непуних 50 година димензије матрица са којима једноставно оперишемо повећале су се за фактор 10^3.
- Овај импресивни прогрес је, међутим, у великој мери узрокован много већим прогресом који је постигнут у истом периоду у рачунарском хардверу, подизањем брзине са фактором од 10^9 (од секунде до нано секунде по операцији)!
- Број операција $O(n^3)$ велика препрека.

- Дакле, за непуних 50 година димензије матрица са којима једноставно оперишемо повећале су се за фактор 10^3.
- Овај импресивни прогрес је, међутим, у великој мери узрокован много већим прогресом који је постигнут у истом периоду у рачунарском хардверу, подизањем брзине са фактором од 10^9 (од секунде до нано секунде по операцији)!
- Број операција $O(n^3)$ велика препрека.
- Очигледно је да се методи, код којих је број операција редукован на $O(n^p)$, где је $p < 3$, могу применити на матрице знатно веће димензије.

- Дакле, за непуних 50 година димензије матрица са којима једноставно оперишемо повећале су се за фактор 10^3.
- Овај импресивни прогрес је, међутим, у великој мери узрокован много већим прогресом који је постигнут у истом периоду у рачунарском хардверу, подизањем брзине са фактором од 10^9 (од секунде до нано секунде по операцији)!
- Број операција $O(n^3)$ велика препрека.
- Очигледно је да се методи, код којих је број операција редукован на $O(n^p)$, где је $p < 3$, могу применити на матрице знатно веће димензије.
- За неке класе матрица $O(n^2)$ је постигнуто са итеративним методима.

- Дакле, за непуних 50 година димензије матрица са којима једноставно оперишемо повећале су се за фактор 10^3.
- Овај импресивни прогрес је, међутим, у великој мери узрокован много већим прогресом који је постигнут у истом периоду у рачунарском хардверу, подизањем брзине са фактором од 10^9 (од секунде до нано секунде по операцији)!
- Број операција $O(n^3)$ велика препрека.
- Очигледно је да се методи, код којих је број операција редукован на $O(n^p)$, где је $p < 3$, могу применити на матрице знатно веће димензије.
- За неке класе матрица $O(n^2)$ је постигнуто са итеративним методима.

ПРИМЕНЕ: Парцијалне једначине; атмосферске науке; глобалне мреже; итд.



Cleve Barry Moler (1939 –)

Утемељење нових научних дисциплина

- Нумеричка математика је доживела експанзију, захваљујући многобројним применама у скоро свим областима науке и инжењерства, с једне стране, и бурним развојем рачунарских архитектура, с друге стране.

Утемељење нових научних дисциплина

- Нумеричка математика је доживела експанзију, захваљујући многобројним применама у скоро свим областима науке и инжењерства, с једне стране, и бурним развојем рачунарских архитектура, с друге стране.
- Све је то изазвало и појаву нових праваца истраживања који су се постепено утемељили у посебне научне дисциплине, нпр.

Утемељење нових научних дисциплина

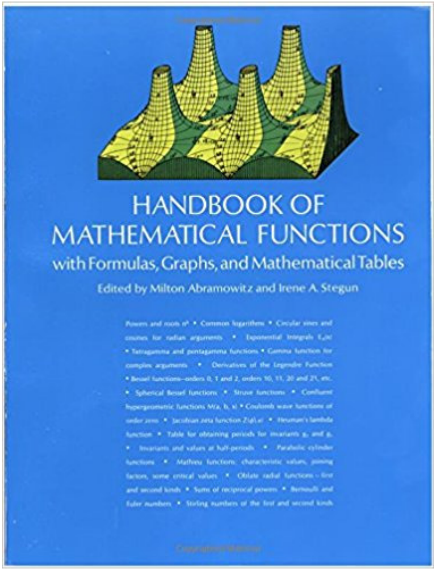
- Нумеричка математика је доживела експанзију, захваљујући многобројним применама у скоро свим областима науке и инжењерства, с једне стране, и бурним развојем рачунарских архитектура, с друге стране.
- Све је то изазвало и појаву нових праваца истраживања који су се постепено утемељили у посебне научне дисциплине, нпр.

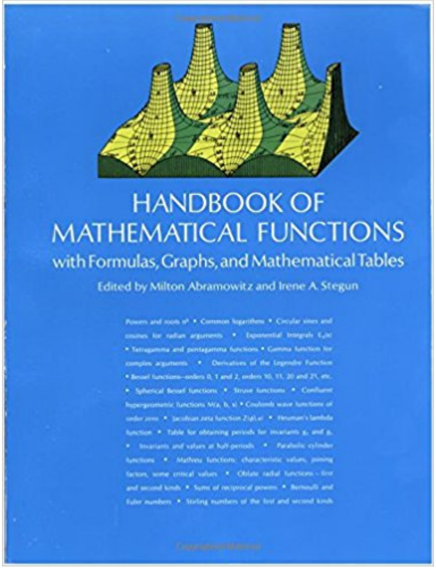
1. **Научна израчунавања (Scientific Computation).** Посебна дисциплина која изучава примену специјалних нумеричких метода у конкретним проблемима који се појављују у науци и инжењерству.

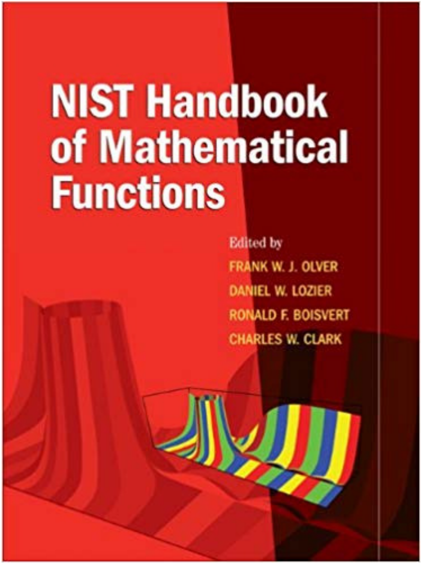
Утемељење нових научних дисциплина

- Нумеричка математика је доживела експанзију, захваљујући многобројним применама у скоро свим областима науке и инжењерства, с једне стране, и бурним развојем рачунарских архитектура, с друге стране.
- Све је то изазвало и појаву нових праваца истраживања који су се постепено утемељили у посебне научне дисциплине, нпр.

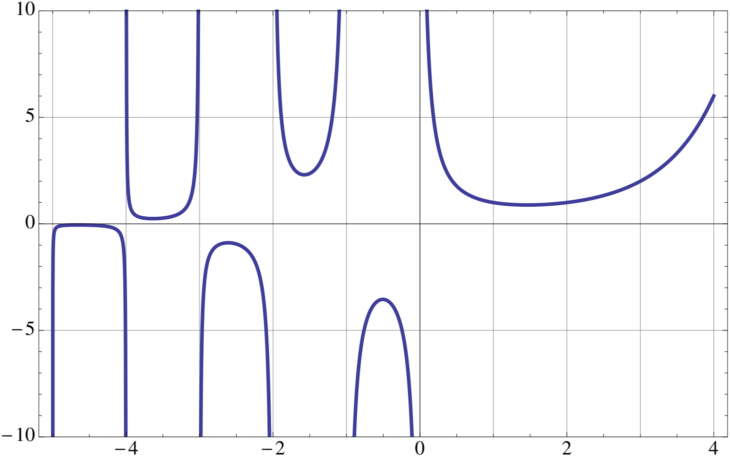
1. **Научна израчунавања (Scientific Computation).** Посебна дисциплина која изучава примену специјалних нумеричких метода у конкретним проблемима који се појављују у науци и инжењерству.
   На пример, ту спадају: нумеричка израчунавања важних констаната, израчунавање елементарних и специјалних функција, решавање једначина, генерисање случајних бројева, развој алгоритама за теорију бројева, брзе трансформације (дискретна Fourier-ова, брза Fourier-ова (FFT), дискретна косинусна трансформација, ...), фрактали, алгоритами за обраду сигнала, итд.


HANDBOOK OF
MATHEMATICAL FUNCTIONS
with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables
Edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun


HANDBOOK OF
MATHEMATICAL FUNCTIONS
with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables
Edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun

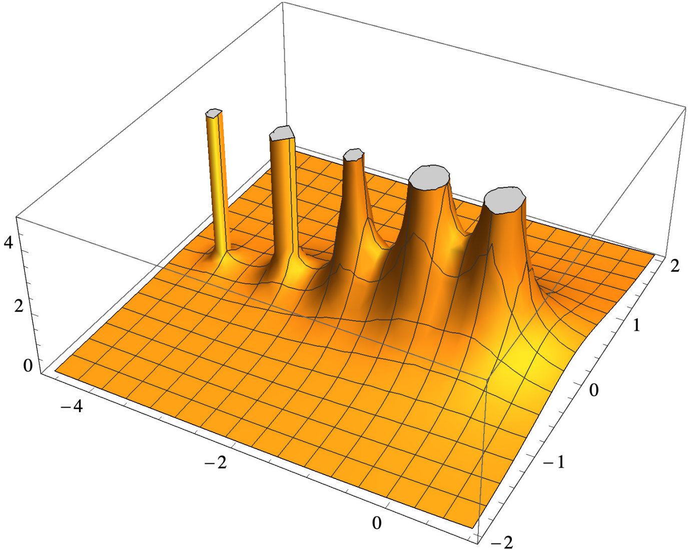

NIST Handbook
of Mathematical
Functions
Edited by
FRANK W. J. OLVER
DANIEL W. LOZIER
RONALD F. BOISVERT
CHARLES W. CLARK

Гама функција $z \mapsto \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$ за реално $z \in [-5, 1]$



- Полови у тачкама $z = 0, -1, -2, \ldots$.

3D-график функције $(x, y) \mapsto |\Gamma(x + \mathrm{i}y)|$ за $(x, y) \in [-4, 1] \times [-2, 2]$



- **Riemann-ова-зета функција** $s \mapsto \zeta(s)$ је најважнија функција у **Теорији бројева**.

- **Riemann-ова-зета функција** $s \mapsto \zeta(s)$ је најважнија функција у **Теорији бројева**.
- $\zeta(s)$ даје везу са **расподелом простих бројева** (Euler-ов идентитет – Основна теорема аритметике)

- **Riemann-ова-зета функција** $s \mapsto \zeta(s)$ је најважнија функција у **Теорији бројева**.
- $\zeta(s)$ даје везу са **расподелом простих бројева** (Euler-ов идентитет – Основна теорема аритметике)
- Дефиниција за $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \prod_{p \text{ прост број}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

- **Riemann-ова-зета функција** $s \mapsto \zeta(s)$ је најважнија функција у **Теорији бројева**.

- $\zeta(s)$ даје везу са **расподелом простих бројева** (Euler-ов идентитет – Основна теорема аритметике)
- Дефиниција за $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \prod_{p \text{ прост број}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

- Интегрална репрезентација $\zeta(s) = \dfrac{1}{\Gamma(s)} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x - 1}\, \mathrm{d}x.$

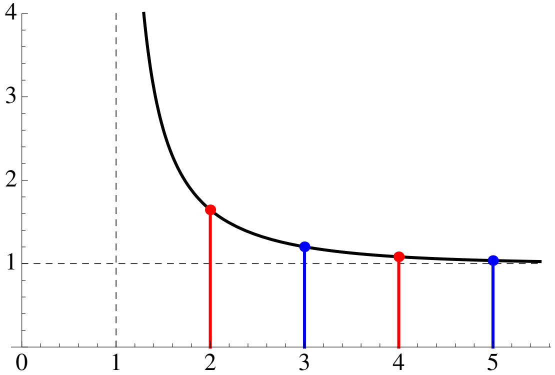
- **Riemann-ова-зета функција** $s \mapsto \zeta(s)$ је најважнија функција у **Теорији бројева**.
- $\zeta(s)$ даје везу са **расподелом простих бројева** (Euler-ов идентитет – Основна теорема аритметике)
- Дефиниција за $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \prod_{p \text{ прост број}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

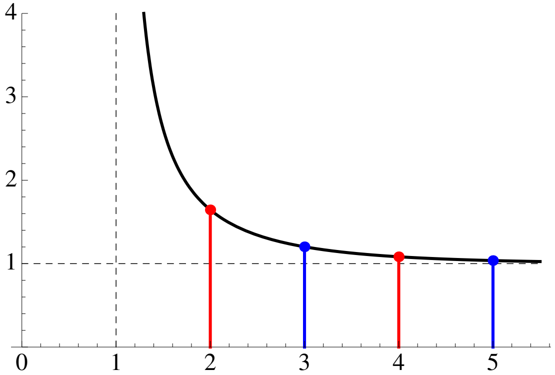
- Интегрална репрезентација $\zeta(s) = \dfrac{1}{\Gamma(s)} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x.$
- За $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ аналитичко продужење помоћу функционалне једначине

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

- **Leonhard Euler** (1707–1783) је разматрао функцију за реално $s > 1$ и одредио $\zeta(2k)$, $k \geq 1$.



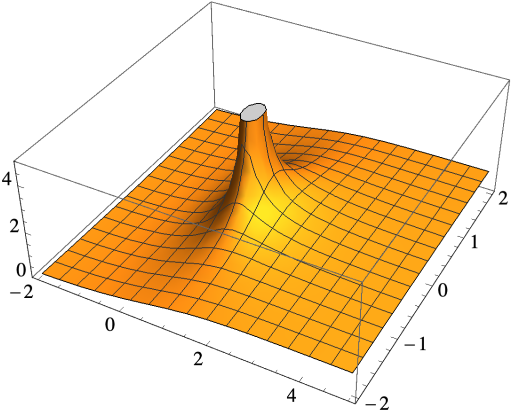
- **Leonhard Euler** (1707–1783) је разматрао функцију за реално $s > 1$ и одредио $\zeta(2k)$, $k \geq 1$.



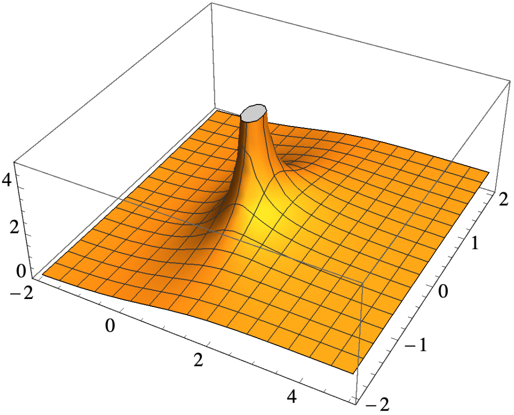
$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \ldots$$

- **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826–1866) је проширио $\zeta(s)$ на комплексну раван.

- **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826–1866) је проширио $\zeta(s)$ на комплексну раван.
- Апсолутна вредност Riemann-ове функције $s \mapsto |\zeta(s)|$



- **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826–1866) је проширио $\zeta(s)$ на комплексну раван.
- Апсолутна вредност Riemann-ове функције $s \mapsto |\zeta(s)|$



- Једини сингуларитет (пол) је у тачки $s = 1$

- $\zeta(s)$ има (тривијалне) нуле за $s = -2, -4, -6, \ldots$

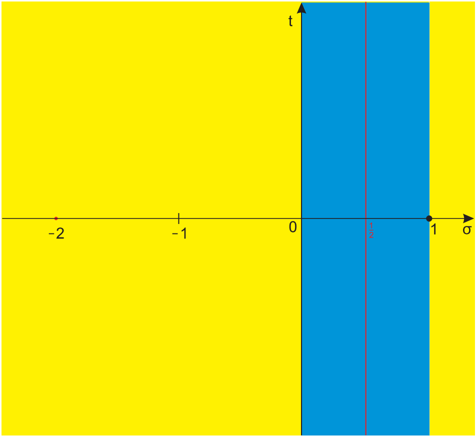
- $\zeta(s)$ има (тривијалне) нуле за $s = -2, -4, -6, \ldots$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

- $\zeta(s)$ има (тривијалне) нуле за $s = -2, -4, -6, \ldots$

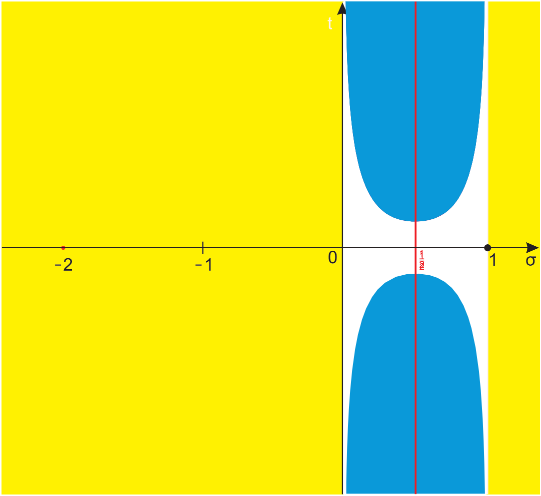
$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

- Комплексне (нетривијалне) нуле се налазе у траци



- Нетриваијалне нуле се могу додатно локализовати!

- Нетриваијалне нуле се могу додатно локализовати!



- Положаји нетривијалних нула $\zeta(s)$ контролишу расподелу простих бројева!

- Положаји нетривијалних нула $\zeta(s)$ контролишу расподелу простих бројева!
- **Riemann-ова хипотеза (RH) (1859):**

- Положаји нетривијалних нула $\zeta(s)$ контролишу расподелу простих бројева!
- **Riemann-ова хипотеза (RH) (1859):**

  Нетривијалне нуле функције $\zeta(s)$ леже на критичној правој чији је реални део једнак $1/2$.

- Положаји нетривијалних нула $\zeta(s)$ контролишу расподелу простих бројева!
- **Riemann-ова хипотеза (RH) (1859):**

  Нетривијалне нуле функције $\zeta(s)$ леже на критичној правој чији је реални део једнак $1/2$.
- **Clay Mathematics Institute (CMI)** је 2000. објавио 7 Millennium Prize Problems, међу којима је **RH** најзначајнији!

- Положаји нетривијалних нула $\zeta(s)$ контролишу расподелу простих бројева!
- **Riemann-ова хипотеза (RH) (1859):**

  Нетривијалне нуле функције $\zeta(s)$ леже на критичној правој чији је реални део једнак $1/2$.
- **Clay Mathematics Institute (CMI)** је 2000. објавио 7 Millennium Prize Problems, међу којима је **RH** најзначајнији!
- За коректно решење сваког проблема награда **US\$ 1.000.000**.

- Положаји нетривијалних нула $\zeta(s)$ контролишу расподелу простих бројева!
- **Riemann-ова хипотеза (RH) (1859):**

  Нетривијалне нуле функције $\zeta(s)$ леже на критичној правој чији је реални део једнак $1/2$.
- **Clay Mathematics Institute (CMI)** је 2000. објавио 7 Millennium Prize Problems, међу којима је **RH** најзначајнији!
- За коректно решење сваког проблема награда **US$ 1.000.000**.
- **Poincaré-ову хипотезу** је доказао **Григориј Перељман** (рођен 1966). 2006. је одбио да прими **Fields-ову медаљу** на Светском Конгресу у Мадриду, а 2010. и миленијумску награду!

- Положаји нетривијалних нула $\zeta(s)$ контролишу расподелу простих бројева!
- **Riemann-ова хипотеза (RH) (1859):**

  Нетривијалне нуле функције $\zeta(s)$ леже на критичној правој чији је реални део једнак $1/2$.
- **Clay Mathematics Institute (CMI)** је 2000. објавио 7 Millennium Prize Problems, међу којима је **RH** најзначајнији!
- За коректно решење сваког проблема награда **US$ 1.000.000**.
- **Poincaré-ову хипотезу** је доказао **Григориј Перељман** (рођен 1966). 2006. је одбио да прими **Fields-ову медаљу** на Светском Конгресу у Мадриду, а 2010. и миленијумску награду!
- **RH** је нумерички потврђена за више десетина билиона првих нула!
- **David Hilbert** (1862–1943) једном је изјаво: *Ако ме за 1000 година неко пробуди из мртвих, моје прво питање ће бити – да ли је доказана RH?*

График функције $y \mapsto |\zeta(x+\mathrm{i}y)|$ за $y \in [-10, 60]$ и $x = 3/2$

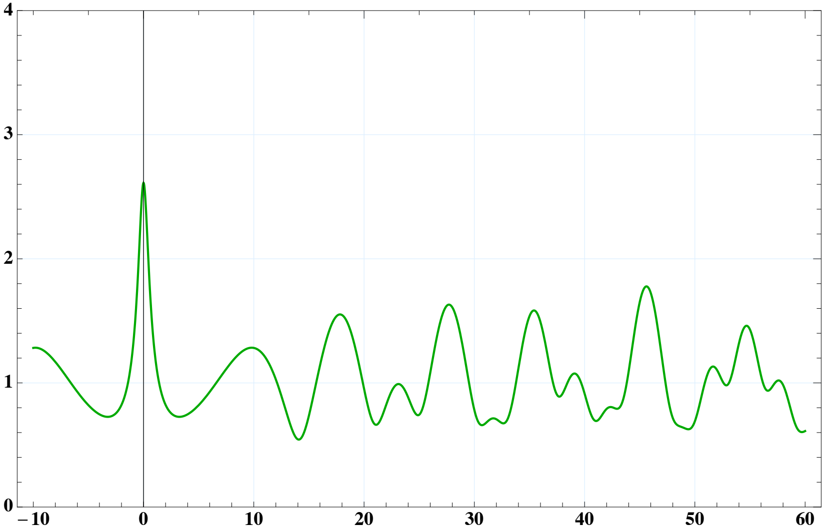


График функције $y \mapsto |\zeta(x + \mathrm{i}y)|$ за $y \in [-10, 60]$ и $x = 1$

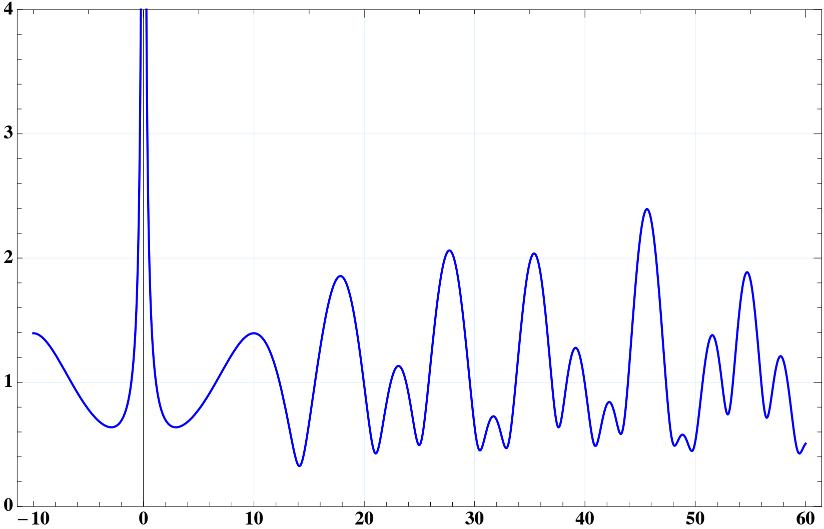


График функције $y \mapsto |\zeta(x+\mathrm{i}y)|$ за $y \in [-10, 60]$ и $x = 1/2$

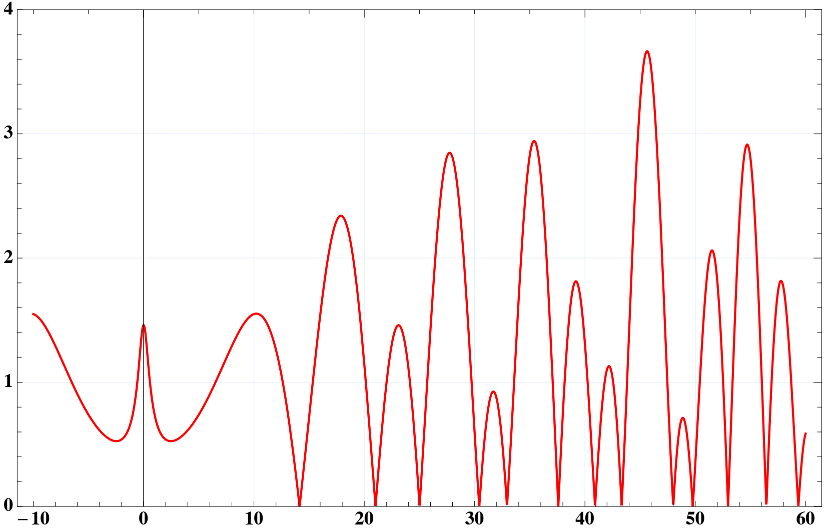


График функције $y \mapsto |\zeta(x + \mathrm{i}y)|$ за $y \in [-10, 60]$ и $x = 3/2,\ 1,\ 1/2$

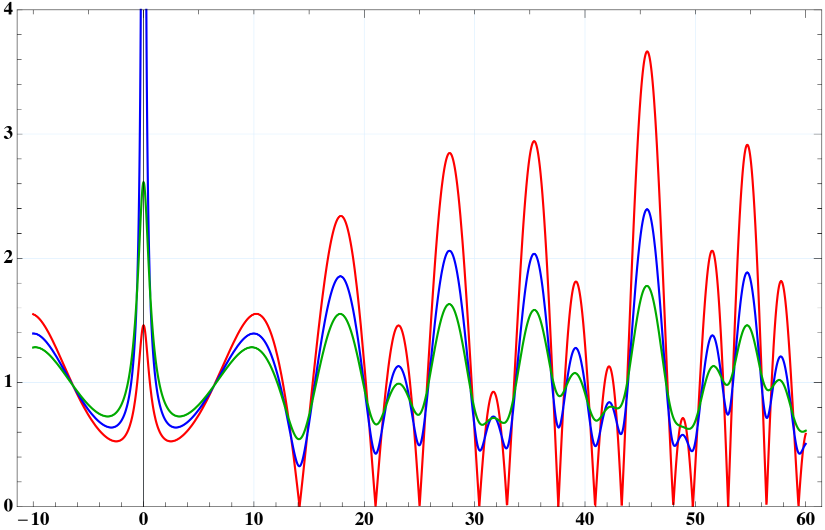


График Hardy-јеве функције $y \mapsto Z(y)$ за $y \in [0, 60]$

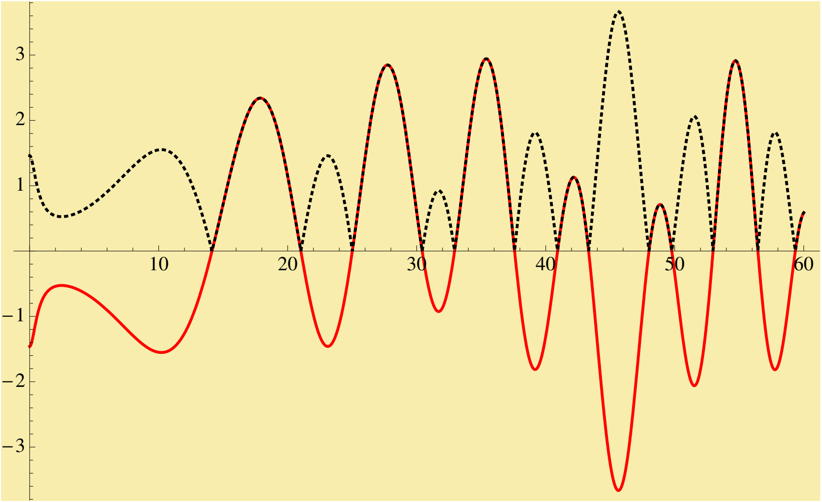
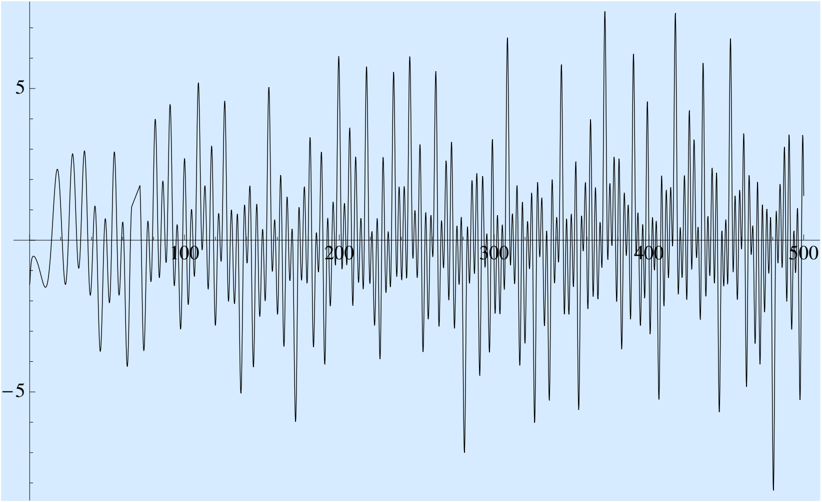
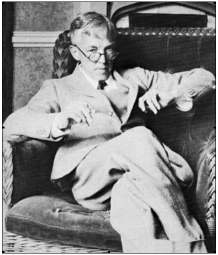


График Hardy-јеве функције $y \mapsto Z(y)$ за $y \in [0, 500]$





L. Euler (1707-1783) C.F. Gauss (1777-1855) G.F.B. Riemann (1826-1866)

D. Hilbert (1862-1943) G.H. Hardy (1877-1947)

2. **Обрада сигнала (Signal Processing).** Обухвата аналогну и дигиталну обраду свих врста сигнала који се појављују у реалном свету, укључујући синтезу сигнала, детекцију, моделирање, корелацију и спектралну анализу сигнала, конструкцију и примену одговарајућих филтара, итд.

2. **Обрада сигнала (Signal Processing).** Обухвата аналогну и дигиталну обраду свих врста сигнала који се појављују у реалном свету, укључујући синтезу сигнала, детекцију, моделирање, корелацију и спектралну анализу сигнала, конструкцију и примену одговарајућих филтара, итд.

- Посебно важан део је онај који се односи на компресију података било да се ради о звучним сигналима или сликама.

2. **Обрада сигнала (Signal Processing).** Обухвата аналогну и дигиталну обраду свих врста сигнала који се појављују у реалном свету, укључујући синтезу сигнала, детекцију, моделирање, корелацију и спектралну анализу сигнала, конструкцију и примену одговарајућих филтара, итд.

- Посебно важан део је онај који се односи на компресију података било да се ради о звучним сигналима или сликама.

3. **Теорија комплексности (Complexity Theory)**, а посебно **теорија комплексности израчунавања** обезбеђује оквир за разумевање цене решавања проблема, мерене захтевима за ресурсима какви су време и меморијски простор.

2. **Обрада сигнала (Signal Processing).** Обухвата аналогну и дигиталну обраду свих врста сигнала који се појављују у реалном свету, укључујући синтезу сигнала, детекцију, моделирање, корелацију и спектралну анализу сигнала, конструкцију и примену одговарајућих филтара, итд.

- Посебно важан део је онај који се односи на компресију података било да се ради о звучним сигналима или сликама.

3. **Теорија комплексности (Complexity Theory)**, а посебно **теорија комплексности израчунавања** обезбеђује оквир за разумевање цене решавања проблема, мерене захтевима за ресурсима какви су време и меморијски простор.

- Главни приступ у теорији комплексности је разматрање алгоритама који делују на коначне низове симбола из једног коначног алфабета (азбуке).

- Низови могу представљати најразличитије дискретне објекте попут целих бројева или алгебарских израза, али не и реалне (или комплексне) бројеве, осим ако они нису заокругљени на приближне вредности из једног дискретног скупа.

- Низови могу представљати најразличитије дискретне објекте попут целих бројева или алгебарских израза, али не и реалне (или комплексне) бројеве, осим ако они нису заокругљени на приближне вредности из једног дискретног скупа.
- Главни задатак ове теорије је да се одреди број (рачунских) корака неопходних за решавање проблема у функцији дужине улазног низа. У вези са овим, теорија комплексности групише проблеме у тзв. **класе комплексности** и разматра њихов однос.

- Низови могу представљати најразличитије дискретне објекте попут целих бројева или алгебарских израза, али не и реалне (или комплексне) бројеве, осим ако они нису заокругљени на приближне вредности из једног дискретног скупа.
- Главни задатак ове теорије је да се одреди број (рачунских) корака неопходних за решавање проблема у функцији дужине улазног низа. У вези са овим, теорија комплексности групише проблеме у тзв. **класе комплексности** и разматра њихов однос.
- На пример, **класу** $\mathbf{P}$ чине они проблеми који се могу решити у полиномијалном времену, тј. број корака неопходних за њихово решавање је ограничен полиномијалном функцијом дужине улазног низа, док је $\mathbf{NP}$ **класа** проблема чија се решења могу проверити (верификовати) у полиномиалном времену.

- Низови могу представљати најразличитије дискретне објекте попут целих бројева или алгебарских израза, али не и реалне (или комплексне) бројеве, осим ако они нису заокругљени на приближне вредности из једног дискретног скупа.
- Главни задатак ове теорије је да се одреди број (рачунских) корака неопходних за решавање проблема у функцији дужине улазног низа. У вези са овим, теорија комплексности групише проблеме у тзв. **класе комплексности** и разматра њихов однос.
- На пример, **класу** $\mathbf{P}$ чине они проблеми који се могу решити у полиномијалном времену, тј. број корака неопходних за њихово решавање је ограничен полиномијалном функцијом дужине улазног низа, док је $\mathbf{NP}$ **класа** проблема чија се решења могу проверити (верификовати) у полиномиалном времену.
- У новије време третирају се класе комплексности и над пољем реалних бројева.

4. **Геометријско моделирање** **(Computer Added Geometric Design (CAGD))** је дисциплина која проучава методе конструисања геометријских и природних форми средствима рачунарске графике.

4. **Геометријско моделирање** **(Computer Added Geometric Design (CAGD))** је дисциплина која проучава методе конструисања геометријских и природних форми средствима рачунарске графике.

- У позадини сложених графичких алгоритама стоје софистицирани нумерички приступи, неопходни у процесу оптимизације алгоритамских токова и избора најбољих модела.

4. **Геометријско моделирање** (**Computer Added Geometric Design (CAGD)**) је дисциплина која проучава методе конструисања геометријских и природних форми средствима рачунарске графике.

- У позадини сложених графичких алгоритама стоје софистицирани нумерички приступи, неопходни у процесу оптимизације алгоритамских токова и избора најбољих модела.
- У свему томе водич и инспирација је **природа** и њене творевине од којих неке интересантне примере можемо видети на следећој слици, преузетој из чланка:

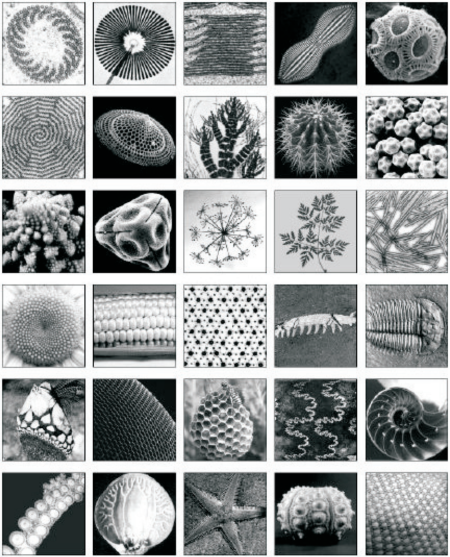
  S. Wolfram, *The Future of Computation*, The Mathematica Journal **10** (2) (2006), 329–362.

4. **Геометријско моделирање** (Computer Added Geometric Design (CAGD)) је дисциплина која проучава методе конструисања геометријских и природних форми средствима рачунарске графике.

- У позадини сложених графичких алгоритама стоје софистицирани нумерички приступи, неопходни у процесу оптимизације алгоритамских токова и избора најбољих модела.
- У свему томе водич и инспирација је **природа** и њене творевине од којих неке интересантне примере можемо видети на следећој слици, преузетој из чланка:

  S. Wolfram, *The Future of Computation*, The Mathematica Journal **10** (2) (2006), 329–362.
- Било да су живе или неживе структуре, оне фасцинирају својом рационалном геометријом којој у основи стоји хијерархија самосличности и веома сложени итеративни процеси.

Примери биолошког света



ICM 2014, Seoul (GVM & St. Wolfram)

5. **Симболичка израчунавања** (Symbolic Computation) се данас, такође, издвајају у посебну дисциплину.

5. **Симболичка израчунавања** (Symbolic Computation) се данас, такође, издвајају у посебну дисциплину.

- Она се често називају и компјутерска алгебра, алгебарска израчунавања, итд.

5. **Символичка израчунавања** (Symbolic Computation) се данас, такође, издвајају у посебну дисциплину.

- Она се често називају и компјутерска алгебра, алгебарска израчунавања, итд.
- За разлику од нумеричких израчунавања која се реализују у тзв. аритметици коначне дужине, символичка израчунавања се изводе са бројевима, символима, изразима и формулама на егзактан начин.

5. Симболичка израчунавања (Symbolic Computation) се данас, такође, издвајају у посебну дисциплину.

- Она се често називају и компјутерска алгебра, алгебарска израчунавања, итд.
- За разлику од нумеричких израчунавања која се реализују у тзв. аритметици коначне дужине, симболичка израчунавања се изводе са бројевима, симболима, изразима и формулама на егзактан начин.
- Она су настала као резултат тежње да се са нумеричких израчунавања крене ка апстрактим израчунавањима, што је омогућено развојем вештачке интелигенције и нових програмских језика, попут језика LISP и његових усавршених наследника.

5. **Симболичка израчунавања** (Symbolic Computation) се данас, такође, издвајају у посебну дисциплину.

- Она се често називају и компјутерска алгебра, алгебарска израчунавања, итд.
- За разлику од нумеричких израчунавања која се реализују у тзв. аритметици коначне дужине, симболичка израчунавања се изводе са бројевима, симболима, изразима и формулама на егзактан начин.
- Она су настала као резултат тежње да се са нумеричких израчунавања крене ка апстрактим израчунавањима, што је омогућено развојем вештачке интелигенције и нових програмских језика, попут језика LISP и његових усавршених наследника.
- Данас су за симболичка израчунавања најпопуларнији и широко распрострањени интерактивни пакети MAPLE, MACSYMA, MATLAB и Mathematica, који се, наравно, могу користити и за нумеричка израчунавања, као и за графичке презентације.

MATLAB је развијен у компанији MathWorks, чији је један од оснивача **Cleve Moler**, познати амерички математичар, програмер и експерт у нумеричкој анализи.

MATLAB је развијен у компанији MathWorks, чији је један од оснивача **Cleve Moler**, познати амерички математичар, програмер и експерт у нумеричкој анализи.

– **Moler** је један од аутора у развоју FORTRAN програмских пакета за линеарну алгебру LINPACK и EISPACK и креатор програмског система MATLAB, који је прилагођен за рад са матрицама као основним елементима у израчунавањима.

MATLAB је развијен у компанији MathWorks, чији је један од оснивача **Cleve Moler**, познати амерички математичар, програмер и експерт у нумеричкој анализи.

– **Moler** је један од аутора у развоју FORTRAN програмских пакета за линеарну алгебру LINPACK и EISPACK и креатор програмског система MATLAB, који је прилагођен за рад са матрицама као основним елементима у израчунавањима.

– Назив **MATLAB** долази од енглеских речи “**mat**rix **lab**oratory”.

MATLAB је развијен у компанији MathWorks, чији је један од оснивача **Cleve Moler**, познати амерички математичар, програмер и експерт у нумеричкој анализи.

– **Moler** је један од аутора у развоју FORTRAN програмских пакета за линеарну алгебру LINPACK и EISPACK и креатор програмског система MATLAB, који је прилагођен за рад са матрицама као основним елементима у израчунавањима.

– Назив **MATLAB** долази од енглеских речи " **mat**rix **lab**oratory".

– Прва верзија се појавила **1984.** године, а сада је актуелна верзија R2023b за све оперативне системе.

Mathematica је развијена у софтверској компанији Wolfram Research.

Mathematica је развијена у софтверској компанији Wolfram Research.

– Прва верзија се појавила **1988.** године, а **1989.** верзија Mathematica 2.0 за DOS оперативни систем. Верзија Mathematica 2.2 развијена је за Windows 3.11.

Mathematica је развијена у софтверској компанији Wolfram Research.

– Прва верзија се појавила **1988.** године, а **1989.** верзија Mathematica 2.0 за DOS оперативни систем. Верзија Mathematica 2.2 развијена је за Windows 3.11.

– Актуелна верзија 14.0, која се појавила у јануару **2024.** године, развијена је за све оперативне системе.

Mathematica је развијена у софтверској компанији Wolfram Research.

– Прва верзија се појавила **1988.** године, а **1989.** верзија Mathematica 2.0 за DOS оперативни систем. Верзија Mathematica 2.2 развијена је за Windows 3.11.

– Актуелна верзија 14.0, која се појавила у јануару **2024.** године, развијена је за све оперативне системе.

– Комбиновање нумеричких и симболичких израчунавања веома је корисно у многим применама.

Mathematica је развијена у софтверској компанији Wolfram Research.

– Прва верзија се појавила **1988.** године, а **1989.** верзија Mathematica 2.0 за DOS оперативни систем. Верзија Mathematica 2.2 развијена је за Windows 3.11.

– Актуелна верзија 14.0, која се појавила у јануару **2024.** године, развијена је за све оперативне системе.

– Комбиновање нумеричких и симболичких израчунавања веома је корисно у многим применама.

– За нумеричка израчунавања посебно су интересантне тзв. аритметике вишеструке тачности (multi-precision arithmetics)

Mathematica је развијена у софтверској компанији Wolfram Research.

– Прва верзија се појавила **1988.** године, а **1989.** верзија Mathematica 2.0 за DOS оперативни систем. Верзија Mathematica 2.2 развијена је за Windows 3.11.

– Актуелна верзија 14.0, која се појавила у јануару **2024.** године, развијена је за све оперативне системе.

– Комбиновање нумеричких и симболичких израчунавања веома је корисно у многим применама.

– За нумеричка израчунавања посебно су интересантне тзв. аритметике вишеструке тачности (multi-precision arithmetics)

– **Mathematica** такође пружа изванредне графичке могућности!

Пример провере једне хипотезе

Пример провере једне хипотезе

- У часопису *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, **45** (1913/14), стр. 350, **Srinivasa Ramanujan** (1887 – 1920), познати индијски математичар, је поставио хипотезу да је $e^{\pi\sqrt{163}}$ цео број.

Пример провере једне хипотезе

- У часопису *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, **45** (1913/14), стр. 350, **Srinivasa Ramanujan** (1887 – 1920), познати индијски математичар, је поставио хипотезу да је $e^{\pi\sqrt{163}}$ цео број.

- Он је радећи "ручно", нашао да је

$$e^{\pi\sqrt{163}} \cong 262\,53741\,26407\,68743.99999\,99999\,99.$$

Како његов метод није омогућавао добијање следеће децимале, он је претпоставио да се цифра 9 стално понавља, и да је онда

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,53741\,26407\,68744.$$

Пример провере једне хипотезе

- У часопису *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, **45** (1913/14), стр. 350, **Srinivasa Ramanujan** (1887 – 1920), познати индијски математичар, је поставио хипотезу да је $e^{\pi\sqrt{163}}$ цео број.
- Он је радећи "ручно", нашао да је

$$e^{\pi\sqrt{163}} \cong 262\,53741\,26407\,68743.99999\,99999\,99.$$

Како његов метод није омогућавао добијање следеће децимале, он је претпоставио да се цифра 9 стално понавља, и да је онда

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,53741\,26407\,68744.$$

- Програмским пакетом **Mathematica** једноставно добијамо

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,53741\,26407\,68743.99999\,99999\,99250\,07259\,71981\,\ldots$$

што казује да је хипотеза **Ramanujan**-а била погрешна.

6. **Обрада текста** **(Text Processing)** је данас област без које се не може замислити било која делатност.

6. **Обрада текста** **(Text Processing)** је данас област без које се не може замислити било која делатност.

- Током седамдесетих и осамдесетих година прошлога века интензивно се почело са развојем алгоритама и конструкцијом тзв. *текст процесора* за обраду свих врста текстова, укључујући и математички слог.

6. **Обрада текста** **(Text Processing)** је данас област без које се не може замислити било која делатност.

- Током седамдесетих и осамдесетих година прошлога века интензивно се почело са развојем алгоритама и конструкцијом тзв. *текст процесора* за обраду свих врста текстова, укључујући и математички слог.
- За математичке текстове главни допринос је учинио **Donald Ervin Knuth** (1938 –), развојем система TEX. **Knuth** је професор емеритус на Станфорд универзитету (САД) и данас најпознатије име у области информатике и рачунарства.

6. **Обрада текста** **(Text Processing)** је данас област без које се не може замислити било која делатност.

- Током седамдесетих и осамдесетих година прошлога века интензивно се почело са развојем алгоритама и конструкцијом тзв. *текст процесора* за обраду свих врста текстова, укључујући и математички слог.
- За математичке текстове главни допринос је учинио **Donald Ervin Knuth** (1938 –), развојем система TEX. **Knuth** је професор емеритус на Станфорд универзитету (САД) и данас најпознатије име у области информатике и рачунарства.
- Поред огромног доприноса у математичком заснивању алгоритама, због чега је познат као “отац алгоритама”, **Knuth** је развио софтверске системе познате као TEX и METAFONT, који су променили технологију штампања математичких и других публикација, али и начин комуникације међу научницима.

6. **Обрада текста** **(Text Processing)** је данас област без које се не може замислити било која делатност.

- Током седамдесетих и осамдесетих година прошлога века интензивно се почело са развојем алгоритама и конструкцијом тзв. *текст процесора* за обраду свих врста текстова, укључујући и математички слог.
- За математичке текстове главни допринос је учинио **Donald Ervin Knuth** (1938 –), развојем система TeX. **Knuth** је професор емеритус на Станфорд универзитету (САД) и данас најпознатије име у области информатике и рачунарства.
- Поред огромног доприноса у математичком заснивању алгоритама, због чега је познат као "отац алгоритама", **Knuth** је развио софтверске системе познате као TeX и METAFONT, који су променили технологију штампања математичких и других публикација, али и начин комуникације међу научницима.
- LaTeX, као макро пакет, чије су команде дефинисане низом TeX команди, данас је постао стандард у математичкој комуникацији.

Donald Ervin Knuth (1938 –)

Прогрес у експерименталној математици

Почетком **1996.** године појављује се интересантна књига:

Прогрес у експерименталној математици

Почетком **1996.** године појављује се интересантна књига:

Marko Petkovsek, Herbert S. Wilf, Doron Zeilberger,
$A = B$, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1996.

Прогрес у експерименталној математици

Почетком **1996.** године појављује се интересантна књига:

Marko Petkovsek, Herbert S. Wilf, Doron Zeilberger,
$A = B$, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1996.

- Предговор је написао **Donald Knuth**.

Прогрес у експерименталној математици

Почетком **1996.** године појављује се интересантна књига:

Marko Petkovsek, Herbert S. Wilf, Doron Zeilberger,
$A = B$, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1996.

- Предговор је написао **Donald Knuth**.
- Књига садржи методе за анализу комплексних сумирања хипергеометријског типа, укључујући више основних алгоритама, као што су:

Прогрес у експерименталној математици

Почетком **1996.** године појављује се интересантна књига:

Marko Petkovsek, Herbert S. Wilf, Doron Zeilberger,
$A = B$, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1996.

- Предговор је написао **Donald Knuth**.
- Књига садржи методе за анализу комплексних сумирања хипергеометријског типа, укључујући више основних алгоритама, као што су:

  – **општи алгоритам сестре Celine**,

Прогрес у експерименталној математици

Почетком **1996.** године појављује се интересантна књига:

Marko Petkovsek, Herbert S. Wilf, Doron Zeilberger,
$A = B$, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1996.

- Предговор је написао **Donald Knuth**.
- Књига садржи методе за анализу комплексних сумирања хипергеометријског типа, укључујући више основних алгоритама, као што су:

– **општи алгоритам сестре Celine**,

– **Gosper-ов алгоритам**,

Прогрес у експерименталној математици

Почетком **1996.** године појављује се интересантна књига:

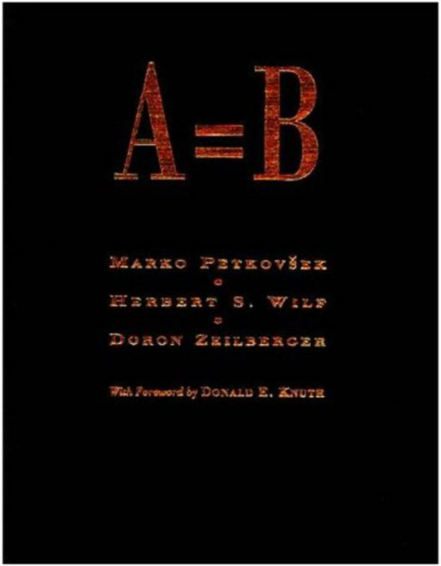
Marko Petkovsek, Herbert S. Wilf, Doron Zeilberger, $A = B$, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1996.

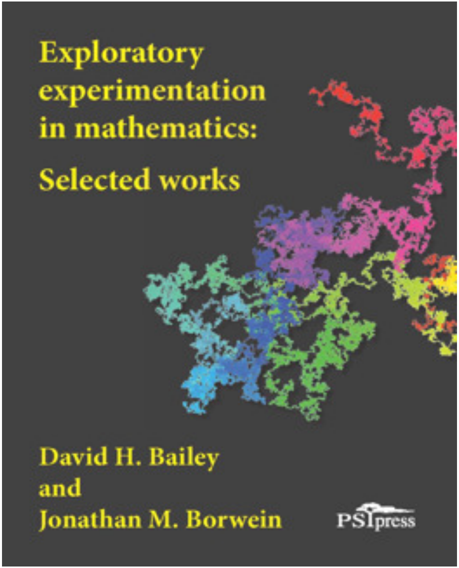
- Предговор је написао **Donald Knuth**.
- Књига садржи методе за анализу комплексних сумирања хипергеометријског типа, укључујући више основних алгоритама, као што су:

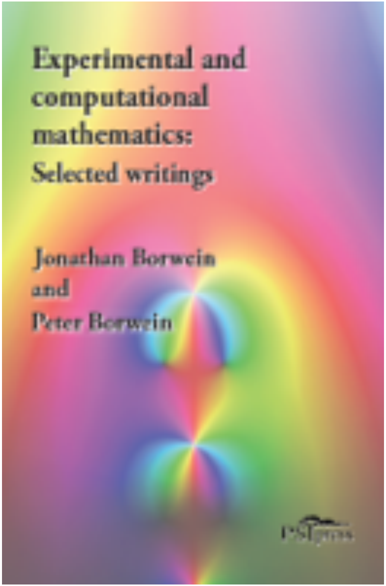
  – **општи алгоритам сестре Celine**,

  – **Gosper-ов алгоритам**,

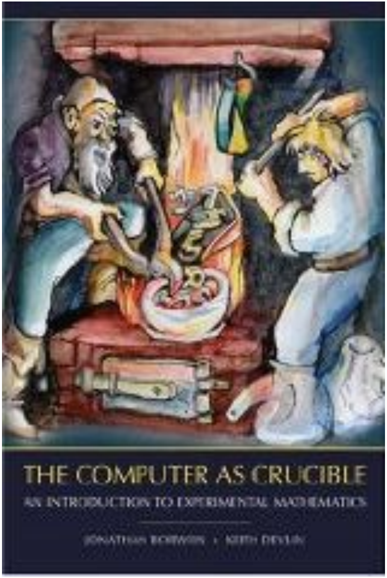
  – **Zeilberger-ов алгоритам**, итд.

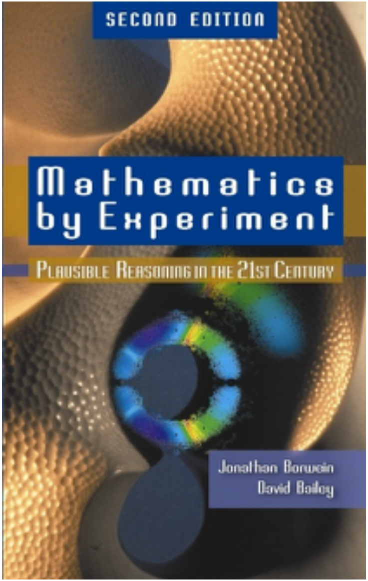

A=B
Marko Petkovšek
Herbert S. Wilf
Doron Zeilberger
With Foreword by Donald E. Knuth

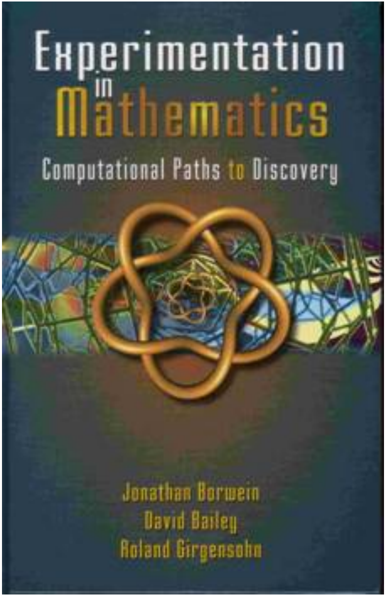

Exploratory
experimentation
in mathematics:
Selected works
David H. Bailey
and
Jonathan M. Borwein
PSIpress

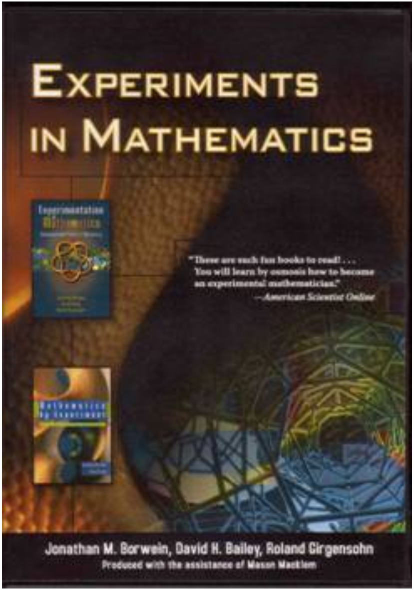

Experimental and computational mathematics: Selected writings
Jonathan Borwein
and
Peter Borwein
PSIpress

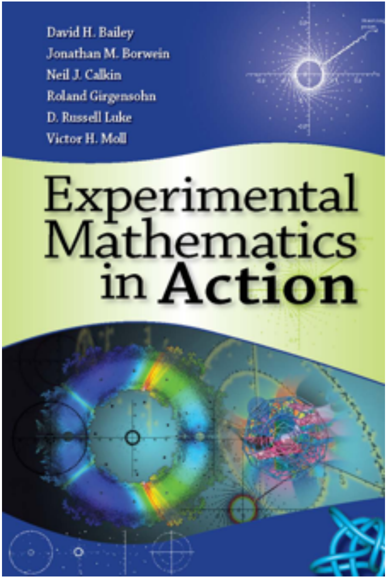

Jonathan Borwein Keith Devlin
Experimentelle Mathematik
Eine beispielorientierte Einführung
Spektrum

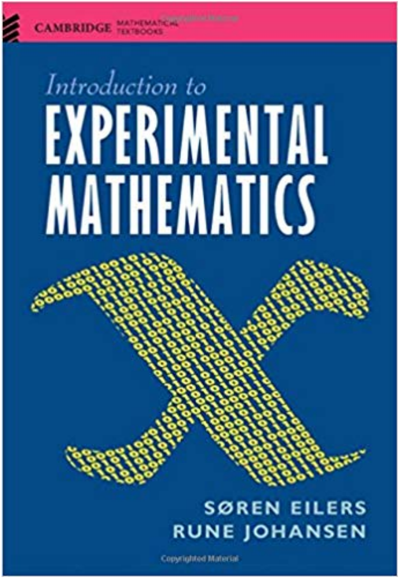

THE COMPUTER AS CRUCIBLE
AN INTRODUCTION TO EXPERIMENTAL MATHEMATICS
JONATHAN BORWEIN · KEITH DEVLIN


SECOND EDITION
Mathematics by Experiment
Plausible Reasoning in the 21st Century
Jonathan Borwein
David Bailey


Experimentation in Mathematics
Computational Paths to Discovery
Jonathan Borwein
David Bailey
Roland Girgensohn


Experiments in Mathematics
"These are such fun books to read! . . .
You will learn by osmosis how to become
an experimental mathematician."
—American Scientist Online
Jonathan M. Borwein, David H. Bailey, Roland Girgensohn
Produced with the assistance of Mason Macklem


David H. Bailey
Jonathan M. Borwein
Neil J. Calkin
Roland Girgensohn
D. Russell Luke
Victor H. Moll
Experimental Mathematics in Action


CAMBRIDGE MATHEMATICAL TEXTBOOKS
Introduction to
EXPERIMENTAL MATHEMATICS
SØREN EILERS
RUNE JOHANSEN
Copyrighted Material

Часопис **Experimental Mathematics** (Taylor & Francis)
IF=0.843 (2021); IF=0.5 (2022)

- Значајан прогрес у **експерименталној математици** догодио се 1995. године појавом тзв. **Bailey-Borwein-Plouffe (BBP)** формуле, коју је открио **Simon Plouffe** (у хекса-децималној бази),

- Значајан прогрес у **експерименталној математици** догодио се 1995. године појавом тзв. **Bailey-Borwein-Plouffe (BBP)** формуле, коју је открио **Simon Plouffe** (у хекса-децималној бази),

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right),$$

- Значајан прогрес у **експерименталној математици** догодио се 1995. године појавом тзв. **Bailey-Borwein-Plouffe (BBP)** формуле, коју је открио **Simon Plouffe** (у хекса-децималној бази),

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right),$$

која омогућава брзо одређивање било које бинарне цифре броја π без налажења претходних цифара (тзв. “ **spigot” алгоритам**).

- Значајан прогрес у **експерименталној математици** догодио се 1995. године појавом тзв. **Bailey-Borwein-Plouffe (BBP)** формуле, коју је открио **Simon Plouffe** (у хекса-децималној бази),

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right),$$

која омогућава брзо одређивање било које бинарне цифре броја π без налажења претходних цифара (тзв. **“ spigot” алгоритам**).

D. Bailey, P. Borwein, S. Plouffe, *On the rapid computation of various polylogarithmic constants*, Math. Comput. **66**, no. 218 (1997), 903–913.

- Значајан прогрес у **експерименталној математици** догодио се 1995. године појавом тзв. **Bailey-Borwein-Plouffe (BBP)** формуле, коју је открио **Simon Plouffe** (у хекса-децималној бази),

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right),$$

која омогућава брзо одређивање било које бинарне цифре броја π без налажења претходних цифара (тзв. “ **spigot” алгоритам**).

D. Bailey, P. Borwein, S. Plouffe, *On the rapid computation of various polylogarithmic constants*, Math. Comput. **66**, no. 218 (1997), 903–913.

J.M. Borwein, D.M. Bradley, D.J. Broadhurst, P. Lisoněk, *Special values of multiple polylogarithms*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 3, 907–941.

- Истим методом добијени су експлицитни изрази за брзо одређивање многих важних константи у облику

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^{ck}} \frac{p(k)}{q(k)},$$

у различитим базама $b\,(\geq 2)$, где су p и q полиноми са целим коефицијентима и c природан број.

- Истим методом добијени су експлицитни изрази за брзо одређивање многих важних константи у облику

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^{ck}} \frac{p(k)}{q(k)},$$

у различитим базама $b\,(\geq 2)$, где су p и q полиноми са целим коефицијентима и c природан број.

- Добијени су изрази за константе π^2, π^3, $\ldots$, $\log 2$, $\log^2(2)$, $\ldots$, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\ldots$. Битну улогу овде игра m-ти полилогаритам L_m,

$$L_m(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu^m} \quad (|z| < 1).$$

- Истим методом добијени су експлицитни изрази за брзо одређивање многих важних константи у облику
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^{ck}} \frac{p(k)}{q(k)},$$
у различитим базама $b\,(\geq 2)$, где су p и q полиноми са целим коефицијентима и c природан број.

- Добијени су изрази за константе π^2, π^3, $\ldots$, $\log 2$, $\log^2(2)$, $\ldots$, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\ldots$. Битну улогу овде игра m-ти полилогаритам L_m,
$$L_m(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu^m} \quad (|z| < 1).$$

- **Catalan-ова константа**
$$G = \beta(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots ,$$
где је β Dirichlet-ова бета функција.

Квадратурне формуле

- Најзначајније откриће у нумеричкој анализи у 19. веку биле су Гаусове квадратурне формуле из 1814. године. **Carl Friedrich Gauss** је драматично унапредио Њутнове идеје о нумеричкој интеграцији из 1676. године, увећавајући алгебарски степен тачности квадратурне формуле

$$\int_0^1 f\,(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} A_k f(\tau_k) + R_n(f),$$

са $n-1$ на $2n-1$.

Квадратурне формуле

- Најзначајније откриће у нумеричкој анализи у 19. веку биле су Гаусове квадратурне формуле из 1814. године. **Carl Friedrich Gauss** је драматично унапредио Њутнове идеје о нумеричкој интеграцији из 1676. године, увећавајући алгебарски степен тачности квадратурне формуле

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} A_k f(\tau_k) + R_n(f),$$

  са $n-1$ на $2n-1$.

- Много општије

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(\tau_k) + R_n(f;\,\mathrm{d}\mu)$$

  [Jacobi, Mehler, Heine, Radau, Christoffel, Stieltjes, Марков, Успенски, ...]

- Први значајан прогрес у конструкцији **Gauss-Christoffel**-ових формула (чворова τ_k и тежинских коефицијената A_k) за произвољну позитивну меру $\mathrm{d}\mu$ на $\mathbb{R}$ са коначним или неограниченим носачем, за коју сви моменти μ_k постоје и $\mu_0 > 0$, дали су 1969. године **Gene Golub** и његов сарадник **John H. Welsch**, редукујући конструкцију на проблем сопствених вредности за симетричну три-дијагоналну (тзв. Jacobi-јеву) матрицу

- Први значајан прогрес у конструкцији **Gauss-Christoffel**-ових формула (чворова τ_k и тежинских коефицијената A_k) за произвољну позитивну меру $\mathrm{d}\mu$ на $\mathbb{R}$ са коначним или неограниченим носачем, за коју сви моменти μ_k постоје и $\mu_0 > 0$, дали су 1969. године **Gene Golub** и његов сарадник **John H. Welsch**, редукујући конструкцију на проблем сопствених вредности за симетричну три-дијагоналну (тзв. Jacobi-јеву) матрицу

$$J_n(\mathrm{d}\mu) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \mathbf{O} \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ \mathbf{O} & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Gene H. Golub (1932 – 2007)

- Низови (α_k) и (β_k) су коефицијенти у трочланој рекурентној релацији

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad \pi_0(t) = 1, \ \ \pi_{-1}(t) = 0,$$

за низ **моничних ортогоналних полинома** $\pi_k(\cdot) = \pi_k(\mathrm{d}\mu;\ \cdot)$ у односу на **скаларни производ** дефинисан на скупу свих полинома $\mathcal{P}$ помоћу

- Низови (α_k) и (β_k) су коефицијенти у трочланој рекурентној релацији

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad \pi_0(t) = 1, \quad \pi_{-1}(t) = 0,$$

за низ **монични ортогоналних полинома** $\pi_k(\cdot) = \pi_k(\mathrm{d}\mu;\ \cdot)$ у односу на **скаларни производ** дефинисан на скупу свих полинома $\mathcal{P}$ помоћу

$$(p, q) = \int_{\mathbb{R}} p(t)\, q(t)\, \mathrm{d}\mu(\mathrm{t}) \quad (p, q \in \mathcal{P}).$$

- Низови (α_k) и (β_k) су коефицијенти у трочланој рекурентној релацији

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad \pi_0(t) = 1, \quad \pi_{-1}(t) = 0,$$

за низ **моничних ортогоналних полинома** $\pi_k(\cdot) = \pi_k(\mathrm{d}\mu;\ \cdot)$ у односу на **скаларни производ** дефинисан на скупу свих полинома $\mathcal{P}$ помоћу

$$(p, q) = \int_{\mathbb{R}} p(t)\, q(t)\, \mathrm{d}\mu(\mathrm{t}) \quad (p, q \in \mathcal{P}).$$

- Други значајан прогрес се десио почетком осамдесетих година прошлог века, када је **Walter Gautschi** (1927 –) у серији радова, препознавши низове коефицијената (α_k) и (β_k) као фундаменталне величине, развио тзв. **конструктивну теорију ортогоналних полинома (ОП) на** $\mathbb{R}$.

Свечана вечера у Лебану, приликом посете "Царичином граду", током конференције "Numerical Methods and Approximation Theory III" (Ниш, 1987)

Conference on Scientific Computing and Approximation, Purdue University, Department of Computer Science (USA, 2018)

Конструктивна теорија ОП је отворила врата и дала инспирацију за нови приступ ортогоналности и низ других истраживања, којима сам се углавном бавио током моје каријере:

- Развој нових класа ортогоналних полинома и одговарајућих квадратурних формула;
- Сплајн апроксимације које задржавају максимални број момената;
- Развој ортогоналности на јединичној полукружници и кружном луку у односу на нехермитски скаларни производ;
- Конструктивни приступ у развоју s и σ-ортогоналности, чиме је покренут даљи развој квадратурних процеса (максималног степена тачности) са вишеструким чворовима;
- Развој ортогоналности на радијалним зрацима у комплексној равни;
- Развој метода код тзв. вишеструке ортогоналности и генералисаних Borges-ових и Birkhoff–Young-ових квадратура;

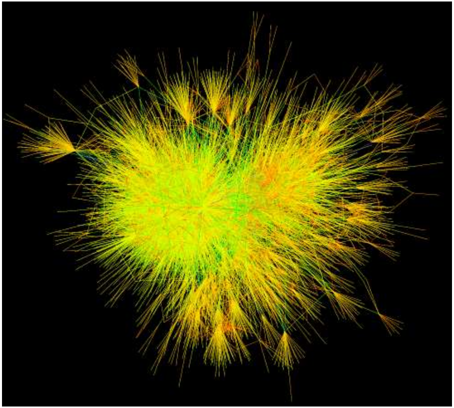
- Интеграција брзо-осцилаторних функција;
- Примене у разним областима нумеричке и примењене анализе (нумеричка интеграција, интерполациони процеси, интегралне једначине);
- Методи за сумирање спороконвергентних редова;
- Развој ортогоналних неполиномиалних система и одговарајућих квадратурних процеса;
- Развој нестандардних квадратурних формула максималног степена тачности, итд.

- Интеграција брзо-осцилаторних функција;
- Примене у разним областима нумеричке и примењене анализе (нумеричка интеграција, интерполациони процеси, интегралне једначине);
- Методи за сумирање спороконвергентних редова;
- Развој ортогоналних неполиномиалних система и одговарајућих квадратурних процеса;
- Развој нестандардних квадратурних формула максималног степена тачности, итд.

Поред многобројних примена у математици (нумеричка анализа, теорија апроксимација, вероватноћа и статистика, оптимизација, итд.), као и у физици, теоријској хемији, телекомуникацијама, електромагнетици, и многим другим примењеним наукама и инжењерству, **квадратурне формуле** су нашле у последње време, за многе, неочекивану примену и у тзв. **комплексним мрежама**.

- Мреже обезбеђују моделе за разне системе (физичке, биолошке, друштвене, ...), нпр. транспортне мреже, молекуларне структуре, генске и протеинске интеракције, интернет, итд.

- Мреже обезбеђују моделе за разне системе (физичке, биолошке, друштвене, ...), нпр. транспортне мреже, молекуларне структуре, генске и протеинске интеракције, интернет, итд.



Део интернета као пример комплексне мреже

- Анализа помоћу графова обезбеђује квантитативне алате за проучавање комплексних мрежа. У последње време, створила се мултидисциплинарна наука о мрежама.

- Анализа помоћу графова обезбеђује квантитативне алате за проучавање комплексних мрежа. У последње време, створила се мултидисциплинарна наука о мрежама.
- Многи проблеми у квантитативној анализи комплексних мрежа (интернет, мрежа цитирања, WWW, …) се своде на израчунавање (или процену вредности) билинеарне форме облика

$$\mathbf{u}^T f\left(A\right)\mathbf{v},$$

где је A матрица суседства у графу (велике димензије), $f(t)$ аналитичка функција, а $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ су погодно изабрани вектори.

- Анализа помоћу графова обезбеђује квантитативне алате за проучавање комплексних мрежа. У последње време, створила се мултидисциплинарна наука о мрежама.
- Многи проблеми у квантитативној анализи комплексних мрежа (интернет, мрежа цитирања, WWW, ...) се своде на израчунавање (или процену вредности) билинеарне форме облика

$$\mathbf{u}^T f(A)\,\mathbf{v},$$

  где је A матрица суседства у графу (велике димензије), $f(t)$ аналитичка функција, а $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ су погодно изабрани вектори.
- Након извесних трансформација, билинеарна форма се може изразити помоћу интеграла

$$\int_a^b f(t)\,d\mu(t),$$

  а затим се користе квадратурне формуле Gauss-овог типа.

Софтвери за **ортогоналне полиноме и квадратурне формуле**:

- **Matlab** пакет

  SOPQ [Gautschi]

  https://www.cs.purdue.edu/archives/2002/wxg/

- **Mathematica** пакет

  OrthogonalPolynomials [Цветковић & Миловановић]

  Доступан на сајту Математичког института САНУ:

  http://www.mi.sanu.ac.rs/~gvm/

ХВАЛА НА ПАЖЊИ!