Nestandardna ortogonalost i kvadraturne formule

Aleksandar S. Cvetković

-Doktorska disertacija-

Ivani

Sadržaj

Lista slika

Lista tabela

Predgovor

Ova doktorska disertacija je plod dugogodišnjih istraživanja sprovedenih na Katedri za matematiku Elektronskog fakulteta u Nišu, pod mentorstvom profesora Gradimira V. Milovanovića. Moj rad u ovoj oblasti započeo je izradom magistarske teze pod naslovom *"Programski paket za simboličku i numeričku konstrukciju ortogonalnih polinoma i kvadraturnih formula"* [14]. Paket je pripremljen u programskom sistemu MATEMATICA i njime su stvoreni uslovi za dalja i dublja istraživanja u ovoj interesantnoj oblasti. Od 2002. godine radi se sistematski i na projektu *"Ortogonalni sistemi, konstruktivne aproksimacije i numerički metodi,"* koji finansira *Ministarstvo nauke i zaštite životne sredine* Republike Srbije. U periodu posle 2000. godine dobili smo dosta rezultata koji su publikovani, koji se nalaze u štampi, koji se nalaze na recenziji, ili su pripremljeni za štampu ([15], [16], [50] – [64], [73]). Jedan deo tih rezultata, objedinjen u celinu, predstavlja ovu doktorsku disertaciju.

Disertacija je podeljena u tri glave.

U prvoj glavi razmatramo opšti koncept polinoma ortogonalnih u odnosu na linearni funkcional definisan na prostoru algebarskih polinoma. Osobine regularnih ortogonalnih polinoma opisujemo osobinama Jacobijevog operatora koji je izgradjen od koeficijenata tročlane rekurentne relacije, koja karakteriše niz regularnih ortogonalnih polinoma. Na kraju prve glave, razmatramo polinome ortogonlane u odnosu na kompleksne mere sa ograničenim nosačima. Posebno izdvajamo razmatranja vezana za linearne modifikacije Jacobijeve mere, gde karakterišemo slučaj ograniěnog Jacobijevog operatora. Za poznatu klasu polinoma ortogonalnih na polukrugu razmatramo asimptotsko ponašanje koeficijenata tročlane rekurentne relacije, i pod izvesnim uslovima, dajemo rešenje asimptotskog ponašanja rekurzionih koeficijenata. Takođe, razmatramo i jednu klasu polinoma ortogonalnih u odnosu na oscilatornu meru. Rezultati izloženi u ovoj glavi su publikovani u radovima [58], [53], ili su spremljeni za publikovanje ([62], [61]).

U drugoj glavi disertacije razmatramo aproksimaciju integrala funkcije, analitičke na izvesnom domenu kompleksne ravni, u odnosu na kompleksnu meru sa ograničenim nosačem. Posebno razmatramo aproksimaciju integrala analitičke funkcije u odnosu na meru podržanu na diskretnom skupu kompleksne ravni sa brojem nula kao jedinom tačkom nagomilavanja. Rezultati izloženi u drugoj glavi su publikovani u radovima [55], [52], [50], [16].

U trećoj glavi razmatramo dva koncepta generalizacije Gaussove kvadraturne formule. Klasična Gaussova kvadraturna formula zahteva poznavanje vrednosti funkcije u tačkama unutar nosača pozitivne mere. Generalisana Gaussova kvadraturna formula podrazumeva poznavanje vrednosti izvesne familije linearnih operatora primenjenih na podintegralnu funkciju. Prva klasa generalisanih Gaussovih kvadraturnih formula koristi specijalne klase familija operatora sa bogatom algebarskom strukturom. Pokazujemo da generalisana Gaussova kvadraturna formula jedinstveno postoji i za neke specijalne familije operatora dajemo algoritam konstrukcije kvadraturne formule. Za drugu grupu generalisanih kvadraturnih Gaussovih kvadraturnih formula, poznatu još i kao Gaussove intervalne kvadraturne formule, za specijani slučaj Jacobijeve težine dokazujemo jedinstvenost. Za specijalni slučaj Čebiševljeve težine prve vrste dajemo analitičko rešenje. Takođe, predlažemo jedan pogodan algoritam za numeričku konstrukciju Gaussovih intervalnih kvadraturnih formula za Jacobijevu težinu. Na kraju ove glave, razmatramo i konvergenciju generalisanih Gaussovih kvadraturnih formula. Rezultati prezentovani u ovoj glavi su publikovani u radovima [59], [56], ili su spremljeni za publikovanje ([63], [64]).

◇ ◇ ◇

Posebno bih izrazio svoju zahvalnost mentoru Gradimiru Milovanoviću za svu podršku koja je bila sve vreme od presudne važnosti. Zahvaljujem kolegama sa katedre za Matematiku Elektronskog fakulteta u Nišu za pomoć i razumevanje. Zahvaljujem se svojoj porodici na strpljenju i pomoći koje su mi mnogo značile.

U Nišu, 27. septembar 2004. Aleksandar S. Cvetković

Glava 1

Kompleksne mere i ortogonalnost

1.1 Egzistencija niza ortogonalnih polinoma

Počinjemo sa definicijom niza polinoma ortogonalnih u odnosu na proizvoljni linearni funkcional $\mathcal{L} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$. Sa $\mathcal{P}$, označavamo linearni prostor svih algebarskih polinoma nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, $(\mathcal{P}, \mathbb{C})$. Sa $\mathcal{P}_n$, označavamo linearni prostor svih polinoma ne većeg stepena od n, nad poljem kompleksnih brojeva $(\mathcal{P}_n, \mathbb{C})$. Takođe, sa $(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ i $(\mathcal{P}_n, \mathbb{R})$ označavamo odgovarjuće linearne prostore nad poljem relanih brojeva $\mathbb{R}$.

Definicija 1.1 *Neka je dat linearni funkcional $\mathcal{L} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$. Niz polinoma P_k, $k \in \mathbb{N}_0$, je niz polinoma ortogonalnih u odnosu na $\mathcal{L}$, ako i samo ako*
(i) *polinom P_k, $k \in \mathbb{N}_0$, je stepena k,*
(ii) *$\mathcal{L}(P_k P_\nu) = 0$, za $k \neq \nu$, $k, \nu \in \mathbb{N}_0$,*
(iii) *$\mathcal{L}(P_k^2) \neq 0$, za $k \in \mathbb{N}_0$.*

Ovakav linearni funkcinal $\mathcal{L}$ nazivamo regularnim (videti [5]) ili kvazi-definitnim (videti [12, str. 7]).

Ako u prethodnoj definiciji ne zahtevamo da osobine važe za svaki prirodan broj, već počevši od nekog prirodnog broja N_0, onda kažemo da niz ortogonalnih polinoma postoji asimptotski, a za odgovarajući linearni funkcional $\mathcal{L}$ kažemo da je asimptotski regularan ili asimptotski kvazi-definitan.

Ako u prethodnoj definiciji tražimo da sve pobrojane osobine funkcionala $\mathcal{L}$ važe na linearnom prostoru polinoma ne višeg stepena od unapred zadatog $2N_0$, dakle na $\mathcal{P}_{2N_0}$, kažemo da je linearni funkcional $\mathcal{L}$ regularan na $\mathcal{P}_{2N_0}$ ili kvazi-definitan na $\mathcal{P}_{2N_0}$.

Kako su svi polinomi P_n, $n \in \mathbb{N}_0$, stepena tačno n, možemo izgraditi niz moničnih polinoma π_n, $n \in \mathbb{N}_0$, od niza P_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Onda niz π_n, $n \in \mathbb{N}_0$, nazivamo niz moničnih ortogonalnih polinoma u odnosu na funkcional $\mathcal{L}$.

Najvažniji slučaj linearnog funkcionala $\mathcal{L} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ je linearni funkcional koji je zadat preko integrala. Neka je μ mera, takva da je svaki polinom μ-integrabilan, tada je sa

$$\mathcal{L}(p) = \int p \,\mathrm{d}\mu, \quad p \in \mathcal{P}, \tag{1.1}$$

zadat linearni funkcional koji slika polinome na skup kompleksnih brojeva.

Primedba 1.1 Na primer, ukoliko je mera u (1.1) pozitivna, onda je linearni funkcional $\mathcal{L}$ regularan i pozitivno definitan (videti [12, str. 15], [46, str. 97]).

Kako je linearni funkcional definisan na celom skupu $\mathcal{P}$, definisan je i na elementima x^k, $k \in \mathbb{N}_0$. Vrednosti linearnog funkcionala $\mathcal{L}$ na polinomima x^k, $k \in \mathbb{N}_0$, nazivamo momentima

$$m_k = \mathcal{L}(x^k), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Naravno, zbog linearnosti, vrednost funkcionala $\mathcal{L}$ u bilo kom polinomu $P = \sum_k p_k x^k$ može biti određena kao linearna kombinacija momenata

$$\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}\left(\sum_k p_k x^k\right) = \sum_k p_k \mathcal{L}(x^k) = \sum_k p_k m_k.$$

Drugim rečima, funkcional $\mathcal{L} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ je jedinstveno određen ako je poznat niz momenata m_k, $k \in \mathbb{N}_0$.

U opštem slučaju, uslov regularnosti funkcionala $\mathcal{L}$ se svodi na pitanje vrednosti Hankelovih determinanti koje kreiramo koristeći niz momenata (videti [12, str. 11], [46, str. 96], [16]). Uslov regularnosti funkcionala $\mathcal{L}$ može se iskazati sledećom teoremom (videti [12, str. 11]).

Teorema 1.1 *Neka je $\mathcal{L} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ linearni funkcional. Označimo da Δ_k, $k \in \mathbb{N}_0$, sledeće determinante*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \dots & m_k \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_{k+1} \\ m_2 & m_3 & m_4 & \dots & m_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ m_k & m_{k+1} & m_{k+2} & \dots & m_{2k} \end{vmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.2}$$

gde su m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, momenti funkcionala $\mathcal{L}$. Niz polinoma P_k ortogonalnih u odnosu na $\mathcal{L}$ postoji ako i samo ako $\Delta_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Za linearne funkcional $\mathcal{L}$ regularne na $\mathcal{P}_{2n}$ imamo sledeću teoremu.

Teorema 1.2 *Linearni funkcional $\mathcal{L}$ je regularan na $\mathcal{P}_{2n}$, tj. niz ortogonalnih polinoma P_k, $k = 0, 1, \dots, n$, u smislu definicije* 1.1 *postoji ako i samo ako $\Delta_k \neq 0$, $k = 0, 1, \dots, n$.*

Dokaz.- Teorema je direktna posledica prethodne, ali zbog kompletnosti dajemo dokaz.

Polinom P_k, $k = 0, 1, \dots, n$, $\deg(P_k) = k$, je član ortogonalnog niza u odnosu na $\mathcal{L}$ ako je ortogonalan na svim polinomima manjeg stepena od k. Pretpostavimo da važi $P_k = \sum_{j \le k} p_j x^j$. Tada imamo

$$M_k \delta_{n,k} = \mathcal{L}(P_k x^\nu) = \sum_{j=0}^{k} p_j m_{j+\nu},$$

gde je M_k neka konstanta različita od nule. Prethodni sistem jednačina ima jedinstveno rešenje ako i samo ako $\Delta_k \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$. Onda polinomi P_k, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, zadovoljavaju uslove definicije 1.1. $\Box$

Determinante Δ_k, $k \in \mathbb{N}_0$, nazivamo Hankelovim determinantama. Ova teorema, iako u potpunosti rešava pitanje postojanja niza ortogonalnih polinoma, u praksi je skoro neupotrebljiva izuzev u specijalnim slučajevima kada determinate Δ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, možemo odrediti analitički. Kao ilustraciju navedimo da u [36], koja se bavi analitičkim izračunavanjem vrednosti determinanti, za determinante Hankelovog tipa autor savetuje da se pregleda literatura o ortogonalnim polinomima kako bi se eventualno tražena determinanta prepoznala među već izračunatim Hankelovim determinantama koje se prirodno javljaju u teoriji ortogonalnih polinoma. Uglavnom, mogućnost da se odrede determinante Δ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, analitički je neophodna za postojanje analitičkih rezultata za odgovarajuću klasu ortogonalnih polinoma. Ovde pod pojmom analitičkog rešenja podrazumevamo rešenje koje jeste analitičko ali takođe ima i razumnu kompleksnost.

Primer 1.1 Kao ilustraciju, navedimo primer sledećeg linearnog funkcionala

$$\mathcal{L}(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{p}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Momenti funkcionala su zadati sa $m_k = \Gamma((k+1)/2)/(k\Gamma(k/2)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Vrednosti Hankelovih determinati su, na primer,

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \ \Delta_1 = \frac{\pi^2 - 8}{8\pi}, \ \Delta_2 = \frac{9\pi^2 - 88}{1152\sqrt{\pi}}, \\ \Delta_3 &= \frac{131072 - 33264\pi^2 + 2025\pi^4}{16588800\pi^2}. \end{aligned}$$

Kako red determinante raste, izrazi postaju sve komplikovaniji. Polinomi koji se javljaju u brojiocu su sve većeg stepena, za svako neparno n stepen poraste za 2. Interesantna osobina je da polinomi u brojiocu imaju nulu sve bliže broju π. Koeficijenti polinoma, po π, sa porastom reda determinante rastu eksponencijalno i prosti faktori koeficijenata rastu takođe eksponencijalnom brzinom. Iz svega rečenog, lako se može zaključiti da o analitičkom izrazu za vrednosti Hankelovih determinanti teško da i ima smisla govoriti jer bi takvi analitički izrazi bili previše složeni (kompleksni).

Definicija 1.2 Linearni funkcional $\mathcal{L} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ je pozitivno definitan ako i samo ako je, za svaki nenegativni polinom $P \in (\mathcal{P}, \mathbb{R})\backslash\{0\}$ na realnoj pravoj, vrednost funkcionala $\mathcal{L}$ pozitivna.

Takođe, $\mathcal{L} : \mathcal{P}_{2n} \mapsto \mathbb{C}$ je pozitivno definitan na $(\mathcal{P}_{2n}, \mathbb{R})$ ako i samo ako je vrednost funkcionala $\mathcal{L}$, za svaki nenegativni polinom $P \in (\mathcal{P}_{2n}, \mathbb{R})\backslash\{0\}$ na realnoj pravoj, pozitivna.

Primetimo da ako je linearni funkcional zadat sa (1.1), onda je on pozitivno definitan pod uslovom da je mera μ pozitivna. Za slučaj pozitivno definitnog funkcionala znamo da su vrednosti Hankelovih determinanti Δ_k, $k \in \mathbb{N}_0$, pozitivne.

Sledeća teorema [12, str. 15] daje karakterizaciju pozitivno definitnog linearnog funkcionala.

Teorema 1.3 *Funkcional $\mathcal{L}$ je pozitivno definitan ako i samo ako su vrednosti Hankelovih determinanti Δ_k, $k \in \mathbb{N}_0$, pozitivne i momenti funkcionala $\mathcal{L}$ realni.*

Dokaz.- Ako je $\mathcal{L}$ pozitivno definitan, onda jednostavno zaključujemo da važi

$$0 < \mathcal{L}((x^k)^2) = m_{2k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Takođe, na osnovu

$$0 < \mathcal{L}((1+x)^{2k}) = \sum_{\nu=0}^{2k} \binom{2k}{\nu} \mathcal{L}(x^\nu), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

zaključujemo da su momenti realni.

Za $p = \sum_{k \le n} p_k x^k$, imamo

$$\mathcal{L}(p^2) = \sum_{k \le n} \sum_{\nu \le n} p_k p_\nu \mathcal{L}(x^{k+\nu}) = \sum_{k,\nu=0}^{n} m_{k+\nu} p_k p_\nu > 0,$$

odakle zaključujemo da je bilinearna forma pozitivno definitna, što za posledicu ima da je $\Delta_n > 0$ (videti [12, str. 16,18]).

Ako su sve determinante Δ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, pozitivne, onda su i sve bilinearne forme

$$\sum_{k,\nu=0}^{n} m_{k+\nu} p_k p_\nu, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

pozitivne jer su momenti m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, realni. Ovo znači i da je $\mathcal{L}(p^2) > 0$. Međutim, svaki nenegativni polinom koji nije identički jednak nuli na relanoj pravoj može se predstaviti kao zbir kvadrata dva polinoma (videti [12, str. 15]), tj. za svaki nenegativni polinom p na relanoj pravoj imamo $p = q^2 + r^2$, pri čemu su stepenovi polinoma q^2 i r^2 jednaki sa stepenom polinoma p (videti [12, str. 15]). Tada

$$\mathcal{L}(p) = \mathcal{L}(q^2) + \mathcal{L}(r^2) > 0,$$

pa je, na osnovu definicije, $\mathcal{L}$ pozitivno definitan. $\square$

Primetimo da na osnovu ove teoreme imamo rešeno pitanje pozitivne definitnosti funkcionala $\mathcal{L}$ na prostoru $(\mathcal{P}_n, \mathbb{R})$. Sada možemo formulisati sledeći rezultat:

Teorema 1.4 *Linearni funkcional $\mathcal{L} : \mathcal{P}_{2n} \mapsto \mathbb{C}$ je pozitivno definitan na $(\mathcal{P}_{2n}, \mathbb{R})$ ako i samo ako $\Delta_k > 0$, $k = 0, \ldots, n$, i svi momenti m_k, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, su realni.*

Za pozitivno-definitne linearne funkcionale sledeća teorema se može naći u literaturi ([12, str. 14]):

Teorema 1.5 *Ako je linearni funkcional $\mathcal{L} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ pozitivno definitan, onda niz ortogonalnih polinoma, u smislu definicije* 1.1*, postoji.*

Takođe, za linearne funkcionale $\mathcal{L}$, pozitivno definitne na $\mathcal{P}_{2n}$, niz ortogonalnih polinoma P_k, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, u smislu definicije 1.1, postoji, što je diektna posledica pozitivnosti determinanata Δ_k, $k = 0, 1, \ldots, 2n$.

Teorema 1.6 *Ako je linearni funkcional $\mathcal{L} : \mathcal{P}_{2n} \mapsto \mathbb{C}$ pozitivno definitan, onda niz ortogonalnih polinoma P_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, postoji u smislu definicije* 1.1.

Naravno, za slučaj da je linearni funkcional $\mathcal{L}$ zadat kao u (1.1) za neku kompleksnu meru μ, o pitanju egzistencije niza ortogonalnih polinoma možemo dati odgovor jedino ako dokažemo da niz Hankelovih determinanti nema nulti element.

Međutim, postoje i rezultati koji se odnose na asimptotsku egzistenciju niza ortogonalnih polinoma. Tako, na primer, u [41] možemo naći sledeći rezultat.

Teorema 1.7 *Neka je mera μ apsolutno neprekidna, tako da važi $\mathrm{d}\mu = g\omega\chi_{[-1,1]}\mathrm{d}x$, gde je ω skoro svuda pozitivna na $[-1, 1]$ i gde je g neprekidna, moguće kompleksna i različita od nule svuda na $[-1, 1]$. Tada postoji $N_0 \in \mathbb{N}_0$, tako da niz P_k, $k > N_0$, zadovoljava uslove definicije* 1.1.

Primer 1.2 Ova teorema rešava pitanje asimptotske egzistencije niza polinoma ortogonalnih, na primer, u odnosu na meru $e^{\mathrm{i}m\pi x}\chi_{[-1,1]}\mathrm{d}x$, $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Očigledno je da polinomi ne postoje u smislu definicije 1.1 jer je

$$\Delta_0 = m_0 = \frac{\sin(m\pi)}{m\pi} = 0.$$

U vezi sa sa ovom teoremom postoji jedan vrlo važan problem. Naime, za neki zadati slučaj ne znamo koliko iznosi N_0. Tako da ne znamo od kojeg prirodnog broja je sigurna konstrukcija kvadraturnih formula na primer. Postojanje samo asimptotske egzistencije onemogućava korišćenje standardnog softvera za konstrukciju ortogonalnih polinoma i kvadraturnih formula (videti [23], [22, str. 152], [14]). Zato je zbog primene neophodno imati, kad god je to moguće, egzistenciju niza ortogonalnih polinoma.

Jedna od najvažnijih karakteristika ortogonalnih polinoma je tročlana rekurentna relacija koju oni zadovoljavaju. U sledećoj teoremi dajemo egzistenciju rekurentne relacije (videti [12, str. 18]).

Teorema 1.8 *Neka je $\mathcal{L} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ regularan linearni funkcional i neka je niz moničnih polinoma π_k, $k \in \mathbb{N}_0$, ortogonalan u odnosu na $\mathcal{L}$. Onda postoje nizovi α_k, $\beta_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, takvi da važi*

$$\pi_{k+1} = (x - \alpha_k)\pi_k - \beta_k^2\pi_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.3}$$

gde, po definiciji, uzimamo $\pi_{-1} = 0$. Ako je $\mathcal{L}$ pozitivno definitan onda $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ i $\beta_k^2 > 0$, $k \in \mathbb{N}$, pri čemu β_0 može biti proizvoljno.

Obrnuto tvrđenje ove teoreme je čuvena Favardova teorema (videti [21], [12, str. 21]).

Teorema 1.9 *Neka su α_k i β_k^2, $k \in \mathbb{N}_0$, dva proizvoljna kompleksna niza i neka su polinomi π_k, $k \in \mathbb{N}_0$, definisani sa*

$$\pi_{k+1} = (x - \alpha_k)\pi_k - \beta_k^2 \pi_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

gde je $\pi_{-1} = 0$ i $\pi_0 = 1$. Onda postoji jedinstveni linearni funkcional $\mathcal{L} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ takav da važi

$$\mathcal{L}(1) = \beta_0^2, \quad \mathcal{L}(\pi_k \pi_\nu) = 0, \quad k \neq \nu, \ k, \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Funkcional $\mathcal{L}$ je regularan i π_k, $k \in \mathbb{N}_0$, je odgovarajući niz moničnih ortogonalnih polinoma ako i samo ako $\beta_k^2 \neq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Štaviše, $\mathcal{L}$ je pozitvino definitan i π_k, $k \in \mathbb{N}_0$, je odgovarajući niz moničnih ortogonalnih polinoma ako i samo ako $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, i $\beta_k^2 > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Primetimo da Favardova teorema tvrdi jedinstvenost linearnog funkcionala $\mathcal{L}$. Za zadate nizove α_k i β_k^2, $k \in \mathbb{N}_0$, i monične polinome π_k, $k \in \mathbb{N}_0$, koji zadovoljavaju tročlanu rekurentnu relaciju imamo jedinstveno određen linearni funkcional $\mathcal{L}$ u odnosu na koji su polinomi π_k, $k \in \mathbb{N}_0$, ortogonalni. Kako smo već pomenuli vrednost linearnog funkcionala $\mathcal{L}$ može odrediti u svakom polinomu p preko momenata, i niz momenata m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, određuje jedinstveno linearni funkcional $\mathcal{L}$. Međutim, niz momenata m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, ne određuje jedinstveno koeficijente α_k i β_k^2, $k \in \mathbb{N}_0$. U slučaju kada je linearni funkcional $\mathcal{L}$ regularan, ove veze postaju jednoznačne.

Pomenutu vezu, između niza momenata m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, i koeficijenata tročlane relacije α_k, β_k, $k \in \mathbb{N}_0$, za regularni funkcional $\mathcal{L}$, daje sledeća teorema (videti [12, str. 19], [26]).

Teorema 1.10 *Označimo sa Δ'_n, $n \in \mathbb{N}_0$, sledeće determinante*

$$\Delta'_n = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_{n-1} & m_{n+1} \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n & m_{n+2} \\ m_2 & m_3 & \dots & m_{n+1} & m_{n+3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_n & m_{n+1} & \dots & m_{2n-1} & m_{2n+1} \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.4}$$

onda, pod uslovom $\Delta_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, imamo

$$\alpha_n = \frac{\Delta'_n}{\Delta_n} - \frac{\Delta'_{n-1}}{\Delta_{n-1}} \quad i \quad \beta_n^2 = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.5}$$

gde je $\Delta'_{-1} = 0$, $\Delta_{-1} = \Delta_{-2} = 1$, a Δ_k, $k \in \mathbb{N}_0$ su Hankelove determinante (1.2)*.*

Determinate Δ'_k, $k \in \mathbb{N}_0$, nazivamo modifikovanim Hankelovim determinantama.

Svaka mera μ, takva da su polinomi μ-integrabilni, određuje preko relacije (1.1) linearni funkcional $\mathcal{L} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ i odgovarajući niz momenata m_k, $k \in \mathbb{N}_0$. Takođe, za svaki niz momenata m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, može se naći interpretacija odgovarajućeg linearnog funkcionala $\mathcal{L}$ u obliku (1.1). Dakle, važi sledeća teorema (videti [12, str. 74]):

Teorema 1.11 *Neka je m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, proizvoljan niz kompleksnih brojeva. Onda postoji funkcija ϕ ograničene varijacije na $\mathbb{R}$, takva da važi*

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \mathrm{d}\phi = m_k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Slična teorema važi i za slučaj da je linearni funkcional $\mathcal{L}$ zadat koeficijentima tročlane relacije α_k i β_k^2, $k \in \mathbb{N}_0$ (videti [12, str. 75]):

Teorema 1.12 *Neka je za svaka dva niza kompleksnih brojeva α_k i β_k, $k \in \mathbb{N}_0$, definisan niz polinoma π_k, $k \in \mathbb{N}_0$, pomoću*

$$\pi_{k+1} = (x - \alpha_k)\pi_k - \beta_k^2 \pi_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

gde su $\pi_0 = 1$ i $\pi_{-1} = 0$. Tada postoji funkcija ϕ ograničene varijacije na $\mathbb{R}$, takva da važi

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_n \pi_k \mathrm{d}\phi = \delta_{n,k} \prod_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^2, \quad k, n \in \mathbb{N}_0,$$

pri čemu se ϕ može izabrati da bude realna ako i samo ako $\alpha_k, \beta_k^2 \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Funkcija ϕ može biti izabrana kao neopadajuća sa neograničenim brojem tačaka rasta ako i samo ako $\alpha_k \in \mathbb{R}$ i $\beta_k^2 > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Tačka x_0 je tačka rasta funkcije ϕ ako i samo ako $\phi(x_0+\varepsilon) - \phi(x_0-\varepsilon) > 0$, za svako $\varepsilon > 0$. Inače, skup tačaka rasta se još naziva i nosačem funkcije ϕ (videti [12, str. 51], [13]). Nosač funkcije ϕ, mere μ, označavamo sa $\mathrm{supp}(\phi)$, $\mathrm{supp}(\mu)$, respektivno.

Ako ograničimo pažnju na regularne funkcionale $\mathcal{L}$, onda obe teoreme tvrde isti rezultat. Mi se u daljem ograničavamo na regularne funkcionale ili na asimptotski regularne funkcionale $\mathcal{L}$. Kada razmatramo asimptotski regularne funkcionale posebno ćemo naznačiti da govorimo o njima.

Za svaki regularni funkcional $\mathcal{L}$ postoji, prema definiciji 1.1, skup ortogonalnih polinoma P_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Neka je

$$\mathcal{L}(P_n P_k) = M_k \delta_{n,k}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0.$$

Zbog regularnosti, $M_k \neq 0$, pa možemo definisati novi niz polinoma $p_n = P_n / M_k^{1/2}$, $n \in \mathbb{N}_0$, tako da važi

$$\mathcal{L}(p_n p_k) = \delta_{n,k}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0.$$

Definicija 1.3 Pod $\mathcal{L}$-normom $||\cdot||_{\mathcal{L}}$ polinoma P $(\in \mathcal{P})$ podrazumevamo sledeći izraz

$$||P||_{\mathcal{L}}^2 = \mathcal{L}(P^2), \quad P \in \mathcal{P}.$$

Niz polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}_0$, $\deg(p_n) = n$, je niz ortonormiranih polinoma u odnosu na regularni funkcional $\mathcal{L}$, ako i samo ako

$$\mathcal{L}(p_n p_k) = \delta_{n,k}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0.$$

Takođe, za svaki zadati linearni funkcional $\mathcal{L}$ možemo definisati skalarni proizvod na $\mathcal{P}$.

Definicija 1.4 Pod $\mathcal{L}$-skalarnim proizvodom $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}} : \mathcal{P}^2 \mapsto \mathbb{C}$, podrazumevamo sledeći izraz

$$\langle p, q \rangle = \mathcal{L}(pq), \quad p, q \in \mathcal{P}.$$

U slučaju da je $\mathcal{L}$ pozitivno definitan, onda je $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}}$ pravi skalarani proizvod na $(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ jer on verifikuje sve aksiome skalaranog proizvoda (videti [38, str. 52], [91, str. 71], [65, str. 86], itd.). U opštem slučaju, na primer, očigledno je da ne mora važiti $\mathcal{L}(p^2) \neq 0$. Da bismo to proverili dovoljno je posmatrati $p = x - \gamma$, gde je γ rešenje kvadratne jednačine $m_2 - 2\gamma m_1 + \gamma^2 m_0 = 0$. Štaviše, skalarani proizvod $\mathcal{L}(p^2)$ može biti i negativan.

Ako skalarni proizvod $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}}$ posmatramo u odnosu na pozitivno definitan linearni funkcional $\mathcal{L}$, onda na skupu $(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ imamo pravi skalarani proizvod. Zbog pozitivne definitnosti važi $\mathcal{L}(p^2) > 0$, $p \neq 0$. Promenom definicije skalarnog proizvoda $\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(p\overline{q})$, možemo proširiti pozitivnu definitnost sa $(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ na $(\mathcal{P}, \mathbb{C})$. Primetimo da se, u poslednjem slučaju, definicije na $(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ i $(\mathcal{P}, \mathbb{C})$ poklapaju za $q \in (\mathcal{P}, \mathbb{R})$. U svakom slučaju bilinerani funkcional $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}}$, za svaki linearni funkcional $\mathcal{L}$, verifikuje sledeće osobine

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}} = \langle q, p \rangle_{\mathcal{L}}, \quad \langle \alpha p + \beta q, r \rangle_{\mathcal{L}} = \alpha \langle p, r \rangle_{\mathcal{L}} + \beta \langle q, r \rangle_{\mathcal{L}}, \quad p, q, r \in \mathcal{P}.$$

U opštem slučaju, funkcional $\mathcal{L}$ je regular, ali ne i pozitivno definitan jer znamo da ne važi $\langle p, p \rangle = \mathcal{L}(p^2) > 0$, $p \in (\mathcal{P}, \mathbb{C})$.

Naravno, s obzirom da je $\mathcal{L}$ linearni funkcional, iz niza moničnih polinoma π_n, $n \in \mathbb{N}_0$, možemo da kontruišemo niz ortonormiranih polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}_0$, kao $p_n = \pi_n / ||\pi_n||_{\mathcal{L}}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ortonormirani polinomi p_n, $n \in \mathbb{N}_0$, zadovoljavaju nešto drugačiju rekurentnu relaciju u odnosu na monične polinome (videti [46, str. 101]), naime važi

$$xp_n = \beta_{n+1} p_{n+1} + \alpha_n p_n + \beta_n p_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.6}$$

gde su $p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$.

Iz ovih jednakosti možemo konstruisati matričnu jednačinu

$$x \begin{Vmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{Vmatrix} + \beta_{n+1} p_{n+1} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Označimo sa J_n matricu koja se javlja u prethodnoj matričnoj jednačini. Ova matrica je poznata kao Jacobijeva trodijagonalna matrica reda $n+1$. Označimo sa $\mathbf{p}_n$ vektor $(p_0, p_1, \dots, p_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, a sa $\mathbf{e}_n$ koordinatni vektor $(0, 0, \dots, 1)$ dužine $n+1$. Onda prethodna matrična jednačina postaje

$$x\mathbf{p}_n = J_n \mathbf{p}_n + \beta_{n+1} p_{n+1} \mathbf{e}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.7}$$

Ako je x u prethodnoj jednačini neka od nula x_k^{n+1}, $k = 1, \dots, n+1$, polinoma p_{n+1}, računajući i višetrukost, prethodna jednačina dobija formu problema sopstvenih vrednosti za matricu J_n,

$$x_k^{n+1}\mathbf{p}_n = J_n\mathbf{p}_n, \quad k = 1, \dots, n+1.$$

U stvari, ako pretpostavimo da x nije sopstvena vrednost matrice J_n možemo jednačinu (1.7) napisati u nešto promenjenom obliku

$$\beta_{n+1}p_{n+1}(x - J_n)^{-1}\mathbf{e}_n = \mathbf{p}_n.$$

Kako matrica J_n može imati samo konačno mnogo sopstvenih vrednosti, postoji neograničeno mnogo tačaka x kompleksne ravni u kojima prethodna jednačina važi, odakle zaključujemo da je determinanta matrice $x - J_n$ proporcionalna polinomu p_{n+1}. Može se jednostavno dokazati, koristeći metod za izračunavanje trodijagonalnih determinanti izložen u [46, str. 213], da je determinanta matrice $x - J_n$ jednaka

$$\det(z - J_n) = p_{n+1}\prod_{k=0}^{n+1}\beta_k = \pi_{n+1},$$

gde je π_{n+1} monična verzija polinoma p_{n+1}.

Primetimo takođe da imamo sledeće jednostavne jednakosti

$$\langle (x - J_n)^{-1}\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_\nu \rangle = \frac{p_\nu}{\beta_{n+1}p_{n+1}} = \frac{\pi_\nu}{\pi_{n+1}}\prod_{k=\nu+1}^{n}\beta_k, \quad \nu = 0, 1, \dots, n. \tag{1.8}$$

Ovo razmatranje direktno vodi na sledeću teoremu (videti [47, str. 179] i [12, str. 26] za monične polinome):

Teorema 1.13 *Tačke x_k^{n+1}, $k = 1, \dots, n+1$, su nule polinoma p_{n+1}, računajući višetrukost, ako i samo ako su x_k^{n+1}, $k = 1, \dots, n+1$, sopstvene vrednosti trodijagonalne Jacobijeve matrice J_n.*

Naravno, sve vreme napominjemo da nule polinoma p_n mogu biti višestruke jer razmatramo generalni slučaj regularnog funkcionala $\mathcal{L}$. Prethodna teorema daje direktnu vezu između teorije ortogonalnih polinoma i linearne algebre. Veza između teorije ortogonalnih polinoma i funkcionalne analize, takođe, nalazi svoje korene u ovoj jednačini (videti [19], [5], [7]).

U slučaju da je funkcional $\mathcal{L}$ pozitivno definitan znamo da su nule polinoma p_n proste i realne (videti [12, str. 27], [46, str. 97]). U slučaju da je funkcional $\mathcal{L}$ zadat preko pozitivne mere μ relacijom (1.1), onda znamo da su nule ortogonalnih polinoma proste i da se nalaze u $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\mu))$ (videti [95, str. 4], [42]).

Teorema 1.14 *Neka je linearni funkcional $\mathcal{L}$ zadat relacijom* (1.1)*, gde je μ pozitivna mera sa beskonačnim realnim nosačem takva da su svi polinomi μ-integrabilni. Sve nule svih polinoma ortogonalnih u odnosu na $\mathcal{L}$ su proste i sadržane u* $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\mu))$.

Ova teorema ima nesagledive posledice na teoriju aproksimacija. Pomenimo da ova teorema ima primene u razvijanju funkcija u niz ortogonalnih polinoma, aproksimaciji funkcionala $\mathcal{L}$ proširenog na skup funkcija širi u odnosu na $\mathcal{P}$, itd.

Za slučaj kompleksne mere μ, kvazi definitnog funkcionala $\mathcal{L}$, ova teorema nema jednostavno proširenje. Na primer, lako je konstruisati regularan funkcional $\mathcal{L}$, za koji neki član niza ortogonalnih polinoma ima, na primer, dvostruku nulu. Ako izaberemo $\alpha_0 = \alpha_1 = -\beta_1 = 1$, ostale koeficijente možemo da biramo proizvoljno, pa tako imamo $\pi_2 = (x-1)^2$, tj. polinom π_2 ima dvostruku nulu u 1.

Međutim, za regularni funkcional $\mathcal{L}$ znamo da polinomi p_{n+1} i p_n nemaju zajedničkih nula (videti [58]):

Teorema 1.15 *Ako je linearni funkcional $\mathcal{L}$ regularan, onda polinomi π_{n+1} i π_n, $n \in \mathbb{N}_0$, nemaju zajedničkih nula.*

Dokaz.- Pretpostavimo da za neko k, polinomi π_{k+1} i π_k imaju zajedničku nulu τ. Onda imamo

$$0 = \pi_{k+1}(\tau) = (\tau - \alpha_k)\pi_k(\tau) - \beta_k^2 \pi_{k-1}(\tau) = \beta_k \pi_{k-1}(\tau).$$

Odavde zaključujemo da i π_k i π_{k-1} imaju zajedničku nulu τ jer $\beta_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Iterirajući ovaj argument dolazimo do zaključka da svi polinomi π_n, $n = k+1, \ldots, 0$, imaju zajedničku nulu u tački τ. To je, naravno, kontradikcija jer je polinom π_0 identički jednak jedinici. $\square$

Ova teorema je praktično sve što možemo da rekonstruišemo od poznate osobine učešljanosti nula niza ortogonalnih polinoma za pozitivno definitan linearni funkcional $\mathcal{L}$, zadat relacijom (1.1) pozitivnom merom μ sa realnim nosačem (videti [46, str. 105], [12, str. 28]).

Navešćemo i neke proste osobine koeficijenata tročlane rekurentne relacije.

Teorema 1.16 (i) *Neka niz moničnih ortogonalnih polinoma zadovoljava sledeći uslov $\pi_n(z) = (-1)^n \overline{\pi_n(-\overline{z})}$, $n \in \mathbb{N}_0$, onda imamo* $\mathrm{Re}(\alpha_k) = 0$, $\mathrm{Im}(\beta_k^2) = 0$.

(ii) *Ako je regularni linearni funkcional $\mathcal{L}$, sa nizom moničnih ortogonalnih polinoma π_n, $n \in \mathbb{N}_0$, zadat na sledeći način*

$$\mathcal{L}(p) = \int_{-a}^{a} p(x)w(x)\mathrm{d}x, \quad p \in \mathcal{P}, \quad a \in \mathbb{R}^+,$$

pri čemu $w(x) = \overline{w(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$, onda $\pi_n(z) = (-1)^n \overline{\pi_n(-\overline{z})}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(iii) *Ako je regularni funkcional $\mathcal{L}$, sa nizom moničnih ortogonalnih polinoma π_n, $n \in \mathbb{N}_0$, zadat na sledeći način*

$$\mathcal{L}(p) = \int_{-a}^{a} p(x)w(x)\mathrm{d}x, \quad p \in \mathcal{P}, \quad a \in \mathbb{R}^+,$$

pri čemu $w(x) = -\overline{w(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$, onda $\pi_n(z) = (-1)^{n+1} \overline{\pi_n(-\overline{z})}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Dokaz.- Dokažimo prvo deo (ii). Za momente možemo zaključiti da važi

$$\begin{aligned} m_k &= \int_{-a}^{a} x^k w(x)\mathrm{d}x = (-1)^k \int_{-a}^{a} x^k w(-x)\mathrm{d}x \\ &= (-1)^k \overline{\int_{-a}^{a} x^k \overline{w(-x)}\mathrm{d}x} = (-1)^k \overline{m}_k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Sledeća jednakost se može naći u [12, str. 17], [46, str. 97]

$$\pi_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & m_{n+1} & \dots & m_{2n-1} \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^n \end{vmatrix},$$

gde je Δ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, Hankelova determinanta (1.2). Smenimo $z := -\overline{z}$ i izvršimo konjugaciju dobijamo

$$\overline{\Delta_n \pi_n(-\overline{z})} = \begin{vmatrix} m_0 & -m_1 & m_2 & \dots & (-1)^n m_n \\ -m_1 & m_2 & -m_3 & \dots & (-1)^{n+1} m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1} m_{n-1} & (-1)^n m_n & (-1)^{n+2} m_{n+1} & \dots & (-1)^{2n-1} m_{2n-1} \\ 1 & -z & z^2 & \dots & (-1)^n z^n \end{vmatrix}.$$

Faktorišimo sada -1 iz svake druge kolone, $2, 4, \dots, 2[(n+1)/2]$; takođe, faktorišimo -1 iz svake druge vrste, sem ukoliko je ta vrsta baš vrsta sa stepenima z, dakle $2, 4, \dots, 2[n/2]$. Imamo

$$\overline{\Delta_n \pi_n(-\overline{z})} = (-1)^{[(n+1)/2]}(-1)^{[n/2]} \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & m_{n+1} & \dots & m_{2n-1} \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^n \end{vmatrix} = (-1)^n \Delta_n \pi_n(z),$$

gde se primenjujući sličan argument na Δ_n dobija da je $\Delta_n = \overline{\Delta}_n$. Dakle, dokazali smo da važi $\pi_n(z) = (-1)^n \overline{\pi_n(-\overline{z})}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Sličnim rasuđivanjem za deo (iii), dobijamo $m_k = (-1)^{k+1}\overline{m}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, i $\overline{\Delta_n} = (-1)^{n+1}\Delta_n$, što vodi na zaključak $\pi_n(z) = (-1)^{n+1}\overline{\pi_n(-\overline{z})}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Za dokaz dela (i) polazimo od tročlane rekurentne relacije i dobijamo

$$\begin{aligned} p_{n+1}(z) &= (z - \alpha_n)p_n(z) - \beta_n^2 p_{n-1}(z), \\ \overline{p_{n+1}(-\overline{z})} &= (-z - \overline{\alpha}_n)\overline{p_n(-\overline{z})} - \overline{\beta}_n^2 \overline{p_{n-1}(-z)}, \end{aligned}$$

što dalje daje

$$p_{n+1}(z) = (z - \alpha_n)p_n(z) - \beta_n^2 p_{n-1}(z), \quad p_{n+1}(z) = (z + \overline{\alpha}_n)p_n(z) - \overline{\beta}_n^2 p_{n-1}(z).$$

tj. $\alpha_n = -\overline{\alpha_n}$, $\beta_n^2 = \overline{\beta_n^2}$, $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Za slučaj realne težine $w(x) = w(-x)$ na simetričnom intervalu, naravno, imamo $\alpha_k = 0$ jer je zbog realnosti svih momenata $\mathrm{Im}(\alpha_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

1.1.1 Rešenja tročlane rekurentne relacije

Linearna rekurentna relacija koju zadovoljavaju ortonormirani polinomi je sledećeg oblika

$$xy_k = \beta_{k+1}y_{k+1} + \alpha_k y_k + \beta_k y_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1.9}$$

i ona ima dva linearno nezavisna rešenja. Jedno rešenje je upravo naš niz ortonormiranih polinoma p_k, $k \in \mathbb{N}_0$, sa $p_0 = 1/\beta_0$ i $p_{-1} = 0$. Drugo linearno nezavisno rešenje označimo sa q_k, $k \in \mathbb{N}_0$, koje se dobija za $q_0 = 0$ i $q_{-1} = -1/\beta_0$. Svako drugo rešenje 1.9 sa početnim uslovima $y_0 = C_0/\beta_0$, $y_{-1} = -C_{-1}/\beta_0$, je linearna kombinacija prethodna dva

$$y_k = C_0 p_k + C_{-1} q_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

što se jednostvano proverava indukcijom.

Za slučaj da su polinomi ortogonalni u odnosu na linearni funkcional $\mathcal{L}$, postoji jednostavna integralna veza između polinoma q_n i p_n, naime

$$q_n(x) = \frac{1}{\beta_0}\mathcal{L}\left(\frac{p_n(\cdot) - p_n(x)}{\cdot - x}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.10}$$

Jasno je da je $q_0 = 0$, $q_1 = 1/\beta_1$, a indukcijom dokazujemo da tročlana rekurentna relacija važi za polinome q_n.

Lako se proverava (takođe indukcijom) da važi sledeća jednakost

$$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = -\frac{1}{\beta_{n+1}\beta_0}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.11}$$

što je, naravno, dokaz da su odgovarajući Wronskijani različiti od nule, tj.

$$\begin{vmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ p_n & q_n \end{vmatrix} = -\frac{1}{\beta_{n+1}\beta_0} \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ovo znači da su rešenja p_n i q_n, $n \in \mathbb{N}_0$, linearno nezavisna (videti [98]). Na osnovu ove jednakosti dobijamo važnu posledicu.

Lema 1.1 *Neka je funkcional $\mathcal{L}$, u odnosu na koji su polinomi p_n, $n \in \mathbb{N}_0$, ortogonalni, regularan. Onda p_n i q_n, $n \in \mathbb{N}_0$, nemaju zajedničkih nula.*

Dokaz.- Neka je x_k^n, $k = 1, \ldots, n$, računajući višestrukosti, nula polinoma p_n. Onda zbog (1.11), imamo $p_{n-1}(x_k^n)q_n(x_n^k) = 1/(\beta_n\beta_0) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Primenom teoreme 1.15 zaključujemo $q_n(x_n^k) \neq 0$. $\square$

1.2 Jacobijev operator

Prvo dajemo neke uvodne rezultate, poznate iz funkcionalne analize (videti [91], [38]).

Definicija 1.5 Sa ℓ^2 označavamo linearni prostor svih kompleksnih sumabilnih sa kvadratom kompleksnih nizova nad poljem skalara $\mathbb{C}$, tj. ako je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots,)$, $x_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$, onda $\mathbf{x} \in \ell^2$, ako i samo ako

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^2 < +\infty.$$

Sa ℓ_0^2 označavamo linearni prostor svih kompleksnih nizova $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$, nad poljem $\mathbb{C}$, za koje postoji $k \in \mathbb{N}$, tako da važi $x_n = 0$, $n > k$.

Jednostavno možemo dokazuti sledeću teoremu (videti [91, str. 30], [38, str. 62]).

Teorema 1.17 *Preslikavanje* $||.|| : \ell^2 \mapsto \mathbb{R}_0^+ \ \left(||.|| : \ell_0^2 \mapsto \mathbb{R}_0^+\right)$, *definisano sa*

$$||\mathbf{x}||^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^2 < +\infty,$$

je norma na ℓ^2 $\left(\ell_0^2\right)$. *Prostor* ℓ^2 *u odnosu na normu* $||.||$ *je Banachov.*

Jasno je da je ℓ_0^2 pravi potprostor linearnog prostora ℓ^2. Nešto manje očigledno, ali ne manje istinito, je da je ℓ_0^2 gust u ℓ^2, u odnosu na normu $||.||$. Dovoljno je za svaki $\mathbf{y} \in \ell^2$, posmatrati niz $\mathbf{y}_k = (y_0, \ldots, y_{k-1}, 0, \ldots)$, $k \in \ell_0^2$, koji očigledno konvergira ka $\mathbf{y}$ u normi $||.||$. Takođe, prostor ℓ_0^2 može biti shvaćen kao lineal nad vektorima $\mathbf{e}_k = (\ldots, \delta_{k,\nu}, \ldots)$, $k, \nu \in \mathbb{N}_0$.

Neka je dat skup X koji je podskup nekog linearnog prostora, na primer ℓ^2. U daljem tekstu pod $\mathrm{Lin}(X)$ (videti [91, str. 49]) podrazumevamo skup svih konačnih linearnih kombinacija izgrađenih od elemenata skupa X. Dakle, $\mathbf{y} \in \mathrm{Lin}(X)$ ako i samo ako postoje $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, x_k$ i skalari $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ tako da važi

$$\mathbf{y} = \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu \mathbf{x}_\nu.$$

Opšte poznata stvar iz funkcionalne analize je i sledeća teorema (videti [91, str. 74], [38, p 62]).

Teorema 1.18 *Na* ℓ^2 *i* ℓ_0^2 *bilinearni funkcional*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \overline{y}_k < +\infty, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^2,$$

definiše skalarni proizvod. Prostor ℓ^2, *sa skalarnim proizvodom* $\langle ., . \rangle$, *je Hilbertov i važi*

$$||\mathbf{x}||^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle, \quad \mathbf{x} \in \ell^2.$$

U daljem se koristimo malom zloupotrebom. Pojmom vektor ćemo označavati sve nizove kompleksnih brojeva sledećeg oblika $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$. Naravno, jedino kada je norma konačna takav vektor je pravi vektor element prostora ℓ^2.

Sa α_k, $k \in \mathbb{N}_0$, i $\beta_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, označavamo dva niza, u opštem slučaju, kompleksnih brojeva.

Definicija 1.6 Neka su data dva niza kompleksnih brojeva α_k, $k \in \mathbb{N}_0$, i $\beta_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Pod Jacobijevom matricom podrazumevamo beskonačnu matricu oblika

$$J = \begin{Vmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & 0 & \ldots \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \ldots \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{Vmatrix}.$$

Sa J^H, obeležavamo Jacobijevu matricu koja je dobijena iz nizova $\overline{\alpha}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, i $\overline{\beta}_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Očigledno je da je Jacobijeva matrica trodijagonalna. Primetimo da su sve vrste matrice J elementi $\ell_0^2 \subset \ell^2$. Označimo sa $J\mathbf{x}$, formalni matrični proizvod matrice J i vektora $\mathbf{x} \in \ell^2$. Očigledno je da svaki element vektora $J\mathbf{x}$ postoji, zbog činjenice da su vrste matrice J elementi ℓ^2 i $\mathbf{x} \in \ell^2$, pa svi redovi koji reprezentuju elemente vektora $J\mathbf{x}$ konvergiraju apsolutno. Koristeći ovako definisan proizvod matrice J i vektora $\mathbf{x}$, možemo izgraditi različite linearne operatore koji deluju na ℓ^2. Primetimo da ako je $\mathbf{x} \in \ell_0^2$, onda je i $J\mathbf{x} \in \ell_0^2$ jer očigledno $J\mathbf{x}$ ima samo konačno mnogo nenultih elemenata. U daljem razmatranju sledimo opšte principe spektralne teorije operatora izložene u [38], [34], [5]. Primetimo da je formalni proizvod $J\mathbf{x}$ linearan.

Obeležimo sa $\tilde{\mathcal{J}}$, linearni operator, takav da važi $\tilde{\mathcal{J}}\mathbf{x} = J\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \ell_0^2$. Očigledno $\tilde{\mathcal{J}}$ slika ℓ_0^2 u ℓ_0^2. Primetimo da $\tilde{\mathcal{J}}$ ima gust domen u ℓ^2. Od ovako definisanog operatora možemo na prirodan način izgraditi zatvoren operator sa gustim domenom u ℓ^2.

Neka je dat niz elemenata $\mathbf{y}_k$, $k \in \mathbb{N}$, iz ℓ_0^2, takav da niz $\tilde{\mathcal{J}}\mathbf{y}_k$, $k \in \mathbb{N}$, konvergira ka $\mathbf{z} \in \ell^2$ i da niz $\mathbf{y}_k$, $k \in \mathbb{N}$, konvergira ka $\mathbf{y} \in \ell^2$. Možemo da definišemo $\tilde{\mathcal{J}}\mathbf{y} = \mathbf{z}$ i da proširimo domen operatora $\tilde{\mathcal{J}}$. Ovako formiran operator je evidentno zatvoren (videti [38, str. 377], [34, str. 164]). Označimo ga sa $\mathcal{J}_{\min}$.

Naravno, treba dokazati da je operator $\mathcal{J}_{\min}$ dobro definisan (videti [34, str. 165]). Neka su data dva niza $\mathbf{y}_k^1$ i $\mathbf{y}_k^2$, $k \in \mathbb{N}$, iz ℓ^2, koji su u domenu $\tilde{\mathcal{J}}_{\min}$ i koji konvergiraju ka istom $\mathbf{x}$ i takvi da $J\mathbf{y}_k^1$ i $J\mathbf{y}_k^2$, $k \in \mathbb{N}$, konvergiraju ka $\mathbf{z}^1$ i $\mathbf{z}^2$, respektivno. Onda, treba dokazati $\mathbf{z}^1 = \mathbf{z}^2$. Zbog linearnosti, dovoljno je dokazati da ako $\mathbf{y}_k \to 0$ i $J\mathbf{y}_k \to \mathbf{z}$, onda $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (videti [34, str. 165]). Imamo

$$\langle \mathbf{e}_\nu, J\mathbf{y}_k \rangle = \overline{\beta}_\nu \overline{y}_{\nu-1}^k + \overline{\alpha}_\nu \overline{y}_\nu^k + \overline{\beta}_{\nu+1} \overline{y}_{\nu+1}^k = \langle J^H \mathbf{e}_\nu, \mathbf{y}_k \rangle, \quad \nu \in \mathbb{N}_0,$$

odakle zaključujemo da za svako $\nu \in \mathbb{N}_0$, imamo $\langle \mathbf{e}_\nu, J\mathbf{y}_k \rangle \to 0$, dok $k \to +\infty$. Kako je ℓ_0^2 gust u ℓ^2 i zbog neprekidnosti skalarnog proizvoda (videti [91, str. 74], [38, str. 53]), zaključujemo da je $\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = 0$ za svako $\mathbf{x} \in \ell^2$. Naravno, postoji samo jedan vektor $\mathbf{z} \in \ell^2$, takav da je ortogonalan na svako $\mathbf{x} \in \ell^2$, a to je element $\mathbf{0}$.

Postoji još načina da se od Jacobijeve matrice formira linearni operator na ℓ^2 pomoću matričnog proizvoda. Pod operatorom $\mathcal{J}_{\max}$ podrazumevamo linearni operator na ℓ^2, takav da je $\mathcal{J}_{\max}\mathbf{x} = J\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \ell^2$, pri čemu je $\mathbf{x} \in \ell^2$ u domenu operatora $\mathcal{J}_{\max}$ ako i samo ako je $J\mathbf{x} \in \ell^2$.

Dakle, za ovako izgrađena dva operatora $\mathcal{J}_{\min}$ i $\mathcal{J}_{\max}$ dajemo njihove precizne definicije. U daljem sa $\mathrm{D}(\mathcal{J})$ označavamo domen operatora $\mathcal{J}$.

Definicija 1.7 Operator $\mathcal{J}_{\max}$ je linearni operator sa domenom $\mathrm{D}(\mathcal{J}_{\max}) = \{\mathbf{x} \in \ell^2 \mid J\mathbf{x} \in \ell^2\}$ i sa vrednostima $\mathcal{J}_{\max}\mathbf{x} = J\mathbf{x}$.

Operator $\mathcal{J}_{\min}$ je linearni operator na ℓ^2 sa $\mathbf{x} \in \mathrm{D}(\mathcal{J}_{\min})$ ako i samo ako postoji niz $\mathbf{y}_k \in \ell^2_0$, $k \in \mathbb{N}$, koji konvergira ka $\mathbf{x}$, takav da je niz $J\mathbf{y}_k$, $k \in \mathbb{N}$, konvergentan, pri čemu

$$\mathcal{J}_{\min}\mathbf{x} = \lim_{k\to+\infty} J\mathbf{y}_k.$$

Jasno je da je $\mathcal{J}_{\min}$ minimalni zatvoreni operator koji se može izgraditi od matrice J, takav da sadrži ℓ^2_0. Možemo dokazati da je $\mathcal{J}_{\max}$ zatvorena ekstenzija operatora $\mathcal{J}_{\min}$. Kažemo da je operator $\mathcal{T}$ ekstenzija operatora $\mathcal{S}$ ako je $\mathrm{D}(\mathcal{S}) \subset \mathrm{D}(\mathcal{T})$ i ako $\mathcal{S}\mathbf{x} = \mathcal{T}\mathbf{x}$, za svako $\mathbf{x} \in \mathrm{D}(\mathcal{S})$ (videti [38, str. 394]).

Kako su naši operatori $\tilde{\mathcal{J}}_{\min}$ i $\tilde{\mathcal{J}}_{\max}$ gusto definisani, postoje maksimalni *pridruženi*[1] operatori (videti [34, str. 167, 267]). Označimo sa $\mathcal{J}^*$ pridruženi operator za $\mathcal{J}$. Onda maksimalni pridruženi operator za $\tilde{\mathcal{J}}_{\min}$ možemo dobiti na sledeći način (videti [34, str. 167]): Pišemo $\mathbf{y} \in \mathrm{D}(\mathcal{J}^*_{\min})$, ako za svako $\mathbf{x} \in \mathrm{D}(\mathcal{J}_{\min})$ postoji $\mathbf{y}^* \in \ell^2$, tako da važi

$$\langle \mathcal{J}_{\min}\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}^*\rangle,$$

i naravno onda pišemo $\mathbf{y}^* = \mathcal{J}^*_{\min}\mathbf{y}$. Kako je $\ell^2_0 \subset \mathrm{D}(\mathcal{J}_{\min})$, zbog neprekidnosti skalarnog proizvoda, nije potrebno da imamo jednakost za svako $\mathbf{x} \in \mathrm{D}(\mathcal{J}_{\min})$, već je dovoljno da jednakosti vrede samo na svim vektorima $\mathbf{e}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dakle, dovoljno je da važi

$$\langle \mathcal{J}_{\min}\mathbf{e}_k, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{y}^*\rangle,$$

pa da imamo $\mathbf{y}^* = \mathcal{J}^*_{\min}\mathbf{y}$. Onda

$$y^*_k = \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{e}_k\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathcal{J}_{\min}\mathbf{e}_k\rangle, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

odakle zaključujemo da $\mathbf{y}^*$ ima iste elemente kao matrični proizvod $J^H\mathbf{y}$. Ako $\mathbf{y}^* \in \ell^2$, na osnovu definicije, imamo $\mathbf{y} \in \mathrm{D}(\mathcal{J}^H_{\max}) = \mathrm{D}(\mathcal{J}^*_{\min})$ i važi $\mathbf{y}^* = \mathcal{J}^H_{\max}\mathbf{y} = \mathcal{J}^*_{\min}\mathbf{y}$. Odavde možemo zaključiti da važi $\mathcal{J}^*_{\min} = \mathcal{J}^H_{\max}$. Naravno, pod $\mathcal{J}^H_{\min}$ i $\mathcal{J}^H_{\max}$, podrazumevamo operatore izgrađene na prethodno opisani način samo od matrice J^H.

Potpuno istom argumentacijom, koristeći $\mathcal{J}^{**} = \mathcal{J}$, koja važi za gusto definisane operatore i zatvorene operatore na refleksivnom prostoru (videti [34, str. 168]), možemo pokazati da važi $\mathcal{J}^*_{\max} = \mathcal{J}^H_{\min}$. Takođe, s obzirom da je operator $(\mathcal{J}^H_{\min})$ gusto definisan na refleksivnom prostoru, imamo da je njegov pridruženi operator zatvoren (videti [34, str. 168]). Dakle, zbog $\mathcal{J}_{\max} = (\mathcal{J}^H_{\min})^*$, imamo da je $\mathcal{J}_{\max}$ zatvoren.

Ovim smo dokazali smo sledeću teoremu (videti [5]):

[1] Na engleskom jeziku: *adjoint*. U našem jeziku se koristi termin *konjugovan*, koji nije najsrećniji prevod. U ovoj disertaciji koristimo takođe termin *samo-pridruženi* operator za *self-adjoint* operator.

Teorema 1.19 *Imamo*

$$\mathcal{J}_{\min}^* = \mathcal{J}_{\max}^H, \quad \mathcal{J}_{\max}^* = \mathcal{J}_{\min}^H,$$

gde su $\mathcal{J}_{\min}^H$ *i* $\mathcal{J}_{\max}^H$ *minimalni i maksimalni operator izgrađeni od Jacobijeve matrice* J^H*. Takođe,* $\mathcal{J}_{\max}$ *je zatvorena ekstenzija operatora* $\mathcal{J}_{\min}$*. Operator* $\mathcal{J}_{\max}$ *je maksimalna ekstenzija operatora* $\mathcal{J}_{\min}$ *u smislu da ne postoji zatvoreni operator koji je ekstenzija operatora* $\mathcal{J}_{\max}$*, takav da ima iste vrednosti kao* $\mathcal{J}_{\max}$ *na* ℓ_0^2*.*

Primenimo ovu teoremu na Jacobijevu matricu izgrađenu od realnih nizova α_k, $k \in \mathbb{N}_0$, i $\beta_k \neq 0$[2], $k \in \mathbb{N}$. Onda zbog $J^H = J$, imamo $\mathcal{J}_{\min} = \mathcal{J}_{\max}$. Naravno, ako je $\mathcal{J}_{\min} = \mathcal{J}_{\max}$, onda su operatori $\mathcal{J}_{\min}$ i/ili $\mathcal{J}_{\max}$ *samo-pridruženi* jer je $\mathcal{J}_{\max}$ maksimalan u smislu da nema ekstenziju. Odavde raspoznajemo značaj jednakosti $\mathcal{J}_{\min} = \mathcal{J}_{\max}$. Zato tom slučaju dajemo posebno ime (videti [5]).

Definicija 1.8 Operator $\mathcal{J}_{\min}$ nazivamo Jacobijev operator pridružen Jacobijevoj matrici J i označavamo ga sa J. U slučaju da Jacobijeva matrica J nije pravilna, onda $\mathcal{J}_{\max}$ označavamo sa $J^{\#}$. Ako za zadatu Jacobijevu matricu J važi $\mathcal{J}_{\min} = \mathcal{J}_{\max}$, onda ovaj operator obeležavamo prosto sa J i kažemo da je Jacobijeva matrica J *pravilna*[3]. U slučaju da je operator J pravilan, onda operator J nazivamo Jacobijev operator.

Pod normom operatora J podrazumevamo sledeću vrednost

$$||J|| = \sup_{\mathbf{x}\in\ell_0^2} \left| \frac{\langle J\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{||\mathbf{x}||||\mathbf{y}||} \right| = \sup_{\mathbf{x}\in\ell_0^2} \frac{||J\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||}. \tag{1.12}$$

Nije teško proveriti da ovako definisana norma zadovoljava osobine norme. Takođe, lako se proverava da je ovako definisana norma upravo standardna operatorska norma jer

$$|\langle J\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq ||J\mathbf{x}||||\mathbf{y}|| \leq M||\mathbf{x}||||\mathbf{y}||,$$

odakle sleduje $||J|| \leq M$, za svako M za koje $||J\mathbf{x}|| \leq M||\mathbf{x}||$, pa je infimum svih M jednak upravo $||J||$ (videti [46, str. 162]).

U narednim razmatranjima koristimo konvenciju $\beta_0 = 0$, radi lakšeg prikazivanja rezultata. Koristeći nejednakost Bunjakowsky-Cauchy-Schwarza (videti [65, str. 110]), imamo

$$|\beta_\nu x_{\nu-1} + \alpha_\nu x_\nu + \beta_{\nu+1}x_{\nu+1}| \leq (|\beta_\nu|^2 + |\alpha_\nu|^2 + |\beta_{\nu+1}|^2)^{1/2}(|x_{\nu-1}|^2 + |x_\nu|^2 + |x_{\nu+1}|^2)^{1/2},$$

odakle zaključujemo da važi

$$|\beta_\nu x_{\nu-1} + \alpha_\nu x_\nu + \beta_{\nu+1}x_{\nu+1}|^2 \leq (|\beta_\nu|^2 + |\alpha_\nu|^2 + |\beta_{\nu+1}|^2)(|x_{\nu-1}|^2 + |x_\nu|^2 + |x_{\nu+1}|^2).$$

[2]Uobičajeni uslov $\beta_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, može biti zamenjen opštijim da je niz $\beta_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, realan jer su odogovrajući Jacobijevi operatori ekvivalentni do na unitarni operator (videti [98, str. 14], [34, str. 258]).

[3]Ovo je možda ne baš srećan prevod engleske reči *proper* (videti [5]).

Pod pretpostavkom da je $|\beta_\nu|^2+|\alpha_\nu|^2+|\beta_{\nu+1}|^2$ uniformno ograničeno, recimo sa $M^2/3$, po $\nu \in \mathbb{N}_0$, možemo zaključiti da važi

$$\begin{aligned} ||J\mathbf{x}|| &= \left(\sum_{\nu=0}^{+\infty} |\beta_\nu x_{\nu-1} + \alpha_\nu x_\nu + \beta_{\nu+1} x_{\nu+1}|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{\nu=0}^{+\infty} (|\beta_\nu|^2+|\alpha_\nu|^2+|\beta_{\nu+1}|^2)(|x_{\nu-1}|^2+|x_\nu|^2+|x_{\nu+1}|^2)\right)^{1/2} \\ &\leq \sup_{\nu\in\mathbb{N}_0} (3(|\beta_\nu|^2+|\alpha_\nu|^2+|\beta_{\nu+1}|^2))^{1/2} \left(\sum_{\nu=0}^{+\infty} |x_\nu|^2\right)^{1/2} \leq M||\mathbf{x}||, \quad \mathbf{x} \in \ell^2. \end{aligned}$$

Dakle, Jacobijev operator J je ograničen. Ista jednačina, naravno, važi i za operator $J^\#$, tj. ako je $|\beta_\nu|^2+|\alpha_\nu|^2+|\beta_{\nu+1}|^2$ uniformno ograničeno, onda su i J i $J^\#$ ograničeni i kako znamo zatvoreni operatori.

Ako $|\beta_\nu|^2+|\alpha_\nu|^2+|\beta_{\nu+1}|^2$ nije ograničeno, onda za svako $M > 0$ postoji ν takav da važi $|\beta_\nu|^2+|\alpha_\nu|^2+|\beta_{\nu+1}|^2 \geq M^2$. Stoga

$$||J\mathbf{e}_\nu|| = \left(|\beta_\nu|^2+|\alpha_\nu|^2+|\beta_{\nu+1}|^2\right)^{1/2} \geq M||\mathbf{e}_\nu||,$$

tj. J i $J^\#$ nisu ograničeni.

Naravno, iz ograničenosti J, sleduje neprekidnost operatora J (videti [46, str. 162], [91, str. 35]). Zbog neprekidnosti operatora J, lako se zaključuje da ako niz $\mathbf{x}_k$, $k \in \mathbb{N}$, konvergira, onda i $J\mathbf{x}_k$, $k \in \mathbb{N}$, konvergira, pa je stoga $\mathrm{D}(J) = \ell^2$ jer su naši operatori zatvoreni. Naravno, ako je $\mathrm{D}(J) = \ell^2$, s obzirom da je operator J zatvoren, zatvoren je i njegov grafik, pa zbog teoreme o zatvorenom grafiku imamo da je J ograničen (videti [91, str. 132], [38, str. 170]). Odavde zaključujemo da ako su operatori J i/ili $J^\#$ ograničeni, oni su jednaki.

Teorema 1.20 *Operatori J i/ili $J^\#$ su ograničeni ako i samo ako postoji $M > 0$, tako da važi*

$$\sup_{\nu\in\mathbb{N}_0} |\beta_\nu|^2+|\alpha_\nu|^2+|\beta_{\nu+1}|^2 < M < +\infty.$$

Ako su operatori J i/ili $J^\#$ ograničeni oni su jednaki i Jacobijeva matrica je pravilna.

Razmotrićemo i uslov kompaktnosti operatora J, pod uslovom da je on naravno ograničen. Označimo sa J_n, $n \in \mathbb{N}_0$, operator izgrađen od glavnog minora reda $n+1$ Jacobijeve matrice J. Onda očigledno

$$||J - J_n|| \leq 3 \sup_{k>n} \left(|\beta_k|^2+|\alpha_k|^2+|\beta_{k+1}|^2\right)^{1/2},$$

pod uslovom da nizovi β_n, $n \in \mathbb{N}$, i α_n, $n \in \mathbb{N}_0$, konvergiraju ka nuli, imamo konvergenciju u operatorskoj normi niza J_n, $n \in \mathbb{N}_0$, ka operatoru J. Kako operatori J_n, $n \in \mathbb{N}_0$, imaju konačno dimenzionalnu sliku, oni su kompaktni pa je operator J kompaktan kao granična vrednost (u operatorskoj normi) niza kompaktnih operatora J_n (videti [91, str. 67], [38, str. 234]).

Obrnuto, neka postoje podnizovi β_n, $n \in \mathbb{N}'$, α_n, $n \in \mathbb{N}''$, $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}_0$, koji su uniformno ograničeni od nule sa recimo L. Formirajmo onda, na primer, niz $J\mathbf{e}_n$, $n \in \mathbb{N}''$. Zbog $J\mathbf{e}_n = (0, \ldots, \beta_n, \alpha_n, \beta_{n+1}, 0, \ldots)$, za $n, m \in \mathbb{N}'$, $n \neq m$, imamo

$$||J(\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_m)|| = \left(|\beta_n|^2 + |\alpha_n|^2 + |\beta_{n+1}|^2 + |\beta_m|^2 + |\alpha_m|^2 + |\beta_{m+1}|^2\right)^{1/2} > 2L > 0.$$

Naravno, zaključujemo da niz $J\mathbf{e}_n$, $n \in \mathbb{N}''$, nema konvergentan podniz jer nijedan podniz ne može biti Cauchyjev. Onda slika skupa $\mathbf{e}_n$, $n \in \mathbb{N}''$, koji je ograničen, nije prekompaktan skup ili relativno kompaktan, pa J nije kompaktan (videti [91, str. 66], [38, str. 233]).

Sledeću teoremu, koju smo upravo dokazali, možemo naći u [1] (takođe videti [3]).

Teorema 1.21 *Ograničeni Jacobijev operator J je kompaktan ako i samo ako*

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0.$$

U slučaju ograničenog operatora J, normu operatora J možemo oceniti iz sledeće nejednakosti (videti [34, str. 143])

$$\sup_{\nu\in\mathbb{N}_0} \left(|\beta_\nu|^2 + |\alpha_\nu|^2 + |\beta_{\nu+1}|^2\right)^{1/2} \leq ||J|| \leq \sup_{\nu\in\mathbb{N}_0} \left(|\beta_\nu| + |\alpha_\nu| + |\beta_{\nu+1}|\right). \tag{1.13}$$

Ova nejednakost je direktna posledica definicije. Leva strana se dobija za $||J\mathbf{e}_n||$, $n \in \mathbb{N}_0$, a desna se može dobiti pomoću ocene za $\langle J\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$ (videti [98, str. 14]).

Ako operator J nije ograničen, onda J i $J^{\#}$ ne moraju biti jednaki. Drugim rečima, Jacobijeva matrica nije nužno pravilna. U slučaju da su nizovi α_k, $k \in \mathbb{N}_0$, β_k, $k \in \mathbb{N}$, realni, onda operator sa domenom ℓ_0^2, koji deluje na vektore iz ℓ_0^2 preko matričnog množenja Jacobijevom matricom J, označimo sa $\mathcal{J}_0$. Ovaj operator je simetričan jer $\mathcal{J}_0^H = \mathcal{J}_0$. Onda uslov pravilnosti Jacobijeve matrice znači da postoji jedna i samo jedna simetrična ekstenzija operatora $\mathcal{J}_0$. Drugim rečima, $\mathcal{J}_0$ treba da bude esencijalno samo-pridružen u smislu [34, str. 269]. Kao što znamo postoje simetrični operatori koji nemaju jedinstvenu zatvorenu ekstenziju, a primer dajemo nešto niže u tekstu.

Kako je i pokazano u (1.7), nule ortogonalnih polinoma, koji su definisani rekurentnom relacijom (1.6), su sopstvene vrednosti glavnih minora J_n ($n \in \mathbb{N}_0$) Jacobijeve matrice J, koja je izgrađena od nizova koeficijenata tročlane relacije α_k, $k \in \mathbb{N}_0$, β_k, $k \in \mathbb{N}$. Zbog ove relacije, očekujemo izvesnu vezu između spektra Jacobijevog operatora J i tačaka nagomilavanja skupa svih nula ortogonalnih polinoma i/ili skupa svih sopstvenih vrednosti glavnih minora J_n, $n \in \mathbb{N}_0$, Jacobijeve matrice J.

Ako je x sopstvena vrednost Jacobijevog operatora J, onda je očigledno vektor $\mathbf{p}(x) = (p_0(x), p_1(x), \ldots) \in \ell^2$ sopstveni vektor operatora J i važi jednakost

$$x\mathbf{p}(x) = J\mathbf{p}(x).$$

I obrnuto, ako je $\mathbf{p}(x) = (p_0(x), p_1(x), \ldots) \in \ell^2$, onda je x sopstvena vrednost Jacobijevog operatora J i važi gornja jednakost. Drugo linearno nezavisno rešenje q_k, $k \in \mathbb{N}_0$, naravno, ne može biti sopstveni vektor Jacobijevog operatora J jer zbog $q_{-1} \neq 0$, očigledno $x\mathbf{q}(x) \neq J\mathbf{q}(x)$.

Ako je x sopstvena vrednost Jacobijeve matrice J, jasno je da operator $x - J$ ima jezgro dimenzije jedan, što je direktna posledica toga što je $\mathbf{p}(x) \in \ell^2$ sopstveni vektor operatora J, a vektor $\mathbf{q}(x)$ drugo linearno nezavisno rešenje jednačine (1.6) to nije.

Vektor $\mathbf{q}(x) = (q_0(x), q_1(x), \ldots)$, međutim, možemo dovesti u vezu sa sopstvenim vektorom operatora $J^{(1)}$. Ako je Jacobijeva matrica J izgrađena od nizova α_k, $k \in \mathbb{N}_0$, β_k, $k \in \mathbb{N}$, sa $J^{(n)}$ označavamo Jacobijevu matricu izgrađenu od nizova α_{k+n}, $k \in \mathbb{N}_0$, β_{k+n}, $k \in \mathbb{N}$. Na primer, za $J^{(1)}$ imamo

$$J^{(1)} = \left\| \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & \ldots \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \ldots \\ 0 & \beta_3 & \alpha_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right\|. \tag{1.14}$$

Kažemo, takođe, da su Jacobijeve matrice $J^{(n)}$ izgrađene iz zakašnjenih nizova α_k, $k \in \mathbb{N}_0$, β_k, $k \in \mathbb{N}$, za n elemenata. Očigledno imamo da je vektor $\mathbf{q}^{(1)}(x) = (q_1(x), q_2(x), \ldots)$, izgrađen od drugog linearno nezavisnog rešenja jednačine (1.9), pod uslovom da je iz ℓ^2, sopstveni vektor operatora $J^{(1)}$.

Kako je $\deg(p_n) = n$, $n \in \mathbb{N}_0$, za drugo linearno nezavisno rešenje važi $\deg(q_n) = n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, što se jednostavno može proveriti indukcijom.

U [103], nalazimo sledeću definiciju:

Definicija 1.9 Jacobijeva matrica J se naziva determinisana ako i samo ako bar jedan od vektora $\mathbf{p}(0)$ i $\mathbf{q}(0)$ nije element prostora ℓ^2.

Na osnovu prethodnog, ova definicija, u stvari, znači da J i $J^{(1)}$ nemaju istovremeno broj nula za sopstvenu vrednost. Naime, u [103] je dokazana implikacija: *Ako su vektori* $\mathbf{p}(z)$ *i* $\mathbf{q}(z)$ *istovremeno elementi prostora* ℓ^2 *za neko* $z \in \mathbb{C}$, *onda za svako* $z \in \mathbb{C}$ *vektori* $\mathbf{p}(z)$ *i* $\mathbf{q}(z)$ *pripadaju prostoru* ℓ^2. S druge strane, za realnu Jacobijevu matricu znamo da ako je matrica determinisana, onda je Jacobijev operator J samo-pridružen, tj. Jacobijeva matrica je pravilna, i obrnuto, ako je Jacobijev operator J samo-pridružen, Jacobijeva matrica pravilna, onda je Jacobijeva matrica determinisana (videti [5]).

U [6] je dokazano da su pojmovi *pravilna Jacobijeva matrica* i *determinisana Jacobijeva matrica* ekvivalentni i za kompleksne Jacobijeve matrice.

Teorema 1.22 *Jacobijeva matrica J je pravilna ako i samo ako je determinisana.*

Odavde imamo sledeću lemu.

Lema 1.2 *Neka je J pravilna, determinisana, Jacobijeva matrica. Ako je x sopstvena vrednost operatora J, onda x nije sopstvena vrednost operatora $J^{(1)}$ i obrnuto. Jezgro operatora $z - J$ ima dimenziju manju ili jednaku* 1.

Dokaz.- Ako je x istovremeno sopstvena vrednost operatora J i $J^{(1)}$, onda su $\mathbf{p}(x)$ i $\mathbf{q}^{(1)}(x)$ elementi prostora ℓ^2. Međutim, ako je $\sum_{k \in \mathbb{N}} |q_k(x)|^2$ sumabilno, onda je i $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} |q_k(x)|^2$ sumabilno. Ovo znači da su $\mathbf{p}(x)$ i $\mathbf{q}(x)$ istovremeno elementi prostora ℓ^2, pa je Jacobijeve matrica nedeterminisana.

Zbog $x\mathbf{q}(x) \neq J\mathbf{q}(x)$ jer je $q_{-1}(x) \neq 0$, imamo da jezgro operatora $x - J$ može sadržati eventualno vektor $\mathbf{p}(x)$, i u tom slučaju ima dimenziju 1; u suprotnom, jezgro je trivijalno. $\square$

Jedan od dovoljnih uslova determinisanosti za proizvoljnu kompleksnu Jacobijevu matricu može se naći u [5]. Specijalan slučaj realne Jacobijeve matrice je tretiran u [103].

Teorema 1.23 *Jacobijev operator J je determinisan pod uslovom*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|\beta_k|} = +\infty.$$

Za slučaj realne Jacobijeve matrice J (realni nizovi α_k, $k \in \mathbb{N}_0$, $\beta_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$), pojam determinisanosti Jacobijeve matrice je ekvivalentan pojmu determinisanosti momentnog problema (videti [38, str. 414]).

Neka je zadat realan niz momenata m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, takav da su sve Hankelove determinante (1.2) pozitivne. Definišemo dva momentna problema.

Koje uslove mora da zadovolji niz momenata m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, tako da postoji jedinstvena pozitivna mera μ sa nosačem $\operatorname{supp}(\mu) = \mathbb{R}_0^+$, i tako da važi

$$m_k = \int x^k \mathrm{d}\mu, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Ovako formulisan momentni problem nazivamo Stiletjesovim momentnim problemom.

Drugi momentni problem ima sledeću formulaciju. Koje uslove mora da zadovolji niz momenata m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, tako da postoji jedinstvena pozitivna mera μ sa nosačem $\operatorname{supp}(\mu) = \mathbb{R}$, i tako da važi

$$m_k = \int x^k \mathrm{d}\mu, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Momentni problem formulisan na ovaj način nazivamo Hamburgerov momentni problem.

Definicija 1.10 Momentni problem je determinisan ako postoji jedinstvena mera μ koja je rešenje momentnog problema.

Navedimo primer različitih mera koje imaju isti niz momenata (videti [12, str. 73]). Krenemo od dva integrala

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}, \quad \text{i} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \sin(2\pi u) \mathrm{d}u = 0.$$

Uvođenjem smene $u = \log x - (n+1)/2$, dobijamo

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} x^n e^{-\log^2 x} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} e^{(n+1)^2/4}, \quad \int_{\mathbb{R}_0^+} x^n \sin(2\pi \log(x)) e^{-\log^2 x} \mathrm{d}x = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Kombinovanjem nalazimo

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} x^n(1 + C\sin(2\pi\log x))e^{-\log^2 x}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}e^{(n+1)^2/4}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

odakle zaključujemo da za $|C| < 1$, sve pozitivne mere $(1 + C\sin(2\pi\log x))e^{-\log^2 x}\mathrm{d}x$ imaju isti niz momenata $m_n = \sqrt{\pi}e^{(n+1)^2/4}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Prema tome, postoji niz momenata takav da Stiletjesov (Hamburgerov) momentni problem ima beskonačno mnogo rešenja. Postoje i mnogi drugi primeri nizova momenata koji imaju nejedinstvenu reprezentaciju u smislu Stieltjesovog ili Hamburgevog momentnog problema.

Jedan način konstrukcije preko Fourierove transformacije, koji daje čitav niz mera koje imaju sve momente jednake nuli, potiče iz [38, str. 412]. Neka je f analitička parna funkcija na $\mathbb{R}$, takva da su joj svi izvodi u nuli i beskonačnosti jednaki nuli. Takva je, na primer, funkcija $f(x) = \exp(-1/x^2 - x^2)$. Označimo sa g njenu Fourierovu transformaciju. Tada imamo

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t = f(x).$$

Kako je f parna, g je realna i $g(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(xt)f(x)\mathrm{d}x$. Takođe, zbog uslova nametnutih funkciji f, primenjujući parcijalnu integraciju k puta, dobijamo

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(\mathrm{i}t)^k}\int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}xt}f^{(k)}(x)\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Odavde zaključujemo da pri $|t| \to +\infty$, g teži nuli brže nego bilo koji stepen $|t|^{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, tako da su funkcije $g(t)t^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, integrabilne na $\mathbb{R}$, pa je

$$\mathrm{i}^k\int_{\mathbb{R}} g(t)t^k\mathrm{d}t = f^{(k)}(0) = 0.$$

Dalje zaključujemo da su svi momenti mere $g(t)\mathrm{d}t$, podržane na $\mathbb{R}$, jednaki nuli. Takođe, možemo naći dve pozitivne mere koje imaju iste momente. To su $g^+(t)\mathrm{d}t$ i $g^-(t)\mathrm{d}t$, gde je $g^+(t) = \max\{g(t), 0\}$ i $g^-(t) = \max\{-g(t), 0\}$.

Takođe, možemo konstruisati meru podržanu na skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$, čiji su svi momenti jednaki nula. Sa f označimo funkciju koja je analitička i parna i takva da su joj svi izvodi u nuli i π jednaki nuli. Takva je, na primer, funkcija $f = \exp(-1/x^2 - 1/(\pi^2 - x^2))$. Označimo sa g_k, $k \in \mathbb{Z}$, sledeći niz

$$g_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp(-\mathrm{i}kx)\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Očigledno je $g_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, zbog parnosti funkcije f. Takođe, primenjujući parcijalnu integraciju n puta možemo dobiti sledeću ocenu

$$g_k = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(\mathrm{i}k)^n}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}\exp(-\mathrm{i}kx)\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z},$$

odakle zaključujemo da g_k opada brže od bilo kog stepena $|k|^{-n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, tako da imamo

$$\mathrm{i}^n \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k k^n = f^{(n)}(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Odavde zaključujemo da mera podržana na celim brojevima $\mathbb{Z}$, sa masama g_k, ima sve momente jednake nuli. Slično možemo konstruisati g^+ i g^-, podržane na $\mathbb{Z}$, koje imaju iste momente.

Kriterijum jedinstvenosti rešenja momentnog problema može biti iskazan jednostavno koristeći pojam samo-pridruženog operatora. Ali prvo moramo reći nešto o spektralnoj rezoluciji simetričnog operatora.

Pokažimo najpre jednu važnu relaciju. Ako je data pravilna Jacobijeva matrica J, tada, na osnovu teoreme 1.9, imamo jedinstveno određen linearni funkcional $\mathcal{L} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ u odnosu na koji su odgovarajući polinomi p_n, $n \in \mathbb{N}_0$, izgrađeni iz tročlane relacije (1.9) ortogonalni (videti definiciju 1.4 i skalarni proizvod $\langle .,. \rangle_{\mathcal{L}}$).

S obzirom da je Jacobijevu matricu J trodijagnalna, možemo odrediti sve njene potencije. Matrice J^k, $k \in \mathbb{N}_0$, postoje gde je množenje operatora obično matrično množenje. Formirajmo linearno preslikavanje $\mathcal{I}$ linearnog prostora $(\mathrm{Lin}(\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}), \mathbb{R})$ na linearni prostor $(\ell_0^2, \mathbb{R})$ na sledeći način

$$\mathcal{I}(p_k) = \mathbf{e}_k, \quad k \in \mathbb{N}_0, \qquad \mathcal{I}(\alpha p + \beta q) = \alpha\mathcal{I}(p) + \beta\mathcal{I}(q), \quad p, q \in \mathcal{P},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

gde je p_k, $k \in \mathbb{N}_0$, niz ortonormiranih polinoma sa koeficijentima tročlane relacije koji grade Jacobijevu matricu J. Lako se dokazuje da je $\mathcal{I}$ izomorfizam. Štaviše, $\mathcal{I}$ je izometrički izomorfizam jer očigledno važi

$$\delta_{n,k} = \langle p_n, p_k \rangle_{\mathcal{L}} = \langle \mathcal{I}(p_n), \mathcal{I}(p_k) \rangle = \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_k \rangle = \delta_{n,k}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0,$$

gde sa $\langle .,. \rangle_{\mathcal{L}}$ označavamo skalarni proizvod na $(\mathrm{Lin}(\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}), \mathbb{R})$, u odnosu na koji je niz polinoma p_k, $k \in \mathbb{N}_0$ ortogonalan. Sa $\langle .,. \rangle$ označavamo skalarni proizvod na $(\ell_0^2, \mathbb{R})$. Naravno, zbog linearnosti, osobinu očuvanja skalarnog proizvoda imamo za svaki element iz $(\mathrm{Lin}(\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}), \mathbb{R})$.

Zbog, toga što nam je skalarni proizvod na prostoru polinoma zadat bez konjugacije, definicija 1.4, izometrički izmorfizam je ograničen za lineale nad poljem realnih brojeva. Međutim, možemo uspostaviti jednakost između skalarnih proizvoda i za slučaj kada je prva komponenta u skalarnom proizvodu iz lineala nad kompleksnim brojevima, a druga iz lineala nad poljem realnih brojeva. Naime, važi

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}} = \langle \mathcal{I}(p), \mathcal{I}(q) \rangle, \quad p \in (\mathrm{Lin}(\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}), \mathbb{C}),\ q \in (\mathrm{Lin}(\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}), \mathbb{R}).$$

Ako uzmimo $p = \sum_k \gamma_k p_k$ i $q = \sum_\nu \eta_\nu p_\nu$, $\gamma_k \in \mathbb{C}$, $\eta_\nu \in \mathbb{R}$, onda je

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}} = \sum_k \sum_\nu \gamma_k \eta_\nu \langle p_k, p_\nu \rangle_{\mathcal{L}} = \sum_k \sum_\nu \gamma_k \eta_\nu \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\nu \rangle = \langle \sum_k \gamma_k \mathbf{e}_k, \sum_\nu \eta_\nu \mathbf{e}_\nu \rangle.$$

S obzirom da je

$$J\mathbf{e}_k = \beta_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \alpha_k \mathbf{e}_k + \beta_k \mathbf{e}_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

možemo zaključiti (indukcijom) da važi sledeća jednostavna jednakost

$$p_k(J)\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

jer je niz $\mathbf{e}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, rešenje iste diferencne jednačine kao niz ortonormiranih polinoma p_k, $k \in \mathbb{N}_0$, pri čemu ulogu promenljive x preuzima Jacobijev operator J. Kako $x^n \in (\mathrm{Lin}(\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}), \mathbb{C})$, možemo pisati

$$x^n = \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu p_\nu \quad \text{ili} \quad J^n\mathbf{e}_0 = \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu p_\nu(J)\mathbf{e}_0 = \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu \mathbf{e}_\nu, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Jedna jednačina se dobija iz druge, primenom izometričnog izomnorfizma $\mathcal{I}$, i onda je jasno da važi

$$m_n = \langle x^n, 1\rangle_{\mathcal{L}} = \langle J^n\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0\rangle, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Upravo smo dokazali sledeću teoremu (videti [19], [39], [3]):

Teorema 1.24 *Neka je J Jacobijeva matrica i neka su m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, momenti odgovarajućeg linearnog funkcionala $\mathcal{L}$ izgrađenog prema teoremi* 1.9. *Tada*

$$\mathcal{L}(x^k) = \langle J^k\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0\rangle = m_k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Ako je Jacobijeva matrica relna (realni nizovi α_k, $k \in \mathbb{N}_0$, β_k, $k \in \mathbb{N}$), onda je izometrički izomorfizam uspostavljen nad linearnim prostorima $(\mathrm{Lin}(\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}), \mathbb{C})$ i $(\ell_0^2, \mathbb{C})$, pod uslovom da promenimo definiciju skalarnog proizvoda (definicija 1.4) i prihvatimo standardnu definiciju koja uključuje konjugaciju po drugoj promenljivoj. Drugim rečima, na ovaj način dolazimo do pozitivno definitnog slučaja i pozitivno definitnog skalarnog proizvoda $\langle ., .\rangle_{\mathcal{L}}$.

Za slučaj ograničenog operatora J znamo da je spektar operatora $\sigma(J)$ ograničen i zatvoren skup u kompleksnoj ravni $\mathbb{C}$ (videti [38, str. 195], [91, str. 165]). U stvari, znamo da je spektar ograničen normom operatora J (videti [38, str. 196], [91, str. 162, 164]). Rezolventni skup operatora J označavamo sa $\Omega(J)$. Znamo da je rezolventni skup operatora J otvoren skup, zbog $\Omega(J) = \mathbb{C}\backslash\sigma(J)$.

Sledeća teorema rešava pitanje jedinstvenosti rešenja momentnog problema za slučaj ograničenog simetričnog operatora J (videti [38, str. 263]).

Teorema 1.25 *Neka je J simetrični i ograničeni operator na nekom Hilbertovom prostoru. Onda postoji jedinstvena mera E ortogonalnih projekcija na $\sigma(J)$, tako da važi $E(S \cap T) = E(S)E(T)$ i*

$$p(J) = \int_{\sigma(J)} p(x)\mathrm{d}E(x), \quad p \in \mathcal{P}.$$

Integral postoji u smislu operatorske norme.

Na osnovu teoreme 1.24, jedinstvenu meru koja je rešenje momentnog problema za slučaj ograničenog simetričnog operatora J, možemo identifikovati kao $\langle E(.)\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0\rangle$.

Napomenimo da prethodna teorema važi za svaki ograničeni simetrični operator J, a ne samo za specijalan slučaj Jacobijevog operatora.

Navedimo samo neke osobine mere E. Mera E je definisana na Borelovim podskupovima $\mathcal{B}(\sigma(J))$ skupa $\sigma(J)$. Neka su S i T proizvoljni elementi $\mathcal{B}(\sigma(J))$, onda mera E ima sledeće osobine: $E^*(S) = E(S)$. $||E(S)|| \leq 1$. $E(\phi) = 0$, $E(\sigma(J)) = I$. Ako je $S \cup T = \phi$, onda $E(S \cup T) = E(S) + E(T)$, $E(S)J = JE(S)$. $E(S \cap T) = E(S)E(T)$. $E(S)$ je ortogonalna projekcija. Ako je $S \cap T = \phi$, onda su skupovi slika operatora $E(S)$ i $E(T)$ ortogonalni, $E(S)E(T) = E(T)E(S)$.

Iz ovih osobina vidimo da je $E(S)$, $S \in \mathcal{B}(\sigma(J))$, ortogonalna projekcija, tako da meru E zovemo mera čije su vrednosti ortogonalne projekcije. Primetimo da je spektralna mera pozitivna jer očito imamo

$$\langle E(S)\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \rangle = \langle E(S)^2 \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \rangle = \langle E(S)\mathbf{e}_0, E(S)\mathbf{e}_0 \rangle = ||E(S)\mathbf{e}_0||^2 > 0,$$

gde je $S \in \mathcal{B}(\sigma(J))$.

Za slučaj simetričnog kompaktnog operatora J prethodna teorema o spektralnoj rezoluciji postaje posebno jednostavna. Za slučaj simetričnog kompaktnog operatora J, znamo da je spektar prebrojiv skup realnih brojeva λ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, koji konvergira ka nuli; naravno, svi λ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, su sopstvene vrednosti operatora J. Tačka nula je jedina tačka nagomilavanja spektra i pripada spektru jer je spektar zatvoren skup. Operator J može imati sopstvenu vrednost u nuli, ali i ne mora. Označimo sa E_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, ortogonalne projekcije na sopstvene potprostore operatora J. Kako je skup ortonormiranih sopstvenih vektora $\mathbf{y}_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, kompletan u ℓ^2, svaki vektor $\mathbf{x} \in \ell^2$, možemo odrediti kao

$$\mathbf{x} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_\nu \rangle \mathbf{y}_\nu.$$

Primenjujući operator J na ovu jednakost dobijamo

$$J\mathbf{x} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \lambda_\nu \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_\nu \rangle \mathbf{y}_\nu.$$

Dakle, operator J možemo shvatiti i kao (videti [38, str. 320], [91, str. 194])

$$J = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \lambda_\nu \langle ., \mathbf{y}_k \rangle \mathbf{y}_k = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \lambda_\nu E_\nu = \int_{\sigma(J)} x \mathrm{d}E(x),$$

gde je

$$E(S) = \sum_{\lambda_\nu \in S, \nu \in \mathbb{N}} E_\nu,$$

pri čemu smo koristili $E_\nu = \langle ., \mathbf{y}_\nu \rangle \mathbf{y}_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$.

U slučaju ograničenog operatora J znamo da je, za dovoljno veliko $z > ||J||$, operator $z - J$ invertibilan (videti [38, str. 195], [91, str. 162], [46, str. 165]). Često funkciju $R : \mathbb{C} \mapsto \ell^2$, $R(z) = (z - J)^{-1}$, zovemo i rezolventna funkcija (videti [91, str. 165], [38, str. 195]). U stvari, operator $(z - J)^{-1}$ (videti [46, str. 165], [38, str. 194], [91, str. 162]), možemo odrediti preko sledeće relacije

$$(z - J)^{-1} = \frac{1}{z} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{1}{z^\nu} J^\nu, \quad |z| > ||J||.$$

Definicija 1.11 Pod Weylovom funkcijom operatora J podrazumevamo sledeću funkciju

$$\phi(z) = \langle (z-J)^{-1}\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0\rangle, \quad z \in \Omega(J).$$

Kako je rezolventa $(z-J)^{-1}$ analitička funkcija, sa vrednostima u skupu $B(\ell^2)$ na $\Omega(J)$ (videti [34, str. 174], [38, str. 195]), to je i proizvod $(z-J)^{-1}\mathbf{e}_0$ analitička vektorska funkcija na ℓ^2, prema čemu je i za svaki ograničeni linearni funkcional $L \in B(\ell^2)$, funkcija $L((z-J)^{-1}\mathbf{e}_0)$ analitička prema ekvivalenciji stroge i jake analitičnosti (videti [38, str. 112]). Naravno, dovoljno je uzeti $L = \langle ., \mathbf{e}_0\rangle \in B(\ell^2)$ i zaključiti da je Weylova funkcija analitička na $\Omega(J)$ (videti [5], [7]).

Koristeći pomenuti razvoj operatora $(z-J)^{-1}$ i teoremu 1.24, možemo formalno pisati

$$\phi(z) = \frac{1}{z}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\langle J^k\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0\rangle}{z^\nu} = \frac{1}{z}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{m_\nu}{z^\nu}, \quad |z| > ||J||,$$

gde je m_k, odgovarajući niz momenata određen nizovima β_k, $k \in \mathbb{N}$, α_k, $k \in \mathbb{N}$, od kojih je J izgrađen.

Pod Cauchyjevom transformacijom mere μ (videti [38, str. 381]), podrazumevamo sledeću funkciju

$$\hat{\mu}(z) = \int \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{z-x}, \quad z \notin \mathrm{supp}(\mu).$$

Ako je nosač mere μ ograničen skup sa $|\mathrm{supp}(\mu)|$, onda za $|z| > |\mathrm{supp}(\mu)|$ imamo

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{x^\nu}{z^\nu}, \quad x \in \mathrm{supp}(\mu).$$

Kako su za sve mere koje mi ovde razmatramo, polinomi integrabilne funkcije, imamo formalno

$$\hat{\mu}(z) = \frac{1}{z}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{1}{z^k}\int x^k \mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{z}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{m_k}{z^k}, \quad |z| > |\mathrm{supp}(\mu)|,$$

gde su kao i do sada m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, momenti mere μ.

Pod uslovom da red $\sum_{\nu=0}^{+\infty} m_\nu/z^\nu$, konvergira za neko z_0, znamo da će da konvergira i za $|z| > |z_0|$ (videti [79, str. 182]). Odavde zaključujemo da su Weylova funkcija ϕ i Cauchyjeva transformacija mere μ jednake i analitičke na nekoj otvorenoj okolini tačke ∞. U stvari, jednostvno možemo odrediti oblast konvergencije reda primenjujući Abelovu teoremu o konvergenciji potencijalnih redova (videti [79, str. 182]). Možemo tvrditi da red konvergira, na primer, na skupu $\{z \mid |z| > \sup_{k\in\mathbb{N}_0}|m_k|^{1/k}\}$.

Naravno, za kompleksne mere sa ograničenim nosačem, uvek imamo

$$\sup_{k\in\mathbb{N}_0}|m_k|^{1/k} < +\infty.$$

Neka je nosač mere μ ograničen sa $|\sup(\mu)|$ (videti [74, str. 158]). Tada, za svako $k \in \mathbb{N}_0$, imamo

$$\left|\int x^k \mathrm{d}\mu\right| \le \int |x|^k \mathrm{d}|\mu| \le |\mathrm{supp}(\mu)|^k \int \mathrm{d}|\mu| = |\mathrm{supp}(\mu)|^k |\mu|(\mathrm{supp}(\mu)),$$

odakle zaključujemo $\sup_{k\in\mathbb{N}_0} |m_k|^{1/k} \leq |\operatorname{sup}(\mu)|$, s obzirom da je funkcija f μ-integrabilna u odnosu na kompleksnu meru ako i samo ako je integrabilna u odnosu na apsolutnu varijaciju $|\mu|$ komplekse mere μ (videti [74, str. 142]), a $|\mu|$ je konačna mera (videti [74, str. 138]).

Posmatrajmo sada regularni linearni funkcional $\mathcal{L}$, zadat preko kompleksne mere μ relacijom (1.1). Pod uslovom da je nosač mere μ ograničen i da je odgovarajući Jacobijev operator (izgrađen od koeficijenata tročlane relacije za ortonormirane polinome u odnosu na μ) ograničen, postoji otvorena okolina tačke ∞, Ω_0, takva da važi $\phi(z) = \hat{\mu}(z)$, $z \in \Omega_0$.

Teorema 1.26 *Neka je regularni linearni funkcional zadat sa*

$$\mathcal{L}(p) = \int p \, \mathrm{d}\mu, \quad p \in \mathcal{P},$$

i neka je nosač mere μ ograničen. Neka je dalje Jacobijev operator, izgrađen od koeficijenata tročlane relacije polinoma ortonormiranih u odnosu na $\mathcal{L}$, ograničen. Tada postoji otvorena okolina Ω_0 tačke ∞, takva da važi

$$\phi(z) = \hat{\mu}(z), \quad z \in \Omega_0.$$

Primetimo da smo pretpostavili i da je nosač mere μ ograničen i da je Jacobijev operator ograničen. Pokazaćemo primerom da u opštem slučaju sa kompleksnom merom μ, možemo imati ograničeni nosač mere i neograničen Jacobijev operator. U slučaju ograničenog operatora pokazaćemo da se može naći relacija ortogonalnosti na izvesnom ograničenom skupu. Naravno, za slučaj simetričnog i ograničenog Jacobijevog operatora, mera iz teoreme o spektralnoj rezoluciji ima ograničeni nosač. Za slučaj pozitivne mere μ, sa ograničenim nosačem, podsećamo se teoreme date u [90].

Teorema 1.27 *Neka je μ pozitivna apsolutno neprekidna mera na $[-1,1]$ sa $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}x = w(x)$, takva da su polinomi μ-integrabilni. Onda*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_k = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \beta_k = \frac{1}{2},$$

tj. Jacobijev operator je ograničen.

Za slučaj samo-pridruženog operatora J, jedinstvenu meru koja je rešenje momentnog problema možemo dobiti iz spektralne rezolucije samo-pridruženog operatora J. U [38, str. 378] imamo sledeću teoremu.

Teorema 1.28 *Neka je J samo-pridruženi (neograničen) operator. Sa $\mathrm{D}(J)$ označimo domen operatora J. Neka su dalje S i T bilo koji Borelovi skupovi realne prave. Postoji jedinstvena spektralna rezolucija operatora J, tj. mera E, ortogonalnih projekcija, definisana na svakom Borelovom skupu realne prave, sa sledećim osobinama: $E(\phi) = 0$, $E(\mathbb{R}) = I$; $E(S \cap T) = E(S)E(T)$; $E^*(S) = E(S)$; $E(S)J = JE(S)$, pri čemu $E(S) : \mathrm{D}(J) \mapsto \mathrm{D}(J)$ i za svako $\mathbf{x} \in \mathrm{D}(J)$, $E(S)J\mathbf{x} = JE(S)\mathbf{x}$; $\mathrm{D}(J) = \{\mathbf{x} \mid \int x^2 \mathrm{d}\langle E(x)\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle < +\infty\}$;*

- *Za svako* $\mathbf{x} \in \mathrm{D}(J)$, *imamo*

$$J\mathbf{x} = \int x \mathrm{d}E(x)\mathbf{x};$$

- *Ako* $\mathbf{x} \in \mathrm{D}(J^k)$ *i* $\mathbf{y} \in \ell^2$, *imamo*

$$\langle J^k \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int x^k \mathrm{d}\langle E(x)\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Naravno, mera $\langle E(.)\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \rangle$, daje jedinstveno rešenje Hamburgerovog momentnog problema pod uslovom da je Jacobijeva matrica J pravilna. Ako nije, postoji više samo-pridruženih ekstenzija operatora J, što za sobom povlači nejedinstvenost rešenja momentnog problema.

1.3 Spektar Jacobijevog operatora

U ovoj sekciji uglavnom posmatramo ograničeni Jacobijev operator J jer se pre svega bavimo pitanjima konvergencije Gaussovih kvadraturnih formula za ograničeni Jacobijev operator. Takođe, dajemo i neke rezultate vezane za neograničeni, ali pravilan, zatvoreni Jacobijev operator, a pomenućemo i nedeterminisan Jacobijev operator zbog kompletnosti.

Kao što je poznato, spektar ograničenog linearnog operatora možemo podeliti u disjunkntne skupove koje nazivamo tačkasti, kontinualni i rezidualni spektar operatora J (videti [91, str. 189]). Pomenute spektre označavamo redom sa $\sigma_p(J)$, $\sigma_c(J)$ i $\sigma_r(J)$. Označimo sa $\mathcal{N}(J)$ i $\mathcal{R}(J)$ jezgro i rang operatora $J : \mathrm{D}(J) \mapsto \ell^2$. Naravno, u slučaju da je J ograničen, na osnovu teoreme o zatvorenom grafiku (videti [34, str. 166], [38, str. 170,171], [91, str. 132]), imamo $\mathrm{D}(J) = \ell^2$, pri čemu važi sledeća definicija:

Definicija 1.12 Imamo

$$\begin{aligned}
\sigma_p(J) &= \{z \mid z - J \text{ nije jedan} - \text{jedan}\}, \\
\sigma_c(J) &= \{z \mid z - J \text{ jeste jedan} - \text{jedan, ali } \mathcal{R}(z - J) \neq \overline{\mathcal{R}(z - J)} = \ell^2\}, \\
\sigma_r(J) &= \{z \mid z - J \text{ jeste jedan} - \text{jedan, ali } \overline{\mathcal{R}(z - J)} \neq \ell^2\}.
\end{aligned}$$

Prema uslovima koji definišu skupove, znamo da je $\sigma(J)$ disjunktna unija ovih skupova (videti [91, str. 189]).

Neka je $C : \ell^2 \mapsto \ell^2$ operator konjugovanja, tj. za $\mathbf{y} = (y_0, \ldots) \in \ell^2$ imamo $C\mathbf{y} = (\overline{y}_0, \ldots) \in \ell^2$. Jasno je da važi $C^2\mathbf{y} = \mathbf{y}$. Primetimo da je $J^H = CJC$, gde je J^H Jacobijev operator sa konjugovanim elementima.

Koristeći teoremu 1.19, znamo da važi $J^H = J^*$, pod uslovom da je J determinisan operator. Takođe, za $\mathbf{x} \in \mathcal{N}((z - J)^*)$ imamo

$$0 = ((z - J)^*)C\mathbf{x} = (C(z - J)C)C\mathbf{x} = C(z - J)\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{N}(z - J),$$

tj. jezgra operatora $z-J$ i $(z-J)^*$ su međusobno konjugovana. Jasno je, na osnovu definicije zbira ograničenog i gusto definisanog operatora, da važi $\mathrm{D}(J)=\mathrm{D}(z-J)$ za $z\in\mathbb{C}$. Ali, takođe,

$$(z-J)\mathbf{x}=\mathbf{y}\in\ell^2 \Leftrightarrow (C(z-J)C)C\mathbf{x}=(z-J)^*C\mathbf{x}=C\mathbf{y}\in\ell^2,$$

što znači da su domeni međusobno konjugovani. Ali, takođe, iz prethodne jednačine imamo i da su rangovi konjugovani (videti [5]).

Ovim dobijamo sledeću lemu:

Lema 1.3 *Pod uslovom da je Jacobijev operator J determinisan*

$$(z-J)^*=C(z-J)C,\quad \mathcal{N}(z-J)=C\mathcal{N}((z-J)^*),$$
$$\mathcal{R}(z-J)=C\mathcal{R}((z-J)^*),\quad \mathrm{D}(J)=\mathrm{D}(z-J)=C\mathrm{D}((z-J)^*).$$

Kako znamo, za gusto definisane operatore na Hilbertovom prostoru imamo (videti [34, str. 267], za ograničene operatore videti [91, str. 99])

$$\mathcal{N}(J)=\mathcal{R}(J^*)^\perp,\quad \mathcal{N}(J^*)=\mathcal{R}(J)^\perp.$$

Takođe, imamo $\mathcal{R}(J)=\overline{\mathcal{R}(J)}$ ako i samo ako $\mathcal{R}(J^*)=\overline{\mathcal{R}(J^*)}$. U slučaju da je rang zatvoren skup, važi $\ell^2=\mathcal{N}(J)\bigoplus\mathcal{R}(J^*)$ i $\ell^2=\mathcal{N}(J^*)\bigoplus\mathcal{R}(J)$ (videti [34, str. 267]).

S druge strane, u slučaju kada jezgro operatora $z-J$ nije trivijalno, imamo da je $\dim(\mathcal{N}(z-J))=1$. Međutim, zbog prethodne leme, takođe, $\dim(\mathcal{N}((z-J)^*)=1$, i obrnuto (videti lemu 1.2). Prema tome, zaključujemo da je rezidualni spektar operatora J prazan jer $\overline{\mathcal{R}(z-J)}\neq\ell^2$ povlači da je $C\mathcal{N}(z-J)=\mathcal{N}((z-J)^*)=\mathcal{R}(z-J)^\perp\neq\{\mathbf{0}\}$ (trivijalni ortogonalni komplement ima samo gust linearni potprstor (videti [91, str. 83])). Dakle, očigledno je da operator $z-J$ nije jedan-jedan.

Mi ćemo prihvatiti malo drugačiju particiju spektra $\sigma(J)$. Operator J se naziva Fredholmov ako je $\dim(\mathcal{N}(J))<+\infty$, $\dim(\mathcal{R}(J)^\perp)<+\infty$ i $\mathcal{R}(J)=\overline{\mathcal{R}(J)}$.

Definicija 1.13 Esencijalni spektar zatvorenog Jacobijevog operatora je skup

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(J)=\{z\mid z-J\quad \text{nije Fredholmov operator}\}.$$

Za zatvoren skup S Hilbertovog prostora znamo da važi (videti [34, str. 141], [91, str. 152]),

$$\dim(S)=\mathrm{codim}(S^\perp),\quad \mathrm{codim}(S)=\dim(S^\perp).$$

Pod uslovom da je rang operatora $z-J$ zatvoren skup, zbog veze

$$\ell^2=\mathcal{N}(z-J)\oplus\mathcal{R}((z-J)^*)=\mathcal{N}((z-J)^*)\oplus\mathcal{R}(z-J),$$

imamo

$$\dim(\mathcal{N}(z-J))=\mathrm{codim}(\mathcal{R}((z-J)^*)=\dim(\mathcal{N}((z-J)^*))=\mathrm{codim}(\mathcal{R}(z-J))\leq 1.$$

Drugim rečima, pod uslovom da je rang operatora $z - J$ zatvoren, onda je operator $z - J$ Fredholmov. Prema tome, operator nije Fredholmov pod uslovom da rang nije zatvoren i dobijamo sledeću karakterizaciju esencijalnog spektra (videti [5])

$$\sigma_{\text{ess}}(J) = \{z \mid \mathcal{R}(z - J) \neq \overline{\mathcal{R}(z - J)}\}.$$

U slučaju da je $\dim(\mathcal{R}(J)^{\perp}) < +\infty$, znamo da je rang operatora zatvoren (videti [34, str. 233, 231], za ograničeni operator videti [38, str. 171]).

Neke osnovne osobine esencijalnog spektra su da je on uvek zatvoren i neprazan skup u slučaju Jacobijevog operatora J. Pomenimo da esencijalni spektar operatora J ostaje nepromenjen pri kompaktnoj perturbaciji $\sigma_{\text{ess}}(J) = \sigma_{\text{ess}}(J + K)$, za svaki kompaktni operator $K : \ell^2 \mapsto \ell^2$ (videti [34, str. 244]).

Međutim, trodijagonalnost ne daje nikakve dalje restrikcije skupu esencijalnog spektra. Specijalno za ograničeni Jacobijev operator, uz pomoć jednakosti $\sigma_{\text{ess}}(J) = \sigma_{\text{ess}}(J + K)$, za kompaktni operator $K : \ell^2 \mapsto \ell^2$, može se pokazati da esencijalni spektar može biti bilo koji kompaktan skup kompleksne ravni koji ima komplement sa prebrojivo mnogo povezanih komponenti (videti [7]).

Takođe, pomenimo da u slučaju samo-pridruženog operatora J, imamo $\sigma_{\text{ess}}(J) \subset \mathbb{R}$ (videti [34, str. 272], [38, str. 356, 390]) i to kompaktan podskup realne prave, pod uslovom da je operator J ograničen (videti [91, str. 192]), i neograničen podskup realne prave ako je operator J neograničen (videti [34, str. 176]). Specijalno, slučaj Čebiševljeve mere II vrste, tj. $(1 - x^2)^{1/2}\chi_{[-1,1]}(x)\mathrm{d}x$, koja ima koeficijente tročlane relacije $\alpha_k = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\beta_k = 1/2$, $k \in \mathbb{N}$, je posebno dobro proučen i zna se da je spektar odgovarajućeg Jacobijevog operatora J^C skup

$$\sigma(J^C) = \sigma_{\text{ess}}(J^C) = [-1, 1].$$

Ovo je direktna posledica teoreme o spektralnoj rezoluciji. S obzirom da je mera pozitivna, teorema o spektralnoj rezoluciji mora upravo da rekonstruiše istu meru, pa je tako spektar interval $[-1, 1]$.

Interesatno je pomenuti posledicu nedeterminisanosti, nepravilnosti Jacobijeve matrice J. Zbog činjenice da su $\mathbf{p}(0)$ i $\mathbf{q}(0)$ istovremeno elementi ℓ^2, imamo i da su $\mathbf{p}(z)$ i $\mathbf{q}(z)$ istovremeno elementi ℓ^2 za svaki $z \in \mathbb{C}$. Poslednja činjenica, naravno, povlači da se spektar operatora $J^{\#}$ sastoji samo od sopstvenih vrednosti i $\sigma(J^{\#}) = \mathbb{C}$, dok se spektar operatora J sastoji isključivo od rezidualnog spektra $\sigma(J) = \sigma_r(J)$, tj. $\mathcal{R}(z - J) = \overline{\mathcal{R}(z - J)}$ i $\dim(\mathcal{R}(z - J)^{\perp}) = 1$ (videti [5]).

1.4 Distribucija nula ortogonalnih polinoma

Za slučaj pozitivno definitnog linearnog funkcionala $\mathcal{L}$, znamo da su sve nule polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}_0$, ortogonalnih u odnosu na $\mathcal{L}$, realne i proste. Za slučaj regularnog funkcionala znamo da nule ortogonalnih polinoma ne moraju biti proste, a ne moraju biti ni realne. Za pozitivno definitni linearni funkcional $\mathcal{L}$, moguće je primenom spektralne teoreme na odgovarajući Jacobijev operator dobiti meru u odnosu na koju su polinomi ortogonalni. Takođe, poznato je da su sve nule svih ortogonalnih polinoma sadržane u konveksnom zatvaranju nosača mere (videti [42], [95, str. 4]).

Neka je J_n glavni minor reda $n+1$ Jacobijevog operatora J. Kako su, na osnovu teoreme 1.13, nule polinoma p_{n+1} sopstvene vrednosti Jacobijeve matrice J_n očekujemo da su one povezane sa spektrom Jacobijevog operatora J. U slučaju da je Jacobijev opertaor J simetričan, $J = J^*$, $\beta_n^2 > 0$, $n \in \mathbb{N}$, ova veza je dobro poznata.

U slučaju da je mera μ pozitivna, za linearni funkcional $\mathcal{L}$, zadat relacijom (1.1), znamo da je pozitivno definitan, pa prema tome, nule svih ortogonalnih polinoma pripadaju $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\mu))$.

Da nule ortogonalnih polinoma mogu biti van nosača mere μ, možemo zaključiti već na osnovu sledećeg vrlo jednostavnog primera. Posmatrajmo težinsku funkciju $w(x) = \chi_{[-2,-1]}(x) + \chi_{[1,2]}(x)$. Kako težinska funkcija zadovoljava osobinu $w(x) = w(-x)$, na osnovu teoreme 1.16, ortogonalni polinomi zadovoljavaju $p_n(x) = (-1)^n p_n(-x)$, što znači da polinomi neparnog stepena imaju nulu u tački 0, $p_{2n+1}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Naravno, ova nula nije povezana ni sa nosačem mere ni sa spektrom operatora (za pozitivno definitni funkcional nosač mere i spektar operatora se poklapaju). Već ovaj primer govori o tome da postoje nule niza ortogonalnih polinoma koje nemaju neposredne veze sa nosačem mere ili spektrom Jacobijevog operatora.

Nule $x_k^{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, $n_k \in N' \subset \mathbb{N}$, niza ortogonalnih polinoma p_{n_k} nazivamo lažnim nulama[4] ako tačka nagomilavanja niza $x_k^{n_k}$ ne pripada spektru Jacobijevog operatora.

Ova definicija nije u potpunosti precizna u slučaju neograničenog Jacobijevog operatora[5]. Mi ćemo se, inače, u daljem izlaganju baviti samo ograničenim operatorima.

Potreban nam je sledeća definicija (videti [34, str. 267], [5], [55], [52]).

Definicija 1.14 Pod numeričkim rangom Jacobijevog operatora J podrazumevamo skup

$$\Theta(J) = \{\langle J\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \mid \mathbf{x} \in \mathrm{D}(J), ||\mathbf{x}|| = 1\}.$$

Sa Γ označavamo zatvaranje numeričkog ranga opertaora J, tj. $\Gamma(J) = \overline{\Theta(J)}$.

Numerički rang $\Theta(J)$, kao i njegovo zatvaranje $\Gamma(J)$, su konveksni skupovi prema teoremi Hausdorffa (videti [34, str. 267]). U slučaju simetričnog operatora, zbog $\langle J\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{x}, J\mathbf{x}\rangle$, znamo da je $\Theta(J) \subset \Gamma(J) \subset \mathbb{R}$ (videti [34, str. 269]).

Na osnovu definicije norme operatora J (videti jednakost (1.12)ili [5]), možemo direktno zaključiti da važi $\mathrm{diam}\Gamma(J) \le 2||J||$. Takođe, može se dati i donja granica, $||J|| \le \mathrm{diam}\Gamma(J)$.

Skup Γ sadrži sve nule svih ortogonalnih polinoma. Neka Π_n, $n \in \mathbb{N}_0$, označava projekciju $\Pi_n \ell^2 \to \mathrm{Lin}\{\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, onda očigledno imamo

$$\Gamma(J_n) = \Theta(J_n) = \left\{ \frac{\langle J\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle} \mid \mathbf{y} \in \ell_0^2,\ \Pi_n \mathbf{y} = \mathbf{y} \right\} \subset \Theta(J) \subset \Gamma(J).$$

Takođe, za $|z| > ||J||$, imamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{||(z - J_n)^{-1}||} &= \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{n+1}} \frac{||(z - J_n)\mathbf{y}||}{||\mathbf{y}||} \ge \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{n+1}} \left| \frac{\langle (z - J_n)\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}{||\mathbf{y}||^2} \right| \\
&= \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{n+1}} \left| z - \frac{\langle J_n \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}{||\mathbf{y}||^2} \right| = \mathrm{dist}(z, \Theta(J_n)) \ge \mathrm{dist}(z, \Gamma(J)),
\end{aligned}$$

[4]Dolazi od engleske reči *spurious* (videti [5], [94]).

[5]Za precizniju definiciju koja obuhvata i slučaj neograničenog Jacobijevog operatora treba konsultovati [94].

odakle zaključujemo, koristeći jednakosti (1.8), da je

$$\left|\frac{p_n(z)}{\beta_{n+1}p_{n+1}(z)}\right| = \left|\langle (z-J_n)^{-1}\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n\rangle\right| \leq ||(z-J_n)^{-1}|| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \Gamma(J))}.$$

Drugim rečima, $p_{n+1}(z)$ ne može imati vrednost nula ni za jednu vrednost $z \notin \Gamma(J)$ jer prema prethodnoj nejednakosti količnik dva uzastopna člana niza ortogonalnih polinoma je ograničen, a prema teoremi 1.15, polinomi p_n i p_{n+1}, $n \in \mathbb{N}_0$, nemaju zajedničkih nula.

Takođe, iz prethodnog sleduje da je familija analitičkih funkcija $p_n/(\beta_{n+1}p_{n+1}) = \pi_n/\pi_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$, normalna na skupu $\mathbb{C}\backslash\Gamma(J)$ u smislu Montela (videti [33, str. 299–300]). Tada, na osnovu teoreme Stieltjes-Vitalija, zaključujemo da ako neka podfamilija teži ka nekoj funkciji f na $\mathbb{C}\backslash\Gamma(J)$ tačkasto, onda ta podfamilija teži ka funkciji f uniformno na svakom kompaktnom podskupu $F \subset \mathbb{C}\backslash\Gamma(J)$ (kažemo i lokalno uniformno) (videti [33, str. 300]).

Imamo sledeću teoremu (videti [5]).

Teorema 1.29 *Nule svih ortogonalnih polinoma sadržane su u skupu* $\Gamma(J)$.

Za još precizniji rezultat o distribuciji nula ortogonalnih polinoma definišemo i skup $\Gamma_{\text{ess}}(J)$ na sledeći način

$$\Gamma_{\text{ess}}(J) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \Gamma(J^{(k)}),$$

gde je $J^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}_0$, Jacobijev operator izgrađen od zakašnjenih koeficijenata tročlane rekurentne relacije α_{n+k} i β_{n+k}, $n \in \mathbb{N}_0$, kao u (1.14). Može se dokazati da se skup $\sigma(J)\backslash\Gamma_{\text{ess}}(J)$ sastoji isključivo od sopstvenih vrednosti Jacobijevog operatora J. Dakle, važi sledeća teorema (videti [5]).

Teorema 1.30 *Za ograničeni Jacobijev operator J imamo $\sigma(J) \subset \Gamma(J)$, $\sigma_{\text{ess}}(J) \subset \Gamma_{\text{ess}}(J)$. Skup $\sigma(J)\backslash\Gamma_{\text{ess}}(J)$ se sastoji od izolovanih tačaka koje su sopstvene vrednosti Jacobijevog operatora J i koje mogu imati akumulacione tačke samo na rubu $\Gamma_{\text{ess}}(J)$. Za svaki kompaktan skup $F \subset \Omega(J)\backslash\Gamma_{\text{ess}}(J)$ postoji konstanta $N(F) \in \mathbb{N}_0$, tako da svaki polinom p_n, $n > N(F)$, nema nijednu nulu u F.*

Važna posledica ove teoreme je da u skupu $F \subset \Omega(J)\backslash\Gamma_{\text{ess}}(J)$ ne postoji niz lažnih nula. Pretpostavimo da postoji niz nula $x_k^{n_k} \in F$, $k \in \mathbb{N}_0$, koji ima tačku nagomilavanja x koja ne pripada spektru operatora J. Onda tvrđenje teoreme ne važi jer svaki polinom p_{n_k}, $n_k \in N' \subset \mathbb{N}_0$, u skupu F bi imao bar jednu nulu. Primetimo da ne možemo tvrditi da ne postoji niz lažnih nula na celom $\Omega(J)\backslash\Gamma_{\text{ess}}(J)$ jer je skup $\Gamma_{\text{ess}}(J)$ zatvoren kao prebrojiv presek zatvorenih skupova, pa je $\Omega(J)\backslash\Gamma_{\text{ess}}(J)$ otvoren. Ovo, naravno, znači da može postojati skup lažnih nula sa tačkama nagomilavanja na $\partial\Gamma_{\text{ess}}(J)$.

Pokazaćemo kasnije da svaka tačka ζ skupa $\sigma(J)\backslash\Gamma_{\text{ess}}(J)$ "privlači" nule ortogonalnih polinoma i to tačno onoliko kolika je algebarska višestrukost sopstvene vrednosti ζ.

Teorema 1.31 *Ako je $\zeta \in \sigma(J)\backslash\Gamma_{\text{ess}}(J)$ sopstvena vrednost operatora J sa algebarskom višestrukošću m_ζ, onda za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}_0$, tako da svaki od polinoma p_n, $n > n_0$, ima u disku $\{z \mid |z-\zeta| < \varepsilon\}$, tačno m_ζ nula.*

1.5 Primeri kompleksnog Jacobijevog operatora

1.5.1 "Little $1/q$-Jacobijevi" polinomi

Definišimo linearni funkcional $\mathcal{L}$ na sledeći način

$$\mathcal{L}_a^{p,q} f = \frac{p-1}{p}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p^k} f\left(\frac{a}{q^k}\right) = \int f \mathrm{d}\mu, \quad f \in \mathcal{P}. \tag{1.15}$$

Pod uslovom da p i q zadovoljavaju uslove

$$|pq^n| > 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad \text{i} \quad q^n \neq 1 \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{1.16}$$

možemo pokazati da niz ortogonalnih polinoma postoji. U [53] dokazana je sledeća teorema.

Teorema 1.32 *Ortonormalni polinomi p_k, u odnosu na $\mathcal{L}_a^{p,q}$, egzistiraju pod uslovima datim u* (1.16) *i zadovoljavaju sledeću tročlanu rekurentnu relaciju*

$$xp_k(x) = \beta_{k+1}p_{k+1} + \alpha_k p_k(x) + \beta_k p_{k-1}(x), \tag{1.17}$$

gde su

$$\begin{aligned} \alpha_k &= aq^k \frac{p+q-2pq^k(1+q)+pq^{2k}(p+q)}{(pq^{2k-1}-1)(pq^{2k+1}-1)}, \quad k \geq 0, \\ \beta_k^2 &= a^2p\, q^{2k}\frac{(q^k-1)^2(pq^{k-1}-1)^2}{(pq^{2k-2}-1)(pq^{2k-1}-1)^2(pq^{2k}-1)}, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Dokaz.- Slučaj $p > 1$ i $q > 1$ direktno je povezan sa tzv. "little $1/q$-Jacobijevim" polinomima (videti [35]), pa taj slučaj posebno ne razmatramo. Da bismo dokazali ostatak teoreme neophodni su nam momenti i zato ćemo primeniti rezultat dat u teoremi 1.1. Imamo

$$\mu_n = \frac{p-1}{p}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p^k}\frac{a^n}{q^{nk}} = \frac{(p-1)(aq)^n}{pq^n-1},$$

gde smo upotrebili sumiranje geometrijskog reda, koje vredi pod uslovom $|pq^n| > 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ovi uslovi su ekvivalentni uslovima $|p| > 1$, $|q| \geq 1$.

Možemo zaključiti da formule za momente važe pod uslovom

$$|p| > 1, \quad |q| \geq 1 \quad \text{i} \quad q^n \neq 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Pomoću elementarne transformacije, momente možemo odrediti na sledeći način

$$\frac{\mu_{i+j-2}}{(p-1)a^{i+j-2}q^{i-1}} = \frac{1}{pq^{i-1}-q^{1-j}},$$

što u stvari znači da se Hankelove determinante koje imamo u teoremi 1.1, mogu odrediti preko Cauchyjeve formule za determinantu sa duplom alternansom (videti [36, str. 6]). Prema tome, vrednosti determinati u (1.2) i (1.4) možemo odrediti kao

$$
\begin{aligned}
H_n &= (p-1)^{n(n+1)/2} a^{n(n-1)} q^{n(n^2-1)/3} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (1-q^j)^{2(n-j)}}{\prod_{k=0}^{2n-2} (pq^k-1)^{n-|n-1-k|}}, \\
H'_n &= aqH_n \frac{q^n-1}{q-1} \frac{pq^{n-1}-1}{pq^{2n-1}-1}.
\end{aligned}
$$

Prema teoremi 1.1, znamo da niz polinoma ortogonalnih u odnosu na $\mathcal{L}_a^{p,q}$ postoji pod uslovom $\Delta_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Iz vrednosti Hankelovih determinanti lako zaključujemo da ortogonalni polinomi postoje pod uslovima datim u (1.16). Koristeći relacije (1.5), možemo odrediti koeficijente tročlane relacije kao što su dati u tvrđenju teoreme. □

Koristeći jednakosti za Hankelove determinante može se zaključiti da pozitivno definitan slučaj nastaje za $pq^n > 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, ali i u slučaju $0 < pq^n < 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Koristeći vrednosti momenata, jednostavno zaključujemo da se, u tom slučaju, moment funkcional može predstaviti na sledeći način

$$
\mathcal{L}(f) = (1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} p^k f(aq^k).
$$

Naravno, do na transformaciju $p := 1/p$, $a := aq$, $q := 1/q$, zaključujemo da je linearni funkcional $\mathcal{L}$ ekvivalentan sa $\mathcal{L}_a^{p,q}$, do na multiplikativni faktor $-p$.

Označimo Jacobijev operator izgrađen od nizova α_n, $n \in \mathbb{N}_0$, β_n, $n \in \mathbb{N}$, sa $J_a^{p,q}$.

Iz izraza za koeficijente tročlane rekurentne relacije, pod uslovom $|q| \neq 1$, imamo

$$
\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \beta_n^2 = 0,
$$

odakle na osnovu teoreme 1.21, zaključujemo da je pridruženi Jacobijev operator $J_a^{p,q}$ kompaktan.

U slučaju $|q| = 1$, $q^n \neq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, pridruženi Jacobijev operator $J_a^{p,q}$ nije kompaktan, ali je ograničen. Za koeficijente imamo

$$
|\alpha_n| \leq |a||q|^k \frac{|p|+|q|+2|p||q|^k(1+|q|)+|p||q|^{2k}(|p|+|q|)}{(|p||q|^{2k-1}-1)(|p||q|^{2k+1}-1)} = |a| \frac{|p|^2+6|p|+1}{(|p|-1)^2}
$$

i

$$
|\beta_n^2| \leq |a|^2|p| \; |q|^{2k} \frac{(|q|^k+1)^2(|p||q|^{k-1}+1)^2}{(|p||q|^{2k-2}-1)(|p||q|^{2k-1}-1)^2(|p||q|^{2k}-1)} = \frac{4|a|^2|p|(|p|+1)^2}{(|p|-1)^4}.
$$

Za normu Jacobijevog operatora, koristeći (1.13), možemo dati sledeće ocene

$$
\begin{aligned}
||J_a^{p,q}|| &\leq 2|\beta_1| + |\alpha_0|, \quad |q| > 1, \qquad (1.18) \\
||J_a^{p,q}|| &\leq |a| \frac{|p|^2+6|p|+1+4\sqrt{|p|}(|p|+1)}{(|p|-1)^2}, \quad |q| = 1, \; q^n \neq 1, \; n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}
$$

Teorema 1.33 *Jacobijev operator $J_a^{p,q}$, koji je pridružen linearnom funkcionalu $\mathcal{L}_a^{p,q}$, $|p| > 1$, je kompaktan pod uslovom $|q| > 1$ i ograničen pod uslovom $|q| = 1$, $q^n \neq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ocena norme operatora $||J_a^{p,q}||$ je data u (1.18).*

1.5.2 Tricomi-Carlitzovi polinomi

U [88] dokazana je sledeća jednakost

$$1 + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\nu+\alpha)^{\nu-1}}{\nu!}(ze^{-z})^{\nu} = e^{\alpha z}, \quad |ze^{-z}| < e^{-1},\ \alpha \in \mathbb{C}. \tag{1.19}$$

Koristeći ovu jednakost možemo proširiti rezultat dat u [11], koji razmatra samo slučaj $\alpha > 0$.

Teorema 1.34 *Pod uslovom $\alpha \notin \mathbb{Z}_0^-$, polinomi koji zadovoljavaju rekurentnu relaciju*

$$\pi_{n+1} = x\pi_n - \frac{n}{(n+\alpha)(n-1+\alpha)}\pi_{n-1},$$

(očigledno, $\alpha_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\beta_n^2 = n/((n+\alpha)(n-1+\alpha))$, $n \in \mathbb{N}$) ortogonalni su u odnosu na linearni funkcional

$$\mathcal{L}^{\alpha}(p) = \int p\, d\mu = \frac{\alpha e^{-\alpha}}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} e^{-k} \frac{(k+\alpha)^{k-1}}{k!} \left[p((k+\alpha)^{-1/2}) + p(-(k+\alpha)^{-1/2})\right].$$

Dokaz.- U [100] posmatrani su polinomi t_n, $n \in \mathbb{N}_0$, koji zadovoljavaju rekurentnu relaciju

$$(n+1)t_{n+1} - (n+\alpha)t_n + xt_{n-1} = 0,$$

i pokazano je da se ti polinomi mogu izraziti na sledeći način

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{x-\alpha}{k} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.20}$$

Uvedemo li nove polinome $f_k = x^n t_n(x^{-2})$, $n \in \mathbb{N}_0$, tročlana rekurentna relacija postaje

$$(n+1)f_{n+1} - (n+\alpha)xf_n + f_{n-1} = 0.$$

Ova rekurentna relacija karakteriše, takođe, jedan niz ortogonalnih polinoma. Možemo direktno proveriti da je monična verzija polinoma f_n, $n \in \mathbb{N}_0$, upravo niz polinoma π_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Dakle, važi sledeća relacija

$$\pi_n = \frac{n!}{(\alpha)_n} f_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Jednostavno se proverava[6] da polinomi π_n, $n \in \mathbb{N}_0$, zadovoljavaju tročlanu relaciju navedenu u teoremi. Smenom $x := -x$ u tročlanoj relaciji za niz f_n, $n \in \mathbb{N}_0$, dobijamo $f_n(x) = (-1)^n f_n(-x)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ista osobina, naravno, važi i za niz π_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

[6]Koristiti, na primer, postupak opisan u [46].

Koristeći razvoje (1.19 i (1.20), imamo

$$\begin{aligned}
n! \sum_{\nu=0}^{+\infty} & \frac{(\nu+\alpha)^{\nu-n-1}}{\nu!}(ze^{-z})^{\nu} t_n(\nu+\alpha) \\
&= n! \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(\nu+\alpha)^{\nu-n-1}}{\nu!}(ze^{-z})^{\nu} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{\nu}{k} \frac{(\nu+\alpha)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \sum_{\nu=k}^{+\infty} \frac{(\nu+\alpha)^{\nu-k-1}}{(\nu-k)!}(ze^{-z})^{\nu} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(\nu+k+\alpha)^{\nu-1}}{(\nu-k)!}(ze^{-z})^{\nu} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} (ze^{-z})^{k} \frac{e^{(k+\alpha)z}}{k+\alpha} = e^{\alpha z} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{z^k}{k+\alpha}.
\end{aligned}$$

Za $z = 1$, dobijena jednakost postaje

$$n! \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(\nu+\alpha)^{\nu-n-1}e^{-\nu}}{\nu!} t_n(\nu+\alpha) = \frac{n! e^{\alpha}}{(\alpha)_{n+1}}.$$

Uvedemo li polinome f_n, $n \in \mathbb{N}_0$, dobijamo

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(\nu+\alpha)^{\nu-1}e^{-\nu-\alpha}}{\nu!}(\nu+\alpha)^{-n/2} f_n((\nu+\alpha)^{-1/2}) = \mathcal{L}^{\alpha}(x^n f_n) = \frac{1}{(1+\alpha)_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Na osnovu rekurentne relacije za niz f_n, $n \in \mathbb{N}_0$, imamo direktno

$$(n+1)\mathcal{L}^{\alpha}(x^{n-1} f_{n+1}) = (n+\alpha)\mathcal{L}^{\alpha}(x^n f_n) - \mathcal{L}^{\alpha}(x^{n-1} f_{n-1}) = 0$$

ili

$$\mathcal{L}^{\alpha}(x^{n-2} f_n) = 0, \quad n \geq 2.$$

Pretpostavimo sada da je

$$\mathcal{L}^{\alpha}(x^{n-2r} f_n) = 0, \quad r = 1, \ldots, [n/2], \ n \geq 3.$$

Tada, na osnovu rekurentne relacije za niz f_n, $n \in \mathbb{N}_0$, koristeći indukciju, imamo

$$(n+1)\mathcal{L}^{\alpha}(x^{n-2r-1} f_{n+1} = (n+\alpha)\mathcal{L}^{\alpha}(x^{n-2r} f_n) - \mathcal{L}^{\alpha}(x^{n-2r-1} f_{n-1}) = 0$$

ili

$$\mathcal{L}^{\alpha}(x^{n-2r} f_n) = 0, \quad r = 1, \ldots, [n/2], \ n \geq 2.$$

Zbog osobine $f_n(x) = (-1)^n f_n(-x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, i činjenice da je $\mathcal{L}^{\alpha}$, podržan na simetričnom skupu u odnosu na koordinantni početak, imamo

$$\mathcal{L}^{\alpha}(x^{n-2r-1} f_n) = 0, \quad r = 0, 1, \ldots, [n/2], \ n \in \mathbb{N},$$

odakle dobijamo da važi $\mathcal{L}^\alpha(x^k f_n) = 0$, $0 \leq k < n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ako zamenimo niz f_n, $n \in \mathbb{N}_0$, nizom π_n, $n \in \mathbb{N}_0$, dobijamo

$$\mathcal{L}^\alpha(\pi_n \pi_k) = \frac{\alpha n!}{(n+\alpha)((\alpha)_n)^2}\delta_{n,k}, \quad n,k \in \mathbb{N}_0. \quad \square$$

Kako je, u ovom slučaju,

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \beta_n^2 = 0,$$

na osnovu teoreme 1.21, zaključujemo da je Jacobijev operator J^α, pridružen linearnom funkcionalu $\mathcal{L}^\alpha$, kompaktan. Normu operatora J^α, možemo oceniti, koristeći (1.13).

Teorema 1.35 *Jacobijev operator pridržen funkcionalu $\mathcal{L}^\alpha$, $\alpha \neq \mathbb{Z}_0^-$, je kompaktan i*

$$||J^\alpha|| \leq 2\left(\frac{|\alpha| + |1-\alpha|}{|k_\alpha + \alpha|}\right)^{1/2},$$

gde je k_α prirodan broj koji minimizira $|n + \mathrm{Re}(\alpha)|$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Dokaz.- Potražimo maksimalnu vrednost izraza $|\beta_k|$, $k \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\begin{aligned} |\beta_k| &= \left|\frac{k}{(k+\alpha)(k-1+\alpha)}\right|^{1/2} = \left|\frac{\alpha}{k+\alpha} + \frac{1-\alpha}{k-1+\alpha}\right|^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{|\alpha|}{|k+\alpha|} + \frac{|1-\alpha|}{|k-1+\alpha|}\right)^{1/2} \leq \left(\frac{|\alpha| + |1-\alpha|}{|k_\alpha + \alpha|}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

odakle direktno zaključujemo da je

$$||J^\alpha|| \leq \max_{k\in\mathbb{N}}(|\beta_{k+1}| + |\beta_k|) \leq 2\left(\frac{|\alpha| + |1-\alpha|}{|k_\alpha + \alpha|}\right)^{1/2}. \quad \square$$

1.5.3 Magnusova klasa

Pored već pomenutog dela Magnusove teoreme 1.7, u ovom odeljku dajemo i ostatak (videti [41]).

Teorema 1.36 *Neka je mera μ apsolutno neprekidna tako da važi $\mathrm{d}\mu = g\omega\chi_{[-1,1]}\mathrm{d}x$, gde je ω skoro svuda pozitivna na $[-1,1]$ i gde je g neprekidna i različita od nule svuda na $[-1,1]$. Tada postoji $N_0 \in \mathbb{N}_0$, takav da niz P_k, $k > N_0$, zadovoljava uslove definicije* 1.1*. Koeficijenti tročlane rekurentne relacije imaju sledeće asimptotsko ponašanje*

$$\alpha_k \to 0, \quad \beta_k \to \frac{1}{2}, \quad k \to +\infty.$$

Težinske funkcije koje zadovoljaju uslove Magnusove teoreme zovemo Magnusovom klasom težina i tu klasu obeležavamo je sa $\mathcal{M}$. Primetimo da $\mathcal{M}$ ne obuhvata mere tipa $(t-x)w(t)\chi_{[-1,1]}\mathrm{d}t$, gde je w nenegativna težina, a $x \in (-1,1)$ jer težinu možemo napisati kao $|t-x|w(t)\mathrm{sgn}(t-x)$. Deo $|t-x|w(t)$ zadovoljava uslove Magnusove teoreme, ali kompleksna funkcija $\mathrm{sgn}(t-x)$ nije neprekidna na $(-1,1)$.

Pod uslovom da ortogonalni polinomi postoje, u smislu definicije 1.1 u odnosu na neku težinu $w \in \mathcal{M}$, onda je, naravno, Jacobijev operator pridružen meri $w\mathrm{d}x$ ograničen.

1.5.4 Linearne modifikacije Jacobijeve mere

U ovom poglavlju bavimo se isključimo merama sledećeg oblika

$$\mathrm{d}\lambda(t) = (t-x)\mathrm{d}\mu(t) = (t-x)(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\chi_{[-1,1]}\mathrm{d}t, \quad \alpha, \beta > -1, \ x \in (-1,1),$$

koje nazivamo linearnim modifikacija Jacobijeve mere μ. Slučajevi koji nastaju za $x \in \mathbb{C}\backslash(-1,1)$ pripadaju (proučenoj) teoriji pozitivne mere (slučaj $x \in \mathbb{R}\backslash(-1,1)$) ili se mogu tretirati pomoću Magnusove teoreme 1.36 (slučaj $x \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$).

Gotovo svi rezultati koje prezentujemo u ovom odeljku, uz izvesna uopštenja, mogu se naći u radu [62]. U daljem razmatranju potrebna nam je sledeća teorema (videti [81, str. 143]).

Teorema 1.37 *Neka koeficijenti tročlane relacije $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\beta_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, zadovoljavaju*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left|\beta_k^R - \frac{1}{2}\right| + |\alpha_k^R| < +\infty, \tag{1.21}$$

onda odgovarajuća spektralna mera μ ima reprezentaciju

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_p,$$

gde je μ_{ac} apsolutno neprekidna mera $(\mathrm{supp}(\mu_{ac}) \subset [-1,1])$, *a μ_p je mera podržana na diskretnom skupu tačaka realne prave, $E_k^- \leq -1$, $E_k^+ \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, čije jedine tačke nagomilavanja mogu biti tačke ± 1. Za asimptotski ortonormirane polinome u odnosu na μ važi*

$$p_n(x) = \left(\frac{2}{\pi}\frac{1}{\mu'_{ac}(x)\sin\theta}\right)^{1/2} \sin((n+1)\theta - \phi(\theta)) + o(1), \quad x = \cos\theta, \ \theta \in (0,\pi),$$

unifromno za svaki podinterval $(-1,1)$, gde je ϕ neprekidna funkcija od $\theta \in (0,\pi)$.

Za Jacobijevu meru μ imamo još i više jer je mera apsolutno neprekidna na $(-1,1)$ bez diskretnog dela. Za slučaj da mera nema diskretni deo nosača, ako važi $\mathrm{supp}(\mu) \subset [-1,1]$ i (1.21), funkciju ϕ možemo izraziti eksplicitno $\phi(\theta) = \Phi(\theta) + \theta - \pi/2$ (videti [81, str. 145,42]), gde je

$$\Phi(\theta) = -\frac{\sin\theta}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\log W(t) - \log W(x)}{t-x}\frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^{1/2}}, \quad x = \cos\theta,$$

i $W = \mu'(1-x^2)^{1/2}$.

Teorema 1.38 *Za Jacobijevu meru μ imamo*

$$\phi(\theta) = \frac{\pi(2\alpha-1) - 2\theta(\alpha+\beta-1)}{4}.$$

Dokaz.- U dokazu ove teoreme koristimo Szegő-ovu funkciju za Jacobijevu meru $\mathrm{d}\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\chi_{[-1,1]}(x)\mathrm{d}x$ (videti [97, str. 274] i dokaz leme 1.10). Za Jacobijevu meru imamo

$$D(\mathrm{d}\mu; z) = A(1-z)^{\alpha+1/2}(1+z)^{\beta+1/2}, \quad |z| < 1,$$

gde je A stepen broja 2. U stvari nas zanima argument funkcije $D(\mathrm{d}\mu; e^{\mathrm{i}\theta})$, s obzirom da je $\arg(D)(\theta) = -\Phi(\theta)$ (videti [40]). Kako je

$$\begin{aligned} D &= A\left(-2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta/2}\sin\theta/2\right)^{\alpha+1/2}\left(2e^{\mathrm{i}\theta}\cos\theta/2\right)^{\beta+1/2} \\ &= A'(|\sin\theta/2|)^{\alpha+1/2}(\cos\theta/2)^{\beta+1/2}\exp\left(\mathrm{i}\frac{-\pi\mathrm{sgn}\theta(2\alpha+1)+2\theta(\alpha+\beta+1)}{4}\right), \end{aligned}$$

za $\theta \in (0,\pi)$ direktno dobijamo

$$\Phi(\theta) = -\arg(D)(\theta) = \frac{\pi(2\alpha+1) - 2\theta(\alpha+\beta+1)}{4}$$

i

$$\phi(\theta) = \frac{\pi(2\alpha-1) - 2\theta(\alpha+\beta-1)}{4}.$$

Naravno, dugujemo objašnjenje zašto smo izabrali baš $1^{\alpha+1/2} = 1$ i slično za β. Poznato je da Szegő-ova funkcija zadovoljava $D(f;0) > 0$, tako da za Szegő-ovu funkciju Jacobijeve mere imamo

$$D(\mathrm{d}\mu; 0) = 1^{\alpha+1/2}1^{\beta+1/2} = e^{\mathrm{i}\pi(k(2\alpha+1)+n(2\beta+1))}, \quad k,n \in \mathbb{Z}.$$

Međutim, da bi prethodni izraz imao pozitivnu vrednost mora biti

$$k(2\alpha+1) + n(2\beta+1) = 2m, \quad k,n,m \in \mathbb{Z},$$

To znači da ako izaberemo bilo koju drugu vrednost za stepen dobijamo istu vrednost argumenta do na celobrojni umnožak broja 2π, a to znači da nam se argument praktično ne menja. □

Neka je $f : [a,b] \mapsto [c,d]$ neprekidna funkcija. Ako je $F \subset [a,b]$ skup svuda gust u skupu $[a,b]$, onda je $f(F)$ skup svuda gust u $[c,d]$. Kako je $[a,b]$ sa prebrojivom bazom okolina svake svoje tačke, to je f neprekidna ako svaki konvergentan niz ima za sliku konvergentan niz (videti [96, str. 37]). Uzmimo proizvoljnu tačku $y \in [c,d]$ i onda izaberimo jednu tačku $x \in f^{-1}(y)$. Kako je F svuda gust u $[a,b]$ to postoji niz x_n, $n \in \mathbb{N}$, iz F koji konvergira ka x. Tada niz $f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira ka $f(x) = y$, pa je $f(F)$ svuda gust u $[c,d]$.

Poznata je sledeća Kroneckerova teorema (videti [32, str. 376]).

Teorema 1.39 *Za svaki iracionalni broj $\zeta \in \mathbb{R}$, niz $n\zeta - [n\zeta]$, $n \in \mathbb{N}$, je gust u $[0,1]$.*

Neposredne posledice Kroneckerove teoreme su sledeće leme.

Lema 1.4 *Za svaki iracionalan broj $\zeta \in \mathbb{R}$, za svako $k \in \mathbb{N}$ i za svako $p \in \mathbb{N}_0$, niz $(kn+p)\zeta - [(kn+p)\zeta]$, $n \in \mathbb{N}$, je gust u $[0,1]$.*

Dokaz.- Ovo je direktna posledica Kroneckerove teoreme. Dovoljno je primeniti teoremu na $\zeta_1 = k\zeta$ jer

$$(kn+p)\zeta - [(kn+p)\zeta] = n(k\zeta) - [n(k\zeta)] + p\zeta - [p\zeta] - \varepsilon_n,$$

gde je $\varepsilon_n = [(kn+p)\zeta] - [kn\zeta] - [p\zeta]$. Jasno je da ε_n, $n \in \mathbb{N}$, ima vrednosti 0 ili 1. Primenjujući Kroneckerovu teoremu na $\zeta_1 = k\zeta$, zaključujemo da je $n(k\zeta) - [n(k\zeta)]$ gusto u $[0,1]$. Ako ovom nizu dodamo $p\zeta - [p\zeta]$ dobijamo niz koji je gust u $[p\zeta - [p\zeta], 1 + p\zeta - [p\zeta]]$. Za sve elemente niza koji su veći od 1, imamo $\varepsilon_n = 1$, tako da se na kraju oduzimanjem ε_n, samo deo niza koji pada u $[1, 1 + p\zeta - [p\zeta]]$ preslikava u $[0, p\zeta - [p\zeta]]$ prostom translacijom. Tako dobijamo da je ceo interval $[0,1]$ pokriven. $\square$

Lema 1.5 *Za svaki iracionalni broj $\zeta \in \mathbb{R}$, niz $\sin n\zeta\pi$, $n \in \mathbb{N}$ (alternativno, niz $\cos n\zeta\pi$, $n \in \mathbb{N}$) je gust u $[-1,1]$.*

Dokaz.- Imamo

$$\sin n\zeta\pi = \sin 2\pi\left(\frac{n\zeta}{2} - \left[\frac{n\zeta}{2}\right] + \left[\frac{n\zeta}{2}\right]\right) = \sin 2\pi\left(\frac{n\zeta}{2} - \left[\frac{n\zeta}{2}\right]\right).$$

Kako je niz $n\zeta/2 - [n\zeta/2]$, $n \in \mathbb{N}$, gust u $[0,1]$, to je i niz $2\pi(n\zeta/2 - [n\zeta/2])$ gust u $[0, 2\pi]$, pa jednostavno zaključujemo da je "sin-niz" gust u $[-1,1]$. Slično imamo i za "cos-niz". $\square$

Lema 1.6 *Za svaki iracionalan broj ζ, niz $e^{\mathrm{i}n\zeta\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, je gust na jedničnom krugu.*

Dokaz.- Imamo

$$e^{\mathrm{i}n\zeta\pi} = \exp\left(2\mathrm{i}\pi\left(n\frac{\zeta}{2} - \left[n\frac{\zeta}{2}\right]\right) + 2\mathrm{i}\pi\left[n\frac{\zeta}{2}\right]\right) = \exp\left(2\mathrm{i}\pi\left(n\frac{\zeta}{2} - \left[n\frac{\zeta}{2}\right]\right)\right).$$

Na osnovu Kroneckerove teoreme, niz $n\zeta/2 - [n\zeta/2]$, $n \in \mathbb{N}$, je gust u $[0,1]$. Množenjem sa 2π, dobijamo gust skup na $[0, 2\pi]$. Kada na taj skup primenimo funkciju $\exp(\mathrm{i}\,\cdot)$ dobijamo gust skup na jediničnom krugu. $\square$

Lema 1.7 *Neka je niz x_n, $n \in \mathbb{N}$, gust u skupu $[0,1]$ i neka je ε_n, $n \in \mathbb{N}$, nula niz. Onda je niz $x_n + \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, gust u $[0,1]$.*

Dokaz.- Neka $y \in [0,1]$. Tada postoji podniz x_k, $k \in N_y$, koji konvergira ka y. Kako je, međutim, podniz ε_k, $k \in N_y$, takođe nula niz, onda je i $x_k + \varepsilon_k$, $k \in N_y$, podniz niza $x_k + \varepsilon_k$, $k \in \mathbb{N}$, koji konvergira ka y. S obzirom da je y proizvoljna tačka iz intervala $[0,1]$, zaključujemo da je niz $x_k + \varepsilon_k$, $k \in \mathbb{N}$, gust u $[0,1]$. $\square$

U daljem tekstu koristimo sledeće oznake za polinome:

p_n^J, $n \in \mathbb{N}_0$, je niz ortonormiranih Jacobijevih polinoma;

p_n, $n \in \mathbb{N}_0$, je niz ortonormiranih polinoma u odnosu na linearno modifikovanu Jacobijevu meru $\lambda(t)$ u tački $x = \cos\theta \in (-1,1)$.

Koeficijente tročlane rekurentne relacije za Jacobijevu meru označavamo sa α_k^J, $k \in \mathbb{N}_0$, β_k^J, $k \in \mathbb{N}_0$, dok ogovarajuće koeficijente u odnosu na meru λ označavamo sa α_k, $k \in \mathbb{N}_0$, β_k, $k \in \mathbb{N}$.

Kombinujući prethodne leme sa teoremom 1.37, dobijamo sledeći pomoćni rezultat:

Lema 1.8 *Neka je $\theta = \zeta\pi \in (0, \pi)$, gde je $\zeta \in \mathbb{R}$ iracionalan broj i μ Jacobijeva mera. Onda je niz $p_n^J(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $x = \cos\theta$, gust na $[-A, A]$, gde je*

$$A = \left(\frac{2}{\pi}\frac{1}{\mu'(x)\sin\theta}\right)^{1/2}.$$

Specijalno postoji podniz koji konvergira ka nuli.

Dokaz.- Za Jacobijeve polinome, na osnovu teorema 1.37 i 1.38, imamo

$$p_n^J(x) = A\sin\left((n+1)\theta - \frac{\pi(2\alpha-1) - 2\theta(\alpha+\beta-1)}{4}\right) + \varepsilon_n.$$

Na osnovu leme 1.5, niz

$$A\sin\left((n+1)\theta - \frac{\pi(2\alpha-1) - 2\theta(\alpha+\beta-1)}{4}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

je gust u $[-A, A]$, pa je niz $p_n^J(x)$, $n \in \mathbb{N}$, na osnovu leme 1.7, gust u $[-A, A]$. □

Lema 1.9 *Neka je $\theta = p\pi/q \in (0, \pi)$, $p/q \in \mathbb{Q}$. Niz $p_n^J(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $x = \cos\theta$, posmatrano asimptotski, je niz sa periodom $2q/(p, 2)$.*

Niz $p_n^J(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, sadrži podniz koji konvergira ka nuli ako i samo ako postoje $k = 0, 1, \ldots, 2q/(p, 2) - 1$ i $m \in \mathbb{Z}$, tako da važi

$$\frac{1}{\pi}\phi(\theta) = \frac{(p, 2)k}{q} - m. \tag{1.22}$$

Dokaz.- Uzimamo samo glavni deo niza $p_n^J(x)$

$$r_n = A\sin\left((n+1)\theta - \frac{\pi(2\alpha-1) - 2\theta(\alpha+\beta-1)}{4}\right).$$

Zbog $\theta = p\pi/q$, $p/q \in \mathbb{Q}$, posmatramo samo deo

$$\frac{np\pi}{q} \pmod{2\pi}, \quad n \in \mathbb{N},$$

i proverimo kada može nastupiti jednakost između dva elementa niza. Imamo

$$\frac{np\pi}{q} = \frac{mp\pi}{q} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \Leftrightarrow (n-m)p = 2kq,$$

odakle zaključujemo da ako $(p, 2) = 1$, tada je $(n - m, 2q) = 2q$, i perioda je $2q$. Ako $(p, 2) = 2$ imamo da je $(n - m, q) = q$, pa je perioda q. Članove niza $np\pi/q$, $n \in \mathbb{N}$, možemo da odredimo i eksplicitno. Imamo

$$\frac{(p, 2)k\pi}{q}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2q/(p, 2) - 1.$$

Argumente funkcije sin možemo da odredimo na sledeći način

$$\phi_k = \frac{(p,2)k\pi}{q} - \phi(\theta), \quad k = 0, 1, \ldots, 2q/(p,2) - 1.$$

Naravno, može se desiti da neki elementi skupa $\sin \phi_k$, $k = 0, 1, \ldots, 2q/(p,2) - 1$, budu jednaki.

Za $(p,2) = 1$, ako je

$$\left\{\phi_k \mid k = 0, 1, \ldots, 2q - 1\right\} = \left\{\arg(z_k) \mid z_k^{2q} = 1,\ k = 0, \ldots, 2q - 1\right\}$$

ili

$$\left\{\phi_k \mid k = 0, 1, \ldots, 2q - 1\right\} = \left\{\arg(z_k) \mid z_k^{2q} = -1,\ k = 0, \ldots, 2q - 1\right\},$$

onda će postojati tačke koje se međusobno poklapaju. Međutim, ako neka od prethodnih skupovnih jednakosti nije ispunjena, onda nema jednakih tačaka u skupu $\sin \phi_k$, $k = 0, 1, \ldots, 2q-1$, i skup ima $2q$ elemenata. Primetimo da za q parno, skup $\{z_k \mid z_k^{2q} = 1,\ k = 0, 1, \ldots, 2n-1\}$ sadrži $\pm\mathrm{i}$, a ostali elementi skupa su upareni tako da je ukupan broj elemenata $q+1$. Opet za q parno skup $\{z_k \mid z_k^{2q} = -1,\ k = 0, 1, \ldots, 2q-1\}$ ne sadrži tačke $\pm\mathrm{i}$ i sve su tačke uparene tako da je ukupan broj tačaka q. Slična je situacija i za q neparno. Dakle, za $(p,2) = 1$, skup r_k, $k = 0, 1, \ldots, 2q-1$, može imati bilo $2q$, $q+1$ ili q različitih tačaka zavisno od $\phi(\theta)$.

Sažeto, za slučaj $(p,2) = 1$, možemo reći da broj različitih elemenata skupa r_k, $k = 0, 1, \ldots, 2q-1$, iznosi q za $(q,2) = 2$ i $\phi(\theta) = (2m+1)\pi/2q$, $m \in \mathbb{Z}$, ili $(q,2) = 1$ i $\phi(\theta) = m\pi/q$, $m \in \mathbb{Z}$. Broj različitih elemenata iznosi $q+1$ za $(q,2) = 2$ i $\phi(\theta) = m\pi/q$, $m \in \mathbb{Z}$, ili $(q,2) = 1$ i $\phi(\theta) = (2m+1)\pi/2q$, $m \in \mathbb{Z}$. Broj različitih elemenata iznosi $2q$ ako nijedan od prethodnih uslova nije ispunjen.

Slučaj $(p,2) = 2$ je malo drugačiji. Onda mora biti $(q,2) = 1$. Ako su ispunjene sledeće skupovne jednakosti

$$\left\{\phi_k \mid k = 0, \ldots, q-1\right\} = \left\{\arg(z_k) + \mathrm{i}\pi/2 \mid z_k^q = 1,\ k = 0, \ldots, q-1\right\}$$

ili

$$\left\{\phi_k \mid k = 0, \ldots, q-1\right\} = \left\{\arg(z_k) - \mathrm{i}\pi/2 \mid z_k^q = 1,\ k = 0, \ldots, q-1\right\},$$

onda skup r_k, $k = 0, 1, \ldots, q-1$, ima uparene elemente sem tačaka 1 ili -1, repsektivno, i onda imamo $(q+1)/2$ različitih elemenata. Sažeto, ako je $(p,2) = 2$ i $\phi(\theta) = (2m+1)\pi/2q$, $m \in \mathbb{Z}$, onda skup r_k, $k = 0, 1, \ldots, q-1$, ima $(q+1)/2$ različitih elemenata. Ako $\phi(\theta) \neq (2m+1)\pi/(2q)$, $m \in \mathbb{Z}$, onda skup r_k, $k = 0, 1, \ldots, q-1$ ima q različitih elemenata.

Primetimo da, bez obzira na broj različitih elemenata, period niza r_k, $k \in \mathbb{N}$, je isti kao i period odgovarajućeg niza ϕ_k, $k \in \mathbb{N}$, pri čemu ne razmatramo osnovnu periodu niza r_k, $k \in \mathbb{N}$.

Posmatramo sada niz polinoma $p_n^J(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, u obliku

$$p_n^J(x) = r_n + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gde je ε_n, $n \in \mathbb{N}_0$, nula niz. Onda p_n^J, $n \in \mathbb{N}_0$, ima nula podniz ako i samo ako r_n, $n \in \mathbb{N}_0$, ima nula podniz. Kako je r_n, $n \in \mathbb{N}_0$, periodičan ako i samo ako r_n, $n \in \mathbb{N}_0$, ima podniz čiji su svi elementi nula. Ovo je ekvivalentno sa uslovom

$$\phi_k = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z},$$

za neki $k = 0, 1, \ldots, 2q/(p, 2) - 1$. Međutim, ovo je ekvivalentno sa postojanjem $k = 0, 1, \ldots, 2q/(p, 2) - 1$ i $m \in \mathbb{Z}$, tako da važi

$$\frac{(p, 2)k}{q} - m = \frac{1}{\pi}\phi(\theta). \quad \square$$

Definicija 1.15 Za Jacobijevu meru μ kažemo da je tačka $x = \cos\theta \in (-1, 1)$ asimptotski prihvatljiva ako i samo ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da je $p_n^J(x) \neq 0$ za $n > n_0$. Tačka $x \in (0, 1)$ je prihvatljiva ako i samo ako $p_n^J(x) \neq 0$ za $n \in \mathbb{N}_0$.

Sa $\mathcal{A}$ označavamo skup nula svih Jacobijevih polinoma p_n^J, $n \in \mathbb{N}_0$.

Teorema 1.40 *Svaka tačka $x \in (-1, 1) \backslash \mathcal{A}$ je prihvatljiva. Svaka tačka $x = \cos p\pi/q \in (-1, 1)$ je asimptotski prihvatljiva ako* (1.22) *ne važi.*

Dokaz.- Očigledno. $\square$

Primer 1.3 Za Čebiševljeve polinome prve vrste (videti [46, str. 141]) znamo da važi

$$p_n^J(x) = \left(\frac{2 - \delta_{n,0}}{\pi}\right)^{1/2} \cos n\theta, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

pa zaključujemo da su nule ovih polinoma određene tačkama $\theta = (2k + 1)\pi/2n$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$. Primetimo još dodatno da je, za Čebiševljeve polinome prve vrste, $\phi(\theta) = \theta - \pi/2$. Odavde zaključujemo da su tačke $(2k + 1)\pi/2n$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, neprihvatljive, ali su zato tačke $p\pi/q \in (0, \pi)$, $(q, 2) = 1$, prihvatljive. Naravno, i tačke $\zeta\pi \in (0, \pi)$, za ζ iracionalno, su prihvatljive.

Primer 1.4 Za Čebiševljeve polinome druge vrste, na primer, znamo (videti [46, str. 143]) da važi

$$p_n^J(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin(n + 1)\theta}{\sin\theta}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Odavde zaključujemo da su nule ovih polinoma određene tačkama $\theta = k\pi/(n+1)$, $k = 1, \ldots, n$. Za ove polinome imamo $\phi = 0$. Za zadato $\theta = p\pi/q \in (0, \pi)$, podniz $p_{nq-1}^J(\theta)$, $n \in \mathbb{N}$, je konstantan i ima vrednost nula. Dakle, nijedna tačka $x = \cos p\pi/q \in (-1, 1)$ nije prihvatljiva. Naravno, sve tačke $\zeta\pi \in (0, \pi)$, ζ iracionalno, su prihvatljive.

Primer 1.5 Jednakost (1.22) može biti napisana i na sledeći način

$$2\alpha(q - p) - 2\beta p = 4((p, 2)k - mq) + q - 2p, \tag{1.23}$$

odakle zaključujemo da, pod uslovima $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ i $(q, 2) = 1$, tačke $p\pi/q \in (0, \pi)$ su prihvatljive.

Takođe, za slučaj $\alpha = a/(2b + 1)$ i $\beta = c/(2d + 1)$, $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ i $(q, 2) = 1$, imamo da su sve tačke $p\pi/q \in (0, \pi)$ prihvatljive.

Primer 1.6 Kažemo da su $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, racionalno nezavisni ako i samo ako jednačina

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{q_k} \alpha_k = 0,$$

ima samo trivijalno rešenje u skupu racionalnih brojeva.

Na primer, racionalno nezavisne su sve n-torke, $\alpha_k = \log r_k$, $k = 1, \ldots, n$, gde su r_k međusobno različiti prosti prirodni brojevi različiti od 1. Naime, ukoliko postoji netrivijalno rešenje, onda možemo jednačinu da pomnožimo sa $Q = \prod q_k$, i tada dobijamo

$$\prod_{k=1}^{n} r_k^{p_k Q/q_k} = 1,$$

što znači da je 1 deljivo prostim brojevima r_k. Kontradikcija!

Ako su α, β i 1 racionalno nezavisni, onda je svaka tačka $\cos p\pi/q \in (-1, 1)$ asimptotski prihvatljiva. Ovo je direktno posledica toga što jednakost (1.23) ne može imati netrivijalno rešenje, zbog racionalne nezavisnosti, a znamo, na primer, da su koeficijenti uz α i β različiti od nule.

Primer 1.7 Odredimo uslov pod kojim je tačka $x = 0$, $\theta = \pi/2$, prihvatljiva, odnosno asimptotski prihvatljiva. Na osnovu (1.23), uslov prihvatljivosti tačke $x = 0$ je

$$-\frac{\beta - \alpha}{2} \neq k + 2m, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad m \in \mathbb{Z},$$

ili jednostavnije

$$\frac{\beta - \alpha}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

Za simetričan slučaj jasno vidimo da tačka $x = 0$ nije asimptotski prihvatljiva, što je i očekivano jer za simetričan slučaj znamo da važi $p_{2n+1}^J(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Naravno, na primer, za $\alpha = 0$ i $\beta = 2$, odgovarajući Jacobijevi polinomi nemaju nulu u tački nula. Ovo je posledica toga što je uslov (1.23) potreban, ali ne i dovoljan za asimptotsku prihvatljivost. Međutim, ovde ne gubimo mnogo kao što ćemo uskoro videti.

Evo, najzad, razloga zašto nam je potreban pojam prihvatljivosti.

Teorema 1.41 *Ako je tačka $x = \cos\theta \in (-1, 1)$ prihvatljiva (asimptotski ili u običnom smislu) za Jacobijevu meru μ, onda postoji n_0, tako da moničan polinom P_n, za $n > n_0$, ortogonalan u odnosu na meru $\mathrm{d}\lambda(t) = (t - x)\mathrm{d}\mu(t)$, postoji i važi*

$$P_n(t) = \frac{C_n}{t - x} \left(p_{n+1}^J(t) - \omega_n(x) p_n^J(t) \right), \quad n > n_0,$$

gde je $C_n \neq 0$ normalizaciona konstanta i

$$\omega_n(x) = \frac{p_{n+1}^J(x)}{p_n^J(x)}, \quad n > n_0.$$

Ako je tačka prihvatljiva, onda prethodno važi za svako $n \in \mathbb{N}_0$. *Niz moničnih polinoma* P_n, $n > n_0$, *zadovoljava sledeću rekurentnu relaciju*

$$P_{n+1}(t) = (t - \alpha_n)P_n - \beta_n^2 P_{n-1}, \quad n > n_0 + 1,$$

gde su

$$\alpha_n = x - \beta_{n+1}^J \omega_n(x) - \frac{\beta_{n+1}^J}{\omega_n(x)} \quad i \quad \beta_n^2 = \frac{\omega_n(x)}{\omega_{n-1}(x)} \beta_n^J \beta_{n+1}^J, \quad n > n_0 + 1. \tag{1.24}$$

Štaviše,

$$\int P_n^2 \mathrm{d}\lambda \neq 0, \quad n > n_0.$$

Dokaz.- Ovo je dobro poznata teorema, čiji se dokaz za $x \in \mathbb{C} \backslash (-1, 1)$ može naći, na primer, u [12, str. 35]. Jedina novost ovde je pojam prihvatljivosti. Dokaz je elementaran, ali ga navodimo zbog kompletnosti.

Za $n > n_0$, znamo da važi $p_n^J(x) \neq 0$ jer je x bar asimptotski prihvatljiva, tako da niz polinoma

$$p_n^*(t) = \frac{1}{t - x} \left(p_{n+1}^J(t) - \frac{p_{n+1}^J(x)}{p_n^J(x)} p_n^J(t) \right), \quad n > n_0,$$

postoji. Ako je tačka x prihvatljiva, onda prethodni niz postoji za svako $n \in \mathbb{N}_0$ i zato imamo

$$\int t^k p_n^* \mathrm{d}\lambda = \int t^k \left(p_{n+1}^J(t) - \frac{p_{n+1}^J(x)}{p_n^J(x)} p_n^J(t) \right) \mathrm{d}\mu(t) = 0,$$

pod uslovom $k < n$, što je direktna posledica ortogonalnosti Jacobijevih polinoma. Konstantu C_n možemo odrediti tako da je polinom P_n moničan.

Za dokaz poslednjeg dela tvrđenja, primetimo da je

$$\begin{aligned}
\int P_n^2 \mathrm{d}\lambda &= \int \frac{1}{t - x} \left(p_{n+1}^J(t) - \omega_n(x) p_n^J(t) \right)^2 \mathrm{d}\mu \\
&= \frac{1}{\beta_{n+1}^J p_n^J(x)} \int \left(p_{n+1}^J(t) - \omega_n(x) p_n^J(t) \right) \left(\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^J(x) p_\nu^J(t) \right) \mathrm{d}\mu(t) \\
&= \frac{1}{\beta_{n+1}^J} \int \left(p_{n+1}^J(t) - \omega_n(x) p_n^J(t) \right) p_n^J(t) \mathrm{d}\mu(t) = -\frac{\omega_n(x)}{\beta_{n+1}^J} \neq 0,
\end{aligned}$$

gde smo koristili uslov ortogonalnosti Jacobijevih polinoma p_n^J, kao i Christofell-Darbouxov identitet (videti [46, str. 104])

$$\beta_{n+1}^J \frac{p_{n+1}^J(t) p_n^J(x) - p_{n+1}^J(x) p_n^J(t)}{t - x} = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^J(x) p_\nu^J(t).$$

Za slučaj asimptotske prihvatljivosti tačke x, takođe, imamo da su polinomi P_n asimptotski ortgonalni u odnosu na λ. Zbog toga što norma polinoma P_n, $n > n_0$, nije nula, možemo formirati i niz ortonormiranih polinoma p_n, $n > n_0$, koji su asimptotski ortonormirani u odnosu na λ.

Izrazi za koeficijente tročlane relacije slede direktno na osnovu tročlane relacije koju zadovoljavaju Jacobijevi polinomi p_n^J. Prvo obeležimo sa π_n^J, $n \in \mathbb{N}_0$, monične Jacobijeve polinome, a sa π_n, $n \in \mathbb{N}_0$, monične polinome ortogonalne u odnosu na meru λ. Tada očigledno imamo

$$\pi_n = \frac{\pi_{n+1}^J(t) - \hat{\omega}_{n+1}(x)\pi_n^J(t)}{t-x},$$

gde smo sa $\hat{\omega}_n$ označili količnik moničnih polinoma π_{n+1}^J/π_n^J. Da bismo odredili izraze za koeficijente tročlane relacije, potrebne su nam sledeće jednakosti (videti [46, str. 116])

$$\alpha_n = \frac{\langle t\pi_n, \pi_n\rangle_\lambda}{\langle \pi_n, \pi_n\rangle_\lambda} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \beta_n^2 = \frac{\langle \pi_n, \pi_n\rangle}{\langle \pi_{n-1}, \pi_{n-1}\rangle}, \quad n \in \mathbb{N},$$

koje važe za slučaj da je tačka x prihvatljiva. U slučaju asimptotske prihvatljivosti, prethodne formule, takođe, važe, ali počev od nekog $n_0 \in \mathbb{N}$. Sa $\langle ., .\rangle_\lambda$ označimo sada integrale

$$\langle p, q\rangle_\lambda = \int pq \mathrm{d}\lambda.$$

Da bismo dokazali jednakosti za koeficijente tročlane rekurentne relacije najpre izračunavamo $\langle \pi_n, \pi_n\rangle_\lambda$,

$$\begin{aligned}
\langle \pi_n, \pi_n\rangle_\lambda &= \int \frac{\pi_{n+1}^J(t) - \hat{\omega}_n(x)\pi_n(t)}{t-x}\left(\pi_{n+1}^J(t) - \hat{\omega}_n(x)\pi_n(t)\right)\mathrm{d}\mu(t) \\
&= ||\pi_n^J||^2 \int \frac{\pi_{n+1}^J(t) - \hat{\omega}_n(x)\pi_n(t)}{\pi_n^J(x)}\left(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\pi_\nu^J(x)\pi_\nu^J(t)}{||\pi_\nu^J||^2}\right)\mathrm{d}\mu(t) \\
&= -||\pi_n^J||^2\hat{\omega}_n(x).
\end{aligned}$$

Takođe, imamo

$$\begin{aligned}
\langle t\pi_n, \pi_n\rangle_\lambda &= \int \frac{t}{t-x}\left(\pi_{n+1}^J(t) - \hat{\omega}_n(x)\pi_n^J(t)\right)^2 \mathrm{d}\mu(t) \\
&= \int \left(\pi_{n+1}^J(t) - \hat{\omega}_n(x)\pi_n^J(t)\right)^2 \mathrm{d}\mu(t) + x\langle \pi_n, \pi_n\rangle_\lambda \\
&= ||\pi_{n+1}^J||^2 + \hat{\omega}_n^2(x)||\pi_n^J||^2 + x\langle \pi_n, \pi_n\rangle_\lambda.
\end{aligned}$$

Koristeći ovako dobijene jednakosti, nalazimo izraze za koeficijente tročlane relacije. Pimetimo da važi $\beta_{n+1}\omega_n(x) = \hat{\omega}_n(x)$.

U slučaju da je tačka x prihvatljiva, koeficijente tročlane rekurentne relacije možemo odrediti preko datih jednakosti i imamo $\beta_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Naravno, ovo znači da niz ortogonalnih polinoma P_n postoji u smislu definicije 1.1. Tada možemo formirati niz ortonormiranih polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}_0$, u odnosu na meru λ. $\square$

Da bismo odredili asimptotsko ponašanje koeficijenata tročlane rekurentne relacije, uvodimo pojam totalne prihvatljivosti.

Definicija 1.16 Za tačku $x = \cos\theta \in (-1,1)$ kažemo da je totalno prihvatljiva za Jacobijevu meru μ, ako i samo ako je prihvatljiva ili asimptotski prihvatljiva i postoje $C > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da važi $C < |p_n^J(x)|$ za $n > n_0$.

Teorema 1.42 *Ako je $x = \cos\zeta\pi \in (-1,1)$, gde je ζ iracionalan broj, onda tačka x nije totalno prihvatljiva. Svaka tačka $x = \cos p\pi/q \in (-1,1)$, pod uslovom da je prihvatljiva (asimptotski prihvatljiva) je totalno prihvatljiva. Neka je tačka $x = \cos\theta \in (-1,1)$ prihvatljiva (asimptotski prihvatljiva) i neka je uslov (1.22) ispunjen. Onda x nije totalno prihvatljiva. Drugim rečima, tačka x je totalno prihvatljiva ako i samo ako ne postoji podniz niza $p_n^J(x)$, $n \in \mathbb{N}$, koji konvergira ka nuli.*

Dokaz.- Ako je $\theta = \zeta\pi$, niz

$$\sin((n+1)\zeta\pi - \phi(\theta)), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

je, na osnovu leme 1.5, gust u $[-1,1]$, pa onda možemo pronaći skup $N_0 \in \mathbb{N}$, takav da je niz $\sin((n+1)\zeta\pi - \phi)$, $n \in N_0$, nula niz. Naravno, tada je i $p_n^J(x)$, $n \in N_0$, nula niz, pa tačka x nije totalno prihvatljiva.

Ako je tačka $x = \cos\theta \in (-1,1)$, $\theta = p\pi/q$, prihvatljiva ili asimptotski prihvatljiva, onda prema lemi 1.8, niz p_n^J, $n \in \mathbb{N}_0$, je asimptotski periodičan, sa periodom $2q/(p,2)$, i nijedna od tačaka nagomilavanja niza p_n^J, $n \in \mathbb{N}_0$, nije jednaka nuli. Tačke nagomilavanja niza p_n^J, $n \in \mathbb{N}_0$, su tačke $A\sin(k\pi/q - \phi(\theta)) \neq 0$, $k = 0,1,\ldots,2q/(p,2)-1$. Dakle, tačka nula ne može biti tačka nagomilavanja niza $p_n^J(x)$, pa je x totalno prihvatljiva.

Poslednje tvrđenje teoreme je direktna posledica leme 1.9. Naime, nepostojanje podniza niza $p_n^J(x)$, $n \in \mathbb{N}$, koji konvergira ka nuli je ekvivalentno totalnoj prihvatljivoti tačke x. $\square$

Primer 1.8 Na osnovu primera 1.4, nijedna tačka $\cos p\pi/q \in (-1,1)$ nije prihvatljiva, niti je asimptotski prihvatljiva. Shodno upravo dokazanoj teoremi, Čebiševljeva mera druge vrste nema totalno prihvatljive tačke.

Primer 1.9 Kao što Čebiševljeva mera druge vrste daje primer mere za koju nijedna tačka iz intervala $(-1,1)$ nije totalno prihvatljiva, tako je mera $(1-x)^\pi \mathrm{d}x$ primer za koju su sve tačke $\cos p\pi/q \in (-1,1)$ totalno prihvatljive. Uslov prihvatljivosti (1.23) postaje

$$2\pi(q-p) = 4((p,2)k - mq) + q - 2p, \quad k = 0,1,\ldots,2q/(p,2)-1, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Jasno je da jednakost nema rešenja, inače bi π bio racionalan broj. Odavde zaključujemo da su sve tačke $\cos p\pi/q \in (-1,1)$ asimptotski prihvatljive. Jacobijev polinom stepena k može se, u ovom slučaju, napisati u razvijenom obliku

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k+\pi}{\nu}\binom{k}{k-\nu}(x-1)^{k-\nu}(1+x)^\nu$$

(videti [46, str. 135]). Primetimo da je P_n polinom po x i π, kao i da su $\cos p\pi/q \in (-1,1)$ algebraski brojevi jer

$$2\cos p\pi/q = \exp(\mathrm{i}p\pi/q) + \exp(-\mathrm{i}p\pi/q) \quad \text{i} \quad (\exp(\pm\mathrm{i}p\pi/q))^{2q} = 1.$$

Ako bismo za neko $n \in \mathbb{N}_0$ imali $P_n(\cos p\pi/q) = 0$, to bi značilo egzistenciju polinomne jednačine po π, sa algebarskim koeficijentima, čije je rešenje π. Naravno, da je to nemoguće, s obzirom da je rešenje svake takve jednačine algebarski broj (videti [32, str. 159]). Dakle, sve tačke $\cos p\pi/q \in (-1, 1)$ su prihvatljive i totalno prihvatljive.

Prethodni primer daje direktno sledeću teoremu.

Teorema 1.43 *Neka je $\zeta > -1$ bilo koji transcendentan broj. Sve tačke $x = \cos p\pi/q$, koje pripadaju $(-1, 1)$, su prihvatljive i totalno prihavtljive za meru $(1 \pm t)^\zeta \mathrm{d}t$.*

Primer 1.10 Na osnovu primera 1.3, znamo da su sve tačke $\cos p\pi/q \in (-1, 1)$, $(q, 2) = 1$, prihvatljive za Čebiševljevu meru prve vrste. Prema upravo dokazanoj teoremi, sve takve tačke su i totalno prihvatljive.

Spemni smo sada da damo glavni rezultat ove sekcije.

Teorema 1.44 *Ako je $x = \cos\theta$ prihvatljiva i totalno prihvatljiva tačka za Jacobijevu meru μ, Jacobijev operator J^λ pridružen meri $\mathrm{d}\lambda(t) = (t - x)\mathrm{d}\mu(t)$ je ograničen.*

Ako je tačka x asimptotski prihvatljiva i totalno prihvatljiva, onda su koeficijenti tročlane ralacije za polinome ortogonalne u odnosu na meru λ ograničeni. Ako je tačka x prihvatljiva, asimptotski prihvatljiva, ali nije totalno prihvatljiva, tada postoje podnizovi nizova koeficijenata tročlane relacije koji su neograničeni. Ako je tačka x prihvatljiva, ali nije totalno prihvatljiva, Jacobijev operator J^λ pridružen meri λ je neograničen, ali pravilan.

Dokaz.- Ako je tačka $x = \cos p\pi/q \in (-1, 1)$ totalno prihvatljiva, onda za niz $p_n^J(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, postoji svega $2q/(p, 2)$ tačaka nagomilavanja i nijedna od njih nije nula. Odavde zaključujemo da niz $\omega_n(x) = p_{n+1}^J(x)/p_n^J(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, ima najviše $2q/(p, 2)$ tačaka nagomilavanja. Prema tome, koeficijenti tročlane rekurentne relacije dati formulama (1.24) imaju najviše $2q/(p, 2)$ tačaka nagomilavanja i samim tim su ograničeni. Ako je, pored toga, tačka x prihvatljiva, onda je niz ortonormiranih polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}_0$, u odnosu na λ, ortogonalan u smislu definicije 1.1, pa je Jacobijev operator, saglasno (1.13), ograničen.

Naravno, ako tačka x nije totalno prihvatljiva, onda postoji podniz $p_n^J(x)$, $n \in N^0 \subset \mathbb{N}_0$, koji konvergira ka nuli. Onda je niz $\omega_n(x)$, $n \in N^0$, neograničen, pa je bar α_n, $n \in N^0$, neograničeno. Pod uslovom prihvatljivosti tačke x, zaključujemo da je pridruženi Jacobijev operator neograničen.

Takođe, pod uslovom da x nije totalno prihvatljiva, postoji podniz $p_n^J(x)$, $n \in N^1 \subset \mathbb{N}_0$, koji konvergira ka 1. Onda je niz $\omega_n(x)$, $n \in N^1$, ograničen, pa je i β_{n+1}, $n \in N^1$, ograničen niz. Na osnovu teoreme 1.23, zaključujemo tada da je pridruženi Jacobijev operator determinisan jer

$$\sum_{n \in N^1} \frac{1}{|\beta_n|} = +\infty. \quad \square$$

Primetimo da za Čebiševljeve mere prve i druge vrste, možemo eksplicitno odrediti koeficijente tročlane relacije. Ako je $\theta = \zeta\pi$, ζ iracionalno, onda imamo sledeću teoremu:

Teorema 1.45 *Pod uslovom $x = \cos\theta$, $\theta = \zeta\pi \in (0,\pi)$, gde je ζ iracionalno, za Čebiševljevu meru prve vrste imamo*

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= x - \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(k+1)\zeta\pi}{\cos k\zeta\pi} + \frac{\cos k\zeta\pi}{\cos(k+1)\zeta\pi}\right), \quad k \in \mathbb{N},\\
\alpha_0 &= x - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\cos\zeta\pi + \frac{1}{\sqrt{2}\cos\zeta\pi}\right),
\end{aligned}$$

$$\beta_k^2 = \frac{1}{4}\frac{\cos(k+1)\zeta\pi\cos(k-1)\zeta\pi}{\cos^2 k\zeta\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Za Čebiševljevu meru druge vrste imamo

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= x - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k+2)\zeta\pi}{\sin(k+1)\zeta\pi} + \frac{\sin(k+1)\zeta\pi}{\sin(k+2)\zeta\pi}\right), \quad k \in \mathbb{N},\\
\beta_k^2 &= \frac{1}{4}\frac{\sin(k+2)\zeta\pi\sin k\zeta\pi}{\sin^2(k+1)\zeta\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Dokaz.- Direktno izračunavanje. $\square$

U opštem slučaju, za $\theta = p\pi/q$ možemo dati sledeće asimptotske formule:

Teorema 1.46 *Za Jacobijevu meru μ, pod uslovom $x = \cos\theta$, $\theta = p\pi/q \in (0,\pi)$ i da je tačka x totalno prihvatljiva, imamo za $n \to +\infty$ i $k = 0,\ldots,2q/(p,2)-1$,*

$$\begin{aligned}
\alpha_{2nq+k} &\to x - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{(k+2)p\pi}{q} - \phi(\theta)\right)}{\sin\left(\frac{(k+1)p\pi}{q} - \phi(\theta)\right)} + \frac{\sin\left(\frac{(k+1)p\pi}{q} - \phi(\theta)\right)}{\sin\left(\frac{(k+2)p\pi}{q} - \phi(\theta)\right)}\right),\\
\beta_{2qn+k}^2 &\to \frac{1}{4}\frac{\sin\left(\frac{(k+2)p\pi}{q} - \phi(\theta)\right)\sin\left(\frac{kp\pi}{q} - \phi(\theta)\right)}{\sin^2\left(\frac{(k+1)p\pi}{q} - \phi(\theta)\right)}.
\end{aligned}$$

Dokaz.- Direktno izračunavanje. $\square$

U slučaju da je μ Čebiševljeva mera prve vrste, onda pod uslovom $(q,2) = 1$, umesto asimptotskog oblika, relacije važe egzaktno za svako $n \in \mathbb{N}_0$, pri čemu relaciju za $n = 0$ i $k = 0$ za α_0, treba zameniti sa

$$\alpha_0 = x - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\cos\frac{p\pi}{q} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\cos\frac{p\pi}{q}}\right).$$

Teorema 1.47 *Neka je tačka* $x = \cos\theta \in (-1,1)$, $\theta = p\pi/q$, *prihvatljiva i totalno prihvatljiva za Jacobijevu meru* μ. *Tada za Jacobijev operator* J^λ, *pridružen meri* $\mathrm{d}\lambda(t) = (t-x)\mathrm{d}\mu(t)$, *postoji konstanta* $C \geq 0$, *takva da važi*

$$||J^\lambda|| < |x| + \frac{2}{C_0} + C,$$

gde je

$$C_0 = \min\left\{\left|\sin\Big(\frac{(k+1)p\pi}{q} - \phi(\theta)\Big)\right|,\ k = 0,1,\ldots,\frac{2q}{(p,2)} - 1\right\}.$$

Dokaz.- Direktno izračunavanje. □

Ovu sekciju završavamo jednim lepim primerom za Čebiševljevu meru prve vrste. Uzimajući $\theta = \pi/3$, za koeficijente tročlane rekurentne relacije u odnosu na meru $(x-1/2)(1-x^2)^{-1/2}\mathrm{d}x$ dobijamo $\alpha_0 = -1$ i

$$\alpha_k = \begin{cases} \dfrac{3}{2}, & k = 3n+1,\ n \in \mathbb{N}, \\ -\dfrac{3}{4}, & k = 3n+2,\ k = 3n,\ n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, & k = 3n+1,\ k = 3n+2,\ n \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{1}{4}, & k = 3n,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ocenu norme Jacobijevog operatora možemo dobiti u obliku $||J|| < \sqrt{2} + 3/2$.

1.5.5 Polinomi ortogonalni na polukrugu

Još jedna klasa polinoma ortogonalnih u odnosu na kompleksnu meru je proučavana intenzivno u radovima [26], [10], [45], [25]. Opšta teorija je razmatrana, takođe, u [48, str. 387–399], odakle navodimo osnovne rezultate.

Neka je w pozitivna težinska funkcija na $(-1,1)$, takva da su svi polinomi $w\mathrm{d}x$-integrabilni. Dalje, neka je w regularna u oblasti

$$D_+ = \{z \mid |z| < 1,\ \mathrm{Im} z > 0\},$$

i neka je kontura Γ gornja polovina jediničnog kruga pozitivno orjentisana i neka važi

$$\int_\Gamma p(z)w(z)\mathrm{d}z = -\int_{-1}^{1} p(x)w(x)\mathrm{d}x, \quad p \in \mathcal{P}. \tag{1.25}$$

Neka je, takođe, $\mathrm{Re}(m_0) \neq 0$, gde je $m_0 = \int_\Gamma w(z)(\mathrm{i}z)^{-1}\mathrm{d}z$.

Označimo sa π_k^R, $k \in \mathbb{N}_0$, monične ortogonalne polinome u odnosu na težinsku funkciju w na intervalu $[-1,1]$, odgovarajuće koeficijente tročlane relacije označimo sa α_k^R, $k \in \mathbb{N}_0$, β_k^R, $k \in \mathbb{N}_0$. Sa ρ_k^R, $k \in \mathbb{N}_0$, označimo drugo (monično) linearno nezavisno rešenje tročlane relacije koju zadovoljavaju polinomi π_k^R, $k \in \mathbb{N}_0$.

Primetimo da regularnost funkcije w može biti zadata i na drugi način, a da se rezultati ne promene. Na primer, neka je Γ' bilo koja prosta Jordanova kriva sa krajnjim tačkama -1 i 1 smeštena u gornju poluravan kompleksne ravni z. Onda možemo oblast D_+ definisati kao unutrašnost krive $\Gamma' \cup [-1,1]$ i da posmatramo integral ne po polukrugu Γ, već po krivoj Γ'. Imajući ovo u vidu zadržaćemo definiciju integrala na polukrugu Γ, ali ćemo podrazumevati da se integral može uzeti po bilo kojoj krivoj Γ', ukoliko je težinska funkcija w analitička na manjem skupu od gornjeg polukruga.

Dalje, sa m_k^R, $k \in \mathbb{N}_0$, označavamo momente težine w, $m_k^R = \int_{-1}^{1} x^k w(x)\mathrm{d}x$.

U [48, str. 391], data je sledeća teorema:

Teorema 1.48 *Neka funkcija w zadovoljava sve gore pobrojane uslove. Postoji niz moničnih ortogonalnih polinoma π_k, $k \in \mathbb{N}_0$, sa koeficijentima tročlane relacije α_k, $k \in \mathbb{N}_0$, β_k, $k \in \mathbb{N}$, ortogonalnih u odnosu na linearni funkcional*

$$\mathcal{L}^{w,0}(p) = \int_\Gamma p(z)w(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}, \quad p \in \mathcal{P}, \quad m_k = \mathcal{L}^w(z^k),$$

pri čemu $\pi_n(z) = \pi_n^R(z) - \mathrm{i}\omega_{n-1}\pi_{n-1}^R(z)$, $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\alpha_0 = \mathrm{i}\omega_0 + \alpha_0^R, \quad \alpha_k = \mathrm{i}(\omega_k - \omega_{k-1}) + \alpha_k^R, \; k \geq 1,$$

$$\beta_1^2 = (\beta_1^R)^2 + \mathrm{i}\omega_0(\alpha_1 - \alpha_0^R), \quad \beta_k^2 = \frac{\omega_{k-1}}{\omega_{k-2}}(\beta_{k-1}^R)^2, \quad k \geq 2,$$

gde su

$$\omega_0 = \mathrm{i}\alpha_0^R + \frac{m_0^R}{m_0}, \quad \omega_n = \mathrm{i}\alpha_n^R + \frac{(\beta_n^R)^2}{\omega_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alternativno,

$$\omega_{n-1} = \frac{m_0\pi_n^R(0) + \mathrm{i}m_0^R\rho_n^R(0)}{\mathrm{i}m_0\pi_{n-1}^R(0) - m_0^R\rho_{n-1}^R(0)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za slučaj parne težine $w(x) = w(-x)$ na simetričnom intervalu $[-1,1]$, dobijamo posebno jednostavan rezultat. Primenjujući teoremu 1.16, zaključujemo da je $\alpha_n^R = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, i nalazimo

$$\omega_0 = \frac{m_0^R}{m_0} = \frac{m_0^R}{\pi w(0)}, \quad \omega_n = \frac{(\beta_n^R)^2}{\omega_{n-1}}, \; n \in \mathbb{N},$$

odakle sleduje $\omega_k > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\omega_{2k} = \omega_0 \left(\frac{\beta_2^R\beta_4^R \dots \beta_{2k}^R}{\beta_1^R\beta_3^R \dots \beta_{2k-1}^R}\right)^2 \quad \text{i} \quad \omega_{2k+1} = \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{\beta_1^R\beta_3^R \dots \beta_{2k+1}^R}{\beta_2^R\beta_4^R \dots \beta_{2k}^R}\right)^2.$$

Jednakosti za koeficijente tročlane rekurentne relacije postaju

$$\alpha_0 = \mathrm{i}\omega_0, \quad \alpha_k = \mathrm{i}(\omega_k - \omega_{k-1}), \quad \beta_k = \left(\frac{\omega_{k-1}}{\omega_{k-2}}\right)^{1/2}\beta_{k-1}^R, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Za specijalan slučaj simetrične Gegenbaureove težine $w(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$, $\lambda > -1/2$, dobijamo (videti [76, str. 396])

$$\omega_0 = \frac{\Gamma(\lambda+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1)}, \quad \omega_n = \frac{1}{\lambda+n}\frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}, \quad n \geq 1.$$

U [25] dokazano je da za slučaj Gegenbaurove težine imamo

$$\lim_{k\to+\infty} \omega_k = 1/2,$$

što za posledicu ima sledeće asimptotske relacije za koeficijente tročlane relacije

$$\alpha_k \to 0, \quad \beta_k \to \frac{1}{2}, \quad k \to +\infty.$$

Drugim rečima, Jacobijev operator $J^{w,0}$, pridružen lineranom funkcional $\mathcal{L}^{w,0}$, je ograničen.

Zbog teoreme 1.27, znamo da koeficijenti tročlane relacije zadovoljavaju osobinu

$$\alpha_k^R \to 0 \quad \text{i} \quad \beta_k^R \to 1/2, \quad \text{kada} \quad k \to +\infty.$$

Očigledno je da ω_{2k} i ω_{2k+1}, $k \in \mathbb{N}_0$, predstavljaju parcijalne proizvode dva pozitivna beskonačna proizvoda

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_{2k}^R}{\beta_{2k-1}^R} \quad \text{i} \quad \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_{2k+1}^R}{\beta_{2k}^R}. \tag{1.26}$$

Pod uslovom da ovi beskonačni proizvodi konvergiraju, niz ω_k, $k \in \mathbb{N}_0$, je uniformno ograničen.

Teorema 1.49 *Pod uslovom da redovi*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \log\left(\frac{\beta_{2k}^R}{\beta_{2k-1}^R}\right) \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \log\left(\frac{\beta_{2k+1}^R}{\beta_{2k}^R}\right),$$

konvergiraju, Jacobijev operator $J^{w,0}$, pridružen funkcionalu $\mathcal{L}^{w,0}$, je ograničen.

Dokaz.- U [75, str. 89] može se naći teorema koja tvrdi da je pozitivan beskonačni proizvod $\prod a_k$, $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, ekvikonvergentan sa redom $\sum \log(a_k)$. Dovoljno je samo primeniti ovu teoremu na naše beskonačne proizvode. $\square$

Alternativno, zbog $\log x/(x-1) \to 1$, kada $x \to 1$, dobijamo da su redovi u teoremi ekvikonvergentni sa redovima

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_{2k}^R - \beta_{2k-1}^R}{\beta_{2k-1}^R} \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_{2k+1}^R - \beta_{2k}^R}{\beta_{2k}^R}.$$

Kako $\beta_k \to 1/2$, kada $k \to +\infty$, zaključujemo da su ovi redovi ekvikonvergenetni sa redovima

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\beta_{2k}^R - \beta_{2k-1}^R) \qquad \text{i} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} (\beta_{2k+1}^R - \beta_{2k}^R). \tag{1.27}$$

U literaturi možemo pronaći sledeća tvrđenja o asimptotskom ponašanju koeficijenata tročlane rekurentne relacije.

Na primer, u [81, str. 127] je pokazano da ako je težina w pozitivna, neprekidna i simetrična na $[-1,1]$, sa neprekidnim prvim izvodom, onda koeficijenti tročlane rekurentne relacije zadovoljavaju sledeće asimptotsko ponašanje

$$\beta_k^R = \frac{1}{2} + o(1/k), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Za ovu klasu funkcija onda važi

$$\log\left(\frac{\beta_k^R}{\beta_{k-1}^R}\right) \sim \frac{o(1/k)}{\beta_{k-1}^R} \sim o(1/k),$$

pa očigledno redovi u teoremi 1.49 mogu, ali i ne moraju biti konvergentni.

S druge strane, u [82] se može naći teorema koja tvrdi da ukoliko važi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\beta_{k+1}^R - \beta_k^R| < +\infty,$$

onda odgovarajuća (simetrična) spektralna mera ortogonalnosti, pored diskretnog dela koji je podržan van intervala $(-1,1)$, ima i apsolutno neprekidni deo čiji je izvod pozitivna neprekidna funkcija na $(-1,1)$.

Teško je, dakle, navesti karakterizaciju težina w, čiji koeficijenti tročlane rekurentne relacije zadovoljavaju uslov (1.27). Međutim, funkcija w je po pretpostavci regularna na D_+, pa ako pretpostavimo još da se regularnost prostire i na realnu pravu, tada možemo dokazati da koeficijenti tročlane relacije zadovoljavaju uslov (1.27).

U [101] možemo naći sledeći rezultat: *Neka je*

$$w = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta h(x) \prod_{k=1}^{m} |x - x_k|^{\gamma_k}$$

i h analitička u nekoj okolini intervala $[-1,1]$ i pozitivna na $(-1,1)$, pri čemu $x_k \in (-1,1)$, $\alpha, \beta > -1$, $\gamma_k > -1$, $k = 1,\ldots,m$. Tada za koeficijente tročlane rekurentne relacije važe sledeće asimptotske formule

$$\alpha_n^R = \frac{A_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{i} \quad \beta_n^R = \frac{1}{2} + \frac{B_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

pri čemu za slučaj $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m = 0$, imamo $A_n = B_n = 0$. Konstante A_n i B_n mogu, takođe, biti određene eksplicitno i zavise od praktično svih parametara težinske funkcije w.

Izaberemo li sve $\gamma_k = 0$, $k = 1, \ldots, m$, $\alpha = \beta$, $h(x) = h(-x)$, dobijamo asimptotski $\beta_n^R = 1/2 + O(1/n^2)$. Naravno, ovo je dovoljan uslov da redovi u teoremi 1.49 konvergiraju.

S obzirom da ω_{2k} i ω_{2k-1} konvergiraju, možemo tvrditi da je

$$\lim_{k\to+\infty} \omega_{2k} \lim_{k\to+\infty} \omega_{2k-1} = \frac{1}{4}.$$

Teorema 1.50 *Pod uslovom $w = (1-x^2)^{\lambda-1/2}h$, $\lambda > -1/2$, gde je h simetrična i analitička u nekoj okolini intervala $[-1,1]$ i pozitivna na $(-1,1)$, Jacobijev operator $J^{w,0}$, pridružen linearnom funkcionalu $\mathcal{L}^{w,0}$, je ograničen.*

Prvo uopštenje koje možemo dati odnosi se na tačku u nosaču mere u kojoj se izvodi modifikacija. S obzirom da u dosadašnjim razmatranjima, tačka nula ima specijalno značenje kažemo još da se modifikacija mere izvodi u tački nula. Sledeća teorema daje uopštenje, koje razmatra ravnopravno sve tačke nosača $(-1,1)$.

Teorema 1.51 *Neka funkcija w zadovoljava sve gore pobrojane uslove. Tada postoji niz moničnih ortogonalnih polinoma π_k, $k \in \mathbb{N}_0$, u odnosu na linearni funkcional*

$$\mathcal{L}^{w,x}(p) = \int_\Gamma p(z)w(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(z-x)}, \quad p \in \mathcal{P}, \quad m_k = \mathcal{L}^{w,x}(z^k), \quad x \in (-1,1),$$

pri čemu $\pi_n(z) = \pi_n^R(z) - \mathrm{i}\omega_{n-1}(x)\pi_{n-1}^R(z)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Rekurzioni koeficijenti u tročlanoj relaciji α_k, $k \in \mathbb{N}_0$, β_k, $k \in \mathbb{N}$, su dati sa

$$\alpha_0 = \mathrm{i}\omega_0(x) + \alpha_0^R, \quad \alpha_k = \mathrm{i}(\omega_k(x) - \omega_{k-1}(x)) + \alpha_k^R, \; k \geq 1,$$

$$\beta_1^2 = (\beta_1^R)^2 + \mathrm{i}\omega_0(\alpha_1 - \alpha_0^R), \quad \beta_k^2 = \frac{\omega_{k-1}(x)}{\omega_{k-2}(x)}(\beta_{k-1}^R)^2, \quad k \geq 2,$$

gde je

$$\omega_0(x) = \mathrm{i}(\alpha_0^R - x) + \frac{m_0^R}{m_0}, \quad \omega_n(x) = \mathrm{i}(\alpha_n^R - x) + \frac{(\beta_n^R)^2}{\omega_{n-1}(x)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alternativno,

$$\omega_{n-1}(x) = \frac{m_0\pi_n^R(x) + \mathrm{i}m_0^R\rho_n^R(x)}{\mathrm{i}m_0\pi_{n-1}^R(x) - m_0^R\rho_{n-1}^R(x)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz.- Mada se dokaz bitno ne razlikuje od dokaza teoreme za $x = 0$, prezentovanog u [48, str. 391], neke izvode dokaza daćemo zbog kompletnosti.

Dakle, po pretpostavci za težinu w (1.25), ako stavimo

$$\pi_n(z) = \pi_n^R(z) - \mathrm{i}\omega_{n-1}(x)\pi_{n-1}^R(z), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

za $1 \leq k$, imamo

$$0 = \int_\Gamma \pi_n(z)(z-x)^k w(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(z-x)} - \mathrm{i}\int_{-1}^{1} \pi_n(t)(t-x)^{k-1}w(t)\mathrm{d}t.$$

Pod pretpostavkom da su polinomi π_n^R, $n \in \mathbb{N}_0$, ortogonalni u odnosu na $w\chi_{[-1,1]}$, zaključujemo da je drugi integral jednak nuli za $1 \le k < n$.

Primenom (1.25) na polinom $\pi_n^*(z)/(z-x)$, gde je

$$\pi_n^*(z) = \pi_n(z) - \pi_n(x) = \pi_n^R(z) - \pi_n^R(x) - \mathrm{i}\omega_{n-1}(x)(\pi_{n-1}^R(z) - \pi_{n-1}^R(x)), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

dobijamo

$$0 = \int_\Gamma \pi_n^*(z)w(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(z-x)} - \mathrm{i}\int_{-1}^1 \frac{\pi_n^*(t)}{t-x}w(t)\mathrm{d}t,$$

odakle sleduje

$$0 = \mathcal{L}^{w,x}(\pi_n) - \pi_n(x)\mathcal{L}^{w,x}(1) - \mathrm{i}m_0^R\left(\rho_n^R(x) - \mathrm{i}\omega_{n-1}(x)\rho_{n-1}^R(x)\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Iz ove jednakosti određujemo niz $\omega_n(x)$. Kako je $\mathcal{L}^{w,x}(\pi_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, imamo

$$\omega_{n-1}(x) = \frac{m_0\pi_n^R(x) + \mathrm{i}m_0^R\rho_n^R(x)}{\mathrm{i}m_0\pi_{n-1}^R(x) - m_0^R\rho_{n-1}^R(x)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

pri čemu smo koristili integralnu vezu (1.10) između ρ_n^R i π_n^R. Rekurentna relacija za $\omega_n(x)$ može biti proverena indukcijom. Primetimo da je izraz u imeniocu za $\omega_n(x)$ kompleksan broj[7] različit od nule, s obzirom da polinomi $\pi_n^R(x)$ i $\rho_n^R(x)$ nemaju zajedničkih nula (videti lemu 1.1).

Izraze za koeficijente rekurentne relacije možemo dobiti na isti način kao u [76, str. 392]. $\square$

Takođe, u [26] posmatrane su i nesimetrične težine. Prvi primer nesimetrične težine je sigurno Jacobijeva težinska funkcija. Primetimo da koeficijneti tročlane relacije za Jacobijevu težinu zadovoljavaju uslov (1.29).

Imamo sledeću teoremu:

Teorema 1.52 *Neka je w težinska funkcija takva da su nizovi $p_n^R(x)$ i $q_n^R(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, uniformno ograničeni. Jacobijev operator $J^{w,x}$, pridružen linearnom funkcionalu $\mathcal{L}^{w,x}$ iz teoreme* 1.51*, je ograničen.*

Dokaz.- Za $\omega_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, imamo

$$\omega_{n-1}(x) = \frac{m_0\pi_n^R(x) + \mathrm{i}m_0^R\rho_{n-1}^R(x)}{\mathrm{i}m_0\pi_{n-1}^R(x) - m_0^R\rho_{n-1}^R(x)} = \beta_n^R\frac{m_0p_n^R(x) + \mathrm{i}\beta_0^Rq_n^R(x)}{\mathrm{i}m_0p_{n-1}^R(x) - \beta_0^Rq_{n-1}^R(x)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

pa je jasno da su brojioci ograničeni. Dokažimo da su i imenioci uniformno ograničeni od nule.

Neka je $N' \subset \mathbb{N}_0$ skup indeksa, takav da je niz $|p_n^R|$, $n \in N'$, ograničen od nule, tj. $|p_n^R| > C_p > 0$, $n \in N'$. Onda je $|\omega_n|$, $n \in N'$ ograničen odozgo jer očigledno

$$|\omega_n| \le \frac{C}{\sqrt{(\mathrm{Re}(m_0)p_n^R)^2 + (\mathrm{Im}(m_0)p_n^R - \beta_0^Rq_n^R)^2}} \le \frac{C}{|\mathrm{Re}(m_0)|C_p} < +\infty.$$

[7] Za realno x, vrednosti $\pi_n^R(x)$ i $\rho_n^R(x)$ su realne.

Na osnovu razmatranja u odeljku o linearnim modifikacijama Jacobijeve mere, znamo da mogu da postoje podnizovi niza $p_n^R(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, koji konvergiraju ka nuli. Neka je N^p beskonačni skup indeksa takav da je $p_n^R(x)$, $n \in N^p \subset \mathbb{N}_0$, nula niz. Na osnovu jednakosti (1.11), važi

$$p_n^R q_{n-1}^R - p_{n-1}^R q_n^R = -\frac{1}{\beta_n^R \beta_0^R},$$

odakle neposredno sleduje

$$\beta_n^R \beta_0^R \geq \frac{1}{\left||p_n^R||q_{n-1}^R| - |p_{n-1}^R||q_n^R|\right|}.$$

Prelazeći na granične vrednosti dobijamo

$$\frac{\beta_0^R}{2} \liminf_{n\to+\infty, n\in N^p} |p_{n-1}^R| \geq \frac{1}{\liminf_{n\to+\infty, n\in N^p} |q_n^R|}.$$

Drugim rečima, ako je p_n^R, $n \in N^p$, nula niz, onda je $|q_n^R| > C_q > 0$, $n \in N^p$. Takođe, zaključujemo ako je p_n^R, $n \in N^p$, nula niz, tada niz p_{n-1}^R, $n \in N^p$, nije nula niz. Koristeći prethodnu činjenicu imamo

$$\limsup_{n\to+\infty, n\in N^p} |\omega_n| \leq \frac{C}{\liminf_{n\to+\infty, n\in N^p} \left||m_0 p_n^R| - \beta_0^R |q_n^R|\right|} \leq \frac{C}{\beta_0^R C_q} < +\infty.$$

Dakle, za svako $n \in \mathbb{N}_0$, imamo $|\omega_n| < C_1 < +\infty$. Koristeći potpuno iste argumente dokazujemo, takođe, da važi $|\omega_n| > C_0 > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, odakle za koeficijente tročlane relacije, saglasno teoremi 1.51, imamo

$$|\alpha_n| \leq |\omega_n| + |\omega_{n-1}| + |\alpha_n^R| < 2C_1 + \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |\alpha_n^R|, \quad |\beta_n|^2 = \left|\frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-2}}\right| (\beta_n^R)^2 \leq \frac{C_1}{C_0} \sup_{n\in\mathbb{N}} (\beta_n^R)^2,$$

što, naravno, znači da je odgovarajući Jacobijev operator $J^{w,x}$ ograničen. $\square$

Na primer, znamo da ako koeficijenti tročlane relacije zadovoljavaju uslov

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(|\alpha_{k+1}^R - \alpha_k^R| + |\beta_{k+1}^R - \beta_k^R|\right) < +\infty, \tag{1.28}$$

onda su odogovarajući ortonormirani polinomi $p_n^R(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, uniformno ograničeni po n za $x \in (-1,1)$ (videti [82]). Sada neposredno imamo sledeću teoremu:

Teorema 1.53 *Neka je težinska funkcija w takva da koeficijenti tročlane relacije zadovoljavaju uslov* (1.28). *Jacobijev operator $J^{w,x}$, $x \in (-1,1)$, pridružen linearnom funkcionalu $\mathcal{L}^{w,x}$ iz teoreme* 1.51, *je ograničen.*

Navešćemo ilustrativan primer povezan sa Čebiševljevom težinom prve vrste. Za Čebiševljevu meru prve vrste imamo (videti [46, str. 140])

$$p_n^R = \left(\frac{2-\delta_{n,0}}{\pi}\right)^{1/2} \cos n\theta \quad \text{i} \quad q_n^R = 2^{1/2}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Na osnovu ovih izraza jednostavno možemo odrediti niz ω_n,

$$\omega_0(x) = -\mathrm{i}x + \frac{\pi}{m_0}, \quad \omega_n(x) = \beta_n^R \frac{m_0 \sin\theta\ \cos(n+1)\theta + \mathrm{i}\pi\sin(n+1)\theta}{\mathrm{i}m_0\sin\theta\ \cos n\theta - \pi\sin n\theta}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Imajući u vidu osnovni trigonometriski identitet $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, može se zaključiti da ako je $\cos n\theta$, $n \in N' \subset \mathbb{N}_0$, nula niz, onda očito niz $\sin n\theta$, $n \in N'$, ne samo da nema nula podniz, nego konvergira ka 1. Ovo znači da niz

$$|\mathrm{i}m_0 \sin\theta\ \cos n\theta - \pi\sin n\theta|, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

nema nijedan element u nekoj otvorenoj okolini tačke nula, tj. da je niz $|\omega_n|$, $n \in \mathbb{N}_0$, ograničen sleva. Ograničenost s desna je prosta posledica ograničenosti trigonometrijskih funkcija.

Ako izračunamo vrednost nultog momenta, imamo $m_0 = \pi/\sin\theta$. Uz dobro poznatu jednakost $m_0^R = \pi$, dobijamo da za niz $\omega_n(x)$ važi

$$\omega_0(x) = -\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}, \quad \omega_n(x) = -\frac{\mathrm{i}}{2}e^{\mathrm{i}\theta}, \quad n \in \mathbb{N},$$

što za posledicu ima sledeće jednakosti za koeficijente tročlane relacije

$$\alpha_n = 0, \quad n \geq 2, \quad \alpha_1 = -\frac{e^{\mathrm{i}\theta}}{2}, \quad \alpha_0 = e^{\mathrm{i}\theta},$$
$$\beta_n = \frac{1}{2}, \quad n \geq 2, \quad \beta_1^2 = -\mathrm{i}\sin\theta e^{\mathrm{i}\theta}, \quad \beta_0^2 = \frac{\pi}{\sin\theta}.$$

Slično za Čebiševljevu meru druge vrste, imamo $m_0 = -\mathrm{i}\pi e^{\mathrm{i}\theta}$ i $m_0^R = \pi/2$, što daje $\omega_n = -\mathrm{i}/2\ e^{\mathrm{i}\theta}$, tako da dobijamo sledeće relacije za koeficijente tročlane relacije

$$\alpha_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2}e^{\mathrm{i}\theta}; \quad \beta_n = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \beta_0^2 = -\mathrm{i}\pi e^{\mathrm{i}\theta}.$$

U daljem tekstu podrazumevamo da je težina w takva da koeficijenti tročlane rekurentne relacije zadovoljavaju uslov

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\left|\beta_k^R - \frac{1}{2}\right| + |\alpha_k^R|\right) < +\infty. \tag{1.29}$$

Primetimo da uslov (1.29) implicira (1.27) jer je očigledno

$$|\beta_k^R - \beta_{k-1}^R| \leq |\beta_k^R - 1/2| + |\beta_{k-1}^R - 1/2|,$$

dok obrnuto, ne važi.

Primetimo da je uslov teoreme iskazan u terminima koeficijenata tročlane relacije, a ne težinske funkcije w. Ovo je već pomenuta posledica toga što je veoma teško odrediti koja klasa težinskih funkcija ima koeficijente tročlane relacije koji zadovoljavaju uslov (1.29). U svakom slučaju, možemo ponovo iskoristiti [101] za formulaciju sledeće teoreme.

Teorema 1.54 *Neka je težinska funkcija zadata sa*

$$w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}h(x)\chi_{[-1,1]}(x),$$

gde su $\alpha, \beta > -1$ i h analitička funkcija u nekoj otvorenoj okolini intervala $[-1,1]$ i pozitivna na $(-1,1)$. Jacobijev operator $J^{w,x}$, pridružen linearnom funkcionalu $\mathcal{L}^{w,x}$ iz teoreme 1.51*, je ograničen.*

Za još preciznije rezultate treba nam rezultat prezentovan u [42]. Naime, pod uslovom da je w neprekidna deo po deo, u [42] dat je eksplicitno izraz za težinsku funkciju u odnosu na koju je niz polinoma q_n^R, $n \in \mathbb{N}_0$, ortonormiran. Označimo ovu težinsku funkciju sa w_q. Tada imamo

$$w_q(x) = \frac{\chi_{[-1,1]}(x)}{m_0^R} \frac{w(x)}{\left(\frac{1}{m_0^R}\text{v.p.}\int_{-1}^{1}\frac{w(t)}{t-x}\mathrm{d}t\right)^2 + \left(\frac{\pi w(x)}{m_0^R}\right)^2}. \tag{1.30}$$

Oznaka v.p. znači da se integral izračunava u Cauchyjevom smislu. Kako koeficijenti tročlane relacije zadovoljavaju uslov (1.29), po teoremi 1.37, znamo da su polinomi q_n^R, $n \in \mathbb{N}_0$, ortonormirani u odnosu na pozitivnu neprekidnu težinu na $(-1,1)$ i da zadovoljavaju sledeću relaciju

$$q_n^R(x) = \left(\frac{2}{\pi}\frac{1}{w^q(x)\sin\theta}\right)^{1/2}\sin(n\theta - \phi^q) + o(1).$$

Potrebna nam je i sledeća lema.

Lema 1.10 *Ako koeficijenti tročlane relacije zadovoljavaju uslov* (1.29)*, onda važi*

$$\frac{D(w\sin;e^{\mathrm{i}\theta})}{D(w_q\sin;e^{\mathrm{i}\theta})}D(\sin^2;e^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{\pi w(x)|\sin\theta|}{\beta_0^R} + \mathrm{i}\frac{\sin\theta}{\beta_0^R}\text{v.p.}\int_{-1}^{1}\frac{w(t)}{t-x}\mathrm{d}t, \tag{1.31}$$

$x = \cos\theta$, $\theta \neq 0, \pi$, gde je sa $D(f;z)$, $|z| \leq 1$, označena Szegő-ova funkcija date funkcije f.

Dokaz.- Prvo sledimo Szegő-a [97, str. 275] (videti takođe [81, str. 39]) i dajemo sledeću definiciju da nenegativna funkcija $f \in L^1(-\pi,\pi)$ pripada Szegő-ovoj klasi pod uslovom

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log f(x)\mathrm{d}\theta > -\infty. \tag{1.32}$$

Sada nastaje izvestan problem koji treba razjasniti. Szegő-ova teorija izložena u [97], za asimptotiku ortogonalnih polinoma razvijena je pre svega za polinome ortogonalne na jediničnom krugu (videti [97, str. 286]). Danas se gotovo sva izučavanja vrše na intervalu $[-1,1]$, ali zbog istorijskih razloga i dalje se koriste definicije koje je uveo Szegő za težine na jediničnom krugu. Međutim, postoji direktna veza između ortogonalnosti na jediničnom krugu i na intervalu $[-1,1]$. Da bi se uspostavila veza svode se integrali sa jediničnog kruga na integrale po polukrugu $\theta \in (0,\pi)$, a tačka na intervalu $[-1,1]$ onda definiše kao $x = \cos\theta$. Kako se na jediničnom krugu integracija vrši po θ, imamo $\mathrm{d}\theta = \sin\theta \mathrm{d}x$ (videti [97, str. 294], [40]). Nama je najvažnije da zapamtimo da se, zbog transformacije diferencijala, težinska funkcija množi sa $|\sin\theta|$ pri prelasku sa intervala na jednični krug i naravno potrebno je smeniti nezavisno promenljivu težinske funkcije sa $x = \cos\theta$. Tako na primer, s obzirom da je Szegő-ov uslov (1.32) zadat za težine na jediničnom krugu, ako posmatramo težinu w na $[-1,1]$, Szegő-ov uslov (1.32) postaje

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log\left(w(\cos\theta)|\sin\theta|\right)\mathrm{d}\theta > -\infty.$$

Koristeći teoremu datu u [81, str. 124], znamo da su težinske funkcije $w \in L^1(-1,1)$ i $w_q \in L^1(-1,1)$ u Szegő-ovoj klasi jer koeficijenti tročlane relacije zadovoljavaju uslov (1.29) i odgovarajući nosači mera su podskupovi intervala $[-1,1]$.

Szegő-ova funkcija funkcije f, koja zadovoljava Szegő-ov uslov (1.32), koja je definisana u $(-\pi,\pi)$ (videti [81, str. 67], [97, str. 277], [40]), je zadata sa

$$D(f;z) = \exp\left(\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\theta)\frac{1+ze^{-\mathrm{i}\theta}}{1-ze^{-\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta\right), \quad |z|<1,$$

Posebno, za slučaj koji mi posmatramo, znamo da važi $f(\theta) = w(\cos\theta)|\sin\theta|$, tj. $f(\theta) = f(-\theta)$, pa imamo

$$\overline{D(f;z)} = \exp\left(\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\theta)\frac{1+\overline{z}e^{\mathrm{i}\theta}}{1-\overline{z}e^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta\right) = D(f;\overline{z}), \quad |z|<1.$$

Szegő-ova funkcija ima sledeće osobine (videti [81, str. 67], [97, str. 276], [40]). Funkcija D je element prostora H^2, gde je H^2 Hardyjev prostor analitičkih funkcija na $|z|<1$ za koje je $\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta$ uniformno ograničeno po $r<1$ (videti [20, str. 2]). $D(f;z)\neq 0$ za $|z|<1$. Takođe, $D(f;0)>0$ i postoje granične vrednosti

$$\lim_{r\to 1^-} D(f;re^{\mathrm{i}\theta}) = D(f;e^{\mathrm{i}\theta}), \quad |D(f;e^{\mathrm{i}\theta})|^2 = f(\theta),$$

pri čemu poslednja jednakost važi skoro svuda na $[-\pi,\pi]$. Posebno, za naš slučaj $f(\theta) = f(-\theta)$, znamo da važi $\overline{D(f;z)} = D(f;\overline{z})$, što za sobom povlači

$$D(f;e^{-\mathrm{i}\theta}) = \overline{\lim_{r\to 1^-} D(f;re^{\mathrm{i}\theta})} = \overline{D(f;e^{\mathrm{i}\theta})}.$$

Koristeći upravo uvedenu Szegő-ovu funkciju $D = |D|\exp(\mathrm{i}\arg(D))$ (videti [97, str. 297], [81, str. 145], [40]), rezultat teoreme 1.37 može da se prikaže na sledeći način

$$p_n(\cos\theta) = \left(\frac{2}{\pi|D(w\sin;e^{\mathrm{i}\theta})|}\right)^{1/2}\cos(n\theta+\arg(D)) + o(1),$$

pri čemu je p_n ortonormirani polinom stepena n u odnosu na težinsku funkciju w, pri čemu

$$\arg(D) = \theta - \pi/2 - \phi(\theta) = -\Phi(\theta), \tag{1.33}$$

gde je ϕ iz pomenute teoreme. Izraz za Φ može da se izvede direktno (videti [97, str. 299]). Za težinsku funkciju w_q, odgovarajuću Szegő-ovu funkciju označavamo sa $D_q = |D_q| \exp(\mathrm{i} \arg(D_q))$. Takođe, odgovarajuće veličine ϕ i Φ iz teoreme 1.37 označavamo sa ϕ_q i Φ_q, respektivno.

Veoma jednostavno se pokazuje (videti [97, str. 277], [40]) da važi

$$D(\sin^2; z) = \frac{1-z^2}{2}, \quad D(\sin^2; e^{\mathrm{i}\theta}) = -\mathrm{i} \sin\theta e^{\mathrm{i}\theta}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Ispitajmo sada izraz iz tvrđenja teoreme, koji u daljem označavamo sa

$$g(z) = \frac{D(w \sin; z)}{D(w_q \sin; z)} \frac{1-z^2}{2}, \quad |z| < 1.$$

S obzirom na $D(w_q \sin; z) \neq 0$, $|z| < 1$ (videti [81, str. 67], [97, str. 276]), imamo da je g analitička funkcija na $\{z \mid |z| < 1\}$, pa postoji razvoj funkcije g u potencijalni red u okolini tačke 0. Kako funkcija g nema singulariteta u $\{z \mid |z| < 1\}$, potencijalni red konvergira uniformno na svakom zatvorenom skupu $F \subset \{z \mid |z| < 1\}$ (videti [99, str. 238-239]). Zbog osobina Szegő-ovih funkcija znamo da važi $g(0) > 0$. Takođe, za slučaj $f(\theta) = f(-\theta)$ imamo $\overline{g(z)} = g(\overline{z})$. Ova jednakost povlači

$$\mathrm{Re}(g(z)) = \mathrm{Re}(g(\overline{z})), \quad \mathrm{Im}(g(z)) = -\mathrm{Im}(g(\overline{z})). \tag{1.34}$$

Ispitajmo sada granične vrednosti funkcije kada z teži tačkama na krugu po ne tangencijalnoj putanji. Imamo, za skoro svako $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 1^-} g(re^{\mathrm{i}\theta}) &= g(e^{\mathrm{i}\theta}) = -\lim_{r\to 1^-} \frac{D(w\sin; re^{\mathrm{i}\theta})}{D(w_q \sin; re^{\mathrm{i}\theta})} \mathrm{i} e^{\mathrm{i}\theta} \sin\theta \\ &= \left(\frac{w(\cos\theta)\sin\theta}{w_q(\cos\theta)\sin\theta}\right)^{1/2} |\sin\theta| e^{\mathrm{i}(\arg(D) - \arg(D_q) - \pi/2\ \mathrm{sgn}\theta + \theta)} \\ &= \beta_0^R |\sin\theta| w_d(\cos\theta) e^{\mathrm{i}(\arg(D) - \arg(D_q) - \pi/2\ \mathrm{sgn}\theta + \theta)}, \end{aligned}$$

gde smo uveli označavanje

$$w_d^2(x) = \left(\frac{1}{m_0^R} \mathrm{v.p.} \int_{-1}^{1} \frac{w(t)}{t-x} \mathrm{d}t\right)^2 + \left(\frac{\pi w(x)}{m_0^R}\right)^2$$

i koristili osobine Szegő-ove funkcije (videti [81, str. 67], [97, str. 276], i [20, str. 17] za generalni slučaj).

Naravno, na osnovu (1.34), imamo

$$\mathrm{Re}(g(e^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{Re}(g(e^{-\mathrm{i}\theta})), \quad \mathrm{Im}(g(e^{\mathrm{i}\theta}) = -\mathrm{Im}(g(e^{-\mathrm{i}\theta})). \tag{1.35}$$

Koristeći asimptotske razvoje za polinome p_n^R i q_n^R i jednakost (1.11), nalazimo

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{\beta_0^R} &= p_n^R q_{n-1}^R - p_{n-1}^R q_n^R + o(1) \\
&= A\left(\sin((n+1)\theta-\phi)\sin((n-1)\theta-\phi_q) - \sin(n\theta-\phi)\sin(n\theta-\phi_q)\right) \\
&= \frac{A}{2}\left(\cos(2\theta-\phi+\phi_q) - \cos(2n\theta-\phi-\phi_q) - \cos(-\phi+\phi_q)\right. \\
&\qquad \left. + \cos(2n\theta-\phi-\phi_q)\right) = -A\sin\theta\sin(\theta-\phi+\phi_q),
\end{aligned}$$

gde je

$$A = \frac{2}{\pi\sin\theta}\frac{1}{\sqrt{ww_q}}.$$

Odavde, neposredno dobijamo

$$\sin(\theta-\phi+\phi_q) = \frac{\pi w(x)}{m_0^R w_d(x)} \in (0,1].$$

Faktor $o(1)$ nestaje jer vidimo da izraz ne zavisi od n. Iskoristimo li vezu (1.33), nalazimo

$$\sin(\theta-\phi+\phi_q) = \cos(\theta+\arg(D)-\arg(D_q)-\pi/2) = \frac{\pi w(x)}{m_0^R w_d(x)}.$$

Prethodna jednakost važi za $\theta \in (0,\pi)$, tako da jednostavno dobijamo

$$\mathrm{Re}(g(e^{\mathrm{i}\theta})) = \frac{\pi w(x)\sin\theta}{\beta_0^R}.$$

Zbog (1.35) imamo

$$\mathrm{Re}(g(e^{\mathrm{i}\theta})) = \frac{\pi w(x)|\sin\theta|}{\beta_0^R}, \quad \theta \in (-\pi,\pi)\backslash\{0\}.$$

Na osnovu prethodnog zaključujemo da je imaginarni deo zadat, do na znak, sa

$$\mathrm{Im}(g(e^{\mathrm{i}\theta})) = \pm\frac{\sin\theta}{\beta_0^R}\mathrm{v.p.}\int_{-1}^{1}\frac{w(t)}{t-x}\mathrm{d}t.$$

Ovde već možemo da prepoznamo izraz za imaginarni deo, do na znak, kao Hilbertovu transformaciju realnog dela funkcije $g(e^{\mathrm{i}\theta})$. Kako je $w \in L^1(-1,1)$, znamo da Hilbertova transformacija ne mora da bude $L^1(-1,1)$, ali mora da bude $L^r(-1,1)$ za svako $r \in (0,1)$ (videti [20, str. 63]).

Pokažimo sada da se Hilbertova transformacija na $(-1,1)$ poklapa sa Hilbertovom transformacijom na $[-\pi,\pi]$. Korišćenjem

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta-\cos t} = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{\theta-t}{2} + \cot\frac{\theta+t}{2}\right),$$

redom imamo

$$
\begin{aligned}
(\sin\theta)\text{v.p.}\int_{-1}^{1}\frac{w(t)}{t-x}\mathrm{d}t &= \text{v.p.}\int_0^{\pi} w(\cos t)\sin t\,\mathrm{d}t\frac{\sin\theta}{\cos\theta-\cos t} \\
&= \frac{1}{2}\,\text{v.p.}\int_0^{\pi} w(\cos t)\sin t\,\mathrm{d}t\left(\cot\frac{\theta-t}{2}+\cot\frac{\theta+t}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\text{v.p.}\int_0^{\pi} w(\cos t)|\sin t|\cot\frac{\theta-t}{2}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad -\frac{1}{2}\text{v.p.}\int_0^{-\pi} w(\cos t)|\sin t|\cot\frac{\theta-t}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\,\text{v.p.}\int_{-\pi}^{\pi} w(\cos t)|\sin t|\cot\frac{\theta-t}{2}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

što je upravo izraz za Hilbertovu transformaciju funkcije definisane u $[-\pi,\pi]$ (videti [20, str. 63]).

Pomoću funkcije $\mathrm{Re}(g(e^{\mathrm{i}\theta}))$ možemo izgraditi harmonijsku funkciju za $|z|<1$. Kako je $\mathrm{Re}(g(e^{\mathrm{i}\theta}))$ integrabilna funkcija, to je njen integral funkcija ograničene varijacije (videti [74, str. 234]). Označimo sa u harmonijsku funkciju (videti [20, str. 2]), dobijenu na sledeći način

$$
u(re^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\mathrm{Re}(g(e^{\mathrm{i}t}))\mathrm{d}t.
$$

Kako je u harmonijska na $\{z \mid |z|<1\}$, to se može kompletirati do analitičke funkcije (videti [79, str. 191]). Označimo ovo kompletiranje sa v. Uz uslov $v(0)=0$, ova funkcija v je jedinstveno određena. Naravno, novodobijena analitička funkcija $u+\mathrm{i}v$ je upravo funkcija g, zbog jedinstvenosti reprezentacije (videti [20, str. 3]). Međutim, onda funkcija $\mathrm{Im}(g(re^{\mathrm{i}\theta}))$ konvergira kada $r\to 1^-$ upravo ka Hilbertovoj transformaciji funkcije $\mathrm{Re}(g(e^{\mathrm{i}\theta}))$ (videti [20, str. 63]).

Prema tome, mora biti

$$
\mathrm{Im}(g(e^{\mathrm{i}\theta})) = \frac{\sin\theta}{\beta_0^R}\,\text{v.p.}\int_{-1}^{1}\frac{w(t)}{t-x}\mathrm{d}t.
$$

Odavde dobijamo jednostavnu posledicu za $\theta\in(0,\pi)$. Naime,

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta-\phi+\phi^q) &= -\sin(\theta+\arg(D)-\arg(D_q)-\pi/2) \\
&= -\frac{1}{m_0^R w_d(x)}\,\text{v.p.}\int_{-1}^{1}\frac{w(t)}{t-x}\mathrm{d}t. \quad \square
\end{aligned}
$$

Sada imamo sledeću teoremu.

Teorema 1.55 *Pod uslovom da je težinska funkcija w takva da koeficijenti tročlane relacije zadovoljavaju uslov* (1.29), *imamo*

$$
\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty}\beta_n = \frac{1}{2}.
$$

Dokaz.- Koristeći lemu 1.10, znamo da je

$$\cos(\theta-\phi+\phi_q) = -\frac{1}{m_0^R w_d(x)}\text{v.p.}\int_{-1}^{1}\frac{w(t)}{t-x}\mathrm{d}t \quad \text{i} \quad \sin(\theta-\phi+\phi_q) = \frac{\pi w(x)}{m_0^R w_d(x)}.$$

Dalje za brojioce i imenioce veličina ω_n, imamo

$$\begin{aligned}\frac{p_n^R + \dfrac{\mathrm{i}\beta_0^R}{m_0}q_n^R}{\left(\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{w(x)\sin\theta}\right)^{1/2}} &+ o(1) = \sin((n+1)\theta-\phi)\\ &+\frac{w_d(x)}{\dfrac{1}{m_0^R}\text{v.p.}\int_{-1}^{1}\dfrac{w(t)}{t-x}\mathrm{d}t - \mathrm{i}\dfrac{\pi w(x)}{m_0^R}}\sin[(n+1)\theta-\phi-\theta+\phi-\phi_q]\\ &= \sin((n+1)\theta-\phi)(1-e^{\mathrm{i}a}\cos a) - e^{\mathrm{i}a}\sin a\cos((n+1)\theta-\phi)\\ &= -\sin a\left(\sin((n+1)\theta-\phi)\mathrm{i}e^{\mathrm{i}a} + e^{\mathrm{i}a}\cos((n+1)\theta-\phi)\right)\\ &= -\sin a e^{\mathrm{i}((n+1)\theta-\phi+a)},\end{aligned}$$

gde smo sa a označili $a = \arg(\mathrm{i}\,\overline{m_0})$. Odavde nalazimo asimptotske vrednosti za niz ω_n,

$$\omega_n = -\mathrm{i}\beta_n^R\frac{p_n^R + \mathrm{i}\dfrac{\beta_0^R}{m_0}q_n^R}{p_{n-1}^R + \mathrm{i}\dfrac{\beta_0^R}{m_0}q_{n-1}^R} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{-\sin a e^{\mathrm{i}((n+1)\theta-\phi-a)}}{-\sin a e^{\mathrm{i}((n)\theta-\phi-a)}} + o(1) = -\frac{\mathrm{i}}{2}e^{\mathrm{i}\theta} + o(1).$$

Koristeći jednakosti date u teoremi 1.51, direktno dobijamo

$$\alpha_n = \mathrm{i}(\omega_n - \omega_{n-1}) + \alpha_n^R \to 0, \quad \beta_n^2 = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-2}}(\beta_{n-1}^R)^2 \to \frac{1}{4}, \quad \text{dok} \quad n \to +\infty. \quad \square$$

1.5.6 Polinomi ortogonalni u odnosu na oscilatornu meru

U radu [58] razmatrani su polinomi ortogonalni u odnosu linearni funkcional

$$\mathcal{L}^m(p) = \int p(x)xe^{\mathrm{i}m\pi x}\chi_{[-1,1]}\mathrm{d}x, \quad m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \quad p \in \mathcal{P}.$$

U daljem izlaganju, zbog kratkoće pisanja, uvodimo oznake $\zeta = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $w(x) = xe^{\mathrm{i}m\pi x}$.

Možemo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 1.56 *Momenti linearnog funkcionala $\mathcal{L}^m$ su dati rekurentnom relacijom*

$$m_{k+1} = \frac{(-1)^m}{\mathrm{i}\zeta}(1-(-1)^k) - \frac{k+2}{\mathrm{i}\zeta}m_k, \qquad m_0 = 2\frac{(-1)^m}{\mathrm{i}\zeta},$$

ili u razvijenom obliku

$$m_k = \frac{(-1)^{m+k}(k+1)!}{(\mathrm{i}\zeta)^{k+1}}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(1+(-1)^\nu)(-\mathrm{i}\zeta)^\nu}{(\nu+1)!}.$$

Dokaz.- Direktnim izračunavanjem nalazimo

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= \int_{-1}^{1} x^{k+2} e^{i\zeta x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}\zeta} x^{k+2} e^{\mathrm{i}\zeta x} \Big|_{-1}^{1} - \frac{k+2}{\mathrm{i}\zeta} \int_{-1}^{1} x^{k+1} e^{\mathrm{i}\zeta x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}\zeta} \big(e^{\mathrm{i}\zeta} - e^{-\mathrm{i}\zeta} (-1)^{k+2} \big) - \frac{k+2}{\mathrm{i}\zeta} m_k \end{aligned}$$

i

$$m_0 = \int_{-1}^{1} x e^{\mathrm{i}\zeta x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}\zeta} (e^{\mathrm{i}\zeta} + e^{-\mathrm{i}\zeta}) - \frac{1}{(\mathrm{i}\zeta)^2} (e^{\mathrm{i}\zeta} - e^{-\mathrm{i}\zeta}). \tag{1.36}$$

Sada samo treba zameniti $\zeta = m\pi$.

Koristeći ovu rekurentnu relaciju, zajedno sa početnim uslovom, dobijamo momente u ravijenom obliku. Dokaz se može dati i matematičkom indukcijom. □

Teorema 1.57 *Niz polinoma ortogonalnih u odnosu na težinsku funkciju $w\chi_{[-1,1]}$ postoji jedinstveno za svako $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

Dokaz.- Prema relaciji (1.5), niz ortogonalnih postoji pod uslovom da nijedna Hankelova determinanta Δ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, u (1.2), nije jednaka nula.

Možemo primetiti da su momenti racionalne funkcije po $\zeta = m\pi$, sa običnim stepenima po ζ u imeniocu. Ako iz i-tog reda Hankelove determinante Δ_n faktorišemo $\frac{(-1)^m}{\mathrm{i}\zeta}\left(\frac{-1}{\mathrm{i}\zeta}\right)$, a iz ν-te kolone faktorišemo $\left(\frac{-1}{\mathrm{i}\zeta}\right)^{i-1}$, naša Hankelova determinanta Δ_n, postaje Hankelova determinanta $\tilde{\Delta}_n$ za sledeći niz momenata

$$\tilde{m}_k = (k+1)! \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(1+(-1)^\nu)(-\mathrm{i}\zeta)}{(\nu+1)!}.$$

Primećujemo da su $\tilde{m}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, polinomi po $\mathrm{i}\zeta$, sa racioanlnim koeficijentima. Relacija koja vezuje Δ_n i $\tilde{\Delta}_n$ je sledeća

$$\Delta_n = \frac{(-1)^{(n+1)(n+m)}}{(\mathrm{i}\zeta)^{(n+1)^2}} \tilde{\Delta}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Odavde zaključujemo da je $\Delta_n \neq 0$ ako i samo ako $\tilde{\Delta}_n \neq 0$. Vrednost determinante $\tilde{\Delta}_n$ je polinom po $\mathrm{i}\zeta = \mathrm{i}m\pi$ sa racionalnim koeficijentima. Kako je m ceo broj različit od nule, to $\mathrm{i}m\pi$ ne može biti nula takvog polinoma jer je π transcendentan broj. Broj $\mathrm{i}m\pi$ može biti nula takvog polinoma jedino ako je takav polinom identički jednak nuli. Ostaje samo da dokažemo da $\tilde{\Delta}_n$ nije identički jednako nuli.

Dovoljno je dokazati da je slobodan član u polinomu $\tilde{\Delta}_n = \tilde{\Delta}_n(\mathrm{i}\zeta)$, tj. $\tilde{\Delta}_n(0)$, različit od nule. Uzmemo li samo slobodne člano ve iz momenata $\tilde{m}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, tj. $\tilde{(m)}_k(0)$, $k \in \mathbb{N}_0$, napravimo odgovarajuću Hankelovu determinantu Δ_k^*, njena vrednost je jednaka $\tilde{\Delta}_k(0)$. Hankelova detrminanta Δ_k^* je napravljena od niza momenata $2(k+1)!$, $k \in \mathbb{N}_0$. Ovaj niz momenata odogovara momentima Laguerreove mere $xe^{-x}\chi_{\mathbb{R}_0^+}$, pomnožene sa faktorom 2. Naravno Δ_k^* ne može biti jednaka nuli jer Laguerreovi polinomi postoje. $\square$

Nadalje biće nam potrebna vrednost determinante Δ_n^*, koju smo pomenuli u dokazu prethodne teoreme. Kako je ona povezana sa Laguerreovim polinomim, nije teško dokazati da važi

$$\Delta_n^* = 2^{n+1} \prod_{k=0}^{n} k!(k+1)!, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Takođe, biće potrebna i vrednost modifikovane Hankelove determinante (1.4), za koju imamo

$$\Delta_n' = \frac{(-1)^{(n+1)(n+m)+1}}{(\mathrm{i}\zeta)^{(n+1)^2+1}} \tilde{\Delta}_n'$$

i koja je, kao u i prethodnom slučaju $\tilde{\Delta}_n'$, izgrađena od momenata $\tilde{m}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Kao i ranije, determinanta $\tilde{\Delta}_n'$ je polinom po $\mathrm{i}\zeta$ sa racionalnim koeficijentima. Slobodni član može biti određen koristeći poznate rezultate vezane za Laguerreove polinome, tako da imamo

$$\tilde{\Delta}_n' = (n+1)(n+2)\Delta_n^* = 2^{n+1}(n+1)(n+2) \prod_{k=0}^{n} k!(k+1)!.$$

Proučavamo samo slučaj $m > 0$, zato što se svi rezultati za $m < 0$ dobijaju iz prethodnih prostom konjugacijom. Zato u daljem tekstu podrazumevamo $m \in \mathbb{N}$. U opštem slučaju, kada $\zeta \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, ortogonalni polinomi ne moraju da postoje. Na primer najmanje ζ, koje je rešenje jednačine $\Delta_3 = 0$, iznosi približno $\zeta \approx 7.13414399636896061399\ldots$.

Primetimo da težinska funkcija zadovoljava $w(x) = -\overline{w(-x)}$, što zajedno sa teoremom 1.16, daje $\mathrm{Re}(\alpha_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathrm{Im}(\beta_k^2) = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Koeficijente tročlane relacije je veoma teško odrediti u analitičkom obliku. Kao primer, dajemo vrednosti prvih nekoliko koeficijenata tročlane rekurentne relacije u Tabeli 1.1.

n	α_n	β_n^2
0	$\frac{2}{\zeta}$	$\frac{2(-1)^m}{\mathrm{i}\zeta}$
1	$\frac{-8}{\zeta(-2+\zeta^2)}$	$\frac{-2+\zeta^2}{\zeta^2}$
2	$\frac{2(-36+60\zeta^2-45\zeta^4+4\zeta^6)}{\zeta(-2+\zeta^2)(6-13\zeta^2+\zeta^4)}$	$-\frac{4(6-13\zeta^2+\zeta^4)}{\zeta^2(-2+\zeta^2)^2}$
3	$-\frac{2(-5184+32832\zeta^2-69552\zeta^4+15648\zeta^6-1259\zeta^8+26\zeta^{10}+\zeta^{12})}{\zeta(6-13\zeta^2+\zeta^4)(216-1224\zeta^2+165\zeta^4-14\zeta^6+\zeta^8)}$	$\frac{(-2+\zeta^2)(216-1224\zeta^2+165\zeta^4-14\zeta^6+\zeta^8)}{\zeta^2(6-13\zeta^2+\zeta^4)^2}$

Tabela 1.1: Koeficijenti tročlane relacije α_n i β_n za $n \leq 3$

U radu [58] dokazan je veći broj rezultata za polinome ortogonalne u odnosu na težinsku funkciju $x\exp(\mathrm{i}m\pi x)$. Posmatrana je numerička konstrukcija polinoma ortogonalnih u odnosu na $x\exp(-\mathrm{i}\zeta x)\chi_{[-1,1]}$, u kojoj se koristi Gautschi-Stieltjesova procedura (videti [46, str. 116]). Ovde navodimo samo neke od rezultata iz [58].

Teorema 1.58 *Neka je $\zeta = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Za $n \geq 4$ koeficijenti tročlane relacije zadovoljavaju sledeći sistem nelinearnih rekurentnih relacija*

$$\begin{aligned}
\beta_{n+1}^2 &= \frac{1}{\zeta\beta_n^2}\Big\{\alpha_{n-2} + \alpha_{n-2}^3 + \alpha_{n-1} + \alpha_{n-1}^3 - \beta_{n-2}^2(5\alpha_{n-3} + 8\alpha_{n-2} + 2\alpha_{n-1}) \\
&\quad -3\beta_{n-1}^2(\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) + \beta_n^2(2\alpha_{n-2} - 2\alpha_{n-1} - 3\alpha_n) \\
&\quad +2n\Big[(\alpha_{n-3} - \alpha_{n-1})\beta_{n-2}^2 + (\alpha_{n-2} - \alpha_n)\beta_n^2\Big] \\
&\quad +\zeta\Big[\beta_{n-2}^2(\alpha_{n-1} - \alpha_{n-3})(\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-3}) + (\beta_{n-2}^2 - \beta_n^2)^2 \\
&\qquad +\beta_n^2(\alpha_n - \alpha_{n-2})(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}) + \beta_{n-3}^2\beta_{n-2}^2\Big] \\
&\quad +\frac{\beta_n^2 - \beta_{n-2}^2}{\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}}\Big[1 + 3\alpha_{n-2}^2 - 2\beta_{n-2}^2 - \beta_{n-1}^2 - \beta_n^2 - n(\beta_n^2 - \beta_{n-2}^2) \\
&\qquad +\zeta\Big(\alpha_{n-3}\beta_{n-2}^2 + 2\alpha_{n-2}(\beta_{n-2}^2 - \beta_n^2) - \alpha_n\beta_n^2\Big)\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= \frac{2}{\zeta\beta_{n+1}^2}\Big\{-1 + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)(\alpha_{n-2} - \alpha_n) + \beta_{n-1}^2 + \beta_n^2 + 2\beta_{n+1}^2 \\
&\quad +n\Big[(\alpha_n - \alpha_{n-1})(\alpha_{n-3} + \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} - \alpha_n) - \beta_{n-1}^2 + \beta_{n+1}^2\Big]\Big\} \\
&\quad +\frac{1}{\beta_{n+1}^2}\Big\{2\alpha_n(\beta_{n-1}^2 - \beta_{n+1}^2) + 2\alpha_{n-2}\beta_{n-1}^2 + (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \times \\
&\quad \times(\alpha_{n-3}^2 + \alpha_{n-3}\alpha_{n-2} + \alpha_{n-2}^2 - \alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-1}\alpha_n - \alpha_n^2 - \beta_{n-2}^2 + \beta_n^2)\Big\} \\
&\quad +\frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2} - \alpha_{n-3}}\Big\{\Big[1 + 3\alpha_{n-3}^2 - \beta_{n-3}^2 - \beta_{n-2}^2 - n(\beta_{n-3}^2 - \beta_{n-1}^2)\Big] \\
&\qquad -\frac{1}{\beta_n^2}\Big[\alpha_{n-4}\beta_{n-3}^2 + 2\alpha_{n-3}(\beta_{n-3}^2 - \beta_{n-1}^2) - \beta_{n-1}^2\alpha_{n-1}\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

sa početnim vrednostima datim u tabeli 1.1.

Takođe, dokazano je da niz ortogonalnih polinoma ne može da ima proizvoljan broj višetrukih nula.

Teorema 1.59 *Polinom p_n, ortonormiran u odnosu na $x\exp(\mathrm{i}\zeta x)\chi_{[-1,1]}$, može da ima najviše jednu nulu višestrukosti tri čiji je realni deo jednak nuli ili može da ima par nula višetrukosti dva.*

Međutim, ova teorema nije dovoljno oštra, s obzirom da sva numerička izračunavanja pokazuju da su nule polinoma proste. Napomenimo na kraju da najnoviji rezultati objavljeni u [2], sugerišu da koeficijenti tročlane relacije imaju sledeće asimptotsko ponašanje

$$\alpha_{2n+k} \to \frac{\mathrm{i}(-1)^k}{2}\left(\tanh\frac{\zeta}{2} - \coth\frac{\zeta}{2}\right), \quad \beta_{2n+k}^2 \to \frac{1}{4}\left(\tanh\frac{\zeta}{2}\right)^{(-1)^k},$$

gde je $k = 0, 1$. Naravno, pomenuti rezultati u [2] ne mogu biti primenjeni konkretno na našu težinsku funkciju, ali se mogu primeniti na težinske funkcije koje se 'vrlo malo' razlikuju od naše težinske funkcije.

Glava 2

Gaussove kvadrature za kompleksne mere

U ovom delu razmatramo Gaussove kvadraturne formule za ograničeni Jacobijev operator J. Kroz celo poglavlje se provlači kriva C i odgovarajući konturni integral po krivoj C. Zato sada dajemo definiciju krive C, koju koristimo u svim slučajevima, sem kada je to na neki drugi način posebno naglašeno.

Definicija 2.1 Kriva $C \subset \mathbb{C}$ je bilo koja zatvorena, rektifikabilna kriva, bez samopreseka, koja je smeštena u $\Omega(J)$ za neki konkretni Jacobijev operator J i koja je homotopno smeštena u kružnici $\{z \mid |z| = 2||J||\}$.

2.1 Ortogonalnost i Weylova funkcija

Neka, kao i ranije, funkcija ϕ označava Weylovu funkciju ograničenog Jacobijevog operatora J. Kao što je poznato, funkciju ϕ možemo izraziti na sledeći način

$$\phi(z) = \langle (z-J)^{-1}\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \rangle = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle J^k \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0\rangle}{z^k}, \quad |z| > ||J||.$$

Funkcija ϕ je definisana na rezolventnom skupu operatora J, s obzirom da na $\Omega(J)$ operator $(z-J)^{-1}$ postoji i ograničen je.

Prema teoremi 1.9, za svaka dva zadata niza α_k, $\beta_k^2 \neq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, možemo izgraditi linearni funkcinal $\mathcal{L}$, u odnosu na koji su polinomi koji zadovoljavaju tročlanu rekurentnu relaciju

$$xp_n = \beta_{n+1}p_{n+1} + \alpha_n p_n + \beta_n p_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ortonormirani.

Prema teoremi 1.24, razvoj u red funkcije ϕ može se zadati i preko niza momenata m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, na sledeći način

$$\phi(z) = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{m_k}{z^k}, \tag{2.1}$$

gde su m_k, $k \in \mathbb{N}_0$, momenti linearnog funkcionala $\mathcal{L}$.

Ako sa q_k, $k \in \mathbb{N}_0$ (videti jednakost (1.10)), kao i do sada, označimo drugo linearno nezavisno rešenje tročlane rekurentne relacije, onda imamo sledeću teoremu (videti [41], [31], [52], [94]).

Teorema 2.1 *Ako je ϕ Weylova funkcija, pridružena Jacobijevom operatoru J, koji je izgrađen od nizova α_k i $\beta_k^2 \neq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, i ako su p_n i q_n dva linearno nezavisna rešenja tročlane rekurentne relacije, onda*

$$p_n(z)\phi(z) - \beta_0 q_n(z) = O(z^{-n-1}), \quad |z| > ||J||. \tag{2.2}$$

Takođe,

$$\oint_C z^k p_n(z)\phi(z)\mathrm{d}z = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1, \tag{2.3}$$

gde je C kriva iz definicije 2.1*, koja u svojoj unutrašnjasnosti sadrži skup $\{z \mid |z| \leq ||J||\}$.*

Dokaz.- Označimo odgovarajući linearni funkcional sa $\mathcal{L}$, čija egzistencija je potvrđena teoremom 1.9, a odgovarajuće momente funkcionala $\mathcal{L}$ sa m_k, $k \in \mathbb{N}_0$. Polinom $\beta_0 q_n(z)$, prema jednakosti (1.10), možemo izraziti preko polinoma $p_n = \sum_{\nu=0}^n p_\nu^n z^\nu$ na sledeći način

$$\beta_0 q_n(z) = \mathcal{L}\left(\frac{p_n(z) - p_n(\cdot)}{z - \cdot}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu^n \mathcal{L}\left(\frac{z^\nu - (\cdot)^\nu}{z - \cdot}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \sum_{\nu=k}^{n-1} p_{\nu+1}^n m_{k-\nu}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Koristeći razvoj funkcije ϕ, dobijamo

$$\begin{aligned} p_n(z)\phi(z) &= \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{\nu} p_\nu^n m_{\nu-k} z^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k-1} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^n m_{k+\nu} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} z^k \sum_{\nu=k}^{n-1} p_{\nu+1}^n m_{k-\nu} + \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k-1} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^n m_{k+\nu}, \end{aligned}$$

Prvi (konačni) sabirak možemo da identifikujemo sa polinomom $\beta_0 q_n(z)$, na osnovu prethodno izvedene jednakosti. S druge strane, imamo da se koeficijenti u redu (drugom sabirku) mogu izraziti na sledeći način

$$\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^n m_{k+\nu} = \mathcal{L}((\cdot)^k p_n(\cdot)).$$

Na osnovu ortogonalnosti imamo $\mathcal{L}((\cdot)^k p_n(\cdot)) = 0$, $k < n$, pa na kraju dobijamo

$$(p_n\phi - \beta_0 q_n)(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} z^{-k-1} \mathcal{L}((\cdot)^k p_n(\cdot)) = O(z^{-n-1}).$$

Primetimo da je funkcija $(p_n\phi - \beta_0 q_n)(z)$ analitička na skupu $\{z \mid |z| > ||J||\}$, i očigledno $O(z^{-n-1})$ kada $z \to \infty$.

Pomnožimo li (2.2) sa z^ν, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, i integralimo po konturi C, iz tvrđenja teoreme, tada sleduje

$$\oint_C z^\nu (p_n\phi - q_n)(z)\mathrm{d}z = \oint_C O(z^{\nu-n-1})\mathrm{d}z = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1.$$

S obzirom da je funkcija $z^\nu q_n(z)$ analitička u okolini nule, imamo

$$\oint_C z^\nu q_n(z)\mathrm{d}z = 0, \quad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Na kraju dobijamo

$$\oint_C z^\nu p_n(z)\phi(z)\mathrm{d}z = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1. \quad \square$$

Dakle, teorema daje reprezentaciju linearnog funkcionala $\mathcal{L} : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}$ na sledeći način

$$\mathcal{L}(p) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C p(z)\phi(z)\mathrm{d}z, \quad \Gamma(J) \subset \mathrm{int}(C).$$

Na primer, za slučaj da je funkcional $\mathcal{L}$ pozitivno definitan, možemo direktno na osnovu ove reprezentacije odrediti meru ortogonalnosti. Kako je, u ovom slučaju, Jacobijev operator samo-pridružen, ceo spektar je na realnoj pravoj i predstvalja ograničen skup. Sve nule svih ortogonalnih polinoma se tada nalaze u $\mathrm{Co}(\sigma(J))$, tako da konturu integracije, krivu C, možemo proizvoljno da skupljamo oko spektra operatora J. Ono što dobijemo je poznato kao Stieltjesova inverzna formula (videti [12, str. 90], [16]).

Funkcional $\mathcal{L}$ možemo da shvatimo kao linearni operator na linearnom prostoru svih algebarskih polinoma $\mathcal{P}$, posmatranih na skupu $\{z \mid z \in \mathrm{int}(C)\}$. Uvedimo normu na prostoru $\mathcal{P}$ na sledeći način

$$||p|| = \sup_{z \in \overline{\mathrm{int}(C)}} |p(z)|, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Tada dobijamo normirani prostor $(\mathcal{P}, ||\cdot||)$. Primetimo da je funkcional $\mathcal{L}$ ograničen, i da za njega imamo

$$|\mathcal{L}(p)| = \left| \oint_C p(z)\phi(z)\mathrm{d}z \right| \le \oint_C |p(z)||\phi(z)||\mathrm{d}z| \le ||p|| \oint_C |\phi(z)||\mathrm{d}z|.$$

Linearni funkcional $\mathcal{L}$ možemo proširiti na Banachov prostor svih analitičkih funkcija (videti [38, str. 213])

$$\mathcal{A}_C = \big\{ f \mid f \ \text{ analitička } \ \text{na } \mathrm{int}(C) \text{ i neprekidna na } C \big\}, \tag{2.4}$$

s obzirom da je skup $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}_C$. Naravno, norma je ista *sup*-norma kao na prostoru polinoma. Ovu mogućnost proširenja nam garantuje Han-Banachova teorema (videti [91, str. 125], [38, str. 74]). U stvari, to proširenje možemo uvesti i na sledeći način

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)\phi(z)\mathrm{d}z, \tag{2.5}$$

pri čemu je jasno da je norma funkcionala $\mathcal{L}$ ostala nepromenjena.

Ovo proširenje nam omogućava da damo i nešto jednostavniji dokaz prethodne teoreme. Primetimo da je funkcija $(u-z)^{-1}$ za $u \in \overline{\mathrm{ext}(C)}$ i analitička u $\mathrm{int}(C)$ i neprekidna na C. Koristeći razvoj u geometriski red možemo, pod uslovom $|z| < |u|$, da pišemo

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{u^k}.$$

S obzirom na činjenicu da red (2.1) konvergira, imamo

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{u-\cdot}\right) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{\phi(z)}{u-z}\mathrm{d}z = \phi(u), \quad u \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathrm{int}(C)}.$$

Kako je funkcional $\mathcal{L}$ linearan, važi

$$\mathcal{L}\left(\frac{p_n(u)-p_n(\cdot)}{u-\cdot}\right) = p_n(u)\phi(u) - \mathcal{L}\left(\frac{p_n(\cdot)}{u-\cdot}\right).$$

Sada, pomoću jednakosti (1.10), dobijamo

$$(p_n\phi - \beta_0 q_n)(u) = \mathcal{L}\left(\frac{p_n(\cdot)}{u-\cdot}\right) = \frac{1}{u}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathcal{L}((\cdot)^k p_n(\cdot))}{u^k}.$$

S obzirom na činjenicu da je niz polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}_0$, ortonormiran u odnosu na $\mathcal{L}$, zaključujemo da je

$$(p_n\phi - \beta_0 q_n)(u) = \frac{1}{u^{n+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{m_{n,k}}{u^k} = O(u^{-n-1}),$$

gde smo uveli oznaku $m_{n,k} = \mathcal{L}((\cdot)^k p_n(\cdot))$.

Primetimo da red u prethodnoj jednakosti ima isti poluprečnik konvergencije kao i red koji reprezentuje ϕ. Neka je $p_n(z) = \sum_{k=0}^n p_k^n z^k$. Tada

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{m_{n,k}}{u^k} = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^n \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{m_{\nu+k}}{u^k},$$

pa su poluprečnici konvergencije očigledno isti.

Upravo dokazani rezultat znači da ako je Jacobijev operator J ograničen i da je linearni funkcional $\mathcal{L}$, pridružen operatoru J, zadat sa

$$\mathcal{L}(p) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C p(z)\phi(z)\mathrm{d}z, \quad p \in \mathcal{P}.$$

S obzirom da je funkcija ϕ analitička na $\Omega(J)$, možemo prethodnu krivu da neprekidno deformišemo proizvoljno po skupu $\Omega(J)$, pri čemu zahtevamo samo da deformisana kriva zadovoljava uslove definicije 2.1. Primetimo da deformacije krive C menjaju skup $\mathcal{A}_C$ (videti (2.4)). Naime, ako je $\Delta_{C_1} \subset \Delta_{C_2}$, onda je $\mathcal{A}_{C_2} \subset \mathcal{A}_{C_1}$.

Pretpostavimo sada da funkcional $\mathcal{L}$ može biti izražen preko neke mere μ na sledeći način

$$\mathcal{L}(p) = \int p(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad p \in \mathcal{P},$$

gde je nosač mere μ, $\mathrm{supp}(\mu)$, unutar skupa $\mathrm{int}(C)$. S obzirom da se Cauchyjeva transformacija mere μ, u oznaci $\hat{\mu}$, poklapa sa Weylovom funkcijom na nekoj okolini U tačke ∞, prema teoremi 1.26, važi

$$\phi(z) = \hat{\mu}(z) = \int \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{z-x}, \quad z \in U.$$

S druge strane, za funkcional $\mathcal{L}$ imamo reprezentaciju

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)\phi(z)\mathrm{d}z, \quad f \in \mathcal{A}_C.$$

Pod pretpostavkom da se kriva C nalazi u skupu U, imamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)\phi(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z) \int \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{z-x} \\ &= \int \mathrm{d}\mu(x) \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-x}\mathrm{d}z = \int f(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad f \in \mathcal{A}_C,\end{aligned}$$

gde smo koristili Fubinijevu teoremu o integralu na proizvodu merljivih prostora (videti [74, str. 96]).

Kako je Weylova funkcija analitička na skupu $\Omega(J)$ (videti [5]), pod pretpostavkom da se nosač mere μ nalazi unutar skupa $\sigma(J) \cup \Gamma_{\mathrm{ess}}(J)$, jasno je da se funkcionalna jednakost $\phi(z) = \hat{\mu}(z)$ može proširiti sa skupa U na skup $\Omega(J) \backslash \Gamma_{\mathrm{ess}}(J)$, saglasno principu analitičkog produženja (videti [99, str. 247], [33, str. 290]). Primetimo da je skup

$$\Omega(J) \backslash \Gamma_{\mathrm{ess}}(J) = \mathbb{C} \backslash (\sigma(J) \cup \Gamma_{\mathrm{ess}}(J))$$

otvoren jer je komplement zatvorenog skupa $\sigma(J) \cup \Gamma_{\mathrm{ess}}(J)$. Kako znamo, skup $\sigma(J)$ je kompaktan (videti [38, str. 195], [91, str. 166], [34, str. 174,176]), pa prema tome i zatvoren (videti [96, str. 43]), a skup $\Gamma_{\mathrm{ess}}(J)$ je zatvoren jer je jednak prebrojivom preseku zatvorenih skupova (videti [96, str. 29]).

2.2 Gaussova kvadraturna formula

Neka je zadat ograničeni Jacobijev operator J. Tada je spektar operatora J ograničen skup kompleksne ravni. Linearni funkcinal $\mathcal{L}$ u odnosu na koji je niz polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}_0$, ortonormiran može se izgraditi koristeći Weylovu funkciju saglasno relaciji (2.3).

Gaussova kvadraturna formula, za pozitivno definitne linearne funkcionale $\mathcal{L}$, može se izraziti u obliku

$$\mathcal{L}_n(p) = \sum_{k=1}^{n} w_k^n p(x_k^n), \quad p \in \mathcal{P}_{2n-1},$$

gde su, kao što znamo, x_k^n, $k = 1, \ldots, n$, nule ortonormiranog polinoma p_n, a koeficijente w_k^n, $k = 1, \ldots, n$, zovemo težinama kvadraturne formule (videti [47, str. 164], [12, str. 31]). Postoje razne formule za izračunavanje težinskih koeficijenata w_k^n, $k = 1, \ldots, n$, (videti [47, str. 167,168,169], [50], [12, str. 32]). Međutim, ima jedna za nas posebno interesantna formula (videti [47, str. 167]),

$$w_k^n = \frac{1}{\beta_n^2} \frac{||\pi_n||^2}{\pi_{n-1}(x_k^n)\pi_n'(x_k^n)}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Primenimo li jednakost (1.11), ovu formulu možemo da transformišemo na sledeći način

$$w_k^n = \frac{\beta_0 q_n(x_k^n)}{p_n'(x_k^n)}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

tako da cela kvadraturna formula postane

$$\mathcal{L}_n(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_0 q_n(x_k^n)}{p_n'(x_k^n)} p(x_k^n), \quad p \in \mathcal{P}_{2n-1}.$$

Ovu jednakost možemo da shvatimo kao Cauchyjev integral funkcije $\beta_0 q_n p / p_n$ po konturi koja obuhvata sve nule polinoma p_n.

Teorema 2.2 *Neka je, za zadati ograničeni Jacobijev operator J, odgovarajuća Weylova funkcija zadata sa ϕ, i neka je $\mathcal{L}$ funkcional izgrađen preko ϕ, prema jednosti (2.3). Neka su p_n i q_n dva linearno nezavisna rešenja tročlane rekurentne relacije. Ako je linearni funkcional $\mathcal{L}_n$ zadat na sledeći način*

$$\mathcal{L}_n(p) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{\beta_0 q_n(z)}{p_n(z)} p(z) \mathrm{d}z, \quad p \in \mathcal{P},$$

gde je kontura C ista kao u reprezentaciji funkcionala $\mathcal{L}$, tada

$$p \in \mathcal{P}_{2n-1} \Rightarrow (\mathcal{L} - \mathcal{L}_n)(p) = 0.$$

Dokaz.- Kako je

$$(\mathcal{L} - \mathcal{L}_n)(p) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C p(z) \Big(\phi - \frac{\beta_0 q_n}{p_n}\Big)(z) \; \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C p(z) \frac{p_n \phi - \beta_0 q_n}{p_n}(z) \; \mathrm{d}z,$$

korišćenjem (2.2), dobijamo

$$(\mathcal{L} - \mathcal{L}_n)(p) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C p(z) O(z^{-2n-1}) \; \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C O(z^{-2}) \; \mathrm{d}z = 0,$$

gde smo integraciju izvršili u odnosu na $\mathrm{ext}(C)$. $\square$

Kažemo još da Gaussova kvadraturna formula ima maksimalni algebarski stepen tačnosti, s obzirom da fomula ima $2n$ slobodnih koeficijenata i da tačno integrali polinome stepena manjeg od $2n$.

Šta je najveća razlika između pozitivno definitnog slučaja i generalnog slučaja koji smo ovde prikazali? Najveća razlika je sigurno ta što ne možemo da garantujemo da su nule polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}$, proste. Posledica ovoga je da naša kvadraturna formula generalno ima sledeći oblik

$$\mathcal{L}_n(p) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C p(z) \frac{\beta_0 q_n(z)}{p_n(z)}\, \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{M} \sum_{\nu=0}^{M_k-1} w_{k,\nu}^n p^{(\nu)}(z_k^n), \tag{2.6}$$

gde je M broj različitih nula z_k^n, $k = 1, \ldots, M$, polinoma p_n, M_k su njihovi multipliciteti (naravno, $\sum_{k=1}^{M} M_k = n$), a težinski koeficijenti su zadati sa

$$w_{k,\nu}^n = \frac{1}{(M_k-1)!} \binom{M_k-1}{\nu} \lim_{z \to z_k^n} \left((z-z_k^n)^{M_k} \frac{\beta_0 q_n(z)}{p_n(z)} \right)^{(M_k-1-\nu)}.$$

U slučaju da su sve nule proste, dolazimo do standardne Gaussove kvadraturne formule

$$\mathcal{L}_n(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_0 q_n(z_k^n)}{p_n'(z_k^n)} p(z_k^n).$$

Primetimo da, prema lemi 1.1, svi težinski koeficijenti $\beta_0 q_n(z_k^n)/p_n'(z_k^n)$, $k = 1, \ldots, n$, imaju vrednosti različite od nule.

Naravno, sve ovo važi pod uslovom da su nule polinoma p_n unutar konture C i da je funkcija f analitička unutar konture C i bar neprekidna na konturi C. U opštem slučaju, kvadraturna formula (2.6) važi za svaku funkciju $f \in \mathcal{A}_C$ i za svaku krivu $C \in \Omega(J) \backslash \Gamma(J)$.

Ovim smo došli smo do sledećeg rezultata:

Teorema 2.3 *Pod uslovom da su nule polinoma p_n unutar konture C i da je funkcija $f \in \mathcal{A}_C$, gde je $\mathcal{A}_C$ definisano sa* (2.4), *imamo sledeću interpretaciju kvadraturne formule $\mathcal{L}_n(f)$,*

$$\mathcal{L}_n(f) = \sum_{k=1}^{M} \sum_{\nu=0}^{M_k-1} w_{k,\nu}^n f^{(\nu)}(z_k^n),$$

gde su z_k^n, $k = 1, \ldots, M$, različite nule polinoma p_n, sa višestrukostima M_k, $k = 1, \ldots, M$. Težine su date formulom

$$w_{k,\nu}^n = \frac{1}{(M_k-1)!} \binom{M_k-1}{\nu} \lim_{z \to z_k^n} \left((z-z_k^n)^{M_k} \frac{\beta_0 q_n(z)}{p_n(z)} \right)^{(M_k-1-\nu)}.$$

Dokaz.- Do rezultata dolazimo jednostavno primenom Cauchyjeve teoreme o ostacima (videti [76, str. 43]). Dakle, imamo

$$\mathcal{L}_n(f) = \sum_{k=1}^{M} \operatorname*{Res}_{z=z_k^n} \frac{\beta_0 q_n}{p_n} f = \frac{1}{(M_k-1)!} \lim_{z \to z_k^n} \frac{\mathrm{d}^{M_k-1}}{\mathrm{d}z^{M_k-1}} \left((z-z_k^n)^{M_k} \frac{\beta_0 q_n(z)}{p_n(z)} f(z) \right),$$

gde smo primenili formulu za ostatak analitičke funkcije u izolovanom polu z_k^n reda M_k (videti [76, str. 33]). Sada primenimo Leibnitzovu formulu za izvod proizvoda i dobijamo

$$\frac{1}{(M_k-1)!}\lim_{z\to z_k^n}\frac{\mathrm{d}^{M_k-1}}{\mathrm{d}z^{M_k-1}}\left((z-z_k^n)^{M_k}\frac{\beta_0 q_n(z)}{p_n(z)}f(z)\right)$$
$$=\frac{1}{(M_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{M_k-1}\binom{M_k-1}{\nu}f^{(\nu)}(z_k^n)\lim_{z\to z_k^n}\left((z-z_k^n)^{M_k}\frac{\beta_0 q_n(z)}{p_n(z)}\right)^{(M_k-1-\nu)}.$$

Sve što ostaje je da identifikujemo (pročitamo) odgovarajuće koeficijente. □

Primetimo da krivu C ne možemo proizvoljno da 'skupljamo' oko spektra operatora J ukoliko želimo da u unutrašnjosti krive C ostanu sve nule polinoma p_n, $n\in\mathbb{N}_0$, čak i pod uslovom da želimo da u unutar krive C ostanu sve nule niza p_n, $n>N\in\mathbb{N}_0$, počev, dakle, od nekog proizvoljno velikog N. Razlog za to su, naravno, lažne nule niza polinoma p_n, $n\in\mathbb{N}_0$. Međutim, prema teoremi 1.30, u svakom kompaktnom skupu $F\subset\Omega(J)\backslash\Gamma_{\mathrm{ess}}(J)$, počev od nekog dovoljno velikog $N=N(F)$, nemamo nijednu nulu niza polinoma p_n, $n>N$. To znači da možemo da skupljamo krivu C po kompaktnom skupu $F\subset\Omega(J)\backslash\Gamma_{\mathrm{ess}}(J)$ i da nam sve nule niza polinoma p_n, $n\in\mathbb{N}_0$, bar asimptotski ostanu unutar konture C.

Pod uslovom da imamo meru μ, $\mathrm{supp}(\mu)\subset\sigma(J)\cup\Gamma_{\mathrm{ess}}(J)$, tako da važi

$$\mathcal{L}(f)=\int\limits_{\mathrm{supp}\mu}f(x)\mathrm{d}\mu(x),\quad f\in\mathcal{A}_C,$$

tada je (2.6) kvadraturna formula za meru μ. Sledeća jednakost je očigledna

$$\mathcal{L}(p)=\int p(x)\mathrm{d}\mu(x)=\mathcal{L}_n(p),\quad p\in\mathcal{P}_{2n-1}.$$

2.3 Aproksimacija Weylove funkcije i singulariteti

Weylova funkcija ϕ je analitička na rezolvetnom skupu $\Omega(J)$ Jacobijevog operatora J. Iz teorije Padeove aproksimacije, tj. teorije verižnih razlomaka (videti [46, str. 106]), poznato je da funkcija

$$\frac{\beta_0 q_n(z)}{p_n(z)},$$

gde su p_n i q_n dva linearno nezavisna rešenja tročlane rekurentne relacije (1.10), predstvalja n-ti konvergent verižnog razlomka

$$\phi(z)=\cfrac{\beta_0^2}{z-\alpha_0-\cfrac{\beta_1^2}{z-\alpha_1-\cfrac{\beta_2^2}{\ddots}}}.$$

S druge strane, funkcija ϕ je upravo Weylova funkcija, tako da n-ti konvergent dobijamo kada proces umetanja razlomaka prekinemo posle n razlomaka (videti [46, str. 60]).

Pitanje konvergencije Padeove aproksimacije ka Weylovoj funkciji ϕ je prilično komplikovano. U idealnom slučaju, n-ti konvergent bi trebalo da konvergira ka Weylovoj funkciji bar na neograničeno povezanoj komponenti $\Omega(J)$. Upravo to se i dešava pod uslovom da je ograničeni operator J samo-pridružen (videti [5]).

Konvergencija se posmatra u lokalno uniformnom smislu.

Definicija 2.2 Niz analitičkih funkcija f_n, $n \in \mathbb{N}_0$, konvergira lokalno uniformno ka funkciji f na nekom povezanom otvorenom skupu O kompleksne ravni ako i samo ako za svaki kompaktan skup $K \subset O$ niz f_n, $n \in \mathbb{N}_0$, konvergira ka funkciji f uniformno na skupu K.

Funkcija f ka kojoj niz f_n konvergira je analitička na skupu O (videti [99, str. 225]).

Glavna prepreka konvergenciji n-tog konvergenta ka Weylovoj funkciji je, naravno, postojanje lažnih nula niza polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Nemoguće je imati uniformnu konvergenciju na nekom kompaktnom podskupu $F \subset \Omega(J)$ ako niz polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}_0$, ima niz lažnih nula sa tačkom nagomilavanja u skupu F. Međutim, prema teoremi 1.30, skup $\Omega(J)\backslash\Gamma_{\text{ess}}(J)$ nema lažnih nula. Pokazuje se da je ovo dovoljno za konvergenciju niza $\beta_0 q_n/p_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, ka Weylovoj funkciji ϕ (videti [30], [7]). Sledeća teorema može se naći u [7].

Teorema 2.4 *Neka je Ω_0 neograničena i povezana komponenta skupa $\Omega(J)$ i neka je otvoren i povezan $O \subset \Omega_0$, asimptotski bez nula niza polinoma p_n, $n \in N' \subset \mathbb{N}_0$. Onda je*

$$\limsup_{n\to+\infty, n\in N'} \left|\phi(x) - \frac{\beta_0 q_n(z)}{p_n(z)}\right|^{1/(2n)} \le \varepsilon(z) < 1,$$

lokalno uniformno na skupu O.

Nama ova teorema pre svega koristi kada je skup $O \subset \Omega(J)\backslash\Gamma_{\text{ess}}(J)$, s obzirom da je skup $\Omega(J)\backslash\Gamma_{\text{ess}}(J)$ asimptotski slobodan od nula ortogonalnih polinoma, saglasno teoremi 1.30.

U specijalnom slučaju, kada neki podniz β_n, $n \in N' \subset \mathbb{N}_0$, konvergira ka nuli, možemo tvrditi da je ceo skup $\Omega(J)$ asimptotski slobodan od nula. Označimo sa $\mathbf{p}_n(z)$ sledeći vektor $(p_0(z), \ldots, p_n(z), 0, \ldots)$; analogno $\mathbf{q}_n(z) = (q_0(z), \ldots, q_n(z), 0, \ldots)$. Primetimo da važi $\langle \mathbf{p}_n(z), \mathbf{e}_\nu\rangle = 0$, $\nu > n$, i analogno za $\mathbf{q}_n$. Tada je $(z-J)\mathbf{p}_n(z) = \beta_{n+1}(0, \ldots, 0, p_{n+1}(z), -p_n(z), 0, \ldots)$, pri čemu imamo na početku n nula i vektor je ispunjen nulama. Slično, $(z-J)\mathbf{q}_n(z) = -\mathbf{e}_0 + \beta_{n+1}(0, \ldots, 0, q_{n+1}(z), -q_n(z), 0, \ldots)$. Primetimo da važi $\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n \in \ell_0^2$. Onda

$$\begin{aligned}(z-J)(p_n(z)\mathbf{q}_n(z) - q_n(z)\mathbf{p}_n(z)) &= -p_n(z)\mathbf{e}_0\\ +\beta_{n+1}(0, \ldots, 0, p_n(z)q_{n+1}(z) - p_n(z)q_{n+1}(z), 0, \ldots) &= \frac{1}{\beta_0}\mathbf{e}_n - p_n(z)\mathbf{e}_0,\end{aligned}$$

gde smo koristili jednakost (1.11).

Pretpostavimo $z \in \Omega(J)$. Na osnovu prethodnog, imamo

$$||(z-J)^{-1}||^2\left(\frac{1}{|\beta_0|^2} + |p_n(z)|^2\right) = ||(z-J)^{-1}||^2 \left|\left|\frac{1}{\beta_0}\mathbf{e}_n - p_n(z)\mathbf{e}_0\right|\right|^2$$

$$\geq \left|\left|(z-J)^{-1}\left(\frac{1}{\beta_0}\mathbf{e}_n - p_n(z)\mathbf{e}_0\right)\right|\right|^2 = ||p_n\mathbf{q}_n - q_n\mathbf{p}_n||^2$$
$$\geq |p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n|^2 = \frac{1}{|\beta_n\beta_0|^2} > 0,$$

odakle neposredno zaključujemo da važi

$$\frac{1}{(1+|\beta_0 p_n(z)|^2)|\beta_n|^2} \leq ||(z-J)^{-1}||^2.$$

Za svaki kompaktan podskup $F \subset \Omega(J)$, imamo da je $||(z-J)^{-1}||$ ograničeno, pa je onda i $(1+|\beta_0 p_n(z)|^2)|\beta_n|^2$ ograničeno odozdo. Međutim, za $n \in N' \subset \mathbb{N}_0$ imamo, po pretpostavci $\beta_n \to 0$, pa za svaku tačku $z \in F$ mora biti $1+|\beta_0^2 p_n(z)|^2 \geq 1/|\beta_n|^2 \to +\infty$, odakle zaključujemo da $|p_n(z)|$ raste za $z \in F$ kada $n \to +\infty$, $n \in N' \subset \mathbb{N}_0$. Prema tome, za svaku tačku $z \in F$, postoji n_0 tako da važi $|p_n(z)| \geq 1$, za $n > n_0$, $n \in N' \subset \mathbb{N}_0$, a to znači da tačka z ne može biti nula polinoma p_n, $n > n_0$, $n \in N' \subset \mathbb{N}_0$ (videti [7]).

Lema 2.1 *Ako postoji podniz β_n, $n \in N' \subset \mathbb{N}_0$, za koji važi $\beta_n \to 0$, $n \in N' \subset \mathbb{N}_0$, svaki kompaktan skup $F \subset \Omega(J)$ je slobodan od nula polinoma $p_n(z)$, $n \in N' \subset \mathbb{N}_0$. Specijalno, ako je J kompaktan, onda je svaki kompaktan $F \subset \Omega(J)$ asimptotski slobodan od nula polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}_0$.*

Weylova funkcija u sebi sadrži informaciju o svim izolovanim spektralnim tačkama. U [5], [7], imamo sledeću teoremu.

Teorema 2.5 *Neka je ζ izolovana tačka spektra operatora J. Tačka $\zeta \in \sigma_{\text{ess}}(J)$ ako i samo ako je ζ esencijalni singularitet Weylove funkcije ϕ. Tačka $\zeta \in \sigma(J)\backslash\sigma_{\text{ess}}(J)$ je izolovana sopstvena vrednost operatora J ako i samo ako je ζ pol Weylove funkcije ϕ, pri čemu se red pola ζ poklapa sa algebarskom višestrukošću sopstvene vrednosti Jacobijevog operatora J.*

Na osnovu ovog rezultata dobijamo direktno teoremu 1.31.

Teorema 2.6 *Ako je $\zeta \in \sigma(J)\backslash\Gamma_{\text{ess}}(J)$ sopstvena vrednost operatora J sa algebarskom višestrukošću m_ζ, onda za svako $\epsilon > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}_0$, tako da svaki od polinoma p_n, $n > n_0$, ima u disku $\{z \mid |z-\zeta| < \varepsilon\}$ tačno m_ζ nula.*

Dokaz.- Prema teoremi 1.30, kompaktan skup $F \subset \Omega(J)\backslash\Gamma_{\text{ess}}(J)$ je asimptotski slobodan od nula niza polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}_0$, a po teoremi 2.4, imamo uniformnu konvergenciju n-tog Padeovog konvergenta ka Weylovoj funkciji na svakom kompaktnom skupu $F \subset \Omega(J)\backslash\Gamma_{\text{ess}}(J)$.

Međutim, lako je dokazati inkluziju $\Gamma(J^{(1)}) \subset \Gamma(J)$. S obzirom da je $z \in \Theta(J^{(1)})$, tada postoji neki jedinični vektor $\mathbf{y}$ takav da važi $z = \langle J^{(1)}\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle$. S druge strane, vektor $\mathbf{y}' = (0, y_0, y_1, \ldots)$, koji je izgrađen od vektora $\mathbf{y}$ i kome je na prvoj poziciji umetnuta 0 je, takođe, jediničan i važi

$$\langle J^{(1)}\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle = \langle J\mathbf{y}', \mathbf{y}'\rangle.$$

Dakle, dobijamo $z \in \Theta(J)$, pa imamo $\Theta(J^{(1)}) \subset \Theta(J)$. Kako su skupovi $\Gamma(J^{(1)})$ i $\Gamma(J)$ zatvaranja skupova $\Theta(J^{(1)})$ i $\Theta(J)$, to važi i inkluzija za njih (videti [96, str. 30]). Dakle, $\Gamma(J^{(1)}) \subset \Gamma(J)$. Kao posledicu dobijamo $\Gamma_{\text{ess}}(J^{(1)}) = \Gamma_{\text{ess}}(J)$, na osnovu definicije skupa Γ_{ess}.

Na osnovu teoreme 1.30, niz polinoma q_{n+1}, $n \in \mathbb{N}_0$, pridružen Jacobijevoj matrici $J^{(1)}$, mora imati distribuciju nula takvu da je svaki kompaktan skup

$$F \subset \Omega(J^{(1)}) \backslash \Gamma_{\text{ess}}(J)$$

asimptotski slobodan od nula.

Prema lemi 1.2, ako je ζ sopstvena vrednost operatora J, onda ona ne može biti istovremeno i sopstvena vrednost operatora $J^{(1)}$. Prema tome, ζ je element nekog kompaktnog podskupa $\Omega(J^{(1)}) \backslash \Gamma_{\text{ess}}(J)$ jer u protivnom imamo $\zeta \in \sigma(J^{(1)}) \backslash \Gamma_{\text{ess}}(J)$. Tada je, prema teoremi 1.30, operator J nedeterminisan, nepravilan.

Neka je $\zeta \in \Omega(J) \backslash \Gamma_{\text{ess}}(J)$ izolovana tačka spektra Jacobijevog operatora J koja je njegova sopstvena vrednost. Formirajmo kompaktan skup F_ζ na sledeći način

$$F_\zeta^r = \big\{ z \mid 0 < r/2 \le |z - \zeta| \le r \big\}.$$

Pri konstrukciji skupa F_ζ^r izaberimo $r = r_q$ tako da je, počev od nekog N_q, skup F_ζ^r slobodan od nula niza polinoma q_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Naravno, skup F_ζ^r nema u sebi sopstvene vrednosti Jacobijevog operatora $J^{(1)}$, tj. $F_\zeta^r \cap (\Omega(J^{(1)}) \backslash \Gamma_{\text{ess}}(J)) = F_\zeta^r$.

Neka je sada $r_q > \varepsilon > 0$ proizvoljno. Izaberimo $N > N_q$ tako da je skup F_ζ^ε slobodan od nula polinoma q_n, $n > N$. Izaberimo krivu $C = \{z \mid |z - \zeta| = 3\varepsilon/4\}$; očito $C \subset F_\zeta^\varepsilon$. Onda, zbog uniformne konvergencije $\beta_0 q_n / p_n$ u kompaktnom skupu F_ζ^ε, primenom principa argumenta (videti [76, str. 64]) i s obzirom da q_n nema nule unutar krive C za $n > N_q$, imamo

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{\left(\dfrac{\beta_0 q_n(z)}{p_n(z)} \right)'}{\dfrac{\beta_0 q_n(z)}{p_n(z)}} = - \lim_{n \to +\infty} n(p_n; C) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{\phi(z)'}{\phi(z)} \mathrm{d}z = -m_\zeta,$$

gde smo sa $n(p_n; C)$ označili broj nula polinoma p_n unutar krive C. Na ovaj način, dobili smo konvergentan niz prirodnih brojeva. Kako je indukovana topologija na skupu prirodnih brojeva (indukovana topologijom skupa $\mathbb{C}$) najfinija (svaki podskup $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ je otvoren), to su jedino nizovi konstantni počev od nekog dovoljno velikog indeksa konvergentni (videti [96, str. 42]). Znači da je niz $n(p_n : C)$, $n \in \mathbb{N}_0$, konstantan, počev od dovoljno velikog $N_p \in \mathbb{N}_0$. Za n_0, iz tvrđenja teoreme, dovoljno je izabrati $\max\{N_q, N_p\}$. $\square$

Ovde je potrebno dodati da se za svaku izolovanu tačku spektra operatora J, koja nije deo esencijalnog spektra $\sigma_{\text{ess}}(J)$, red pola Weylove funkcije ϕ poklapa sa algebarskom višestrukošću sopstvene vrednosti Jacobijevog operatora J (videti [5], [7]); poslednja vrednost je konačna (videti [34, str. 174]).

Posledice prethodnog rezultata su brojne. Na primer, za ograničeni i samo-pridruženi operator, Weylova funkcija ϕ je meromorfna sem na skupu $\mathbb{C} \backslash \sigma_{\text{ess}}(J)$, pri čemu je

$\sigma_{\text{ess}}(J)$ podskup realne prave; polovi Weylove funkcije leže isključivo na realnoj pravoj van esencijalnog spektra i, naravno, mogu imati tačke akumulacije samo na $\sigma_{\text{ess}}(J)$. Takođe, polovi Weylove funkcije su prosti jer se algebarska i geometrijska višestrukost sopstvenih vrednosti poklapaju, a za trodijagonalni operator znamo da je geometrijska višetrukost 1 (videti [34, str. 273]).

Posebno za kompaktan operator znamo da je spektar prebrojiv skup, sastavljen od sopstvenih vrednosti konačnih algebarskih višestrukosti, pri čemu sopstvene vrednosti konvergiraju ka tački 0 i $\sigma_{\text{ess}} = \{0\}$ (videti [34, str. 185]). Može se desiti slučaj da sopstvenih vrednosti ima samo konačno mnogo ili nijedna. To dalje znači da je Weylova funkcija meromorfna na skupu $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \backslash \{0\}$, pri čemu ima najviše prebrojivo mnogo polova, čija je tačka nagomilavanja 0.

2.4 Konvergencija kvadrature i ocena greške

Prvo pitanje koje se postavlja je, naravno, da li kvadraturna formula uopšte konvergira. Odgovor je potvrdan, naravno za izvesnu klasu funkcija. Posmatramo funkcije analitičke na skupu $\mathcal{A}_C$, koji je definisan u (2.4), pri čemu podrazumevamo da je kriva C izabrana tako da se nalazi u skupu $\Omega(J) \backslash \Gamma_{\text{ess}}(J)$.

Na osnovu reprezentacije Gaussove formule (2.6), za $f \in \mathcal{A}_C$ imamo

$$\begin{aligned} |(\mathcal{L}-\mathcal{L}_n)(f)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\oint_C f(z)\Big(\phi - \frac{\beta_0 q_n}{p_n}\Big)(z)\mathrm{d}z\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\oint_C |f(z)|\left|\Big(\phi - \frac{\beta_0 q_n}{p_n}\Big)\right| |\mathrm{d}z| \leq ||f|| \left|\left|\phi - \frac{\beta_0 q_n}{p_n}\right|\right|_C L(C), \quad (2.7) \end{aligned}$$

gde je $||\cot||_C$ standardna *sup* norma na kompaktnom prostoru C, a $L(C)$ je dužina krive C. Na osnovu teoreme 2.4, imamo direktno sledeću ocenu

$$|(\mathcal{L}-\mathcal{L}_n)(f)|^{1/(2n)} \leq a_n \left|\left|\phi - \frac{\beta_0 q_n}{p_n}\right|\right|_C^{1/(2n)} \leq a_n \max_{z\in C} \varepsilon(z),$$

gde smo sa a_n označili $(||f||L(C))^{1/(2n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Očito je da a_n teži jedinici.

Jasno je, da kad god imamo uniformnu konvergenciju Padeove aproksimacije ka Weylovoj funkciji na nekoj krivoj C, koja obuhvata bar asimptotski sve nule niza polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}_0$, imamo i konvergenciju kvadraturne formule.

Postoji još jedan način da se proverava konvergencija Gaussove kvadraturne formule, pod pretpostavkom da se linearni funkcional $\mathcal{L}$ može interpretirati preko neke mere μ (videti [52], [31]).

Na osnovu Cauchyjeve teoreme za $z \in \Omega(J) \backslash \Gamma_{\text{ess}}(J)$, pod uslovom da je n dovoljno veliko tako da z pripada nekom kompaktnom skupu koji je slobodan od nula polinoma p_n, imamo

$$\begin{aligned} (p_n\phi - \beta_0 q_n)(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{(p_n\phi - \beta_0 q_n)(u)}{z-u}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{p_n(u)\phi(u)}{z-u}\mathrm{d}u = \int \frac{p_n(x)\mathrm{d}\mu(x)}{z-x}, \end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili činjenicu da je funkcija $q_n(u)/(z-u)$ analitička unutar konture C, kao i Fubinijevu teoremu (videti [74, str. 96]).

Zbog ortogonalnosti polinoma p_n na sve polinome stepena manjeg od n, imamo

$$\int \frac{p_n(x)p_n(z)}{z-x}\mathrm{d}\mu(x) = \int \frac{p_n^2(x)}{z-x}\mathrm{d}\mu(x).$$

Na osnovu ove i prethodne jednakosti, dobijamo

$$(p_n\phi - \beta_0 q_n)(z) = \frac{1}{p_n(z)}\int \frac{p_n^2(x)}{z-x}\mathrm{d}\mu(x),$$

tj.

$$\left(\phi - \frac{\beta_0 q_n}{p_n}\right)(z) = \frac{1}{p_n^2(z)}\int \frac{p_n^2(x)}{z-x}\mathrm{d}\mu(x). \tag{2.8}$$

Ovo znači da grešku Padeove aproksimacije možemo da određujemo i preko izraza koji isključivo zavisi od mere μ i odgovarajućih ortogonalnih polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Na taj način, sup normu Padeove aproksimacije ocenjujemo kao

$$\begin{aligned}\left\|\phi - \frac{\beta_0 q_n}{p_n}\right\|_C &\leq \sup_{z\in C}\frac{1}{|p_n(z)|^2}\int \frac{|p_n(x)|^2}{|z-x|}|\mathrm{d}\mu(x)| \\ &\leq \frac{1}{\mathrm{dist}(C,\mu)\inf\limits_{z\in C}|p_n(z)|^2}\int |p_n(x)|^2|\mathrm{d}\mu(x)|, \end{aligned} \tag{2.9}$$

gde smo sa $\mathrm{dist}(C,\mu)$ označili minimalno rastojanje krive C i nosača mere μ.

2.5 Kompaktan Jacobijev operator

Za kompaktan Jacobijev operator možemo da damo ocenu konvergencije koja nam omogućava ocenu brzine konvergencije. Koristićemo rezultate koji su prezentovani u [55].

Poincareovu teoremu možemo formulisati na sledeći način (videti [43]).

Teorema 2.7 *Neka je data sledeća rekurentna relacija*

$$y_{n+k} = \sum_{\nu=0}^{k-1} a_{n+\nu}y_{n+\nu},$$

i neka koeficijenti imaju granične vrednosti

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+\nu} = a_\nu, \quad \nu = 0,1,\ldots,k-1.$$

Označimo sa ζ_ν, $\nu = 1,\ldots,k$, korene karakteristične jednačine

$$t^k = \sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu t^\nu.$$

Ako su svi oni različiti po modulu, onda ili postoji $\nu \in \{1, \ldots, k\}$*, tako da važi*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \zeta_\nu,$$

ili je $y_n = 0$ *za* $n > N$ *i dovoljno veliko* $N \in \mathbb{N}_0$.

U slučaju kompaktnog Jacobijevog operatora, prema teoremi 1.21, važi

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \beta_n = 0,$$

pa se karakterična jednačina za slučaj kompaktnog Jacobijevog operatora svodi na

$$t^2 = zt.$$

Koristeći Poincareovu teoremu, u slučaju kompaktnog Jacobijevog operatora imamo

$$\frac{\pi_{n+1}(z)}{\pi_n(z)} \to z \quad \text{ili} \quad \frac{\pi_{n+1}(z)}{\pi_n(z)} \to 0,$$

u slučaju da koreni nisu jednaki po modulu, odnosno u slučaju da $z \neq 0$.

Slučaj $\pi_n(z) = 0$, počev od nekog dovoljno velikog $N \in \mathbb{N}_0$ odbacujemo jer to vodi na zaključak da polinomi π_{n+1} i π_n imaju zajedničke nule, što je, prema teoremi 1.15, nemoguće za regularne linearne funkcionale koje mi jedino razmatramo.

Pod uslovom da je granična vrednost količnika 0, možemo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 2.8 *Pod uslovom da važi* $\pi_{n+1}(z)/\pi(z) \to 0$ *u nekoj tački* z*, tačka* z *je sopstvena vrednost Jacobijevog operatora.*

Dokaz.- Na osnovu tročlane rekurentne relacije imamo

$$\frac{\pi_{n+1}(z)}{\pi_n(z)} = z - \alpha_n - \frac{\beta_n^2}{\dfrac{\pi_n(z)}{\pi_{n-1}(z)}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

a na osnovu pretpostavke, $\pi_{n+1}(z)/\pi_n(z) \to 0$. Kako β_n^2 teži nuli, to možemo lako zaključiti da svaki podniz niza teži nuli tako da je

$$0 < C_0 < |\beta_{n+1}^2 \pi_n(z)/\pi_{n+1}(z)| < C_1 < +\infty.$$

U slučaju da za neki podniz $\beta_{n+1}^2 \pi_n(z)/\pi_{n+1}(z) \to 0$, $n \in N' \subset \mathbb{N}_0$, imali bismo $\pi_{n+1}(z)/\pi_n(z) \to z$, $n \in N' + 1 \subset \mathbb{N}_0$, što je kontradikcija. Slična kontradikcija može da se pokaže i za slučaj da postoji podniz, $n \in N' \subset \mathbb{N}_0$, koji konvergira ka $+\infty$. U tom slučaju, postoji podniz $\pi_{n+1}(z)/\pi_n(z)$, $n \in N' + 1 \subset \mathbb{N}_0$, koji divergira ka beskonačnosti.

Međutim, možemo dati i bolju ocenu, s obzirom da bilo koja konstanta ne može biti granična vrednost niza $\beta_{n+1}^2 \pi_n(z)/\pi_{n+1}(z)$. U slučaju da postoji podniz koji konvergira ka λ, tj. $\beta_{n+1}^2 \pi_n(z)/\pi_{n+1}(z) \to \lambda$, $n \in N' \subset \mathbb{N}_0$, onda podniz $\beta_{n+1}^2 \pi_n(z)/\pi_{n+1}(z)$, $n \in N' + 1 \subset \mathbb{N}_0$, konvergira ka $z - \lambda \neq 0$, pod uslovom $z \neq \lambda$.

Iz ovoga zaključujemo da važi

$$\frac{\pi_{n+1}(z)}{\pi_n(z)} = O\left(\frac{\beta_{n+1}^2}{z}\right).$$

Za ortonormirane polinome imamo

$$\frac{p_{n+1}(z)}{p_n(z)} = O\left(\frac{\beta_{n+1}}{z}\right),$$

Na osnovu prethodnog, zaključujemo da je red

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p}\rangle^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k(z)|^2,$$

konvergentan (videti [75, str. 14]), što povlači da je $\mathbf{p} \in \ell^2$, što dalje znači da je z sopstvena vrednost odgovarajućeg Jacobijevog operatora. Zbog konvergencije prethodnog reda, važi $p_n(z) = o(1)$, ako je z sopstvena vrednost odgovarajuće Jacobijeve matrice i posebno

$$|\pi_n(z)| = o(1) \prod_{k=0}^{n} |\beta_k|. \tag{2.10}$$

Ako granična vrednost količnika $\pi_{n+1}(z)/\pi_n(z)$ iznosi z, onda važi

$$\left|\frac{p_{n+1}(z)}{p_n(z)}\right| = \left|\frac{z}{\beta_{n+1}}\right| \to +\infty, \quad \text{dok} \quad n \to +\infty,$$

odakle zaključujemo da $\mathbf{p} \notin \ell^2$. Dakle, z ne može biti sopstvena vrednost Jacobijevog operatora. □

Dokažimo sada još jednu značajnu osobinu polinoma pridruženih kompaktnom Jacobijevom operatoru.

Teorema 2.9 *Ako je π_n, $n \in \mathbb{N}_0$, niz moničnih polinoma pridruženih kompaktnom operatoru J, onda za svaku (rektifikabilnu) krivu $C \subset \Omega(J)$, takvu da je $\sigma(J) \subset \operatorname{int}(C)$, i koja se zatvara jedanput oko $\sigma(J)$, imamo*

$$\lim_{n\to+\infty} \min_{z\in C} |\pi_n(z)|^{1/n} \geq \operatorname{dist}(C, 0).$$

Dokaz.- Neka je $r = \operatorname{dist}(C, 0)$, ali takvo da po modulu nije jednako nijednoj sopstvenoj vrednosti Jacobijevog operatora J. Izaberimo proizvoljno $\rho \in (0, r)$. S obzirom na teoreme 1.30 i 2.6, zaključujemo da van kruga $|z| < \rho$, za dovoljno veliko $n > N$, imamo samo konačno mnogo nula polinoma π_n, $n \in \mathbb{N}_0$; na primer, imamo k nula van kruga $|z| < \rho$. Za $n > N$,

$$\begin{aligned}\min_{z\in C} |\pi_n(z)|^{1/n} &\geq \min_{z\in C}\left(\prod_{\nu=1}^{k} |z - x_\nu|\right)^{1/n} \min_{z\in C}\left(\prod_{\nu=k+1}^{n} |z - x_\nu|\right)^{1/n} \\ &> \min_{z\in C}\left(\prod_{\nu=1}^{k} |z - x_\nu|\right)^{1/n} |r - \rho|^{(n-k)/n},\end{aligned}$$

gde smo sa x_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, označili nule polinoma π_n. Primetimo da prvi element proizvoda ne može biti jednak nuli jer se kriva C nalazi u $\Omega(J)$, pa je prema tome udaljena od sopstvenih vrednosti Jacobijevog operatora, a nule x_ν, $\nu = 1, \ldots, k$, konvergiraju ka sopstvenim vrednostima Jacobijevog operatora. Dakle, za dovoljno veliko n imamo sigurno $|z - x_\nu| > 0$, $\nu = 1, \ldots, k$, odakle jednostavno zaključujemo

$$\lim_{n\to+\infty} \min_{z\in C} |\pi_n(z)|^{1/n} > r - \rho.$$

Prethodna nejednakost važi za svako $\rho \in (0, r)$, pa prema tome važi i specijalno za $\rho \to 0$, što daje tvrđenje teoreme. $\square$

Neka je zadata neka mera μ i linearni funkcional $\mathcal{L}$, na sledeći način

$$\mathcal{L}(f) = \int f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} w_k f(\lambda_k),$$

pri čemu podrazumevamo da važi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |w_k| = W < +\infty. \tag{2.11}$$

i $\lim \lambda_k = 0$. Podrazumevamo, takođe, da su λ_k poređani po rastućem modulu, tj. $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}|$, $k \in \mathbb{N}_0$, i da važi $\lambda_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda_k \neq \lambda_\nu$, $k \neq \nu$. Prethodni uslovi obezbeđuju integrabilnost polinoma jer očigledno

$$\left|\int x^n \mathrm{d}\mu(x)\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |w_k||\lambda_k|^n \leq |\lambda_0|^n W, \tag{2.12}$$

što znači da je red apsolutno konvergentan pa samim tim i konvergentan.

Ispitajmo sada ponašanje Cauchyjeve transformacije $\hat{\mu}$ naše mere μ, tj.

$$\hat{\mu}(z) = \int \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{z - x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w_k}{z - \lambda_k}.$$

Definišimo skup $\Lambda = \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.

Teorema 2.10 *Cauchyjeva transformacija mere μ, koja zadovoljava uslove* (2.11) *i* (2.12)*, je analitička funkcija na $O = \mathbb{C}\backslash(\{0\} \cup \Lambda)$, ima proste polove u tačkama λ_k, $k \in \mathbb{N}_0$, i esencijalni singularitet u tački 0. Specijalno, $\hat{\mu}$ je meromorfna na $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.*

Dokaz.- Tvrđenje dokazujemo pozivajući se pre svega na Weierstrassov kriterijum uniforme konvergencije (videti [99, str. 220]). Neka je $F \subset O$ (O iz tvrđenja teoreme) zatvoren skup. Onda za $z \in F$, imamo

$$\frac{|w_k|}{|z - \lambda_k|} \leq \frac{|w_k|}{\min\limits_{z\in F,\ k\in\mathbb{N}_0} |z - \lambda_k|} = \frac{|w_k|}{\mathrm{dist}(F, \Lambda)}.$$

Prema uslovu (2.11), jednostavno je zaključiti da red

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{|w_k|}{\operatorname{dist}(F,\Lambda)}$$

konvergira, što za posledicu, prema Weiestreissovom kriterijumu, ima uniformnu konvergenciju reda, koji predstavlja Cauchyhevu transformaciju $\hat{\mu}$ mere μ.

U [99, str. 224] nalazimo sledeće tvrđenje: *Ako su $u_k(z)$ analitičke na nekom povezanom i otvorenom skupu O i ako je red $\sum_{k=1}^{n} u_k(z)$ uniformno konvergentan na svakom prosto povezanom i zatvorenom skupu $F \subset O$, onda je taj red analitička funkcija na O.* S obzirom da smo dokazali da je naš red, koji reprezentuje Cauchyjevu transformaciju $\hat{\mu}$, uniformno konvergentan na svakom zatvorenom skupu $F \subset O$, na osnovu prethodnog tvrđenja, zaključujemo da red konvergira ka analitičkoj funkciji na O, tj. funkcija $\hat{\mu}$ je analitička na O.

Da bismo ispitali prirodu singulariteta u nekoj tački λ_k možemo postupiti na sledeći način. Neka je

$$g_k(z) = \hat{\mu}(z) - \frac{w_k}{z-\lambda_k}.$$

Na osnovu prethodnog dokaza, funkcija g_k je analitička na $O \cup \{\lambda_k\}$. Shodno tome, u nekoj okolini tačke λ_k, funkcija $\hat{\mu}$ je zbir analitičke funkcije i člana $w_k/(z-\lambda_k)$, što žnači da u tački λ_k ima prost pol.

Prema uslovima definicije tačaka λ_k, $k \in \mathbb{N}_0$, znamo da im je tačka nagomilavanja tačka 0, što znači da je tačka 0 esencijalni singularitet funkcije g_k jer je 0 tačka nagomilavanja singulariteta funkcije g_k. Očigledno, $\hat{\mu}$ je meromorfna na skupu $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ jer u njemu ima samo izolovane proste polove. □

Uvedimo treću pretpostavku za našu meru μ. Naime, pretpostavimo da je linearni funkcional $\mathcal{L}$, odnosno mera μ, takva da je odgovarajući Jacobijev operator J kompaktan. Primetimo da ova pretpostavka sadrži u sebi i pretpostavku da je funkcional $\mathcal{L}$ regularan.

Prema teoremi 1.26, postoji okolina U tačke beskonačno u kojoj su Weylova funkcija ϕ i Cauchyjeva transformacija mere $\hat{\mu}$ jednake. Prema razmatranjima o spektru Jacobijevog operatora u sekciji 1.3, znamo da je Weylova funkcija, za slučaj kompaktnog operatora, meromorfna na $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, pri čemu ima samo polove u nekoj ograničenoj okolini tačke nula i ima esencijalni singularitet u tački 0.

Teorema 2.11 *Ako mera μ, odnosno linearni funkcional $\mathcal{L}$, zadovoljvaju uslove* (2.11) *i* (2.12) *i ako je odgovarajući Jacobijev operator kompaktan, onda je spektar Jacobijevog operatora upravo skup $\{0\} \cup \Lambda$. Weylova funkcija ϕ Jacobijevog operatora jednaka je Cauchyjevoj transformaciji $\hat{\mu}$ mere μ.*

Dokaz.- U skupu $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ Weylova funkcija i Cauchyjeva transformacija mere su meromorfne funkcije i pomenuti skup je povezan. Na povezanom i otvorenom skupu A, meromorfne funkcije obrazuju polje u odnosu na operacije sabiranja i množenja funkcija (videti [33, str. 168]), pri čemu su operacije sabiranja i množenja definisane tačkasto. Na primer, $h = f + g$ znači $h(z) = f(z) + g(z)$, za sve tačke u kojima su f

i g analitičke, dok se za tačke u kojima imaju polove ispituje odgovarajući Laurentov razvoj.

Međutim, prema [33, str. 168], ako za meromorfnu funkciju h na otvorenom i povezanom skupu A, skup $\{z \mid h(z) = 0\}$ ima tačke nagomilavanja u A, onda je $\{z \mid h(z) = 0\} = A$. Drugim rečima, funkcija h je identički jednaka nuli na skupu A.

Uzmimo $h = \phi - \hat{\mu}$, onda imamo jednakost $U = \{z \mid h(z) = 0\}$, gde je U već pomenuta okolina tačke ∞ iz teoreme 1.26. Naravno, skup U ima tačke nagomilavanja u $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, pa prema tome mora biti $h(z) \equiv 0$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Drugim rečima, $\phi(z) = \hat{\mu}(z)$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Saglasno teoremi 2.5, singulariteti Weylove funkcije su tačke spektra i obrnuto. Takođe, prema teoremi 2.10, funkcija $\hat{\mu}$ ima u svakoj od tačaka skupa Λ prost pol, što znači da i ϕ ima u svakoj od tačaka Λ prost pol. Prema tome, sve tačke skupa Λ istovremeno su u spektru $\sigma(J)$. Tačka 0 mora pripadati spektru jer je spektar zatvoren skup. Dakle, $\sigma(J) = \{0\} \cup \Lambda$. $\square$

Prema teoremi 2.6, znamo da je svakoj tački Λ privučena po jedna nula. Dakle, u okolinama tačaka λ_k, $k \in \mathbb{N}_0$, nalazi se asimptotski po jedna nula polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

Na dalje, neka je funkcija f analitička unutar krive C_{r,r_1} i neprekidna na samoj krivoj, pri čemu krivu C_{r,r_1}, za neko zadato $r > 0$ takvo da $r \neq |\lambda_k|$, $k \in \mathbb{N}_0$, definišemo na sledeći način. Uzmimo prvo kružnicu

$$K_r = \{z \mid |z| = r\}.,$$

Poznato je da van kružnice K_r imamo samo konačno mnogo sopstvenih vrednosti Jacobijevog operatora J. Neka je njih k van kružnice K_r. Definišimo kružnice

$$C_\nu^{r_1} = \{z \mid |z - \lambda_\nu| = r_1\}, \quad \nu = 0, 1, \dots, k,$$

i pretpostavimo da je r_1 izabrano dovoljno malo da se kružnice C_ν ne seku međusobno ni sa kružnicom K_r. Definišimo lukove L_ν^+ koji spajaju kružnice K_r i $C_\nu^{r_1}$ orjentisane od kružnice K_r do kružnice $C_\nu^{r_1}$, $\nu = 0, 1, \dots, k$. Neka su lukovi L_ν^- isti kao lukovi L_ν^+, samo orjentisani na suprotnu stranu. Kriva C_{r,r_1} je skup

$$C_{r,r_1} = K_r \bigcup \left(\bigcup_{\nu=0}^{k} (C_\nu^{r_1} \cup L_\nu^+ \cup L_\nu^-) \right),$$

pri čemu podrazumevamo pozitivnu orjentaciju.

Teorema 2.12 *Neka je funkcija f analitička u* $\operatorname{int} C_{r,r_1}$ *i neprekidna na* C_{r,r_1}. *Za svako* $\rho > 0$ *postoji* $n_0 = n_0(\rho)$, *tako da za* $n > n_0$ *imamo*

$$|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_n)(f)|^{1/(2n)} \approx a_n \frac{2\rho}{r},$$

gde je $\mathcal{L}$ odgovarajući linearni funkcional, a $\mathcal{L}_n$ odgovarajuća Gaussova kvadraturna formula (2.6) *za funkcional $\mathcal{L}$.*

Dokaz.- Dokaz dajemo upotrebom nejednakosti (2.7) i (2.9). Prvo posmatramo kompaktan skup

$$F = \{z \mid |z| < 2||J||\}\setminus\Big(\mathrm{int}(K_\rho)\bigcup\Big(\bigcup_{|\lambda_\nu|>\rho}\mathrm{int}(C_\nu^\rho)\Big)\Big),$$

gde su K_ρ i C_ν^ρ kružnice definisane prethodno. Na osnovu teoreme 1.30, postoji $N_1 = N(F)$ tako da za $n > N_1$ u skupu F ne postoje nule polinoma p_n. Dalje, postoji samo konačno mnogo kružnica C_ν^ρ, $|\lambda_\nu| > \rho$, i u njima konačno mnogo nula svih polinoma p_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Neka je ukupan broj nula u ovim kružnicama N_2. Kako je samo konačno mnogo tačaka $|\lambda_\nu| > \rho$, takođe, postoji N_3 takvo da za svako $|\lambda_\nu| > \rho$ imamo

$$|\pi_n(\lambda_\nu)| \approx \left(\prod_{\nu=0}^{n}|\beta_\nu|\right)o(1) = |||\pi_n|||\,o(1),$$

prema (2.10). Najzad, postoji N_4 takvo da je $(2\rho)^{-2n}\,|||\pi_n|||\,o(1) < 1$ jer $||\pi_n||$ ima pad brži od eksponencijalnog.

Neka je $n > \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$. Ako sa x_j, $j = 1, \ldots, n$, označimo nule polinoma p_n, imamo

$$\begin{aligned}
\int |\pi_n|^2 |\mathrm{d}\mu| &= \sum_{i=k}^{+\infty}|w_i||\pi_n(\lambda_i)|^2 + \sum_{i=0}^{k-1}|w_i||\pi_n(\lambda_i)|^2 \\
&\le \sum_{i=k}^{+\infty}|w_i|\prod_{j=1}^{n}|\lambda_i - x_j|^2 + o\left(\big|||\pi_n||^2\big|\right)\sum_{i=0}^{k-1}|w_i| \\
&\le \sum_{i=k}^{+\infty}|w_i|\prod_{|x_j|<\rho}|\lambda_i - x_j|^2\prod_{|x_j|>\rho}|\lambda_i - x_j|^2 + o\left(\big|||\pi_n||^2\big|\right)W \\
&\le \sum_{i=k}^{+\infty}|w_i|(2\rho)^{2(n-N_2)}(2||J||)^{2N_2} + o\left(\big|||\pi_n||^2\big|\right)W \\
&\le \left((2\rho)^{2(n-N_2)}(2||J||)^{2N_2} + o\left(\big|||\pi_n||^2\big|\right)\right)W \\
&= (2\rho)^{2(n-N_2)}(2||J||)^{2N_2}\left(1 + o\left((2\rho)^{-2(n-N_2)}\big|||\pi_n||^2\big|\right)\right)W,
\end{aligned}$$

gde smo koristili nejednakost $|\lambda_\nu - x_j| \le 2\rho$, za nule i sopstvene vrednosti koje se nalaze unutar kruga K_ρ, a nejednakost $|\lambda_\nu - x_j| \le 2||J||$ ako se nula x_j nalazi van kruga K_ρ.

Označimo sa B sledeću veličinu

$$B = \frac{L(C_{r,r_1})||f||W}{\mathrm{dist}(C_{r,r_1}, \sigma(J))}.$$

Sada, koristeći nejednakosti (2.7) i (2.9), kao i teoremu 2.9, dobijamo

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_n)(f)|^{1/2n} \le \Big(B(1 + o((2\rho)^{-2(n-N_2)}\,\big|||\pi_n||^2\big|\,o(1)))\Big)^{1/2n} \times \\
\times\left(\frac{||J||}{\rho}\right)^{N_2/n}\frac{2\rho}{\min\limits_{z\in C_r}|\pi_n(z)|^{1/n}} \approx a_n\frac{2\rho}{r}.
\end{aligned}$$

Niz a_n je dat sa

$$a_n = B^{1/2n}(1 + o((2\rho)^{-2(n-N_2)} \left| ||\pi_n||^2 \right| o(1))^{1/2n} \left(\frac{||J||}{\rho} \right)^{N_2/n},$$

pa očigledno imamo $a_n \to 1$, dok $n \to +\infty$. $\square$

2.6 Ograničeni Jacobijev operator

Obradićemo sada specijalan slučaj ograničenog Jacobijevog operatora J, sa esencijalnim spektrom $\sigma_{\text{ess}}(J) = [-1, 1]$, pri čemu podrazumevamo da je Jacobijev operator J kompaktna perturbacija Jacobijevog operatora Čebiševljevih polinoma druge vrste.

Kao i u slučaju kompaktnog operatora, potrebna nam je Poincareova teorema (videti [3], [43]). Za Magnusovu klasu (teorema 1.36) znamo da koeficijenti tročlane rekurentne relacije zadovoljavaju asimptotske jednakosti

$$\lim_{k\to+\infty} \alpha_k = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \beta_k = \frac{1}{2}.$$

Karakteristična jednačina tročlane rekurentne relacije ima sledeća rešenja

$$t^2 = zt - \frac{1}{4}, \quad t_{1,2} = \frac{z \pm (z^2-1)^{1/2}}{2},$$

što znači da imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\pi_{n+1}(z)}{\pi_n(z)} \right| = \left| \frac{z \pm (z^2-1)^{1/2}}{2} \right|,$$

pod uslovom da ne važi[1] $|z + (z^2-1)^{1/2}| = |z - (z^2-1)^{1/2}|$. Poslednja jednakost je zadovoljena isključivo za $z \in [-1, 1]$, što znači da naše asimptotske relacije na esencijalnom spektru ne važe. U stvari, ovo razmatranje je i istaklo značaj skupa $[-1, 1]$ za kompaktne perturbacije Jacobijevog operatora Čebiševljevih polinoma druge vrste. Za z dovoljno veliko, n fiksno, jasno je da mora važiti $|\pi_{n+1}(z)/\pi_n(z)| = |z| + O(1)$, što povlači da za okolinu tačke beskonačno imamo konvergenciju ka vrednosti $|z + (z^2-1)^{1/2}|/2$.

Primetimo da važi

$$(z + (z^2-1)^{1/2})(z - (z^2-1)^{1/2}) = 1 \quad \text{i} \quad |z - (z^2-1)^2| < 1, \quad z \in \mathbb{C}\backslash[-1, 1].$$

Ako $|\pi_{n+1}(z)/\pi_n(z)|$ konvergira ka $|z - (z^2-1)^{1/2}|/2$, za neko $z \in \mathbb{C}\backslash[-1, 1]$, imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{p_{n+1}(z)}{p_n(z)} \right| = 2 \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\pi_{n+1}(z)}{\pi_n(z)} \right| = |z - (z^2-1)^{1/2}| < 1.$$

Posledica ovoga je konvergencija reda (videti [75, str. 14])

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k(z)|^2,$$

[1] Ovde podrazumevamo onu granu funkcije koren koja se ponaša kao z kada $z \to \infty$. Dakle, zasek funkcije se nalazi na intervalu $[-1, 1]$ i naš koren je analitička funkcija na $\mathbb{C}\backslash[-1, 1]$

što povlači da je tačka z sopstvena vrednost Jacobijevog operatora J. Međutim, Jacobijev operator J u neograničenoj komponenti skupa $\Omega(J)\backslash\sigma_{\text{ess}}(J)$ može da ima samo izolovane sopstvene vrednosti (videti [34, str. 242–244]). To, naravno, znači da količnik $|\pi_{n+1}(z)/\pi_n(z)|$ može da konvergira ka vrednosti $\frac{1}{2}|z-(z^2-1)^{1/2}|$ samo u izolovanim tačkama skupa $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ koje mogu da se nagomilavaju samo na $[-1,1]$.

Teorema 2.13 *Ako koeficijenti tročlane relacije zadovoljvaju uslov*

$$\lim_{k\to+\infty}\alpha_k=0,\qquad \lim_{n\to+\infty}\beta_k=\frac{1}{2},$$

onda, za $z\in\mathbb{C}\backslash[-1,1]$, $\pi_{n+1}(z)/\pi_n(z)$ konvergira ka $\frac{1}{2}(z-(z^2-1)^{1/2})$ ako i samo ako je z sopstvena vrednost Jacobijevog operatora J.

Nejednakost (2.9) može se iskoristi za dokazivanje konvergencije u nekim posebnim slučajevima ograničenog Jacobijevog operatora. Nejednakost je i korišćena u dokazivanju konvergencije (videti [31]).

Na primer, Magnusova klasa ortogonalnih polinoma koja je razmatrana u sekciji 1.5.3, takođe, zadovoljava i sledeću veoma lepu osobinu (videti [41]).

Teorema 2.14 *Pod uslovom da mera μ zadovoljava uslove teoreme* 1.36, *imamo*

$$\int|p_n(x)p_{n+k}(x)|^2|\mathrm{d}\mu(x)|<C<+\infty,$$

uniformno po $n,k\in\mathbb{N}_0$.

Posebno za Magnusovu klasu važi i sledeće ekstremalno svojstvo

$$\lim_{n\to+\infty}|\pi_n(z)|^{1/n}=\left|\frac{z+(z^2-1)^{1/2}}{2}\right|,$$

gde je konvergencija uniformna na kompaktnim skupovima koji su sadržani u $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ (videti [31]).

Ove dve teoreme nam daju direktno sledeće tvrđnje (videti [31]).

Teorema 2.15 *Ako mera μ zadovoljava uslove iz teoreme* 2.14, *onda*

$$\left\|\phi-\frac{\beta_0q_n}{p_n}\right\|_C^{1/(2n)}\le\max_{z\in C}\left|\frac{z-(z^2-1)^{1/2}}{2}\right|.$$

Za grešku kvadraturne formule važi ocena

$$|(\mathcal{L}-\mathcal{L}_n)(f)|^{1/(2n)}\le a_n\left|\frac{z-(z^2-1)}{2}\right|,$$

gde niz a_n teži jedinici.

Dokaz možemo dati direktnim izračunavanjem.

2.7 Primena kompleksnih Gaussovih kvadratura

U ovoj sekciji najpre razmatramo kompaktni operator i posmatramo linearni funkcional zadat u (1.15) sa

$$\mathcal{L}_a^{p,q} f = \frac{p-1}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k} f\left(\frac{a}{q^k}\right) = \int f \mathrm{d}\mu, \quad f \in \mathcal{P}.$$

Kako je odgovarajući Jacobijev operator kompaktan, neposredno zaključujemo da su ispunjeni uslovi za primenu teoreme o konvergenciji 2.12.

Posmatrajmo prvo $p = q = 2$ i $a = 1$. U ovom slučaju linearni funkcional $\mathcal{L}^{p,q}$ je pozitivno definitan. Pretpostavimo da izračunavamo $\mathcal{L}_1^{p,q}(f)$, gde je $f(z) = 1/(z - 3^{-20})$.

Koristeći QR algoritam (videti [46, p. 328], [29]), možemo da konstruišemo Gaussovu kvadraturnu formulu. Primetimo da za ovaj slučaj znamo sigurno da su nule ortogonalnih polinoma proste jer je funkcional $\mathcal{L}_1^{p,q}$ pozitivno definitan. Dakle, naša kvadraturna formula ima prost oblik

$$G_n(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_0 q_n(x_k)}{p_n'(x_k)} p(x_k),$$

gde su x_k nule polinoma p_n, ortonormiranih u odnosu na $\mathcal{L}_1^{p,q}$.

U tabeli 2.1, prikazana je vrednost kvadraturne formule $G_n(f)$ i relativna greška kvadraturne formule. Kako vidimo, za male vrednosti $n \leq 30$, relativna greška je velika. Ovaj rezultat možemo da objasnimo primenom teoreme 2.12. Moduo najmanje nule za $n = 30$ iznosi 10^{-10}, dok za $n = 40$ iznosi 10^{-13}. Primetimo i da je $3^{-20} \approx 3 \times 10^{-10}$, što znači da kontura C_r iz teoreme 2.12, u kojoj je funkcija f analitička, mora da ima $r < 3 \times 10^{-10}$. Ovo znači da dok neke nule ne postanu manje od 3×10^{-10}, mi ne možemo izabrati ρ iz teoreme 2.12 dovoljno malo da nam količnik $2\rho/r$ bude manji od 1, pa za te vrednosti n praktično kvadraturna formula divergira. Međutim, za $n = 40$, s obzirom da je najmanja nula sa modulom 10^{-13}, možemo izabrati ρ tako da važi $2\rho/r < 1$, pa kvadraturna formula konvergira veoma brzo. Napomenimo da m.p. u tabeli označava mašinsku preciznost (u ovom slučaju, m.p. $\approx 2.22 \times 10^{-16}$).

n	G_n	r. gr.
10	6.605719151641912	0.54
20	11.60759673863332	0.20
30	18.19943971672188	0.26
40	14.46129284956265	m.p.

Tabela 2.1: Gaussova aproksimacija G_n integrala $L_1^{2,2}(1/(\cdot - 3^{-20}))$ i relativna greška r. gr.

Slične rezultate dobijamo i kada koristimo kvadraturnu formulu za aproksimaciju prethodnog funkcionala za $p = q = 2\mathrm{i}$, $a = 1$. Rezultati su prikazani u tabeli 2.2, iz kojih vidimo da je ponašanje potpuno isto kao i u prethodnom primeru.

n	G_n	r. gr.
10	$9.577889690630307 + 4.0332355954016054i$	0.66
20	$19.57775686236893 + 9.0341888460741501i$	0.30
30	$29.71613796045620 + 14.066446517362046i$	0.07
40	$27.52570186363645 + 13.689702133806741i$	m.p.

Tabela 2.2: Gaussova aproksimacija G_n integrala $L_1^{2i,2i}(1/(\cdot - 3^{-20}))$ i relativna greška r. gr.

Još jedan primer, koji smatramo vrlo zanimljivim, može da se dobije Gaussovom aproksimacijom integrala

$$\int_{-1}^{1} e^{\mathrm{i}m\pi x} f(x)\mathrm{d}x, \quad m \in \mathbb{N},$$

koristeći kvadraturne formule konstruisane za polinome ortogonalne u odnosu na težinu $w(x) = \chi_{[-1,1]}(x)x\exp(\mathrm{i}m\pi x)$.

Primetimo da ovde ne znamo da li je odgovarajući Jacobijev operator ograničen ili nije, tj. ne znamo da li su koeficijenti tročlane relacije ograničeni ili nisu. Možemo da ponudimo samo numerički dokaz za ovo tvrđenje. U daljem pretpostavljamo da su koeficijenti tročlane relacije ograničeni.

Naravno, s obzirom da naše kvadraturne formule G_n konstruisane za težinu w aproksimiraju integrale

$$\int f(x)w(x)\mathrm{d}x,$$

to integrale u odnosu na težinu $\omega(x) = \chi_{[-1,1]}(x)\exp(\mathrm{i}m\pi x)$ možemo izraziti i na sledeći način

$$\int f(x)\omega(x)\mathrm{d}x = \int \frac{f(x) - f(0)}{x} w(x)\mathrm{d}x.$$

Jednakost se jednostavno proverava, s obzirom da je $\int \omega(x)\mathrm{d}x = 0$.

Pod pretpostavkom da je f analitička u nekom domenu koji u sebi sadrži interval $[-1, 1]$, Gaussova aproksimacija integrala može biti primenjena jer je i funkcija

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}, \quad g(0) = f'(0),$$

takođe, analitička u istom domenu.

Naša kvadraturna formula postaje

$$\int f(x)\omega(x)\mathrm{d}x = \int g(x)w(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} w_k g(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{x_k}(f(x_k) - f(0)).$$

Posmatraćemo sada integraciju funkcije

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1/4}$$

i aproksimiraćemo integral $S_{10}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(10\pi x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} g(x)w(x)\mathrm{d}x$, gde je $g(x) = f(x)/x$. U tabeli 2.3 prikazane su vrednosti $G_n(g)$ za $n = 10(10)70$. Funkcija g ima prost pol u tački $z = -\mathrm{i}/2$. Rezultat aproksimacije možemo znatno poboljšati ako izračunamo ostatak funkcije $g\omega$ u tački $z = \mathrm{i}/2$ i prosto ga dodamo, pomnoženog sa $2\pi\mathrm{i}$, vrednostima $G_n(g)$. Dakle, imamo

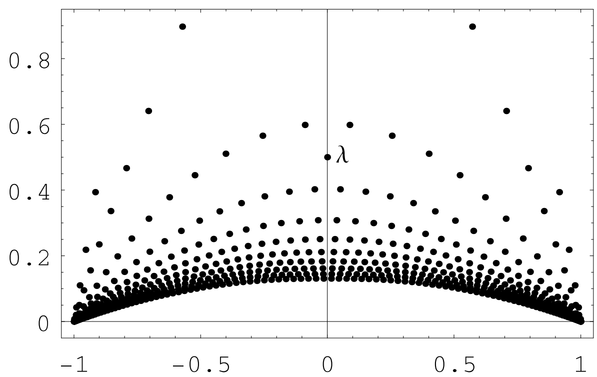
$$R = 2\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}/2} g(z)\omega(z) = 4.734434401198 \times 10^{-7}.$$

U trećoj koloni tabele 2.3, prikazane su vrednosti $\widetilde{G}_n(f) = G_n(f) + R$.

n	$G_n(f)$	$\widetilde{G}_n(f)$
10	-0.0509124802888631	-0.0509120068454231
20	-0.0509124798498521	-0.0509120064064121
30	-0.0509124699339274	-0.0509119964904873
40	-0.0509120078597894	
50	-0.0509120064014030	
60	-0.0509120064013063	
70	-0.0509120064013063	

Tabela 2.3: Gaussove aproksimacije $G_n(f)$ i $\widetilde{G}_n(f)$ za $S_{10}(f)$ i $f(x) = x/(x^2 + 1/4)$

Može se primetiti da u početku, za $n \leq 25$, vrednost $\widetilde{G}_n = G_n + R$ daje bolju aproksimaciju integrala S_{10}. Ovo možemo u potpunosti shvatiti ako posmatramo raspodelu nula polinoma ortogonalnih u odnosu na w. Ova raspodela je prikazana na slici 2.1, pri čemu λ označava tačku i/2. Slika prikazuje raspodelu nula polinoma. Za zadato n, nule polinoma se nalaze na lukovima koji povezuju tačke ± 1. Na slici su date nule polinoma za $n = 10(10)70$.



Slika 2.1: Distribucija nula polinoma orthogonalnih u odnosu na težinu $w(x) = x\exp(\mathrm{i}10\pi x)\chi_{[-1,1]}$.

Sa slike vidimo da dok god se tačka i/2 nalazi unutar konveksne ljuske nula polinoma, vrednost $\widetilde{G}_n$ je bolja aproksimacija za S_{10} od vrednosti G_n.

Glava 3

Generalisane Gaussove kvadrature

3.1 Definisanje problema

U ovoj glavi, naše glavno interesovanje je usmereno na generalisane Gaussove kvadraturne formule. Razlikovaćemo dva koncepta generalizacije Gaussovih kvadraturnih formula.

Kod prvog tipa generalisanih Gaussovih kvadraturnih formula rešavamo sledeći problem. Neka je $\mathcal{A}^h$, $h > 0$, familija linearnih bijekcija (izomorfizama) na linearnom prostoru $(\mathcal{P}, \mathbb{C})$ svih algebarskih polinoma, takva da ne menja stepen polinoma, tj. ako je $\deg(p) = n$, onda je i $\deg(\mathcal{A}^h p) = n$, $n \in \mathbb{N}$, i da važi $\lim_{h\to 0^+} \mathcal{A}^h p = p$. Za zadatu familiju $\mathcal{A}^h$ i nenegativnu meru σ, sa realnim nosačem, naći težine σ_k i čvorove x_k, $k = 1\ldots, n$, interpolacione kvadraturne formule

$$\int p(x)\mathrm{d}\sigma(x) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(\mathcal{A}^h p)(x_k),$$

takve da je formula tačna za svako $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$, tj. da ima maksimalni algebarski stepen tačnosti.

U specijalnom slučaju, kada je

$$(\mathcal{A}^h p)(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} p(t)\mathrm{d}t, \tag{3.1}$$

problem je prvi put razmatran u [84]. U mnogo opštijem obliku, problem je razmatran u [63].

Tipične familije operatora, pored već pomenutog integralnog operatora, koje zadovoljavaju pomenute osobine su familije

$$\mathcal{A}^h p = \sum_{k=-m}^{m} a_k p(\cdot + kh), \quad \mathcal{A}^h p = \sum_{k=-m}^{m-1} a_k p(\cdot + (k+1/2)h), \quad \mathcal{A}^h p = \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k h^k}{k!}\mathcal{D}^k p, \tag{3.2}$$

gde je m fiksni prirodan broj, a koeficijenti a i b su konstante. Sa $\mathcal{D}$ označavamo operator difereneciranja, tj.

$$\mathcal{D}p = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \quad \mathcal{D}^k p = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{k-1}p), \quad \mathcal{D}^0 p = p.$$

Primetimo da prva dva operatora pod izvesnim uslovima za koeficijente a_k mogu da budu shvaćena i kao aproksimacija integrala oblika

$$\int p(x+t)\mathrm{d}\mu(t) \approx \sum_{k=-m}^{m} a_k p(x+kh),$$

tako da na izvestan način predstavljaju integralne operatore ovog oblika, pri čemu su oni zamenjeni odgovarajućim interpolacionim kvadraturnim formulama (tačnije rečeno Newtonovim interpolacionim kvadraturnim fomulama (videti [46])). Treća formula može se shvatiti kao poseban slučaj kvadraturne formule sa višestrukim čvorovima koje su razmatrane, na primer, u sledećim radovima [68], [27], [69], [70], [71], [72], [73].

Inspiracija za ovakve kadraturne formule dolazi iz obrade signala. Naime, ukoliko signal prolazi kroz linearni digitalni filter, signal na izlazu je oblika (videti [89])

$$\sum_{k=-m}^{m} a_k p(x+kh).$$

Ukoliko želimo da izračunamo integral funkcije p, a ne želimo da pojačavamo šum izračunavanjem vrednosti funkcije ili su nam vrednosti funkcije nepoznate u pojedinim tačkama, možemo primeniti pomenute kvadraturne formule na izračunavanje integrala funkcije p u odnosu na meru σ.

Osnovno pitanje kojim se bavimo je, naravno, vezano za karakterizaciju pod kojim uslovima čvorovi kvadraturne formule zadovoljavaju

$$x_k \in \mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma)), \quad k = 1, \ldots, n,$$

a zatim kako numerički stabilno konstruisati kvadraturne formule ovog tipa i slično. Pitanja egzistencije razmatramo u sekciji 3.2.

Kod drugog tipa generalisanih Gaussovih kvadraturnih formula rešavamo sledeći problem. Za zadate nenegativne realne brojeve $h_1, \ldots, h_n$, sa osobinom $\sum_{k=1}^{n} h_k \le 1$, naći čvorove $x_1, \ldots, x_n$, takve da je interpolaciona formula

$$\int p(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{2h_k} \int_{x_k-h_k}^{x_k+h_k} p(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

tačna za $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$. Ukoliko kvadraturna formula ovog tipa postoji kažemo da je Gaussovog tipa jer čvorovi kvadraturne formule $x_1, \ldots, x_n$, nisu slobodni već izabrani tako da formula ima maksimalni algebraski stepen tačnosti.

U vezi sa ovim tipom formula razmatraćemo pitanja egzistencije i jedinstvenosti kvadraturnih formula, analizu mera μ za koju kvadraturna formula postoji, i slično.

Inspiracija za kvadraturne formule ovog tipa je direktna (videti [84], [8]). Naime, u bilo kojem merenju koje izvodimo u eksperimentalnim naukama ne možemo da izmerimo neku veličinu u datom i tačno određenom trenutku vremena, već su rezultati merenja uvek daju veličine koje su usrednjene vrednosti veličine koja se meri na nekom intervalu vremena, kraćem ili dužem, zavisno od kvaliteta merne opreme i metode merenja.

3.2 Generalisane Gaussove kvadrature tipa I

Sa H označavamo podskup pozitivnih realnih brojeva za koji postoji $\varepsilon > 0$, tako da važi $[0, \varepsilon) \subset H$. U daljem tekstu podrazumevamo da $h \in H$, gde H sadrži desnu okolinu broja nula, tako da to ne ističemo eksplicitno.

Mi se u daljem bavimo familijama izomorfizama $\mathcal{A}^h : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}$, $h \in H$, koje pri preslikavanju čuvaju stepen polinoma. Za svaki operator $\mathcal{A}^h$ iz familije ako $\deg(p) = n$, onda $\deg(\mathcal{A}^h p) = n$. Vrednost operatora $\mathcal{A}^h$ u nekom polinomu $p = \sum_{k \le n} p_k x^k$ možemo shvatiti na sledeći način

$$(\mathcal{A}^h p)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(h) x^k, \quad h \in H.$$

Drugim rečima, slika polinoma p pomoću familije operatora $\mathcal{A}^h$ je familija polinoma istog stepena čiji koeficijenti zavise od h. Ako pretpostavimo da su koeficijenti $p_k(h)$ neprekidne funkcije od h u tački 0, možemo odrediti graničnu vrednost

$$\lim_{h \to 0^+} (\mathcal{A}^h p)(x) = \lim_{h \to 0^+} \sum_{k=0}^{n} p_k(h) x^k = \sum_{k=0}^{n} p_k(0) x^k.$$

Pod uslovom $p_k(0) = p_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, možemo pisati

$$\lim_{h \to 0^+} (\mathcal{A}^h p)(x) = p(x).$$

Specijalni slučaj izomorfizma koji čuva stepen polinoma je identički operator $\mathcal{I}$.

Definicija 3.1 Familija izomrfizama $\mathcal{A}^h$, $h \in H$, koja čuva stepen polinoma i za koju važi $\mathcal{A}^0 = \mathcal{I}$ je neprekidna u tački 0 ako i samo ako za svaki polinom $p \in \mathcal{P}$ važi

$$\lim_{h \to 0^+} (\mathcal{A}^h p)(x) = p(x)$$

i prosto pišemo

$$\lim_{h \to 0^+} \mathcal{A}^h p = p, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Mi se u daljem tekstu bavimo isključivo familijama operatora koji zadovoljavaju sledeću definiciju.

Definicija 3.2 Sa $\mathcal{A}^h$, $h \in H$, označavamo familiju izomorfizama na linearnom prostoru svih algebarskih polinoma

$$\mathcal{A}^h : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}, \quad h \in H,$$

podrazumevajući pritom da je familija takva da svaki izomorfizam čuva stepen polinoma, tj.

$$\deg(p) = n \Rightarrow \deg(\mathcal{A}^h p) = n, \quad p \in \mathcal{P},$$

i

$$\lim_{h \to 0^+} \mathcal{A}^h p = p, \quad p \in \mathcal{P},$$

u smislu definicije 3.1.

Generalisanu Gaussovu kvadraturnu formula tipa I definišemo na sledeći način.

Definicija 3.3 Za zadati operator $\mathcal{A}^h$, koji je element neke familije $\mathcal{A}^h$, $h \in H$, koja zadovoljava uslove definicije 3.2, i nenegativnu meru σ sa realnim nosačem, interpolacionu kvadraturnu formulu

$$\int p(x) \mathrm{d}\sigma(x) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k (\mathcal{A}^h p)(x_k), \tag{3.3}$$

zovemo generalisana Gaussova kvadraturna formula tipa I, ako je tačna za svako $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$ i ako čvorovi zadovoljavaju uslov $x_k \in \mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$, $k = 1, \ldots, n$.

Generalisanu Gaussovu kvadraturnu formulu tipa I kraće zovemo i generalisana Gaussova kvadraturna formula ili samo kvadraturna formula, ako nema opasnosti od zabune.

Kako za sve rezultate koje dalje iznosimo podrazumevamo neku vrednost $h \in H$, u daljem tekstu za pojedine elemente familije koristićemo prosto oznaku $\mathcal{A}$, kada se podrazumeva h sa kojim radimo. Ukoliko može doći do zabune označićemo eksplicitno o kojem h se radi.

Pomenimo i to da inverzni operator $(\mathcal{A}^h)^{-1}$ postoji za svaki element familije $\mathcal{A}^h$ jer podrazumevamo da su elementi familije izomorfizmi prema definiciji 3.2.

Definicija 3.4 Sa $(\mathcal{A}^h)^{-1}$ ili prosto $\mathcal{A}^{-1}$, kada podrazumevamo h, označavamo inverzni operator operatora $\mathcal{A}^h$ ili prosto $\mathcal{A}$, kada se h podrazumeva.

Teorema 3.1 *Ako familija operatora $\mathcal{A}^h$, $h \in H$, zadovoljva uslove definicije* 3.2, *onda familija inverznih operatora $(\mathcal{A}^h)^{-1}$, takođe, zadovoljava uslove definicije* 3.2.

Dokaz.- Kako je operator $\mathcal{A}^h$ izomorfizam, onda postoji inverzni operator $(\mathcal{A}^h)^{-1}$ i ovaj operator je, takođe, izomorfizam (videti [38, str. 9], [91, str. 21]).

Kako $\mathcal{A}^h$ čuva stepen polinoma pri preslikavanju, operator $(\mathcal{A}^h)^{-1}$ ima istu osobinu što se neposredno proverava. Na osnovu definicije 3.2, imamo

$$\deg(p) = n \Rightarrow \deg(\mathcal{A}^h p) = n,$$

i postoji $q \in \mathcal{P}$, $\deg(q) = n$, tako da važi

$$\mathcal{A}^h p = q \Rightarrow (\mathcal{A}^h)^{-1} q = p \Rightarrow \deg((\mathcal{A}^h)^{-1} q) = \deg(p) = n.$$

Potrebno je još dokazati da je famiija $(\mathcal{A}^h)^{-1}$, $h \in H$, neprekidna u smilsu definicije 3.1. Zbog $\mathcal{A}^0 = \mathcal{I}$, imamo očigledno $(\mathcal{A}^0)^{-1} = \mathcal{I}$. Kako je operator $\mathcal{A}^h$ linearan, potrebno je samo poznavati vrednosti operatora $\mathcal{A}^h$ na nekoj bazi prostora $\mathcal{P}$. Uvedimo sledeće oznake

$$(\mathcal{A}^h x^n)(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^n(h) t^k, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.4}$$

Primenjujući inverzni operator dobijamo

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^n(h)((\mathcal{A}^h)^{-1}t^k)(x), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.5}$$

Zbog jednostavnijeg izražavanja rezultata, uvodimo još dodatno $\alpha_k^n(h) = 0$, $h \in H$, $k > n$. Zbog uslova o očuvanju stepena i neprekidnosti familije $\mathcal{A}^h$, $h \in H$, primetimo da važi

$$\alpha_n^n(h) \neq 0, \quad h \in H, \quad \lim_{h \to 0^+} \alpha_k^n(h) = \delta_{k,n}, \quad k, n \in \mathbb{N}_0.$$

Zaključujemo da trougaoni sistem jednačina (3.5) ima jedinstveno rešenje za svako $n \in \mathbb{N}_0$ jer determinanta sistema iznosi $\prod_{k=0}^{n} \alpha_k^k(h) \neq 0$, s obzirom da je matrica sistema trougaona (videti [65, str. 238,240]). Tako, u opštem slučaju, imamo rešenje

$$((\mathcal{A}^h)^{-1}t^k)(x) = \sum_{n=0}^{k} \beta_n^k(h)x^n, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Zbog lakšeg izražavanja rezultata, takođe, koristimo konvenciju $\beta_n^k(h) = 0$, $k > n$, $h \in H$.

Za zadato $n \in \mathbb{N}_0$, sistem jednačina (3.5) može se rešiti upotrebom Cramerovih formula (videti [65, str. 240,241]), tako da su $\beta_n^k(h)$, $k, n \in \mathbb{N}_0$, racionalne funkcije od $\alpha_k^n(h)$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, pri čemu u imeniocu imamo $\prod_{k=0}^{n} \alpha_k^k(h) \neq 0$. Kako su $\alpha_k^n(h)$, $k, n \in \mathbb{N}_0$, neprekidne funkcije u $h = 0$, to su i funkcije $\beta_n^k(h)$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, neprekidne u $h = 0$.

Primenom granične vrednosti na

$$t^k = \sum_{n=0}^{k} \beta_n^k(h)(\mathcal{A}^h x^n)(t), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

dobijamo

$$t^k = \sum_{n=0}^{k} t^n \lim_{h \to 0^+} \beta_n^k(h), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

odakle direktno zaključujemo

$$\lim_{h \to 0^+} \beta_n^k(h) = \delta_{n,k}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0.$$

Drugim rečima, $\lim_{h \to 0^+}((\mathcal{A}^h)^{-1}t^k)(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, i zbog linearnosti

$$\lim_{h \to 0^+} (\mathcal{A}^h)^{-1}p = p, \quad p \in \mathcal{P}. \quad \square$$

Lema 3.1 *Funkcije $\alpha_k^n(h)$ i $\beta_n^k(h)$ zadovoljavaju sledeći sistem linearnih jednačina*

$$\sum_{\nu=k}^{n} \alpha_\nu^n(h)\beta_k^\nu(h) = \delta_{n,k}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0.$$

Dokaz.- Ako na

$$(\mathcal{A}^h x^n)(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu^n(h) t^\nu,$$

primenimo inverzni operator, dobijamo

$$x^n = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu^n(h) \sum_{k=0}^{\nu} \beta_k^\nu(h) x^k = \sum_{k=0}^{n} x^\nu \sum_{\nu=k}^{n} \alpha_\nu^n(h) \beta_k^\nu(h),$$

odakle neposredno sleduje tvrđenje leme. $\square$

3.2.1 Egzistencija i jedinstvenost generalisanih Gaussovih kvadratura tipa I

U ovom odeljku dajemo dokaz glavnog rezultata iz [63], koji se odnosi na egzistenciju kvadraturnih formula (3.3). Najpre, ipak moramo da uvedemo izvesne definicije.

Za zadatu pozitivnu meru σ, sa nosačem na nekom podskupu realne prave, i zadatu familiju operatora $\mathcal{A}^h$, $h \in H$, koja verifikuje definiciju 3.2, definišimo

$$\mathcal{L}^h(p) = \int d\sigma(x)((\mathcal{A}^h)^{-1}p)(x), \quad p \in \mathcal{P}. \tag{3.6}$$

Očigledno dobijamo familiju funkcionala $\mathcal{L}^h$.

Lema 3.2 *Svaki funkcional $\mathcal{L}^h$, $h \in H$, je linearni funkcional.*

Dokaz.- Direktno izračunavanje. $\square$

Koristeći definiciju 1.4, znamo da možemo definisati skalarni proizvod u odnosu na funkcional $\mathcal{L}$.

Definicija 3.5 Sa $\langle \cdot, \cdot \rangle^h$, označimo preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle^h : \mathcal{P}^2 \mapsto \mathbb{C}$, dato sa

$$\langle p, q \rangle^h = \mathcal{L}^h(pq) = \int d\sigma(x)((\mathcal{A}^h)^{-1}pq)(x). \tag{3.7}$$

Lema 3.3 *Funkcional $\langle \cdot, \cdot \rangle^h$ ima sledeće osobine*

$$\langle \alpha p + \beta q, r \rangle^h = \alpha \langle p, r \rangle^h + \beta \langle q, r \rangle^h, \quad \langle p, q \rangle^h = \langle q, p \rangle^h, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \ p, q, r \in \mathcal{P}.$$

Dokaz.- Diretno izračunavanje. $\square$

U daljem tekstu želimo da konstruišemo polinome ortogonalne u odnosu na linearni funkcional $\mathcal{L}^h$, $h \in H$. Pokazaćemo da je za h dovoljno blisko nuli, funkcional $\mathcal{L}^h$ regularan na nekom prostoru $(\mathcal{P}_{2n}, \mathbb{C})$.

U specijalnom slučaju, kada familija $\mathcal{A}^h$ slika polinome sa realnim koeficijentima u polinome sa realnim koeficijentima, tj. kada koeficijenti polinoma izraženi kao funkcije od h predstavljaju realne funkcije, familija funkcionala $\mathcal{L}^h$, $h \in O(0)$, postaje pozitivno definitna, gde je $O(0)$ neka desna okolina broja 0. Primetimo da je uslov da familija $\mathcal{A}^h$, $h \in H$, slika realne polinome u realne polinome, zbog leme 3.1, ekvivalentan uslovu da familija $(\mathcal{A}^h)^{-1}$, $h \in H$, slika polinome sa realnim koeficijentima u polinome sa realnim koeficijentima.

Lema 3.4 *Pod uslovom da familija* $(\mathcal{A}^h)^{-1}$ *slika polinome sa realnim koeficijentima u polinome sa realnim koeficijentima, za svako* $n \in \mathbb{N}$ *postoji* $\varepsilon > 0$*, tako da je svaki linearni funkcional* $\mathcal{L}^h$ *iz familije funkcionala* $\mathcal{L}^h$*,* $h \in [0, \varepsilon)$*, pozitivno definitan na linearnom prostoru* $(\mathcal{P}_{2n}, \mathbb{R})$*. Niz ortogonalnih polinoma* π_k^h*,* $k = 0, 1, \ldots, n$*, postoji u odnosu na* $\mathcal{L}^h$*,* $h \in [0, \varepsilon)$*.*

Dokaz.- Pođimo od slika elemenata x^ν, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, pomoću operatora $(\mathcal{A}^h)^{-1}$, tj.

$$((\mathcal{A}^h)^{-1} x^\nu)(t) = \sum_{k=0}^{\nu} \beta_k^\nu(h) t^k, \quad \nu = 0, 1, \ldots, 2n,$$

gde su funkcije $\beta_k^\nu(h)$, $k = 0, 1, \ldots, \nu$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, sa osobinom

$$\lim_{h \to 0^+} \beta_k^\nu(h) = \delta_{k,\nu},$$

što je posledica neprekidnosti u tački $h = 0$. Onda su momenti linearnog funkcionala $\mathcal{L}^h$, dati sledećim izrazima

$$m_\nu(h) = \mathcal{L}^h(t^\nu) \int \mathrm{d}\sigma(x)((\mathcal{A}^h)^{-1} t^\nu)(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \beta_k^\nu(h) m_k, \quad \nu = 0, 1, \ldots, 2n,$$

gde su m_k, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, momenti mere σ. Funkcije $m_\nu(h)$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, su neprekidne funkcije od h u $h = 0$ i pritom važi

$$\lim_{h \to 0^+} m_\nu(h) = m_\nu, \quad \nu = 0, 1, \ldots, 2n.$$

Na osnovu teoreme 1.6, linearni funkcional $\mathcal{L}^h$ je pozitivno definitan na $(\mathcal{P}_{2n}, \mathbb{R})$ ako su momenti realni i ako su odgovarajuće Hankelove determinate $\Delta_k(h)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, pozitivne.

Neka su

$$\Delta_k(h) = \begin{vmatrix} m_0(h) & m_1(h) & m_2(h) & \ldots & m_k(h) \\ m_1(h) & m_2(h) & m_3(h) & \ldots & m_{k+1}(h) \\ m_2(h) & m_3(h) & m_4(h) & \ldots & m_{k+2}(h) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_k(h) & m_{k+1}(h) & m_{k+2}(h) & \ldots & m_{2k}(h) \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

odgovarajuće Hankelove detrminante.

Za $h = 0$ sve determinante $\Delta_k(0)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, su pozitivne jer je mera σ pozitivna pa je odgovarajući linearni funkcional $\mathcal{L}^0$ pozitivno definitan (videti teoremu 1.4). Determinante $\Delta_k(h)$, $k = 1, \ldots, n+1$ su neprekidne funkcije od h u $h = 0$ i zato postoje redom ε_k takvi da važi $\Delta_k(h) > 0$ za $h \in [0, \varepsilon_k)$, $k = 1, \ldots, n+1$.

Onda skup $[0, \varepsilon)$ iz tvrđenja teoreme možemo identifikovati kao

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} [0, \varepsilon_k) = [0, \varepsilon).$$

Kako je funkcional $\mathcal{L}^h$, $h \in [0, \varepsilon)$ pozitivno definitan na $(\mathcal{P}_{2n}, \mathbb{R})$, zaključujemo, na osnovu teoreme 1.6, da niz ortogonalnih polinoma π_k^h, $k = 0, 1, \ldots, n$, postoji. □

Ovim je dokazana egzistencija početnog dela niza ortogonalnih polinoma, do stepena n, za $h \in [0, \varepsilon)$, za opštu familiju $\mathcal{A}^h$, $h \in H$, koja zadovoljava uslove definicije 3.2. Kasnije ćemo dokazati da se sve nule ovog konačnog niza ortogonalnih polinoma nalaze u $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$.

Jasno je da, za zadatu meru σ i familiju $\mathcal{A}^h$, $h \in H$, ε iz tvrđenja leme zavisi isključivo od n. Dakle, za zadatu meru σ i operator $\mathcal{A}^h$, u opštem slučaju, možemo zaključiti da za takvo $\varepsilon = \varepsilon(n)$ imamo

$$n_1 > n_2 \Rightarrow [0, \varepsilon(n_2)) \subseteq [0, \varepsilon(n_1)).$$

Drugim rečima, možemo očekivati da je ε nerastuća funkcija od n. Pomenimo da postoje slučajevi kod kojih je $\varepsilon(n) = +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Na primer, za familiju zadatu sa

$$(\mathcal{A}^h p)(x) = p(x + h/2) - 2p(x - h/2), \quad p \in \mathcal{P},$$

imamo $\varepsilon(n) = +\infty$[1], kao što je razjašnjeno u teoremi 3.13.

Za slučaj da familija $\mathcal{A}$ ne slika realne polinome na realne polinome, imamo sledeće tvrđenje.

Lema 3.5 *Za svako $n \in \mathbb{N}$, postoji $\varepsilon > 0$ tako da je linearni funkcional $\mathcal{L}^h$, definisan pomoću* (3.6)*, regularan na prostoru $(\mathcal{P}_{2n}, \mathbb{C})$. Niz polinoma π_k^h, $k = 0, 1, \ldots, n$, ortogonalnih u odnosu na $\mathcal{L}^h$, $h \in [0, \varepsilon)$, postoji.*

Dokaz.- Kao i u dokazu prethodne leme, polazimo od momenata linearnog funkcionala $\mathcal{L}^h$,

$$m_\nu(h) = \mathcal{L}^h(t^\nu) = \int \mathrm{d}\sigma(x)((\mathcal{A}^h)^{-1} t^\nu)(x), \quad \nu = 0, 1, \ldots, 2n,$$

a zatim formiramo Hankelove determinante

$$\Delta_k(h) = \begin{vmatrix} m_0(h) & m_1(h) & m_2(h) & \ldots & m_k(h) \\ m_1(h) & m_2(h) & m_3(h) & \ldots & m_{k+1}(h) \\ m_2(h) & m_3(h) & m_4(h) & \ldots & m_{k+2}(h) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_k(h) & m_{k+1}(h) & m_{k+2}(h) & \ldots & m_{2k}(h) \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Zbog $m_\nu(0) = m_\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2n$, gde su m_ν momenti nenegativne mere σ, jasno je da su determinante $\Delta_k(0)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, pozitivne. Zato postoje redom intervali $[0, \varepsilon_k)$, $k = 1, \ldots, n$, takvi da su determinante $\Delta_k(h)$, $k = 1, \ldots, n$, sa pozitivnim realnim delom. Interval iz tvrđenja leme možemo identifikovati kao

$$[0, \varepsilon) = \bigcap_{k=1}^{n} [0, \varepsilon_n).$$

[1] O ovom i drugim familijama izomorfizama koje zadovoljavaju slične osobine više reči biće u sledećoj sekciji.

Na osnovu teoreme 1.2, zaključujemo da niz ortogonalnih polinoma postoji. □

U cilju da konstruišemo Gaussove kvadraturne formule oblika (3.3), neophodno je rešiti odgovarajući interpolacioni problem.

Za bilo koji skup različitih realnih brojeva x_k, $k = 1, \dots, n$, i svaki operator $\mathcal{A}$ iz familije $\mathcal{A}^h$, $h \in H$, posmatrajmo sledeći interpolacioni problem. Naime, za dva niza brojeva $f_{m,k}$, $m = 0, 1$, $k = 1, \dots, n$, tražimo polinom $P \in \mathcal{P}_{2n-1}$, takav da važi

$$(\mathcal{A}P)(x_k) = f_{0,k}, \quad [(\mathcal{A}P)(x)]'_{x=x_k} = f_{1,k}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{3.8}$$

Lema 3.6 *Interpolacioni problem* (3.8) *ima jedinstveno rešenje* $P \in \mathcal{P}_{2n-1}$.

Dokaz.- Konstruišimo najpre polinome

$$\begin{aligned}
&H(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k), \quad M_k(x) = \frac{H(x)}{(x - x_k)H'(x_k)}, \\
&S_k(x) = (1 - 2M_k'(x_k)(x - x_k))(M_k(x))^2, \quad T_k(x) = (x - x_k)(M_k(x))^2, \\
&U_k(x) = (\mathcal{A}^{-1}S_k)(x), \quad V_k(x) = (\mathcal{A}^{-1}T_k)(x).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Jednostavno, direktnim izračunavanjem, možemo dokazati da važe sledeće jednakosti

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{A}U_k)(x_\nu) = S_k(x_\nu) = \delta_{k,\nu}, \quad [(\mathcal{A}U_k)]'_{x=x_\nu} = S_k'(x_\nu) = 0, \\
&(\mathcal{A}V_k)(x_\nu) = T_k(x_\nu) = 0, \quad [(\mathcal{A}V_k)(x)]'_{x=x_\nu} = T_k'(x_\nu) = \delta_{k,\nu},
\end{aligned}$$

$k, \nu = 1, \dots, n$, tako da polinom P iz tvrđenja leme, možemo da identifikujemo kao

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[f_{0,k}U_k(x) + f_{1,k}V_k(x)\right].$$

Ostaje da dokažemo da je P jedinstven u linearnom prostoru $\mathcal{P}_{2n-1}$. Ako pretpostavimo da nije, onda homogeni problem ima bar dva rešenja jer ako kvadratni sistem ima nejedinstveno rešenje, onda odgovarajući homogeni sistem, takođe, ima više rešenja (videti [65, str. 279]). Jedno rešenje nehomogenog sistema koje je sadržano u $\mathcal{P}_{2n-1}$ je trivijalno rešenje. Zato pretpostavljamo da imamo i netrivijalno rešenje. Onda, očigledno,

$$(\mathcal{A}P)(x_k) = 0, \quad \text{i} \quad [(\mathcal{A}P)(x)]'_{x=x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

tj. polinom $\mathcal{A}P$ u svakom x_k, $k = 1, \dots, n$, ima nulu drugog reda, što znači da on ukupno ima $2n$ nula. S obzirom da $\mathcal{A}$ čuva stepen polinoma (videti definiciju 3.2), jasno je da i polinom P ima $2n$ nula, što je kontradikcija. □

Kako je skalarni proizvod pozitivno definitan na prostoru $(\mathcal{P}_{2n}, \mathbb{R})$, pod uslovom da su inverzne slike realnih polinoma realni polinomi, imamo sledeću teoremu.

Teorema 3.2 *Neka je funkcional* $\mathcal{L}^h$ *definisan u* (3.6). *Za svaku pozitivnu meru* σ *sa realnim nosačem, svaku familiju izomorfizama* $\mathcal{A}^h$, $h \in H$, *koja zadovoljva uslove definicije* 3.2 *kod koje je inverzna slika realnih polinoma skup realnih polinoma, i svako* $n \in \mathbb{N}$

(i) *postoji* $\varepsilon > 0$ *tako da, za svako* $h \in [0, \varepsilon)$, *polinom* p_n^h, *ortogonalan u odnosu na* $\mathcal{L}^h$, *ima tačno* n *različitih nula u unutrašnjosti* $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$,

(ii) *postoji* $\varepsilon > 0$ *tako da, za svako* $h \in [0, \varepsilon)$, *kvadraturna formula* (3.3) *postoji, gde su čvorovi formule* x_k, $k = 1, \ldots, n$, *nule polinoma* p_n^h, *a težinski koeficijenti dati pomoću*

$$\sigma_k = \int U_k(x) \mathrm{d}\sigma(x) > 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.10}$$

gde su polinomi U_k, $k = 1, \ldots, n$, *definisani u* (3.9).

Dokaz.- S obzirom da niz ortogonalnih polinoma postoji do stepena n, zbog pozitivne definitnosti linearnog funkcionala $\mathcal{L}^h$ (3.6) na prosotoru $(\mathcal{P}_{2n}, \mathbb{R})$, zaključujemo da monični ortogonalni polinom π_n^h može da se predstavi na sledeći način (videti [12, str. 17], [46, str. 97])

$$\pi_n^h(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}(h)} \begin{vmatrix} m_0(h) & m_1(h) & m_2(h) & \ldots & m_n(h) \\ m_1(h) & m_2(h) & m_3(h) & \ldots & m_{n+1}(h) \\ m_2(h) & m_3(h) & m_4(h) & \ldots & m_{n+2}(h) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \end{vmatrix},$$

odakle sleduje da su koeficijenti polinoma $\pi_n^h(x) = \sum_{k=0}^n p_k(h) x^k$ neprekidne funkcije u $h = 0$. Njegove nule su tada, takođe, neprekidne funkcije u $h = 0$ (videti [67, str. 177]). Kako su sve nule polinoma π_n^0 za $h = 0$ sadržane u $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$ (videti [42], [95, str. 4]), znači da možemo naći otvorenu okolinu broja 0, tj. $[0, \varepsilon)$, tako da su i sve nule polinoma π_n^h za $h \in [0, \varepsilon)$ unutar $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$. Argument je kao u i prethodnim dokazima.

Za dokaz drugog dela teoreme, fiksirajmo n i $\varepsilon > 0$, tako da se nule polinoma π_n^h nalaze unutar $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$. Izaberimo neki polinom $P \in \mathcal{P}_{2n-1}$. Na osnovu leme 3.6, imamo jedinstveno

$$P(x) = \sum_{k=1}^n f_{0,k} U_k(x) + f_{1,k} V_k(x), \;\; f_{0,k} = (\mathcal{A}^h P)(x_k), \quad f_{1,k} = [(\mathcal{A}^h P)(x)]'_{x = x_k}, \tag{3.11}$$

gde su x_k, $k = 1, \ldots, n$, nule polinoma π_n^h. Korišćenjem definicije za V_k iz (3.9), imamo

$$\int V_k(x) \mathrm{d}\sigma(x) = \int \mathrm{d}\sigma(x) ((\mathcal{A}^h)^{-1} T_k)(x) = \langle T_k, 1 \rangle^h = \frac{1}{(\pi_n^h)'(x_k)} \langle \pi_n^h, M_k \rangle^h = 0,$$

za $k = 1, \ldots, n$, s obzirom da je $\deg(M_k) = n - 1$, $k = 1, \ldots, n$, a polinom π_n^h je član niza ortogonalnih polinoma u odnosu na skalarni proizvod (3.7).

Ako integralimo jednačinu (3.11), dobijamo

$$\int P(x) \mathrm{d}\sigma(x) = \sum_{k=1}^n \left[f_{0,k} \int U_k(x) \mathrm{d}\sigma(x) + f_{1,k} \int V_k(x) \mathrm{d}\sigma(x) \right] = \sum_{k=1}^n \sigma_k (\mathcal{A}^h P)(x_k).$$

Drugim rečima, kvadraturna formula (3.3) je tačna u prostoru $\mathcal{P}_{2n-1}$ i težine su date sa (3.10). Dokaz da su težinski koeficijenti pozitivni može se dati na sledeći način

$$\begin{aligned}\sigma_k &= \int \mathrm{d}\sigma(x)((\mathcal{A}^h)^{-1}S_k)(x) = \int \mathrm{d}\sigma(x)((\mathcal{A}^h)^{-1}(M_k)^2)(x) \\ &\qquad -\frac{2M_k'(x_k)}{(\pi_n^h)'(x_k)}\int \mathrm{d}\sigma(x)((\mathcal{A}^h)^{-1}\pi_n^h M_k)(x) \\ &= \langle M_k, M_k\rangle^h - \frac{2M_k'(x_k)}{(\pi_n^h)'(x_k)}\langle \pi_n^h, M_k\rangle^h = \langle M_k, M_k\rangle^h = \mathcal{L}^h(M_k^2) > 0,\end{aligned}$$

s obzirom da smo dokazali da je linearni funkcional $\mathcal{L}^h$ pozitivno definitan na $(\mathcal{P}_{2n}, \mathbb{R})$ (videti lemu 3.4). Primetimo, takođe, da je $\langle \pi_n^h, M_k\rangle^h = 0$, zbog ortogonalnosti π_n^h na $\mathcal{P}_{n-1}$. $\square$

Na osnovu ove teoreme, možemo da tvrdimo da ukoliko kvadraturna formula (3.3) postoji, onda ona postoji jedinstveno jer su nule ortogonalnog polinoma π_n^h jedinstvene.

Teorema 3.3 *Za svaku pozitivnu meru σ sa realnim nosačem i proizvoljnu familiju izomorfizama $\mathcal{A}^h$, $h \in H$, definisanu u* (3.2)*, i takvu da je inverzna slika realnih polinoma skup relanih polinoma, generalisana Gaussova formula tipa I, data sa* (3.3)*, je jedinstvena pod uslovom da postoji.*

Za familije $\mathcal{A}^h$, $h \in H$, kod kojih inverzna slika realnih polinoma nisu realni polinomi, ne možemo tvrditi da generalisana Gaussova kvadraturna formula tipa I, (3.3), postoji u opštem slučaju. Iako polinom π_n^h postoji za $h \in [0, \varepsilon)$, on ne pripada nizu polinoma ortogonalnih u odnosu na pozitivno definitni linearni funkcional i zato ne možemo tvrditi da se nule π_n^h nalaze u $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$. Naravno, smanjenjem h možemo postići da su nule polinoma π_n^h proizvoljno blizu skupa $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$. Sa sigurnošću možemo tvrditi da su nule polinoma π_n^h i u ovom slučaju proste, pod uslovom da je h dovoljno malo. Dakle, može se tvrditi (jedinstvena) egzistencija generalisane Gaussove kvadraturne formule pod uslovom da odustanemo od zahteva da su čvorovi unutar skupa $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$. Za ovaj slučaj možemo tvrditi da formula (jedinstveno) postoji u slabom smislu.

Odavde, direktno možemo dati algoritam koji konstruiše generalisane Gaussove kvadraturne formule tipa I. Dovoljno je poznavati koeficijente tročlane relacije niza ortogonalnih polinoma π_n^h, onda koristeći QR-algoritam (videti [23], [22, str. 152], [28], [46, str. 328], [29]), možemo odrediti čvorove x_k, $k = 1, \ldots, n$. Pomoću jednakosti (3.10) možemo, ako poznajemo čvorove, odrediti i težinske koeficijente σ_k, $k = 1, \ldots, n$, koristeći Gaussovu kvadraturnu formulu za meru σ. Problem je jedino poznavanje koeficijenata tročlane rekurentne relacije za niz polinoma ortogonalan u odnosu na $\mathcal{L}^h$. U daljem tekstu, bavićemo se ovim problemom.

Napomenimo samo da je u [84] pokazano da za familiju (3.1), koeficijenti tročlane rekurentne relacije polinoma ortogonalnih u odnosu na skalarni proizvod (3.7), sa merom $\mathrm{d}\sigma(x) = \chi_{[-1,1]}(x)\mathrm{d}x$, imaju sledeće vrednosti

$$\alpha_k = 0, \quad \beta_k = \frac{(1-h^2k^2)k^2}{4k^2-1}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.12}$$

koje se za $h = 0$ svode na odgovarajuće rekurzivne koeficijente standardnih moničnih Legendreovih polinoma.

3.2.2 Reprezentacija $(\mathcal{A}^h)^{-1}$

U opštem slučaju, delovanje operatora $\mathcal{A}^{-1}$ možemo u potpunosti da izrazimo poznavajući dejstvo $\mathcal{A}$.

Pretpostavimo da nam je dat linearni operator $\mathcal{A} : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}$. S obzirom na linearnost operatora $\mathcal{A}^{-1}$, na osnovu momenata za operator $\mathcal{A}$,

$$(\mathcal{A}t^\nu)(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k x^k, \quad \nu \in \mathbb{N}_0,$$

koje možemo izračunati, momente inverznog operatora $\mathcal{A}^{-1}$ možemo odrediti iz sledećeg trougaonog sistema linearnih jednačina

$$t^\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k (\mathcal{A}^{-1} x^k)(t), \quad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Kako operatori koje razmatramo u ovoj glavi čuvaju stepen polinoma pri preslikavanju, prethodni sistem jednačina uvek ima rešenje. Zbog linearnosti, operator $\mathcal{A}^{-1}$ je, na ovaj način, u potpunosti zadat na prostoru polinoma $\mathcal{P}$.

Za specijalnu klasu familije operatora $\mathcal{A}$ postoje i druge mogućnosti reprezentovanja $\mathcal{A}^{-1}$. Prvo dajemo jednu neophodnu definiciju.

Definicija 3.6 Sa $\eta_k(x)$ i $\mu_k(t)$, $k \in \mathbb{N}_0$, označavamo momente operatora $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^{-1}$, respektivno.

Primetimo da je nulti moment operatora $\mathcal{A}$ konstanta, različita od nule, s obzirom da operator $\mathcal{A}$ čuva stepen polinoma pri preslikavanju (videti definiciju 3.2).

Teorema 3.4 *Pretpostavimo da se momenti operatora $\mathcal{A}$ mogu izraziti na sledeći način*

$$\frac{\eta_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{C_{n-k}}{(n-k)!}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.13}$$

gde su C_k, $k \in \mathbb{N}_0$, konstante. Onda važi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\eta_k(x)}{k!} \frac{\mu_{n-k}(t)}{(n-k)!} = \frac{(x+t)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.14}$$

Momenti operatora $\mathcal{A}^{-1}$ su jedinstveno zadati momentima operatora $\mathcal{A}$ i obrnuto.

Dokaz.- Primenom operatora $\mathcal{A}^{-1}$ na pretpostavku dobijamo

$$\frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n-k}}{(n-k)!} \frac{\mu_k(t)}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dalje, imamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{\eta_k(x)}{k!}\frac{\mu_{n-k}(t)}{(n-k)!} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{\mu_{n-k}(t)}{(n-k)!}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{x^\nu}{\nu!}\frac{C_{k-\nu}}{(k-\nu)!}\\ &= \sum_{\nu=0}^{n}\frac{x^\nu}{\nu!}\sum_{k=\nu}^{n}\frac{\mu_{n-k}(t)}{(n-k)!}\frac{C_{k-\nu}}{(k-\nu)!} = \sum_{\nu=0}^{k}\frac{x^\nu}{\nu!}\frac{t^{n-\nu}}{(n-\nu)!} = \frac{(x+t)^n}{n!}.\end{aligned}$$

Da bismo dokazali poslednje tvrđenje u teoremi, dovoljno je razmatrati prethodni sistem jednačina za $n \in \mathbb{N}_0$. Kako vidimo, sistem jednačina je trougaoni. Ako su momenti operatora $\mathcal{A}$ zadati, onda imamo

$$\frac{\mu_n(t)}{n!} = \frac{1}{\eta_0(x)}\left(\frac{(x+t)^n}{n!} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\eta_k(x)}{k!}\frac{\mu_{n-k}(t)}{(n-k)!}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

što, zbog $\eta_0(x) \neq 0$, znači da su momenti operatora $\mathcal{A}^{-1}$ jedinstveno određeni momentima operatora $\mathcal{A}$. Naravno, zbog $(\mathcal{A}^{-1})^{-1} = \mathcal{A}$, imamo da su i momenti operatora $\mathcal{A}$ jedinstveno zadati momentima operatora $\mathcal{A}^{-1}$. $\square$

Formirajmo sada, dve formalne funkcije, generatorske funkcije za momente operatora $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^{-1}$,

$$f_{\mathcal{A}}(u,x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\eta_k(x)}{k!}u^k, \quad f_{\mathcal{A}^{-1}}(u,t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mu_k(t)}{k!}u^k. \tag{3.15}$$

Zato što još uvek ne znamo poluprečnike konvergencije redova u definiciji funkcija $f_{\mathcal{A}}$ i $f_{\mathcal{A}^{-1}}$, formalno možemo tvrditi da su redovi (3.15) konvergentni bar u tački $u = 0$. Takođe, formalno možemo da formiramo Cauchyjev proizvod redova (videti [75, str. 112], [77, str. 24]) koji reprezentuju generatorske funkcije za momente, tj.

$$f_{\mathcal{A}}(u,x)f_{\mathcal{A}^{-1}}(u,t) = \sum_{k=0}^{+\infty}u^k\sum_{\nu=0}^{k}\frac{\eta_\nu(x)}{\nu!}\frac{\mu_{k-\nu}(t)}{(k-\nu)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(u(x+t))^k}{k!} = \exp(u(x+t)).$$

Ovaj rezultat možemo formulisati u obliku sledeće teoreme.

Teorema 3.5 *Neka je $D_{\mathcal{A}} \neq \{0\}$ domen apsolutne konvergencije reda koji reprezentuje generatorsku funkciju momenata $f_{\mathcal{A}}(u,x)$ iz* (3.15)*. Onda red koji reprezentuje generatorsku funkciju $f_{\mathcal{A}^{-1}}(u,t)$ ima domen apsolutne konvergencije $D_{\mathcal{A}^{-1}} \neq \{0\}$ i generatorske funkcije zadovoljavaju sledeću jednakost*

$$f_{\mathcal{A}}(u,x)f_{\mathcal{A}^{-1}}(u,t) = \exp(u(x+t)), \tag{3.16}$$

gde je $u \in D_{\mathcal{A}} \cap D_{\mathcal{A}^{-1}}$, pri čemu skup $D_{\mathcal{A}} \cap D_{\mathcal{A}^{-1}} \neq \{0\}$.

Dokaz.- Definišimo funkciju

$$g(u,t) = \frac{\exp(u(x+t))}{f_{\mathcal{A}}(u,x)},$$

koja je količnik dve analitičke funkcije na $D_{\mathcal{A}}$. Prema tome, funkcija g je meromorfna funkcija po u na $D_{\mathcal{A}}$. Zbog $f_{\mathcal{A}}(0,x) = \eta_0(x) \neq 0$, postoji okolina $D_{\mathcal{A}^{-1}}$ tačke $u = 0$, tako da je funkcija $f_{\mathcal{A}}(u,x) \neq 0$ za $u \in D_{\mathcal{A}^{-1}}$. Ako funkcija $f_{\mathcal{A}}$ ne uzima vrednost 0 na celom $D_{\mathcal{A}}$ onda, naravno, uzimamo $D_{\mathcal{A}} = D_{\mathcal{A}^{-1}}$. Prethodno znači da je funkcija g analitička na $D_{\mathcal{A}^{-1}}$, tj. postoji razvoj u red funkcije g u okolini tačke $u = 0$.

Međutim, onda važi

$$f_{\mathcal{A}}(u,x)g(u,t) = \exp(u(x+t)), \quad u \in D_{\mathcal{A}^{-1}},$$

pri čemu su sve funkcije koje učestvuju u jednakosti analitičke. Razvijemo li funkcije u redove, dobijamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\eta_k(x)}{k!} u^k \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{g_\nu(t)}{\nu!} u^\nu = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x+t)^k}{k!} u^k.$$

Za svako $u \in D_{\mathcal{A}^{-1}}$, imamo da se proizvod redova može dobiti na osnovu Cauchyjevog proizvoda redova za $f_{\mathcal{A}}$ i g (videti [77, str. 24]). Prema tome, za $u \in D_{\mathcal{A}^{-1}}$ važi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u^k \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{\eta_\nu(x)}{\nu!} \frac{g_{k-\nu}(t)}{(k-\nu)!} = \exp(u(x+t)).$$

Pomnožimo sa u^{j+1}, $j \in \mathbb{N}_0$, prethodnu jednakost i izvršimo integraciju po kružnici $\{u \mid |u| = r\} \subset D_{\mathcal{A}^{-1}}$. Na osnovu Cauchyjeve teoreme o ostacima dobijamo

$$\sum_{\nu=0}^{j} \frac{\eta_\nu(x)}{\nu!} \frac{g_{j-\nu}(x)}{(j-\nu)!} = \frac{(x+t)^j}{j!}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Međutim, ovaj sistem jednačina jedinstveno određuje momente operatora $\mathcal{A}^{-1}$, prema teoremi 3.4. Prema tome, $f_{\mathcal{A}^{-1}} = g$ i funkcija $f_{\mathcal{A}^{-1}}$ je analitička na $D_{\mathcal{A}^{-1}}$. Naravno, funkcionalna jednakost važi na $D_{\mathcal{A}} \cap D_{\mathcal{A}^{-1}} \neq \{0\}$. $\square$

Znajući generatorsku funkciju momenata $f_{\mathcal{A}}$ operatora $\mathcal{A}$, možemo odrediti generatorsku funkciju momenata za operator $\mathcal{A}^{-1}$. Za operatore koje ćemo u daljem da razmatramo date sa (3.1) i (3.2), možemo prvo pokazati da imaju osobinu (3.13), a zatim možemo odrediti generatorske funkcije $f_{\mathcal{A}^{-1}}$.

Teorema 3.6 *Operatori dati u* (3.1) *i* (3.2), *verifikuju osobinu* (3.13).

Dokaz.- Direktnim izračunavanjem, za operator dat u (3.1), možemo dobiti sledeći izraz

$$\frac{\eta_k(x)}{k!} = \frac{1}{2k!h} \int_{x-h}^{x+h} t^k \mathrm{d}t = \frac{1}{2h} \frac{(x+h)^{k+1} - (x-h)^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{x^\nu}{\nu!} \frac{C_{k-\nu}}{(k-\nu)!},$$

gde je $C_\nu = \dfrac{(1+(-1)^\nu)}{2(\nu+1)} h^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}_0$.

Za prvi operator dat u (3.2), imamo

$$\frac{\eta_k(x)}{k!} = \sum_{\nu=-m}^{m} a_\nu \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!} \frac{(\nu h)^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!} \frac{C_{k-j}}{(k-j)!},$$

gde je $C_\nu = \sum_{j=-m}^{m} a_j (jh)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}_0$. Slično je i za drugi operator, pri čemu $C_\nu = \sum_{j=-m}^{m-1} a_j((j+1/2)h)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}_0$. Za treći operator u (3.2), imamo

$$\frac{\eta_k(x)}{k!} = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{b_\nu h^\nu}{\nu!} \frac{x^{k-\nu}}{(k-\nu)!} = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{x^\nu}{\nu!} \frac{C_{k-\nu}}{(k-\nu)!},$$

sa $C_\nu = b_\nu h^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Ostale rezultate vezane za operatore (3.2) izražavamo preko karakterističnih polinoma i dajemo njihovu definiciju.

Definicija 3.7 Za operatore definisane sa

$$\mathcal{A}p = \sum_{k=-m}^{m} a_k p(\cdot + kh) \quad \text{i} \quad \mathcal{A}p = \sum_{k=-m}^{m-1} a_k p(\cdot + (k+1/2)h), \tag{3.17}$$

karakteristične polinome definišemo sa

$$Q(z) = \sum_{k=-m}^{m} a_k z^{k+m} \quad \text{i} \quad Q(z) = \sum_{k=-m}^{m-1} a_k z^{k+m}, \tag{3.18}$$

respektivno. Za operator

$$\mathcal{A}p = \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k h^k}{k!} \mathcal{D}^k p, \tag{3.19}$$

karakteristični polinom definišemo sa

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k}{k!} z^k. \tag{3.20}$$

Teorema 3.7 *Familija operatora $\mathcal{A}^h$, u (3.17), verifikuje uslove definicije 3.2 ako i samo ako $Q(1) = 1$. Familija operatora $\mathcal{A}^h$, u (3.19), verifikuje uslove definicije 3.2, ako i samo ako $Q(0) = 1$. Familija operatora $\mathcal{A}^h$, u (3.1), verifikuje uslove definicije 3.2.*

Dokaz.- Ako familija operatora (3.17) zadovoljava uslove definicije 3.2, onda je $\mathcal{A}^0 = \mathcal{I}$. Međutim,

$$p = \mathcal{A}^0 p = \sum_{k=-m}^{m} a_k p(\cdot + k0) = pQ(1), \quad p \in \mathcal{P},$$

pa mora biti $Q(1) = 1$.

Neka je sada $Q(1) = 1$. Prvo dokažimo da se stepen, pri preslikavanju operatorom (3.17), očuvava. Očito je da vodeći koeficijent u polinomu $\mathcal{A}\sum_{k=0}^{n} p_k t^k$, iznosi upravo $p_n Q(1)$. Pod uslovom $Q(1) = 1$, jasno je da se stepen polinoma preslikavanjem čuva.

Ako dva polinoma p_1 i p_2 imaju istu sliku, onda se njihova razlika $p_1 - p_2$ slika u nulu. S obzirom da se stepen polinoma pri preslikavanju čuva, onda je stepen $p_1 - p_2$ jednak 0, a to znači da su ti polinomi jednaki, pa su operatori (3.17) injektivni.

Surjektivnost je direktna posledica činjenice da se stepen polinoma čuva jer je sledeći sistem linearnih jednačina

$$(\mathcal{A}t^\nu)(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k x^k, \quad \nu \in \mathbb{N}_0,$$

trougaoni, pa se može rešiti po x^k, odakle dobijamo polinome čija je slika operatorom $\mathcal{A}$ prirodna baza u $\mathcal{P}$, tj.

$$(\mathcal{A}p_\nu)(x) = x^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Zato je element koji se slika u polinom $\sum_k q_k x^k$, polinom $\sum_k q_k p_k(t)$. Znači da je operator (3.17) bijektivan.

Treba sada dokazati neprekidnost u nuli. Primetimo da je $\mathcal{A}^0 = \mathcal{I}$. Kako znamo, dovoljno je dokazati neprekidnost za prirodni bazis u $\mathcal{P}$. Imamo

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}t^j)(x) &= \sum_{k=-m}^{m} a_k (x+kh)^j = \sum_{k=-m}^{m} a_k \sum_{\nu=0}^{j} \binom{j}{\nu} x^\nu (kh)^{j-\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{j} x^\nu \binom{j}{\nu} \sum_{k=-m}^{m} a_k (kh)^{j-\nu},\end{aligned}$$

odakle je

$$\lim_{h\to 0^+} \binom{j}{\nu} \sum_{k=-m}^{m} a_k (kh)^{j-\nu} = \delta_{\nu,j},$$

tj. familija je neprekidna.

Sličan je dokaz i za operatore (3.19) i (3.1). $\square$

Primetimo, takođe, da se iz linearnog operatora $\mathcal{A}$, za svako zadato h, može izgraditi familija linearnih funkcionala $\mathcal{A}_x$, $\mathcal{A}_x : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$, na sledeći način

$$\mathcal{A}_x p = (\mathcal{A}p)(x), \quad p \in \mathcal{P}.$$

Linearnost funkcionala $\mathcal{A}_x$ je nasleđena iz linearnosti operatora $\mathcal{A}$.

Sada možemo da odredimo i generatorske funkcije $f_\mathcal{A}$ za opertore (3.17), (3.19) i (3.1).

Teorema 3.8 *Generatorske funkcije $f_\mathcal{A}$ i $f_{\mathcal{A}^{-1}}$ operatora* (3.17) *date su sa*

$$f_\mathcal{A}(u,x) = Q(e^{hu})e^{ux}\exp(-\deg(Q)hu/2) \quad i \quad f_{\mathcal{A}^{-1}}(u,t) = \frac{\exp(u(t+\deg(Q)h/2))}{Q(e^{hu})},$$

respektivno. Generatorske funkcije $f_{\mathcal{A}}$ *i* $f_{\mathcal{A}^{-1}}$ *operatora* (3.19) *date su sa*

$$f_{\mathcal{A}}(u,x)=Q(hu)e^{ux} \quad i \quad f_{\mathcal{A}^{-1}}(u,t)=\frac{e^{ut}}{Q(hu)}.$$

Generatorske funkcije $f_{\mathcal{A}}$ *i* $f_{\mathcal{A}^{-1}}$ *operatora* (3.1) *date su sa*

$$f_{\mathcal{A}}(u,x)=e^{ux}\frac{\sinh(hu)}{hu} \quad i \quad f_{\mathcal{A}^{-1}}(u,t)=\frac{hue^{ut}}{\sinh(hu)}.$$

Dokaz.- Za prvi operator iz (3.17), imamo direktno

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{A}}(u,x) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{u^k}{k!}\sum_{j=-m}^{m}a_j(x+jh)^k=\sum_{j=-m}^{m}a_j\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{(ux)^m}{m!}\frac{(jhu)^{k-m}}{(k-m)!}\\ &= \sum_{j=-m}^{m}a_j\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(ux)^k}{k!}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(jhu)^m}{m!}=e^{ux}\sum_{j=-m}^{m}a_je^{jhu}\\ &= Q(e^{hu})e^{ux}\exp(-\deg(Q)hu/2), \end{aligned}$$

gde smo intenzivno upotrebljavali Chauchyjevu teoremu o proizvodu redova (videti [75, str. 112], [77, str. 24]) i Fubinijevu teoremu o promenu poretka integracije (videti [74, str. 96]). Izraz za $f_{\mathcal{A}^{-1}}$ sledi direktno na osnovu (3.16).

Postoji još jedan način da se dođe do ovog izraza koristeći koncept Cauchyjeve transformacije mere, pri čemu ovde pod merom podrazumevamo diskretnu meru koja ima vrednosti a_k u tačkama $x+kh$, $k=-m,\ldots,m$. Jasno je da (formalno) generatorska funkcija momenata $f_{\mathcal{A}}$ može da se shvati kao inverzna Laplaceova transformacija Cauchyjeve transformacije mere

$$\Phi(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\eta_k(x)}{z^{k+1}}, \quad |z|>\max\{|x+\deg(Q)h/2|,|x-\deg(Q)h/2|\}.$$

Cauchyjeva transformacija, opet s druge strane, može da se odredi direktno na osnovu rečenog u sekciji 1.2 kao

$$\Phi(z)=\sum_{j=-m}^{m}\frac{a_j}{z-x-jh}, \quad z\notin\{x+jh \mid j=-m,\ldots,m\}.$$

Dakle, samo još treba primeniti inverznu Laplaceovu transformaciju na Φ da bismo dobili $f_{\mathcal{A}}$.

Za operator (3.19) imamo direktno

$$f_{\mathcal{A}}(u,x)=\sum_{k=0}^{+\infty}u^k\sum_{j=0}^{m}\frac{b_jh^j}{j!}\frac{x^{k-j}}{(k-j)!}=\sum_{j=0}^{m}\frac{b_j(hu)^j}{j!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(ux)^k}{k!}=Q(hu)e^{ux}.$$

Izraz za $f_{\mathcal{A}^{-1}}$ sledi direktno na osnovu (3.16).

Za operator (3.1), poznavajući momente, možemo direktno odrediti $f_{\mathcal{A}}$,

$$f_{\mathcal{A}}(u,x) = \frac{1}{2hu}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{u^{k+1}}{k!}\frac{(x+h)^{k+1}-(x-h)^{k+1}}{k+1} = \frac{\sinh(hu)}{hu}.$$

Izraz za $f_{\mathcal{A}^{-1}}$ sleduje direktno na osnovu (3.16).

Pokažimo još na kojem skupu za pojedine operatore izraz (3.16) važi. S obzirom da su sve funkcije $f_{\mathcal{A}}$ cele funkcije i kako je $\exp(u(x+t))$ cela funkcija, izraz ostaje u važnosti za skup na kome važi razvoj u red za funkciju $f_{\mathcal{A}^{-1}}$. Tako za operator (3.17), red je apsolutno konvergentan na svakom kompaktnom skupu (videti [77, str. 24]), koji je podskup skupa

$$\{u \mid h|u| < \min_{k\in\mathbb{N}_0,\nu=1,\ldots,\deg(Q)}\bigl\{|\log|\lambda_\nu| + \mathrm{i}(\arg(\lambda_n u)+2k\pi)|\bigr\} = hu_{\min}\bigr\},$$

gde su λ_ν, $\nu = 1,\ldots,\deg(Q)$, nule karakterističnog polinoma Q, računajući višetrukosti.

Slično, za operator (3.19) imamo da razvoj u red važi za svaki kompaktan skup koji je podskup skupa

$$\{u \mid h|u| < \min_{\nu=1,\ldots,\deg(Q)}\{|\lambda_\nu|\} = hu_{\min}\},$$

gde su, ponovo, λ_ν, $\nu = 1,\ldots,\deg(Q)$, nule karakterističnog polinoma, računajući višetrukosti.

Najzad, razvoj za operator (3.1) važi na svakom kompaktnom podskupu skupa $\{u \mid h|u| < \pi = hu_{\min}\}$.

Iz ovih izraza možemo odrediti i asimptotske izraze za momente inverznog operatora $\mu_k(t)$, $k\in\mathbb{N}_0$. Jasno je da mora važiti

$$|\mu_k(t)|^{1/k} \approx \frac{k}{eu_{\min}}. \quad \square$$

Definicija 3.8 Za svako zadato h, linearni operator $\mathcal{A}$ definiše familiju linearnih funkcionala $\mathcal{A}_x$, $\mathcal{A}_x : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$, na sledeći način

$$\mathcal{A}_x p = (\mathcal{A}p)(x), \quad p\in\mathcal{P}.$$

Momente funkcionala $\mathcal{A}_x$ označavamo sa $\eta_k^x = \eta_k(x)$, $k\in\mathbb{N}_0$. Momente funkcionala $\mathcal{A}_t^{-1}$, izgrađenih na prethodno opisani način od operatora $\mathcal{A}^{-1}$, označavamo sa $\mu_k^t = \mu_k(t)$, $k\in\mathbb{N}_0$. Generatorske funkcije momenata linearnih funkcionala $\mathcal{A}_x$ i $\mathcal{A}_t^{-1}$ označamo sa $f_{\mathcal{A}_x}(u) = f_{\mathcal{A}}(u,x)$ i $f_{\mathcal{A}_t^{-1}}(u) = f_{\mathcal{A}^{-1}}(u,t)$, respektivno.

Definicija 3.9 Za meru μ, moguće kompleksnu, kažemo da reprezentuje linearni funkcional $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} : \mathcal{P}\mapsto\mathbb{C}$, ako i samo ako

$$\mathcal{L}(x^k) = \int_\Gamma x^k \mathrm{d}\mu(x),$$

gde je Γ neka Jordanova kriva u kompleksnoj x-ravni.

U opštem slučaju, na osnovu teoreme o reprezentaciji linearnog funkcionala, teorema 1.11 (videti [12, str. 74]), možemo tvrditi da svaki linearni funkcional ima meru koja ga reprezentuje. Pomenimo samo da u slučaju pozitivne definitnosti funkcionala $\mathcal{L}$, pod uslovom da je reprezentaciona mera podržana na kompaktnom skupu, ta reprezentacija je jedinstvena (videti [12, str. 71], [38, str. 410]). U slučaju da nosač mere nije kompaktan, dolazimo do čuvenih Stieltjesovih i Hamburgerovih momentih problema. U ovom slučaju, reprezentacija ne mora da bude jedinstvena, odnosno postoje dve pozitivne mere sa neograničenim realnim nosačem čiji su momenti jednaki, kao što smo prikazali u sekciji 1.2 (videti [12, str. 73]). Postoje dovoljni uslovi za jedinstvenost reprezentacije linearnog funkcionala preko pozitivne mere sa neograničenim nosačem; na primer, teorema 1.23 (videti [5], [17]). U slučaju kompleksne mere, reprezentacija ne mora biti jedinstvena ni kada je nosač kompaktan.

Kako mi posmatramo familiju linearnih funkcionala $\mathcal{A}_t^{-1}$, jasno je da kao rezultat dobijamo reprezentaciju preko familije mera μ^t, takvih da važi

$$\mathcal{A}_t^{-1}x^k = \int_{\mathbb{R}} x^k \mathrm{d}\mu^t(x).$$

U slučaju operatora koji verifikuju (3.13), moguće je dobiti reprezentaciju kod koje je familija mera μ^t svedena na jednu jedinu meru, kao što ćemo videti dalje u tekstu za operatore date sa (3.17), (3.19) i (3.1).

U daljem tekstu nećemo se baviti jedinstvenošću reprezentacije funkcionala $\mathcal{A}_t^{-1}$. Naime, naš cilj je pronalaženje neke reprezentacije funkcionala $\mathcal{A}_t^{-1}$, što za uzvrat daje reprezentaciju skalarnog proizvoda (3.7), preko dvostrukog integrala, iz koje se može vršiti numerička konstrukcija ortogonalnih polinoma već poznatim i dobro opisanim algoritmima (videti [23], [14]).

U izgradnji reprezentacije linearnih funkcionala najznačajniju ulogu imaju karakteristični polinomi Q. Zato dajemo još jednu definiciju.

Definicija 3.10 Sa M označavamo broj različitih nula karakterističnog polinoma Q. Sa λ_ν, $\nu = 1, \ldots, M$, označavamo različite nule karakterističnog polinoma Q. Sa M_ν, $\nu = 1, \ldots, M$, označavamo višestrukosti nula λ_ν, $\nu = 1, \ldots, M$, polinoma Q.

Reprezentacija linearnih operatora datih u (3.19)

S obzirom da razmatramo samo bijektivne operatore, znamo na osnovu teoreme 3.7 da za karakteristični polinom operatora (3.19) imamo $Q(0) = 1$. Momente linearnog funkcionala $\mathcal{A}_t^{-1}$ možemo dobiti ravijanjem u red funkcije $f_{\mathcal{A}_t^{-1}}(u)$ u tački $u = 0$. Kako je Q polinom možemo prvo razložiti funkciju $1/Q$ u parcijalne razlomke, a onda svaki ralomak ponaosob razviti u potencijalni red u tački $u = 0$. Podrazumevamo da važi sledeće razlaganje u parcijalne razlomke i red

$$\frac{1}{Q(hu)} = \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{j=1}^{M_\nu} \frac{Q_\nu^j}{(hu - \lambda_\nu)^j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{j=1}^{M_\nu} Q_\nu^j \mu_k^{\nu,j}, \tag{3.21}$$

gde je

$$\mu_k^{\nu,j} = \frac{(-1)^j h^k}{\lambda_\nu^{j+k}} (j)_k.$$

Simbol $(j)_k$ označava Pochhammerov simbol $(j)_k = \Gamma(j+k)/\Gamma(j)$. Ova razmišljanja vode do sledećih teorema.

Teorema 3.9 *Imamo*

$$\mu_k^t = \left(t + \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{j=1}^{M_\nu} Q_\nu^j \mu_{\cdot}^{\nu,j} \right)^k = (t+\mu_{\cdot}^0)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

gde podrazumevamo konvenciju

$$\left(\sum_{\nu=1}^{M} \sum_{k=1}^{M_\nu} Q_\nu^j \mu_{\cdot}^{\nu,j} \right)^k = \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{k=1}^{M_\nu} Q_\nu^j \mu_k^{\nu,j}, \quad (\mu_{\cdot}^0)^k = \mu_k^0, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.22}$$

Dokaz.- Da bismo dobili ravoj funkcije $f_{\mathcal{A}_t^{-1}}(u)$ u okolini $u=0$, koristimo razvoj u parcijalne razlomke (3.21) i razvoj u red funkcije e^{ut} u tački $u=0$. Tako imamo

$$f_{\mathcal{A}_t^{-1}}(u) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(ut)^m}{m!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{j=1}^{M_\nu} Q_\nu^j \mu_k^{\nu,j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} t^{k-m} \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{j=1}^{M_\nu} Q_\nu^j \mu_k^{\nu,j}.$$

Odavde, za svako $k \in \mathbb{N}_0$, možemo da izračunamo momente

$$\mu_k^t = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} t^{k-m} \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{j=1}^{M_\nu} Q_\nu^j \mu_k^{\nu,j} = \left(t + \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{j=1}^{M_\nu} Q_\nu^j \mu_{\cdot}^{\nu,j} \right)^k = (t+\mu_{\cdot}^0)^k. \quad \square$$

Prethodna teorema redukuje problem nalaženja reprezentacije za familiju $\mathcal{A}_t^{-1}$ na pronalaženje reprezentacije za linearni funkcional $\mathcal{A}_0^{-1}$ jer je jasno da ako je mera μ reprezentacija za $\mathcal{A}_0^{-1}$, onda možemo da identifukujemo

$$(\mathcal{A}_t^{-1} x^k)(t) = \int_{\mathbb{R}} (t+z)^k \mathrm{d}\mu(z), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Naravno, ovo nije reprezentacija u smislu definicije 3.9, ali će za našu svrhu biti podjednako dobro.

Još jedna redukcija problema nalaženja reprezentacije je obezbeđena ovom teoremom, a to je da je dovoljno naći reprezentaciju za $\mathcal{A}_t^{-1}$, za koji karakteristični polinom iznosi

$$Q := Q_\lambda^M = \left(\frac{\lambda - z}{\lambda} \right)^M.$$

Onda se reprezentacija za opšti operator (3.19), dobija koristeći razvoj u parcijalne razlomke.

Teorema 3.10 *Neka su* $r(\lambda) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}(\lambda))$, $i(\lambda) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(\lambda))$, *i neka je operator* $\mathcal{A}$ *iz* (3.19) *zadat karakterističnim polinomom* $Q := Q_\lambda^M$. *Za* $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$, *imamo*

$$\mathcal{A}_t^{-1} p = \left(\frac{\lambda r(\lambda)}{h} \right)^M \frac{1}{\Gamma(M)} \int_{\mathbb{R}^+} p(t + y r(\lambda)) y^{M-1} e^{-\lambda y r(\lambda)/h} \mathrm{d}y.$$

Za $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, *imamo*

$$\mathcal{A}_t^{-1} p = \left(\frac{\lambda i(\lambda)}{h} \right)^M \frac{1}{\Gamma(M)} \int_{\mathbb{R}^+} p(t - \mathrm{i} y i(\lambda)) y^{M-1} e^{-\lambda y i(\lambda)/h} \mathrm{d}y.$$

Dokaz.- Dokaz dajemo samo za $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ i $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$, jer je za ostale slučajeve dokaz je skoro isti. Posmatramo konturu Γ u kompleksnoj y ravni koja je unija sledećih kontura

$$\gamma_1^R = \{y \mid 0 \leq y \leq R\}, \quad \gamma_2^R = \{y \mid |y| = R, \; -\arg(\lambda) \leq \arg(y) \leq 0\},$$
$$\gamma_3^R = \{y \mid 0 \leq y \leq R, \; \arg(y) = -\arg(\lambda)\}.$$

Funkcija $y^k y^{M-1} e^{-\lambda y/h}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $M \in \mathbb{N}$, ima jedini singularitet u beskonačnosti. Prema Cauchyjevoj teoremi o ostacima (videti [76, str. 43]), imamo $\oint_\Gamma = 0$. Za integral po konturi γ_3^R, imamo

$$\int_{\gamma_3^R} y^{M+k-1} e^{-\lambda y/h} \mathrm{d}y = \int_0^R t^{M+k-1} e^{-\mathrm{i}(M+k)\arg(\lambda)} e^{-|\lambda| t/h} \mathrm{d}t$$
$$= \left(\frac{h}{\lambda} \right)^{M+k} \int_0^{|\lambda| R/h} t^{M+k-1} e^{-t} \mathrm{d}t \to \left(\frac{h}{\lambda} \right)^{M+k} \Gamma(M+k), \text{ dok } R \to +\infty.$$

Jednostavno se dokazuje da važi $\int_{\gamma_2^R} \to 0$, kada $R \to +\infty$, što ima za posledicu $\int_{\gamma_1^R} = \int_{\gamma_3^R}$. Koristeći izračunat integral po γ_3^R, pomnožen sa odgovarajućom konstantom, dobijamo tačno momente koji su nam potrebni. $\square$

Mera koja se javlja u ovoj teoremi je dobro poznata generalisana Laguerrova mera (videti [12, str. 145], [46, str. 144], [22, str. 27], [35, str. 47]). Primetimo da i u slučaju $\lambda > 0$ imamo kao reprezentaciju nenegativnu meru, tako da je linearni funkcional $\mathcal{A}_0^{-1}$ pozitivno definitan.

U daljem ćemo linearni funkcional, dobijen u prethodnoj teoremi, označavati sa $\mathcal{L}_t^{\lambda,M}$, tako da možemo kraće pisati

$$\mathcal{A}_t^{-1} p = \mathcal{L}_t^{\lambda,M} p,$$

pri čemu je jasno naznačeno da se radi o reprezentaciji linearnog funkcionala za koji je karakteristični polinom zadat sa $Q := Q_\lambda^M$. Ova oznaka nam omogućava da sažeto izrazimo reprezentaciju za proizvoljan karakteristični polinom Q.

Teorema 3.11 *Neka važi razlaganje u parcijalne razlomke* (3.21) *karakterističnog polinoma Q. Onda interpretacija linearnog funkcionala $\mathcal{A}_t^{-1}$, zadatog sa* (3.19), *koji ima karakteristični polinom Q, je zadata sa*

$$\mathcal{A}_t^{-1} = \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{j=1}^{M_\nu} \frac{(-1)^j Q_\nu^j}{\lambda_\nu^j} \mathcal{L}_t^{\lambda_\nu, j}.$$

Dokaz.- Direktno izračunavanje. $\square$

Reprezentacija linearnih funkcionala datih sa (3.17)

Nastavljamo sa reprezentacionim teoremama i u ovoj sekciji tražimo reprezentaciju za operatore (3.17). Kao što je poznato, na osnovu teoreme 3.7, važi $Q(1) = 1$. Pretpostavljamo da važi sledeće razlaganje u parcijalne razlomke karakterističnog polinoma Q za operator $\mathcal{A}$

$$\frac{1}{Q(z)} = \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{j=1}^{M_\nu} \frac{Q_\nu^j}{(z-\lambda_\nu)^j}. \tag{3.23}$$

Sada razlikujemo one nule polinoma Q koje su po modulu manje, jednake ili veće od 1 jer treba u tački $u = 0$ razvijati funkcije $1/(e^{hu} - \lambda_\nu)^j$, $j \in \mathbb{N}$. Kao što ćemo videti, reprezentacije funkcionala se razlikuju prema tome da li je moduo nule jednak ili različit od 1.

Neka je razvoj u red funkcije $1/(e^{hu} - \lambda_\nu)^j$, $j \in \mathbb{N}$, $\nu = 1, \ldots, m$, zadat sa

$$\frac{1}{(e^{hu}-\lambda_\nu)^j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} \mu_k^{\nu,j}.$$

Onda je očigledno

$$\frac{1}{Q(e^{hu})} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{k=1}^{M_\nu} Q_\nu^j \mu_k^{\nu,j}.$$

Na osnovu sličnih razmatranja kao u teoremi 3.9, imamo sledeći rezultat:

Teorema 3.12 *Za momente funkcionala* $\mathcal{A}_t^{-1}$*, zadatog sa* (3.17)*, imamo*

$$\mu_k^t = \left(t + \deg(Q)h/2 + \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{j=1}^{M_\nu} Q_\nu^j \mu_{\cdot}^{\nu,j} \right)^k = (t + \mu_{\cdot}^{\nu,j})^k = (t + \mu_{\cdot}^{0})^k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

pri čemu koristimo konvenciju kao u teoremi 3.9.

Dokaz.- Ista razmatranja kao u teoremi 3.9. □

Ova teorema, kao i teorema 3.9, redukuje problem reprezentacije na pronalaženje reprezentacije funkcionala $\mathcal{A}_0^{-1}$. Naime, ako μ reprezentuje $\mathcal{A}_0^{-1}$, onda imamo

$$\mathcal{A}_t^{-1} p = \int_{\mathbb{R}} p(t+x) \mathrm{d}\mu(x).$$

Takođe, kao i kod operatora datih sa (3.17), moguće je izgraditi samo reprezentacije za operatore čiji su karakteristični polinomi zadati sa

$$Q := Q_\lambda^M = \left(\frac{z-\lambda}{1-\lambda} \right)^M.$$

Teorema 3.13 *Za $|\lambda| \neq 1$, linearni funkcional $\mathcal{A}_t^{-1}$, čiji je karakteristični polinom $Q = Q_\lambda^M$, ima sledeću reprezentaciju*

$$\mathcal{A}_0^{-1}p = \begin{cases} (1-\lambda)^M \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{M+j-1}{j} \lambda^j p(t-(j+M/2)h), & |\lambda| < 1, \\ \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^M \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{M+j-1}{j} \frac{p(t+(j+M/2)h)}{\lambda^j}, & |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Dokaz.- Dokaz dajemo razvijanjem u red funkcije $f_{\mathcal{A}_t^{-1}}$ u tački $u = 0$. Za $|\lambda| > 1$, imamo

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{A}_t^{-1}}(u) &= (1-\lambda)^M \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}(t+Mh/2)^k \left(\frac{-1}{\lambda}\right)^M \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{-M}{j} \frac{e^{jhu}}{(-\lambda)^j} \\ &= \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^M \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}(t+Mh/2)^k \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{M+j-1}{j} \frac{(jh)^k}{\lambda^j} \\ &= \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^M \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{M+j-1}{j} \frac{(t+(j+M/2)h)^k}{\lambda^j}, \end{aligned}$$

gde smo upotrebili razvoj u red za geometrijske progresije i eksponencijalnu funkciju i intenzivno smo primenjivali Fubinijevu teoremu (videti [74]) i Cauchyjevu teoremu o proizvodu redova (videti [77]).

Odavde možemo zaključiti da važi

$$\mu_k^t = \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^M \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{M+j-1}{j} \frac{(t+(j+M/2)h)^k}{\lambda^j}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dakle, problem reprezentacije rešava diskretna mera podržana u tačkama $t+(j+M/2)h$, $j \in \mathbb{N}_0$, sa masama

$$\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^M \binom{M+j-1}{j} \frac{1}{\lambda^j}, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

u odgovarajućim tačkama.

Upotrebljavajući sličnu argumentaciju dobijamo i rešenje reprezentacionog problema za $|\lambda| < 1$. $\square$

Pomenimo da mera koja se javlja kao reprezentaciona u ovom slučaju je, u stvari, Meixnerova mera prve vrste (videti [12, str. 176], [35, str. 45]). Za $\lambda > 0$ i $\lambda \neq 1$, za reprezentaciju imamo nenegativnu meru, tako da je linearni funkcional $\mathcal{A}_0^{-1}$ pozitivno definitan.

U slučaju $|\lambda| = 1$, važi sledeća reprezentacija:

Teorema 3.14 *Linearni funkcional $\mathcal{A}_t^{-1}$, zadat karakterističnim polinomom $Q = Q_\lambda^M$, gde je $\lambda = e^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \in (-\pi, \pi]\backslash\{0\}$, ima reprezentaciju*

$$\mathcal{A}_t^{-1}p = e^{-\mathrm{i}M\varphi/2} \left(\frac{1-\lambda}{-2\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\varphi)}\right)^M \int_{\mathbb{R}} p(t-\mathrm{i}y) w^\varphi(y) \mathrm{d}y, \tag{3.24}$$

gde je w pozitivna funkcija data sa

$$
\begin{aligned}
w^{\varphi}(y) &= \frac{e^{(\operatorname{sgn}(\varphi)\pi-\varphi)y/h}}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{\mathrm{i}yu/h}}{\cosh^M u/2}\mathrm{d}u\\
&= \frac{e^{(\operatorname{sgn}(\varphi)\pi-\varphi)y/h}}{(M-1)!h}\begin{cases}\dfrac{\prod\limits_{k=0}^{(M-3)/2}(4(y/h)^2+(2k+1)^2)}{\cosh(\pi y/h)}, & M\in 2\mathbb{N}_0+1,\\ \dfrac{2y}{h}\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{M/2-1}(4(y/h)^2+(2k)^2)}{\sinh(\pi y/h)}, & M\in 2\mathbb{N}.\end{cases}
\end{aligned}
$$

Dokaz.- U ovom slučaju, reprezentaciju tražimo u sledećem obliku

$$
\mathcal{A}_t^{-1}p=\int_{\mathbb{R}}p(t-\mathrm{i}y)\omega^{\varphi}(y)\mathrm{d}y,\quad p\in\mathcal{P},
$$

gde je $\omega^{\varphi}:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$ težinska funkcija. Pretpostavljamo da je težinska funkcija merljiva funkcija i $\omega^{\varphi}\in L^1(\mathbb{R})$. Prema tome, apsolutna vrednost funkcije ω^{φ} je element prostora $L^1(\mathbb{R})$ (videti [74, str. 82]). Međutim, kako je $e^{-\mathrm{i}uy}\omega^{\varphi}(y)$, takođe, merljiva funkcija i $|\omega^{\varphi}|\in L^1(\mathbb{R})$, to je i $e^{-\mathrm{i}uy}\omega^{\varphi}(y)$, takođe, integrabilna za svako $u\in\mathbb{R}$. Zbog činjenice da je ω^{φ} težinska funkcija, to su i funkcije $(-\mathrm{i}y)^k e^{-\mathrm{i}uy}\omega^{\varphi}(y)\in L^1(\mathbb{R})$ za $k\in\mathbb{N}_0$, $u\in\mathbb{R}$. Poslednje povlači da je Fourierova transformacije funkcije ω^{φ} analitička funkcija na $\mathbb{R}$ (videti [86, str. 193]). Fourierova transformacija ove funkcije je zadata sa

$$
\hat{\omega}^{\varphi}(u)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\mathrm{i}uy}\omega^{\varphi}(y)\mathrm{d}y=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\mu_j}{j!}u^j.
$$

Razvoj u red je apsolutno konvergentan na svakom kompaktnom skupu $|u|<u_{\min}$. Znači da se funkcija $\hat{\omega}^{\varphi}(u)$ poklapa sa funkcijom $f_{\mathcal{A}^{-1}}(u,0)$ na skupu $\{u\mid |u|<u_{\min}\}$. Zbog toga zaključujemo da su i funkcije $e^{-\mathrm{i}uy}\omega^{\varphi}(y)\in L^1(\mathbb{R})$ za $|u|<u_{\min}$.

Uzmimo $u=u_x+\mathrm{i}u_y$, pri čemu $|u_y|<u_{\min}$. Onda imamo

$$
\left|e^{-\mathrm{i}uy}\omega^{\varphi}(y)\right|=e^{u_y y}|\omega^{\varphi}(y)|\in L^1(\mathbb{R}).
$$

Znači da je tačka u u domenu funkcije $\hat{\omega}^{\varphi}$ i funkcija je analitička na skupu $\{u\mid |\mathrm{Im}(u)|<u_{\min}\}$ i jednaka funkciji $f_{\mathcal{A}^{-1}}(u,0)$ na skupu $\{u\mid |u|<u_{\min}\}$, pri čemu je funkcija $f_{\mathcal{A}^{-1}}(u,0)$, takođe, analitička na domenu funkcije $\hat{\omega}^{\varphi}$. Prema tome, važi $\hat{\omega}^{\varphi}(u)=f_{\mathcal{A}^{-1}}(u,0)$ na $\{u\mid |\mathrm{Im}(u)|<u_{\min}\}$ (videti [99, str. 247]).

Imamo

$$
\hat{\omega}^{\varphi}(u)=f_{\mathcal{A}_0^{-1}}(u)=e^{uMh/2}\left(\frac{1-\lambda}{e^{hu}-\lambda}\right)^M=e^{-\mathrm{i}M\varphi/2}\left(\frac{1-\lambda}{2\sinh(hu-\mathrm{i}\varphi)/2}\right)^M.
$$

Sve što treba još uraditi je izračunati inverznu Fourierovu transformaciju funkcije $\hat{\omega}^{\varphi}$. Dakle,

$$
\omega^{\varphi}(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{\mathrm{i}uy}\hat{\omega}^{\varphi}(u)\mathrm{d}u=\frac{e^{-\mathrm{i}M\varphi/2}}{2\pi h}\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^M\int_{\Gamma}\frac{e^{\mathrm{i}(z+\mathrm{i}\varphi)y/h}}{\sinh^M z/2}\mathrm{d}z,
$$

gde je kontura $\Gamma = \{z \mid \mathrm{Im}(z) = -\varphi\}$. Podintegralna funkcija je analitička, sem u singularitetima $z_k = 2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$. Za $\varphi > 0$, možemo razmatrati integral po konturi γ^R, koja je unija sledećih kontura

$$\begin{aligned}
\gamma_1^R &= \{z \mid \mathrm{Im}(z) = -\varphi,\ |\mathrm{Re}(z)| \le R\},\\
\gamma_2^R &= \{z \mid \mathrm{Im}(z) = -\pi,\ |\mathrm{Re}(z)| \le R\},\\
\gamma_3^R &= \{z \mid \mathrm{Re}(z) = -R,\ -\pi < \mathrm{Im}(z) < -\varphi\},\\
\gamma_4^R &= \{z \mid \mathrm{Re}(z) = R,\ -\pi < \mathrm{Im}(z) < -\varphi\}.
\end{aligned}$$

Kontura γ^R je zatvorena i bez singulariteta podintegralne funkcije, pa je prema Cauchy-jevoj teoremi o ostacima $\oint_{\gamma^R} = 0$. Izračunavajući graničnu vrednost $R \to +\infty$, integrali po konturama γ_3^R i γ_4^R teže nuli, tako da su integrali po $\gamma_1^{+\infty}$ i $\gamma_2^{+\infty}$ jednaki. Integral po $\gamma_1^{+\infty}$ je, u stvari, po prethodno određenoj konturi Γ. Naravno, mi ćemo integral po Γ izraziti preko integrala po $\gamma_2^{+\infty}$, tako da za ω^φ imamo sledeći izraz

$$\omega^\varphi(y) = \frac{e^{-\mathrm{i}M\varphi/2}}{2\pi h}\left(\frac{1-\lambda}{-2\ \mathrm{i}}\right)^M e^{(\pi-\varphi)y/h}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\mathrm{i}uy/h}}{\cosh^M u/2}\mathrm{d}u.$$

Sličan rezultat važi i za $\varphi < 0$, ali u ovom slučaju treba integraliti po konturi koja je unija sledećih kontura

$$\begin{aligned}
\gamma_1^R &= \{z \mid \mathrm{Im}(z) = -\varphi,\ |\mathrm{Re}(z)| \le R\},\\
\gamma_2^R &= \{z \mid \mathrm{Im}(z) = \pi,\ |\mathrm{Re}(z)| \le R\},\\
\gamma_3^R &= \{z \mid \mathrm{Re}(z) = -R,\ -\varphi < \mathrm{Im}(z) < \pi\},\\
\gamma_4^R &= \{z \mid \mathrm{Re}(z) = R,\ -\varphi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}.
\end{aligned}$$

U tom slučaju, rezultat je

$$\omega^\varphi(y) = \frac{e^{-\mathrm{i}M\varphi/2}}{2\pi h}\left(\frac{1-\lambda}{2\mathrm{i}}\right)^M e^{-(\pi+\varphi)y/h}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\mathrm{i}uy/h}}{\cosh^M u/2}\mathrm{d}u.$$

Iz ova dva izraza dobijamo izraz iz tvrđenja teoreme za funkciju w^φ.

Ono što nam ostaje je da odredimo integrale koji predstvaljaju w^φ. Koristeći parcijalnu integraciju dva puta, imamo

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\mathrm{i}y/hu}}{\cosh^{M+2} u/2}\mathrm{d}u = \frac{4(y/h)^2 + M^2}{M(M+1)}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\mathrm{i}yu}}{\cosh^M u/2}\mathrm{d}u, \quad M \ge 1.$$

Ovaj izraz, u stvari, predstvalja rekurentnu relaciju za integrale koji se javljaju u w^φ, tako da ostaje samo da izračunamo integrale za $M = 1$ i $M = 2$. Vrednosti ovih integrala su poznate i mogu se, na primer, naći u [17] i iznose

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\mathrm{i}yu}}{\cosh u/2}\mathrm{d}u = \frac{2\pi}{\cosh \pi y/h}, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\mathrm{i}yu}}{\cosh^2 u/2}\mathrm{d}u = \frac{4\pi y/h}{\sinh \pi y/h}.$$

Vidimo da konstruisana funkcija w^φ zadovoljava sve uslove koji su potrebni za opravdanje metoda koji smo koristili pri konstrukciji. $\square$

Slučajevi $M = 1$ i $M = 2$ iz prethodne teoreme odgovaraju dobro poznatim težinskim funkcijama, Lindelöfovoj i Abelovoj težini, respektivno (videti [17]).

U specijalnom slučaju $\varphi = \pi$, $\lambda = -1$, težinska funkcija iz prethodne teoreme postaje

$$\omega^{\pi}(y) = \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\mathrm{i}yu/h}}{\cosh^M u/2}\mathrm{d}u.$$

Ova funkcija je očigledno parna, što za posledicu ima sledeću simetriju

$$w^{-\varphi}(-y) = w^{\varphi}(y).$$

Kao i u prethodnom slučaju, sa $\mathcal{L}_t^{\lambda,M}$ označimo linearni funkcional koji reprezentuje linearni funkcional $\mathcal{A}_t^{-1}$, za koji je karakteristični polinom zadat sa $Q = Q_\lambda^M$. Onda reprezentaciju proizvoljnog linearnog funkcionala $\mathcal{A}_t^{-1}$ možemo dobiti iz sledeće teoreme.

Teorema 3.15 *Neka važi razlaganje u parcijalne razlomke* (3.23) *karakteristčnog polinoma Q. Tada reprezentacija linearnog funkcionala $\mathcal{A}_t^{-1}$, zadatog sa* (3.17)*, koji ima karakteristični polinom Q, je određena sa*

$$\mathcal{A}_t^{-1} = \sum_{\nu=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \frac{Q_\nu^j}{(1-\lambda_\nu)^j}\mathcal{L}_t^{\lambda_\nu,j}$$

Dokaz.- Direktno izračunavanje. □

Takođe, primetimo da, i u ovom slučaju, linearni funkcional $\mathcal{A}_0^{-1}$ odgovara linearnom funkcionalu Meixnerovih polinoma prve vrste (videti [12, str. 176], [35, str. 45]).

Neke specijalni slučajevi za linearne funkcionale $\mathcal{A}_x$, zadate sa (3.17), biće analizirani kasnije.

Reprezentacija linearnih funkcionala datih sa (3.1)

Za operator (3.1) imamo sledeću teoremu o reprezentaciji.

Teorema 3.16 *Neka je linearni operator $\mathcal{A}$, zadat sa*

$$(\mathcal{A}p)(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} p(u)\,\mathrm{d}u.$$

Tada

$$\mathcal{A}_0^{-1}p = \frac{\pi}{2h}\int_{\mathbb{R}} p(-\mathrm{i}y)\frac{\exp(-\pi y/h)}{(1+\exp(-\pi y/h))^2}\mathrm{d}y.$$

Dokaz.- Tražimo reprezentaciju za linearni funkcional $\mathcal{A}_t^{-1}$ u obliku

$$\mathcal{A}_t^{-1}p = \int_{\mathbb{R}} p(t-\mathrm{i}y)w(y)\mathrm{d}y.$$

Na osnovu dokaza teoreme 3.14, težina w može biti nađena kao inverzna Fourierova transformacija od $f_{\mathcal{A}_0^{-1}}$, tj.

$$w(y) = \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}} \frac{ue^{\mathrm{i}yu/h}}{\sinh u}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2h}\frac{e^{-\pi y/h}}{(1+e^{-\pi y/h})^2}. \quad \square$$

Težinska funkcija koju smo dobili u ovoj teoremi je dobro poznata logistička težinska funkcija (videti [23]).

3.2.3 Polinomi ortogonalni u odnosu na $\mathcal{A}_t^{-1}$

Linearni funkcional $\mathcal{L} : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ je regularan pod uslovom da niz ortogonalnih polinoma postoji. Za linearne funkcionale, čiji momenti verifikuju uslov (3.13), važi sledeći pomoćni rezultat:

Lema 3.7 *Neka je $\mathcal{A}_{t_1}^{-1}$ regularan linearan funkcional za neko zadato t_1. Onda, za svako $t_2 \neq t_1$, linearni funkcional $\mathcal{A}_{t_2}^{-1}$ je regularan, i obrnuto ako nije regularan za neko t_1, onda nije regularan ni za jedno t_2. Ako koeficijente tročlane rekurentne relacije za linearni funkcional $\mathcal{A}_{t_1}^{-1}$ označimo sa α^{t_1} i β^{t_1}, a za linearni funkcional $\mathcal{A}_{t_2}^{-1}$ označimo sa α^{t_2} i β^{t_2}, onda*

$$\alpha^{t_1} - \alpha^{t_1} = t_2 - t_1, \quad \beta^{t_2} = \beta^{t_1}.$$

Dokaz.- Za dokaz videti vežbanje 4.5 iz [12], gde treba koristiti identitete

$$\mu_k^t = (t + \mu_{\cdot}^0)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad \square$$

Naravno, za opšti operator $\mathcal{A}$, funkcionali $\mathcal{A}_t^{-1}$, ne moraju biti regularni. Na primer, za operator zadat karakterističnim polinomom

$$Q(z) = \frac{z^2 + 4z + 1}{6},$$

linearni funkcional $\mathcal{A}_0^{-1}$ nije regularan, a koeficijenti tročlane rekurentne relacije su

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad \beta_1^2 = -\frac{h^2}{3}, \quad \beta_2^2 = -\frac{2h^2}{3}, \quad \beta_3^2 = 0.$$

Ovo znači da linearni funkcionali $\mathcal{A}_t^{-1}$ nisu regularni ni za jedno t.

Za specijalnu klasu operatora (3.17), međutim, možemo da tvrdimo da su pozitivno definitni, što znači da, na osnovu teoreme 1.5, za takve funkcionale $\mathcal{A}_t^{-1}$ niz ortogonalnih polinoma postoji.

Teorema 3.17 *Pod pretpostavkom da su svi koreni λ_ν, $\nu = 1, \ldots, M\,(= \deg(Q))$, karakterističnog polinoma Q, prosti i veći od 1, familija linearnih funkcionala $\mathcal{A}_t^{-1}$ ima reprezentaciju preko pozitivne mere.*

Dokaz.- Imamo

$$\frac{1}{Q(z)} = \sum_{\nu=1}^{M} \frac{Q_\nu}{z-\lambda_\nu}, \quad Q_\nu = \frac{1}{Q'(\lambda_\nu)}, \quad \nu = 1, \dots, M.$$

Na osnovu ove relacije, imamo sledeću reprezentaciju

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^{-1} f &= -\sum_{\nu=1}^{M} \frac{Q_\nu}{\lambda_\nu} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f((k+M/2)h)}{\lambda_\nu^k} \\ &= -\sum_{k=0}^{+\infty} f((k+M/2)h) \sum_{\nu=1}^{M} \frac{Q_\nu}{\lambda_\nu^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f((k+M/2)h)}{Q^k}, \end{aligned}$$

gde smo uveli oznaku

$$\frac{1}{Q^k} = -\sum_{\nu=1}^{M} \frac{Q_\nu}{\lambda_\nu^k}.$$

Sve što ostaje da dokažemo je da važi $Q^k > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Primetimo da za $M = 1$ nemamo šta da dokazujemo, jer je dokaz već dat u teoremi 3.13.

Označimo sa P, za zadato $k \in \mathbb{N}_0$, polinom sledećeg tipa

$$P(x) = 1 + \int_0^x t^k q(t) \mathrm{d}t, \quad q \in \mathcal{P}_{M-2}. \tag{3.25}$$

Posmatrajmo sada racionalnu funkciju $P/(x^{k+1}Q)$. Funkcija ima proste polove u tačkama λ_ν, $\nu = 1, \dots, M$, i pol $(k+1)$-vog reda u tački nula. U beskonačnosti funkcija $P/(x^{k+1}Q)$ ima nulu reda dva jer očito $\deg(P) = M + k - 1$. Primenimo Cauchyjevu teoremu o ostacima na $P/(x^{k+1}Q)$ po konturi koja u unutrašnjosti sadrži $\mathrm{Co}(\{0, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Zbog $P/(x^{k+1}Q) \sim x^{-2}$, dok $x \to \infty$, imamo

$$\frac{1}{k!} \left(\frac{P}{Q} \right)^{(k)} \Bigg|_{x=0} = -\sum_{\nu=1}^{M} \frac{P(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu^{k+1} Q'(\lambda_\nu)}.$$

Za $P \equiv 1$, $q \equiv 0$, očigledno važi

$$\frac{1}{k!} \left(\frac{1}{Q} \right)^{(k)} \Bigg|_{x=0} = -\sum_{\nu=1}^{M} \frac{Q_\nu}{\lambda_\nu^{k+1}} = \frac{1}{Q^k},$$

tako da možemo identifikovati $1/Q^k$ sa $1/k!(1/Q)^{(k)}(0)$.

Za svaki polinom P oblika (3.25), imamo

$$\frac{1}{k!} \left(\frac{P}{Q} \right)^{(k)} \Bigg|_{x=0} = \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \left(P^{(k-m)} (1/Q)^{(k)} \right) \Bigg|_{x=0}.$$

Zbog oblika polinoma P, $P^{(m)}(0) = \delta_{m,0}$, $m = 0, 1, \dots, k$, pa imamo da je

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{P}{Q}\right)^{(k)}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{Q}\right)\bigg|_{x=0} = \frac{1}{Q^k} = -\sum_{\nu=1}^{M} \frac{P(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu^{k+1} Q'(\lambda_\nu)}. \tag{3.26}$$

Ova jednakost važi sa svaki polinom P oblika (3.25).

Posmatrajmo sada sistem jednačina $P(\lambda_\nu) = 0$, $\nu = 2, \dots, M$, za polinom $q \in \mathcal{P}_{M-2}$ i dokažimo da postoji polinom $q \in \mathcal{P}_{M-2}$ takav da P zadovoljava pomenuti sistem jednačina. Dobijamo

$$\sum_{m=0}^{M-2} q_m \frac{\lambda_\nu^{k+m+1}}{k+m+1} = -1, \quad \nu = 2, \dots, M, \tag{3.27}$$

gde je $q(x) = \sum q_m x^m$. Ovaj sistem jednačina ima jedinstveno rešenje jer sistem ima Vandermondeovu determinantu (videti [65, str. 226]), za koju znamo da ima vrednost različitu od 0. Prema tome, polinom tipa (3.25), sa osobinama $P(\lambda_\nu) = 0$, $\nu = 2, \dots, M$, postoji jedinstveno.

Za ovako konstrisani polinom P, jednakost (3.26) postaje

$$\frac{1}{Q^k} = -\frac{P(\lambda_1)}{\lambda_1^{k+1} Q'(\lambda_1)}.$$

Polinom P ima nule u tačkama $\lambda_2, \dots, \lambda_M$, što zbog posledica Roleove teoreme (videti [44, str. 142]), znači da polinom $x^{k+1}q$, ima bar po jednu nulu u svakom od intervala $(\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1})$, $\nu = 2, \dots, M-1$. Takvih intervala je $M-2$, pa pošto je $q \in \mathcal{P}_{M-2}$, to su sve nule polinoma q proste i svaka se nalazi u po jednom od intervala $(\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1})$, $\nu = 2, \dots, M-1$. Naravno, onda je polinom $x^k q$ istog znaka za svako $t \in (0, \lambda_2)$, bilo pozitivan ili negativan. Pretpostavimo da P ima nulu ξ unutar intervala $(0, \lambda_2)$. Onda očigledno u intervalu (ξ, λ_2), zbog pomenutih posledica Rolove teoreme, imamo bar jednu nulu polinoma $x^{k+1}q$, što je kontradikcija.

Prema tome, polinom P ima, takođe, konstantan znak na intervalu $(0, \lambda_2)$, i zbog $P(0) = 1$, očigledno je pozitivan. Dakle, za svako $\lambda_1 \in (1, \lambda_2)$, imamo $P(\lambda_1) > 0$. Takođe, jasno je da je $Q'(\lambda_1) < 0$ jer

$$Q'(\lambda_1) = \frac{\prod\limits_{\nu=2}^{M} (\lambda_1 - \lambda_\nu)}{\prod\limits_{\nu=1}^{M} (1 - \lambda_\nu)} < 0.$$

Iz dokazanih nejednakosti, za svako $\lambda_1 \in (1, \lambda_2)$, imamo $Q^k > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Posledica ove teoreme je da u slučaju prostih korena karakterističnog polinoma Q, koji svi leže u intervalu $(0, 1)$, mera koja reprezentaciju familije funkcionala $\mathcal{A}_t^{-1}$ je nenegativna.

Teorema 3.18 *Pod uslovom da su svi koreni karakterističnog polinoma Q prosti i zadovoljavaju uslov $\lambda_\nu \in (0, 1)$, $\nu = 1, \dots, M \,(= \deg(Q))$, mera koja reprezentuje familiju funkcionala $\mathcal{A}_t^{-1}$ je nenegativna.*

Dokaz.- Dovoljno je u karakterističnom polinomu Q smeniti promenljivu $z := 1/z$, što uslov za korene menja u $1 < \lambda_\nu$, $\nu = 1, \dots, M$, i primeniti prethodnu teoremu. $\square$

Definicija 3.11 Sa $\pi_n^t(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, označavamo polinome ortogonalne u odnosu na linearni funkcional $\mathcal{A}_t^{-1}$, pod uslovom da je $\mathcal{A}_t^{-1}$ regularan linearni funkcional. Sa α_n^t i β_n^t, $n \in \mathbb{N}_0$, označavam koeficijente tročlane relacije koju zadovoljavaju polinomi ortogonalni u odnosu na $\mathcal{A}_t^{-1}$.

Lema 3.8 *Imamo*

$$\pi_n^t(x) = \pi_n^0(x-t), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dokaz.- Polinomi π_n^0 zadovoljavaju sledeću rekurentnu relaciju

$$\pi_{n+1}^0(x) = (x - \alpha_n^0)\pi_n^0(x) - (\beta_n^0)^2\pi_{n-1}^0(x),$$

a prema tvrđenju leme 3.7, polinomi $\pi_n^t(x)$ zadovoljavaju

$$\pi_n^t(x) = (x - t - \alpha_n^0)\pi_n^t(x) - (\beta_n)^2 p_{n-1}^0(x).$$

Smenom $z := x - t$, to postaje tročlana relacija za niz π_n^0, $n \in \mathbb{N}_0$, odakle zaključujemo da tvrđenje leme važi. $\square$

Teorema 3.19 *Neka linearni operator $\mathcal{A}$, zadat sa* (3.17)*, ima karakteristični polinom $Q = Q_\lambda^M$. Onda je familija linearnih funkcionala $\mathcal{A}_t^{-1}$ regularna. Monični ortogonalni polinomi $\pi_n^t(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, zadovoljavaju sledeću tročlanu rekurentnu relaciju*

$$\pi_{n+1}^t(x) = \Big(x - t - \frac{\lambda+1}{\lambda-1}(n + M/2)h\Big)\pi_n^t(x) - \frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}n(n+M-1)h^2\pi_{n-1}^t(x).$$

Dokaz.- Dokaz ovog tvrđenja je dat u delovima u raznim izvorima. Na primer, specijalni slučaj $|\lambda| = 1$ je povezan sa poznatim slučajem Meixner-Pollaczekovih polinoma (videti [12, str. 179], [35, str. 37]). Slučaj $|\lambda| \neq 1$ je originalno razmatran od strane Meixnera i odgovarajući ortogonalni polinomi su poznati kao Meixnerovi polinomi prve vrste (videti [12, str. 178], [35, str. 45]). Za $\lambda = -1$, rezultat za koeficijente tročlane relacije dao je originalno Stieltjes (videti [103], [17]). Specijalno, slučaj za $|\lambda| > 1$ i $M = 1$ je obrađivan od strane Carlitza (videti [12, str. 177]). $\square$

Naravno, slučaj kada je operator $\mathcal{A}$, zadat sa (3.19), i karakteristični polinom je $Q = Q_\lambda^M$, je dobro poznati rezultat koji pripada klasičnoj teoriji ortogonalnih polinoma.

Teorema 3.20 *Neka je $\mathcal{A}$ zadat sa* (3.19)*, sa karakterističnim polinomom $Q = Q_\lambda^M$. Familija linearnih funkcionala $\mathcal{A}_t^{-1}$ je regularna. Monični polinomi $\pi_n^t(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, ortogonalni u odnosu na $\mathcal{A}_t^{-1}$ zadovoljavaju tročlanu rekurentnu relaciju*

$$\pi_{n+1}^t(x) = \Big(x - t - \frac{h}{\lambda}(2n+M)\Big)p_n^t(x) - \frac{h^2}{\lambda^2}n(n+M-1)\pi_{n-1}^t(x).$$

Pomenimo da su koeficijenti tročlane rekurentne relacije za logističku meru poznati (videti [23]), tako da to vodi direktno sledećoj teoremi.

Teorema 3.21 *Za linearni operator $\mathcal{A}$ zadat sa* (3.1)*, familija linearnih funkcionala $\mathcal{A}_t^{-1}$ je regularna. Monični polinomi $\pi_n^t(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, ortogonalni u odnosu na $\mathcal{A}_t^{-1}$, zadovoljavaju sledeću tročlanu rekurentnu relaciju*

$$\pi_{n+1}^t(x) = (x-t)\pi_n^t(x) - \frac{k^4h^2\pi}{4k^2-1}\pi_{n-1}^t(x).$$

Sada dajemo neke specifične slučajeve pomenutih operatora koji se mogu dovesti u vezu sa već poznatim klasama ortogonalnih polinoma.

Teorema 3.22 *Neka linearni operator $\mathcal{A}$, zadat sa* (3.17)*, ima karakteristični polinom*

$$Q(z) = \sum_{k=-m}^{m} (-1)^{k+m} z^{k+m} = \frac{z^M+1}{z+1}.$$

Tada linearni funkcional $\mathcal{A}_t^{-1}$ ima reprezentaciju

$$\mathcal{A}_t^{-1}p = \frac{\sin\frac{m\pi}{M}}{Mh}\int_{\mathbb{R}} \frac{p(t-iy)\cosh\frac{\pi y}{Mh}}{\cosh^2\frac{\pi y}{Mh}\sin^2\frac{m\pi}{M} + \cos^2\frac{m\pi}{M}\sinh^2\frac{\pi y}{Mh}}\,\mathrm{d}y.$$

Linearni funkcional $\mathcal{A}_t^{-1}$ je regularan, a koeficijenti tročlane relacije moničnih polinoma su

$$\alpha_k^t = t, \quad (\beta_{2k}^t)^2 = (Mh)^2k^2, \quad (\beta_{2k+1}^t)^2 = h^2\frac{M^2(2k+1)^2-1}{4}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dokaz.- Ovo je specijalni slučaj povezan sa kontinualnim dualnim Hahnovim polinomima (videti [12, str. 159], [35, str. 34]), ali veza nije toliko očigledna. Označimo težinsku funkciju koja se javlja u reprezentacionom integralu sa w. Prvo primetimo da je težinska funkcija w parna, zato možemo konstruisati dva niza ortogonalnih polinoma dobro poznatim procesom koji je opisan u [12, str. 40] i [46, str. 110]. Označimo monične ortogonalne polinome u odnosu na težinu w sa π_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Onda, zbog parnosti funkcije w (videti [12, str. 40], [46, str. 110]), možemo konstruisati polinome

$$q_n(t) = p_{2n}(\sqrt{t}), \quad \sqrt{t}\, r_n(t) = p_{2n+1}(\sqrt{t}), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

koji su ortogonalni u odnosu na težinske funkcije $w(\sqrt{t})/\sqrt{t}$ i $\sqrt{t}w(\sqrt{t})$, respektivno, sa nosačem $\mathbb{R}^+$.

Tročlane rekurentne relacije (videti [12, str. 40], [46, str. 110]) za ova dva niza polinoma su date sa

$$q_{n+1}(x) = (x - \beta_{2n+1}^2 - \beta_{2n}^2)q_n(x) - \beta_{2n}^2\beta_{2n-1}^2 q_{n-1}(x),$$
$$r_{n+1}(x) = (x - \beta_{2n+2}^2 - \beta_{2n+1}^2)r_n(x) - \beta_{2n+1}^2\beta_{2n}^2 r_{n-1}(x).$$

Kontinualni dualni Hahnovi polinomi imaju koeficijente tročlane relacije zadate sa

$$\alpha_k = 2k^2 + k(2a+2b+2c-1) + ab + ac + bc,$$
$$\beta_k^2 = k(k+a+b-1)(k+a+c-1)(k+b+c-1).$$

Ako izaberemo

$$a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{M}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{M}\right), \quad c = 0,$$

i izvršimo smenu $x := x/(Mh)$, dobijamo koeficijente tročlane relacije za q-niz ortogonalnih polinoma. Za r-niz, ponovo normalizujemo $x := x/(Mh)$ i biramo

$$a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{M}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{M}\right), \quad c = 1.$$

Relacija ortogonalnosti za kontinualne dualne Hahnove polinome je

$$\int_{\mathbb{R}^+} \left| \frac{\Gamma(a+\mathrm{i}x)\Gamma(b+\mathrm{i}x)\Gamma(c+\mathrm{i}x)}{\Gamma(2\mathrm{i}x)} \right| p_n(x)p_m(x)\mathrm{d}x = \delta_{m,n}.$$

Za izbore koje smo napravili za a, b i c, dobijamo naše težinske funkcije $w(\sqrt{t})/\sqrt{t}$ i $\sqrt{t}w(\sqrt{t})$. $\square$

Imamo još jedan specijlani slučaj povezan sa Hahnovim polinomima.

Teorema 3.23 *Neka je za linearni operator $\mathcal{A}$, zadat za* (3.17)*, karakteristični polinom*

$$Q(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} z^k = \frac{1}{M}\frac{z^M - 1}{z - 1}.$$

Odgovarajući linearni funkcionali $\mathcal{A}_t^{-1}$ su regularni i imaju reprezentaciju

$$\mathcal{A}_t^{-1}p = \frac{\sin\frac{\pi}{M}}{2h}\int_{\mathbb{R}} \frac{p(t-\mathrm{i}y)}{\cosh\frac{2\pi y}{Mh} + \cos\frac{\pi}{M}}\mathrm{d}y.$$

Koeficijenti tročlane relacije koju zadovoljavaju monični ortogonalni polinomi su

$$\alpha_k^t = t, \quad (\beta_k^t)^2 = \frac{h^2}{4}\frac{k^2(M^2k^2-1)}{4k^2-1}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dokaz.- Ovo je specijalni slučaj kontinualnih Hahnovih polinoma (za detalje videti [35, str. 31]), koji zadovoljavaju ortogonalnost

$$\int_{\mathbb{R}} \Gamma(a+\mathrm{i}x)\Gamma(b+\mathrm{i}x)\Gamma(c+\mathrm{i}x)\Gamma(d+\mathrm{i}x)p_n(x)p_m(x)\mathrm{d}x = \delta_{n,m}.$$

Izborom

$$a = d = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{M}\Big), \quad b = c = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{M}\Big),$$

i smenom $x := x/(Mh)$, dobijamo tvrđenje teoreme. $\square$

Daćemo i jedan rezultat vezan za linearni operator $\mathcal{A}$, čiji momenti ne verifikuju uslov (3.13).

Teorema 3.24 *Neka je linearni operator $\mathcal{A}$, zadat sa*

$$(\mathcal{A}p)(x) = p(x) + hx(\mathcal{D}p)(x), \quad p \in \mathcal{P}.$$

Tada linearni funkcionali $\mathcal{A}_t^{-1}$, $t \neq 0$, su regularni i zadati sa

$$\mathcal{A}_t^{-1}p = \begin{cases} \dfrac{t^{-1/h}}{h}\displaystyle\int_0^t x^{1/h-1}p(x)\,\mathrm{d}x, & t > 0, \\ p(0), & t = 0, \\ \dfrac{(-t)^{-1/h}}{h}\displaystyle\int_t^0 (-x)^{1/h-1}p(x)\,\mathrm{d}x, & t < 0. \end{cases}$$

Koeficijenti tročlane relacije su određeni sa

$$\alpha_k^t = \frac{1+(2k-1)h+2k^2h^2}{(1+(2k-1)h)(1+(2k+1)h)}t, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$(\beta_k^t)^2 = \frac{(1+(k-1)h)^2k^2h^2}{(1+(2k-2)h)(1+(2k-1)h)^2(1+2kh)}t^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dokaz.- Lako se dokazuje da je operator $\mathcal{A}$ izomorfizam na $\mathcal{P}$. Treba dokazati da čuva stepen polinoma pri preslikavanju, a zatim sve ide kao i u dokazima prethodnih teorema. Dalje razmatramo samo slučaj $t > 0$. Slučaj $t < 0$ se dokazuje na potpuno isti način. Lako se vidi da momenti ne verifikuju osobinu (3.13) jer imamo

$$\eta_0(x) = 1, \quad \eta_1(x) = (1+h)x, \quad \eta_2(x) = (1+2h)x^2,$$

ili, u opštem slučaju, $\eta_k(x) = (1+kh)x^k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Zbog linearnosti jednostavno dobijamo momente $\mu_k(t) = t^k/(1+kh)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Sada je lako proveriti da su momenti μ_k^t funkcionala $\mathcal{A}_t^{-1}$ u tvrđenju teoreme, upravo, oni koji su nam neophodni. Dakle, imamo

$$\mu_k^t = \mathcal{A}_t^{-1}x^k = \frac{t^{-1/h}}{h}\int_0^t x^{1/h+k-1}\mathrm{d}x = \frac{t^k}{1+kh}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Ova jednakost rešava problem interpretacije. Da bismo odredili koeficijente tročlane relacije, polazimo od integralnog zapisa ortogonalnosti, za specijalan slučaj Jacobijevih polinoma P_n, kada su $\alpha = 0$ i $\beta = 1/h - 1$ (videti [12, str. 143], [35, str. 38], [46, str. 135]),

$$\int_{-1}^1 (1+x)^{1/h-1}P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = 0, \quad n \neq m.$$

Smenom $u := (1+x)t/2$, dobijamo sledeću ortogonalnost

$$\Big(\frac{2}{t}\Big)^{1/h}\int_0^t u^{1/h-1}P_n\Big(\frac{2u}{t}-1\Big)P_m\Big(\frac{2u}{t}-1\Big)\mathrm{d}u.$$

Prethodno znači da su polinomi ortogonalni u odnosu na meru u interpretaciji, u stvari, specijalan slučaj Jacobijevih polinoma sa $\alpha = 0$ i $\beta = 1/h-1$, gde je dodatno argument smenjen sa $x := (x+1)t/2$. Odavde dobijamo koeficijente tročlane rekurentne relacije kako su dati u tvrđenju teoreme.

Za slučaj $t < 0$, polazimo od integralnog zapisa ortogonalnosti za Jacobijeve polinome, za $\alpha = 1/h - 1$ i $\beta = 0$, i uvodimo smenu $u := (1-x)t/2$. $\square$

Na osnovu prethodnog vidimo da se, u slučaju kada momenti operatora $\mathcal{A}$ ne verifikuju osobinu (3.13), može desiti da za različite vrednosti t linearni funkcionali $\mathcal{A}_t^{-1}$ mogu biti bilo regularni ili neregularni, kao što je, u prethodnom primeru, slučaj da je $\mathcal{A}_0^{-1}$ neregularan, dok su svi ostali linearni funkcionali $\mathcal{A}_t^{-1}$, $t \neq 0$, regularni.

Sada za pojedine operatore $\mathcal{A}$, čiji momenti zadovoljvaju uslov (3.13), skalarni proizvod

$$\langle p, q\rangle = \int \mathrm{d}\sigma(x)(\mathcal{A}_x^{-1}pq), \quad p, q \in \mathcal{P},$$

možemo da predstavimo preko dvostrukog integrala, što omogućava konstrukciju niza ortogonalnih polinoma. To nam praktično rešava i pitanje konstrukcije generalisanih Gaussovih kvadraturnih formula tipa I (3.3). O ovome mnogo više biće reči u sekciji 3.5, posvećenoj konstrukciji generalisanih Gaussovih kvadraturnih formula.

3.3 Generalisane Gaussove kvadrature tipa II

Prelazimo sada na proučavanje generalisanih Gaussovih kvadraturnih formula tipa II. Prvo uvodimo definicije koje precizno postavljaju problem.

Definicija 3.12 Neka je $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}$, skup svih n-torki $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ nenegativnih realnih brojeva sa sledećim osobinama

$$\mathcal{H}_n = \left\{ \mathbf{h} \;\Big|\; \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu < 1,\ h_\nu \geq 0,\ \nu = 1, \ldots, n \right\}.$$

Skup $\mathcal{H}_n$ zovemo skup dozvoljenih dužina. Sa $\mathcal{X}_n(\mathbf{h})$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$, označavamo skup svih n-torki $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ realnih brojeva sa osobinom

$$\mathcal{X}_n(h) = \{\mathbf{x} \,|\, -1 < x_1 - h_1,\ x_k + h_k < x_{k+1} - h_{k+1},\ k = 1, \ldots, n-1,\ x_n + h_n < 1\}.$$

Skup $\mathcal{X}_n(\mathbf{h})$ zovemo skup dozvoljenih čvorova.

U sledećoj definiciji preciziramo sa kakvim merama radimo.

Definicija 3.13 Sa μ označamo nenegativnu apsolutno neprekidnu meru sa $\mathrm{supp}(\mu) = [-1, 1]$, takvu da važi $\mu([a,b]) \neq 0$ za svako $a, b \in [-1,1]$, $a < b$. Sa w označavamo težinu zadatu merom μ, tj. $w = \mathrm{d}\mu/\mathrm{d}x$.

Ovakva definicija mere μ, u stvari, predstavlja meru koja se redovno u literaturi predstvalja težinom w. Mi se držimo označavanja preko mere μ, umesto preko težine w, jer to nalazimo kao pogodnije. U slučajevima kada se rezultati lakše i lepše prikazuju preko težinske funkcije, naravno, koristićemo težinu. Dakle, obe oznake su ravnopravne.

Definicija 3.14 Neka je $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$. Generalisana Gaussova intervalna kvadraturna formula tipa II je kvadraturna formula sledećeg oblika

$$\int p(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{2h_k} \int_{x_k-h_k}^{x_k+h_k} p(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad p \in \mathcal{P}_{2n-1}, \tag{3.28}$$

pod uslovom $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_n(\mathbf{h})$. U slučaju $h_\nu = 0$, podrazumevamo, zbog neprekidnosti,

$$\frac{1}{2h_\nu} \int_{x_\nu-h_\nu}^{x_\nu+h_\nu} p(x)\mathrm{d}\mu(x) = p(x_\nu)w(x_\nu).$$

Često linearni funkcional koji se pojavljuje na desnoj strani u jednakosti (3.28) označavamo sa $G_n(\cdot; \mu, \mathbf{h})$, tj.

$$G_n(p; \mu, \mathbf{h}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{2h_k} \int_{x_k-h_k}^{x_k+h_k} p(x)\mathrm{d}\mu(x). \tag{3.29}$$

Slično, kao i kod standardne Gaussove kvadraturne formule (videti [47, str. 164], [12, str. 32], [22, str. 22]), tačke x_k, $k = 1, \ldots, n$, zovemo čvorovima kvadraturne formule, a vrednosti μ_k, zovemo težinama kvadraturne formule.

Problem može biti razmatran u mnogo širem kontekstu. Očigledno, definisana kvadraturna formula ima proste čvorove x_k. Direktan smer za uopštavanje može da bude kvadraturna formula sa višestrukim čvorovima.

Definicija 3.15 Neka je $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$ i neka su $j_1, \ldots, j_n$ neparni prirodni brojevi, takvi da važi $\sum_{k=1}^{n} j_k = N + 1$. Generalisana Gaussova intervalna kvadraturna formula sa višetrukim čvorovima tipa II je kvadraturna formula sledećeg oblika

$$\int p(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{j_k-1} \frac{\mu_{k,m}}{2h_k} \int_{x_k-h_k}^{x_k+h_k} p(x)x^m\mathrm{d}\mu(x), \quad p \in \mathcal{P}_{N+n}, \tag{3.30}$$

pod uslovom $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_n(\mathbf{h})$. U slučaju $h_\nu = 0$, podrazumevamo, zbog neprekidnosti,

$$\frac{1}{2h_\nu} \int_{x_\nu-h_\nu}^{x_\nu+h_\nu} p(x)x^m\mathrm{d}\mu(x) = p(x_\nu)(x_\nu)^m w(x_\nu).$$

Vrednosti $\mu_{k,m}$, $k = 1, \ldots, n$, $m = 0, \ldots, j_k - 1$, zovu se težinski koeficijenti višeg reda.

Problem u nešto širem obliku, sa ovakvom definicijom kvadraturne formule prvi put je razmatran u [8]. Veći broj autora je posmatrao problem egzistencije generalisanih Gaussovih kvadraturnih formula, pored već pomenutih [83] i [84] (videti, na primer, Pitanuer i Reimer [87], Shapirov [93], Kuz'mina [37], Babenko [4], Motornyi [80]).

U [87] egzistencija rešenja je pokazana u slabijem smislu, nego što je prethodna definicija. Naime, neka je

$$\int p(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k p(x_k), \quad p \in \mathcal{P}_{2n-1},$$

Gaussova kvadraturna formula za meru μ. Za n-torku $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$, $c_k < x_k$, $k = 1, \ldots, n$, koja je dovoljno blizu n-torki $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, postoji n-torka $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$, $x_k < d_k$, $k = 1, \ldots, n$, tako da je interpolaciona kvadraturna formula

$$\int p(x)\mathrm{d}\mu(x) \approx \sum_{k=1}^{n} \mu_k \int_{c_k}^{d_k} p(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

Gaussova formula, tj. da je ona tačna za svako $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$. Sličan rezultat je dat u [37] za kvadraturnu formulu sa višestrukim čvorovima.

Primedba 3.1 Slučaj kada važi $\sum_{k=1}^{n} h_k = 1$ je trivijalan. U tom slučaju, jednostavnim izborom $\mu_k = 2h_k$, za kvadraturnu formulu sa prostim čvorovima, i $\mu_{k,m} = 2h_k\delta_{m,0}$ za kvadraturnu formulu sa višestrukim čvorovima, generalisana Gaussova kvadraturna formula postaje tačna za svaku μ-integrabilnu funkciju. Zato u definiciji $\mathcal{H}_n$ stoji znak strogo manje ($<$), a ne manje ili jednako ($\leq$).

Primedba 3.2 Specijalan slučaj Legendreove mere uz $h_1 = \ldots = h_n = h$ se svodi na generalisane Gaussove kvadraturne formule tipa I definisane u (3.3), za koju znamo da je jedinstvena prema teoremi 3.2.

Problem koji mi dalje razmatramo u ovoj glavi sastoji se u određivanju čvorova x_k i težina μ_k, $k = 1, \ldots, n$, za specijalan slučaj Jacobijeve mere

$$\mathrm{d}\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\chi_{[-1,1]}(x)\mathrm{d}x, \quad \alpha, \beta > -1.$$

Naravno, za bilo kakvo razmatranje konstrukcije neophodan nam je rezultat o egzistenciji kvadraturne formule (3.28). Važan rezultat koji nam je od interesa je i jedistvenost rešenja.

3.3.1 Egzistencija rešenja

Egzistencija rešenja je problem koji može da se dokaže za mnogo opštiji slučaj. Podsetimo se da je skup funkcija $U_N = \{u_0, \ldots, u_N\}$ Čebiševljev ili Haarov na $[-1, 1]$, pod uslovom da svaki uopšteni polinom po u_k, $k = 0, 1, \ldots, N$, $u = \sum a_k u_k$, u slučaju da nije identički jednak nuli, nema više od N različitih nula u $[-1, 1]$ (videti [47, str. 10], [18, str. 68]). Skup funkcija $V_N = \{v_0, v_1, \ldots, v_N\}$, $v_0 \equiv 1$, je Markovljev sistem funkcija na $[-1, 1]$, ako je svaki skup $V_\nu = \{v_0, v_1, \ldots, v_\nu\}$, $\nu = 0, 1, \ldots, N$, Čebiševljev sistem funkcija (videti [18, str. 68]).

U [8] dokazana je sledeća teorema.

Teorema 3.25 *Neka su $j_1, \ldots, j_n$ proizvoljni neparni prirodni brojevi tako da važi $\sum_{k=1}^{n} j_k = N + 1$ i neka je $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$. Za svaku meru μ iz definicije 3.13 i svaki Čebiševljev skup neprekidnih funkcija $U_{N+n} = \{u_0, u_1, \ldots, u_{N+n}\}$ na intervalu $[-1, 1]$, postoji generalisana Gaussova intervalna kvadraturna formula tipa II sa višestrukim čvorovima*

$$\int p(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{j_k-1} \frac{\mu_{k,m}}{2h_k} \int_{x_k-h_k}^{x_k+h_k} p(x)u_m(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad p \in \mathrm{Lin}(U_{N+n}),$$

takva da važi $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}_n(\mathbf{h})$ *i*

$$\mu_{k,m} \begin{cases} > 0, & m = 0, \\ \neq 0, & m > 0. \end{cases} \tag{3.31}$$

S obzirom da je skup funkcija $\{1, x, \ldots, x^{N+n}\}$ Čebiševljev na intervalu $[-1, 1]$ (videti [46, str. 10], [18, str. 67]), očigledno je da ova teorema rešava pitanje egzistencije kvadraturne formule i za naš slučaj Jacobijeve mere.

Teorema daje još jednu značajnu informaciju koja se odnosi na težine $\mu_{k,m}$. U slučaju $j_1 = \ldots = j_n = 1$, tj. u slučaju kvadraturne formule sa prostim čvorovima, težine su pozitivne što daje punu analogiju sa Gaussovim kvadraturnim formulama (videti [47, str. 164], [22, str. 22], [12, str. 32]).

Jedna mana ovog rezultata je, naravno, ta što teorema tvrdi samo egzistenciju i dokaz nije konstruktivan, tako da je problem određivanja čvorova i težina kvadraturne formule ovog tipa nerešen.

3.3.2 Jedinstvenost rešenja

Dokaz jedinstvenosti generalisane Gaussove kvadraturne formule tipa II se pokazuje kao vrlo težak problem.

Problem jedinstvenosti, za slučaj kvadraturne formule sa prostim čvorovima, je u potpunosti rešen samo za slučaj kada su svi h_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, međusobno jednaki. U tom slučaju, dokaz jedinstvenosti kvadraturne formule (3.28) može se naći u [8]. Precizna formulacija teoreme je sledeća:

Teorema 3.26 *Neka je skup* $U_{2n-1} = \{u_0, u_1, \ldots, u_{2n-1}\}$ *Čebiševljev sistem neprekidnih funkcija i neka je mera* μ *kao u definiciji* 3.13. *Za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i* $0 \leq h < 2/n$, *postoji jedinstvena* n*-torka* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_n(h)$, *tako da je interpolaciona kvadraturna formula*

$$\int p(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{2h_k} \int_{x_k-h_k}^{x_k+h_k} p(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

tačna za svako $p \in \mathrm{Lin}(U_{2n-1})$.

Još jedan rezultat koji se odnosi na jedinstvenost kvadraturne formule (3.28) dat je u [9]. Rezultat tvrdi da je Gaussova intervalna kvadraturna formula tipa II (3.28) jedinstvena, pod uslovom da je μ Legendreova mera. Precizna formulacija teoreme je sledeća:

Teorema 3.27 *Za svako zadato* $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$ *postoji jedinstvena* n*-torka* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_n(\mathbf{h})$, *takva da je interpolaciona kvadraturna formula*

$$\int_{-1}^{1} p(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{2h_k} \int_{x_k-h_k}^{x_k+h_k} p(x)\mathrm{d}x,$$

tačna za svako $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$.

U [59] dokazali smo sledeći rezultat.

Teorema 3.28 *Za svako zadato* $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$ *postoji jedinstvena* n*-torka* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_n(\mathbf{h})$, *takva da je intrepolaciona kvadraturna formula sa Jacobijevom težinom, za svako* $\alpha, \beta > -1$,

$$\int_{-1}^{1} p(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{2h_k} \int_{x_k-h_k}^{x_k+h_k} p(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\mathrm{d}x \tag{3.32}$$

tačna za svako $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$.

Na kraju pomenimo da je jedinstvenost kvadraturne formule važna osobina. Naime, pretpostavimo da imamo bar dve kvadraturne formule, na primer oblika (3.28), za istu meru μ i za svaki $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$. Jasno je da dva linearna funkcionala $G_n(\cdot;\mu,\mathbf{h}_n)$ i $G'_n(\cdot;\mu,\mathbf{h}_n)$, definisana pomoću (3.29), koji su formirani od dva moguća izbora čvorova kvadraturne formule, ne moraju imati istu ekstenziju na širi skup od skupa $\mathcal{P}_{2n-1}$, tako da je teško razmatrati pitanja konvergnecije nizova linearnih funkcionala G_n ka vrednosti integrala.

Primetimo prvo da formula (3.32) postoji, što sleduje iz teoreme 3.25. Za dokaz jedinstvenosti kvadraturne formule (3.32), potrebne su nam sledeće definicije.

Definicija 3.16 Sa $\hat{\mathcal{X}}_n(\mathbf{h})$, za svako zadato $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$, označavamo sledeći skup

$$\hat{\mathcal{X}}_n(\mathbf{h}) = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid -1 \le x_1 - h_1 \le x_1 + h_1 \le \ldots \le x_n - h_n \le x_n + h_n \le 1\big\}.$$

Sa $\widetilde{\mathcal{X}}_n(\mathbf{h})$, za svako zadato $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$, označavamo sledeći skup

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{X}}_n(\mathbf{h}) \quad = \quad & \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid -1 \le x_1 - h_1 \le x_1 + h_1 \\ & \qquad \le \cdots \le x_n - h_n \le x_n + h_n \le 1, x_1 \ne -1,\ x_n \ne 1\big\}.\end{aligned}$$

Ove skupove zovemo formalni skupovi čvorova kvadraturne formule (3.32) za zadate dužine $\mathbf{h}$.

Skupovi $\widetilde{\mathcal{X}}_n(\mathbf{h})$ i $\hat{\mathcal{X}}_n(\mathbf{h})$, $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$, se razlikuju samo u slučaju kada je $\mathbf{h}$ takva n-torka da važi $h_1 = 0$ ili $h_n = 0$. Za takvo $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$, element $\mathbf{x} \in \widetilde{\mathcal{X}}_n(\mathbf{h})$ ne može biti n-torka za koju je $x_1 = -1$ ili $x_n = 1$.

Sa I_k označavamo otvoreni interval $(x_k - h_k, x_k + h_k)$, $k = 1, \ldots, n$, a sa $\overline{I}_k$ označavamo zatvaranje intervala I_k, tj. $\overline{I}_k = [x_k - h_k, x_k + h_k]$.

Kao i kod klasične Gaussove formule, potrebna nam je jedinstvenost rešenja izvesnog interpolacionog problema. Sledeća lemma igra značajnu ulogu u dokazu (videti [59]).

Lema 3.9 (i) *Neka je* $j_1, \ldots, j_n$ *sistem brojeva sa osobinom* $1 \le j_k \le 2$, $k = 1, \ldots, n$, *i neka je* $N = -1 + \sum_{k=1}^{n} j_k$. *Za svako* $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$, $\mathbf{x} \in \widetilde{\mathcal{X}}_n(\mathbf{h})$ *i vrednosti* $f_{0,k}$, $f_{1,k}$, $k = 1, \ldots, n$, *postoji jedinstveni polinom* $P \in \mathcal{P}_N$, *tako da važi*

$$\frac{1}{2h_k} \int_{I_k} P^{(m)}(x)\mathrm{d}\mu(x) = f_{m,k}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad m = 0, j_k - 1, \tag{3.33}$$

gde je μ Jacobijeva mera.

(ii) *Neka je $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$ takvo da je $h_1 = 0$ i/ili $h_n = 0$. Neka su čvorovi $\mathbf{x} \in \hat{\mathcal{X}}_n(\mathbf{h})$ takvi da je k_{-1} njih jednako -1 i k_1 njih jednako 1, respektivno. (Primetimo da k_{-1} može biti nula i k_1 može biti nula, ali nikako oba nisu jednaka nula.) Neka su $f_{0,k}$ i $f_{1,k}$, $k = k_{-1}+1, \ldots, n-k_1$, dva niza realnih brojeva i neka je f realni broj. Tada, postoji jedinstveni polinom $P \in \mathcal{P}_{2(n-k_{-1}-k_1)+r-1}$, takav da u slučaju $k_1 = 0$*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h_k}\int_{I_k} P^{(m)}(x)\mathrm{d}\mu(x) &= f_{m,k}, \quad k = k_{-1}+1, \ldots, n-k_1, \quad m = 0, 1, \\ P(-1) &= f, \end{aligned} \tag{3.34}$$

sa $r = 1$, u slučaju $k_{-1} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h_k}\int_{I_k} P^{(m)}(x)\mathrm{d}\mu(x) &= f_{m,k}, \quad k = k_{-1}+1, \ldots, n-k_1, \quad m = 0, 1, \\ P(1) &= f, \end{aligned} \tag{3.35}$$

sa $r = 1$, u slučaju $k_{-1} \neq 0$ i $k_1 \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h_k}\int_{I_k} P^{(m)}(x)\mathrm{d}\mu(x) &= f_{m,k}, \quad k = k_{-1}+1, \ldots, n-k_1, \quad m = 0, 1, \\ P(-1) &= P(1) = f, \end{aligned} \tag{3.36}$$

sa $r = 2$, gde je μ Jacobijeva mera.

Dokaz.- Prvo dajemo dokaz dela (i). Jasno je da je sistem uslova (3.33) koje mora da zadovolji polinom P, linearan sistem jednačina po nepoznatim koeficijentima polinoma P. Kako tražimo polinom stepena N, polinom P ima $N+1$ nepoznatih koeficijenata, razvijanjem sistema (3.33) dobijamo tačno $N+1$ jednačinu. Ako pokažemo da homogeni sistem (3.33), tj. sistem za koji važi $f_{m,k} = 0$, $k = 1, \ldots, n$, $m = 0, j_k - 1$, ima samo trivijalno rešenje $P \equiv 0$, onda nehomogeni sistem ima jedinstveno rešenje (videti [65, str. 240]). Pokazaćemo da homogeni sistem ima samo trivijalno rešenje.

Pretpostavimo obratno. Neka homogeni sistem jednačina (3.33) ima netrivijalno rešenje $P \in \mathcal{P}_N$. Onda, s obzirom da svaki $f_{m,k} = 0$, $k = 1, \ldots, n$, $m = 0, j_k - 1$, mora biti

$$\frac{1}{2h_k}\int_{I_k} P^{(m)}(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \quad m = 0, j_k - 1.$$

Ako $h_k \neq 0$, s obzirom da je μ pozitivna na svakom intervalu I_k, mora biti da P menja znak u I_k. Ako je $j_k = 1$, zaključujemo da P ima bar jednu nulu u I_k, ako je $j_k = 2$ zaključujemo da P mora da ima bar dve nule u I_k. Znači, za svako $h_k \neq 0$, polinom P ima bar j_k nula u intervalu I_k. Neka je sada $h_k = 0$, onda integral degeneriše u $P(x_k)w(x_k) = 0$ za $m = 0$ i u $P'(x_k)w(x_k) = 0$ za $m = 1$. S obzirom da $x_k \neq \pm 1$, imamo $0 < w(x_k) < +\infty$, odakle zaključujemo $P(x_k) = 0$ za $j_k = 1$ i $P(x_k) = P'(x_k) = 0$ za $j_k = 2$. Dakle, polinom P za $h_k = 0$ ima bar j_k nula u tački $x_k \neq \pm 1$. Zaključujemo da polinom P mora da ima bar $\sum_{k=1}^{n} j_k = N+1$ nula u intervalu $(-1, 1)$. To, naravno, znači da je P bar polinom stepena $N+1$, što je suprotno pretpostavci $P \in \mathcal{P}_N$, pa je $P \equiv 0$ jedino rešenje homogenog problema u $\mathcal{P}_N$.

Slučaj pod (ii) je malo drugačiji. Opet možemo da izrazimo uslove (3.34), (3.35) i (3.36) kao sistem linearnih jednačina po nepoznatim koeficijentima polinoma P. Zavisno od sistema koji razmatramo, tj. zavisno od vrednosti k_{-1} i k_1, tvrdimo da je rešenje jedinstveno u $\mathcal{P}_{2(n-k_{-1}-k_1)+r-1}$. Broj jednačina u sistemima (3.34), (3.35) i (3.36) iznosi $2(n-k_{-1}-k_1)+r$, gde je

$$r = \begin{cases} 1, & k_{-1}=0 \ \text{ ili } \ k_1 = 0, \\ 2, & k_{-1} \neq 0, \ k_1 \neq 0. \end{cases}$$

Ponovo, dokazaćemo da homogeni sistem ima samo trivijalno rešenje, $P \equiv 0$, u skupu $\mathcal{P}_{2(n-k_{-1}-k_1)+r-1}$, odakle zaključujemo da nehomogeni sistem ima jedinstveno rešenje (videti [65, str. 240]). Jasno je da polinom P mora na svakom I_k, $k = k_{-1}+1, \ldots, n-k_1$, da ima bar dve nule (računajući višestrukost) jer je mera μ pozitivna na svakom od ovih intervala I_k. Takođe, zavisno od r, ili zavisno od vrednosti k_{-1} i k_1, polinom P mora imati bar jednu nulu u -1 i/ili 1. Ukupno, polinom P ima bar $2(n-k_{-1}-k_1)+r$ nula. Jedini polinom iz $\mathcal{P}_{2(n-k_{-1}-k_1)+r-1}$ koji ima $2(n-k_{-1}-k_1)+r$ nula je polinom koji je identički jednak nuli. To znači da homogeni sistem ima samo trivijalno rešenje, pa interpolacioni problem ima jedinstveno rešenje. $\square$

Uvodimo još jedan skup dužina koji će nam omogućiti da lakše izrazimo rezultate.

Definicija 3.17 Sa $\mathcal{H}_n^\varepsilon$, za $0 < \varepsilon < 1$, označavamo podskup skupa $\mathcal{H}_n$ sa sledećim osobinama

$$\mathcal{H}_n^\varepsilon = \left\{ \mathbf{h} \in \mathcal{H}_n \ \Big| \ \sum_{k=1}^n h_k \le 1-\varepsilon, \ h_k \ge 0, \ k = 1, \ldots, n \right\}.$$

Sada smo spremni da dokažemo sledeću lemu, čiji se dokaz može naći u [59].

Lema 3.10 *Za svaki ε, $0 < \varepsilon < 1$, postoji $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$, takav da svaka n-torka dužina $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n^\varepsilon$ i odgovarajući čvorovi $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_n(\mathbf{h})$ kvadraturne formule* (3.32) *zadovoljavaju sledeće uslove*

$$x_1 - h_1 + 1 > \varepsilon_0, \ x_{k+1} - h_{k+1} - x_k - h_k > \varepsilon_0, \ k = 1, \ldots, n-1, \ 1 - x_n - h_n > \varepsilon_0. \quad (3.37)$$

Dokaz.- Pretpostavljamo suprotno. Onda, za svako δ, $0 < \delta < \varepsilon$, postoje $\mathbf{h}_\delta \in \mathcal{H}_n^\varepsilon$ i $\mathbf{x}_\delta \in \mathcal{X}_n(\mathbf{h}_\delta)$, tako da je bar jedna od nejednakosti u (3.37) narušena sa $\varepsilon_0 = \delta$. Kako su skupovi $\{\mathbf{h}_\delta\}$ i $\{\mathbf{x}_\delta\}$, $0 < \delta < \varepsilon$, ograničeni, za svaki od njih postoji bar jedna tačka nagomilavanja. Označićemo te tačke nagomilavanja sa $\mathbf{h}^0$ i $\mathbf{x}^0$, respektivno. Kako je $\mathcal{H}_n^\varepsilon$ zatvoren skup, to imamo $\mathbf{h}^0 \in \mathcal{H}_n^\varepsilon$, ali $\mathcal{X}_n(\mathbf{h})$ je otvoren za svako $\mathbf{h}$, što znači da $\mathbf{x}^0$ ne mora biti element skupa $\mathcal{X}_n(\mathbf{h}^0)$. Sa $\mathbf{h}^m$ i $\mathbf{x}^m$ označimo nizove koji konvergiraju ka $\mathbf{h}^0$ i $\mathbf{x}^0$, respektivno.

Razlikujemo dva slučaja:

(i) kada $x_1^m \to -1$ i $h_1^m \to 0$ i/ili $x_n^m \to 1$ i $h_n^m \to 0$, dok $m \to +\infty$;

(ii) kada nemamo $x_1^m \to -1$ ili $x_n^m \to 1$, dok $m \to +\infty$.

U slučaju (ii) dokaz je jednostavniji i zato prvo dokazujemo taj slučaj. Dakle, za nizove h_1^m i x_1^m nemamo $h_1^m \to 0$ i $x_1^m \to -1$; slično za nizove h_n^m i x_n^m.

Koristeći lemu 3.9, deo (i), jasno je da sledeći interpolacioni problem

$$\frac{1}{2h_\nu}\int_{I_\nu} L_{n,k}(x)\mathrm{d}\mu(x) = \delta_{k,\nu}, \quad \nu = 1,\dots,n,$$

ima jedinstveno rešenje $L_{n,k} \in \mathcal{P}_{n-1}$ za svaki $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n^\varepsilon$ i odgovarajući $\mathbf{x} \in \widetilde{\mathcal{X}}_n(\mathbf{h})$.

Pokažimo da su koeficijenti polinoma $L_{n,k}$ neprekidne funkcije od $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n^\varepsilon$ i odgovarajućeg $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_n(\mathbf{h})$. Koeficijenti polinoma $L_{n,k}$ su rešenje linearnog sistema jednačina i rešenje tog sistema jednačina je jedinstveno za svaki $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$ i $\mathbf{x} \in \widetilde{\mathcal{X}}_n(\mathbf{h})$. Kako su još funkcije

$$\frac{1}{2h_k}\int_{x_k-h_k}^{x_k+h_k} x^\nu \mathrm{d}\mu(x), \quad \nu = 0,\dots,n,$$

neprekidne od $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n^\varepsilon$, $\mathbf{x} \in \widetilde{\mathcal{X}}_n(\mathbf{h})$, to je i determinanta sistema neprekidna funkcija od $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n^\varepsilon$, $\mathbf{x} \in \widetilde{\mathcal{X}}_n(\mathbf{h})$, pa su i rešenja neprekidne funkcije od $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n^\varepsilon$, $\mathbf{x} \in \widetilde{\mathcal{X}}_n(\mathbf{h})$.

Zapazimo još, da pri svakom $\mathbf{h}^m$ i $\mathbf{x}^m$, za svaki polinom $P \in \mathcal{P}_{2n-1}$ važi

$$\int P(x)\mathrm{d}\mu(x) = G_n^m(P) = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k^m}{2h_k^m}\int_{I_k^m} P(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Zato je niz $G_n^m(P)$ konstantan, pa stoga i konvergentan. Takođe, za svako $\mathbf{x}^m$ i $\mathbf{h}^m$, G_n^m je generalisana Gaussova intervalna kvadraturna formula koja je interpolacionog tipa, pa se zbog toga težine μ_k^m mogu izraziti u obliku

$$\mu_k^m = \int L_{n,k}^m(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

gde je $L_{n,k}^m$ jedinstveni polinom koji je rešenje interpolacionog problema

$$\frac{1}{2h_\nu}\int_{I_\nu} L_{n,\nu}^m(x)\mathrm{d}\mu(x) = \delta_{k,\nu}.$$

Kako su polinomi $L_{n,k}^m$, $k = 1,\dots,n$, neprekidne funkcije od $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$ i $\mathbf{x} \in \widetilde{\mathcal{X}}_n(\mathbf{h})$, to su zbog Lebesguove teoreme o dominantnoj konvergenciji (videti [74, str. 83]) i težinski koeficijenti μ_k^m neprekidne funkcije od $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$ i $\mathbf{x} \in \widetilde{\mathcal{X}}_n(\mathbf{h})$. Prema tome, možemo govoriti o intervalnoj kvadraturnoj formuli koja ima čvorove $\mathbf{x}^0$, dužine $\mathbf{h}^0$ i težine μ_k^0, a koja je Gaussova, što znači da je tačna za svaki polinom iz $\mathcal{P}_{2n-1}$.

Dakle, imamo Gaussovu intervalnu kvadraturnu formulu sa čvorovima $\mathbf{x}^0$, dužine $\mathbf{h}^0$ i težine μ_k^0, $k = 1,\dots,n$, tako da važi bar jedna od jednakosti

$$x_1 - h_1 = -1, \quad x_k + h_k = x_{k+1} - h_{k+1}, \quad k = 1,\dots,n-1, \quad x_n + h_n = 1,$$

pri čemu znamo da $x_1 \neq -1$ i $x_n \neq 1$. Prema tome, u zavisnosti od toga koja jednakost važi konstruišemo na različite načine polinom $P \in \mathcal{P}_{2n-1}$, za koji je $\int P\mathrm{d}\mu > 0$, a u isto vreme $G_n^0(P;\mu,h^0) = 0$.

Ako prva jednakost važi, onda polinom P određujemo iz sledećih uslova

$$\frac{1}{2h_1^0}\int_{I_1^0} P(x)\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{2h_k}\int_{I_k^0} P^{(j)}(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0, \quad k = 2,\ldots,n, \quad j = 0,1.$$

U ovom sluăju, $h_1^0 \neq 0$ jer, po pretpostavci, nije $x_1 = -1$. Prema lemi (3.9), jasno je da $P \in \mathcal{P}_{2n-1}$ postoji.

U slučaju da važi $x_k + h_k = x_{k+1} - h_{k+1}$, za neko k, $1 \leq k \leq n-1$, onda postavljamo sledeći interpolacioni problem

$$\frac{1}{2h_k^0}\int_{I_k^0} P(x)\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{2h_{k+1}^0}\int_{I_{k+1}^0} P(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0,$$

$$\frac{1}{2h_\nu^0}\int_{I_\nu^0} P^{(j)}(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0, \quad \nu \neq k, k+1, \quad j = 0,1.$$

Ponovo, zbog leme (3.9), polinom $P \in \mathcal{P}_{2n-1}$ postoji. U slučaju da važi $h_k^0 = h_{k+1}^0$, prve dve jednakosti su iste pa zato, u tom slučaju, zahtevamo da prve dve jednakosti budu zamenjene sa

$$P(x_k^0) = P'(x_k^0) = 0.$$

I za ovakav promenjen sistem jednačina, na osnovu leme (3.9), znamo da polinom $P \in \mathcal{P}_{2n-1}$ postoji.

Ako poslednja jednakost važi, problem možemo tretirati na isti način kao kada je ispunjena prva jednakost, tako da to ne razmatramo.

Nule polinoma P su, na osnovu dokaza leme, sadržane u skupu

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} I_k^0.$$

Pažljivim razmatranjem se jasno zaključuje da polinom ima konstantan znak na $B = [-1,1] \backslash A$. Skup B ima pozitivnu meru $\mu(B) \neq 0$ jer znamo da $\mathbf{h}^0 \in \mathcal{H}_n^\varepsilon$, pa A ne može da prekrije ceo interval $[-1,1]$. Dakle, važi

$$\int_A P(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_k \int_{I_k^0} P(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

Onda je očigledno da mora biti

$$\int_B P(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int P(x)\mathrm{d}\mu(x) \neq 0,$$

što je kontradikcija, s obzirom da je $G_n^0(P;\mu,h^0) = 0$. Ovim je u potpunosti završen dokaz, pod uslovom da nije $x_1^m \to -1$ i/ili $x_n^m \to 1$, dok $m \to +\infty$.

Prelazimo sada na slučaj kada imamo $x_1^m \to -1$ i/ili $x_n^m \to 1$, dok $m \to +\infty$. U tom slučaju, imamo $x_1^m \to -1$ i $h_1^m \to 0$ i/ili $x_n^m \to 1$ i $h_n^m \to 0$, dok $m \to +\infty$. Intervale za koje važi $x_k^m \to -1$ i $h_k^m \to 0$, kao i intervale za koje važi $x_k^m \to 1$ i $h_n^m \to 0$, dok $m \to +\infty$, zvaćemo kolabirajući intervali. Primetimo da ako imamo $x_1 \to -1$ i

$h_1^m \to 0$, dok $m \to +\infty$, možemo imati za još neke intervale (moguće i sve) $x_\nu^m \to -1$ i $h_\nu^m \to 0$, za $\nu \le k_{-1} \le n$. Slična je situacija i za drugi kraj intervala $[-1, 1]$.

Iz pretpostavke sleduje da je Gaussova intervalna kvadraturna formula sa čvorovima $\mathbf{x}^m$, dužinama $\mathbf{h}^m$ i težinama μ_k^m, $k = 1, \ldots, n$, za $m \in \mathbb{N}$, tačna za svaki polinom $P \in \mathcal{P}_{2n-1}$. Ako uzmimo konstantan polinoma $P \equiv 1$, onda da važi

$$\mu([-1, 1]) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k^m \frac{1}{2h_k^m} \mu(I_k^m), \quad m \in \mathbb{N},$$

pa imamo da je granična vrednost desne strane upravo $\mu([-1, 1])$, a s obzirom da su, prema relaciji (3.31), težine pozitivne za svako $m \in \mathbb{N}$, to je i svaki sabirak pozitivan i imamo

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \mu_k^m \frac{1}{2h_k^m} \mu(I_k^m) \le \mu([-1, 1]).$$

Naravno, odavde zaključujemo da su nizovi težina μ_k^m, $m \in \mathbb{N}$, za intervale I_k^0 koji ne kolabiraju, ograničeni nizovi.

Pretpostavimo sada da imamo $N < n$ intervala koji ne kolabiraju. Označimo sa k_{-1} broj intervala koji kolabira u -1, a sa k_1 broj intervala koji kolabira u 1. Jasno, $k_{-1} + N + k_1 = n$. Onda postavimo sledeći interpolacioni problem

$$\frac{1}{2h_k} \int_{I_k^0} P_1^{(j)}(x) \mathrm{d}\mu(x) = 0, \quad k = k_{-1} + 1, \ldots, n - k_1, \quad j = 0, 1.$$

Takođe, ako je $k_{-1} \ne 0$, zahtevamo $P_1(-1) = 1$, a ako je $k_1 \ne 0$, zahtevamo $P_1(1) = 1$. Takav polinom postoji, prema lemi (3.9), deo (ii), i ima stepen manji od $2n - 1$. Sada polazeći od

$$\int P_1(x) \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k^m \frac{1}{2h_k^m} \int_{I_k^m} P_1(x) \mathrm{d}\mu(x), \quad m \in \mathbb{N},$$

po konstrukciji za intervale koji ne kolabiraju ka ± 1, imamo da odgovarajući integrali konvergiraju u nulu, a težinski koeficijenti su ograničeni, pa takvi intervali imaju sve manji doprinos kada m neograničeno raste. Za kolabirajuće intervale ka -1 imamo da supremum postoji po $m \in \mathbb{N}$, tj. važi

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \mu_\nu^m \frac{1}{2h_\nu^m} \int_{I_\nu^m} P_1(x) \mathrm{d}\mu(x) = A_\nu(P_1) < +\infty, \quad \nu = 1, \ldots, k_{-1}.$$

Slično imamo i za intervale koji kolabiraju ka $+1$.

Sada primenjujemo teoremu o srednjoj vrednosti integrala (videti [66, str. 260]) na intervale koji kolabiraju. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \mu_\nu^m \frac{1}{2h_\nu^m} \int_{I_\nu^m} P_1(x) \mathrm{d}\mu(x) &= \overline{\lim_{m\to+\infty}} \mu_\nu^m P_1(\zeta_k^m) \frac{1}{2h_\nu^m} \int_{I_\nu^m} w(x) \mathrm{d}x \\ &= \overline{\lim_{m\to+\infty}} \mu_\nu^m P_1(\zeta_\nu^m) w(\eta_\nu^m) \\ &= \overline{\lim_{m\to+\infty}} \mu_\nu^m w(\eta_\nu^m) = A_\nu(P_1) < +\infty, \end{aligned} \tag{3.38}$$

gde su $\zeta_\nu^m, \eta_\nu^k \in I_\nu^m$, pri čemu $\zeta_\nu^m, \eta_\nu^m \to -1$, dok $m \to +\infty$, pa je $\overline{\lim_{m\to+\infty}} P_1(\zeta_\nu^m) = 1$. Slična je situacija i za drugi kraj intervala $[-1,1]$.

Sada konstruišemo polinom $P_0(x)$ koji se od polinoma P_1 razlikuje utoliko što ima vrednost 0 u tački -1, ako je $k_{-1} \neq 0$ i vrednost 0 u tački 1 ako je $k_1 \neq 0$. Takav polinom postoji, na osnovu leme 3.9, deo (ii), i ima stepen manji od $2n-1$. Ponovo, za svaki $m \in \mathbb{N}$, imamo

$$\int P_0(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k^m \frac{1}{2h_k^m} \int_{I_k^m} P_0(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Doprinosi intervala koji ne kolabiraju su sve manji, kako m neograničeno raste, tako da doprinose integrala preko tih intervala u kvadraturnoj formuli zanemarujemo. Za kolabirajuće intervale imamo

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \mu_\nu^m \frac{1}{2h_\nu^m} \int_{I_\nu^m} P_0(x)w(x)\mathrm{d}x &= \overline{\lim_{m\to+\infty}} \mu_\nu^m \frac{1}{2h_k^m} P_0(\zeta_\nu^m) \int_{I_\nu^m} w(x)\mathrm{d}x \\ &= \overline{\lim_{m\to+\infty}} \mu_\nu^m P(\zeta_\nu^m) w(\eta_\nu^m) = 0 \cdot A_\nu(P_1) = 0, \end{aligned}$$

gde je η_ν^m isto kao u (3.38). Prethodno znači da važi

$$G_n^m(P_0; \mu, \mathbf{h}) \to 0, \quad \text{dok} \quad m \to +\infty.$$

Međutim, polinom P_0 ima konstantan znak na skupu

$$B = [-1,1] \backslash A, \quad A = \bigcup_{k=k_{-1}+1}^{n-k_1} I_k^0.$$

Jasno je, zbog konstrukcije, da važi $\int_A P_0 \mathrm{d}\mu = 0$, a s obzirom da polinom P_0 ne menja znak na B, to važi $\int_B P_0(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int P_0(x)\mathrm{d}\mu(x) \neq 0$, što je kontradikacija.

Dakle, obe pretpostvake vode do kontradikcije, pa je tvrđenje leme tačno. □

Za jednostavnije predstavljanje rezultata, uvodimo sledeće oznake

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \prod_{k=1}^{n} (x - x_k + h_k)(x - x_k - h_k), \\ \Omega_{k_1,\ldots,k_m}(x) &= \prod_{k \neq k_1,\ldots,k_m} (x - x_k + h_k)(x - x_k - h_k), \\ \Delta_k(\Omega_k \phi w) &= \begin{cases} \dfrac{(\Omega_k \phi w)(x_k + h_k) - (\Omega_k \phi w)(x_k - h_k)}{2h_k}, & h_k \neq 0, \\ \partial_{x_k}\left[(\Omega_k \phi w)(x_k)\right], & h_k = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Teorema 3.29 *Za zadato $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$, svako rešenje sistema jednačina*

$$\Delta_k(\Omega_k \phi w) = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.39}$$

za koje važi $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_n(\mathbf{h})$*, daje čvorove Gaussove intervalne kvadraturne formule za Jacobijevu težinu* w*.*

Za zadato $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$*, svaka* n*-torka čvorova* $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_n(\mathbf{h})$ *Gaussove intervalne kvadraturne formule zadovoljava jednačinu* (3.39)*.*

Dokaz.- Direktno možemo proveriti, a navedeno je, na primer, u referenci [46, str. 117], da Jacobijeva težinska funkcija w zadovoljava sledeću Pearsonovu diferencijalnu jednačinu

$$(\phi w)' = \psi w, \quad \phi = 1 - x^2, \quad \psi = -(\alpha+1)(1+x) + (\beta+1)(1-x). \tag{3.40}$$

Posmatrajmo jednakost

$$(P\phi w)' = (P'\phi + P\psi)w,$$

gde je P polinom stepena $2n-2$. Lako se može zaključiti da je izraz na desnoj strani u prethodnoj jednakosti jednak proizvodu Jacobijeve težinske funkcije i polinoma ne višeg stepena od $2n-1$. Izaberimo $P = \Omega_\nu$ i primenimo Gaussovu intervalnu kvadraturnu formulu. Tada imamo

$$0 = \int_{-1}^{1} (\Omega_\nu \phi w)' \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{2h_k} \int_{x_k-h_k}^{x_k+h_k} (\Omega_\nu \phi w)' \mathrm{d}x = \mu_\nu \Delta_\nu(\Omega_\nu \phi w).$$

gde je, prema već uvedenim oznakama,

$$\Delta_\nu(\Omega_\nu \phi w) = \frac{(\Omega_\nu \phi w)(x_k + h_k) - (\Omega_\nu \phi w)(x_k - h_k)}{2h_\nu}, \quad h_\nu > 0, \tag{3.41}$$

i

$$\Delta_\nu(\Omega_\nu \phi w) = \partial_{x_\nu}[(\Omega_\nu \phi w)(x_\nu)], \quad h_\nu = 0. \tag{3.42}$$

Kako je $\mu_\nu > 0$, jasno je da mora biti

$$\Delta_\nu(\Omega_\nu \phi w) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Dakle, ako su x_ν čvorovi Gaussove intervalne kvadraturne formule za Jacobijevu meru, onda oni zadovoljavaju sistem jednačina (3.39).

Za svaki polinom $p \in \mathcal{P}_{2n-2}$ i za n-torke $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_n(\mathbf{h})$, imamo

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{p(x_k+h_k)}{\Omega'(x_k+h_k)} + \frac{p(x_k-h_k)}{\Omega'(x_k-h_k)} \right] = 0. \tag{3.43}$$

Ovo je direktna posledica Cauchyjeve integralne teoreme (videti [76, str. 43]), primenjene na integraciju funkcije

$$\frac{p(x)}{\Omega(x)},$$

po konturi koja sadrži interval $[-1,1]$. Primetimo samo da je $p/\Omega \approx 1/x^2$, za $|x| \to \infty$. Ako je neki $h_k = 0$, onda se kao k-ti član u sumi javlja izraz

$$\frac{p'(x_k)\Omega_k(x_k) - p(x_k)\Omega_k'(x_k)}{(\Omega_k(x^k))^2}.$$

Zbog kratkoće pisanja, samo ćemo povremeno obraćati pažnju na slučaj $h_k = 0$, koji može biti prisutan, a sve vreme ćemo pisati izraze koji podrazumevaju $h_k \neq 0$, pri čemu je sa jednog slučaja može lako preći na drugi.

Primetimo da važi

$$2h_k(\Omega_k\phi w)(x_k + h_k) = (\Omega'\phi w)(x_k + h_k)$$

i

$$-2h_k(\Omega_k\phi w)(x_k - h_k) = (\Omega'\phi w)(x_k - h_k),$$

tako da je sistem (3.39), ekvivalentan sa sistemom jednačina

$$(\Omega'\phi w)(x_k + h_k) = -(\Omega'\phi w)(x_k - h_k), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.44}$$

Naravno, u slučaju da postoji neki $h_k = 0$, onda je odgovarajući član u jednačini (3.43), zadat sa

$$\frac{(p'\Omega_k)(x_k) - (p\Omega_k')(x_k)}{(\Omega_k(x_k))^2}.$$

Ovaj član možemo transformisati na sličan način kao i za slučaj $h_k \neq 0$. Naime,

$$\begin{aligned}\frac{(p'\Omega_k\phi w)(x_k) + (p\Omega_k(\phi w)')(x_k) - (p\Omega_k(\phi w)')(x_k) - (p\Omega_k'\phi w)(x_k)}{(\Omega_k^2\phi w)(x_k)} \\ = \frac{(\Omega_k\phi w(p\phi w)')(x_k) - (p\phi w(\Omega_k\phi w)')(x_k)}{(\Omega_k\phi w)^2(x_k)},\end{aligned}$$

i ako zahtevamo da je član uz p jednak nuli, dobijamo jednačinu

$$(\Omega_k\phi w)'(x_k) = 0,$$

koja je ekvivalentna izrazu $\Delta_k(\Omega_k\phi w) = 0$ za $h_k = 0$.

Primetimo da jednačina (3.43), pod pretpostvakom da $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_n(\mathbf{h})$, zadovoljavaja sistem (3.39) i može se napisati i na sledeći način

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\Omega'\phi w)(x_k + h_k)} \left[(p\phi w)(x_k + h_k) - (p\phi w)(x_k - h_k)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\Omega'\phi w)(x_k + h_k)} \int_{x_k - h_k}^{x_k + h_k} (p\phi w)'(x)\mathrm{d}x, \quad p \in \mathcal{P}_{2n-2}. \end{aligned}$$

Dalje je očigledno da je

$$\int_{-1}^{1} (p\phi w)'(x)\mathrm{d}x = (p\phi w)(1) - (p\phi w)(-1) = 0, \quad p \in \mathcal{P}_{2n-2}.$$

Ovo znači da, za svako rešenje sistema $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_n(\mathbf{h})$, važi

$$\int (p'\phi + p\psi)(x)\mathrm{d}\mu(x) = C\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\Omega'\phi w)(x_k + h_k)} \int_{I_k} (p'\phi + p\psi)(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0, \; p \in \mathcal{P}_{2n-2},$$

gde je C proizvoljna konstanta.

Pokazaćemo da se konstanta C može izabrati, tako da važi

$$\int p(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{C}{(\Omega'\phi w)(x_k+h_k)} \int_{I_k} p(x)\mathrm{d}\mu(x), \quad p \in \mathcal{P}_{2n-1}. \tag{3.45}$$

Primetimo da je

$$\mathcal{L} = \left\{p'\phi + p\psi \mid p \in \mathcal{P}_{2n-2}\right\}$$

linearni potprostor prostora $\mathcal{P}_{2n-1}$. Imamo

$$\ell_\nu(x) = (x^{\nu-1})'\phi + x^{\nu-1}\psi = -(\nu+\alpha+\beta+1)x^\nu + (\beta-\alpha)x^{\nu-1} + (\nu-1)x^{\nu-2},$$

$\nu = 1,\ldots,2n-1$, pri čemu važi $\ell_\nu \in \mathcal{L}$, $\nu = 1,\ldots,2n-1$. Takođe, zbog $\nu+\alpha+\beta+1 > 0$, $\deg(\ell_\nu) = \nu$, $\nu = 1,\ldots,2n-1$. Kako polinomi ℓ_ν, $\nu = 1,\ldots,2n-1$, imaju svi različite stepene očigledno su linearno nezavisni. Kako ih ima $2n-1$, oni očigledno, čine jednu bazu u $\mathcal{L}$.

Uvedemo li $\ell_0(x) = 1$, dobijamo sistem polinoma ℓ_ν, $\nu = 0,1,\ldots,2n-1$, koji čine jednu bazu prostora $\mathcal{P}_{2n-1}$.

Izaberimo C u (3.45), tako da ova jednakost važi i za $\ell_0(x) = 1$, tj.

$$\int \ell_0\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{C}{(\Omega'\phi w)(x_k+h_k)} \int_{I_k} \ell_0\mathrm{d}\mu(x).$$

Očigledno da su svi sabirci na desnoj strani pozitivni jer važi $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_n(\mathbf{h})$, pa s obzirom da je i leva strana pozitivna, imamo $C > 0$.

Kako je formula (3.45), sa izabranim C na prethodni način, tačna za sve bazisne polinome ℓ_ν, $\nu = 0,1,\ldots,2n-1$, ona mora biti tačna i za svako $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$. $\square$

Sada, na osnovu leme 3.10, zaključujemo da ako neko rešenje sistema (3.39) pripada skupu $\mathcal{X}_n(\mathbf{h})$, onda za $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_n^\varepsilon$ rešenje pripada i skupu $\mathcal{X}_n^{\varepsilon_0}(\mathbf{h})$.

Da bismo dokazali teoremu o jedinstvenosti rešenja, koristimo sledeću teoremu o topološkom stepenu preslikavanja, čiji se dokaz može naći u [85] i [92].

Pretpostavimo da je D ograničeni i otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, sa zatvaranjem $\overline{D}$ i granicom ∂D i neka je $\Phi : \overline{D} \mapsto \mathbb{R}^n$ neprekidna funkcija. Sa $\deg(\Phi, D, \mathbf{c})$ označavamo topološki stepen funkcije Φ u odnosu na D i $\mathbf{c} \notin \Phi(\partial D)$.

Teorema 3.30 (i) *Ako* $\deg(\Phi, D, \mathbf{c}) \neq 0$*, onda jednačina* $\Phi(x) = \mathbf{c}$ *ima rešenje u* D.
(ii) *Neka je* $\Phi(\mathbf{x}, \gamma)$ *neprekidna funkcija* $\Phi : D \times [0,1] \mapsto \mathbb{R}^n$*, takva da* $\mathbf{c} \notin \Phi(\partial D, [0,1])$*, onda je* $\deg(\Phi, D, \mathbf{c})$ *konstanta nezavisna od* γ.
(iii) *Pretpostavimo da je* $\Phi \in C^1(D)$*,* $\mathbf{c} \notin \Phi(\partial D)$*, i neka je* $\det(\Phi'(\mathbf{x})) \neq 0$*, za svaki* $\mathbf{x} \in D$ *za koje je* $\Phi(x) = \mathbf{c}$*. Onda jednačina* $\Phi(x) = \mathbf{c}$ *ima samo konačno mnogo rešenja* $\mathbf{x}^\nu$ *u* D *i važi*

$$\deg(\Phi, D, \mathbf{c}) = \sum_{\mathbf{x}^\nu} \mathrm{sgn}(\det(\Phi'(\mathbf{x}^\nu))).$$

Sada smo spremni da dokažemo teoremu 3.28. Štaviše, možemo dokazati da jedinstveno rešenje postoji u skupu

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_n^{\varepsilon_0}(\mathbf{h}) \;=\; & \big\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid x_1-h_1+1>\varepsilon_0,\\ & \qquad x_{k+1}-h_{k+1}-x_k-h_k>\varepsilon_0,\ k=1,\dots,n-1,\ 1-x_n-h_n>\varepsilon_0\big\},\end{aligned}$$

za $\mathbf{h}\in\mathcal{H}_n^{\varepsilon}$.

Dokaz teoreme 3.28.- Predstavimo sistem jednačina (3.39) u sledećem obliku

$$\Psi_\nu(\mathbf{x},\mathbf{h}) = -\Delta_\nu(\Omega_\nu\phi w)=0,\quad \nu=1,\dots,n. \tag{3.46}$$

U daljem radu pretpostavljamo da je $\mathbf{h}\in\mathcal{H}_n^{\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Na osnovu leme 3.10, svako rešenje za čvorove $\mathbf{x}$ za Gaussovu intervalnu kvadraturnu formulu i/ili za sistem jednačina (3.39) pripada skupu $\mathcal{X}_n^{\varepsilon_0}(\mathbf{h})$.

Da bismo primenili topološki aparat, prezentovan u teoremi 3.30, potrebno nam je da izračunamo Jacobijan sistema (3.46) u bilo kom rešenju $\mathbf{x}\in\mathcal{X}_n^{\varepsilon_0}(\mathbf{h})$. Imamo

$$\begin{aligned}\partial_{x_\nu}\Psi_\nu = (\Omega_\nu\phi w)(x_\nu-h_\nu)\Bigg[&\sum_{k\neq\nu}\bigg(\frac{1}{(x_\nu+h_\nu-x_k+h_k)(x_\nu-h_\nu-x_k+h_k)}\\ &\qquad+\frac{1}{(x_\nu+h_\nu-x_k-h_k)(x_\nu-h_\nu-x_k-h_k)}\bigg)\\ &+\frac{\alpha+1}{(x_\nu+h_\nu-1)(x_\nu-h_\nu-1)}+\frac{\beta+1}{(x_\nu+h_\nu+1)(x_\nu-h_\nu+1)}\Bigg]\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\partial_{x_k}\Psi_\nu = -(\Omega_\nu\phi w)(x_\nu-h_\nu)\bigg[&\frac{1}{(x_\nu+h_\nu-x_k-h_k)(x_\nu-h_\nu-x_k-h_k)}\\ &+\frac{1}{(x_\nu+h_\nu-x_k+h_k)(x_\nu-h_\nu-x_k+h_k)}\bigg],\end{aligned}$$

gde smo upotrebljavali identitet (3.40) i naravno činjenicu da u svakom rešenju važi $(\Omega_\nu\phi w)(x_\nu+h_\nu)=(\Omega_\nu\phi w)(x_\nu-h_\nu)$.

Primetimo da izraz $\partial_{x_\nu}\Psi_\nu$ sadrži samo pozitivne članove u sumi koja ga reprezentuje jer se intervali ne preklapaju, pa je stoga u svakom rešenju $\partial_{x_\nu}\Psi_\nu>0$.

Lako se dokazuje da $\partial_k\Psi_\nu$, $k\neq\nu$, ima pozitivne članove u sumi, ali i jedan znak minus ispred, pa je u celini negativan $\partial_{x_k}\Psi_\nu<0$, $k\neq\nu$. Takođe,

$$\begin{aligned}\partial_{x_\nu}\Psi_\nu+\sum_{k\neq\nu}\partial_{x_k}\Psi_\nu = (\Omega_\nu\phi w)(x_\nu-h_\nu)\bigg(&\frac{\alpha+1}{(x_\nu+h_\nu-1)(x_\nu-h_\nu-1)}\\ &+\frac{\beta+1}{(x_\nu+h_\nu+1)(x_\nu-h_\nu+1)}\bigg) \;>\; 0,\end{aligned}$$

pa zbog toga

$$\partial_{x_\nu}\Psi_\nu > -\sum_{k\neq\nu}\partial_{x_k}\Psi_\nu=\sum_{k\neq\nu}|\partial_{x_k}\Psi_\nu|.$$

Ovo znači da je Jacobijan sistema (3.46), $J(\mathbf{x},\mathbf{h}) = [\partial_{x_m}\Psi_\nu]_{\nu,m=1,\dots,n}$, u ma kom rešenju sistema $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_n^{\varepsilon_0}(\mathbf{h})$ dijagonalno dominantan, sa pozitivni elementima na glavnoj dijagonali i negativnim elementima drugde. Prema Gershgorinovoj teoremi (videti [46, str. 290]), znamo da su onda sve sopstvene vrednosti Jacobijana sa pozitivnim realnim delom. Posledica ovoga je da je Jacobijan nesingularna matrica jer broj nula nije njena sopstvena vrednost. Kako što je poznato, determinanta matrice je prosto proizvod njenih sopstvenih vrednosti računajući višestrukosti (videti [78, str. 232]). Za naš Jacobijan, s obzirom da su sve sopstvene vrednosti sa pozitivnim realnim delom i kako je Jacobijan realna matrica (kompleksne sopstvene vrednosi se javljaju u konjugovanim parovima), proizvod svih sopstvenih vrednosti je pozitivan broj. Zato imamo

$$\operatorname{sgn}(\det J(\mathbf{x},\mathbf{h})) = 1.$$

Naravno, pri primeni teoreme 3.30, podrazumevamo $D = \mathcal{X}_n^{\varepsilon_0}(\mathbf{h})$. Jasno je da sistem (3.39) nema rešenja na $\partial\mathcal{X}_n^{\varepsilon_0}(\mathbf{h})$, prema lemi 3.10. Prema tome, topološki stepen nam, zbog toga što je znak Jacobijana u rešenju pozitivan, broji rešenja sistema. Treba dokazati samo da je topološki stepen jednak jedani tada imamo jedinstveno rešenje. Za dokaz te činjenice koristimo deo (iii) teoreme 3.30.

Znamo da Gaussova kvadraturna formula jeste jedinstvena pa je zbog toga za $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ rešenje jedinstveno. Dokaz ćemo podeliti u N koraka, gde je N definisano sa $h = (N+\eta)\dfrac{\varepsilon_0}{2}$, $0 < \eta \le 1$, pri čemu je $h = \max\{h_1,\dots,h_n\}$. U j-tom koraku dokazujemo jedinstvenost rešenja za $\mathbf{h}^j = (j+\eta)\dfrac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{h}$, $j = 1,\dots,N$.

U prvom koraku posmatramo preslikavanje

$$\Phi^0(\mathbf{x},\gamma) = \left(\Psi(\mathbf{x},\gamma\mathbf{h}^0),\dots,\Psi(\mathbf{x},\gamma\mathbf{h}^0)\right),$$

na skupu $\mathcal{X}_n^{\varepsilon_0}(\mathbf{0})$, za svako $0 \le \gamma \le 1$. Jasno je da imamo samo jedno rešenje za sistem $\Phi^0(\mathbf{x},\mathbf{0}) = 0$ (slučaj $\gamma = 0$) i to rešenje je jedinstveno; to je, u stvari, klasična Gaussova kvadraturna formula. Kako je znak determinante Jacobijeve matrica pozitivan, znamo da važi

$$\deg(\Phi^0(\mathbf{x},\mathbf{0}),\mathcal{X}_n^{\varepsilon_0}(\mathbf{0}),\mathbf{0}) = 1.$$

Kako, za svako $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_n^{\varepsilon_0}(\mathbf{0})$ i $0 \le \gamma \le 1$, imamo

$$-1 < x_1 - \gamma h_1^0,\ x_k + \gamma h_k^0 < x_{k+1} + \gamma h_{k+1}^0,\ k = 1,\dots,n-1,\ x_n + \gamma h_n^0 < 1,$$

za svako rešenje sistema $\Phi^0(\mathbf{x},\gamma) = 0$, Jacobijan je pozitivan, tako da, na osnovu dela (iii) teoreme 3.30, zaključujemo da za svako $\gamma \in [0,1]$, važi

$$\deg(\Phi^0(\mathbf{x},\gamma),\mathcal{X}_n^{\varepsilon_0}(\mathbf{0}),\mathbf{0}) = 1.$$

Naravno, ovo važi specijalno i za $\gamma = 1$. Prema tome, sistem $\Phi^0(\mathbf{x},1) = 0$ ima jedinstveno rešenje u $\mathcal{X}_n^{\varepsilon_0}$. Naravno, to rešenje je jedinstveno i u $\mathcal{X}_n^{\varepsilon_0}(\mathbf{h}^0)$.

Dalje, za slučaj $N = 1$, nastavljamo sa istim argumentima na sistem

$$\Phi^j(\mathbf{x},\gamma)\left(\Psi_1(\mathbf{x},\gamma\mathbf{h}^1 + (1-\gamma)h^0),\dots,\Psi_n(\mathbf{x},\gamma\mathbf{h}^1 + (1-\gamma)\mathbf{h}^0)\right),$$

da bismo dokazali jedinstveno rešenje u $\mathcal{X}_n^{\varepsilon_0}(\mathbf{h}^1)$.

Posle toga, sa istim argumatima nastavljamo sa sistemima

$$\Phi^{(j)}(\mathbf{x},\gamma) = (\Psi_1(\mathbf{x},\gamma\mathbf{h}^{(j)} + (1-\gamma)\mathbf{h}^{(j-1)}), \ldots, \Psi_n(\mathbf{x},\gamma\mathbf{h}^{(j)} + (1-\gamma)\mathbf{h}^{(j-1)})),$$

sve dok j ne dostigne N. □

Ovim je završen dokaz jedinstvenosti rešenja. Primetimo da smo u isto vreme zadali i sistem jednačina čijim rešavanjem možemo doći do čvorova Gaussove intervalne kvadraturne formule za Jacobijevu meru. To je sistem jednačina (3.39).

Sada se vraćamo jednakostima koje zadovoljavaju težinski koeficijenti u Gaussovoj intervalnoj kvadraturnoj formuli.

Lema 3.11 *Imamo*

$$\mu_k = \frac{C}{(\Omega_k\phi w)(x_k + h_k)}, \quad k = 1,\ldots,n, \tag{3.47}$$

gde je

$$C = \frac{m_0}{\sum_{k=1}^{n} \frac{m_{0,k}}{(\Omega_k\phi w)(x_k+h_k)}}, \quad m_0 = \mu([-1,1]),\ m_{0,k} = \frac{\mu(I_k)}{2h_k}. \tag{3.48}$$

Dokaz.- Direktno na osnovu dokaza teoreme 3.29. □

Lema 3.12 *Za svaka dva različita prirodna broja $\nu, k \in \{1,\ldots,n\}$, imamo*

$$\mu_\nu \Delta_\nu(\Omega_{k,\nu}\phi w) + \mu_k \Delta_k(\Omega_{k,\nu}\phi w) = 0 \tag{3.49}$$

i

$$\mu_\nu = \frac{m_0}{m_{0,\nu} - \sum_{k\neq\nu} m_{0,k}\frac{\Delta_\nu(\Omega_{k,\nu}\phi w)}{\Delta_k(\Omega_{k,\nu}\phi w)}}, \tag{3.50}$$

gde su m_0 i $m_{0,k}$, $k = 1,\ldots,n$, kao u lemi 3.11.

Dokaz.- Primenimo Gauss-Jacobijevu intervalnu kvadraturnu formulu na polinom $(\Omega_{\nu,k}\phi w)'/w$ i dobijamo prvu jednakost.

Za dokaz druge jednakosti primenimo Gauss-Jacobijevu intervalnu kvadraturnu formulu na polinom $P \equiv 1$, tako da dobijamo

$$m_0 = \int \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{2h_j}\int_{I_j} \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{2h_j} m_{0,j}.$$

Sada koristimo jednakost (3.49), sa pogodno izabranim ν i k da dobijemo drugu jednakost. □

3.3.3 Analitičko rešenje za Čebiševljevu meru prve vrste

Označimo nule Čebiševljevih polinoma prve vrste T_n, $n \in \mathbb{N}$, ortogonalnih u odnosu na težinu $(1-x^2)\chi_{[-1,1]}(x)$ (videti [46, str. 140], [42]), sa

$$\tau_k = -\cos\delta_k, \quad \delta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1\ldots,n. \tag{3.51}$$

Teorema 3.31 *Za skup dužina*

$$h_k = \sin\delta_k \sin\delta, \quad k = 1,\ldots,n, \tag{3.52}$$

gde je δ izabrano tako da važi $0 < \delta < \pi/(2n)$, sistem jednačina (3.39)*, sa Čebiševljev-om težinom, ima rešenje*

$$x_k = -\cos\delta_k \cos\delta, \quad k = 1,\ldots,n. \tag{3.53}$$

Dokaz.- Neka su τ_k, $k = 1,\ldots,n$, dati sa (3.51). Jednostavno je proveriti da se sistem dužina (3.52) može dobiti na sledeći način. Projektujemo τ_k, $k = 1,\ldots,n$, na gornju polovinu jediničnog kruga. Odgovarajuće projekcije su date sa

$$z_k = \exp(\mathrm{i}(\pi - \delta_k)), \quad k = 1,\ldots,n.$$

Izaberimo neki ugao δ, takav da $0 < \delta < \pi/(2n)$, i zarotirajmo svaku tačku z_k, $k = 1,\ldots,n$, za $\pm\delta$, tako da dobijemo sledeći skup tačaka

$$\exp(\mathrm{i}(\pi - \delta_k \pm \delta)), \quad k = 1,\ldots,n.$$

Ako ih projektujemo nazad na interval $[-1,1]$, dobijamo skup tačaka

$$x_k - h_k = -\cos(\delta_k - \delta), \quad x_k + h_k = -\cos(\delta_k + \delta), \quad k = 1,\ldots,n.$$

Vidimo da su $h_k = \sin\delta_k \sin\delta$ i $x_k = -\cos\delta_k\cos\delta$, $k = 1,\ldots,n$. Direktna zamena ovih vrednosti u (3.39) završava dokaz. Zaista, imamo

$$h_\nu \Delta_\nu(\Omega_\nu \phi w) = (\Omega_\nu\phi w)(x_\nu + h_\nu) - (\Omega_\nu\phi w)(x_\nu - h_\nu) = G_\nu(\delta) - G_\nu(-\delta),$$

gde je

$$G_\nu(\delta) = \sin(\delta_\nu + \delta)\prod_{k\neq\nu}\Big(\cos(\delta_k - \delta) - \cos(\delta_\nu + \delta)\Big)\prod_{k\neq\nu}\Big(\cos(\delta_k + \delta) - \cos(\delta_\nu + \delta)\Big),$$

tj. $G_\nu(\delta) = A_\nu g_\nu(\delta)$, gde su

$$\begin{aligned} A_\nu &= 4^{n-1}\prod_{k\neq\nu}\sin\frac{\delta_k+\delta_\nu}{2}\sin\frac{\delta_k-\delta_\nu}{2}, \\ g_\nu(\delta) &= \sin(\delta_\nu+\delta)\prod_{k\neq\nu}\sin\left(\frac{\delta_k-\delta_\nu}{2}-\delta\right)\sin\left(\frac{\delta_k+\delta_\nu}{2}+\delta\right). \end{aligned}$$

Primetimo da je $A_\nu = 4^{n-1} g_\nu(0)/\sin(\delta_\nu)$. Nije teško dokazati

$$\begin{aligned} g_\nu(\delta) &= (-1)^{n-1} \prod_{k=\nu-n,\ k\neq 0}^{n+\nu-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}+\delta\right) \\ &= (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n+\nu-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}+\delta\right) \prod_{k=1}^{n-\nu} \sin\left(\frac{-k\pi}{2n}+\delta\right), \end{aligned}$$

tj.

$$g_\nu(\delta) = (-1)^{\nu-1} \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}+\delta\right).$$

Takođe,

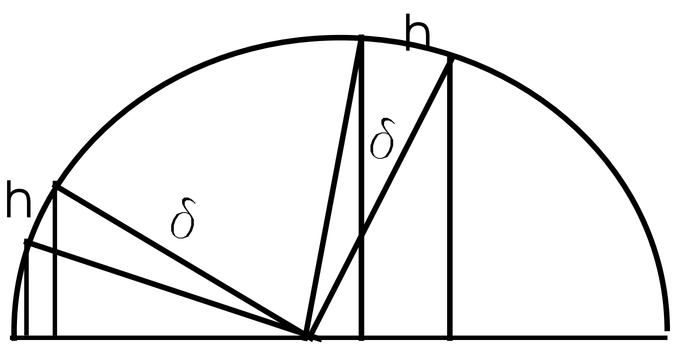
$$g_\nu(-\delta) = (-1)^{\nu-1} \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}-\delta\right) = (-1)^{\nu-1} \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\pi-\frac{k\pi}{2n}+\delta\right) = g_\nu(\delta).$$

Zato,

$$h_\nu \Delta_\nu(\Omega_\nu \phi w) = A_\nu \Big(g_\nu(\delta) - g_\nu(-\delta)\Big) = 0,$$

tako da (3.53) daje jedinstveno rešenje za Gauss-Čebiševljevu intervalnu kvadraturnu formulu sa dužinama (3.52). □

Primetimo da kod projektovanja intervala iz prethodne teoreme $(x_k - h_k, h_k + h_k)$, $k = 1, \ldots, n$, na jedinični krug, dobijamo da su svi intervali iste dužine 2δ i da su međusobno ekvidistantno postavljeni, tj. svi na rastojanju $(\pi - 2n\delta)/n$ (videti sliku 3.1).



Slika 3.1: Projekcije analitičkog rešenja za Čebišvljevu meru prve vrste na jedinični krug

Za težine u ovom specijalno slučaju, možemo, takođe, dobiti analitičke izraze.

Teorema 3.32 *U slučaju Čebiševljeve težine prve vrste, kada su dužine zadate sa* (3.52), *težinski koeficijenti u Gaussovoj intervalnoj kvadraturnoj formuli su dati sa*

$$\mu_\nu = \frac{\pi h_\nu}{n\delta}, \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{3.54}$$

Dokaz.- Da bismo dokazali tvrđenje teoreme, rešavanjem sistema (3.49), sa $u = \delta_\nu/2 - \delta_m/2$ i $v = \delta_\nu/2 + \delta_m/2$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
-\frac{2h_\nu \mu_m}{2h_m \mu_\nu} &= \frac{2h_\nu \Delta_\nu(\Omega_{\nu,m}\phi w)}{2h_m \Delta_m(\Omega_{\nu,m}\phi w)} = \frac{2h_\nu \Delta_\nu\left(\frac{\Omega_\nu \phi w}{(x-x_m+h_m)(x-x_m-h_m)}\right)}{2h_m \Delta_m\left(\frac{\Omega_m \phi w}{(x-x_\nu+h_\nu)(x-x_\nu-h_\nu)}\right)} \\
&= \frac{\frac{G_\nu(\delta)}{(x_\nu+h_\nu-x_m+h_m)(x_\nu+h_\nu-x_m-h_m)} - \frac{G_\nu(-\delta)}{(x_\nu-h_\nu-x_m+h_m)(x_\nu-h_\nu-x_m-h_m)}}{\frac{G_m(\delta)}{(x_m+h_m-x_\nu+h_\nu)(x_m+h_m-x_\nu-h_\nu)} - \frac{G_m(-\delta)}{(x_m-h_m-x_\nu+h_\nu)(x_m-h_m-x_\nu-h_\nu)}} = \frac{A_\nu g_\nu(\delta)}{A_m g_m(\delta)} \times \\
&\times \frac{(x_\nu-h_\nu-x_m-h_m)(x_\nu-h_\nu-x_m+h_m) - (x_\nu+h_\nu-x_m-h_m)(x_\nu+h_\nu-x_m+h_m)}{(x_m-h_m-x_\nu-h_\nu)(x_m-h_m-x_\nu+h_\nu) - (x_m+h_m-x_\nu-h_\nu)(x_m+h_m-x_\nu+h_\nu)} \\
&= -\frac{\sin\delta_m}{\sin\delta_\nu}\frac{\sin(u-\delta)\sin(v-\delta) - \sin(u+\delta)\sin(v+\delta)}{\sin(u-\delta)\sin(v+\delta) - \sin(u+\delta)\sin(v-\delta)} \\
&= -\frac{\sin\delta_m}{\sin\delta_\nu}\frac{\cos(u+v+2\delta) - \cos(u+v-2\delta)}{\cos(u-v-2\delta) - \cos(u-v+2\delta)} \\
&= -\frac{\sin\delta_m}{\sin\delta_\nu}\frac{\sin\delta_\nu}{\sin\delta_m} = -1.
\end{aligned}
$$

gde su G_ν, A_ν, g_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, kao u dokazu prethodne teoreme. Odavde jasno vidimo da su težine μ_k proporcionalne dužinama h_k, $k = 1, \ldots, n$. Dakle, imamo

$$\mu_\nu = A \sin\delta_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

gde ješ treba izračunati normalizacionu konstantu. Imamo

$$\pi = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{2h_k} \int_{I_k} w(x)\,dx = 2\delta \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{2h_k} = \frac{nA\delta}{\sin\delta}.$$

Iz ove jednakosti neposredno dobijamo

$$A = \frac{\pi \sin\delta}{n\delta} \quad \text{i} \quad \mu_\nu = \frac{\pi h_\nu}{n\delta}, \quad \nu = 1, \ldots, n. \quad \square$$

Naravno, kao što i očekujemo, za $\delta \to 0$ dobijamo standardnu Gauss-Čebiševljevu kvadraturnu formulu (videti [47, str. 174]).

Lema 3.13 *Imamo*

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{\mu_\nu}{\sin(\tau_k)} = \frac{\pi}{n}, \quad \lim_{\delta\to 0^+} x_\nu = -\cos(\delta_\nu), \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Dokaz.- Direktano izračunavanje. $\square$

Primetimo da, kao i slučaju Gauss-Čebiševljeve kvadraturne formule (videti [47, str. 174]), i ovde imamo da je izraz

$$\frac{\mu_\nu}{2h_\nu} = \frac{\pi}{2n\delta}, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

nezavisan od ν.

3.4 Konvergencija generalisanih kvadratura

Za ispitanje konvergencije generalisanih Gaussovih kvadraturnih formula, navodimo teoreme koje su date u [84] i [8].

U [84] možemo naći sledeću teoremu.

Teorema 3.33 *Neka $f \in C^{2n}(\mathrm{supp}(\sigma))$ i neka su $x_1, \ldots, x_n$, čvorovi generalisane Gaussove kvadraturne formule tipa I. Ako su $O_k = [x_k - u, x_k + u]$ intervali koji se ne preklapaju i takvi da su svi sadražani u nosaču mere σ, onda postoji $\delta_0 > 0$, takvo da, za svako $u \in [0, \delta_0)$, važi*

$$\left| \int f(x) \mathrm{d}\sigma(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{2h_k} \int_{I_k} f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \frac{\max\limits_{x \in \mathrm{supp}(\sigma)} |f^{(2n)}(x)|}{(2n)!} \max_{\xi_i \in O_i} \int \prod_{i=1}^{2n} |x - \xi_i| \mathrm{d}\sigma(x).$$

U [8] možemo naći sledeću teoremu.

Teorema 3.34 *Neka je*

$$\int f(x) \mathrm{d}\mu(x) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{2h_k} \int_{I_k} f(x) \mathrm{d}\mu(x)$$

Gaussova intervalna quadraturna formula kod koje su svi intervali sa istim dužinama $|I_k| = h > 0$ i koja je tačna za svaki $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$. Neka je Ω_{2n} jedinstveni monični polinom stepena $2n$, takav da zadovljava

$$\int_{I_k} \Omega_{2n}(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{I_k} x \Omega_{2n}(x) \mathrm{d}\mu(x) = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Onda, za svako $f \in C^{2n}[-1, 1]$, postoji $\xi \in (-1, 1)$, takvo da važi

$$\int f(x) \mathrm{d}\mu(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{2h_k} \int_{I_k} f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int \Omega_{2n}(x) \mathrm{d}\mu(x).$$

Jasno je da ova teorema daje rezultat, kao i teorema 3.33, za slučaj Legendreove mere.

Ova teorema rešava pitanje greške za funkcije u klasi $C^{2n}[-1, 1]$. Primetimo da teorema rešava pitanje konvergencije za analitičke funkcije u oblasti koja sadrži interval $[-1, 1]$. Prvo, jasno je da polinom Ω_{2n} mora imati bar po jednu nulu $\tau_{1,k}$, $k = 1, \ldots, n$, u svakom od intervala I_k, $k = 1, \ldots, n$. To je direktna posledica nenegativnosti mere μ i prvog skupa uslova $\int \Omega_{2n}(x) \mathrm{d}\mu(x) = 0$. Drugi skup uslova, zajedno sa prvim, daje

$$\int_{I_k} (2 + x) \Omega_{2n}(x) \mathrm{d}\mu(x) = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

Naravno, ovo povlači da polinom Ω_{2n} mora imati bar još po jednu nulu $\tau_{2,k}$, $k = 1, \ldots, n$, u svakom intervalu I_k, $k = 1, \ldots, n$. Ovo je posledica nenegativnosti mere $(2 + x)\mathrm{d}\mu(x)$ na intervalima I_k, $k = 1, \ldots, n$, i činjenice da su mere $\mu(x)$ i $(2 + x)\mathrm{d}\mu(x)$

linearno nezavisne. Naime, ako su neke dve nule u nekom intervalu I_k iste, onda $\tau_{1,k} = \tau_{2,k} = \tau$ ima za posledicu

$$\int_{x_k-h_k}^{\tau} \Omega_{2n}(x)(1+x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\tau}^{x_k+h_k} \Omega(x)(1+x)\mathrm{d}\mu(x) = 0,$$

što naravno znači da Ω_{2n} ima i nulu u intervalu $(x_k - h_k, \tau)$, ali i u intervalu $(x_k + h_k, \tau)$, a to je kontradiktorno sa tvrđenjem da u intervalu I_k ima samo jednu nulu.

Lokalizacija nula nam omogućava da tvrdimo da je

$$|\Omega_{2n}(x)| \leq 2^{2n}, \quad x \in [-1, 1].$$

Pod pretpostavkom da uniformno po n važi $|f^{(2n)}(\xi)| < (2n)!/(2+\varepsilon)^{2n}$, $\xi \in (-1, 1)$, $\varepsilon > 0$, imamo konvergenciju za analitičku funkciju sa geometriskom brzinom

$$\left| \int f \mathrm{d}\mu - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{2h_k} \int_{I_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x) \right|^{1/(2n)} \approx \frac{2}{2+\varepsilon} < 1.$$

Primetimo da se ovde pretpostavlja da je funkcija f analitička u domenu koji sadrži interval $[-2, 2]$ jer smo pretpostavili da važi

$$|f^{(2n)}(\xi)| < M(2n)!/(2+\varepsilon)^{2n}, \quad \varepsilon > 0.$$

3.4.1 Konvergencija generalisanih Gaussovih kvadratura tipa I

Da bismo uopšte raspravljali o konvergenciji generalisanih Gaussovih kvadraturnih formula moramo prvo definisati ekstenziju familije $\mathcal{A}^h$, $h \in H$, na skup širi od skupa polinoma. Naravno ovo nije jednoznačan zadatak.

Bar za operatore definisane u (3.2) i (3.1) možemo proširiti definicije operatora na proizvoljnu funkciju definisanu na nosaču mere σ koja učestvuje u kvadraturnoj formuli na sledeći način

$$(\mathcal{A}^h f)(x) = \sum_{k=-m}^{m} a_k f(x + kh), \quad (\mathcal{A}^h f)(x) = \sum_{k=-m}^{m-1} a_k f(x + (k+1/2)h), \tag{3.55}$$

$$(\mathcal{A}^h f)(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{b_k h^k}{k!} (\mathcal{D}^k f)(x). \tag{3.56}$$

Naravno, razmatramo i slučaj operatora

$$(\mathcal{A}^h f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t. \tag{3.57}$$

Primetimo da, ukoliko povećavamo broj tačaka u kvadraturnoj formuli, ne možemo zahtevati da se h ne menja. Ovaj zahtev ima za posledicu da se u kvadraturnoj formuli zahtevaju vrednosti funkcije koje su izvan nosača mere σ. Zato, sa porastom n (broja tačaka u kvadraturnoj formuli), smatramo da h opada ka vrednosti nula.

Definicija 3.18 Neka je zadata familija $\mathcal{A}^h$ i pozitivna mera σ. Pod prihvatljivim nizom dužina h_k, $k \in \mathbb{N}_0$, podrazumevamo takav niz dužina da je, za svako $k \in \mathbb{N}_0$, formula

$$\int p(x)\mathrm{d}\sigma(x) = \sum_{\nu=1}^{k} \sigma_\nu^k (\mathcal{A}^{h_k} p)(x_\nu^k)$$

Gaussova kvadratura tipa I, sa pozitivnim težinama, tj. $\sigma_\nu^k > 0$, $\nu = 1, \ldots, k$.

Ova definicija obezbeđuje da su nam tačke x_ν, $\nu = 1, \ldots, k$, uvek unutar skupa $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$.

Posmatrajmo sada, na primer, familiju zadatu sa (3.55). Jasno je da se, čak i sa prihvatljivim nizom dužina, može desiti da su nam za izračunavanje vrednosti $(\mathcal{A}^h f)(x_\nu)$, za neko $\nu \in \{1, \ldots, k\}$, potrebne vrednosti funkcije koje su van $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$. Za ispitivanje konvergencije, u takvom slučaju, neophodno je pretpostaviti izvesne 'lepe' osobine funkcije i van skupa $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$. S druge strane, za familiju operatora (3.56) ako je neka dužina prihvatljiva, za izračunavanje vrednosti $(\mathcal{A}^h f)(x_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, k$, nisu potrebne vrednosti funkcije van $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$. Međutim, i u slučaju familije zadate sa (3.55), moguće je obezbediti da su za izračunavanje $(\mathcal{A}^h f)(x_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, k$, potrebne samo vrednosti funkcije iz $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$. Ako za neko h to nije slučaj, potrebno je samo smanjiti h.

Prethodno razmatranje sugeriše sledeću definiciju.

Definicija 3.19 Niz dužina h_k, $k \in \mathbb{N}_0$, je apsolutno prihvatljiv ako je prihvatljiv i ako su za izračunavanje vrednosti $(\mathcal{A}_k^h p)(x_\nu^k)$, $\nu = 1, \ldots, k$, potrebne samo vrednosti funkcije na skupu $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$.

Na primer, za familiju operatora $\mathcal{A}^h$, zadatu sa (3.56), svaki prihvatljiv skup dužina je i apsolutno prihvatljiv, dok za familiju (3.55) ovo ne mora da bude slučaj.

Primetimo prvo jednu važnu osobinu kvadraturne formule tipa I. Uvodimo oznaku $\sigma_0 = \int \mathrm{d}\sigma$.

Teorema 3.35 *Za apsolutno prihvatljiv niz dužina h_k, $k \in \mathbb{N}_0$, i težine u kvadraturnoj formuli tipa I, imamo*

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{\nu=1}^{k} \sigma_\nu^k = \sigma_0.$$

Dokaz.- Ako primenimo kvadraturnu formulu tipa I na polinom $p(x) = 1$, dobijamo

$$\sigma_0 = \int \mathrm{d}\sigma = \sum_{\nu=1}^{k} \sigma_\nu^k (\mathcal{A}^{h_k} 1)(x_\nu^k) = \eta_0^{h_k}(x_\nu^k) \sum_{\nu=1}^{k} \sigma_\nu^k.$$

Međutim, zbog neprekidnosti familije $\mathcal{A}^h$, mora da važi

$$\lim_{k\to+\infty, h_k\to 0^+} \eta_0^{h_k}(x_\nu^k) = 1,$$

odavde zaključujemo da važi tvrđenje teoreme. $\square$

U daljem izlaganju razmatramo samo pozitivne mere σ koje imaju ograničene nosače i familije operatora zadate sa (3.55) ili (3.57). Familije (3.56) razmatraćemo na drugom mestu.

Neka je zadata neka familija operatora $\mathcal{A}^h$ i neki apsolutno prihvatljivi niz dužina h_k, $k \in \mathbb{N}_0$. Za svako $k \in \mathbb{N}_0$ u kvadraturnoj formuli tipa I, postoji k linearnih funkcionala $\mathcal{A}^{h_k}_{x^k_\nu}$, $\nu = 1, \ldots, k$, indukovanih operatorom $\mathcal{A}^{h_k}$.

Lema 3.14 *Linearni funkcionali* $\mathcal{A}^{h_k}_{x^k_\nu}$, $\nu = 1, \ldots, k$, $k \in \mathbb{N}_0$, *su ograničeni linearni funkcionali na prostoru* $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$.

Dokaz.- Kako su nam za određivanje vrednosti funkcionala $\mathcal{A}^{h_k}_{x^k_\nu}$, $\nu = 1, \ldots, k$, $k \in \mathbb{N}_0$, potrebne samo vrednosti unutar $\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))$ jer je niz dužina h_k, $k \in \mathbb{N}_0$, apsolutno prihvatljiv, imamo

$$\left|\mathcal{A}^{h_k}_{x^k_\nu} f\right| = \left|(\mathcal{A}^{h_k} f)(x^k_\nu)\right| \leq |\mathcal{A}| \sup_{x \in \mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))} |f(x)|,$$

gde smo sa $|\mathcal{A}|$ označili

$$|\mathcal{A}| = \sum_{k=-m}^{m} |a_k| \qquad \text{i} \qquad |\mathcal{A}| = \sum_{k=-m}^{m-1} |a_k|,$$

za familije (3.55), a $|\mathcal{A}| = 1$ za operatore (3.57). $\square$

Teorema 3.36 *Neka je niz dužina* h_k, $k \in \mathbb{N}_0$, *apsolutno prihvatljiv, neka mera* σ *ima ograničeni nosač i neka je* $f \in C(\mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma)))$. *Za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $k_0 \in \mathbb{N}$, *tako da za* $k > k_0$ *imamo*

$$\left| \int f \mathrm{d}\sigma - \sum_{\nu=1}^{k} \sigma^k_\nu (\mathcal{A}^{h_k} f)(x^k_\nu) \right| < \varepsilon.$$

Dokaz.- Koristimo Weierstrassovu teoremu o aproksimaciji neprekidne funkcije polinomom (videti [47, str. 5], [18, str. 2]), pri čemu podrazumevamo da funkcija f nije polinom jer je u suprotnom tvrđenje trivijalno. Takođe, koristimo niz Bernsteinovih polinoma (videti [47, str. 5], [18, str. 2]), koji imaju sledeću osobinu

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - B_n(f; x)| < \varepsilon,$$

za $n > n_0(\varepsilon)$, pri čemu je stepen polinoma $B_n(f; x)$ ne veći od n. Odavde imamo

$$\left| \int f \mathrm{d}\sigma - \int B_n(f; x) \mathrm{d}\sigma \right| \leq \sigma_0 \sup_{x \in \mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))} |f(x) - B_n(f; x)| < \sigma_0 \varepsilon,$$

za $n > n_0(\varepsilon)$. Takođe, imamo

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\nu=1}^{k} \sigma^k_\nu (\mathcal{A}^{h_k} f)(x^k_\nu) - \sum_{\nu=1}^{k} \sigma^k_\nu (\mathcal{A}^{h_k} B_n(f; \cdot))(x^k_\nu) \right| \\ &\qquad \leq |\mathcal{A}| \sup_{x \in \mathrm{Co}(\mathrm{supp}(\sigma))} |f(x) - B_n(f; x)| \sum_{\nu=1}^{k} \sigma^k_\nu \leq |\mathcal{A}| \varepsilon \sum_{\nu=1}^{k} \sigma^k_\nu, \end{aligned}$$

za $n > n_0(\varepsilon)$. Neka je $k > n > n_0(\varepsilon)$, onda

$$\begin{aligned}\left|\int f \mathrm{d}\sigma - \sum_{\nu=1}^{k} \sigma_\nu^k \mathcal{A}_{x_\nu^k}^{h_k} f\right| &\leq \left|\int (f - B_n(f;\cdot))\mathrm{d}\sigma\right| + \left|\sum_{\nu=1}^{k} \sigma_\nu^k \mathcal{A}_{x_\nu^k}^{h_k} (f - B_n(f;\cdot))\right| \\ &\leq \left(\sigma_0 + |\mathcal{A}| \sum_{\nu=1}^{k} \sigma_\nu^k\right)\varepsilon \leq (\sigma_0 + |\mathcal{A}|\sigma_b)\varepsilon,\end{aligned}$$

gde smo sa σ_b označili bilo koju majorantu konvergentnog niza $\sum_{\nu=1}^{k} \sigma_\nu^k$. Dovoljno je, dakle, izabrati $k_0 = n_0(\varepsilon) + 1$. $\square$

3.4.2 Konvergencija Gauss-Jacobijevih intervalnih kvadratura

Ovde se bavimo konvergencijom Gauss-Jacobijevih intervalnih kvadraturnih formula

$$\int f(x)\mathrm{d}\mu(x) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{2h_k} \int_{I_k} f(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

gde je $f \in C[-1,1]$ i μ je Jacobijeva mera $\mathrm{d}\mu(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \chi_{[-1,1]}\mathrm{d}x$.

Imamo sledeću teoremu.

Teorema 3.37 *Neka $f \in C[-1,1]$ i neka je $\mathbf{h}^k \in \mathcal{H}_n$, $k \in \mathbb{N}$, bilo koji sistem dozvoljenih dužina. Onda, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da je*

$$\left|\int f(x)\mathrm{d}\mu(x) - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\mu_\nu^k}{2h_\nu^k} \int_{I_\nu^k} f(x)\mathrm{d}\mu(x)\right| < \varepsilon,$$

pod uslovom $k > k_0$, gde su μ_ν^k i x_ν^k, $\nu = 1,\ldots,k$, težine i čvorovi Gauss-Jacobijeve kvadraturne formule, respektivno, μ Jacobijeva mera, $I_\nu^k = (x_\nu^k - h_\nu^k, x_\nu^k + h_\nu^k)$, $\nu = 1,\ldots,k$.

Dokaz.- Dokaz se bazira na činjenici da je nosač mere ograničen i da se svaka neprekidna funkcija može proizvoljno dobro, u uniformnoj normi, aproksimirati algebarskim polinomom. Ovo je, naravno, tvrđenje Weierstrassove teoreme (videti [47, str. 5], [18, str. 2]), po kojoj, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i polinom $P \in \mathcal{P}_{n_0}$, takav da je

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Na osnovu ove teoreme, možemo konstruisati niz polinoma B_n, $n \in \mathbb{N}$, tako da važi

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - B_n(x)| < \varepsilon,$$

pod uslovom $n > n_0$. Postoje i eksplicitni izrazi za jedan ovakav niz, na primer, niz Bernsteinovih polinoma konstruisanih za neprekidnu funkciju f (videti [47, str. 5], [18, str. 2]), pri čemu je $\deg(B_n) \leq n$.

U daljem izlaganju, intenzivno koristimo nejednakost (videti [74, str. 78])

$$\left|\int f \mathrm{d}\mu\right| \leq \int |f| \mathrm{d}\mu,$$

koja važi za μ-integrabilnu funkciju f. Ako je mera μ konačna, onda su neprekidne funkcije μ-integrabilne (videti [74, str. 74]). Dakle, imamo

$$\left|\int f(x)\mathrm{d}\mu(x) - \int B_n(x)\mathrm{d}\mu(x)\right| \leq \int |f(x) - B_n(x)|\mathrm{d}\mu(x) < \varepsilon\mu([-1,1]) = \varepsilon m_0,$$

pod uslovom $n > n_0$, gde smo sa $m_0 = \mu([-1,1])$ označili nulti moment Jacobijeve mere μ.

Takođe, važi

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\mu_\nu^k}{2h_\nu^k} \int_{I_\nu^k} B_n(x)\mathrm{d}\mu(x) - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\mu_\nu^k}{2h_\nu^k} \int_{I_\nu^k} f(x)\mathrm{d}\mu(x)\right| \\
&\qquad \leq \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\mu_\nu^k}{2h_\nu^k} \int_{I_\nu^k} |f(x) - B_n(x)|\mathrm{d}\mu(x) < \varepsilon \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\mu_\nu^k}{2h_\nu^k} \mu(I_\nu^k) = \varepsilon m_0,
\end{aligned}$$

pod uslovom $n > n_0$, gde smo koristili činjenicu da je Gauss-Jacobijeva intervalna kvadraturna formula tačna za konstantni polinom i da su težinski koeficijenti μ_ν^k pozitivni, prema teoremi 3.25.

Ako je $k \geq n$, imamo

$$\int B_n(x)\mathrm{d}\mu(x) - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\mu_\nu^k}{2h_\nu^k} \int_{I_\nu^k} B_n(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

Neka je sada $k \geq n$. Tada, za $k \geq n > n_0$, redom dobijamo

$$\begin{aligned}
&\left|\int f(x)\mathrm{d}\mu(x) - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\mu_\nu^k}{2h_\nu^k} \int_{I_\nu^k} f(x)\mathrm{d}\mu(x)\right| \\
&\qquad = \left|\int (f(x) - B_n(x))\mathrm{d}\mu(x) + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\mu_\nu^k}{2h_\nu^k} \int_{I_\nu^k} (B_n(x) - f(x))\mathrm{d}\mu(x)\right| \\
&\qquad \leq \int |f(x) - B_n(x)|\mathrm{d}\mu(x) + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\mu_\nu^k}{2h_\nu^k} \int_{I_\nu^k} |f(x) - B_n(x)|\mathrm{d}\mu(x) \\
&\qquad < \varepsilon \left(\int \mathrm{d}\mu(x) + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\mu_\nu^k}{2h_\nu^k} \mu(I_\nu^k)\right) = 2\varepsilon m_0.
\end{aligned}$$

Najzad, ako izaberemo $k_0 = n_0 + 1$, tvrđenje teoreme važi. □

3.5 Numerička konstrukcija

Kao i do sada razlikujemo dva slučaja. U ovom poglavlju dajemo algoritam za konstrukciju formula tipa I i II.

3.5.1 Numerička konstrukcija formula tipa I

U ovom odeljku razmatramo numeričku konstrukciju generalisanih Gaussovih kvadraturnih formula tipa I (3.3).

Za konstrukciju težinskih koeficijenata možemo formulisati teoremu, koja generališe odgovarajući rezultat za Gaussove kvadraturne formule.

Teorema 3.38 *Neka su polinomi q_k, zadati sa*

$$q_k(x) = \prod_{\nu \neq k} \frac{x - x_\nu}{x_k - x_\nu}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Onda imamo

$$\sigma_k = \int \mathrm{d}\sigma(x)(\mathcal{A}^{-1} q_k)(x),$$

gde su x_k i σ_k, $k = 1, \ldots, n$, čvorovi i težine generalisane Gaussove kvadraturne formule tipa I za operator $\mathcal{A}$.

Dokaz.- Primenom generalisane Gaussove kvadraturne formule tipa I (3.3) na polinome $\mathcal{A}^{-1} q_k$, $k = 1, \ldots, n$, dobijamo direktno tvrđenje teoreme. □

Kako za operatore (3.17), (3.19) i (3.1) znamo reprezentacije inverznih operatora, to izrazi za težine postaju sume dvostrukih integrala polinoma q_k, pa težine σ_k, $k = 1, \ldots, n$, možemo odrediti koristeći Gaussove kvadraturne formule.

Na primer, za operator (3.1), možemo odrediti težine kvadraturne formule sa

$$\sigma_k = \frac{\pi}{2h} \int \mathrm{d}\sigma(x) \int_{\mathbb{R}} q_k(x - \mathrm{i}y) \frac{\exp(-\pi y/h)}{(1 + \exp(-\pi y/h))^2} \mathrm{d}y.$$

Osnovno oruđe za konstrukciju čvorova generalisane Gaussove kvadraturne formule tipa I je Stieltjes-Gautschijeva procedura (videti [22, str. 95], [23], [46, str. 116], [63]).

Lema 3.15 *Neka je data nenegativna mera σ i neka su α_k i β_k^2, $k \in \mathbb{N}$, koeficijenti tročlane relacije koju zadovoljavaju monični polinomi π_k, $k \in \mathbb{N}_0$, ortogonalni u odnosu na σ. Tada, za $k \in \mathbb{N}_0$, važe Darbouxove formule*

$$\alpha_k = \frac{\langle x\pi_k, \pi_k \rangle}{\langle \pi_k, \pi_k \rangle} = \frac{\int x(\pi_k(x))^2 \mathrm{d}\sigma(x)}{\int (\pi_k(x))^2 \mathrm{d}\sigma(x)}, \quad \beta_k^2 = \frac{\langle \pi_k, \pi_k \rangle}{\langle \pi_{k-1}, \pi_{k-1} \rangle} = \frac{\int (\pi_k(x))^2 \mathrm{d}\sigma(x)}{\int (\pi_{k-1}(x))^2 \mathrm{d}\sigma(x)},$$

gde, po definiciji, uzimamo $\int (\pi_{-1}(x))^2 \mathrm{d}\sigma(x) = 1$.

Dokaz.- Zbog tročlane rekurentne relacije koju zadovoljavaju polinomi π_k, $k \in \mathbb{N}_0$, imamo

$$\pi_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)\pi_k(x) - \beta_k^2 \pi_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.58}$$

Ako pomnožimo sa π_{k-1} i integralimo celu jednačinu po σ, koristeći uslove ortogonalnosti $\int \pi_k \pi_m \mathrm{d}\sigma = ||\pi_k||^2 \delta_{k,m}$, dobijamo drugu formulu u tvrđenu leme.

Slično, množeći tročlanu rekurentnu relaciju sa π_k i integraleći je po σ, koristeći relacije ortogonalnosti, dobijamo prvu relaciju u tvrđenju leme. □

Stieltjes-Gautschijev algoritam počiva na formulama (3.58). Pretpostavimo da za neku nenegativnu meru μ, u odnosu na koju je σ absolutno neprekidna, znamo koeficijente tročlane rekurentne relacije. Onda, s obzirom da se konstrukcija Gaussove kvadraturne formule može izvršiti numerički stabilno QR-algoritmom (videti [46, str. 328], [23], [50], [22, str. 152]), integral u odnosu na meru σ možemo aproksimirati integralom u odnosu na meru μ. Ako pretpostavimo da je $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\mu = \omega$, onda imamo

$$\int p\mathrm{d}\sigma = \int p\omega \mathrm{d}\mu \approx G_N^{\mu}(\omega p) = \sum_{k=1}^{N} \mu_k \omega(x_k^{\mu}) p(x_k^{\mu}).$$

Naravno, u zavisnosti od toga koliko je funkcija ω 'dobra' za integraciju, aproksimacija je gora ili bolja. U svakom slučaju, treba očekivati da N bude reda veličine nekoliko stotina da bi aproksimacija imala relativnu grešku koja je reda veličine mašinske preciznosti u *double precision* aritmetici. Veće vrednosti za N (na primer, N reda veličine 10^3) su skoro nedostižne ako radimo u *double precision* aritmetici, s obzirom da konstrukcija QR algoritmom postaje nestabilna.

Koristeći prethodno datu aproksimaciju, u stanju smo da formulišemo Stieltjes-Gautschijev algoritam na sledeći način:

1° *Startujemo sa* $p_0 = 1$ *i konstruišemo* α_0 *i* β_0, *koristeći relacije* (3.58), *gde vrednost* $\int p\mathrm{d}\sigma$ *računamo kao* $G_N^{\mu}(\omega p)$;

2° *Koristeći tročlanu rekurentnu relaciju određujemo vrednost polinoma* p_k *u čvorovima* G_N^{μ}, *tj. u tačkama* x_k^{μ}, $k = 1, \ldots, m$. *Zatim, koristeći formule* (3.58), *računamo* α_k *i* β_k, *pri čemu izraze* $\int p\mathrm{d}\sigma$ *zamenjujemo sa* $G_N^{\mu}(\omega p)$;

3° *Ako smo izračunali sve koeficijente tročlane relacije koje smo hteli, proces završavamo. Inače, idemo na korak* 2°.

Jasno je da broj čvorova u kvadraturnoj formuli G_N^{μ} mora biti bar jednak broju koeficijenata tročlane relacije koje želimo da izračunamo. Naravno, što je N veće, aproksimacija integrala u odnosu na meru σ je bolja. Interesantno je da je proces izračunavanja polinoma p_k u čvorovima x_k, $k = 1, \ldots, N$, numerički stabilan (videti [24]).

Ovo je osnovna postavka Stieltjes-Gautschijevog algoritma. Postoje mnoge modifikacije. Na primer, može se nosač mere σ podeliti tako da za svaki deo možemo birati različite mere μ u odnosu na koje je σ apsolutno neprekidna, ili se može koristiti Fejerova kvadraturna formula, koja nije Gaussovog tipa (videti [22, str. 93], [23], [49]).

Kako su, prema teoremi 3.2, čvorovi generalisane Gaussove kvadraturne formule (3.3) nule polinoma ortogonalnih u odnosu na skalarni proizvod

$$\langle p, q \rangle = \int \mathrm{d}\sigma(x)(\mathcal{A}_x^{-1} pq),$$

to nama trebaju koeficijenti tročalne relacije za polinome ortogonalne u odnosu na ovaj skalarni proizvod. Poznajući vrednosti koeficijenata tročlane relacije, možemo odrediti čvorove generalisane Gaussove kvadraturne formule (3.3), kako je već pomenuto, QR-algoritmom.

Nažalost, samo kombinacija kada je σ Legendreova mera i $\mathcal{A}_x^{-1}$ ima interpretaciju preko logističke mere (slučaj razmatran u [84]) ima koeficijente tročlane relacije koji se mogu izraziti analitički sa vrlo malom kompleksnošću. To su izrazi dati u (3.12). Za ostale kombinacije mere σ i familije funkcionala $\mathcal{A}_x^{-1}$, analitički izrazi za koeficijente tročlane relacije nisu poznati. Ovde je možda bolje reći da su, bar u većini slučajeva, izrazi isuviše kompleksni[2] da bi bili od ikakve koristi.

Naravno, moguće je napraviti program koji konstruiše koeficijente tročlane relacije u analitičkom obliku, ali podsetimo se samo eksplicitnih izraza za koeficijente tročlane relacije za meru $x\exp(im\pi x)\chi_{[-1,1]}(x)\mathrm{d}x$ datih u tabeli (1.1), pa da odmah postane jasno da iako poznajemo koeficijente tročlane relacije ne znači da su upotrebljivi. Zato nam je neophodan numerički algoritam za konstrukciju koeficijenata tročlane rekurentne relacije.

Kao što smo već objasnili, za operatore tipa (3.17), familija funkcionala $\mathcal{A}_x^{-1}$ ima reprezentaciju zadatu sa

$$\mathcal{A}_x^{-1} = \sum_{\nu=1}^{M}\sum_{j=1}^{M_\nu} \frac{Q_\nu^j}{(1-\lambda_\nu)^j}\mathcal{L}_x^{\lambda_\nu,j}, \tag{3.59}$$

gde su λ_ν, $\nu = 1,\ldots,M$, različite nule karakterističnog polinoma Q, datog sa (3.18), za operator $\mathcal{A}$. Ovde, M_ν, $\nu = 1,\ldots,M$, su višestrukosti nula polinoma Q. Veličine Q_ν^j su ostaci racionalne funkcije $1/Q$, pri čemu reprezentacije funkcionala $\mathcal{L}_x^{\lambda_\nu,j}$ zavise od λ_ν i j i date su u teoremama 3.13, 3.14.

Za slučaj da je operator zadat sa (3.19), familija funkcionala ima reprezentaciju datu sa

$$\mathcal{A}_x^{-1} = \sum_{\nu=1}^{M}\sum_{j=1}^{M_\nu} \frac{(-1)^j Q_\nu^j}{\lambda_\nu^j}\mathcal{L}_x^{\lambda_\nu,j}, \tag{3.60}$$

gde su ponovo λ_ν, $\nu = 1,\ldots,M$, različite nule karakterističnog polinoma Q, datog sa (3.20), a M_ν, $\nu = 1,\ldots,M$, njihove vešestrukosti. Veličine Q_ν^j su ostaci racionalne funkcije $1/Q$. Reprezentacija funcionala $\mathcal{L}_x^{\lambda_\nu,j}$ zavisi od λ_ν i j i data je u teoremi 3.10.

Za slučaj da je operator tipa (3.1), familja inverznih operatora ima reprezentaciju preko logističke mere i data je u teoremi 3.16.

Neka je mera koja reprezentuje $\mathcal{L}^{\lambda_\nu,j}$ zadata sa $\mu^{\lambda_\nu,j}$ i neka važi $|\lambda_\nu| \neq 1$, $\nu = 1,\ldots,M$. Ideju za konstrukciju rekurzivnih koeficijenata ilustrujemo na primeru operatora tipa (3.17), za koji važi

$$\langle p,q\rangle = \sum_{\nu=1}^{M}\sum_{j=1}^{M_\nu} \frac{Q_\nu^j}{(1-\lambda_\nu)^j}\int\int p(x-y)q(x-y)\mathrm{d}\sigma(x)\mathrm{d}\mu^{\lambda_\nu,j}(y).$$

Vrednost skalarnog proizvoda $\langle\cdot,\cdot\rangle$ možemo da izračunamo koristeći Gaussove kvadraturne formule za mere σ i $\mu^{\lambda_\nu,j}$. Naravno, za sve operatore, koje smo razmatrali, znamo

[2]Ovde se pod kompleksnošću podrazumeva intuitivni pojam da je nešto isuviše kompleksno ako je isuviše složeno i neupotrebljivo u praktične svrhe.

koeficijente tročlane relacije za meru $\mu^{\lambda_\nu,j}$, pa Gaussovu kvadraturnu formulu možemo konstruisati koristeći QR-algoritam. Na taj način, za slučaj operatora datog sa (3.17), skalarni proizvod možemo (do na mašinsku grešku) da izrazimo na sledeći način

$$\langle p,q\rangle = \sum_{\nu=1}^{M}\sum_{j=1}^{M_\nu}\frac{Q_\nu^j}{(1-\lambda_\nu)^j}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sigma_k\mu_m^{\lambda_\nu,j}p(x_k^\sigma - x_m^{\mu^{\lambda_\nu,j}})q(x_k^\sigma - x_m^{\mu^{\lambda_\nu,j}}),$$

gde su x_k^σ, $x_k^{\mu^{\lambda_\nu,j}}$ i σ_k, $\mu_k^{\lambda_\nu,j}$, $k=1,\ldots,n$, čvorovi i težine Gaussove kvadraturne formule za mere σ i $\mu^{\lambda_\nu,j}$, respektivno.

Prema tome, ako znamo metod za izračunavanje skalarnog prozivoda, korišćenjem Stieltjes-Gautschijeve procedure možemo konstruisati koeficijente tročlane rekurentne relacije. Ovo je upravo algoritam za konstrukciju generalisanih Gaussovih kvadraturnih formula tipa I.

3.5.2 Numerička konstrukcija Gauss-Jacobijevih intervalnih kvadratura

Prvo razmatramo konstrukciju težina u Gauss-Jacobijevoj intervalnoj kvadraturnoj formuli (3.32). Jasno se nameće formula (3.47), koju ponavljamo zbog preglednosti,

$$\mu_k = \frac{m_0}{(\Omega_k\phi w)(x_k+h_k)}\frac{1}{\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_{0,\nu}}{(\Omega_\nu\phi w)(x_\nu+h_\nu)}},\quad k=1,\ldots,n,$$

gde je

$$m_0=\mu([-1,1]),\quad m_{0,\nu}=\frac{\mu(I_\nu)}{2h_\nu},\quad \nu=1,\ldots,n.$$

Primetimo da je formula za težine ista i za $h_\nu=0$ i za $h_\nu\neq 0$. Samo u slučaju $h_\nu=0$, umesto $m_{0,\nu}/(2h_\nu)$ treba da stoji $w(x_\nu)$. Takođe, primetimo da su članovi zbira u imeniocu svi pozitivni. Ove karakteristike daju formuli za težine gotovo perfektne numeričke karakteristike, pod uslovom da se veličine $(\Omega_\nu\phi w)(x_\nu+h_\nu)$, $\nu=1,\ldots,n$, mogu odrediti sa dovoljnom tačnošću.

Nije teško zaključiti da se veličine $(\Omega_\nu\phi w)(x_\nu+h_\nu)$, $\nu=1,\ldots,n$, mogu određivati sa sve manjom tačnošću kako n raste. Sa porastom n, veličine $x_\nu+h_\nu$ i $x_{\nu+1}-h_{\nu+1}$, $\nu=1,\ldots,n-1$, postaju sve bliže i bliže jedna drugoj. Sličan efekat se javlja i na krajevima intervala. Veličine x_1-h_1 su sve bliže i bliže broju -1. Slična je situacija i sa drugim krajem intervala. Nažalost, nemamo rešenje za ovaj problem, tako da za konstrukciju težina zadržavamo prikazane formule.

Što se tiče određivanja čvorova Gauss-Jacobijeve intervalne kvadraturne formule (3.32), možemo koristiti sistem jednačina (3.39), koga zbog preglednosti ponavljamo,

$$\Delta_\nu(\Omega_\nu\phi w)=0,\quad \nu=1,\ldots,n. \tag{3.61}$$

Ovo je sistem nelinearnih jednačina i nije jednostvano odrediti dobre startne vrednosti za Newton-Kantorovičev metod. Međutim, teorema 3.28 daje putokaz. Može se startovati sa čvorovima Gauss-Jacobijeve kvadraturne formule (3.32), za koju je $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Sistem jednačina (3.61) određuje implicitno funkcije $x_\nu(\mathbf{h})$, $\nu = 1, \ldots, n$, i prema dokazu teoreme 3.28, znamo da su to neprekidne funkcije od $\mathbf{h}$. Kako se, dakle, rešenja x_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, malo menjaju sa malim porastom $\mathbf{h}$, možemo povećati $\mathbf{h}$ malo i nadati se da će čvorovi Gauss-Jacobijeve kvadraturne formule biti dobre startne vrednosti za sistem jednačina (3.61). Ako proces ne konvergira, pokušaj činimo sa manjim $\mathbf{h}$. Ovo sugeriše sledeći algoritam:

1° *Koristeći QR-algoritam konstruišemo klasičnu Gauss-Jacobijevu kvadraturnu formulu za* $\mathbf{h} = \mathbf{0}$*;*

2° *Povećamo vektor dužina* $\mathbf{h}$ *za neke male veličine i rešimo sistem* (3.39). *Ako tokom izračunavanja neko rešenje izađe van* $[-1, 1]$ *ili ako se javi preklapanje intervala* I_ν*,* $\nu = 1, \ldots, n$*, proces bi trebalo početi ponovo sa manjim povećanjem* $\mathbf{h}$*;*

3° *Ako je željeno* $\mathbf{h}$ *dostignuto, stop; ako nije vraćamo se na korak* 2°.

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}
1	2^{-11}	2^{-11}	2^{-11}	2^{-11}	2^{-11}	2^{-11}	2^{-11}	2^{-11}	2^{-11}	2^{-11}
2	2^{-10}	2^{-10}	2^{-10}	2^{-10}	2^{-10}	2^{-10}	2^{-10}	2^{-10}	2^{-10}	2^{-11}
3	2^{-9}	2^{-9}	2^{-9}	2^{-9}	2^{-9}	2^{-9}	2^{-9}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}
4	2^{-8}	2^{-8}	2^{-8}	2^{-8}	2^{-8}	2^{-8}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}
5	2^{-7}	2^{-7}	2^{-7}	2^{-7}	2^{-7}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}
6	2^{-6}	2^{-6}	2^{-6}	2^{-6}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}
7	2^{-5}	2^{-5}	2^{-5}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}
8	2^{-4}	2^{-4}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}
9	1.2×2^{-4}	1.2×2^{-4}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}
10	1.4×2^{-4}	1.4×2^{-4}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}
11	1.5×2^{-4}	1.5×2^{-4}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}
12	1.6×2^{-4}	1.6×2^{-4}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}
13	1.7×2^{-4}	1.7×2^{-4}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}
14	1.8×2^{-4}	1.8×2^{-4}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}
15	1.9×2^{-4}	1.9×2^{-4}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}
16	2^{-3}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}

Tabela 3.1: Vrednosti $\mathbf{h}$ za koje konstrukcija mora biti izvedena, da bismo konstruisali Gaussovu intervalnu kvadraturnu formulu za $h_1 = 2^{-3}$, $h_k = 2^{-k-1}$, $k = 2, \ldots, 10$, i $w = (1-x)^{-1/2}(1+x)^{1/2}\chi_{[-1,1]}$

Primetimo da je algoritam spor. Na primer, u tabeli 3.1 prikazano je napredovanje za slučaj težine $w = (1-x)^{-1/2}(1+x)^{1/2}\chi_{[-1,1]}$ i za željeni skup dužina $\mathbf{h} = (2^{-3}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}, 2^{-8}, 2^{-9}, 2^{-10}, 2^{-11})$.

Tabela prikazuje kako treba uvećavati **h** da bismo, koristeći Newton-Kantorovičev metod, konstruisali Gauss-Jacobijevu intervalnu kvadraturnu formulu u realnoj aritmetici. Može se desiti da metod Newton-Kantorovića konvergira i za slučaj kada se neki x_k, $k = 1, \ldots, n$, nađe van intervala $[-1, 1]$ tokom izračunavanja. Takva mogućnost zahteva da se izračunavanja vrše u kompleknoj aritmetici. Neke selektovane vrednosti za čvorove i težine prikazane su u tabeli 3.2. Brojevi u zagradama predstavljaju ekponente broja 10.

	nodes	weights
1	−0.9555714821546266	0.8819269169488328(−1)
	−0.8262372050632516	0.1685443187361792
	−0.6234892281045863	0.2339221694044083
	−0.3653418883406488	0.2785151953494401
	−0.7473261774507027(−1)	0.2983609655273108
	0.2225167002145672	0.2916960704779823
	0.4999941723697348	0.2591127122827378
	0.7330447260516490	0.2035060820238429
	0.9009608727587648	0.1298172197387312
	0.9888238989469692	0.4460018446019656(−1)
16	−0.8747652015186958	0.2500822580430385
	−0.6238761837928673	0.2531445546561681
	−0.4106087532236457	0.1854991824544691
	−0.2006825700433653	0.2300897101270037
	0.4704283668743392(−1)	0.2586250240329114
	0.3075751998771511	0.2574897091125772
	0.5536040848737141	0.2304948203267980
	0.7613312437658032	0.1816862582637493
	0.9113851132773224	0.1161024204287360
	0.9899958158914526	0.3991687797676042(−1)

Tabela 3.2: Čvorovi i težine Gauss-Jacobijeve intervalne kvadraturne formule za skupove dužina 1 i 15 iz Tabele 3.1

Postoji još jedan način da mislimo o problemu rešavanja sistema (3.39).

U nekim slučajevima za veliku vrednost sume dužina h_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, može biti jednostavnije da se konstruiše Gauss-Jacobijeva intervalna kvadraturna formula za takavu n-torku dužina za koju je $\sum_\nu h_\nu = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, pri čemu je ε dovoljno malo. Za takvo ε rešenje se može naći sa startnim vrednostima

$$x_\nu = -1 + \frac{2\nu - 1}{2n}\varepsilon + \sum_{k=1}^{\nu-1} 2h_k + h_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{3.62}$$

Kada je formula konstruisana sa ovakvim izborom dužina, možemo da počnemo da smanjujemo **h** za male veličine.

	h_1	h_2	h_3	h_4
1	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	$3/26$
2	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	$1/12$
3	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	$1/30$
4	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	$2^{-1}10^{-7}$

Tabela 3.3: Konstrukcija Gauss-Jacobijeve intervalne kvadraturne formule za n-torku dužina $\mathbf{h} = (1/2, 1/4, 1/8, 1/2 \times 10^{-7})$ and $w = (1 + x)\chi_{[-1,1]}$

	nodes	weights
1	−0.4980855760155284	0.1000061567988194(+1)
	0.2526113676464814	0.5019878952665683
	0.6347693503965700	0.2617313176048114
	0.8836631471658670	0.2343245896843151
2	−0.4958401925403619	0.1000284173218303(+1)
	0.2571838385995857	0.5084034113658505
	0.6600105625492481	0.2956902341309515
	0.9090777833116209	0.1915539863613619
3	−0.4942122108954871	0.1000539868161891(+1)
	0.2612226735210483	0.5147677615262761
	0.6819171447210468	0.3248284487706522
	0.9343039992148705	0.1542507500255729
4	−0.4939236304512220	0.1000593000452856(+1)
	0.2619857885347135	0.5159923628273851
	0.6858797821590323	0.3299782172813983
	0.9392819961277336	0.1475519772565636

Tabela 3.4: Konstrukcija Gauss-Jacobijeve intervalne kvadraturne formule za $\mathbf{h} = (1/2, 1/4, 1/8, 1/2 \times 10^{-7})$ i $w = (1 + x)\chi_{[-1,1]}$

Na primer, startujući sa $\mathbf{h} = (1/2, 1/4, 1/8, 3/26)$, imamo $\varepsilon = 1/104$. Upotrebom startnih vrednosti (3.62), možemo izvesti konstrukciju kao što je data u tabeli 3.3.

Literatura

[1] N.I. Akhiezer, I.M. Galzman, Theory of Linear Operators in Hilbert Space, vol. I, Pitman, Boston, 1981.

[2] A.I. Aptekarev, W.V. Assche, Scalar and matrix Riemann-Hilbert approach to the strong asymptotics of Pade approximants and complex orthogonal polynomials with varying weight, J. Approx. Theory 129 (2004), 129–166.

[3] W.V. Assche, Compact Jacobi matrices from Stieltjes to Krein and $\mathcal{M}[a,b]$, Ann. Fac. Sci. Touluse, Numero Special Stieltjes (1996), 196–215.

[4] V.F. Babenko, On a certain problem of optimal integration, in Studies on Contemporary Problems of Integration and Approximation of Functions and their applications, Collection of research papers, Dnepropetrovsk State University, Dnepropetrovsk, 1984, 3-13.

[5] B. Beckermann, Complex Jacobi matrices, J. Comput. Appl. Math. 127 (2001), 17–65.

[6] B. Beckerman, M. Castro, On the determinacy of the complex Jacobi operators, Publication ANO 446, Université Lille, (2002).

[7] B. Beckerman, On the convergence of bounded J-fractions on the resolvent set of the corresponding second order difference operator, J. Approx. Theory 99 (1999), 369–408.

[8] B. Bojanov, P. Petrov: Gaussian interval quadrature formula. Numer. Math. 87 (2001), 625–643.

[9] B. Bojanov, P. Petrov: Uniqueness of the Gaussian interval quadrature formula. Numer. Math. 95 (2003), 53–62.

[10] F. Calio', M. Frontini, G.V. Milovanović: Numerical differentiation of analytic functions using quadratures on the semicircle. Comput. Math. Appl. 22 (1991), 99–106.

[11] L. Carlitz, On some polynomials of Tricomi, Boll. Un. Mat. Ital., 3, 13 (1958), 58–64.

[12] T.S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, New York, 1978.

[13] T.S. Chihara, The three term recurrence relation and spectral properties of orthogonal polynomials, In: P. Nevai: Orthogonal Polynomials, pp. 99–114.

[14] A.S. Cvetković, Programski paket za simboličku i numeričku konstrukciju ortogonalnih polinoma i kvadraturnih formula, Magistarska teza, Univerzitet u Nišu, 2002.

[15] A.S. Cvetković, M.C. De Bonis, Projection methods for CSIE on the bounded intervals, Facta Univ. Ser. Math. Inform. 19 (2004) (to appear).

[16] A.S. Cvetković, P. Rajković, M. Ivković, Catalan numbers, the Hankel transform, and Fibonacci numbers, J. Integer Seq. 5 (2002), no. 1, Article 02.1.3, 8 pp. (electronic).

[17] G. Dalquist, On summation formulas due to Plana, Lindelöf and Abel, and related Gauss-Christoffel quadrature rule III, BIT 93, (1999), 51–78.

[18] R.A. DeVore, G.G. Lorentz, Constructive Approximation, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 303, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1993.

[19] J. Dombrowski, Orthogonal polynomials and functional analysis, In P. Nevai: Orthogonal Polynomials, 147–161.

[20] P.L. Duren, Theory of H^p Spaces, Academic Press, New York – London, 1970.

[21] J. Favard, Sur les polynomes de Tchebycheff, C.R. Acad. Sci. Paris 200 (1935), 2052–2053.

[22] W. Gautschi, Orthogonal Polynomials, Computation and Approximation, Oxford University Press Inc., New York, 2004.

[23] W. Gautschi, Algorithm 726: ORTHPOL – A package of routines for generating orthogonal polynomials and Gauss-type quadrature rules., ACM Trans. Math. Software 10 (1994), 21–62.

[24] W. Gautschi, Is the recurrence relation for orthogonal polynomials always stable, BIT 33 (1993), 277–284.

[25] W. Gautschi, H.J. Landau, G.V. Milovanović, Polynomials orthogonal on the Semicircle II, Constr. Approx. 3 (1987), 389–404.

[26] W. Gautschi, G.V. Milovanović, Polynomials orthogonal on the semicircle, J. Approx. Theory 46 (1986), 230–250.

[27] W. Gautschi, G.V. Milovanović, s-orthogonality and construction of Gauss-Turán-type quadrature formulae, J. Comput. Appl. Math. 86 (1997), 205–218.

[28] G.H. Golub, J.H. Welsch, Calculation of Gauss quadrature rule, Math. Comput. 23 (1986), 221–230.

[29] G.H. Golub, H.A. van der Vorst, Eigenvalue Computation in the 20-th Century, Math. Comput. 23 (1986), 221–230.

[30] A.A. Gonchar, On uniform convergence of diagonal Pade approximants, Engl. transal. Math. Sbornik 46 (1983), 539–559.

[31] P. Gonzales-Vera, G. Lopez, R. Orive, C. Santos, On the convergence of quadrature formulas for complex weight functions, J. Math. Anal. Appl. 189 (1995), 514–532.

[32] G.H. Hardy, E.M. Wright, An Introduction to The Theory of Numbers, Univeristy Press, Oxsford, 1975.

[33] M. Heins, Complex Function Theory, Academic Press, New York – London, 1968.

[34] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer, Berlin, 1966.

[35] R. Koekoek, R. P. Swarttouw, The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue, Report 98–17, TU Delft, 1998.

[36] C. Krattenthaler, Advanced determinant calculus, The Andrews Festschrift (Maratea, 1998), Sém. Lothar. Combin. 42 (1999), Art. B42q, 67 pp. (electronic).

[37] A.L. Kuzmina, Interval quadrature formulae with multiple node intervals, Izv. Vuzov 7, 218 (1980), 39-44.

[38] P.D. Lax, Functional Analysis, Wiley-Interscience, 2002.

[39] F. Lehner, Cumulants, lattice paths, and orthogonal polynomials, Discrete Math. 270 (2003), 177–191.

[40] D.S. Lubinsky, Asymptotics for Orthogonal Polynomials: Some Old, Some New, Some Identities, Acta Applicandae Mathematicae 61 (2000), 207-256.

[41] A.P. Magnus, Toeplitz matrix techniques and convergence of complex weight Pade approximation, J. Comput. Appl. Math. 19 (1987), 23–38.

[42] G. Mastroianni, G.V. Milovanović, Interpolation Proccesses: Basic Theory and Application (book in preparation).

[43] A. Mate, P. Nevai, A generalization of Poincare Theorem for recurrence equations, J. Approx. Theory 63 (1990), 92–97.

[44] D. Mihajlović, R. Janić, Elementi matematičke analize, I deo, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[45] G.V. Milovanović, Complex orthogonality on the semicircle with respect to Gegenbauer weight: Theory and applications, In: Topics in Mathematical Analysis (Th.M. Rassias, ed.), 695–722, Ser. Pure Math., 11, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989.

[46] G.V. Milovanović, Numerička analiza, I deo, Naučna knjiga, Beograd, 1991.

[47] G.V. Milovanović, Numerička analiza, II deo, Naučna knjiga, Beograd, 1991.

[48] G.V. Milovanović, Kompleksni polinomi ortogonalni na polukrugu, In: D.S. Mitrinović, J.D. Kečkić, Cauchyjev račun ostataka sa primenama, Matematički problemi i ekspozicije, Naučna knjiga, Beograd, 1991, str. 387–399.

[49] G.V. Milovanović, Numerical calculation of integrals involving oscillatory and singular kernels and some applications of quadratures, Comput. Math. Appl. 36 (1998), 19-39.

[50] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Note on construction of weights in Gauss-type quadrature rule, Facta Univer. Ser. Math. Inform. 15 (2000), 69–83.

[51] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Numerical integration of functions with logarithmic end point singularity, Facta Univ. Ser. Math. Inform. 17 (2002), 57-74.

[52] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Complex Jacobi matrices and quadrature rules, FILOMAT 17 (2003), 117–134.

[53] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, An application of little $1/q$-Jacobi polynomials to summation of certain series, Facta Univ. Ser. Math. Inform. 18 (2003), 31–46.

[54] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Numerical construction of the generalized Hermite polynomials, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 14 (2003), 49-63.

[55] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Convergence of Gaussian quadrature rules for approximation of certain series, East J. Approx. 10 (2004), 171–187.

[56] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Standard and non-standard quadratures of Gaussian type, In: APPROXIMATION THEORY: A volume dedicated to Borislav Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, eds.) (to appear).

[57] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Remarks on "Orthogonality of some sequences of the rational functions and Mntz polynomials", J. Comput. Appl. Math. (to appear).

[58] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Orthogonal polynomials and Gaussian quadrature rules related to oscillatory weight functions, J. Comput. Appl. Math. (to appear).

[59] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Uniqueness and computation of Gaussian interval quadrature formula for Jacobi weight function, Numer. Math. (to appear).

[60] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Gauss-Laguerre interval quadrature rule (manuscript).

[61] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, On polynomials orthogonal on the semicircle (manuscript).

[62] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Linear Christoffel modifications in the supporting set of the measures (manuscript).

[63] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Nonstandard Gaussian quadrature formulae based on operator values (manuscript).

[64] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Some inequalities for symmetric functions and an application to orthogonal polynomials (manuscript).

[65] G.V. Milovanović, R. Ž, Djorđević, Matematika za studente tehničkih fakulteta, I deo, Elektronski fakultet, Niš, 2002.

[66] G.V. Milovanović, R. Ž. Djorđević, Matematika za studente tehničkih fakulteta, II deo, Čuperak Plavi, Niš, 1996.

[67] G.V. Milovanović, D.S. Mitrinović, Th. M. Rassias, Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros, World Scientific, Singapore – New Jersey – London – Hong Kong, 1994.

[68] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, Quadrature formulae connected to σ-orthogonal polynomials, J. Comput. Appl. Math. 140 (2002), 619–637.

[69] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, Construction of Chakalov-Popoviciu's type quadrature formulae, Rend. Circ. Mat. Palermo II, 2 Suppl. (52) (1998), 625–636.

[70] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, A numerical procedure for coecients in generalized Gauss-Turán quadratures, FILOMAT (formerly Zb. Rad.) 9 (1995), 1–8.

[71] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, Error bounds for Gauss-Turán quadrature formulae of analytic functions, Math. Comp. 72 (2003), 1855-1872.

[72] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, Error analysis in some Gauss-Turán-Radau and Gauss-Turán-Lobatto quadratures for analytic functions, J. Comput. Appl. Math. 164-165 (2004), 569-586.

[73] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, A.S. Cvetković, Calculation of Gaussian type quadrature rules with multiple nodes, Math. Comput. Modelling, 39 (2004), 324–347.

[74] B. Mirković, Teorija mera i integrala, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[75] D.S. Mitrinović, Predavanja o redovima, Građevinska knjiga, Beograd, 1986.

[76] D.S. Mitrinović, Cauchyjev račun ostataka sa primenama, Matematički problemi i ekspozicije, Naučna knjiga, Beograd, 1991.

[77] D.S. Mitrinović, D.D. Adamović, Nizovi i redovi: definicije – stavovi – zadaci – problemi, Matematički problemi i ekspozicije 7, Naučna knjiga, Beograd, 1971.

[78] D.S. Mitrinović, D.Ž. Djoković, Polinomi i matrice, Građevinska knjiga, Beograd, 1986.

[79] D.S. Mitrinović, J.D. Kečkić, Matematika II, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.

[80] V.P. Motornyi, On the best quadrature formulae in the class of functions with bounded r-th derivative. East J. Approx. 4 (1998), 459-478

[81] P.G. Nevai, Orthogonal Polynomials, Memoirs of the American Mathematical Society, Providence, RI, 1979.

[82] P. Nevai, Two of my favorite ways of obtaining asymptotics for orthogonal polynomials, International Series of Numerical Mathematics, vol. 65, 1984, Birkhauser Verlag Basel.

[83] M. Omladič, S. Pahor, A. Suhadolc, On a new type quadrature formulas. Numer. Math. 25 (1976), 421-426.

[84] M. Omladič, Average quadrature formulas of Gauss type, IMA Journal of Numerical Analysis 12 (1992), 189–199.

[85] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York, 1970.

[86] E. Pap, Parcijalne diferencijalne jednačine,????.

[87] Fr. Pitnauer, M. Reimer, Interpolation mit Intervallfunktionalen. Math. Z. 146 (1976), 7-15.

[88] G. Polya, G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, vol. 2, Berlin, 1925.

[89] J.G. Proakis, Digital Communications, McGraw-Hill Higher Education, New York, 2001.

[90] E.A. Rahmanov, On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials, Math USSR Sb. 32 (1977), 199–213; II Math. USSR Sb. 46 (1983), 105–117.

[91] V. Rakočević, Funkcionalna analiza, Naučna knjiga, Beograd, 1994.

[92] J.T. Schwartz, Nonlinear Functional Analysis. Gordon and Breach, New York, 1969.

[93] R.N. Sharipov, Best interval quadrature formulae for Lipschitz classes, in Constructive Function Theory and Functional Analysis, Kazan University, Kazan, 4 (1983), 124-132.

[94] H. Stahl, Spurious poles in Pade approximation, J. Comput. Appl. Math. 99 (1998), 511–527.

[95] H. Stahl, V. Totik, General Orthogonal Polynomials, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 43, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[96] B. Stanković, Osnovi Funkcionalne Analize, Naučna Knjiga, Beograd, 1988.

[97] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, AMS, Colloquim Publications, v. 23, 1975.

[98] G. Teschl, Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices, Mathematical Surveys and Monographs, 72, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[99] E. J. Townsend, Functions of a Complex Variable, Henry Holt & Co., New York, 1942.

[100] F.G. Tricomi, A class of non-orthogonal polynomials related to those of Laguerre, Journal d'analyse mathematique, 1 (1951), 209–231.

[101] M. Vanlessen, Strong asymptotics of the recurrence coef.cients of orthogonal polynomials associated to the generalized Jacobi weight, J. Approx. Theory 125 (2003), 198–273.

[102] A. Zygmund, Trigonomatrical series, Dover Publications, 1955.

[103] H.S. Wall, Analytic Theory of Continued Fractions, Chelsea, Bronx, New York, 1973.