Gradimir V. Milovanović
Radosav Ž. Đorđević

LINEARNA ALGEBRA

Predgovor

Ova knjiga predstavlja udžbenik iz predmeta *Linearna algebra* koji se studentima Elektronskog fakulteta u Nišu predaje u I semestru počev od školske 2004/2005. godine. Knjiga je nastala na osnovu više puta objavljivanih udžbenika istih autora, pod naslovom: *Matematika za studente tehničkih fakulteta, I i II deo.*

Udžbenik *Linearna algebra* sastoji se iz šest glava.

U glavi *Osnovi algebre* izloženi su algebra skupova, matematička indukcija i elementi teorije o apstraktnim strukturama. Posebna pažnja je posvećena kompleksnim brojevima.

Glava *Linearni prostori, linearni operatori i matrice*, sastoji se iz dela u kojem su uvedeni osnovni pojmovi teorije linearnih prostora, sa posebnim osvrtom na prostor prosto-periodičnih oscilacija, kao i teorije linearnih operatora i dela u kojem je detaljno izložena teorija matrica i determinanata.

Sistemi linearnih jednačina je glava u kojoj su izloženi osnovni metodi rešavanja sistema linearnih jednačina i u vezi sa tim i osnovni pojmovi o ekvivalentnim sistemima vektora i matrica.

U glavi *Algebarski polinomi i racionalne funkcije*, ukratko ali u dovoljnoj meri, izložena je teorija o algebarskim polinomima, teorija o rešavanju algebarskih jednačina, kao i izvesni pojmovi o polinomskim funkcijama više promenljivih i racionalnim funkcijama.

Glava *Spektralna teorija matrica i operatora* tretira problem sopstvenih vrednosti, invarijantne potprostore i strukturu linearnih operatora.

I na kraju, u glavi *Elementi analitičke geometrije* ukratko je izložena analitička geometrija u trodimenzionalnom prostoru.

Svaka glava je podeljena na poglavlja, a poglavlja na odeljke.

Numeracija objekata (formula, teorema, definicija i sl.) u okviru jednog odeljka izvršena je pomoću tri broja od kojih prvi ukazuje na poglavlje, drugi na odeljak i treći na redni broj tog objekta u posmatranom odeljku. Tako, na primer, Teorema 3.2.4 predstavlja *četvrtu* teoremu u *drugom* odeljku *trećeg* poglavlja odgovarajuće glave. Na ovaj način je uspostavljena jednoznačna numeracija objekata u okviru jedne glave.

Sva teorijska izlaganja propraćena su odgovarajućim primerima.

Kao novina u našoj udžbeničkoj literaturi, na kraju svake glave je poglavlje *Zadaci za vežbu*, čiji je cilj da korisnicima ove knjige omogući samostalno uvežbavanje prethodno izložene teorije.

Kako je knjiga pisana u skladu sa najnovijim planom i programom studija na Elektronskom fakultetu u Nišu, ona je, pre svega, namenjena studentima elektronike i elektrotehnike, ali i studentima drugih tehničkih fakulteta, kao i studentima matematike i fizike na prirodno-matematičkim fakultetima.

Niš, 30. septembra 2004.

G. V. Milovanović / R. Ž. Đorđević

Sadržaj

I G L A V A

Osnovi algebre

II G L A V A

Linearni prostori, linearni operatori i matrice

IV G L A V A

Algebarski polinomi i racionalne funkcije

V G L A V A

Spektralna teorija matrica i operatora

VI G L A V A

Elementi analitičke geometrije

æ

I G L A V A

Osnovi algebre

1. SKUPOVI, RELACIJE I PRESLIKAVANJA

1.1. Elementi matematičke logike

Kao i u svakodnevnom životu, i u matematici se operiše i opšti rečenicama. Naravno, u matematici, one moraju biti takve da imaju smisla, a pri tom mogu biti samo istinite ili neistinite. Za takve rečenice kažemo da su *iskazi* ili *sudovi*. Dakle, jedan iskaz može imati samo jednu vrednost istinitosti, tj. iskaz je ili *istinit* ili *neistinit*.

Vrednost istinitog iskaza označavamo sa $\top$ ili sa 1, a neistinitog sa $\perp$ ili sa 0. Simbol $\top$ čitamo kao *istinito* ili *tačno*, a simbol $\perp$ kao *neistinito* ili *netačno*.

Dakle, ako sa p označimo neki iskaz, onda njegova vrednost istinitosti $\tau(p)$ može biti

$$\tau(p) = \begin{cases} \top\,, & \text{ako je } p \text{ istinit iskaz,} \\ \perp\,, & \text{ako je } p \text{ neistinit iskaz.} \end{cases}$$

Korišćenjem izvesnih operacija nad iskazima moguća je konstrukcija i složenijih iskaza. Ovim se bavi poseban deo matematičke logike koji se naziva *iskazni račun* ili *iskazna algebra*.

Nad iskazima moguće je uvesti sledeće operacije:

(1) *Negacija* iskaza p, u oznaci $\neg p$, je istinit iskaz ako i samo ako je iskaz p neistinit.

(2) *Konjunkcija* iskaza p i q, u oznaci $p \wedge q$, je složen iskaz koji je istinit ako i samo ako su oba iskaza p i q istinita. Alternativno, za konjunkciju se koristi i termin *operacija i*, tako da se $p \wedge q$ čita kao p *i* q.

(3) *Disjunkcija* iskaza p i q, u oznaci $p \vee q$, je složen iskaz koji je istinit ako je bar jedan od iskaza p i q istinit. Drugim rečima, $p \vee q$ je neistinit iskaz ako i samo ako su oba iskaza p i q neistinita. Za disjunkciju se koristi i termin *operacija ili*, tako da se $p \vee q$ čita i kao p *ili* q.

(4) *Implikacija* $p \Rightarrow q$ je složen iskaz koji je neistinit ako i samo ako je p istinit a q neistinit iskaz. Implikacija $p \Rightarrow q$ se čita i na jedan od sledećih načina:

- iz p sleduje q,
- q je posledica iskaza p,
- ako p tada q,
- p je dovoljan uslov za q,
- q je potreban uslov za p.

(5) *Ekvivalencija* $p \Leftrightarrow q$ je složen iskaz koji je istinit ako i samo ako oba iskaza imaju istu istinitosnu vrednost. Ekvivalencija $p \Leftrightarrow q$ se čita i kao:

- p je ekvivalentno sa q,
- p je ako i samo ako je q,
- p je potreban i dovoljan uslov za q.

(6) *Ekskluzivna disjunkcija* $p \underline{\vee} q$ je složen iskaz koji je istinit ako i samo ako iskazi p i q imaju različite istinitosne vrednosti. Dakle, ekskluzivna disjunkcija predstavlja negaciju ekvivalencije, tj. $\neg(p \Leftrightarrow q)$.

U sledećoj tabeli, tzv. tablici istinitosti, dat je pregled vrednosti istinitosti za prethodno uvedene operacije:

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(\neg p)$	$\tau(p \wedge q)$	$\tau(p \vee q)$	$\tau(p \Rightarrow q)$	$\tau(p \Leftrightarrow q)$	$\tau(p \underline{\vee} q)$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$

Često se mogu sresti i rečenice poput sledeće: *Broj x je manji od broja y.* Ukoliko nisu specificirane vrednosti za x i y, nije moguće utvrditi istinitost navedene rečenice. Međutim, ako uzmemo $x = 2$ i $y = 3$, rečenica daje istinit iskaz. Dakle, rečenice ovog tipa sadrže izvesne *promenljive*. Dajući konkretne vrednosti ovim promenljivama, rečenice postaju iskazi (istiniti ili neistiniti). Za takve rečenice kažemo da su *iskazne funkcije*. Za odnos između promenljivih koristi se termin *predikat*. Tako u prethodnom primeru predikat ... *je manji od* ... povezuje promenljive x i y. Prema tome, ako ovaj predikat označimo sa P, rečenica definiše iskaznu funkciju od dve promenljive $P(x, y)$. U opštem slučaju, iskazna funkcija može zavisiti od jedne ili više promenljivih.

Na kraju ovog kratkog pregleda osnovnih elemenata matematičke logike pomenimo još i tzv. *kvantifikatore* koji se primenjuju na promenljive u iskaznim funkcijama.

Postoje dva kvantifikatora:

(1) univerzalni kvantifikator *svaki* (ili *za svaki*) sa oznakom $\forall$;

(2) egzistencijalni kvantifikator *neki* (ili *postoji*) sa oznakom $\exists$.

Primena kvantifikatora na sve promenljive u iskaznoj funkciji prevodi iskaznu funkciju u iskaz.

Primer 1.1.1. Iz prethodno pomenute iskazne funkcije $P(x, y)$ možemo formirati iskaz

$$(\forall y)\,(\exists x)\ P(x, y),$$

koji znači: *Za svaki broj y, postoji broj x takav da je x manji od y.* $\triangle$

Napomena 1.1.1. Često kvantifikatore upotrebljavamo u jednom ograničenom smislu, tj. promenljive ograničavamo na elemente izvesnih skupova X, Y, itd.

Na primer, uzimamo $(\forall x \in X)$ ili $(\exists y \in Y)$, itd. U takvim slučajevima kažemo da radimo sa kvantifikatorima ograničenog opsega.

Primer 1.1.2. Neka je $P(x)$ data iskazna funkcija na skupu X. Iskaz

$$(\forall x \in X)\ P(x),$$

sa kvantifikatorom ograničenog opsega, može se protumačiti na sledeći način

$$(\forall x)\big(x \in X \ \Rightarrow\ P(x)\big). \quad \triangle$$

Konačnom upotrebom kvantifikatora i iskaznih funkcija, uz uvedene operacije nad iskazima, dobijamo složene iskaze.

U cilju konciznijeg pisanja, često ćemo, kada ne može doći do zabune, u daljem izlaganju koristiti

$$P(x, y, \dots) \qquad (x \in X,\ y \in Y,\ \dots),$$

umesto

$$(\forall x \in X)\,(\forall y \in Y)\ \dots \qquad P(x, y, \dots).$$

1.2. Skupovi i osnovne osobine skupova

U svim naukama ima pojmova koji se ne definišu. To su za svaku nauku osnovni i, u skladu sa prirodom nauke, potpuno ili dovoljno jasni pojmovi. U matematici *skup* je jedan od pojmova koji je osnovni. Neki drugi su, na primer, broj, tačka, prava, ... Prema tome, skup se ne definiše. Označavaćemo ga sa $A, B, C, \dots$ ili na neki drugi način, što ćemo posebno naglasiti.

Skup se sastoji od elemenata, koje ćemo označavati uglavnom sa $a, b, c, \dots$ Činjenicu da je a element skupa A označavaćemo sa $a \in A$. Oznaku $a \in A$ čitamo: a je element skupa A, a pripada skupu A, a je iz skupa A ili a je u skupu A. Ako a nije element skupa A, pisaćemo $a \notin A$. Naravno, oznaku $a \notin A$ čitamo: a nije element skupa A, a ne pripada skupu A, a nije iz skupa A ili a nije u skupu A.

Razumljivo, ne može važiti istovremeno $a \in A$ i $a \notin A$.

Ako se skup A sastoji iz elemenata $a, b, c, \dots$, pisaćemo $A = \{a, b, c, \dots\}$.

Ukoliko se skup A sastoji iz elemenata x koji imaju određenu osobinu $P(x)$, označavaćemo $A = \{x \mid P(x)\}$. To, zapravo, znači da ako y nema osobinu $P(y)$, tada y nije element skupa A, tj. $y \notin A$.

Posmatrajmo sada dva skupa A i B.

Mogući su sledeći slučajevi:

Slučaj 1. Svi elementi skupa A su i elementi skupa B. Tada kažemo da je skup A *podskup* skupa B ili da je skup B *nadskup* skupa A. Ovo respektivno označavamo sa $A \subset B$ ili $B \supset A$. Dakle,

$$A \subset B \iff (\forall x)\ (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Primetimo da važi $A \subset A$ i $A \supset A$, tj. da je svaki skup, u trivijalnom slučaju, svoj podskup, ali i svoj nadskup. To označavamo i na način $A \subseteq A$ ili $A \supseteq A$.

Primer 1.2.1. Skup $A = \{a, b\}$ je podskup skupa $B = \{a, b, c, d\}$. Naravno, skup B je nadskup skupa A. $\triangle$

Napomena 1.2.1. Ponekad se za nadskup skupa A kaže da je opsežniji skup od skupa A.

Napomena 1.2.2. Činjenicu da skup A nije opsežniji od skupa B označavamo sa $A \subseteq B$. Naravno da i oznaka $B \supseteq A$ predstavlja istu činjenicu.

Napomena 1.2.3. Bez dodatnih ograničenja ne postoji najopsežniji skup, tj. ne postoji skup koji je nadskup svih mogućih skupova.

Slučaj 2. Svi elementi skupa A su elementi skupa B i svi elementi skupa B su elementi skupa A, što obeležavamo sa $A \subset B$ i $B \subset A$, ali i sa $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Ovaj slučaj nastupa kada se skupovi A i B sastoje iz istih elemenata. Tada kažemo da su skupovi A i B jednaki označavajući to sa $A = B$ ili $B = A$. Dakle,

$$A = B \iff (\forall x)\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Primer 1.2.2. Skupovi $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{c, a, b\}$ su jednaki, tj. važi jednakost $A = B$. $\triangle$

Slučaj 3. Neki elementi skupa A su elementi i skupa B. Ovo je slučaj kada skupovi A i B imaju elemente koji pripadaju i jednom i drugom skupu. Ti elementi su njihovi zajednički elementi i oni čine skup C za koji je $C \subset A$ i $C \subset B$.

Primer 1.2.3. Za skupove $A = \{1, 2, a, b\}$ i $B = \{2, 3, a, c\}$ skup C je određen sa $C = \{2, a\}$. $\triangle$

Slučaj 4. Ni jedan element skupa A nije element skupa B, što je isto kao i da ni jedan element skupa B nije element skupa A. To je slučaj kada skupovi A i B nemaju zajedničkih elemenata. Za takve skupove kažemo da su *disjunktni*.

Primer 1.2.4. Skupovi $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$ su disjunktni. $\triangle$

Ova četiri slučaja ukazuju da među skupovima postoje izvesni odnosi koje valja izučiti. Smatraćemo, pre svega, da su svi skupovi koje ćemo nadalje razmatrati podskupovi jednog datog skupa E, čija nam priroda nije bitna, ali tako da bilo kakvo tretiranje jednog, dva ili više skupova uvek dovodi do skupa koji je podskup skupa E.

Kao što smo videli, oznake $A \subseteq B$ i $A \subset B$ se formalno razlikuju. U prvoj je eksplicitno naglašena i mogućnost jednakosti skupova A i B. Ako insistiranje na jednakosti nije bitno, pisaćemo jednostavno $A \subset B$.

Definicija 1.2.1. Skup čiji elementi pripadaju bar jednom od skupova A ili B zovemo *unija* skupova A i B, u oznaci $A \cup B$.

Dakle,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Očigledno, važi $A \cup B = B \cup A$, tj. unija skupova ima osobinu *komutativnosti.*

Primetimo da je: $A \cup A = A$, $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$.

Primer 1.2.5. Neka je $A = \{1, 2, a, b\}$ i $B = \{2, 3, a, c\}$. Tada je njihova unija skup $C = A \cup B = \{1, 2, 3, a, b, c\}$.

Definicija 1.2.2. Skup čiji elementi pripadaju i skupu A i skupu B zovemo *presek* skupova A i B, u oznaci $A \cap B$.

Prema tome, presek skupova A i B je skup

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Očigledno važi jednakost $A \cap B = B \cap A$, tj. i presek skupova ima osobinu komutativnosti.

Napomenimo da je: $A \cap A = A$, $A \supset A \cap B$, $B \supset A \cap B$.

Primer 1.2.6. Presek skupova $A = \{1, 2, a, b\}$ i $B = \{2, 3, a, c\}$ je skup $C = \{2, a\}$. $\triangle$

Ranije navedeni opšti zahtev da tretiranje skupova treba uvek da dovede do skupa upućuje nas na sledeće razmatranje:

Unija dva skupa uvek postoji kao skup, tj. uvek ima elemenata koji pripadaju bar jednom od skupova koji čine uniju. Međutim, može se desiti da skupovi A i B nemaju zajedničkih elemenata. To je slučaj kada su skupovi A i B disjunktni. Ali, zahtev da i u tom slučaju $A \cap B$ predstavlja skup navodi nas na zaključak da postoji, ili da bi bilo dobro da postoji, skup koji nema elemenata. To je skup bez elemenata. Zvaćemo ga *prazan* skup i označavaćemo ga sa $\emptyset$.

Uveli smo, dakle, prazan skup kao skup koji nema elemenata. Ponekada ćemo, da bismo istakli da nije prazan, svaki drugi skup zvati *neprazan* skup.

Očigledno, prazan skup je podskup svakog skupa, tj. za svaki skup A važi $\emptyset \subset A$.

Isto tako, važe i jednakosti $A \cup \emptyset = A$ i $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Sledeća dva tvrđenja navodimo bez dokaza:

Teorema 1.2.1. *Važe jednakosti*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad i \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Ove jednakosti predstavljaju redom tzv. osobinu *asocijativnosti* za uniju i presek skupova. Teorema 1.2.1 pokazuje da redosled uniranja i presecanja skupova nije od značaja, pa se obično izostavljaju zagrade i piše se $A \cup B \cup C$ umesto $(A \cup B) \cup C$, tj. $A \cap B \cap C$ umesto $(A \cap B) \cap C$.

Teorema 1.2.2. *Važe jednakosti*

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Ovo tvrđenje predstavlja osobinu *distributivnosti* unije u odnosu na presek i preseka u odnosu na uniju.

Napomenimo da osobina obostrane distributivnosti nije uobičajena. Na primer, množenje brojeva je distributivno u odnosu na sabiranje brojeva, ali sabiranje nije distributivno u odnosu na množenje.

Definicija 1.2.3. Skup čiji elementi nisu elementi skupa A zovemo *komplement* skupa A u odnosu na skup E i označavamo ga sa A', tj.

$$A' = \{x \mid x \in E \land x \notin A\}.$$

Komplement skupa E je prazan skup. Komplement praznog skupa je skup E.

Iz ove definicije neposredno sleduju jednakosti

$$A \cap A' = \emptyset, \quad A \cup A' = E, \quad (A')' = A, \quad \emptyset' = E, \quad E' = \emptyset. \tag{1.2.2}$$

Naravno, moguće je govoriti i o komplementu skupa A u odnosu na neki drugi skup, na primer skup F, ali samo ako je $A \subset F$. Sa A'_F označavamo komplement skupa A u odnosu na skup F.

Napomenimo da i u ovom slučaju važe jednakosti koje odgovaraju jednakostima (1.2.2).

Naravno, kada se radi o više skupova i njihovim komplementima u odnosu na isti skup, nije potrebno naglašavati za komplemente u odnosu na koji se skup oni odnose.

Bez dokaza navodimo i sledeće tvrđenje:

Teorema 1.2.3. *Važe jednakosti*

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \qquad i \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'. \tag{1.2.3}$$

Jednakosti (1.2.3) su u literaturi poznate pod imenom *De Morganovi*[1] *obrasci.*

Bez dokaza navodimo sledeća uopštenja prethodnih teorema:

Teorema 1.2.4. *Važe jednakosti*

$$A_0 \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \bigcup_{i=0}^{n} A_i\,, \qquad A_0 \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = \bigcap_{i=0}^{n} A_i\,.$$

Teorema 1.2.5. *Važe jednakosti*

$$A \cup \Big(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{n}(A \cup B_i)\,, \qquad A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{n}(A \cap B_i)\,.$$

Teorema 1.2.6. *Važe jednakosti*

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big)' = \bigcap_{i=1}^{n} A'_i\,, \qquad \Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big)' = \bigcup_{i=1}^{n} A'_i\,.$$

---

[1] Augustus De Morgan (1806–1871), škotski matematičar i logičar.

Definicija 1.2.4. Skup $\{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\}$, u oznaci $A \setminus B$, zovemo *razlika* skupova A i B.

Primer 1.2.7. Ako je $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{b, d\}$, sleduje $A \setminus B = \{a, c\}$. $\triangle$

Naravno, ako je $A \subset B$, tada važi $A \setminus B = \emptyset$, ali i $B \setminus A = A'_B$. Isto tako je i $A \setminus A = \emptyset$.

Definicija 1.2.5. Skup $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ nazivamo *simetrična razlika* skupova A i B i označavamo ga sa $A \div B$.

Očigledno je da važi $A \div B = B \div A$.

Primer 1.2.8. Kako je za skupove $A = \{1, 2, a, b\}$ i $B = \{2, 3, b, c\}$

$$A \setminus B = \{1, a\} \qquad \text{i} \qquad B \setminus A = \{3, c\},$$

sleduje

$$A \div B = \{1, 3, a, c\}. \quad \triangle$$

Kao što smo videli, za dva skupa, ili za više njih, uvek je moguće odrediti skup koji je njihova unija. I naravno, određivanje unije skupova uvek je jednoznačno. Obrnuti problem, u opštem slučaju, nije jednoznačno rešiv.

Primer 1.2.9. Skup $X = \{1, 2, a, b, \alpha, \beta\}$ predstavlja uniju skupova $X_1 = \{1, 2, a\}$ i $X_2 = \{b, \alpha, \beta\}$, ali i skupova $X_3 = \{1, 2, a, b\}$ i $X_4 = \{a, b, \alpha, \beta\}$. Naravno, ima i drugih mogućnosti. $\triangle$

Definicija 1.2.6. Za disjunktne podskupove skupa X, čija je unija čitav skup X, kažemo da čine *particiju* skupa X.

Primer 1.2.10. Jednu particiju skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ čine skupovi $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 7\}$, $\{5, 6\}$. $\triangle$

Napomena 1.2.4. U opštem slučaju, jedan skup ima više particija.

U vezi sa prethodnim, postavlja se pitanje određivanja svih podskupova datog skupa, tj. skupa svih podskupova jednog skupa.

Definicija 1.2.7. Skup svih podskupova skupa A zovemo *partitivni* skup skupa A i označavamo ga sa $\mathbb{P}(A)$.

Napomenimo da su prazan skup $\emptyset$ i sâm skup A uvek elementi skupa $\mathbb{P}(A)$.

Dakle,

$$\mathbb{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Primer 1.2.11. Ako je $A = \{a, b, c\}$, njegov partitivni skup je

$$\mathbb{P}(A) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}. \quad \triangle$$

Na kraju ovog odeljka navešćemo uobičajene oznake za neke standardne skupove brojeva:

$\mathbb{N}$ – skup svih prirodnih brojeva,
$\mathbb{N}_0$ – skup svih prirodnih brojeva uz uključivanje nule, tj. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,
$\mathbb{Z}$ – skup svih celih brojeva,
$\mathbb{Q}$ – skup svih racionalnih brojeva,
$\mathbb{I}$ – skup svih iracionalnih brojeva,
$\mathbb{R}$ – skup svih realnih brojeva,
$\mathbb{R}^+$ – skup svih pozitivnih realnih brojeva,
$\mathbb{R}_0^+$ – skup svih nenegativnih realnih brojeva, tj. $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

O oznakama nekih drugih skupova biće reči docnije.

1.3. Relacije

Posmatrajmo neprazne skupove X i Y. Elementu x iz prvog skupa X pridružićemo neki element $y \in Y$. Na taj način dobijamo jedan par elemenata x i y koji nazivamo *uređeni par* i označavamo sa (x, y). Dakle, uređeni par (x, y) je okarakterisan svojstvom da je prvi element x iz prvog skupa, a drugi y iz drugog skupa. Zato element x nazivamo *prva komponenta* ili *prva koordinata*, a y *druga komponenta* ili *druga koordinata* uređenog para (x, y).

Po definiciji, dva uređena para (x, y) i (x', y') su jednaka, tj. $(x, y) = (x', y')$, ako i samo ako je $x = x'$ i $y = y'$.

Napomena 1.3.1. S obzirom da je (x, y) dvočlani skup (sa uređenim elementima), moguće je definisati uređeni par i na formalan način kao skup

$$(x, y) = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}.$$

Ako je definicija uređenog para uvedena na ovakav formalni način, tada se može dokazati da je $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$.

Pojam uređene trojke (x, y, z) elemenata $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ može se uvesti na sledeći način

$$(x, y, z) = \big((x, y), z\big).$$

Naravno, moguće je definisati i uređenu n-torku elemenata $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $\dots$, $x_n \in X_n$, pomoću jednakosti

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \big((x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n\big),$$

pri čemu važi sledeća ekvivalencija

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \;\Leftrightarrow\; x_i = y_i \;(i = 1, 2, \dots, n).$$

Definicija 1.3.1. Skup

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

zovemo *Dekartov*[2)] ili *Cartesiusov proizvod* skupova X i Y.

Prema tome, Dekartov proizvod skupova X i Y predstavlja skup svih uređenih parova (x, y) elemenata x i y, pri čemu je prvi element u paru iz skupa X, a drugi iz skupa Y. Naravno, u opštem slučaju ne važi jednakost $X \times Y = Y \times X$, osim ako je $X = Y$.

U smislu definicije 1.3.1, Dekartov proizvod skupova $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je skup

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}.$$

Dakle, elementi Dekartovog proizvoda skupova $X_1, X_2, \ldots, X_n$ su uređene n-torke $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ elemenata $x_i \in X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ako je $Y = X$, tada pišemo $X \times Y = X \times X = X^2$. Isto tako, i oznaka X^3 znači proizvod $X \times X \times X$. Naravno, ako je $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$, pišemo

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = X^n.$$

Neka su i sada X i Y neprazni skupovi.

Definicija 1.3.2. Skup $\rho \subset X \times Y$ zovemo *binarna relacija* u skupu $X \times Y$.

Ako $(x, y) \in \rho$, kažemo da su x i y u relaciji ρ označavajući to i sa $\rho(x, y)$ ili $x \rho y$. Ako $(x, y) \notin \rho$, kažemo da x i y nisu u relaciji ρ i to označavamo sa $x \operatorname{non} \rho\, y$.

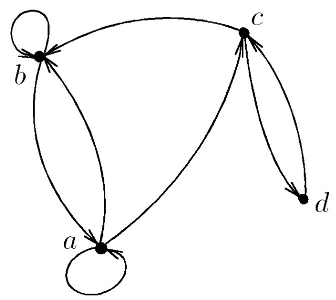
Ako je $Y = X$, tada za binarnu relaciju u skupu $X \times Y = X \times X = X^2$ kažemo jednostavno da je binarna relacija u skupu X.

Definicija 1.3.3. Ako je ρ binarna relacija u skupu X, uređeni par (X, ρ), u oznaci $\Gamma = (X, \rho)$, nazivamo *graf*. Za elemente skupa X kažemo da su *čvorovi*, a za elemente skupa ρ da su *grane grafa*.

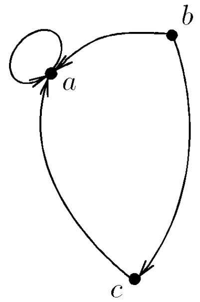
Graf se obično predstavlja crtežom na kome su čvorovi grafa predstavljeni tačkama. Činjenica da $(a, b) \in \rho$ označava se orijentisanom linijom koja spaja tačke a i b, tj. koja spaja čvorove a i b, i usmerena je od a ka b. Ta linija je jedna grana grafa. Naravno, ako je $(a, a) \in \rho$ to simbolizujemo

---

[2)] René Descartes (Cartesius) (1596–1650), veliki francuski filozof i matematičar.



Sl. 1.3.1



Sl. 1.3.2

malim, takođe orijentisanim, lukom povučenim od tačke a do iste tačke a. Za taj luk kažemo da predstavlja *petlju grafa*.

Na primer, ako je $X = \{a, b, c, d\}$ i ako je

$$\rho = \big\{(a,a), (b,b), (a,b), (b,a), (a,c), (c,b), (c,d), (d,c)\big\},$$

tada graf $\Gamma = (X, \rho)$ izgleda kao na slici 1.3.1.

U daljim razmatranjima izučićemo neke osobine relacija u skupu X.

Definicija 1.3.4. Relacija ρ je *refleksivna* ako je $x\rho x$ za svako $x \in X$.

Primer 1.3.1. Neka je $X = \{a, b, c\}$ i $\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$. Relacija ρ je refleksivna relacija u skupu X. $\triangle$

Napomena 1.3.2. Ako je relacija refleksivna, tada je na grafu oko svakog čvora opisana petlja. Lako se može utvrditi da relacija predstavljena grafom na slici 1.3.1 nije refleksivna.

Definicija 1.3.5. Relacija ρ je *simetrična* u skupu X ako za svako $x, y \in X$ za koje je $(x, y) \in \rho$ sleduje da je i $(y, x) \in \rho$.

Primer 1.3.2. 1° Skup $\rho = \{(a,a), (b,c), (c,b)\}$ je simetrična relacija u skupu $X = \{a, b, c\}$.

2° Relacija normalnost pravih je simetrična relacija u skupu svih pravih u jednoj ravni. $\triangle$

Napomena 1.3.3. Graf koji odgovara simetričnoj relaciji je takav da, ako postoji grana grafa od čvora a ka čvoru b, tada mora postojati i grana grafa od čvora b ka čvoru a. Za graf koji odgovara simetričnoj relaciji kažemo da je *simetrični graf*.

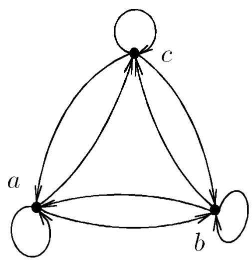
Definicija 1.3.6. Relacija ρ je *antisimetrična* u skupu X ako za svako $x, y \in X$, za koje je $(x, y) \in \rho$ i $(y, x) \in \rho$, sleduje $x = y$.

Definicija 1.3.7. Relacija ρ je *tranzitivna* u skupu X ako za svako $x, y, z \in X$, za koje je $(x, y) \in \rho$ i $(y, z) \in \rho$, sleduje da je i $(x, z) \in \rho$.

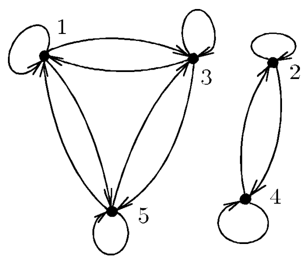
Primer 1.3.3. Skup $\rho = \{(a, a), (b, a), (b, c), (c, a)\}$ je tranzitivna relacija u skupu $X = \{a, b, c\}$. Graf $\Gamma = (X, \rho)$ predstavljen je na slici 1.3.2. $\triangle$

Napomena 1.3.4. Tranzitivnost relacije ρ može se uočiti i na grafu $\Gamma = (X, \rho)$. Naime, ako postoje grane grafa Γ od čvora b ka čvoru c i od čvora c ka čvoru a, tada mora postojati i grana od čvora b ka čvoru a, što se može lepo videti na slici 1.3.2.

Definicija 1.3.8. Relaciju ρ u skupu X koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna zovemo *relacija ekvivalencije* u skupu X.



Sl. 1.3.3



Sl. 1.3.4

Primer 1.3.4. 1° Relacija

$$\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\}$$

je relacija ekvivalencije u skupu $X = \{a, b, c\}$. Njen graf je prikazan na slici 1.3.3.

2° U skupu $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ relacija

$$\rho = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

je relacija ekvivalencije, a njen graf je predstavljen na slici 1.3.4. $\triangle$

Primer 1.3.5. 1° Relacija sličnost trouglova je, takođe, relacija ekvivalencije u skupu svih trouglova.

2° Relacija paralelnost pravih je relacija ekvivalencije u skupu svih pravih u jednoj ravni. $\triangle$

Neka je ρ relacija ekvivalencije u skupu X i neka je $x \in X$. Označimo sa C_x skup svih elemenata $z \in X$ koji su u relaciji ρ sa elementom x, tj. neka je

$$C_x = \{z \in X \mid z \rho x\}.$$

Definicija 1.3.9. Za skup $C_x \subset X$ kažemo da je *klasa ekvivalencije* skupa X koja, u odnosu na relaciju ρ, odgovara elementu x.

Napomenimo da C_x nije prazan skup jer mu pripada bar element x. Isto tako, ako C_x sadrži više elemenata, može se smatrati da je C_x klasa ekvivalencije koja odgovara svakom od tih elemenata.

Neka su C_x i C_y dve klase ekvivalencije skupa X koje, u odnosu na istu relaciju ekvivalencije ρ, odgovaraju elementima x i y, respektivno.

Teorema 1.3.1. *Klase ekvivalencije C_x i C_y skupa X se ili poklapaju ili su disjunktne.*

Dokaz. Za svako $x, y \in X$, klase C_x i C_y nisu prazni skupovi jer im, svakako, pripadaju elementi x i y, respektivno. Ako skupovi C_x i C_y nisu disjunktni dokazaćemo da se poklapaju.

Pretpostavimo, dakle, da $C_x \cap C_y$ nije prazan skup, što znači da postoji $z \in X$, tako da $z \in C_x$ i $z \in C_y$, tj. da je $z\rho x$ i $z\rho y$. Kako je relacija ρ simetrična i tranzitivna imamo

$$z\rho x \wedge z\rho y \;\Rightarrow\; x\rho z \wedge z\rho y \;\Rightarrow\; x\rho y,$$

odakle zaključujemo da $x \in C_y$. S obzirom da x može biti bilo koji element iz C_x sleduje $C_x \subseteq C_y$. Isto tako može se pokazati da je $C_y \subseteq C_x$. Dakle, važi jednakost $C_x = C_y$. $\square$

Neposredna posledica teoreme 1.3.1 je tvrđenje koje sleduje:

Teorema 1.3.2. *Unija svih klasa ekvivalencije skupa X, u odnosu na relaciju ρ, je sâm skup X.*

Prema tome, svaka relacija ekvivalencije ρ u skupu X je jedna particija skupa X na disjunktne podskupove.

Definicija 1.3.10. Ako su a i b celi brojevi, kažemo da je a kongruentno sa b u odnosu na modul $m\,(\in \mathbb{N})$, označavajući to sa $a \equiv b \,(\operatorname{mod} m)$, ako je razlika $a - b$ deljiva sa m.

To, zapravo, znači da je a kongruentno sa b ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{Z}$ tako da je $a = b + km$. Naravno, u smislu definicije 1.3.10, oznaka $a \equiv 0 \,(\operatorname{mod} m)$ znači da je a deljivo sa m.

Teorema 1.3.3. *Kongruencija celih brojeva po modulu m je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Prvo, $a \equiv a(\operatorname{mod} m)$ za svako $a \in \mathbb{Z}$ jer je $a - a = 0 \cdot m$ i $0 \in \mathbb{Z}$.

Drugo, ako je $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$, tj. ako je $a - b = km$ $(k \in \mathbb{Z})$, tada je $b - a = k'm$, gde je $k' = -k \in \mathbb{Z}$, tj. $b \equiv a(\operatorname{mod} m)$.

I najzad, neka je $a \equiv b\,(\operatorname{mod} m) \;\wedge\; b \equiv c(\operatorname{mod} m)$, tj. neka postoje celi brojevi k_1 i k_2 tako da je $a - b = k_1 m$ i $b - c = k_2 m$. Tada je $a - c = (k_1 + k_2)m = km$, gde je $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$. Prema tome, zaključujemo da je $a \equiv c(\operatorname{mod} m)$.

Dakle, relacija kongruencije po modulu m je refleksivna, simetrična i tranzitivna. $\square$

Skup $\mathbb{Z}$ je relacijom ekvivalencije kongruencija po modulu m izdeljen na disjunktne podskupove.

Posmatrajmo kongruenciju po modulu m $(m \in \mathbb{N})$. Klase ekvivalencije, njih m na broju, su oni podskupovi skupa celih brojeva koji, respektivno, sadrže brojeve $0, 1, \ldots, m-1$. Ako sa $\mathbb{Z}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$ označimo klasu ekvivalencije skupa $\mathbb{Z}$ kojoj pripada broj i, tada da se u klasi ekvivalencije $\mathbb{Z}_i$ nalaze oni celi brojevi a koji pri deljenju sa m daju ostatak i. Svakako je $\mathbb{Z}_0 \cup \mathbb{Z}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{Z}_{m-1} = \mathbb{Z}$.

Definicija 1.3.11. Za skup svih klasa ekvivalencije skupa X, u odnosu na neku relaciju ekvivalencije ρ, kažemo da je *skup–količnik* skupa X u odnosu na relaciju ekvivalencije ρ, u oznaci X/ρ.

Napomena 1.3.5. Često se relacija ekvivalencije označava simbolom $\sim$.

Posmatrajmo sada novu relaciju u skupu X, određenu sledećom definicijom:

Definicija 1.3.12. Ako je ρ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija u skupu X, kažemo da je ρ *relacija delimičnog poretka*.

Za relaciju delimičnog poretka kažemo, isto tako, da je *relacija parcijalnog poretka* ili da je *relacija delimičnig uređenja*, ili da je *relacija parcijalnog uređenja*.

Primer 1.3.6. Neka je u skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ definisana relacija ρ, kao deljivost brojeva iz $\mathbb{N}$, tj. neka je $(m, n) \in \rho$ ako i samo ako je m deljivo sa n, tj. ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $m = kn$. Očigledno, ρ je refleksivna i tranzitivna relacija. Ova relacija nije simetrična jer iz činjenice $(m, n) \in \rho$ ne sleduje i $(n, m) \in \rho$ u opštem slučaju. Na primer, $(4, 2) \in \rho$, ali $(2, 4) \notin \rho$. Međutim, iz činjenice da je broj m deljiv sa n i broj n deljiv sa m, očigledno sleduje da je $m = n$, što znači da je relacija ρ antisimetrična. Relacija ρ je, dakle, jedna relacija delimičnog uređenja u skupu $\mathbb{N}$. $\triangle$

Definicija 1.3.13. Za skup u kome je definisana relacija delimičnog poretka kažemo da je *delimično uređen* skup.

Definicija 1.3.14. Za relaciju delimičnog poretka ρ, koja ima osobinu da je $(x, y) \in \rho$ ili $(y, x) \in \rho$, za svako $x, y \in X$, kažemo da je *relacija totalnog poretka* ili *relacija totalnog uređenja.*

Skoro uvek, relaciju totalnog poretka zvaćemo jednostavnije: *relacija poretka* ili *relacija uređenja* ili *uređajna relacija* ili *relacija ispred*, a označavaćemo je sa $\prec$.

Primer 1.3.7. U skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ relacija $\leq$ je relacija poretka. $\triangle$

Definicija 1.3.15. Za skup X u kome je definisana relacija poretka $\prec$ kažemo da je *uređen skup.*

Primer 1.3.8. Relacijom poretka $\leq$ uređen je skup realnih brojeva. $\triangle$

Definicija 1.3.16. Za skup X, koji je uređen relacijom poretka $\prec$, kažemo da je *gust* ako za svako a i b iz skupa X, za koje je $a \prec b$, postoji $c \in X$ takvo da je $a \prec c$ i $c \prec b$.

Primer 1.3.9. Skup racionalnih brojeva je gust jer za svako $a, b \in \mathbb{Q}$, za koje je $a \leq b$, sleduje da postoji racionalan broj c koji je, na primer, određen sa $c = (a + b)/2$, takav da je $a \leq c$ i $c \leq b$. $\triangle$

Neka je skup X uređen relacijom poretka $\prec$ i neka je A jedan njegov neprazan podskup. Ako je $\alpha \in X$ u relaciji $\prec$ sa svim elementima iz A, simbolizovaćemo to oznakom $(\alpha, A) \in \prec$. Ako su svi elementi iz A u relaciji $\prec$ sa $\beta \in X$, označavaćemo to sa $(A, \beta) \in \prec$.

Definicija 1.3.17. Za svaki element $\alpha \in X$ za koji je $(\alpha, A) \in \prec$, kažemo da je *minoranta* skupa $A \subset X$.

Definicija 1.3.18. Za svaki element $\beta \in X$ za koji je $(A, \beta) \in \prec$, kažemo da je *majoranta* skupa $A \subset X$.

Definicija 1.3.19. Ako je $\mathcal{A}$ skup svih minoranata skupa A i ako je $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ minoranta skupa A za koju je $(\mathcal{A}, \alpha_0) \in \prec$, kažemo da je α_0 *donja međa* skupa A ili da je α_0 *infimum* od A, u oznaci $\alpha_0 = \inf A$.

Definicija 1.3.20. Ako je $\mathcal{B}$ skup svih majoranata skupa A i ako je $\beta_0 \in \mathcal{B}$ majoranta skupa A za koju je $(\beta_0, \mathcal{B}) \in \prec$, kažemo da je β_0 *gornja međa* skupa A ili da je β_0 *supremum* od A, u oznaci $\beta_0 = \sup A$.

Očigledno, važi sledeće tvrđenje:

Teorema 1.3.4. *Ako je skup X uređen relacijom $\prec$, $A \subset X$ i ako postoje* $\inf A$ *i* $\sup A$, *tada je* $\inf A \prec \sup A$.

Definicija 1.3.21. Ako donja međa α_0 skupa A, tj. $\inf A$, pripada skupu A, kažemo da je α_0 *minimum* skupa A, u oznaci $\alpha_0 = \min A$.

Ako gornja međa β_0 skupa A, tj. $\sup A$, pripada skupu A, kažemo da je β_0 *maksimum* skupa A, u oznaci $\beta_0 = \max A$.

Naravno, važi i sledeće tvrđenje:

Teorema 1.3.5. *Ako je $A \subset X$ i ako je skup X uređen relacijom $\prec$, tada, ako postoje* $\min A$ *i* $\max A$*, važi* $\min A \prec \max A$.

Posmatrajmo sada skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, koji je relacijom poretka $\leq$ uređen. Na osnovu ovog uređenja, sledećim dvema definicijama uvešćemo neke pojmove vezane za skup realnih brojeva.

Definicija 1.3.22. Skup $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, u oznaci (a, b), zovemo *interval*, a skup $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, u oznaci $[a, b]$, zovemo *segment*.

Definicija 1.3.23. Skup $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, u oznaci $[a, b)$, kao i skup $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, u oznaci $(a, b]$, zovemo *polusegment* ili *poluinterval*.

Brojevi a i b su njihovi krajevi. Nije teško proveriti da je

$$a = \inf(a, b) = \inf(a, b], \qquad b = \sup(a, b) = \sup[a, b),$$
$$a = \min[a, b) = \min[a, b], \qquad b = \max(a, b] = \max[a, b].$$

Ako za skup $A \subset \mathbb{R}$ ne postoji nijedna minoranta, pišemo $\inf A = -\infty$. Slično, ako za skup $A \subset \mathbb{R}$ ne postoji nijedna majoranta, tada pišemo $\sup A = +\infty$. Naravno, uvek ćemo pisati: $\inf \mathbb{R} = -\infty$ i $\sup \mathbb{R} = +\infty$.

Primer 1.3.10. 1° $\inf(0, 1) = 0$, $\sup(0, 1) = 1$;

2° $\min(0, 1)$ ne postoji, $\min[0, 1) = 0$, $\max(0, 1] = 1$, $\max(0, 1)$ ne postoji;

3° $\inf \mathbb{N} = 1$, $\sup \mathbb{N} = +\infty$. $\triangle$

1.4. Preslikavanja

Posmatrajmo neprazne skupove X i Y i relaciju $\rho \subset X \times Y$ takvu da za svaki element $x \in X$ postoji samo jedan element $y \in Y$ takav da $(x, y) \in \rho$. Za takvu relaciju ρ kažemo da je *preslikavanje* ili *funkcija* sa skupa X u skup Y i umesto $(x, y) \in \rho$ obično pišemo $y = \rho(x)$. Štaviše, umesto ρ najčešće se koristi oznaka[3] f.

---

[3] Oznaka f dolazi od reči *funkcija* (ili *function* na engleskom jeziku). U upotrebi su, takođe, i oznake g, h, $\ldots$, φ, ψ, $\ldots$, itd.

Dakle, funkcija ili preslikavanje je pravilo ili zakon pridruživanja (korespondencije) kojim se svakom elementu $x \in X$ pridružuje jedan element $y \in Y$, što se označava sa $f\colon X \to Y$ ili sa $X \xrightarrow{f} Y$. Pri ovome kažemo da se element x preslikava u element $y = f(x) \in Y$ i to simbolizujemo sa $x \mapsto y = f(x)$ ili kraće $x \mapsto f(x)$. Element x zovemo *original*, dok za element $y = f(x)$ koristimo termin *slika elementa* x pri preslikavanju f ili *vrednost funkcije* u tački x. U slučaju kada x predstavlja proizvoljan element iz X kažemo da je x *argument* ili *nezavisno promenljiva*, a $y\,(= f(x))$ *zavisno promenljiva*. Skup slika svih elemenata $x \in X$ obeležavamo sa $f(X)$. Očigledno je da je $f(X) \subseteq Y$.

Skup X koji preslikavamo zovemo *oblast definisanosti* ili *domen* funkcije f, a skup slika $f(X)$ nazivamo *skup vrednosti* ili *kodomen* funkcije f.

Napomena 1.4.1. Za preslikavanje $x \mapsto f(x) \quad (x \in X,\ f(x) \in \mathbb{R})$, tj. za funkciju $f\colon X \to \mathbb{R}$, kažemo da je *funkcionela*. Međutim, ako su X i Y proizvoljni apstraktni skupovi, za funkciju f često kažemo da je *operator*.

Na osnovu prethodnog možemo dati formalnu definiciju funkcije:

Definicija 1.4.1. Za relaciju $f \subset X \times Y$ kažemo da je funkcija $f\colon X \to Y$ ako

(1) $(\forall x \in X)\,(\exists y \in Y) \quad (x, y) \in f\,,$

(2) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \;\Rightarrow\; y = z\,.$

Osobina (1) poznata je pod imenom *definisanost*, a osobina (2) *jednoznačnost*.

Primer 1.4.1. 1° Relacija $\{(1,2), (2,2)\}$ je funkcija definisana na skupu $X = \{1,2\}$, pomoću $f(x) = 2$. Skup slika, tj. skup vrednosti funkcije f, sastoji se samo od jednog elementa $f(X) = \{2\}$.

2° Relacija $\{(1,2), (1,3), (2,2)\}$ nije funkcija na $X = \{1,2\}$ jer se kao njeni elementi pojavljuju parovi $(1,2)$ i $(1,3)$.

3° Relacija $\big\{(x, x^2 + x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\big\} \subset \mathbb{R}^2$ je funkcija jer iz $x = u$ sleduje

$$x^2 + x + 1 = u^2 + u + 1$$

i za svako $x \in \mathbb{R}$ postoji $x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}$. Dakle, ovde se radi o funkciji $x \mapsto f(x) = x^2 + x + 1$ koja preslikava $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$. Skup slika je $f(\mathbb{R}) = [3/4, +\infty)$.

4° Neka je $X = \{1,2,3\}$. Relacija $\{(1,2), (2,2)\} \subset X^2$ nije funkcija na X jer za element $3 \in X$ nije definisana slika.

5° Neka je $A = \{0,1,2\}$ i $X = A^2 = \{(x,y) \mid x, y \in A\}$. Relacija

$$\big\{((0,0),0), ((0,1),1), ((0,2),4), ((1,0),1), ((1,1),2), ((1,2),5),$$
$$((2,0),4), ((2,1),5), ((2,2),8)\big\} \subset X \times \mathbb{R}$$

je funkcija koja preslikava elemente skupa $X = A^2$ u skup $\mathbb{R}$. Ovo preslikavanje $f\colon A^2 \to \mathbb{R}$ se može izraziti simbolički, na primer, pomoću

$$(x, y) \mapsto f((x, y)) = x^2 + y^2.$$

Skup vrednosti funkcije je skup $f(A^2) = \{0, 1, 2, 4, 5, 8\} \subset \mathbb{R}$.

6° Neka je dat segment $S = [0, 1]$, $X = S^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in S\}$, $Y = \mathbb{R}^2$. Relacija $f \subset S^3 \times \mathbb{R}^2$, definisana pomoću

$$f((x, y, z)) = (x^2 + y^2 + z^2, 3xyz) \qquad (x, y, z \in S),$$

je funkcija sa S^3 u $\mathbb{R}^2$. Dakle, svakoj uređenoj trojki (x, y, z) ($\in S^3$) pridružuje se uređeni par $(x^2 + y^2 + z^2, 3xyz)$ ($\in \mathbb{R}^2$). $\triangle$

Navedimo sada dva jednostavna preslikavanja:

1° Neka je $c \in Y$. Preslikavanje $f\colon X \to Y$, definisano pomoću $f(x) = c$ za svako $x \in X$, naziva se *konstantno* preslikavanje. Takođe, kaže se i da je funkcija f konstanta.

2° Neka je $Y = X$. Preslikavanje $f\colon X \to X$, definisano pomoću $f(x) = x$ za svako $x \in X$, naziva se *identičko* preslikavanje u X.

Definicija 1.4.2. Za dve funkcije $f\colon X \to Y$ i $g\colon U \to V$ kažemo da su jednake ako je $X = U$, $Y = V$ i

$$(\forall x \in X) \quad f(x) = g(x). \tag{1.4.1}$$

Ako je, međutim, $X \subset U$ i ako važi (1.4.1), reći ćemo da je f *suženje* ili *restrikcija* funkcije g (sa skupa U na skup X), tj. da je g *proširenje* ili *ekstenzija* funkcije f (sa skupa X na skup U).

Primer 1.4.2. 1° Neka su funkcije $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\psi\colon \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}$, definisane redom pomoću

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x^2, \quad \varphi(x) = x^2, \quad \psi(x) = x^2.$$

Među ovim funcijama nema jednakih jer su im domeni među sobom različiti skupovi. S obzirom na inkluzije

$$\{-1, 0, 1\} \ \subset \ \mathbb{N} \ \subset \ \mathbb{R}^+ \ \subset \ \mathbb{R}_0^+ \ \subset \ \mathbb{R},$$

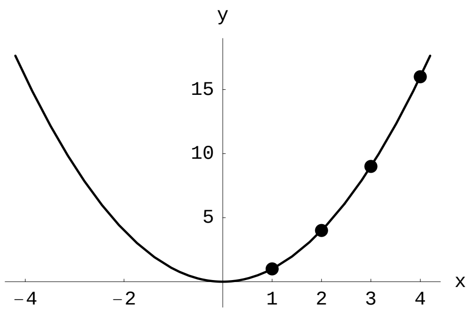
vidimo da je funkcija h ekstenzija ostalih funkcija (ψ, φ, g i f), kao i da je ψ restrikacija funkcija φ, g, f i h.

Primetimo da je f ekstenzija funkcije g, sa skupa pozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+$ na još jednu tačku ($x = 0$), tj. na skup svih nenegativnih realnih brojeva $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$.

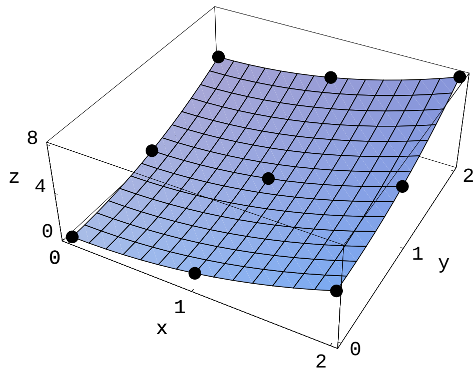
2° Neka je dat segment $S = [0, 2]$ i funkcija $g: S^2 \to \mathbb{R}$, definisana pomoću $z = g((x, y)) = x^2 + y^2$. Ova funkcija predstavlja ekstenziju funkcije $f: A^2 \to \mathbb{R}$ iz primera 1.4.1 (videti 5°). Za funkciju g kažemo da je funkcija od dve promenljive x i y i umesto $g((x, y))$ pišemo jednostavno $g(x, y)$. △

Skup $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ naziva se *grafik* funkcije f. Ako su $X \subset \mathbb{R}$ i $f(X) \subset \mathbb{R}$, grafik funkcije se može predstaviti kao skup tačaka u Dekartovoj ravni[4] Oxy.

Primer 1.4.3. 1° Deo grafika funkcije $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definisane pomoću $y = h(x) = x^2$ (videti prethodni primer), predstavljen je na slici 1.4.1. Takođe, na istoj slici, prikazan je i deo grafika funkcije $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ iz primera 1.4.2, koji se sastoji iz niza tačaka. Naime, na slici su prikazane samo prve četiri tačke, tj. deo grafika $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\} \subset \Gamma(\varphi)$.



Sl. 1.4.1



Sl. 1.4.2

2° Funkcija od dve promenljive iz primera 1.4.2, definisana na $[0, 2] \times [0, 2]$ pomoću $z = g(x, y) = x^2 + y^2$, može se, takođe, grafički prikazati. Njen grafik je dat na slici 1.4.2, zajedno sa grafikom njene restrikcije f iz primera 1.4.1 (slučaj 5°). Primetimo da se grafik funkcije f sastoji iz devet tačaka. △

Napomena 1.4.1. Funkcije $f: X \to Y$ sa kojima se najčešće srećemo su realne, tj. takve da je $Y = \mathbb{R}$, a $X \subset \mathbb{R}^n$, gde je $n \geq 1$. Kada je $n = 1$ imamo slučaj realnih funkcija jedne realne promenljive, čije će osnovne osobine biti razmatrane u sledećem poglavlju. Slučaj $n > 1$ dovodi nas do tzv. realnih funkcija

[4] Za ovaj način predstavljanja dovoljno je znanje iz srednje škole. Inače, Dekartov pravougli koordinatni sistem, kao i neki drugi koordinatni sistemi, precizno će biti tretirani u odeljku 1.1, glava VI.

više promenljivih, tačnije realnih funkcija n promenljivih. Dakle, uređenoj n-torci $(x_1, \ldots, x_n) \in X$ pridružuje se vrednost $y = f((x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}$, pri čemu pišemo jednostavno $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Takve funkcije biće predmet razmatranja u VIII glavi (III deo ove knjige).

Kod preslikavanja $f\colon X \to Y$ razlikovaćemo sledeća dva moguća slučaja: $f(X) = Y$ i $f(X) \subset Y$. U prvom slučaju kažemo da je skup X preslikan *na* skup Y, a u drugom da je skup X preslikan *u* skup Y. Postoje, dakle, sa tog stanovišta dve vrste preslikavanja: preslikavanje *na* skup i preslikavanje *u* skup. Za preslikavanje *na* skup kaže se da je *surjekcija* ili *surjektivno* preslikavanje.

Ako je preslikavanje $f\colon X \to Y$ takvo da iz jednakosti $f(x_1) = f(x_2)$ sleduje $x_1 = x_2$, kaže se da je f *injekcija* ili *injektivno* preslikavanje. Prema tome, kod ovog preslikavanja, ukoliko su slike jednake moraju biti jednaki i originali. Za ovo preslikavanje koristimo i termin preslikavanje 1–1.

Za svako preslikavanje koje je istovremeno surjekcija i injekcija kaže se da je *bijekcija* ili *bijektivno* preslikavanje. Takođe, za takvo preslikavanje kažemo da je *biunivoko* ili *obostrano jednoznačno* preslikavanje.

Primer 1.4.4. Neka je $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ i neka je $\mathcal{M}$ skup svih tačaka M u ravni koordinatnog sistema Oxy čiji je položaj određen koordinatama x i y. Preslikavanje $\mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}$, određeno sa $(x, y) \mapsto M(x, y)$ je obostrano jednoznačno preslikavanje. $\triangle$

Definicija 1.4.3. Neka su X, Y i Z neprazni skupovi i neka su data preslikavanja $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$. Funkciju $h\colon X \to Z$ definisanu pomoću

$$(\forall x \in X) \quad h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

zovemo *složena funkcija* od funkcija f i g ili *kompozicija preslikavanja* f i g.

Kao što vidimo, složena funkcija h preslikava elemente x skupa X u elemente $y = f(x)$ skupa Y koje, zatim, funkcija g preslikava u elemente $z = g(y)$ skupa Z. Dakle, na jedan posredan način, vrši se preslikavanje skupa X u skup Z. Preslikavanja f i g su, u stvari, međupreslikavanja.

Naravno, jedno složeno preslikavanje može biti realizovano i sa više međupreslikavanja. Ponekad se kaže da sva ta međupreslikavanja čine *lanac preslikavanja*, a ona sâma su *karike lanca*.

Teorema 1.4.1. *Neka su X, Y, Z, W neprazni skupovi i neka $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$, tj. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} Z$. Tada je*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f). \tag{1.4.2}$$

Dokaz. Pre svega, uočimo da funkcije

$$x \mapsto ((h \circ g) \circ f)(x) \quad \text{i} \quad x \mapsto (h \circ (g \circ f))(x)$$

imaju isti domen X i da im slike pripadaju skupu W. Kako je, za svako $x \in X$,

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

i

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))),$$

zaključujemo da važi jednakost (1.4.2). □

Napomenimo da, ako su sva međupreslikavanja jednog složenog preslikavanja biunivoka preslikavanja, tada je i složeno preslikavanje biunivoko.

Primer 1.4.5. 1° Funkcija $x \mapsto \log 3x$ je složena funkcija. Čine je preslikavanja

$$x \mapsto y = 3x \quad \text{i} \quad y \mapsto \log y.$$

2° Preslikavanje $x \mapsto 2\sin(3x^2 + 1)$ je složeno preslikavanje. Čine ga, na primer, sledeća preslikavanja:

(a) $y \mapsto 2\sin y$ i $x \mapsto y = 3x^2 + 1$, ili
(b) $z \mapsto 2\sin z$, $y \mapsto z = y + 1$ i $x \mapsto y = 3x^2$. △

Iz ovih primera se vidi da lanac jednog složenog preslikavanja nije jednoznačno određen. Ali, iz jednog lanca složenog preslikavanja jednoznačno se dobija složeno preslikavanje.

Primer 1.4.6. Za funkcije $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, date pomoću

$$g(x) = 2x^2 + x - 1, \qquad f(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

imamo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x)^2 + f(x) - 1 = \frac{2 - x^2 - x^4}{(1 + x^2)^2}$$

i

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{1 + g(x)^2} = \frac{1}{1 + (2x^2 + x - 1)^2}.$$

Očigledno, $(g \circ f)(x) \not\equiv (f \circ g)(x)$. △

Primer 1.4.7. Neka su funkcije $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane pomoću $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x^2$.

Kompozicija funkcija f i g, tj. $(g \circ f)\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, određena je sa

$$(\forall x \in \mathbb{R}_0^+) \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Kako je skup slika $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$ $(\subset \mathbb{R})$, funkciju g možemo tretirati kao preslikavanje $\mathbb{R}$ *na* skup $\mathbb{R}_0^+$, pa je onda moguće definisati i kompoziciju funkcija g i f, tj.

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Dakle, funkciju $x \mapsto |x|$ dobili smo kao kompoziciju funkcija $x \mapsto x^2$ i $x \mapsto \sqrt{x}$.

Primetimo da se oblasti definisanosti kompozicija $g \circ f$ i $f \circ g$ razlikuju. Funkcija $f \circ g$ je ekstenzija funkcije $g \circ f$. $\triangle$

Teorema 1.4.2. *Neka je $f\colon X \to Y$ biunivoko preslikavanje. Tada postoji jedno i samo jedno biunivoko preslikavanje $\bar{f}\colon Y \to X$, za koje važi*

$$(\forall x \in X) \qquad \big(\bar{f} \circ f\big)(x) = x \tag{1.4.3}$$

i

$$(\forall y \in Y) \qquad \big(f \circ \bar{f}\big)(y) = y. \tag{1.4.4}$$

Dokaz. Na osnovu učinjene pretpostavke, preslikavanje $f\colon X \to Y$ je biunivoko, tj. takvo da je

(a) preslikavanje na skup Y,

(b) 1–1 preslikavanje.

Na osnovu (a), za svako $y \in Y$ postoji $x \in X$ takvo da je $f(x) = y$, a, na osnovu (b), x je jedinstven element iz X za koji je $f(x) = y$.

Dakle, svakom elementu $y \in Y$ pridružuje se na ovaj način jedinstven element $x \in X$, pa je moguće uspostaviti preslikavanje $\bar{f}\colon Y \to X$, tako da je $\bar{f}(y) = x$. Uočimo da je preslikavanje $\bar{f}$ takođe biunivoko. Tada, za svako $x \in X$, imamo

$$\big(\bar{f} \circ f\big)(x) = \bar{f}\big(f(x)\big) = \bar{f}(y) = x,$$

a za svako $y \in Y$

$$\big(f \circ \bar{f}\big)(y) = f\big(\bar{f}(y)\big) = f(x) = y,$$

čime smo pokazali da za preslikavanje $\bar{f}$ važi (1.4.3) i (1.4.4).

Da bismo dokazali da je preslikavanje $\bar{f}$ jedinstveno pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji još jedno biunivoko preslikavanje $\tilde{f}\colon Y \to X$ koje zadovoljava uslove (1.4.3) i (1.4.4).

Ako je $\tilde{f} \neq \bar{f}$, to mora postojati bar jedan element $y \in Y$ za koji je $\tilde{f}(y) \neq \bar{f}(y)$, odakle, zbog osobine (b), sleduje $f\big(\tilde{f}(y)\big) \neq f\big(\bar{f}(y)\big)$, tj.

$$\big(f \circ \tilde{f}\big)(y) \neq \big(f \circ \bar{f}\big)(y),$$

pa, na osnovu (1.4.4), zaključujemo da je $y \neq y$, što je nemoguće. $\square$

Primetimo da uslovi (1.4.3) i (1.4.4) pokazuju da su kompozicije $\bar{f} \circ f$ i $f \circ \bar{f}$ identička preslikavanja u X i Y, respektivno.

Na osnovu prethodnog moguće je dati definiciju *inverzne* funkcije:

Definicija 1.4.4. Neka je $f: X \to Y$ biunivoko preslikavanje. Za preslikavanje $f^{-1}: Y \to X$, za koje je $f^{-1} \circ f$ identičko preslikavanje u X i $f \circ f^{-1}$ identičko preslikavanje u Y, kažemo da je inverzno preslikavanje za f.

Napomena 1.4.3. Prema teoremi 1.4.2, inverzno preslikavanje f^{-1} biunivokog preslikavanja f postoji, jedinstveno je i, takođe, biunivoko.

Dakle, preslikavanja $f: X \to Y$ i $f^{-1}: Y \to X$ su biunivoka i za njih važi

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad f(f^{-1}(y)) = y \qquad (x \in X,\, y \in Y).$$

Napomenimo, na kraju, da je inverzno preslikavanje za f^{-1} sâmo preslikavanje f.

1.5. Moć i ekvivalencija skupova

Neka su X i Y dva neprazna skupa i neka je f obostrano jednoznačno preslikavanje skupa X na skup Y. Poznato je da u tom slučaju postoji inverzno preslikavanje f^{-1} i da se skupovi X i Y preslikavanjem f, tj. f^{-1}, mogu biunivoko preslikati jedan na drugi.

Definicija 1.5.1. Za dva skupa koji se mogu biunivoko preslikavati jedan na drugi, kažemo da imaju istu *moć*.

Primer 1.5.1. 1° Skupovi $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$ imaju istu moć, jer postoji preslikavanje $f: A \to B$, definisano, na primer, sa $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$, i njemu inverzno preslikavanje f^{-1} kojima je moguće uspostaviti biunivoku korespondenciju između skupova A i B.

2° Skupovi $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ i $\mathbb{M} = \{2, 4, \dots, 2n, \dots\}$ imaju istu moć jer postoji bijekcija f, zadata sa $f(m) = 2m$ $(m \in \mathbb{N})$, i njoj inverzna bijekcija f^{-1}, $f^{-1}(k) = k/2$ $(k \in \mathbb{M})$, koje obostrano jednoznačno preslikavaju skupove $\mathbb{N}$ i $\mathbb{M}$ jedan na drugi, respektivno. △

Za skupove X i Y koji, u smislu definicije 1.5.1, imaju istu moć, kažemo da imaju isti *kardinalni broj*. Moć jednog skupa X, tj. kardinalni broj skupa X, označavamo sa $\operatorname{card} X$, a činjenicu da skupovi X i Y imaju istu moć označavaćemo sa $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$.

Primer 1.5.2. Skupovi A i B, kao i skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{M}$ iz primera 1.5.1, imaju isti kardinalni broj. △

Za skupove X i Y koji imaju istu moć, tj. za skupove koji imaju isti kardinalni broj, kažemo da su *ekvivalentni* i to označavamo sa $X \sim Y$.

Definicija 1.5.2. Za skup koji je ekvivalentan nekom svom pravom delu kažemo da je *beskonačan*. U suprotnom kažemo da je skup *konačan*.

Definicija 1.5.3. Moć konačnog skupa jednaka je broju njegovih elemenata.

Prirodno je uzeti da je moć praznog skupa jednaka nuli.

Primer 1.5.3. Skup $\mathbb{N}$ je beskonačan jer je, prema primeru 1.5.1, ekvivalentan svom pravom delu $\mathbb{M} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$. $\triangle$

Iz izloženog se može zaključiti da je svaki skup ekvivalentan sebi samom. Takođe, nije teško proveriti da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 1.5.1. *Ekvivalencija skupova je relacija ekvivalencije.*

Definicija 1.5.4. Za skupove koji su ekvivalentni skupu $\mathbb{N}$ kažemo da su *prebrojivi* ili da imaju moć prebrojivog skupa.

Naravno, i sâm skup $\mathbb{N}$ je prebrojiv.

U stvari, jedna važna i veoma jednostavna karakteristika prebrojivog skupa je da je njegove elemente moguće poređati u niz, jedan element za drugim. Na primer, ako je f jedno biunivoko preslikavanje skupa $\mathbb{N}$ na prebrojiv skup A, tada je skup A moguće identifikovati kao skup

$$A = \{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}.$$

Moć prebrojivog skupa, tj. njegov kardinalni broj, označavamo sa $\aleph_0$ i čitamo alef[5] nula.

Primer 1.5.4. Skup $\mathbb{M} = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$ $(n \in \mathbb{N})$ je prebrojiv skup. $\triangle$

Primer 1.5.5. Skup celih brojeva $\mathbb{Z}$ je prebrojiv jer se njegovi elementi mogu poređati u niz $1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$. $\triangle$

Primer 1.5.6. Skup svih racionalnih brojeva iz polusegmenta $(0, 1]$ je prebrojiv skup.

Da bismo ovo pokazali, primetimo, najpre, da su ovi brojevi oblika $x = p/q$, gde su p i q celi brojevi takvi da je $0 < p \le q$.

Sve racionalne brojeve iz polusegmenta $(0, 1]$ možemo poređati u niz ako, za svako $q = 1, 2, \ldots$, uzimamo redom vrednosti za p iz skupa $\{1, \ldots, q\}$, izostavljajući pritom one vrednosti za p pri kojima se ponavljaju racionalni brojevi u ovom nizu. Na taj način dobijamo niz

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3};\ \frac{1}{4}, \frac{3}{4};\ \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5};\ \ldots\ . \qquad \triangle$$

Navešćemo sada nekoliko tvrđenja koja se odnose na moć skupova:

---

[5] Alef, tj. $\aleph$, je prvo slovo hebrejskog pisma.

Teorema 1.5.2. *Ako su A i B neprazni skupovi, tada je*

1° $\operatorname{card}(A \cup B) \leq \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$,

2° $\operatorname{card}(A \cap B) \leq \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$,

3° $\operatorname{card} A < \operatorname{card} \mathbb{P}(A)$,

4° $\operatorname{card} \mathbb{P}(A) = 2^{\operatorname{card} A}$.

Napomena 1.5.1. Nejednakost 3°, tj. nejednakost $\operatorname{card} A < \operatorname{card} \mathbb{P}(A)$, kazuje, u stvari, da ne postoji najveći kardinalni broj, jer svaki skup ima svoj partitivni skup: A ima $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A)$ ima $\mathbb{P}(\mathbb{P}(A))$, itd. Ovo, zapravo, znači da nema skupa koji je najopsežniji.

Za prebrojive skupove važi sledeće tvrđenje:

Teorema 1.5.3. *Unija dva prebrojiva skupa je prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka su A i B prebrojivi skupovi. Tada je moguće zapisati ih na način

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \quad \text{i} \quad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}.$$

Uniju ova dva skupa čini skup koji se može predstaviti, na primer, sa

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots\},$$

odakle zaključujemo da je skup $A \cup B$ prebrojiv skup. $\square$

Važi i opštije tvrđenje. Navodimo ga bez dokaza.

Teorema 1.5.4. *Unija prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.*

Primer 1.5.7. Kako je skup racionalnih brojeva iz polusegmenta $(0, 1]$ prebrojiv, na osnovu teoreme 1.5.4 zaključujemo da je skup svih racionalnih brojeva prebrojiv skup. $\triangle$

Kao što smo videli, ima skupova, naravno beskonačnih, čija je moć $\aleph_0$. Od značaja je utvrditi da li postoje beskonačni skupovi čija je moć efektivno veća od moći prebrojivog skupa. U tom smislu važi sledeće tvrđenje:

Teorema 1.5.5. *Skup svih realnih brojeva iz intervala $(0, 1)$ ima moć koja je veća od moći prebrojivog skupa.*

Dokaz. Svaki broj $x \in (0, 1)$ može se napisati u obliku beskonačnog decimalnog razlomka

$$x = 0\,.\,x_1 x_2 \ldots x_n \ldots\,,$$

gde je x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ jedna od cifara $0, 1, \ldots, 9$. Naravno, za neko $x \in (0, 1)$ moguće je da su, počev od nekog i, sve cifre x_i jednake nuli.

Pretpostavimo da je skup $(0,1)$ prebrojiv, što, zapravo, znači da se svi realni brojevi iz $(0,1)$ mogu poređati u jedan niz. Neka je to niz

$$\begin{aligned} a_1 &= 0\,.\,a_{11}a_{12}\dots a_{1n}\cdots\,, \\ a_2 &= 0\,.\,a_{21}a_{22}\dots a_{2n}\cdots\,, \\ &\vdots \\ a_n &= 0\,.\,a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn}\cdots\,, \\ &\vdots \end{aligned}$$

gde su cifre a_{ij} elementi skupa $\{0,1,\dots,9\}$.

Neka je a realan broj određen sa $a = 0\,.\,x_1x_2\dots x_n\dots$ i takav da je, za $n \in \mathbb{N}$, na primer,

$$x_n = \begin{cases} 2, & \text{ako je } a_{nn} = 1, \\ 1, & \text{ako je } a_{nn} \neq 1. \end{cases}$$

Broj a, očigledno, pripada skupu $(0,1)$. Međutim, broj a se razlikuje od svakog a_n $(n \in \mathbb{N})$ iz navedenog niza jer se od a_1 razlikuje u prvoj decimali, od a_2 u drugoj decimali, od a_3 u trećoj, itd.

Nije, dakle, tačno da posmatrani niz sadrži sve realne brojeve iz $(0,1)$, što predstavlja kontradikciju sa pretpostavkom da je skup $(0,1)$ prebrojiv. □

Definicija 1.5.5. Za skup svih realnih brojeva iz intervala $(0,1)$ kažemo da ima *moć kontinuuma*.

Moć kontinuuma obeležavamo sa $\boldsymbol{c}$ ili sa $\boldsymbol{\aleph_1}$. Očigledno, na osnovu teoreme 1.5.5, važi nejednakost $\boldsymbol{\aleph_0} < \boldsymbol{c}$, tj. $\boldsymbol{\aleph_0} < \boldsymbol{\aleph_1}$.

Naravno, svaki skup koji je ekvivalentan skupu realnih brojeva iz intervala $(0,1)$ je, takođe, skup moći kontinuuma.

Primer 1.5.8. Skup svih realnih brojeva iz intervala (a,b) ima moć kontinuuma jer je skupove $(0,1)$ i (a,b) moguće preslikati jedan na drugi, na primer, biunivokim preslikavanjem $x \mapsto f(x) = a + (b-a)x$ i njemu inverznim preslikavanjem f^{-1}. △

Primer 1.5.9. Skup $\mathbb{R}$ ima moć kontinuuma jer postoji biunivoko preslikavanje $f\colon \mathbb{R} \to (0,1)$. Jedno takvo preslikavanje je, na primer, dato sa

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{2x+2} & (x \geq 0), \\ \dfrac{1}{2(1-x)} & (x < 0). \end{cases} \quad \triangle$$

Za beskonačne skupove koji nisu prebrojivi kažemo da su neprebrojivi. Skupovi moći kontinuuma su neprebrojivi skupovi. Takvi su, na primer, $\mathbb{R}$ i (a, b).

Navodimo bez dokaza sledeća tvrđenja:

Teorema 1.5.6. *Za kardinalne brojeve* $\aleph_0$ *i* $\boldsymbol{c}$ *važe jednakosti*

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \qquad 2^{\aleph_0} = \boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{c}.$$

Mnogi pokušaji da se dokaže postojanje makar jednog skupa čija bi moć bila veća od moći prebrojivog skupa i manja od moći kontinuuma nisu doveli do rezultata. Pretpostavka da ne postoji takav skup poznata je kao hipoteza o kontinuumu.

Napomena 1.5.2. Nedavno je Cohen[6)] dokazao da hipoteza o kontinuumu ne može biti ni dokazana ni opovrgnuta u okviru postojeće aksiomatike teorije skupova (videti: P. J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, New York, 1966).

Na kraju ovog odeljka treba istaći činjenicu da postoje skupovi čija je moć veća od moći kontinuuma.

2. MATEMATIČKA INDUKCIJA I KOMBINATORIKA

2.1. Matematička indukcija

Metod matematičke indukcije je jedan od osnovnih i najčešće primenjivanih metoda za dokazivanje tvrđenja koja zavise od prirodnog broja n.

Neka je $\mathrm{T}(n)$ tvrđenje koje zavisi od prirodnog broja n. Metod matematičke indukcije sastoji se u sledećem:

Neka su ispunjeni uslovi:

1° *Tvrđenje* $\mathrm{T}(1)$ *je tačno;*

2° *Iz pretpostavke da je tvrđenje* $\mathrm{T}(k)$ *tačno za svako* $k \geq 1$ *sleduje tačnost tvrđenja* $\mathrm{T}(k+1)$.

Tada tvrđenje $\mathrm{T}(n)$ *važi za svaki prirodan broj* n.

Jezikom matematičke logike, ovo se može iskazati na sledeći način:

$$\big(\mathrm{T}(1) \ \land \ \big((\forall k \geq 1)\ \mathrm{T}(k) \Rightarrow \ \mathrm{T}(k+1)\big)\big) \quad \Rightarrow \quad (\forall n \geq 1)\ \mathrm{T}(n).$$

---

6) Paul Joseph Cohen (1934–), američki matematičar.

Ponekad je potrebno dokazati da tvrđenje $\mathrm{T}(n)$ važi za $n \geq m > 1$. Tada se metod matematičke indukcije može slično iskazati:

$$\big(\mathrm{T}(m) \ \wedge \ \big((\forall k \geq m) \ \mathrm{T}(k) \Rightarrow \ \mathrm{T}(k+1)\big)\big) \quad \Rightarrow \quad (\forall n \geq m) \ \mathrm{T}(n).$$

Tvrđenje $T(k)$ zove se *induktivna pretpostavka*.

Takođe, jedna varijanta metoda matematičke indukcije može se iskazati na sledeći način:

$$\big(\mathrm{T}(1) \ \wedge \ \big((\forall k \geq 1) \ \mathrm{T}(1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{T}(k) \ \Rightarrow \ \mathrm{T}(k+1)\big)\big) \quad \Rightarrow \quad (\forall n \geq 1) \ \mathrm{T}(n).$$

U daljem tekstu, primenom metoda matematičke indukcije, dokazaćemo neka osnovna tvrđenja.

Teorema 2.1.1. *Ako je $x > -1$ i ako je n prirodan broj, tada je*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{2.1.1}$$

Dokaz. U ovom slučaju, tvrđenje $\mathrm{T}(n)$ je nejednakost (2.1.1).

Za $n = 1$ nejednakost (2.1.1) se svodi na jednakost $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$.

Pretpostavimo sada da nejednakost (2.1.1) važi za $n = k \geq 1$, tj. da je za $x > -1$

$$(1+x)^k \geq 1 + kx. \tag{2.1.2}$$

Množenjem nejednakosti (2.1.2) sa $1 + x > 0$ dobijamo

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) = 1 + (k+1)x + kx^2.$$

Kako je $kx^2 \geq 0$, imamo

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$$

Dakle, (2.1.1) važi za svako n. □

Nejednakost (2.1.1) poznata je kao *Bernoullieva*[7] *nejednakost.*

[7] Jakob Bernoulli (1654–1705), švajcarski matematičar.

Teorema 2.1.2. *Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni brojevi čiji je proizvod jednak jedinici, tada je*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n, \tag{2.1.3}$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

Dokaz. Primenimo metod matematičke indukcije.

Za $n = 1$ nejednakost (2.1.3) važi. Zapravo, ona se, u ovom slučaju, svodi na jednakost $a_1 = 1$.

Za $n = 2$ možemo direktno dokazati datu nejednakost. Naime, ako je $a_1 a_2 = 1$ i $a_1 = a_2 = 1$, sleduje jednakost $a_1 + a_2 = 2$. Važi i obrnuto, tj. iz $a_1 a_2 = 1$ i $a_1 + a_2 = 2$ sleduje $a_1 = a_2 = 1$. Međutim, ako bar jedan od brojeva a_1 i a_2 nije jednak jedinici, na primer $a_1 > 1$, zbog $a_1 a_2 = 1$, sleduje da je $a_2 < 1$ i, takođe, iz identičnosti

$$a_1 + a_2 = a_1 a_2 + 1 + (a_1 - 1)(1 - a_2), \tag{2.1.4}$$

nejednakost $a_1 + a_2 > 2$.

Pretpostavimo, sada, da za k proizvoljnih pozitivnih brojeva, čiji je proizvod jednak jedinici, važi nejednakost

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq k$$

u kojoj se jednakost postiže ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$, a zatim razmotrimo $k + 1$ pozitivnih brojeva čiji je proizvod, takođe, jednak jedinici.

Ako nisu svi a_i jednaki jedinici, među njima mora biti onih koji su veći, ali i onih koji su manji od jedinice. Ne umanjujući opštost razmatranja, može se pretpostaviti da je, na primer, $a_1 > 1$ i $a_2 < 1$. Tada, na osnovu pretpostavke za k pozitivnih brojeva $a_1 a_2$, $a_3, \ldots, a_{k+1}$, čiji je proizvod jednak jedinici, važi

$$a_1 a_2 + a_3 + \cdots + a_{k+1} \geq k, \tag{2.1.5}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1 a_2 = a_3 = \cdots = a_{k+1} = 1$.

Sabiranjem (2.1.4) i (2.1.5), dobijamo da je

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} \geq k + 1 + (a_1 - 1)(1 - a_2) > k + 1.$$

Ako su svi a_i $(i = 1, 2, \ldots, k + 1)$ jednaki jedinici, nejednakost (2.1.3) se svodi na jednakost. Važi i obrnuto, tj. iz $\prod_{i=1}^{k+1} a_i = 1$ i $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = k + 1$ sleduje $a_1 = \cdots = a_{k+1} = 1$.

Ovim je dokaz završen. $\square$

Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni brojevi i neka je $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definicija 2.1.1. Za broj

$$A_n(\boldsymbol{x}) = A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

kažemo da je *aritmetička sredina* pozitivnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Definicija 2.1.2. Za broj

$$G_n(\boldsymbol{x}) = G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

kažemo da je *geometrijska sredina* pozitivnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Definicija 2.1.3. Za broj

$$H_n(\boldsymbol{x}) = H_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}$$

kažemo da je *harmonijska sredina* pozitivnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Sledeća teorema daje vezu između aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine pozitivnih brojeva:

Teorema 2.1.3. *Za pozitivne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ važe nejednakosti*

$$\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \le H_n(\boldsymbol{x}) \le G_n(\boldsymbol{x}) \le A_n(\boldsymbol{x}) \le \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Jednakosti važe ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Dokaz. Kako je

$$\frac{x_1}{G_n(\boldsymbol{x})} \cdot \frac{x_2}{G_n(\boldsymbol{x})} \cdots \frac{x_n}{G_n(\boldsymbol{x})} = \left(\frac{G_n(\boldsymbol{x})}{G_n(\boldsymbol{x})}\right)^n = 1,$$

na osnovu teoreme 2.1.2, zaključujemo da je

$$\frac{x_1}{G_n(\boldsymbol{x})} + \frac{x_2}{G_n(\boldsymbol{x})} + \cdots + \frac{x_n}{G_n(\boldsymbol{x})} \ge n,$$

tj.

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{G_n(\boldsymbol{x})} \ge n,$$

ili

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Važi, dakle, nejednakost

$$G_n(\boldsymbol{x}) \le A_n(\boldsymbol{x}). \tag{GA}$$

Naravno, u (GA) važi jednakost ako i samo ako je

$$\frac{x_1}{G_n(\boldsymbol{x})} = \frac{x_2}{G_n(\boldsymbol{x})} = \cdots = \frac{x_n}{G_n(\boldsymbol{x})} = 1,$$

tj. ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Posmatrajmo, sada, pozitivne brojeve $1/x_1, 1/x_2, \ldots, 1/x_n$. Za njih važi dokazana nejednakost (GA), tj. važi nejednakost

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} \le \frac{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}{n}. \tag{2.1.6}$$

Kako je

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} = \frac{1}{G_n(\boldsymbol{x})} \qquad \text{i} \qquad \frac{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}{n} = \frac{1}{H_n(\boldsymbol{x})},$$

nejednakost (2.1.6) je, u stvari, nejednakost

$$H_n(\boldsymbol{x}) \le G_n(\boldsymbol{x}). \tag{HG}$$

Naravno, u nejednakosti (HG) važi jednakost ako i samo ako je $1/x_1 = 1/x_2 = \cdots = 1/x_n$, tj. ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Sada ćemo dokazati da je $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \le H_n(\boldsymbol{x})$. Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$. Tada se nejednakost koju dokazujemo svodi na nejednakost $x_1 \le H_n(\boldsymbol{x})$, tj. na nejednakost

$$\frac{x_1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \cdots + \frac{x_1}{x_n} \le n,$$

koja je očigledno tačna jer je, prema pretpostavci, $x_1/x_k \le 1$ za svako $k = 1, 2, \ldots, n$.

Slično se dokazuje i nejednakost $A_n(\boldsymbol{x}) \le \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. $\square$

Napomena 2.1.2. Kao što smo i učinili, uobičajeno je da se nejednakost između geometrijske i aritmetičke sredine označava sa (GA), a između harmonijske i geometrijske sredine sa (HG).

2.2. Faktorijelne funkcije i binomna formula

U ovom odeljku izučićemo izvesne funkcije celobrojnih argumenata i jednu veoma važnu formulu.

Definicija 2.2.1. Funkciju $n \mapsto n!$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, određenu sa

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ n(n-1)!, & n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

zovemo *faktorijel* broja n ili kraće n-faktorijel.

Nije teško proveriti da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.2.1. *Za funkciju $n \mapsto n!$ važi jednakost*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i \qquad (n \geq 1).$$

Definicija 2.2.2. Za funkciju $n \mapsto n!!$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, određenu pomoću

$$n!! = \begin{cases} 1, & n = 0 \text{ ili } n = 1, \\ n(n-2)!!, & n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \end{cases}$$

kažemo da je dvostruki faktorijel broja n ili da je dvostruki n-faktorijel.

Takođe bez dokaza, navodimo sledeće tvrđenje:

Teorema 2.2.2. *Za funkciju $n \mapsto n!!$ $(n \in \mathbb{N})$ važe jednakosti:*

1° $(2n)!! = n! \cdot 2^n$,

2° $(2n)!! = (2n) \cdot (2n-2) \cdots 2 = \prod_{i=1}^{n} (2i)$,

3° $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1) \cdots 1 = \prod_{i=0}^{n} (2i+1)$.

Neka su n i k nenegativni celi brojevi i neka je $k \leq n$.

Definicija 2.2.3. Funkcija $(n,k) \mapsto \binom{n}{k}$ $(k \leq n)$ određena je sa

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, & k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Za funkciju $(n,k) \mapsto \binom{n}{k}$ kažemo da je binomni koeficijent i čitamo n *nad* k. Opravdanje za naziv binomni koeficijent naći ćemo nešto kasnije, kada budemo izučili binomnu formulu.

Nije teško proveriti da je $\binom{n}{k}$ prirodan broj.

Teorema 2.2.3. *Ako su n i k nenegativni celi brojevi, važe identiteti:*

1° $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (k \leq n),$

2° $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad (k \leq n),$

3° $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad (k < n).$

Dokaz. 1° Kako je

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!},\end{aligned}$$

tvrđenje 1° je dokazano.

2° Ako se na $\binom{n}{n-k}$ primeni osobina 1°, tvrđenje sleduje neposredno.

3° Kako je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{i} \qquad \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!},$$

imamo

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}\big((k+1)+(n-k)\big)\\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}. \quad \square\end{aligned}$$

Teorema 2.2.4. *Neka su n i k nenegativni celi brojevi. Ako je $k \leq n$, važi identitet*

$$\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{2.2.1}$$

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom u odnosu na n.

Neka je $n = k$. Tada se (2.2.1) svodi na jednakost $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$, koja je tačna jer su obe strane jednake 1, pa tvrđenje teoreme važi za $n = k$.

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno i za $n = m \geq k$, tj. pretpostavimo da važi

$$\binom{m}{k} + \binom{m-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k} = \binom{m+1}{k+1}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}\binom{m+1}{k} + \binom{m}{k} + \binom{m-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k} &= \binom{m+1}{k} + \binom{m+1}{k+1}\\ &= \binom{(m+1)+1}{k+1},\end{aligned}$$

gde smo primenili rezultat 3° iz teoreme 2.2.3.

Prema tome, za fiksirano k tvrđenje teoreme je tačno i za $n = m+1$, što, zapravo, znači da je tvrđenje teoreme tačno za svako n. $\square$

Pod pretpostavkom da su m, n i k nenegativni brojevi, bez dokaza navodimo i sledeće tvrđenje:

Teorema 2.2.5. *Važe identiteti:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \qquad (n > 0),$$

$$\binom{n}{k}\binom{m}{0} + \binom{n}{k+1}\binom{m}{1} + \cdots + \binom{n}{k+m}\binom{m}{m} = \binom{m+n}{n-k},$$

gde je $k + m \leq n$.

Za $k = 0$ treći identitet se svodi na

$$\binom{n}{0}\binom{m}{0} + \binom{n}{1}\binom{m}{1} + \cdots + \binom{n}{m}\binom{m}{m} = \binom{m+n}{n} \qquad (m \leq n).$$

Napomena 2.2.1. Funkciju $(n, k) \mapsto \binom{n}{k}$ moguće je definisati i za necelobrojne vrednosti za n. Tako, za $a \in \mathbb{R}$, imamo

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}.$$

Na primer,

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{1}{16}.$$

Kao što je poznato, za $a, b \in \mathbb{R}$ važe identiteti:

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a+b,\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2,\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.
\end{aligned}$$

Međutim, sada ih je moguće pisati i na sledeći način:

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= \binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b,\\
(a+b)^2 &= \binom{2}{0}a^2+\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}b^2,\\
(a+b)^3 &= \binom{3}{0}a^3+\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}ab^2+\binom{3}{3}b^3,\\
(a+b)^4 &= \binom{4}{0}a^4+\binom{4}{1}a^3b+\binom{4}{2}a^2b^2+\binom{4}{3}ab^3+\binom{4}{4}b^4.
\end{aligned}$$

Važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.2.6. *Za svako $n \in \mathbb{N}$ važi jednakost*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \,. \tag{2.2.2}$$

Dokaz. Kao što smo videli, jednakost (2.2.2) je tačna za $n = 1, 2, 3, 4$. Pretpostavimo da je ona tačna za $n = k \geq 1$, tj. pretpostavimo da važi

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} b^i \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Tada je

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^{i} = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}b^{i} + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^{i+1}\\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}b^{i} + \sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}a^{k+1-i}b^{i}\\
&= \binom{k}{0}a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\left(\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1}\right)a^{k+1-i}b^{i} + \binom{k}{k}b^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Kako je $\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}$, $\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$ i $\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1}=\binom{k+1}{i}$, zaključujemo da je

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^{i} + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}\\
&= \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^{i},
\end{aligned}
$$

tj. da je jednakost (2.2.2) tačna i za $n=k+1$.

Prema tome, tvrđenje teoreme je tačno za svako $n\in\mathbb{N}$. $\square$

Jednakost (2.2.2) je poznata kao *Newtonova*[8] *binomna formula.*

Binomni koeficijenti $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\ldots$, $\binom{n}{n}$ mogu se generisati pomoću tzv. *Pascalovog*[9] *trougla*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

čija se konstrukcija zasniva na primeni jednakosti 3° iz teoreme 2.2.3.

---

8) Isac Newton (1643–1727), veliki engleski matematičar i fizičar.

9) Blaise Pascal (1623–1662), francuski matematičar.

Napomena 2.2.2. Iz binomne formule (2.2.2) neposredno sleduju prva i druga jednakost u teoremi 2.2.5 ako se stavi $a = b = 1$ i $a = -b = 1$, respektivno.

Napomena 2.2.3. Može se dokazati da važi i opštija, tzv. *trinomna formula*

$$(a+b+c)^n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} a^i b^j c^{n-i-j}.$$

2.3. Osnovi kombinatorike

U ovom odeljku razmotrićemo samo izvesne elemente kombinatorike i to: permutacije, kombinacije i varijacije.

1. Permutacije. Neka je $S_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ konačan skup i p obostrano jednoznačno preslikavanje skupa S_n na skup S_n.

Simbolički to preslikavanje $p\colon S_n \to S_n$ može se predstaviti u obliku

$$p = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_n} \end{pmatrix}, \tag{2.3.1}$$

koji omogućava da se uoči slika a_{i_k} svakog elementa a_k $(k = 1, 2, \dots, n)$. Zapravo vidi se da je $a_{i_k} = p(a_k)$, gde su a_{i_1}, a_{i_2}, $\dots$, a_{i_n} različiti elementi skupa S_n.

Definicija 2.3.1. Svako obostrano jednoznačno preslikavanje skupa S_n na skup S_n zovemo *permutacija* elemenata $a_1, a_2, \dots, a_n$ skupa S_n.

Pokazaćemo da broj takvih preslikavanja, tj. broj permutacija, zavisi od broja elemenata skupa S_n. Označimo, zbog toga, taj broj sa $P(n)$.

Očigledno, ako je $S_1 = \{a_1\}$, tada je preslikavanje $a_1 \mapsto p_1(a_1) = a_1$, tj. identično preslikavanje, jedino obostrano jednoznačno preslikavanje skupa S_1 na skup S_1. Dakle, $P(1) = 1$.

Za skup $S_2 = \{a_1, a_2\}$, pored identičkog preslikavanja

$$x \mapsto p_1(x) = x \quad (x = a_1, a_2)$$

i preslikavanje p_2, određeno sa

$$a_1 \mapsto p_2(a_1) = a_2 \quad \text{i} \quad a_2 \mapsto p_2(a_2) = a_1,$$

je biunivoko preslikavanje skupa S_2 na skup S_2. U skladu sa prethodno uvedenom notacijom (2.3.1) imamo

$$p_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Prema tome, $P(2) = 2$.

Nije teško utvrditi da za skup $S_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ postoji šest obostrano jednoznačnih preslikavanja skupa S_3 na skup S_3:

$$\begin{array}{llll}
p_1: & a_1 \mapsto p_1(a_1) = a_1, & a_2 \mapsto p_1(a_2) = a_2, & a_3 \mapsto p_1(a_3) = a_3; \\
p_2: & a_1 \mapsto p_2(a_1) = a_1, & a_2 \mapsto p_2(a_2) = a_3, & a_3 \mapsto p_2(a_3) = a_2; \\
p_3: & a_1 \mapsto p_3(a_1) = a_2, & a_2 \mapsto p_3(a_2) = a_1, & a_3 \mapsto p_3(a_3) = a_3; \\
p_4: & a_1 \mapsto p_4(a_1) = a_2, & a_2 \mapsto p_4(a_2) = a_3, & a_3 \mapsto p_4(a_3) = a_1; \\
p_5: & a_1 \mapsto p_5(a_1) = a_3, & a_2 \mapsto p_5(a_2) = a_1, & a_3 \mapsto p_5(a_3) = a_2; \\
p_6: & a_1 \mapsto p_6(a_1) = a_3, & a_2 \mapsto p_6(a_2) = a_2, & a_3 \mapsto p_6(a_3) = a_1,
\end{array}$$

tj. preslikavanja:

$$p_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \end{pmatrix},$$

$$p_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}, \quad p_5 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad p_6 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

To znači da je $P(3) = 6$.

Kako je $P(1) = 1 = 1!$, $P(2) = 2 = 2!$ i $P(3) = 6 = 3!$, intuitivno se može pretpostaviti da je $P(n) = n!$. Matematičkom indukcijom dokazaćemo da je ova pretpostavka tačna.

Pre formulisanja odgovarajuće teoreme, ukazaćemo na sledeće: Očigledno, permutacija

$$p_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

je identičko preslikavanje skupa S_n na skup S_n. Tu permutaciju zvaćemo *osnovna permutacija* ili *polazna permutacija*. Naravno, svaka druga permutacija se može identifikovati sa zapisom

$$a_{i_1}\, a_{i_2}\, \dots\, a_{i_n},$$

što, u stvari, predstavlja drugi red u notaciji (2.3.1).

U daljem tekstu često ćemo koristiti ovakav način pisanja permutacija.

Teorema 2.3.1. *Broj permutacija skupa od n elemenata je $P(n) = n!$.*

Dokaz. Kao što smo videli, tvrđenje je tačno za $n = 1, 2, 3$. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za neko $n = k \geq 1$, tj. pretpostavimo da je $P(k) = k!$.

Da bismo odredili $P(k + 1)$, posmatrajmo skup S_{k+1}, tj. skup elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$. Kako je broj permutacija elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_k$ prema induktivnoj hipotezi jednak $P(k) = k!$, broj permutacija elemenata skupa S_{k+1} dobićemo na sledeći način:

Za svaku permutaciju elemenata skupa S_k odredićemo one permutacije elemenata skupa S_{k+1} za koje je element a_{k+1} na poslednjem mestu u redosledu. Na primer, za permutaciju $a_1a_2a_3 \ldots a_k$ imamo $a_1a_2 \ldots a_ka_{k+1}$; za permutaciju $a_1a_3a_2a_4 \ldots a_k$ permutaciju $a_1a_3a_2a_4 \ldots a_ka_{k+1}$. Takvih permutacija elemenata skupa S_{k+1} ima onoliko koliko ima permutacija elemenata skupa S_k, što znači $k!$.

Zatim ćemo, za svaku permutaciju elemenata skupa S_k, odrediti one permutacije elemenata skupa S_{k+1} za koje je element a_{k+1} na pretposlednjem, k-tom mestu. Naravno, i takvih permutacija skupa S_{k+1} ima $k!$ i sve su one nove, tj. različite od prethodnih $k!$ permutacija.

Produžujući ovaj postupak određivanja novih $k!$ permutacija elemenata skupa S_{k+1} za svako novo mesto elementa a_{k+1} u redosledu, dobijamo da je broj permutacija elemenata skupa S_{k+1} određen sa

$$P(k + 1) = P(k)(k + 1) = k!(k + 1) = (k + 1)!\,.$$

Dakle, za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $P(n) = n!\,.$ $\square$

Napomena 2.3.1. Ovaj dokaz teoreme 2.3.1 je konstruktivan jer ukazuje na postupak za dobijanje permutacija. Postupak se sastoji u sledećem:

Zadrži se element a_1 i njemu se sa desne strane dopišu sve permutacije od preostalih $n - 1$ elemenata. Dopisuju se, dakle, $(n - 1)!$ permutacija od elemenata $a_2, a_3, \ldots, a_n$. Na taj način dobijaju se prvih $(n - 1)!$ permutacija elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Zatim se zadrži element a_2, pa se njemu dopišu zdesna svih $(n-1)!$ permutacija od elemenata $a_1, a_3, \ldots, a_n$. Ovako dobijene permutacije predstavljaju narednih $(n - 1)!$ permutacija od n elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Na kraju, elementu a_n dopišu se sve prethodno dobijene permutacije od elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Ovih $(n-1)!$ permutacija čine poslednju grupu permutacija od elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Napomena 2.3.2. Ovaj postupak ukazuje na mogućnost utvrđivanja redosleda dobijanja permutacija. To, zapravo, znači da se skup svih permutacija uočenih elemenata može urediti tako da svaka permutacija ima svoj indeks koji ukazuje na njeno mesto u tako uređenom skupu permutacija. Dakle, ako sa P_n označimo skup svih permutacija od n elemenata, tada imamo

$$P_n = \{p_1, p_2, \dots, p_{n!}\},$$

gde smo sa p_ν označili permutaciju čiji je indeks ν.

U prethodnom razmatranju permutaciju $a_1 a_2 \dots a_n$ smo uzimali za polaznu ili osnovnu permutaciju. Uobičajeno je da se za osnovnu permutaciju uzima ona permutacija kod koje su elementi poređani na leksikografski način, tj. slično načinu kako su poređane reči u rečniku. Ako su elementi slova, tada se za osnovnu permutaciju uzima njihov azbučni ili abecedni redosled, u zavisnosti od toga da li se radi o ćiriličnim ili latiničnim slovima. Ako su, pak, elementi prirodni brojevi, tada se u osnovnoj permutaciji oni ređaju po veličini.

U opštem slučaju, kada imamo skup od n proizvoljnih elemenata, tada uvođenjem jedne relacije uređenja $\prec$ taj skup postaje uređen. Njegovi elementi se tada mogu preimenovati u a_1, a_2, $\dots$, a_n, tako da je

$$a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n. \tag{2.3.2}$$

Saglasno prethodnom, permutacija $p_1 = a_1 a_2 \dots a_n$ je polazna ili osnovna permutacija. Ponekad pišemo $p_1 = (a_1 a_2 \dots a_n)$.

Na primer, neka je $S_5 = \{\alpha, 1, *, r, \circ\}$. Ako uvedemo relaciju poretka $\prec$ tako da je $1 \prec r \prec \alpha \prec \circ \prec *$ i izvršimo preimenovanje: $1 \to a_1$, $r \to a_2$, $\alpha \to a_3$, $\circ \to a_4$ i $* \to a_5$, polazna permutacija u skupu S_5 je $p_1 = (1\, r\, \alpha\, \circ\, *)$.

Za dve permutacije $p_\nu = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$ i $p_\mu = a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_n}$, u skladu sa uvedenim uređenjem elemenata, moguće je utvrditi njihov uzajamni poredak. Ako je

$$i_1 < j_1 \qquad \text{ili} \qquad i_1 = j_1,\ \dots,\ i_{k-1} = j_{k-1},\ i_k < j_k \qquad (k \le n),$$

tada kažemo da je permutacija p_ν ispred permutacije p_μ.

Za redosled elemenata u osnovnoj permutaciji kažemo da je normalan. Naravno, u svakoj drugoj permutaciji taj normalni redosled je narušen. Ako jedna permutacija nastaje iz neke druge tako što dva elementa zamene svoja mesta, kažemo da je ta permutacija nastala *transpozicijom* tih elemenata.

Neka je skup S_n uređen relacijom $\prec$ tako da važi (2.3.2). Za elemente a_{i_k} i a_{i_m} u permutaciji

$$a_{i_1} \dots a_{i_k} \dots a_{i_m} \dots a_{i_n}$$

kažemo da obrazuju *inverziju* ako je $i_k > i_m$. Ako je u nekoj permutaciji broj parova elemenata koji obrazuju inverzije jednak j, tada kažemo da ta permutacija ima j inverzija.

Definicija 2.3.2. Za permutaciju kažemo da je *parna* ili da je *parne klase* ako ima paran broj inverzija.

Za permutaciju koja ima neparan broj inverzija kažemo da je *neparna* ili da je *neparne klase.*

Osnovna permutacija je parna.

Teorema 2.3.2. *Permutacije koje nastaju jedna iz druge transpozicijom dva elementa pripadaju različitim klasama parnosti.*

Dokaz. Ako su elementi čijom transpozicijom nastaje nova permutacija susedni elementi, tada se broj inverzija u ovim permutacijama razlikuje za jedinicu. U tom slučaju se posmatrane permutacije zaista razlikuju u parnosti, tj. pripadaju različitim klasama.

Pretpostavimo sada da se između elemenata čijom je transpozicijom nastala nova permutacija nalazi s elemenata. Nova permutacija je, u stvari, nastala tako što je jedan od tih elemenata izvršio s uzastopnih transpozicija sa susednim elementima, a drugi $s+1$ transpoziciju sa sebi susednim elementima. Prema tome, izvršeno je ukupno $2s+1$ transpozicija susednih elemenata, što znači da je broj inverzija promenjen za neparan broj.

Dakle, i u ovom slučaju ove dve permutacije pripadaju različitim klasama parnosti. □

Primer 2.3.1. Neka je $S_5 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Odredićemo broj inverzija u permutaciji $a_4a_1a_2a_5a_3$ u odnosu na osnovnu permutaciju $a_1a_2a_3a_4a_5$.

Kako inverzije obrazuju sledeći parovi elemenata:

$$(a_4, a_1), \quad (a_4, a_2), \quad (a_4, a_3), \quad (a_5, a_3),$$

zaključujemo da je broj inverzija u permutaciji $a_4a_1a_2a_5a_3$ jednak četiri. Dakle, ova permutacija je parne klase. △

Primer 2.3.2. Ako sa $i(p_k)$ označimo broj inverzija u permutaciji p_k skupa $S_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$, imamo

$$\begin{aligned} i(p_1) &= i(a_1a_2a_3) = 0, & i(p_2) &= i(a_1a_3a_2) = 1\\ i(p_3) &= i(a_2a_1a_3) = 1, & i(p_4) &= i(a_2a_3a_1) = 2\\ i(p_5) &= i(a_3a_1a_2) = 2, & i(p_6) &= i(a_3a_2a_1) = 3. \end{aligned}$$

Dakle, permutacije p_1, p_4 i p_5 su parne klase, dok su p_2, p_3 i p_6 neparne klase. △

Napomenimo da se sa permutacijama mogu izvoditi izvesne operacije kao, na primer, množenje permutacija. Ilustrovaćemo to na skupu svih permutacija od elemenata $1, 2, 3$.

Posmatrajmo, dakle, skup $P_3 = \{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}$, tj. skup

$$\left\{\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,3\,2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,1\,3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,3\,1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,1\,2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,2\,1\end{pmatrix}\right\}.$$

Ako, kao i ranije, uvedemo oznake

$$p_1 = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix},\quad p_2 = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,3\,2\end{pmatrix},\quad p_3 = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,1\,3\end{pmatrix},$$
$$p_4 = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,3\,1\end{pmatrix},\quad p_5 = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,1\,2\end{pmatrix},\quad p_6 = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,2\,1\end{pmatrix},$$

skup P_3 je određen sa $P_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$.

Napomena 2.3.3. Nije teško proveriti da permutacije

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\2 & 1 & 3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\3 & 1 & 2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

predstavljaju jednu istu permutaciju, jer u svakoj od njih 1 prelazi u 2, 2 prelazi u 3 i 3 prelazi u 1. U stvari, svako od ovih pisanja jedne iste permutacije može se dobiti iz bilo kog drugog permutovanjem kolona $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$.

Definisaćemo sada u P_3 množenje permutacija.

Uočimo dve permutacije iz skupa S_3, na primer permutacije

$$p_3 = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,1\,3\end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad p_5 = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,1\,2\end{pmatrix},$$

i neka je njihov proizvod $p_3 \cdot p_5$ permutacija $\begin{pmatrix}1\,2\,3\\x\,y\,z\end{pmatrix}$. Dakle, neka je

$$p_3 \cdot p_5 = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,1\,3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,1\,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\x\,y\,z\end{pmatrix}.$$

Kako su $\begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,1\,2\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}2\,1\,3\\1\,3\,2\end{pmatrix}$ jedna ista permutacija p_5, imamo

$$p_3 \cdot p_5 = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,1\,3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,1\,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,1\,3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\,1\,3\\1\,3\,2\end{pmatrix}.$$

Za ovako napisane permutacije p_3 i p_5 uočavamo da je gornji red cifara u permutaciji p_5 istovetan donjem redu cifara u permutaciji p_3.

Kada su permutacije p_3 i p_5 tako napisane, tada za permutaciju $p_3 \cdot p_5$ kažemo da je permutacija čiji se gornji red cifara poklapa sa gornjim redom u permutaciji p_3, a donji red sa donjim redom cifara u permutaciji p_5.

Prema tome, imamo

$$p_3 \cdot p_5 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\,1\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix},$$

tj. $p_3 \cdot p_5 = p_2$. Takođe,

$$\begin{aligned} p_3 \cdot p_4 &= \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\,1\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix} = p_6, \\ p_5 \cdot p_4 &= \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\,1\,2 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix} = p_1, \\ p_4 \cdot p_3 &= \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\,3\,1 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix} = p_2. \end{aligned}$$

Dakle, ako su

$$p_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad p_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix}$$

permutacije za koje treba odrediti proizvod $p_i \cdot p_j$, tada permutovanjem po kolonama, prvo permutaciju p_j dovodimo na oblik

$$p_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix},$$

a zatim zaključujemo da je proizvod $p_i \cdot p_j$ određen sa

$$\begin{aligned} p_i \cdot p_j &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} = p_k. \end{aligned}$$

Ovim smo definisali *množenje* permutacija u skupu P_3.

Naravno, ako posmatramo skup P_n, tj. skup svih permutacija od elemenata $1, 2, \ldots, n$, na isti način je moguće definisati množenje permutacija p_i i p_j iz P_n, tj. permutacija

$$p_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad p_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}.$$

Naime, ako permutovanjem po kolonama permutaciju p_j dovedemo na oblik

$$p_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix},$$

proizvod $p_i \cdot p_j$ definišemo kao permutaciju p_k koju određujemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} p_i \cdot p_j &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} = p_k\,. \end{aligned}$$

Napomena 2.3.4. Množenje permutacija p_i i p_j, u stvari, predstavlja kompoziciju ta dva preslikavanja.

O nekim osobinama množenja permutacija biće reči u odeljku 4.1.

2. Kombinacije. Posmatrajmo sada skup $S_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ i sve njegove neprazne podskupove uključujući i sâm skup S_n, pretpostavljajući pri tom uređenje (2.3.2).

Definicija 2.3.3. Za svaki podskup skupa S_n $(k \le n)$, u oznaci

$$a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \qquad (i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}),$$

kažemo da je *kombinacija* klase k od n elemenata $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Za kombinaciju klase k kažemo i da je kombinacija k-te klase.

Napomena 2.3.5. Kao što ćemo videti, pretpostavka o leksikografskom ispisivanju ovih podskupova omogućava lakše dobijanje kombinacija određene klase, a naročito određivanje njihovog broja.

Primer 2.3.3. Neka je $S_4 = \{a, b, c, d\}$. Kombinacije druge klase su

$$ab, \quad ac, \quad ad, \quad bc, \quad bd, \quad cd,$$

a kombinacije treće klase

$$abc, \quad abd, \quad acd, \quad bcd.$$

Kombinacije prve klase su a, b, c, d, a jedina kombinacija četvrte klase je $abcd$.

Napomenimo da je, na primer, kombinaciju *abc* moguće pisati na bilo koji od sledećih načina: *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*, ako bi se izostavila pretpostavka o uređenju skupa S_4. Svih šest pisanja, u stvari, predstavljaju jednu istu kombinaciju. $\triangle$

Za skup $S_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ kombinacije prve klase su svi elementi $a_1, a_2, \dots, a_n$ uzeti ponaosob, tj. kombinacije prve klase su $a_1,\ a_2, \dots, a_n$. Njih je, naravno, n na broju.

Sve kombinacije druge klase dobićemo ako svakom elementu a_i $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ pridodamo zdesna, tj. ako mu dopišemo sa desne strane, svaki od elemenata $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$. Prema tome, ukupan broj kombinacija druge klase jednak je broju elemenata koje na ovaj način dodajemo elementima a_i $(i = 1, 2, \dots, n-1)$. Kako je za svaki element a_i njihov broj $n - i$, ukupan broj kombinacija druge klase od n elemenata je

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{1} + \cdots + \binom{1}{1} = \binom{n}{2}.$$

Do ovog ukupnog broja kombinacija druge klase od n elemenata, mogli smo da dođemo i na način koji ćemo izložiti za utvrđivanje broja kombinacija treće klase.

Naime, broj kombinacija treće klase od n elemenata, u kojima je element a_1 na prvom mestu, jednak je broju kombinacija druge klase od elemenata $a_2, a_3, \dots, a_n$. Kako tih kombinacija ima $\binom{n-1}{2}$, broj kombinacija treće klase, u kojima je element a_1 na prvom mestu, jednak je $\binom{n-1}{2}$.

Isto tako, broj kombinacija treće klase, u kojima je element a_2 na prvom mestu, jednak je broju kombinacija druge klase od elemenata $a_3, a_4, \dots, a_n$, tj. jednak je broju $\binom{n-2}{2}$.

Naravno, broj kombinacija treće klase, u kojima je element a_3 na prvom mestu jednak je $\binom{n-3}{2}$.

I na kraju, broj kombinacija treće klase, u kojima je element a_{n-2} na prvom mestu, jednak je jedinici, jer se radi o jednoj jedinoj kombinaciji $a_{n-2}a_{n-1}a_n$. Broj tih kombinacija je, dakle, jednak jedinici, tj. njihov broj je $\binom{n-(n-2)}{2} = \binom{2}{2}$.

Prema tome, ukupan broj kombinacija treće klase od n elemenata jednak je

$$\binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{2}{2} = \binom{n}{3}.$$

Kao što smo videli, broj kombinacija prve klase je $\binom{n}{1}$, klase dva je $\binom{n}{2}$ i treće klase $\binom{n}{3}$.

Broj kombinacija klase k od n elemenata zavisi, dakle, i od broja n i od broja k. Ako taj broj označimo sa C_n^k, tada je, očigledno,

$$C_n^1 = \binom{n}{1}, \quad C_n^2 = \binom{n}{2}, \quad C_n^3 = \binom{n}{3}.$$

Prirodno, nameće se pretpostavka da je $C_n^k = \binom{n}{k}$. Metodom matematičke indukcije dokazaćemo da je ova pretpostavka tačna.

Teorema 2.3.3. *Broj kombinacija klase k od n elemenata* $(1 \leq k \leq n)$ *određen je sa* $C_n^k = \dbinom{n}{k}$.

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom, naravno, u odnosu na k, pretpostavljajući da je n fiksirani prirodan broj.

Kao što smo videli, tvrđenje teoreme je tačno za $k = 1, 2, 3$. Stoga ćemo pretpostaviti da je teorema tačna i za $k = m \geq 1$.

Broj kombinacija klase $m + 1$, od elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$, u kojima je element a_1 na prvom mestu, jednak je broju kombinacija klase m od elemenata $a_2, a_3, \ldots, a_n$. Taj broj je, prema induktivnoj pretpostavci, jednak $\binom{n-1}{m}$.

Naravno, broj kombinacija klase $m + 1$ od elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$, u kojima je element a_2 na prvom mestu, jednak je broju kombinacija klase m od elemenata $a_3, a_4, \ldots, a_n$. Prema tome, njihov broj iznosi $\binom{n-2}{m}$.

Najzad, broj kombinacija klase $m+1$, u kojima je element a_{n-m} na prvom mestu, iznosi $\binom{n-(n-m)}{m} = \binom{m}{m}$, tj. ravan je jedinici.

Kako nema drugih kombinacija klase $m+1$ od n elemenata, zaključujemo da je njihov ukupan broj

$$C_n^{m+1} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-2}{m} + \cdots + \binom{m}{m} = \binom{n}{m+1}.$$

Tvrđenje teoreme je, prema tome, tačno i za $k = m + 1$. Dakle, za svako $k = 1, 2, \ldots, n$, važi jednakost $C_n^k = \binom{n}{k}$. $\square$

3. Varijacije. Smatrajući svaku kombinaciju klase k od n elemenata kao osnovni poredak odgovarajućih k elemenata, moguće je elemente te kombinacije permutovati, tj. menjati im poredak u kombinaciji.

Definicija 2.3.4. Za bilo koju permutaciju kombinacije klase k od n elemenata kažemo da je *varijacija* klase k od tih n elemenata.

Primer 2.3.4. Varijacije druge klase od elemenata a, b, c, d su sve permutacije kombinacija druge klase, tj. kombinacija

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd.$$

Prema tome, sve varijacije druge klase od elemenata a, b, c, d su

$$ab,\ ba,\ ac,\ ca,\ ad,\ da,\ bc,\ cb,\ bd,\ db,\ cd,\ dc.$$

Dakle, ima ih ukupno 12.

Sve varijacije četvrte klase su, u stvari, sve permutacije jedine kombinacije $abcd$. Kako je broj tih permutacija jednak 24, zaključujemo da je ukupan broj varijacija četvrte klase od četiri elementa, takođe jednak 24. $\triangle$

Kao što vidimo, i broj varijacija klase k od n elemenata zavisi i od n i od k, gde je, naravno, $1 \leq k \leq n$. Ako taj broj označimo sa V_n^k, pokazaćemo da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.3.4. *Broj varijacija klase* k $(1 \leq k \leq n)$ *od* n *elemenata određen je sa*

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Dokaz. Kako se sve varijacije klase k od n elemenata, prema definiciji 2.3.5, dobijaju permutovanjem elemenata svih kombinacija iste klase k, zaključujemo da ih je $k!$ puta više od svih kombinacija klase k.

Ima ih, dakle, $V_n^k = k!\, C_n^k$, tj. ima ih

$$V_n^k = k!\, C_n^k = k! \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad \square$$

4. Permutacije, kombinacije i varijacije sa ponavljanjem. Pretpostavimo, sada, da među elementima skupa S_n ima jednakih među sobom. Na primer, neka se element a_1 ponavlja i_1 puta, i neka su ostali elementi $a_2, \ldots, a_m$ $(i_1 + m - 1 = n)$ među sobom različiti. Naravno, m označava broj različitih elemenata u skupu S_n. Tada se permutacije koje nastaju transpozicijama jednakih elemenata ne razlikuju jedna od druge. Dakle, u ovom slučaju, stvarni broj permutacija je manji od $P(n)$. Označimo sa $P^{(i_1,1,\ldots,1)}(n)$ taj broj. U tom slučaju, tj. u slučaju kada među elementima skupa S_n ima jednakih, tj. kada se neki od njih ponavljaju, za permutacije kažemo da su permutacije od n elemenata sa ponavljanjem.

Primer 2.3.5. Permutacije sa ponavljanjem od elemenata a, a, a, b, c su sledeće permutacije:

$$\begin{array}{lllll} aaabc, & aaacb, & aabac, & aabca, & aacab, \\ aacba, & abaac, & abaca, & abcaa, & acbaa, \\ acaba, & acaab, & baaac, & baaca, & bacaa, \\ bcaaa, & caaab, & caaba, & cabaa, & cbaaa. \end{array}$$

Dakle, njih je $P^{(3,1,1)}(5) = 20$ ukupno. △

Međutim, može se desiti da se u skupu S_n pored elementa a_1, koji se ponavlja i_1 puta, ponavlja i element a_2, na primer, i_2 puta, a da su ostali elementi $a_3, \ldots, a_m$ $(i_1 + i_2 + m - 2 = n)$ među sobom različiti. Tada ćemo ukupan broj takvih permutacija označavati sa $P^{(i_1,i_2,1,\ldots,1)}(n)$.

Primer 2.3.6. Od elemenata a, a, b, b, c dobijaju se sledećih $P^{(2,2,1)}(5) = 30$ permutacija sa ponavljanjem:

$$\begin{array}{llllll} aabbc, & aabcb, & aacbb, & ababc, & abacb, & abbac, \\ abbca, & abcab, & abcba, & acabb, & acbab, & acbba, \\ baabc, & baacb, & babac, & babca, & bacab, & bacba, \\ bbaac, & bbaca, & bbcaa, & bcaab, & bcaba, & bcbaa, \\ caabb, & cabab, & cabba, & cbaab, & cbaba, & cbbaa. \end{array} \quad \triangle$$

Bez ikakvih ograničenja, može se pretpostaviti da se skup S_n sastoji od m različitih elemenata, ali tako da se element a_k ponavlja i_k puta $(k = 1, 2, \ldots, m)$, pri čemu je, naravno,

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_m = n.$$

Ako sa $P^{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}(n)$ označimo ukupan broj permutacija sa ponavljanjima $i_1, i_2, \ldots, i_m$ od n elemenata važi sledeće tvrđenje koje navodimo bez dokaza:

Teorema 2.3.5. *Ukupan broj permutacija od n elemenata sa ponavljanjima $i_1, i_2, \ldots, i_m$ $(i_1 + i_2 + \cdots + i_m = n)$ jednak je*

$$P^{(i_1,i_2,\ldots,i_m)}(n) = \frac{n!}{i_1!\, i_2! \cdots i_m!}\,.$$

Ako među elementima nema jednakih, tada je očigledno

$$P^{(1,1,\ldots,1)}(n) \equiv P(n).$$

Neka su sada, opet, elementi $a_1, a_2, \dots, a_n$ među sobom različiti. Dakle, neka imamo n različitih elemenata. Pretpostavimo da se svaki od ovih elemenata može uzimati bar k puta.

Sada ćemo formirati kombinacije klase k od elemenata $a_1, a_2, \dots, a_n$, ali tako da se svaki od ovih elemenata u tim kombinacijama pojavljuje najviše k puta, dakle, k puta, $k-1$ puta, ..., jednom ili nijednom.

Za takve kombinacije kažemo da su kombinacije sa ponavljanjem, klase k od n elemenata.

Primer 2.3.7. Kombinacije sa ponavljanjem, druge klase od elemenata a, b, c su:

$$aa, \quad ab, \quad ac, \quad bb, \quad bc, \quad cc.$$

Ukupno ih je 6. △

Primer 2.3.8. Kombinacije sa ponavljanjem, treće klase od elemenata a, b, c su:

$$aaa, \quad aab, \quad aac, \quad abb, \quad abc, acc, \quad bbb, \quad bbc, \quad bcc, \quad ccc.$$

Ima ih, dakle, 10. △

Primer 2.3.9. Kombinacije sa ponavljanjem, četvrte klase od elemenata a, b, c su:

$$\begin{array}{lllll} aaaa, & aaab, & aaac, & aabb, & aabc, \\ aacc, & abbb, & abbc, & abcc, & accc, \\ bbbb, & bbbc, & bbcc, & bccc, & cccc. \end{array}$$

Kao što vidimo, ukupno ih je 15. △

Ako ukupan broj kombinacija sa ponavljanjem, klase k od n elemenata, označimo sa $\overline{C}_n^k$, može se dokazati da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.3.6. *Ukupan broj kombinacija sa ponavljanjem, klase k od n elemenata, određen je sa* $\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$.

Naravno, sada se može govoriti i o varijacijama sa ponavljanjem. Naime, permutacije sa ponavljanjem svih kombinacija sa ponavljanjem, klase k od n elemenata su, u stvari, varijacije sa ponavljanjem, klase k od n elemenata.

Primer 2.3.10. Permutovanjem svih kombinacija iz primera 2.3.8 dobijamo varijacije sa ponavljanjem, treće klase od elemenata a, b, c,

$$\begin{array}{lllllllll} aaa, & aab, & aba, & baa, & aac, & aca, & caa, & abb, & baa, \\ bba, & abc, & acb, & bac, & bca, & cab, & cba, & acc, & caa, \\ cca, & bbb, & bbc, & bcb, & cbb, & bcc, & cbc, & ccb, & ccc. \end{array}$$

Kao što se vidi, ima ih ukupno 27. △

Ako sa $\overline{V}_n^k$ označimo broj svih varijacija sa ponavljanjem, klase k od n elemenata, tada važi sledeće tvrđenje, koje takođe navodimo bez dokaza:

Teorema 2.3.7. *Broj svih varijacija sa ponavljanjem, klase k od n elemenata, određen je sa* $\overline{V}_n^k = n^k$.

3. ALGEBARSKE STRUKTURE

3.1. Binarna operacija, osnovne strukture i morfizmi

Neka je G neprazan skup i f preslikavanje skupa G^2 u skup G. Dakle, neka elementi a i b iz G, kao uređeni par $(a, b) \in G^2$, određuju preslikavanjem f jedan element c iz G, tako da je $c = f(a, b)$. Čini se, kao da elementi a i b iz G, na određeni način, proizvode, određuju, treći element c, takođe iz G. Elementi a i b iz G stupaju u jednu operaciju kojom se dobija element c iz G.

Definicija 3.1.1. Preslikavanje $(a, b) \mapsto c = f(a, b) \quad (a, b, c \in G)$, u oznaci $a * b = c$, zovemo *binarna operacija.*

Nadalje ćemo sa $*$, ili na neki drugi način, na primer sa $\circ$, $\diamond$, $\star$, $\dots$, označavati binarnu operaciju u smislu definicije 3.1.1. Tada kažemo da je skup G snabdeven operacijom $*$. Tu činjenicu ćemo simbolizovati sa $(G, *)$.

Naravno, moguće je u istom skupu definisati više operacija, na primer, u skupu G operacije $*$ i $\circ$. Tada bismo imali označavanje $(G, *, \circ)$.

Za $(G, *)$ kažemo da je *algebarska struktura.* Ta je struktura bogatija ako operacija $*$ obiluje većim brojem osobina. Bilo koja uvedena binarna operacija ima izvesne osobine. Prirodno je ispitivati da li ta operacija ima bar neke od osobina koje imaju, na primer, nama dobro poznate operacije sabiranje i množenje u skupu realnih brojeva. Međutim, valja ispitati da li uvedena operacija ima i neke druge osobine.

Stoga ćemo, pre nego što pristupimo detaljnijem ispitivanju nekih algebarskih struktura, definisati osnovne osobine binarnih operacija.

Neka je binarna operacija $*$ definisana u nepraznom skupu G.

Definicija 3.1.2. Kažemo da je binarna operacija $*$ *asocijativna* ako za svako $a, b, c \in G$ važi

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

Dakle, ako je operacija $*$ asocijativna, moguće je pisati

$$a * (b * c) = (a * b) * c = a * b * c.$$

Definicija 3.1.3. Binarna operacija $*$ je *komutativna*, ako za svako $a, b \in G$ važi jednakost

$$a * b = b * a.$$

Definicija 3.1.4. Ako u $(G, *)$ postoji element e, takav da je za svako $a \in G$

$$a * e = e * a = a,$$

kažemo da je $e \in G$ *neutralni* ili *jedinični* element za operaciju $*$.

Ponekada, za jedinični element se kaže da je *jedinica.*

Teorema 3.1.1. *Ako u $(G, *)$ postoji neutralni element, onda je on jedinstven.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da u skupu G postoje dva elementa e i f $(e \neq f)$, takva da je za svako $a \in G$

$$a * e = e * a = a \tag{3.1.1}$$

i

$$a * f = f * a = a. \tag{3.1.2}$$

Kako je a proizvoljan element iz G, stavimo $a = f$ u (3.1.1) i $a = e$ u (3.1.2). Tada dobijamo

$$f * e = e * f = f \qquad \text{i} \qquad e * f = f * e = e,$$

odakle sleduje $e = f$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom $e \neq f$. $\square$

Definicija 3.1.5. Ako u $(G, *)$ postoji neutralni element e i ako za $a \in G$ postoji element $a^{-1} \in G$, takav da je

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e,$$

kažemo da je a^{-1} *inverzni* ili *simetrični* element za $a \in G$, u odnosu na operaciju $*$.

Naravno, ako, u smislu definicije 3.1.5, postoji $a^{-1} \in G$, tada je $a \in G$ inverzni element za a^{-1}. Važi, dakle, $(a^{-1})^{-1} = a$.

Umesto oznake a^{-1} za inverzni element koristimo i oznaku a'.

Teorema 3.1.2. *Neka u $(G,*)$ postoji neutralni element e i neka je $*$ asocijativna operacija. Ako za element $a \in G$ postoji inverzni element $a^{-1} \in G$, tada je on jedinstven.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka za $a \in G$ postoje dva među sobom različita inverzna elementa a_1^{-1} i a_2^{-1}. Tada važi

$$a_1^{-1} = a_1^{-1} * e = a_1^{-1} * (a * a_2^{-1}) = (a_1^{-1} * a) * a_2^{-1} = e * a_2^{-1} = a_2^{-1},$$

što je u suprotnosti sa učinjenom pretpostavkom. □

Izučićemo sada neke algebarske strukture. Neka je $*$ jedna binarna operacija definisana u nepraznom skupu G.

Definicija 3.1.6. Za algebarsku strukturu $(G,*)$ kažemo da je *grupoid*.

Definicija 3.1.7. Ako je operacija $*$ asocijativna, za strukturu $(G,*)$ kažemo da je *asocijativni grupoid* ili *polugrupa* (ili *semigrupa*).

Primer 3.1.1. Kako je operacija sabiranja u skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ asocijativna, struktura $(\mathbb{N},+)$ je asocijativni grupoid. △

Definicija 3.1.8. Ako u grupoidu $(G,*)$ postoji neutralni element, tada kažemo da je grupoid $(G,*)$ sa jedinicom.

Primer 3.1.2. Strukture $(\mathbb{N}_0,+)$ i $(\mathbb{N},\cdot)$ su grupoidi sa jedinicom. Neutralni elementi u ovim strukturama su 0 i 1, respektivno. △

Definicija 3.1.9. Neka je binarna operacija $*$, definisana u skupu G. Za grupoid $(G,*)$ kažemo da je *grupa* ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1° Operacija $*$ je asocijativna;

2° U skupu G postoji neutralni element za operaciju $*$;

3° Za svaki element iz G postoji u G njemu inverzni element u odnosu na operaciju $*$.

Primer 3.1.3. Neka je $S = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$ i neka je u S definisana binarna operacija $*$ na sledeći način:

1° Za svako $x \in S$ je $1 * x = x * 1 = x$;

2° Za elemente $i, j, k \in S$ važe jednakosti:

(a) $\quad i * i = j * j = k * k = -1,$

(b) $\quad i * j = k, \quad j * k = i, \quad k * i = j,$

(c) $\quad j * i = -k, \quad k * j = -i, \quad i * k = -j;$

3° Za svako $x, y \in S$ je

$$(-x) * y = x * (-y) = -(x * y),$$
$$(-x) * (-y) = x * y.$$

Jednostavno se proverava da je ovako definisana operacija $*$ asocijativna, da u skupu S postoji neutralni element $e = 1$ i da za svaki element $x \in S$ postoji u S inverzni element $x^{-1} = -x$ u odnosu na operaciju $*$. Prema tome, struktura $(S, *)$ je grupa. △

Sledeći primer se odnosi na skup svih permutacija P_3 od elemenata $1, 2, 3$. Uočimo operaciju množenje permutacija, u oznaci $\cdot$ (videti odeljak 2.3).

Primer 3.1.4. Dokazaćemo da je $(P_3, \cdot)$ grupa. Nije teško proveriti da se svi proizvodi permutacija $p_i \cdot p_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6)$ mogu predstaviti sledećom tzv. *Cayleyevom*[10] *tablicom*:

$\cdot$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_2	p_2	p_1	p_4	p_3	p_6	p_5
p_3	p_3	p_5	p_1	p_6	p_2	p_4
p_4	p_4	p_6	p_2	p_5	p_1	p_3
p_5	p_5	p_3	p_6	p_1	p_4	p_2
p_6	p_6	p_4	p_5	p_2	p_3	p_1

Iz ove tablice može se konstatovati:

1° Operacija množenje permutacija je, očigledno, unutrašnja operacija;

2° Operacija množenje permutacija je asocijativna operacija;

3° Neutralni element za operaciju množenje permutacija je osnovna permutacija p_1;

4° Za svaku permutaciju p_i postoji u P_3 njoj inverzna permutacija ${p_i}^{-1}$, takva da je $p_i \cdot {p_i}^{-1} = {p_i}^{-1} \cdot p_i = p_1$.

Prema tome, $(P_3, \cdot)$ je grupa. △

Bez dokaza navodimo sledeće tvrđenje:

Teorema 3.1.3. *Ako je P_n skup svih permutacija od n elemenata i $\cdot$ množenje permutacija, tada je $(P_n, \cdot)$ grupa.*

Za grupu $(P_n, \cdot)$ kažemo da je grupa permutacija od n elemenata. Isto tako, kažemo da je grupa $(P_n, \cdot)$ simetrična grupa stepena n.

---

[10] Arthur Cayley (1821–1895), engleski matematičar.

Definicija 3.1.10. Za grupu $(G, *)$ kažemo da je *komutativna* ili *Abelova*[11)], ako operacija $*$ ima osobinu komutativnosti.

Ako skup G sadrži konačan broj elemenata, na primer n, za grupu $(G, *)$ kažemo da je konačnog reda n.

Primer 3.1.5. Neka je $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Uvedimo binarnu operaciju $\oplus$ tako da je

$$a \oplus b = c \quad \Leftrightarrow \quad a + b \equiv c \pmod 4.$$

Nije teško pokazati da je $(S, \oplus)$ komutativna grupa. $\triangle$

Napomena 3.1.4. Kada se radi o grupi $(G, *)$, u slučajevima kada je binarna operacija $*$ prepoznatljiva ili kada ne može da dođe do zabune o kojoj je binarnoj operaciji reč, umesto grupa $(G, *)$, govorićemo i pisaćemo samo grupa G.

Definicija 3.1.11. Neka su $(G_1, *)$ i $(G_2, \circ)$ grupe i neka je f preslikavanje skupa G_1 *u* skup G_2 takvo da je, za svako $a, b \in G_1$,

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b).$$

Za preslikavanje f kažemo da je *homomorfizam* grupe $(G_1, *)$ *u* grupu $(G_2, \circ)$. Ako je f preslikavanje *na*, za grupu $(G_2, \circ)$ kažemo da je *homomorfna slika* grupe $(G_1, *)$.

Primer 3.1.6. Ako je $\mathbb{Z}$ skup svih celih brojeva i $G = \{1, -1\}$, tada su $(\mathbb{Z}, +)$ i $(G, \cdot)$ grupe. Preslikavanje $f\colon \mathbb{Z} \to G$, dato sa

$$f(x) = \begin{cases} \ \ 1, & x = 2k \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ -1, & x = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

je homomorfizam grupe $(\mathbb{Z}, +)$ na grupu $(G, \cdot)$. $\triangle$

Definicija 3.1.12. Ako su $(G_1, *)$ i $(G_2, \circ)$ grupe istoga reda i ako je f biunivoko preslikavanje skupa G_1 na skup G_2 takvo da je, za svako $a, b \in G_1$,

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b),$$

kažemo da je preslikavanje f *izomorfizam grupe* $(G_1, *)$ na grupu $(G_2, \circ)$.

Primer 3.1.7. Funkcija $x \mapsto f(x) = \log x$ je jedan izomorfizam grupe $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ na grupu $(\mathbb{R}, +)$. $\triangle$

[11)] Niels Henrik Abel (1802–1829), norveški matematičar.

Teorema 3.1.4. *Ako je preslikavanje f izomorfizam grupe $(G_1, *)$ na grupu $(G_2, \circ)$, tada je inverzno preslikavanje f^{-1} izomorfizam grupe $(G_2, \circ)$ na grupu $(G_1, *)$.*

Dokaz. Neka su x i y bilo koji elementi iz G_2. Tada su $f^{-1}(x)$ i $f^{-1}(y)$ njima odgovarajući elementi iz G_1.

Kako je f izomorfizam grupe $(G_1, *)$ na grupu $(G_2, \circ)$, važi jednakost

$$f\left(f^{-1}(x) * f^{-1}(y)\right) = f\left(f^{-1}(x)\right) \circ f\left(f^{-1}(y)\right) = x \circ y,$$

odakle neposredno sleduje

$$f^{-1}(x \circ y) = f^{-1}\left(f(f^{-1}(x) * f^{-1}(y))\right) = f^{-1}(x) * f^{-1}(y).$$

Prema tome, preslikavanje f^{-1} je izomorfizam grupe $(G_2, \circ)$ na grupu $(G_1, *)$. $\square$

Dakle, ako postoji izomorfizam grupe $(G_1, *)$ na grupu $(G_2, \circ)$, postoji i izomorfizam grupe $(G_2, \circ)$ na grupu $(G_1, *)$. Zbog toga, za takve grupe kažemo da su izomorfne, tj. kažemo da je svaka od njih izomorfna onoj drugoj.

Primer 3.1.8. Neka su dati skupovi $S = \{0, 1, 2, 3\}$ i $Q = \{1, i, -1, -i\}$. U primeru 3.1.5 uvedena je operacija $\oplus$, za koju je $(S, \oplus)$ grupa. U skup Q uvedimo operaciju $\cdot$ na sledeći način:

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Nije teško proveriti da je $(Q, \cdot)$ grupa, čiji je neutralni element 1.

U skupu Q definišimo stepenovanje elementa a pomoću

$$a^0 = 1, \quad a^k = a \cdot a^{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Grupe $(S, \oplus)$ i $(Q, \cdot)$ su izomorfne jer je preslikavanje $f \colon S \to Q$, definisano pomoću $f(k) = i^k$, izomorfizam. $\triangle$

Definicija 3.1.13. Ako je preslikavanje f izomorfizam grupe $(G, *)$ na samu sebe, za preslikavanje f kažemo da je *automorfizam* grupe $(G, *)$.

Primer 3.1.9. Neka je $S = \{1, -1, i, -i\}$. Obostrano jednoznačno preslikavanje skupa S na skup S, definisano sa $x \mapsto f(x) = ix$ $(x \in S)$, je jedan izomorfizam grupe $(S, \cdot)$ na samu sebe.

To znači da je preslikavanje f jedan automorfizam grupe $(S, \cdot)$. $\triangle$

3.2. Podgrupe

Neka je $(G, *)$ grupa i neka je $H \subset G$. Pretpostavimo da za sve elemente skupa H važi

(i) ako su $x, y \in H$, tada je i $x * y \in H$,
(ii) ako je $x \in H$, tada je i $x^{-1} \in H$.

Ako u skup H uvedemo binarnu operaciju $\circ$ tako da je, za svako $x, y \in H$,

$$x \circ y = x * y,$$

nije teško pokazati da je $(H, \circ)$ grupa.

Naime,

1° Operacija $\circ$ je asocijativna, jer je za svako $x, y, z \in H$

$$x \circ (y \circ z) = x * (y * z) = (x * y) * z = (x \circ y) \circ z\,.$$

2° Ako je e jedinični element grupe G, on pripada i skupu H jer je, prema (ii), za svako $x \in H$

$$e = x * x^{-1} = x \circ x^{-1} \in H \qquad \text{i} \qquad e = x^{-1} * x = x^{-1} \circ x \in H.$$

Jedinični element $e \in G$ je, takođe, jedinični element i u $(H, \circ)$.

3° Podskup H je tako izabran da je, prema (ii), za svako $x \in H$ i $x^{-1} \in H$, tj. za svaki element x iz H postoji u H i u odnosu na operaciju $\circ$ njemu inverzni element x^{-1}.

Prema tome, $(H, \circ)$ je grupa.

Definicija 3.2.1. Za grupu $(H, \circ)$ kažemo da je *podgrupa* grupe $(G, *)$.

Bez bojazni da može doći do zabune, operaciju $\circ$ moguće je identifikovati kao operaciju $*$, pa ćemo, nadalje, umesto $(H, \circ)$ pisati $(H, *)$.

Primer 3.2.1. Grupa $\big(\{1, -1\}, \cdot\big)$ je podgrupa grupe $\big(\{1, -1, i, -i\}, \cdot\big)$. $\triangle$

Očigledno, $(\{e\}, *)$ i $(G, *)$ su podgrupe grupe $(G, *)$ za koje kažemo da su trivijalne.

Teorema 3.2.1. *Ako je $(G, *)$ grupa konačnog reda n i $(H, *)$ njena podgrupa reda m, broj n je deljiv brojem m.*

Dokaz. Neka je $H = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ i neka je a_1 neutralni element, tj. $e = a_1$.

Ako je $m = 1$ ili $m = n$, onda je H trivijalna podgrupa grupe G i, naravno, u oba slučaja tvrđenje teoreme je tačno.

Ako je $1 < m < n$, tada u skupu G postoji bar jedan element, na primer α_1, takav da $\alpha_1 \notin H$. Pokazaćemo da, u tom slučaju, u skupu $G \setminus H$ postoji bar m elemenata.

Označimo sa $\alpha_1 * H$ skup $\{\alpha_1 * a_1, \alpha_1 * a_2, \dots, \alpha_1 * a_m\}$, tj. neka je $\alpha_1 * H = \{\alpha_1 * a \mid a \in H\}$. Očigledno, skup $\alpha_1 * H$ je podskup skupa G.

Za $i \neq j$ elementi $\alpha_1 * a_i$ i $\alpha_1 * a_j$ su različiti elementi. Da bismo ovo dokazali, pretpostavimo suprotno, tj. da je $\alpha_1 * a_i = \alpha_1 * a_j$ za $i \neq j$. U tom slučaju važi

$$\alpha_1^{-1} * (\alpha_1 * a_i) = \alpha_1^{-1} * (\alpha_1 * a_j) \qquad (i \neq j),$$

odakle, zbog asocijativnosti operacije $*$ i postojanja neutralnog elementa, sleduje

$$(\alpha_1^{-1} * \alpha_1) * a_i = (\alpha_1^{-1} * \alpha_1) * a_j \qquad (i \neq j),$$

tj. $a_i = e * a_i = e * a_j = a_j$ za $i \neq j$, što je nemoguće.

Isto tako, nijedan od elemenata $\alpha_1 * a_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ ne pripada skupu H, jer ako bi bilo $\alpha_1 * a_i \in H$, značilo bi da je $\alpha_1 * a_i = a_j$, tj. važilo bi $\alpha_1 = a_j * {a_i}^{-1} \in H$, što je suprotno pretpostavci da $\alpha_1 \notin H$.

Prema tome, skup $\alpha_1 * H$ je skup od m različitih elemenata i nijedan od tih elemenata ne pripada skupu H. Znači, skup G, pored elemenata iz H, sadrži i elemente iz skupa $\alpha_1 * H$. Dakle, skup G ima najmanje $2m$ elemenata.

Ako je $n = 2m$, tvrđenje teoreme je tačno.

U slučaju $2m < n$, u skupu G postoji bar jedan element α_2, takav da $\alpha_2 \notin H \cup (\alpha_1 * H)$.

Neka je $\alpha_2 * H = \{\alpha_2 * a_1, \alpha_2 * a_2, \dots, \alpha_2 * a_m\}$. Kao i u sličaju elementa α_1, nijedan od elemenata $\alpha_2 * a_i$, gde je $i = 1, 2, \dots, m$, ne pripada skupu H i svi su oni među sobom različiti.

Međutim, nijedan od elemenata $\alpha_2 * a_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ ne pripada ni skupu $\alpha_1 * H$. Zaista, ako bi, za neko i i neko j, bilo $\alpha_2 * a_i = \alpha_1 * a_j$, onda bi to značilo da je

$$\alpha_2 = (\alpha_1 * a_j) * {a_i}^{-1} = \alpha_1 * (a_j * {a_i}^{-1}) \in \ \alpha_1 * H,$$

što je suprotno pretpostavci da α_2 ne pripada skupu $\alpha_1 * H$.

Prema tome, i skup $\alpha_2 * H$ je skup od m različitih elemenata, pri čemu ni jedan od njih ne pripada ni skupu H ni skupu $\alpha_1 * H$.

Skup G, prema tome, sadrži bar $3m$ elemenata.

Naravno, ako je $n = 3m$ tvrđenje teoreme je dokazano.

Ako to nije slučaj, produžujući ovaj postupak, zaključivaćemo da u skupu G uvek ima novih m elemenata. Međutim, kako je n konačan broj, mora postojati prirodan broj k, takav da je $n = km$, što, zapravo, znači da je broj n deljiv brojem m. $\square$

Teorema 3.2.1 je poznata kao *Lagrangeova*[12] *teorema.*

Napomena 3.2.1. Iz teoreme 3.2.1 neposredno sleduje da grupa prostog reda nema nijednu podgrupu koja nije trivijalna.

Neka je n red grupe G, gde je n složen broj, tj. neka je $n = km$ $(k, m \in \mathbb{N})$. Kao što smo videli, ako grupa G ima netrivijalne podgrupe, njihov red mora biti činilac broja n.

Međutim, važi i sledeće tvrđenje:

Teorema 3.2.2. *Neka je G konačna grupa reda n i neka je $m \in \mathbb{N}$ činilac broja n. Grupa G ne mora da sadrži podgrupu reda m.*

Dokaz. Dokaz teoreme ćemo sprovesti tako što ćemo naći jednu takvu grupu G, čiji je red složen broj.

Neka je $(P_4, \cdot)$ grupa permutacija od elemenata $1, 2, 3, 4$. Jedna njena podgrupa je $(G, \cdot)$, gde je

$$G = \{p_1, p_4, p_5, p_8, p_9, p_{12}, p_{13}, p_{16}, p_{17}, p_{20}, p_{21}, p_{24}\}$$

i

$$\begin{aligned}
p_1 &= \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,3\,4\,2 \end{pmatrix}, \quad p_5 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,4\,2\,3 \end{pmatrix}, \quad p_8 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}, \\
p_9 &= \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,1\,4 \end{pmatrix}, \; p_{12} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,4\,3\,1 \end{pmatrix}, \; p_{13} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,1\,2\,4 \end{pmatrix}, \; p_{16} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,2\,4\,1 \end{pmatrix}, \\
p_{17} &= \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix}, \; p_{20} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,1\,3\,2 \end{pmatrix}, \; p_{21} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,2\,1\,3 \end{pmatrix}, \; p_{24} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Naravno, $(G, \cdot)$ je grupa. Njen red je 12, dakle, složen broj. Među činiocima broja 12 je i broj 6.

[12] Joseph Louis Lagrange (1736–1813), francuski matematičar.

Međutim, grupa G nema nijednu podgrupu reda 6. $\square$

Napomena 3.2.2. Ovaj primer kojim je dokazano tvrđenje teoreme 3.2.2, objavljen je u knjizi: B. R. Gelbaum and J. M. H. Olmsted, *Theorems and Counterexamples in Mathematics*, Springer-Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 1990 (Primer 1.2.3.1, str. 3).

Napomena 3.2.3. Očigledno, netrivijalne podgrupe jedne grupe beskonačnog reda su, takođe, beskonačnog reda.

Napomena 3.2.4. Iz dokaza teoreme 3.2.1 sleduje da skupovi

$$H,\ \alpha_1 * H,\ \alpha_2 * H,\ \dots,\ \alpha_{m-1} * H$$

čine jednu particiju skupa G.

Definicija 3.2.2. Ako je $(H,*)$ podgrupa grupe $(G,*)$, skupovi

$$e * H,\ \alpha_1 * H,\ \alpha_2 * H, \dots, \alpha_{m-1} * H$$

predstavljaju levo, a skupovi

$$H * e,\ H * \alpha_1,\ H * \alpha_2, \dots, H * \alpha_{m-1}$$

desno razlaganje grupe G pomoću podgrupe H.

Definicija 3.2.3. Ako je $(H,*)$ podgrupa grupe $(G,*)$ i ako za svako $a \in G$ važi $a * H = H * a$, za podgrupu H kažemo da je *normalna* ili *invarijantna* podgrupa grupe G.

Prema tome, podgrupa H je normalna podgrupa grupe G ako se leva i desna razlaganja grupe G, pomoću podgrupe H, poklapaju.

Napomena 3.2.5. Očigledno, trivijalne podgrupe grupe G su njene normalne podgrupe. Zovemo ih trivijalne normalne podgrupe.

Napomena 3.2.6. Za grupu koja, sem trivijalnih normalnih podgrupa, nema drugih normalnih podgrupa kažemo da je *prosta* grupa.

Napomena 3.2.7. Sve podgrupe Abelove grupe su njene normalne podgrupe.

Neka je $(G,*)$ grupa i neka je $a \in G$. Ako sa a^2 označimo proizvod $a * a$, očigledno je i $a^2 \in G$, ali i $a^3, a^4, \dots \in G$.

Definicija 3.2.4. Neka je $(G,*)$ grupa reda n i neka je $a \in G$. Ako je broj k $(0 < k < n)$ najmanji prirodan broj za koji je $a^k = e$, kažemo da je k red elementa a.

U slučaju $k = n$, za element a kažemo da je *generatorni* element grupe G ili da generiše grupu G ili da je proizvodi.

Naravno, ako je $k < n$, element a iz G je generatorni element podgrupe grupe G. Red te podgrupe je k. Za $k = 1$ i $k = n$ dobijaju se trivijalne podgrupe.

Očigledno, broj k je činilac broja n.

Definicija 3.2.5. Za grupu koja ima generatorni element kažemo da je *ciklična* grupa.

Važe sledeća tvrđenja koja navodimo bez dokaza:

Teorema 3.2.3. *Svaka prosta Abelova grupa je ciklična grupa.*

Teorema 3.2.4. *Svaka ciklična grupa prostog reda je Abelova grupa.*

Teorema 3.2.5. *Svaka konačna grupa je izomorfna nekoj grupi permutacija, tj. jednoj podgrupi neke simetrične grupe.*

Teorema 3.2.5 poznata je kao *Cayleyeva teorema.*

3.3. Algebarske strukture sa dve operacije

Neka je S neprazan skup i neka su u njemu definisane dve binarne operacije $*$ i $\circ$. Samim tim, $(S,*)$ i $(S,\circ)$ su izvesne algebarske strukture. Međutim, moguće je posmatrati novu strukturu koju čini skup S snabdeven obema operacijama.

Pre nego što izučimo neke od ovih struktura, definisaćemo osobinu distributivnost jedne operacije u odnosu na drugu operaciju.

Definicija 3.3.1. Kažemo da je binarna operacija $*$ *distributivna* u odnosu na binarnu operaciju $\circ$ ako za svako $a,b,c \in S$ važe jednakosti

$$a*(b\circ c)=(a*b)\circ(a*c), \qquad (a\circ b)*c=(a*c)\circ(b*c).$$

Naravno, ako za svako $a,b,c \in S$ važe jednakosti

$$a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c), \qquad (a*b)\circ c=(a\circ c)*(b\circ c),$$

kažemo da je binarna operacija $\circ$ distributivna u odnosu na operaciju $*$.

Primer 3.3.1. Množenje realnih brojeva je distributivna operacija u odnosu na sabiranje realnih brojeva. Obrnuto, sabiranje nije distributivna operacija u odnosu na množenje realnih brojeva. $\triangle$

Definicija 3.3.2. Neka su u skupu S definisane dve binarne operacije $*$ i $\circ$. Ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1° $(S,*)$ je komutativna grupa;

2° Operacija $\circ$ je asocijativna;

3° Operacija $\circ$ je distributivna u odnosu na operaciju $*$, kažemo da skup S čini *prsten* u odnosu na operacije $*$ i $\circ$, označavajući ga sa $(S, *, \circ)$.

Primer 3.3.2. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je prsten. Zaista, ovde je $(\mathbb{Z}, +)$ Abelova grupa, operacija $\cdot$ je asocijativna i, najzad, operacija $\cdot$ je distributivna u odnosu na operaciju sabiranja $+$. $\triangle$

Posmatrajmo, sada, prsten $(S, *, \circ)$. Kako je $(S, *)$ grupa, u odnosu na operaciju $*$ u skupu S postoji neutralni element e za operaciju $*$.

Definicija 3.3.3. Ako je $(S \setminus \{e\}, \circ)$ grupa, za prsten $(S, *, \circ)$ kažemo da je *telo*.

Definicija 3.3.4. Ako je $(S \setminus \{e\}, \circ)$ Abelova grupa, za prsten $(S, *, \circ)$ kažemo da je *polje*.

Primer 3.3.3. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je polje. $\triangle$

Definicija 3.3.5. Ako skupovi S_1 i S_2 imaju istu moć, ako $(S_1, +, \cdot\,)$ i $(S_2, \oplus, \odot)$ imaju strukturu polja i ako je f obostrano jednoznačno preslikavanje skupa S_1 na skup S_2, za koje je

$$f(a+b) = f(a) \oplus f(b) \qquad \text{i} \qquad f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b) \qquad (a, b \in S_1),$$

kažemo da je f *izomorfizam polja* $(S_1, +, \cdot\,)$ na polje $(S_2, \oplus, \odot)$.

Definicija 3.3.6. Ako je preslikavanje f izomorfizam polja $(S, *, \circ)$ na polje $(S, *, \circ)$, za preslikavanje f kažemo da je *automorfizam polja* $(S, *, \circ)$.

3.4. Polje realnih brojeva

Iako se može smatrati da nam je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ dovoljno poznat, zbog izuzetnog značaja koji ovaj skup ima u matematičkoj analizi, u ovom odeljku ukazaćemo na njegove osnovne osobine.

Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ snabdeven je binarnim operacijama: *sabiranjem*, u oznaci $+$, i operacijom $\cdot$ koju zovemo *množenje*, kao i binarnom relacijom *manje ili jednako*, u oznaci $\leq$, na sledeći način:

Definicija 3.4.1. Za svako $x, y, z \in \mathbb{R}$ važi:

(A1) $(x+y)+z = x+(y+z)$,

(A2) $(\exists 0 \in \mathbb{R})\ (\forall x)\ \ x+0 = 0+x = x$,

(A3) $(\forall x)\ (\exists (-x) \in \mathbb{R})\ \ x+(-x) = (-x)+x = 0$, (A4) $x + y = y + x$;

(B1) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

(B2) $(\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\ (\forall x)\ \ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$,

(B3) $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\ (\exists x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$,

(B4) $x \cdot y = y \cdot x$;

(C1) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;

(D1) $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \ \Rightarrow\ x \leq z$,

(D2) $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \ \Rightarrow\ x = y$,

(D3) $(x \leq y) \vee (y \leq x)$,

(D4) $(x \leq y) \ \Rightarrow\ (x + z \leq y + z)$,

(D5) $(0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \ \Rightarrow\ (0 \leq x \cdot y)$.

Na osnovu aksioma (A1) – (A4) zaključujemo da važi:

Teorema 3.4.1. $(\mathbb{R}, +)$ *je komutativna grupa.*

Na osnovu aksioma (B1) – (B4) iz definicije 3.4.1 važi sledeći rezultat:

Teorema 3.4.2. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ *je komutativna grupa.*

Na osnovu algebarskih osobina iskazanih u prethodnim teoremama i aksiome (C1) može se zaključiti da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 3.4.3. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *je polje.*

Definicijom 3.4.1 uvedena je i relacija totalnog uređenja $\leq$ aksiomama (D1) – (D5). Za takvo polje, u oznaci $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, kažemo da je *uređeno polje*.

Najzad, napomenimo da je za uvođenje osnovnih pojmova analize neophodno dodefinisati uređeno polje $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sledećom *aksiomom supremuma*:

(E1) Svaki skup $A \subset \mathbb{R}$ koji ima majorantu ima supremum u $\mathbb{R}$.

Često se, međutim, ova aksioma zamenjuje njoj ekvivalentnom, tzv. *aksiomom neprekidnosti*:

(E1′) Ako su $A, B \subset \mathbb{R}$ takvi da je $x \leq y$ za svako $x \in A$ i svako $y \in B$, tada postoji $z \in \mathbb{R}$ takvo da je $x \leq z \leq y$ $(x \in A,\ y \in B)$.

U tom slučaju, može se dokazati da važi iskaz, dat aksiomom supremuma, koji se tada naziva *teorema supremuma*.

U našim daljim razmatranjima, posebno kada se radi o graničnim vrednostima, neprekidnosti i slično, pod poljem realnih brojeva podrazumevaćemo uređeno polje $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, uz prisustvo jedne od pomenutih aksioma. Kada ne postoji mogućnost zabune, to polje označavaćemo jednostavno sa $\mathbb{R}$, dok ćemo za elemente skupa $\mathbb{R}$ reći da su realni brojevi.

Uobičajeno je da se u skup $\mathbb{R}$ uvode još dve operacije: oduzimanje i deljenje realnih brojeva.

Neka je $-y$ simetrični element za y u odnosu na operaciju sabiranje realnih brojeva. Tada se oduzimanje definiše kao $x-y = x+(-y)$. Broj $x-y$ naziva se razlika brojeva x i y.

Slično, ako je y^{-1} simetrični element za $y\,(\neq 0)$ u odnosu na množenje realnih brojeva, deljenje se definiše kao $x/y = x \cdot y^{-1}$. Broj x/y naziva se količnik brojeva x i y. Umesto oznake x/y koriste se i oznake $\dfrac{x}{y}$ i $x : y$. Zato, umesto y^{-1} često pišemo $1/y$. Takođe, proizvod $x \cdot y$ označavamo jednostavno xy, izostavljajući oznaku operacije.

U skup $\mathbb{R}$ moguće je uvesti i operaciju *stepenovanje* realnog broja celim brojem, kao preslikavanje skupa $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ u skup $\mathbb{R}$. Naime, uređenom paru $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ možemo pridružiti realan broj $y = x^n$, pri čemu je

$$x^0 = 1, \quad x^n = x \cdot x^{n-1} \quad (n \geq 1), \quad x^n = (1/x)^{-n} \quad (n < 0;\, x \neq 0).$$

Za svaki realan broj $x \in \mathbb{R}$ može se definisati *apsolutna vrednost* broja x, u oznaci $|x|$, pomoću

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x, & \text{za } x \geq 0, \\ -x, & \text{za } x < 0. \end{cases}$$

Očigledno, za svako $x, a \in \mathbb{R}$ i svako $\varepsilon > 0$ važi:

$$\begin{aligned} |x-a| \leq \varepsilon \quad &\Longleftrightarrow \quad a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon, \\ |x-a| < \varepsilon \quad &\Longleftrightarrow \quad a-\varepsilon < x < a+\varepsilon. \end{aligned}$$

Teorema 3.4.4. *Za svako $x, y \in \mathbb{R}$ važi:*

$$\begin{aligned} &|x| \geq 0, \quad |x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0; \\ &|x+y| \leq |x| + |y|, \quad \big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x-y|; \\ &|xy| = |x| \cdot |y|, \quad |x/y| = |x|/|y| \quad (y \neq 0). \end{aligned}$$

Napomenimo, dalje, da skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ čine: skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ i skup iracionalnih brojeva $\mathbb{I}$. Važi, naime, jednakost $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Kako su $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{I}$ disjunktni skupovi, oni čine jednu particiju skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Naravno, postoje i druge particije skupa $\mathbb{R}$. Na primer, skup svih algebarskih brojeva i skup svih transcendentnih, tj. nealgebarskih brojeva. Za realan broj x kaže se da je algebarski ako postoji algebarska jednačina

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (a_k \in \mathbb{Z},\ k = 0, 1, \ldots, n),$$

čije je rešenje broj x.

Primer 3.4.1. Iracionalan broj $\sqrt{2}$ je algebarski broj. Na primer, $\sqrt{2}$ je jedno rešenje jednačine $x^2 - 2 = 0$. $\triangle$

Napomena 3.4.1. Prvi dokaz da je broj

$$\pi = 3.14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288\,\ldots$$

iracionalan dobio je Lambert[13] 1766. godine. Međutim, njegov dokaz nije bio sasvim korektan. Stotinak godina kasnije Legendre[14] je ispravio tu nekorektnost. Međutim, transcendentnost broja π utvrdio je Lindemann[15] 1882. godine korišćenjem jednog metoda Hermitea[16], koji je devet godina ranije dokazao da je osnova prirodnih logaritama

$$e = 2.71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\,66249\,\ldots,$$

takođe, transcendentan broj.

Činjenicom da je π transcendentan broj definitivno je dokazana nemogućnost kvadrature kruga. Problem da se samo pomoću lenjira i šestara konstruiše kvadrat čija će površina biti jednaka površini datog kruga, poznat kao problem kvadrature kruga, vekovima je zaokupljao generacije i generacije matematičara. Na primer, kada je poluprečnik kruga jednak jedinici, odgovarajuća stranica kvadrata je

$$a = \sqrt{\pi} = 1.77245\,38509\,05516\,02729\,81674\,83341\,14518\,\ldots\,.$$

Napomenimo da se pomoću lenjira i šestara mogu konstruisati samo duži čije su dužine izražene brojevima iz nekog skupa algebarskih brojeva.

13) Jochan Henrich Lambert (1728–1777), nemački matematičar, fizičar i astronom.
14) Adrien Marie Legendre (1752–1833), francuski matematičar.
15) Carl Luis Ferdinand Lindemann (1852–1939), nemački matematičar.
16) Charles Hermite (1822–1901), veliki francuski matematičar.

Napomena 3.4.2. U časopisu *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, **45**(1913/14), str. 350, Ramanujan[17)] je postavio hipotezu da je $e^{\pi\sqrt{163}}$ ceo broj, pri čemu je, radeći „ručno“, našao da je

$$e^{\pi\sqrt{163}} \approx 262\,53741\,26407\,68743\,.\,99999\,99999\,99.$$

Kako njegov metod nije omogućavao dobijanje sledeće decimale, on je pretpostavio da se cifra 9 stalno ponavlja, i da je onda $e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,53741\,26407\,68744$.

Danas, međutim, postoji veći broj programskih sistema koji mogu da koriste aritmetiku takoreći prozvoljne preciznosti[18)]. Korišćenjem poznatog programskog sistema MATHEMATICA dobijamo

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,53741\,26407\,68743\,.\,99999\,99999\,99250\,07259\,71981\,85688\,87935\,\ldots\,,$$

što ukazuje da je hipoteza Ramanujana bila pogrešna.

Kako je skup racionalnih brojeva prebrojiv (videti primer 1.5.6), a skup $\mathbb{R}$ ima moć kontinuuma (videti primer 1.5.8), zaključujemo da je skup svih iracionalnih brojeva neprebrojiv skup. Moguće je, takođe, pokazati da je skup svih algebarskih brojeva prebrojiv, a da skup svih transcendentnih brojeva ima moć kontinuuma.

Radi jednostavnijih formulacija mnogih rezultata u analizi, pogodno je proširiti skup $\mathbb{R}$ simbolima $-\infty$ i $+\infty$. U tom slučaju se operacije sabiranje i množenje, kao i uređenje, kada u njima učestvuju simboli $-\infty$ i $+\infty$, moraju posebno definisati:

Definicija 3.4.2. Ako $x \in \mathbb{R}$, tada je

$$\begin{array}{rll}
(+\infty) + (+\infty) = +\infty, & (-\infty) + (-\infty) = -\infty, & \\
(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, & (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, & \\
(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, & (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty, & \\
x + (+\infty) = +\infty, & x + (-\infty) = -\infty, & \\
x \cdot (+\infty) = +\infty, & x \cdot (-\infty) = -\infty & (x > 0), \\
x \cdot (+\infty) = -\infty, & x \cdot (-\infty) = +\infty & (x < 0).
\end{array}$$

Uređenje $\leq$ se proširuje stavljajući da je $-\infty < x < +\infty$ za svako $x \in \mathbb{R}$.

---

17) Srinivasa Ramanujan (1887–1920), indijski matematičar.

18) Jedino ograničenje je memorija računara.

Za skup $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ kaže se da predstavlja prošireni skup realnih brojeva.

Na kraju ovog odeljka, napomenimo da je $\inf \mathbb{R} = -\infty$ i $\sup \mathbb{R} = +\infty$ (videti odeljak 1.3).

Napomena 3.4.3. Izrazi

$$\frac{\infty}{\infty}, \qquad \infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \frac{0}{0}$$

nemaju smisla u skupu $\overline{\mathbb{R}}$.

3.5. Polje kompleksnih brojeva

Posmatrajmo sada skup uređenih parova realnih brojeva

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Uvedimo u $\mathbb{R}^2$ dve operacije: sabiranje uređenih parova, u oznaci $+$, i množenje uređenih parova, označeno sa $\cdot$.

Definicija 3.5.1. Zbir dva uređena para (x_1, y_1) i (x_2, y_2) iz $\mathbb{R}^2$ određen je sa

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Definicija 3.5.2. Proizvod dva uređena para (x_1, y_1) i (x_2, y_2) iz $\mathbb{R}^2$ određen je sa

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Iz definicije 3.5.1 neposredno sleduje:

1° Operacija sabiranje uređenih parova je komutativna operacija jer za bilo koja dva uređena para (x_1, y_1) i (x_2, y_2) iz $\mathbb{R}^2$ je

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1)\\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1).\end{aligned}$$

2° Operacija sabiranje uređenih parova je asocijativna operacija jer za bilo koja tri para $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ iz $\mathbb{R}^2$ je

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + \big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\big) &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)\\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)\\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)\\ &= \big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) + (x_3, y_3).\end{aligned}$$

3° Za operaciju sabiranje uređenih parova postoji u $\mathbb{R}^2$ neutralni element. To je par $(0,0)$ jer za svaki uređeni par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ je

$$(x,y)+(0,0)=(x,y).$$

Napomenimo da zbog komutativnosti operacije + nije potrebno proveravati jednakost $(0,0)+(x,y)=(x,y)$.

Uređeni par $(0,0)$ je jedinstveni neutralni element (videti teoremu 3.1.1).

4° Za svaki par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, u odnosu na operaciju sabiranje uređenih parova, postoji jedan jedini par $(-x,-y) \in \mathbb{R}^2$, takav da je

$$(x,y)+(-x,-y)=(0,0).$$

Prema tome, važi sledeće tvrđenje:

Teorema 3.5.1. $(\mathbb{R}^2,+)$ *je komutativna grupa.*

Isto tako, iz definicije 3.5.2 za proizvoljne uređene parove važi:

1° Operacija množenje uređenih parova je komutativna operacija jer je

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) &= (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2)\\ &= (x_2x_1-y_2y_1, x_2y_1+y_2x_1)\\ &= (x_2,y_2)\cdot(x_1,y_1).\end{aligned}$$

2° Operacija množenje uređenih parova je asocijativna operacija jer je

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)\cdot&\big((x_2,y_2)\cdot(x_3,y_3)\big)\\ &= (x_1,y_1)\cdot(x_2x_3-y_2y_3, x_2y_3+x_3y_2)\\ &= \big(x_1(x_2x_3-y_2y_3)-y_1(x_2y_3+y_2x_3),\\ &\qquad\qquad x_1(x_2y_3+y_2x_3)+y_1(x_2x_3-y_2y_3)\big)\\ &= \big((x_1x_2-y_1y_2)x_3-(x_1y_2+y_1x_2)y_3,\\ &\qquad\qquad (x_1y_2+y_1x_2)x_3+(x_1x_2-y_1y_2)y_3\big)\\ &= (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2)\cdot(x_3,y_3)\\ &= \big((x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)\big)\cdot(x_3,y_3).\end{aligned}$$

3° Za komutativnu operaciju množenje uređenih parova postoji neutralni element. To je uređeni par $(1,0)$ jer je za svaki par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x,y)\cdot(1,0)=(x,y).$$

Uređeni par $(1,0)$ je jedinstveni neutralni element.

4° Za svaki uređeni par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, sem za par $(0,0)$, u odnosu na komutativnu operaciju množenje uređenih parova, postoji jedan i samo jedan inverzni uređeni par

$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right) \in \mathbb{R}^2,$$

takav da je

$$(x,y) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right) = (1,0).$$

Prema tome, važi sledeće tvrđenje:

Teorema 3.5.2. *Struktura* $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$ *je komutativna grupa.*

Na osnovu definicija 3.5.1 i 3.5.2 možemo dokazati da je operacija množenje uređenih parova distributivna prema operaciji sabiranje uređenih parova. Zaista, imamo

$$\begin{aligned}
(x_1,&y_1) \cdot \big((x_2,y_2) + (x_3,y_3)\big)\\
&= (x_1,y_1) \cdot (x_2+x_3, y_2+y_3)\\
&= \big(x_1(x_2+x_3) - y_1(y_2+y_3), x_1(y_2+y_3) + y_1(x_2+x_3)\big)\\
&= \big((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3), (x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1y_3 + y_1x_3)\big)\\
&= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3)\\
&= (x_1,y_1) \cdot (x_2,y_2) + (x_1,y_1) \cdot (x_3,y_3).
\end{aligned}$$

Na osnovu dokazanih teorema 3.5.1 i 3.5.2 i distributivnosti množenja prema sabiranju, zaključujemo da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 3.5.3. *Struktura* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *je polje.*

Izučićemo ovo polje predstavljajući njegove elemente, tj. uređene parove (x,y), na način koji je pogodniji za rad sa njima. Naime, svaki se uređeni par (x,y), u skladu sa operacijom sabiranje uređenih parova, može napisati na sledeći način

$$(x,y) = (x,0) + (0,y).$$

Međutim, kako je, za svako $y \in \mathbb{R}$,

$$(0,y) = (0,1) \cdot (y,0),$$

možemo pisati

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0),$$

tj.

$$(x, y) = (x, 0) + i(y, 0),$$

gde smo uveli oznaku $(0, 1) = i$ i izostavili znak za operaciju množenje uređenih parova.

Interesantno je da je $(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$.

Posmatrajmo sada skup uređenih parova oblika $(x, 0)$, tj. skup

$$\mathbb{R}_0^2 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Očigledno, $\mathbb{R}_0^2$ je podskup skupa $\mathbb{R}^2$.

Nije teško proveriti da $(\mathbb{R}_0^2, +, \cdot)$, takođe, ima strukturu polja. Naglasimo da je ovo polje izomorfno polju realnih brojeva $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Naime, preslikavanje $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^2$, definisano sa $x \mapsto f(x) = (x, 0)$ je izomorfizam polja $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ na polje $(\mathbb{R}_0^2, +, \cdot)$. Zaista, f je bijekcija i, za svako $x, y \in \mathbb{R}$, imamo

$$f(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = f(x) + f(y)$$

i

$$f(x \cdot y) = (x \cdot y, 0) = (x, 0) \cdot (y, 0) = f(x) \cdot f(y).$$

Stoga ćemo, imajući u vidu pomenuti izomorfizam, svesno praviti grešku pišući umesto $(x, 0)$ samo x. To, zapravo, znači da ćemo poistovećivati uređeni par $(x, 0)$ i realan broj x.

Naravno, tada možemo pisati

$$(x, y) = (x, 0) + i(y, 0) = x + iy.$$

Navedena nekorektnost u pisanju omogućiće nam da operacije sa uređenim parovima obavljamo jednostavnije, a da, pri tome, formalno nekorektno pisanje ne može dovesti do pogrešnog zaključka.

Dakle, svaki uređeni par (x, y) je moguće predstaviti brojevima x i y i korišćenjem oznake i za uređeni par $(0, 1)$.

Bilo bi zgodno da onda i uređeni par (x, y) smatramo brojem. U tu svrhu uvedimo oznaku $z = (x, y)$. Umesto uređenog para (x, y) posmatraćemo z, kao broj, i zvaćemo ga *kompleksan broj*. Tada i oznaka i nije više samo oznaka, već kompleksan broj kojim smo označili uređeni par $(0, 1)$. Taj broj nazivamo *imaginarna jedinica*. Uređeni par $(1, 0)$ zovemo *realna jedinica* i, saglasno izomorfizmu, označavamo sa 1. Takođe, par $(0, 0)$ nazivamo *nula* i označavamo sa 0.

Napomena 3.5.1. Sada se za kompleksan broj i može reći da je to broj čiji je kvadrat jednak -1. Dakle, $i^2 = -1$.

Naravno, među realnim brojevima nema takvog broja.

Napomena 3.5.2. Nije teško proveriti da je $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, pa zbog $i^2 = -1$, zaključujemo da, za $k \in \mathbb{N}$, važi

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Kako je $(\alpha, 0) \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, proizvod $(\alpha, 0)z$, u stvari, znači $\alpha z = \alpha x + i\alpha y$.

Neka je $\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ skup svih kompleksnih brojeva.

Očigledno je da operacije u polju $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ induciraju odgovarajuće operacije u $\mathbb{C}$. Naime, za proizvoljna dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ imamo

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

i

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Može se lako pokazati da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 3.5.4. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *je polje.*

To ćemo polje označavati sa $\mathbb{C}$, a zvaćemo ga polje kompleksnih brojeva.

Napomena 3.5.3. Polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ je potpolje polja kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

Videli smo, dakle, da se kompleksan broj z, određen uređenim parom (x, y), može predstaviti u obliku

$$z = x + iy \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Za ovaj oblik kažemo da je *algebarski oblik* kompleksnog broja z. Realni broj x zovemo realni deo kompleksnog broja z, u oznaci $\operatorname{Re} z$, a realni broj y zovemo imaginarni deo kompleksnog broja z i označavamo ga sa $\operatorname{Im} z$.

Dakle,

$$z = x + iy = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.$$

Sabiranja i množenja kompleksnih brojeva, napisanih u algebarskom obliku, izvode se kao sa binomima. Pri tome, kod množenja uvek treba voditi računa da je $i^2 = -1$.

Primer 3.5.1. Ako je $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -1 + i$, važe jednakosti

$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (-1 + i) = (2 - 1) + i(-3 + 1) = 1 - 2i,$$

$$z_1 z_2 = (2 - 3i)(-1 + i) = -2 + 2i + 3i - 3i^2 = -2 + 3 + 2i + 3i = 1 + 5i. \quad \triangle$$

Za broj $-z = -x - iy$ kažemo da je suprotni broj broju $z = x + iy$, a za broj

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

da je recipročan broju $z = x + iy \neq 0$.

Imajući u vidu sabiranje i množenje kompleksnih brojeva, moguće je, kao i kod realnih brojeva, uvesti operacije: oduzimanje i deljenje kompleksnih brojeva. Tako, za kompleksne brojeve $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ imamo

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

i

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \, \frac{-x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Ako je z kompleksan broj koji odgovara uređenom paru (x, y), tada kompleksan broj koji odgovara uređenom paru $(x, -y)$ zovemo konjugovano–kompleksan broj kompleksnom broju z i označavamo ga sa $\overline{z}$. Prema tome, ako je $z = x + iy$, tada je $\overline{z} = x - iy$. Naravno, važi $\overline{\overline{z}} = z$. Isto tako je

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

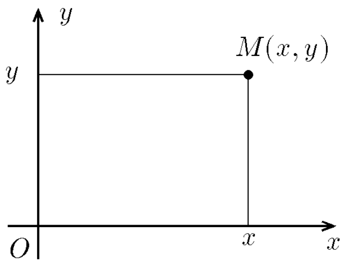
Nije teško proveriti sledeće tvrđenje:

Teorema 3.5.5. *Važe jednakosti*

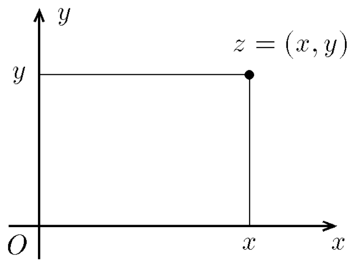
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2,$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2, \qquad \overline{z_1 / z_2} = \overline{z}_1 / \overline{z}_2 \quad (z_2 \neq 0).$$

Naravno, matematičkom indukcijom je moguće dokazati opštije tvrđenje:



Sl. 3.5.1



Sl. 3.5.2

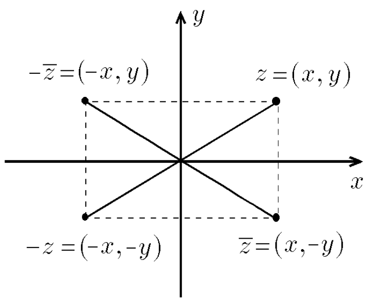
Teorema 3.5.6. *Važe jednakosti*

$$\overline{\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\Big)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k \qquad i \qquad \overline{\Big(\prod_{k=1}^{n} z_k\Big)} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z}_k \ .$$

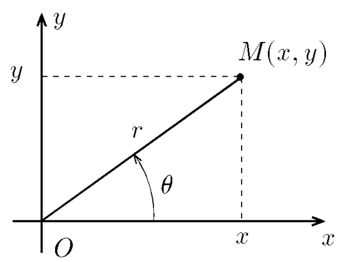
Kako je između skupa $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i tačaka jedne ravni, uvođenjem koordinatnog sistema, moguće uspostaviti obostrano jednoznačnu korespondenciju, to je moguće uspostaviti korespondenciju i između skupa svih kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ i skupa svih tačaka jedne ravni. Prema tome, svaki kompleksan broj z je moguće identifikovati sa jednom jedinom tačkom M u ravni (slike 3.5.1 i 3.5.2). Tu ravan zovemo *kompleksna ravan* ili *z-ravan*, x-osu zovemo *realna osa*, a y-osu *imaginarna osa*.

U slobodnijem izražavanju, za tačku M kompleksne ravni koja odgovara kompleksnom broju z govorićemo da je kompleksan broj z.

Definicija 3.5.3. Broj $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ zovemo *modul* ili *moduo* kompleksnog broja z.



Sl. 3.5.3



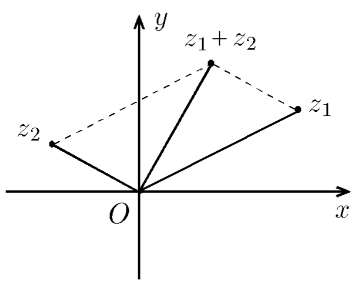
Sl. 3.5.4

Očigledno je $|\overline{z}| = |z|$, kao i $z\overline{z} = |z|^2$. Takođe, važe i nejednakosti:

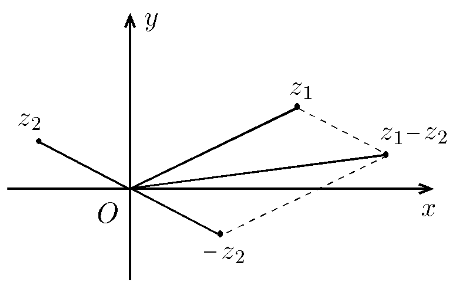
$$\operatorname{Re} z \leq |z| \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Im} z \leq |z|.$$

Na slici 3.5.3 predstavljeni su kompleksni brojevi z, $\overline{z}$, $-z$ i $-\overline{z}$. Svi ovi brojevi imaju isti moduo. Dužina $r = \overline{OM}$ na slici 3.5.4 predstavlja moduo kompleksnog broja z. Za duž OM često kažemo da je poteg tačke M.

Geometrijske interpretacije sabiranja i oduzimanja dva kompleksna broja date su na slikama 3.5.5 i 3.5.6, respektivno.



Sl. 3.5.5



Sl. 3.5.6

Teorema 3.5.7. *Ako su z_1 i z_2 kompleksni brojevi, tada je*

1° $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,;$

2° $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|\,;$

3° $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|\,.$

Dokaz. Kako je

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2)\\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)\end{aligned}$$

i $\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) \leq |z_1\overline{z}_2| = |z_1||\overline{z}_2| = |z_1||z_2|$, zaključujemo da je

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2,$$

odakle sleduje nejednakost 1°.

Stavljajući $w_1 = z_1 - z_2$ i $w_2 = z_2$, nejednakost $|w_1 + w_2| \leq |w_1| + |w_2|$ se svodi na $|z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$, tj.

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|.$$

Kako su z_1 i z_2 proizvoljni kompleksni brojevi, zaključujemo da važi i nejednakost

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|.$$

Poslednje dve nejednakosti daju

$$-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|,$$

tj. nejednakost 2°.

Najzad, za dokaz jednakosti 3° dovoljno je primetiti da je

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\overline{z}_1 \overline{z}_2) = (z_1 \overline{z}_1)(z_2 \overline{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2. \quad \square$$

Napomena 3.5.4. Stavljajući $-z_2$, umesto z_2, nejednakosti 1° i 2° svode se na

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad \text{i} \qquad \big| |z_1| - |z_2| \big| \leq |z_1 + z_2|.$$

Napomena 3.5.5. Odgovarajućom geometrijskom interpretacijom, možemo videti da su nejednakosti 1° i 2° u prethodnoj teoremi, u stvari, poznate nejednakosti za trougao.

Matematičkom indukcijom lako se dokazuju generalizacije nejednakosti 1° i 3° za slučaj n kompleksnih brojeva:

Teorema 3.5.8. *Ako su z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ kompleksni brojevi, tada je*

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} z_k \Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k| \qquad i \qquad \Big| \prod_{k=1}^{n} z_k \Big| = \prod_{k=1}^{n} |z_k| \,.$$

Ugao θ koji zaklapa poteg OM sa pozitivnim delom realne ose Ox zovemo *argument* kompleksnog broja z (videti sliku 3.5.4).

Očigledno važe jednakosti

$$x = |z| \cos\theta \qquad \text{i} \qquad y = |z| \sin\theta,$$

ali i jednakost

$$\frac{y}{x} = \tan\theta. \tag{3.5.1}$$

Zbog periodičnosti funkcija $\theta \mapsto \cos\theta$ i $\theta \mapsto \sin\theta$, važe i jednakosti

$$x = |z| \cos(\theta + 2k\pi) \qquad \text{i} \qquad y = |z| \sin(\theta + 2k\pi) \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

pa se kao argument kompleksnog broja z može uzeti bilo koja vrednost $\theta + 2k\pi$, koju ćemo označavati sa $\operatorname{Arg} z$.

Za vrednost argumenta kompleksnog broja z, za koji je

$$-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi, \tag{3.5.2}$$

kažemo da je *glavna vrednost* argumenta kompleksnog broja z i označavamo je sa $\arg z$. Tako imamo

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Prirodno je da se glavna vrednost argumenta kompleksnog broja z određuje iz jednakosti (3.5.1). Naime, iz (3.5.1) sleduje

$$\arg z = \theta = \arctan \frac{y}{x} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ovde k treba izabrati tako da $\arctan(y/x) + k\pi$ zadovoljava uslov (3.5.2).

Naravno, određivanje glavne vrednosti uslovljeno je položajem tačke z u kompleksnoj ravni, što, zapravo, znači vrednostima realnih brojeva x i y. U stvari, može se zaključiti da je

$$\theta = \arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & (x > 0), \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi & (x < 0,\ y > 0), \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi & (x < 0,\ y < 0), \\ \pi/2 & (x = 0,\ y > 0), \\ -\pi/2 & (x = 0,\ y < 0), \\ \pi & (x < 0,\ y = 0). \end{cases}$$

Primer 3.5.2. Za kompleksne brojeve

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_3 = -1 - i, \quad z_4 = 1 - i\sqrt{3},$$

imamo

$$\arg z_1 = \pi/4, \quad \arg z_2 = 2\pi/3, \quad \arg z_3 = -3\pi/4, \quad \arg z_4 = -\pi/3. \quad \triangle$$

Očigledno, za kompleksan broj $z = 0$ važi $|z| = 0$. Međutim, njegov argument je neodrediv. Ta činjenica nam ne smeta da sa kompleksnim brojem

$z = 0$ operišemo kao sa bilo kojim drugim kompleksnim brojem. Naravno, tek pri pokušaju da se za kompleksne brojeve $z = a$ $(\neq 0)$ i $z = 0$ odredi količnik $a/0$, nailazimo na određene teškoće. Naime, nije teško zaključiti da je moduo tog količnika neograničen broj, ali određivanje njegovog argumenta je nemoguće. Količnik $a/0$, tj. kompleksan broj $z = a/0$, obeležavaćemo sa ∞. Pisaćemo, dakle, $z = \infty$. Pravo razumevanje broja $z = \infty$ moguće je tek sa definisanjem tzv. *stereografskog preslikavanja*[19)] z-ravni na *Riemannovu*[20)] *sferu.*

Sada uvodimo neke operacije sa kompleksnim brojem $z = \infty$.

Definicija 3.5.4. Za kompleksne brojeve $z = a$ $(\neq 0, \infty)$ i $z = \infty$ važe sledeće jednakosti:

$$\infty \pm a = a \pm \infty = \infty, \qquad \infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty, \qquad \infty \cdot \infty = \infty,$$
$$\frac{a}{\infty} = 0, \qquad \frac{\infty}{a} = \infty, \qquad \frac{a}{0} = \infty.$$

Izrazi

$$\infty \pm \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

nemaju smisla u polju kompleksnih brojeva.

Kompleksna ravan koja sadrži i tačku $z = \infty$ zove se proširena kompleksna ravan.

Na osnovu prethodnog razmatranja, za kompleksan broj z čiji je moduo $|z| = r$ i čiji je argument $\arg z = \theta$, može se pisati

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Ovo je tzv. *trigonometrijski oblik* kompleksnog broja z.

Takođe, u upotrebi je i *eksponencijalni* ili *Eulerov*[21)] *oblik* kompleksnog broja z

$$z = re^{i\theta},$$

gde je e osnova prirodnih logaritama. Pravo objašnjenje ovog oblika kompleksnog broja zahteva znanje iz kompleksnih funkcija.

Iz trigonometrijskog i eksponencijalnog oblika kompleksnog broja sleduje jednakost

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

---

19) Stereografsko preslikavanje se izučava u *Kompleksnoj analizi.*

20) Bernhard Riemann (1826–1866), veliki nemački matematičar.

21) Léonhard Euler (1707–1783), veliki švajcarski matematičar.

Napomenimo da je moduo kompleksnog broja $\cos\theta + i\sin\theta$ jednak jedinici, tj.

$$|\cos\theta + i\sin\theta| = 1.$$

Za ovaj broj kažemo da je *unimodularni* broj. Pored pomenute eksponencijalne notacije $e^{i\theta}$, za unimodularan broj se koristi i oznaka $\operatorname{cis}\theta$. Tako se svaki kompleksan broj z može predstaviti kao proizvod modula r i unimodularnog broja $\operatorname{cis}\theta$. Dakle, $z = r\operatorname{cis}\theta$.

Očigledno, iz $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ sleduju jednakosti

$$\operatorname{Re} z = r\cos\theta \quad \text{i} \quad \operatorname{Im} z = r\sin\theta.$$

Takođe, imamo

$$\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)).$$

Ovo znači da je $\arg\overline{z} = -\arg z$.

Kao što ćemo videti, za neka razmatranja trigonometrijski oblik kompleksnog broja pogodniji je od njegovog algebarskog oblika.

Neka su kompleksni brojevi z_1 i z_2 određeni sa

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{i} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2). \tag{3.5.3}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1 r_2\big((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\big)\\
&= r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big).
\end{aligned}$$

Dakle, proizvod dva kompleksna broja, čiji su moduli r_1 i r_2 i čiji su argumenti θ_1 i θ_2, je kompleksan broj čiji je moduo $r = r_1 r_2$ i čiji je argument $\theta = \theta_1 + \theta_2$.

Posmatrajmo opet unimodularan broj $\operatorname{cis}\theta = \cos\theta + i\sin\theta$.

Kako je $(\operatorname{cis}\theta)(\overline{\operatorname{cis}\theta}) = 1$ i $\overline{\operatorname{cis}\theta} = \operatorname{cis}(-\theta)$, zaključujemo da je

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta},$$

tj.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta). \tag{3.5.4}$$

Korišćenjem ove jednakosti možemo definisati deljenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku.

Dakle, neka su kompleksni brojevi z_1 i z_2 $(\neq 0)$ dati pomoću (3.5.3). Tada imamo

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\operatorname{cis}\theta_1}{\operatorname{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}\theta_1 \operatorname{cis}(-\theta_2).$$

Prema tome,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\big),$$

što znači da je moduo količnika $r = r_1/r_2$, a argument $\theta = \theta_1 - \theta_2$.

Napomenimo da, kada su θ_1 i θ_2 glavne vrednosti argumenata kompleksnih brojeva z_1 i z_2, to ne znači da je i $\theta_1 + \theta_2$ glavna vrednost argumenta kompleksnog broja $z_1 z_2$, tj. ne mora da važi

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$$

ali je uvek

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

U stvari, važi sledeće tvrđenje koje navodimo bez dokaza:

Teorema 3.5.9. *Ako je $z_1 z_2 \neq 0$, tada je*

$$\arg(z_1 z_2) = \begin{cases} \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi & (-2\pi < \arg z_1 + \arg z_2 \leq -\pi), \\ \arg z_1 + \arg z_2 & (-\pi < \arg z_1 + \arg z_2 \leq \pi), \\ \arg z_1 + \arg z_2 - 2\pi & (\pi < \arg z_1 + \arg z_2 \leq 2\pi). \end{cases}$$

Primer 3.5.3. Za $z_1 = 1 + i$ i $z_2 = i$ imamo

$$\arg z_1 = \pi/4,\ \arg z_2 = \pi/2,\ z_1 z_2 = -1 + i,\ \arg(z_1 z_2) = 3\pi/4.$$

Dakle, ovde je $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$. Međutim, za $z_1 = -1 + i$ i $z_2 = i$ je

$$\arg z_1 = 3\pi/4,\ \arg z_2 = \pi/2,\ z_1 z_2 = -1 - i,\ \arg(z_1 z_2) = -3\pi/4.$$

Prema tome, $\arg(z_1 z_2) \neq \arg z_1 + \arg z_2$. $\triangle$

Naravno, matematičkom indukcijom je moguće dokazati da je za kompleksne brojeve $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, uvek

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \Big(\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)\Big).$$

Dokazaćemo sledeće tvrđenje:

Teorema 3.5.10. *Ako je* $z = \cos\theta + i\sin\theta$, *važi jednakost*

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{3.5.5}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Za $n = 1$, jednakost je tačna.

Pretpostavimo sada da je ona tačna i za $n = k \geq 1$. Tada je

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta. \quad \square\end{aligned}$$

Jednakost (3.5.5) poznata je pod imenom *Moivreova*[22] *formula.*

Moivreova formula važi i u slučaju kada je n negativan ceo broj. Da bismo ovo dokazali stavimo $n = -k$, gde je $k \in \mathbb{N}$. Stepenovanjem jednakosti (3.5.4) i primenom prethodno dokazane formule (3.5.5), dobijamo

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-k} = (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^k = \cos(-k\theta) + i\sin(-k\theta),$$

tj.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Na kraju ovog odeljka razmotrićemo problem određivanja kompleksnog broja z, za koji je

$$z^n = a, \tag{3.5.6}$$

gde je a ($\neq 0$) dati kompleksan broj i $n \in \mathbb{N}$. Drugim rečima, razmotrićemo problem rešavanja binomne jednačine (3.5.6).

Naravno, za $n = 1$ postoji jedno jedino rešenje $z = a$. Za $n = 2$ i $a > 0$, poznato je, postoje dva rešenja: $z_0 = \sqrt{a}$ i $z_1 = -\sqrt{a}$.

Neka je kompleksan broj a dat u trigonometrijskom obliku

$$a = R(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Rešenja jednačine (3.5.6) potražimo, takođe, u trigonometrijskom obliku

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

[22] Abraham de Moivre (1667–1754), engleski matematičar.

Tada imamo

$$r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = R(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

tj.

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

odakle zaključujemo da mora biti

$$r^n = R \quad \wedge \quad n\theta = \varphi + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Dakle,

$$r = \sqrt[n]{R} \geq 0 \qquad \wedge \qquad \theta = \theta_m = \frac{\varphi + 2m\pi}{n} \qquad (m \in \mathbb{Z}).$$

Prema tome, sva rešenja jednačine (3.5.6) data su pomoću

$$z_m = \sqrt[n]{R}\,\operatorname{cis}\frac{\varphi + 2m\pi}{n} \qquad (m \in \mathbb{Z}).$$

Lako je, međutim, videti da skup rešenja $\{z_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ ima samo n različitih tačaka, na primer,

$$\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}. \tag{3.5.7}$$

Zaista, ako $m \notin \{0, 1, \ldots, n-1\}$, tada se takvo m može predstaviti u obliku $m = pn + k$, gde je $p = [m/n]$, a k odgovarajući ostatak pri deljenju m sa n. U tom slučaju imamo

$$\theta_m = \frac{\varphi + 2m\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + 2p\pi = \theta_k + 2p\pi,$$

gde $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Kako je $\cos\theta_m = \cos\theta_k$ i $\sin\theta_m = \sin\theta_k$, zaključujemo da je, za svako $m \in \mathbb{Z}$, $z_m = z_k$, gde su $p = [m/n]$ i $k = m - pn$. Dakle,

$$z_k = \sqrt[n]{R}\,\operatorname{cis}\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Prema tome, važi sledeće tvrđenje:

Teorema 3.5.11. *Ako je* $a = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, *sva rešenja binomne jednačine* (3.5.6) *određena su pomoću*

$$z_k = \sqrt[n]{R}\Big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3.5.8}$$

Geometrijska interpretacija ovog rezultata pokazuje da su svi kompleksni brojevi z_k raspoređeni na krugu poluprečnika $\sqrt[n]{R}$ tako da predstavljaju temena pravilnog poligona od n strana. Slučaj $n = 8$ prikazan je na slici 3.5.7.

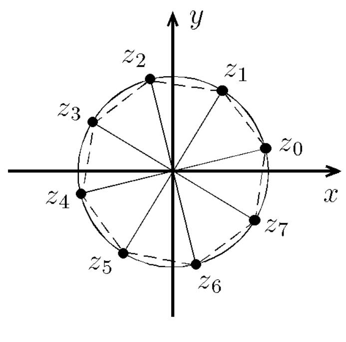
Ako sa ε_n označimo unimodularan broj sa argumentom $2\pi/n$, tj.

$$\varepsilon_n = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{n} = \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n},$$

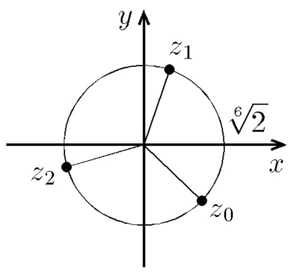
formule (3.5.8) mogu se iskazati u obliku

$$z_0 = \sqrt[n]{R}\ \operatorname{cis}\frac{\varphi}{n}, \qquad z_k = z_0\varepsilon_n^k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3.5.9}$$

Geometrijski posmatrano, rotacijom z_0 za ugao $2\pi/n$ u pozitivnom smeru, dobija se z_1. Uopšte, rotacijom z_{k-1} za isti ugao $2\pi/n$ dobija se z_k.



Sl. 3.5.7



Sl. 3.5.8

Primer 3.5.4. Neka je $z^3 = -1 - i$.
Kako je $R = |-1-i| = \sqrt{2}$ i $\varphi = \arg(-1-i) = -3\pi/4$, imamo

$$z_k = \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) \qquad (k = 0, 1, 2),$$

tj.

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{1-i}{\sqrt[3]{2}},\\
z_1 &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right],\\
z_2 &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right].
\end{aligned}
$$

Ako stavimo $\varepsilon_3 = \operatorname{cis}(2\pi/3) = (-1 + i\sqrt{3})/2$, na osnovu (3.5.9), imamo

$$
z_1 = z_0\varepsilon_3 = \frac{\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt[3]{2}}, \quad z_2 = z_1\varepsilon_3 = -\frac{\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt[3]{2}}.
$$

Koreni z_0, z_1, z_2 prikazani su na slici 3.5.8. Napomenimo da dobijeni argument $13\pi/12$ kod korena z_2 nije glavna vrednost argumenta. Naime, $\arg z_2 = -11\pi/12$. $\triangle$

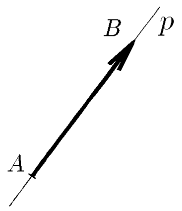
3.6. Vektori i operacije sa vektorima

Među osnovnim pojmovima koji se javljaju u fizici, mehanici i elektrotehnici su sila, brzina, ubrzanje, električno polje i slično. Sve ove veličine se, pored intenziteta, karakterišu i pravcem i smerom. Nas će ovde interesovati geometrijski analogon takvih pojmova.

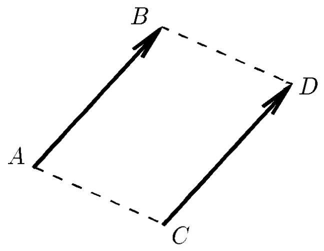
Ne upuštajući se u razmatranje nekih osnovnih geometrijskih pojmova kao što su prava, ravan, prostor, translacija i slično, koristićemo sledeća označavanja: E za skup svih tačaka prostora koji opažamo; R za proizvoljnu ravan u E; p za proizvoljnu pravu u E. Proizvoljne tačke iz E označavaćemo velikim slovima latinice: A, B, C, M, O, itd.

Neka su A i B dve različite tačke iz E. One očigledno, na jedinstven način, određuju jednu duž ili odsečak $\overline{AB}$ kao skup tačaka koje se nalaze na pravoj između tačaka A i B. Ako pri tom definišemo jednu od tih tačaka kao početnu, a drugu kao krajnju, dobićemo tzv. orijentisanu duž. Ako je, recimo, A početna, a B krajnja tačka, duž je orijentisana od tačke A ka tački B. Za tako orijentisani odsečak kažemo da je *vektor*, koji deluje u tački A. Često se kaže da je to vektor vezan za tačku A. Ako je neophodno naglasiti početnu i krajnju tačku vektora, koristi se notacija $\overrightarrow{AB}$. U protivnom, dovoljno je za vektor koristiti notaciju $\vec{a}$ ili $\boldsymbol{a}$ (videti sliku 3.6.1).

Rastojanje između tačaka A i B naziva se *intenzitet* vektora ili *norma* vektora i označava se sa $|\overrightarrow{AB}|$ ili $|\vec{a}|$ ili $|\boldsymbol{a}|$. Ponekad se umesto $|\boldsymbol{a}|$ koristi



Sl. 3.6.1



Sl. 3.6.2

samo oznaka a. Za vektor čiji je intenzitet jednak jedinici kažemo da je *jedinični vektor* ili *ort* i označavamo ga obično sa indeksom nula, na primer, $\boldsymbol{a}_0$.

Prava p koja prolazi kroz tačke A i B određuje pravac vektora $\overrightarrow{AB}$. Za pravu p kažemo da je nosač vektora $\overrightarrow{AB}$.

Najzad, kažemo da vektor $\overrightarrow{AB}$ ima smer od A prema B.

Vektor čiji je intenzitet jednak nuli nazivamo *nula-vektor* i označavamo ga sa $\boldsymbol{o}$. To je, zapravo, vektor čija se početna i krajnja tačka poklapaju. Pravac i smer takvog vektora nisu određeni.

Posmatrajmo skup svih mogućih vektora $V = V(E) = \{\overrightarrow{AB} \mid A, B \in E\}$ i njegov podskup

$$V_A = V_A(E) = \{\overrightarrow{AB} \mid B \in E\}. \tag{3.6.1}$$

Očigledno,

$$V = \bigcup_{A \in E} V_A.$$

U radu sa vektorima veoma je važno koje ćemo vektore tretirati kao jednake, što zavisi od uvedene relacije jednakosti u V.

Definicija 3.6.1. Za dva vektora $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in V$ kažemo da su jednaki, tj.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}, \tag{3.6.2}$$

ako i samo ako postoji translacija takva da tačku A prevede u tačku C i istovremeno tačku B u tačku D.

Pomenuta translacija predstavlja tzv. *paralelni prenos* vektora $\overrightarrow{AB}$ u tačku C (slika 3.6.2). Ako se pritom tačka B poklopi sa tačkom D važiće jednakost

(3.6.2). Jasno je, iz ove definicije, da jednaki vektori imaju i jednake intenzitete. Pri ovako uvedenoj definiciji jednakosti vektora, za vektore iz skupa V kažemo da su slobodni vektori[23]).

S obzirom da uvedena relacija jednakosti poseduje osobine: refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost, zaključujemo da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 3.6.1. *Relacija jednakosti dva vektora iz V je relacija ekvivalencije.*

Uvedenom relacijom ekvivalencije, izvršena je particija skupa V na klase ekvivalencije, koje se veoma lako mogu opisati. Naime, posmatrajmo proizvoljan vektor $\overrightarrow{AB}$. Paralelnim prenosom ovog vektora u svaku tačku prostora E dobijamo skup vektora

$$W_{\overrightarrow{AB}} = \{\boldsymbol{a} \in V \mid \boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}\}, \tag{3.6.3}$$

koji predstavlja jednu klasu ekvivalencije. Dakle, svi vektori iz $W_{\overrightarrow{AB}}$ su međusobom jednaki, pri čemu u svakoj tački prostora deluje jedan i samo jedan od njih.

Imajući u vidu dobijene klase ekvivalencije, za naše dalje tretiranje vektora dovoljno je uzeti samo po jedan vektor iz svake klase ekvivalencije, takozvanog predstavnika klase, pri čemu se možemo opredeliti tako da svi oni deluju u istoj tački, tj. da imaju isti početak.

Dakle, ako uzmemo jednu proizvoljno fiksiranu tačku prostora, na primer $O \in E$, traženi skup vektora (predstavnika svake klase ekvivalencije) biće, saglasno notaciji (3.6.1),

$$V_O = V_O(E) = \{\overrightarrow{OM} \mid M \in E\}. \tag{3.6.4}$$

Primetimo da nula-vektor $\boldsymbol{o} = \overrightarrow{OO}$ pripada ovom skupu.

Napomena 3.6.1. Neka su O i O' dve fiksirane tačke prostora E. Saglasno definiciji 3.6.1 o jednakosti dva vektora, prostori $V_{O'}(E)$ i $V_O(E)$ mogu se tretirati kao ekvivalentni. Prostor $V_{O'}(E)$ nastaje iz prostora $V_O(E)$ translacijom.

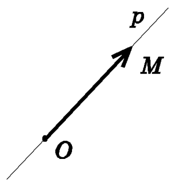
---

[23]) U našem daljem razmatranju isključivo ćemo raditi sa slobodnim vektorima. Međutim, često u primenama u fizici, mehanici i elektrotehnici, vektorske veličine su vezane za tačku ili pravu. U tom slučaju imamo tzv. vektore vezane za tačku ili vektore vezane za pravu. Na primer, kod vektora vezanih za tačku, za jednakost dva vektora, pored definicije 3.6.1, zahteva se da oba vektora deluju u istoj tački. Naravno, kod vektora vezanih za pravu, dodatni zahtev, u definiciji jednakosti dva vektora, je da oba vektora imaju isti nosač.

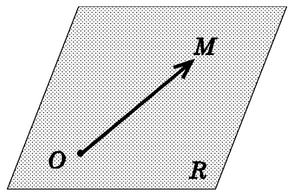
Kao što smo videli, skup $W_{\overrightarrow{AB}}$, dat sa (3.6.3), predstavlja skup vektora koji su jednaki sa datim vektorom $\overrightarrow{AB}$. U mnogim razmatranjima od interesa su i drugi podskupovi od V, na primer, skup kolinearnih ili skup komplanarnih vektora.

Za sve vektore čiji je nosač data prava p, ili prava koja je paralelna sa p, kažemo da su *kolinearni* vektori. Koristeći paralelni prenos vektora u tačku $O \in p$ i notaciju (3.6.1), skup kolinearnih vektora može se predstaviti u obliku

$$V_O(p) = \{\overrightarrow{OM} \mid M \in p\}.$$



Sl. 3.6.3



Sl. 3.6.4

Slično, za sve vektore koji leže u datoj ravni R, ili u bilo kojoj ravni paralelnoj sa R, kažemo da su *komplanarni* vektori. U ovom slučaju to je skup

$$V_O(R) = \{\overrightarrow{OM} \mid M \in R\}.$$

Na slikama 3.6.3 i 3.6.4 prikazani su proizvoljni elementi skupova $V_O(p)$ i $V_O(R)$.

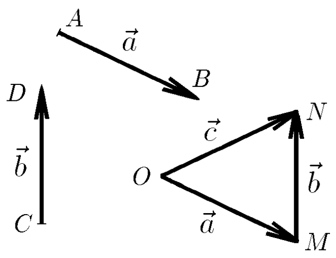
Oslanjajući se na tzv. slaganje sila u mehanici, što se ogleda kroz delovanje rezultante za dve sile, moguće je uvesti sabiranje vektora.

Neka su data dva vektora $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{CD}$ i neka se, paralelnim prenosom vektora $\boldsymbol{a}$ u tačku O, krajnja tačka B vektora $\boldsymbol{a}$ prevodi u tačku M. Tako dobijamo ekvivalentni vektor $\overrightarrow{OM}$. Sada, paralelnim prenosom vektora $\boldsymbol{b}$ u tačku M, dobijamo ekvivalentni vektor $\overrightarrow{MN}$, pri čemu je tačka D prevedena u tačku N (videti sliku 3.6.5). Za vektor $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{ON}$ kažemo da je zbir vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, tj.

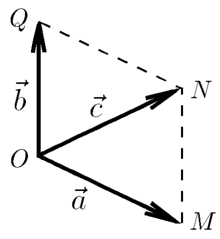
$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

Drugim rečima, ako paralelnim prenosom vektore $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ dovedemo u tačku O tako da je $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{a}$ i $\overrightarrow{OQ} = \boldsymbol{b}$, a zatim nad njima konstruišemo paralelogram $OMNQ$ (slika 3.6.6), tada će vektor $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{ON}$ predstavljati zbir $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Ovakav način sabiranja dva vektora poznat je kao pravilo paralelograma. Dakle, oba vektora se dovedu na isti početak i konstruiše se paralelogram nad njima kao susednim stranicama. Zbir vektora se, zatim, dobija kao dijagonala paralelograma usmerena od zajedničkog početka. Iz ovoga proizilazi da je sabiranje vektora komutativna operacija, tj. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.



Sl. 3.6.5



Sl. 3.6.6

Na ovaj način, vektore prvo svodimo na vektore skupa V_O, koji je dat pomoću (3.6.4), a zatim dobijamo zbir koji je vektor iz istog skupa.

Teorema 3.6.2. *Neka je + sabiranje vektora. Struktura* $(V_O,+)$ *je komutativna grupa.*

Dokaz. Pre svega treba uočiti da je operacija sabiranja vektora komutativna i asocijativna, tj. da je

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \qquad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V_O)$$

i

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \qquad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in V_O).$$

Za asocijativnost operacije videti sliku 3.6.7.

Kako je, za svako $\boldsymbol{a}\in V_O$,

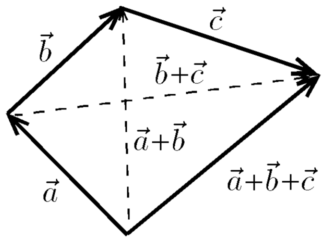
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},$$

zaključujemo da je nula-vektor $\boldsymbol{o}$ neutralni element za sabiranje vektora.

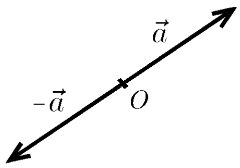
Najzad, za svaki vektor $\boldsymbol{a}\in V_O$ postoji vektor $\boldsymbol{a}'\in V_O$ takav da je

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}. \tag{3.6.5}$$

Za vektor $\boldsymbol{a}'$ kažemo da je suprotni vektor vektoru $\boldsymbol{a}$ i označavamo ga sa $-\boldsymbol{a}$ (videti sliku 3.6.8). Ovaj vektor je, u stvari, inverzni element za $\boldsymbol{a}$.



Sl. 3.6.7



Sl. 3.6.8

Prema tome, $(V_O, +)$ je Abelova grupa. $\square$

Jednakost (3.6.5), napisana u obliku

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o},$$

sugeriše uvođenje operacije oduzimanje vektora:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}).$$

Dakle, razlika $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ je vektor koji se dobija kao zbir vektora $\boldsymbol{a}$ i suprotnog vektora od $\boldsymbol{b}$ (slika 3.6.9).

Za zbir $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}$ pišemo $2\boldsymbol{a}$. Naravno, za $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}$ pišemo $3\boldsymbol{a}$. U opštem slučaju, za n jednakih vektora, pišemo

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} + \cdots + \boldsymbol{a} = n\boldsymbol{a}.$$

Vektor $n\boldsymbol{a}$ je kolinearan sa vektorom $\boldsymbol{a}$. Njegov pravac i smer se poklapaju sa pravcem i smerom vektora $\boldsymbol{a}$, dok mu je intenzitet n puta veći od intenziteta vektora $\boldsymbol{a}$.

Za $n = 0$ i $n = 1$ imamo

$$0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o} \qquad \text{i} \qquad 1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}.$$

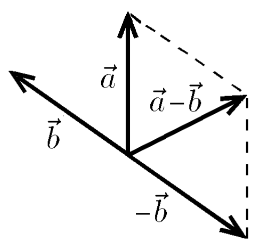
Formalno, za $n = -1$, dobijamo suprotni vektor vektoru $\boldsymbol{a}$, tj. imamo

$$(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}.$$

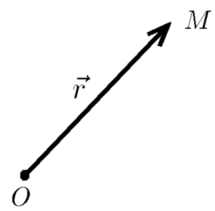
Na sličan način možemo uvesti, na primer, vektor $-m\boldsymbol{a}$, gde je $m \in \mathbb{N}$. To će biti vektor suprotan vektoru $m\boldsymbol{a}$, tj. imaće pravac vektora $\boldsymbol{a}$, smer suprotan ovom vektoru, dok će mu intenzitet biti m puta veći od intenziteta vektora $\boldsymbol{a}$.

Na osnovu prethodnog, možemo uvesti operaciju množenje vektora proizvoljnim realnim brojem λ, koji nazivamo skalar. Dakle, $\lambda \boldsymbol{a}$ je vektor čiji se intenzitet dobija množenjem intenziteta vektora $\boldsymbol{a}$ sa $|\lambda|$, pravac mu se poklapa sa pravcem vektora $\boldsymbol{a}$, a smer zavisi od znaka skalara λ. Naime, ako je $\lambda > 0$, smer se poklapa sa smerom vektora $\boldsymbol{a}$, dok je, za $\lambda < 0$, smer suprotan smeru vektora $\boldsymbol{a}$. Naravno, $\boldsymbol{a}$ i $\lambda \boldsymbol{a}$ su kolinearni vektori.

Navedena operacija množenja vektora skalarom može se tretirati kao preslikavanje skupa $\mathbb{R} \times V_O$ na skup V_O. Za razliku od operacije sabiranja vektora u V_O, koja je interna binarna opracija u V_O, jer se radi o preslikavanju skupa $V_O \times V_O$ na skup V_O, ovde je reč o jednoj eksternoj operaciji.



Sl. 3.6.9



Sl. 3.6.10

Nije teško dokazati sledeći rezultat:

Teorema 3.6.3. *Za množenje vektora skalarima imamo*

1° $\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$,

2° $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{a}$,

3° $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$,

4° $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$,

za sve vektore $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ *i sve skalare* λ, μ.

Očigledno, pri fiksiranoj tački $O \in E$, svakoj tački $M \in E$ odgovara jedan i samo jedan vektor $\overrightarrow{OM}$, koji je usmeren od tačke O prema tački M.

Definicija 3.6.2. Za vektor $\overrightarrow{OM}$ kažemo da je radijus vektor ili vektor položaja tačke M u odnosu na tačku O.

Za radijus vektor $\overrightarrow{OM}$ koristimo oznaku $\boldsymbol{r}$ ili $\vec{r}$ (videti sliku 3.6.10).

Napomena 3.6.2. Preslikavanje $f\colon E \to V_O$, dato pomoću $M \mapsto \overrightarrow{OM}$, je biunivoko.

4. ZADACI ZA VEŽBU

4.1. Neka je $\alpha = \sqrt[3]{2}$ i $\beta = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Ako su f i g preslikavanja definisana pomoću

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= a + \beta\alpha + c\alpha^2 \qquad (a,b,c \in \mathbb{Q}),\\ g(a',b',c') &= a' + b'\beta + c'\beta^2 \qquad (a',b',c' \in \mathbb{Q}), \end{aligned}$$

dokazati da se skupovi $f(\mathbb{Q}^3)$ i $g(\mathbb{Q}^3)$ poklapaju.

Uputstvo. Dovoljno je dokazati da za svaku uređenu trojku (a,b,c) racionalnih brojeva a,b,c postoji takođe uređena trojka (a',b',c') racionalnih brojeva a',b',c' takva da važe jednakosti

$$f(a,b,c) = g(a',b',c') \qquad (a,a',b,b',c,c' \in \mathbb{Q}).$$

4.2. Neka su definisana preslikavanja:

1° $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ tako da je $f(p) = (p,1)$ $(p \in \mathbb{Z})$,

2° $g\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tako da je $g(p,q) = p + q\sqrt{2}$ $(p,q \in \mathbb{Z})$,

3° $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tako da je $h(x) = [x]$ $(x \in \mathbb{R})$,

kao i kompozicije

$$f \circ g, \qquad g \circ h, \qquad h \circ g, \qquad f \circ g \circ h, \qquad g \circ h \circ f, \qquad h \circ f \circ g.$$

Utvrditi koja su od svih ovih preslikavanja surjektivna, a koja injektivna preslikavanja ?

Rezultat. Preslikavanje h je surjekcija, a preslikavanja: f, g, $f \circ g$, $f \circ g \circ h$ su injektivna preslikavanja.

4.3. Neka je dato preslikavanje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pomoću

$$f(x) = a|x+1| + b|x-1| + (b-a+1)x - a - b \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

gde su a i b realni parametri.

Ispitati za koje je vrednosti parametara a i b dato preslikavanje bijekcija, a zatim eksplicitno odrediti analitički izraz za inverzno preslikavanje f^{-1} dajući tom izrazu formu koju ima prslikavanje f.

Rezultat. Preslikavanje f je bijekcija ako je $a \neq 1/2$ i $b \neq -1/2$.

4.4. Ako je $x \mapsto f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ $\big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\big)$, dokazati da je preslikavanje f injektivno preslikavanje.

4.5. Neka je m fiksirani prirodan broj, neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je f funkcija definisana sa

$$n \mapsto f(n) = \begin{cases} m-n & (n < m), \\ m+n & (n \geq m). \end{cases}$$

1° Odrediti skup $f(\mathbb{N})$.

2° Ako je f obostrano jednoznačno preslikavanje, odrediti funkciju

$$f^{-1} \colon f(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Rezultat. 1° $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{m, m+1, \dots, 2m-1\}$, 2° Inverzna funkcija f^{-1} postoji i određena je pomoću

$$n \mapsto f^{-1}(n) = \begin{cases} m-n & (n < m), \\ n-m & (n \geq 2m). \end{cases}$$

4.6. Ako je n prirodan broj i ako je

$$a_n = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\big(3 + 2\sqrt{2}\,\big)^n - \big(3 - 2\sqrt{2}\,\big)^n \right),$$

dokazati da je a_n prirodan broj.

4.7. Neka je $S = \{a, b, c\}$ skup u kome je definisana binarna operacija $*$ sa osobinama predstavljenim tzv. *Cayleyevom tablicom*:

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Proveriti tvrđenje: $(S, *)$ je komutativna grupa.

4.8. Neka je m prirodan broj i neka je $S = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$.

Ako je za svako $a, b \in S$ definisana operacija $*$ pomoću

$$a * b = \begin{cases} a+b & (a+b < m), \\ a+b-m & (a+b \geq m), \end{cases}$$

dokazati da je operacija $*$ unutrašnja operacija, a zatim dokazati da $(S,*)$ ima strukturu komutativne grupe.

4.9. Neka je S skup čiji je a jedini element. Ako su u skupu S definisane unutrašnje operacije sabiranje, u oznaci $+$, i množenje, u oznaci $\cdot$, ispitati strukture $(S,+\,,\,\cdot)$ i $(S,\,\cdot\,,+)$.

Rezultat. Obe strukture, i $(S,+\,,\,\cdot\,)$ i $(S,\,\cdot\,,+)$, imaju strukturu prstena.

4.10. Neka je $\mathbb{R}^2=\{(a,b)\,|\,a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}\}$, tj. neka je $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ skup uređenih parova realnih brojeva.

Ispitati strukturu $(\mathbb{R}^2,+,\times)$, ako se zna da je

1° $(a,b)=(a',b')\iff a=a'$ i $b=b'$,
2° $(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$,
3° $(a,b)\times(a',b')=(ab'+ba',bb')$.

Rezultat. $\big(\mathbb{R}^2,+\,,\times\big)$ ima strukturu prstena sa jedinicom.

4.11. Odrediti kompleksan broj $w=\dfrac{z^2+z+1}{z^4-1}$, ako je $z=2+3i$.

4.12. Odrediti sve vrednosti z za koje je $(\sqrt{3}-i)z^8=1+i$.

4.13. Neka je $z=\dfrac{e^{-\pi i/3}\,(1+i\sqrt{3})^7}{i}$. Odrediti: $\operatorname{Re}z$, $\operatorname{Im}z$, $|z|$, i $\arg z$.

4.14. Ne koristeći se trigonometrijskim oblicima kompleksnih brojeva, odrediti kompleksne brojeve:

$$1^\circ\quad u=\sqrt{3+4i}\,,\qquad 2^\circ\quad v=\sqrt{-7+24i}\qquad 3^\circ\quad w=\sqrt[4]{7+24i}\,.$$

Rezultat. 1° $u=\pm\,(2+i)$, 2° $v=\pm\,(3+4i)$, 3° $w=\pm(2+i)$ i $w=\pm(1-2i)$.

4.15. Rešiti jednačinu

$$z^2-2(2+i)z+7+4i=0.$$

Rezultat. $2+3i$ i $2-i$.

4.16. U z-ravni odrediti sve tačke koje odgovaraju kompleksnim brojevima z ako se zna da je $w=\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2$ realan broj.

Rezultat. Traženi skup čine tačke prave $z=\bar{z}$, tj. tačke realne ose i tčke kruga $|z|=1$.

4.17. Dokazati da je

$$\tan 5\theta = \frac{5\tan\theta - 10\tan^3\theta + \tan^5\theta}{1 - 10\tan^2\theta + 5\tan^4\theta},$$

a zatim proveriti jednakost

$$\tan\frac{\pi}{5}\cdot\tan\frac{2\pi}{5}\cdot\tan\frac{3\pi}{5}\cdot\tan\frac{4\pi}{5} = 5.$$

4.18. Izračunati zbir

$$S_n = 1 + \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} + \frac{\sin 3x}{\sin^3 x} + \cdots + \frac{\sin nx}{\sin^n x}\cdot$$

Uputstvo. Posmatrati uporedo i zbir

$$C_n = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} + \frac{\cos 3x}{\sin^3 x} + \cdots + \frac{\cos nx}{\sin^n x}\cdot$$

II G L A V A

Linearni prostori, linearni operatori i matrice

1. LINEARNI PROSTORI

1.1. Struktura linearnog prostora i baza prostora

U prvoj glavi ove knjige razmatrali smo algebarske strukture sa jednom binarnom operacijom (grupa) ili sa dve binarne operacije (prsten, telo, polje). Međutim u odeljku 3.6, glava I, gde smo uveli pojam vektora i razmatrali neke operacije sa vektorima, videli smo da se pored operacije sabiranja vektora u skupu $V_O = V_O(E)$, koja je *unutrašnja* (*interna*) operacija u V_O, uvodi i jedna *spoljašnja* (*eksterna*) operacija, tzv. množenje vektora skalarom, kao preslikavanje skupa $\mathbb{R} \times V_O$ na skup V_O. Tom prilikom dokazali smo da skup V_O snabdeven operacijom sabiranja vektora čini Abelovu grupu (teorema 3.6.2), dok je množenje vektora skalarom takvo da važe jednakosti:

$$\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}, \quad (\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}, \quad \lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}, \quad 1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a},$$

za sve vektore $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_O$ i sve skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (teorema 3.6.3).

Imajući u vidu navedene osobine, za skup $V_O = V_O(E)$ kažemo da je *vektorski prostor* prostora E pridružen tački O. U opštem slučaju, vektorski ili *linearni prostor* uvodi se na sledeći način:

Definicija 1.1.1. Skup $X = \{u, v, w, \dots\}$ naziva se *vektorski* ili *linearni prostor* nad poljem $\mathbb{K}$ ako je:

(1) U skupu X definisana jedna binarna operacija $+$ u odnosu na koju skup X čini Abelovu grupu;

(2) Ako je svakom paru (u, λ) $(u \in X;\ \lambda \in \mathbb{K})$ dodeljen po jedan element, u oznaci λu, skupa X tako da su ispunjeni uslovi:

1° $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$,

2° $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$,

3° $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$,

4° $1u = u$,

za sve elemente $u, v \in X$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, gde je 1 jedinični element polja $\mathbb{K}$.

Elementi skupa X nazivaju se vektori (tačke), elementi polja $\mathbb{K}$ skalari, operacija $+$ u skupu X vektorsko sabiranje (unutrašnja kompozicija) i operacija $(u, \lambda) \mapsto \lambda u$ množenje vektora skalarom (spoljašnja kompozicija). Najčešće se kao polje $\mathbb{K}$ uzima polje realnih ili polje kompleksnih brojeva. U tim slučajevima kažemo da je reč o realnom, tj. kompleksnom vektorskom prostoru. U našim razmatranjima uvek ćemo pretpostavljati da je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Iz jednakosti 2°, za $\lambda = 1$ i $\mu = -1$, dobijamo da je za svako $u \in X$

$$0u = u + (-u) = \theta,$$

gde je θ neutralni element skupa X za operaciju vektorskog sabiranja. Osim toga, ako u 3° stavimo $v = -u$, dobijamo da je za svako $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda\theta = \theta.$$

Za element θ kažemo da je *nula-vektor* prostora X.

Definicija 1.1.2. Za vektore u_i $(i = 1, \ldots, n)$ linearnog prostora X kaže se da su *linearno zavisni* ako u polju $\mathbb{K}$ postoje skalari λ_i $(i = 1, \ldots, n)$, koji istovremeno nisu svi jednaki nuli, tako da je

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \theta. \tag{1.1.1}$$

Vektori u_i $(i = 1, \ldots, n)$ su *linearno nezavisni* ako je jednakost (1.1.1) tačna samo za $\lambda_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Za levu stranu u (1.1.1) kažemo da je linearna kombinacija vektora u_i $(i = 1, \ldots, n)$. Napomenimo da, ako je bar jedan od vektora $u_1, \ldots, u_n$ nula-vektor, tada su ti vektori linearno zavisni. Tako na primer, ako je $u_1 = \theta$, tada je

$$1u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_n = \theta,$$

tj. (1.1.1) važi, pri čemu je $\lambda_1 = 1 \neq 0$. Inače, ako se radi o skupu nenula-vektora, tada su oni linearno zavisni ako i samo ako se neki od njih može izraziti kao linearna kombinacija ostalih vektora iz tog skupa.

Definicija 1.1.3. Za beskonačno mnogo vektora kažemo da su linearno nezavisni ako je svaki konačan podskup tih vektora linearno nezavisan.

Definicija 1.1.4. Ako u vektorskom prostoru postoji n linearno nezavisnih vektora i ako je svaki skup od $n+1$ vektora linearno zavisan, kažemo da je prostor *n–dimenzionalan.* Za broj n kažemo na je *dimenzija prostora.*

Ako u vektorskom prostoru postoji beskonačno mnogo linearno nezavisnih vektora, za taj vektorski prostor kažemo da je *beskonačno–dimenzionalan.*

Definicija 1.1.5. Neka je $A = \{u_1, \ldots, u_m\}$, gde su u_k $(k = 1, \ldots, m)$ vektori prostora X. Skup svih linearnih kombinacija ovih vektora naziva se *linearni omotač* ili *lineal* nad A i označava se sa $L(A)$.

Dakle,

$$L(A) = \big\{u \mid u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K})\big\}.$$

Definicija 1.1.6. Skup B linearno nezavisnih vektora prostora X obrazuje *algebarsku* ili *Hamelovu*[24)] *bazu* prostora X ako je $L(B) = X$.

Teorema 1.1.1. *Svaki vektor linearnog prostora X može se na jedinstven način izraziti kao linearna kombinacija vektora algebarske baze tog prostora.*

Dokaz. Neka je $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Kako je $L(B) = X$, svaki vektor $u \in X$ može se predstaviti kao linearna kombinacija vektora baze B. Da bismo pokazali jedinstvenost ovog predstavljanja, pretpostavimo da postoje dve reprezentacije

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n \quad \text{i} \quad u = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_n u_n.$$

Tada je

$$(\lambda_1 - \mu_1)u_1 + (\lambda_2 - \mu_2)u_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)u_n = \theta,$$

odakle, zbog linearne nezavisnosti bazisnih vektora, sleduje

$$\lambda_1 = \mu_1, \ \lambda_2 = \mu_2, \ \ldots, \ \lambda_n = \mu_n. \quad \square$$

Napomenimo da linearni prostor, u opštem slučaju, ima beskonačno mnogo različitih baza, međutim, sve one imaju isti broj elemenata, tj. iste su kardinalnosti. Kod n-dimenzionalnog prostora baza sadrži tačno n vektora. Prema tome, svaki skup od $m\,(> n)$ vektora u n-dimenzionalnom prostoru je linearno zavisan. S druge strane, svaki linearno nezavisan skup vektora je ili baza prostora ili je deo neke baze tog prostora.

---

24) Georg Karl Wilhelm Hamel (1877–1954), nemački mehaničar i matematičar.

Vratimo se opet vektorskom prostoru $V_O(E)$. Neka je u prostoru E data prava p i ravan R. Skupovi

$$V_O(p) = \{\overrightarrow{OM} \mid M \in p\} \qquad \text{i} \qquad V_O(R) = \{\overrightarrow{OM} \mid M \in R\},$$

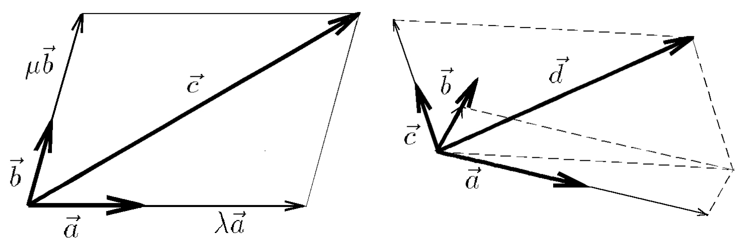
snabdeveni operacijom sabiranje vektora i operacijom množenje vektora skalarom, čine takođe vektorske prostore. Prvi od njih, vektorski prostor prave p pridružen tački O, naziva se *prostor kolinearnih vektora*. Za vektorski prostor ravni R pridružen tački O kažemo da je *prostor komplanarnih vektora*.

Prostor $V_O(p)$ je jednodimenzionalan. Svaki vektor $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ vektorskog prostora $V_O(p)$ je njegova baza. Proizvoljni vektor $\boldsymbol{b} \in V_O(p)$ može se jednoznačno predstaviti u obliku $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$, što je, u stvari, karakterizacija kolinearnih vektora. Ako poslednju jednakost napišemo u obliku $\lambda\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$, zaključujemo da su vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ linearno zavisni. Dakle, dva vektora u jednodimenzionalnom prostoru su linearno zavisni.

Prostor komplanarnih vektora $V_O(R)$ je dvodimenzionalan. Bilo koja dva linearno nezavisna vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ prostora $V_O(R)$ čine njegovu bazu, tako da se proizvoljan vektor $\boldsymbol{c} \in V_O(R)$ može jednoznačno predstaviti u obliku (videti sliku 1.1.1)

$$\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}.$$

Iz poslednje jednakosti, koja karakteriše komplanarne vektore, može se zaključiti da su vektori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ linearno zavisni.



Sl. 1.1.1 Sl. 1.1.2

Prostor $V_O(E)$ je trodimenzionalan. Kao njegova baza može se uzeti bilo koji skup od tri linearno nezavisna vektora, na primer, $B = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$. Tada se svaki vektor $\boldsymbol{d} \in V_O(E)$ može jednoznačno predstaviti u obliku (videti sliku 1.1.2)

$$\boldsymbol{d} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c}. \tag{1.1.2}$$

Četiri proizvoljna vektora u $V_O(E)$ su uvek linearno zavisna. Napomenimo da su vektori baze u $V_O(E)$ tri nekomplanarna vektora.

Definicija 1.1.7. Svaka baza prostora naziva se *koordinatni sistem* tog prostora.

Neka je $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ jedna baza prostora X. Tada se, na osnovu teoreme 1.1.1, svako $u \in X$ može predstaviti u obliku

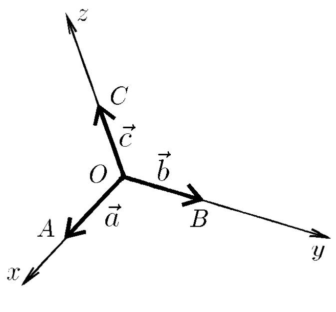
$$u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n ,$$

gde su $x_1, \dots, x_n$ potpuno određeni skalari. Dakle, ako je zadata baza B, vektor u je potpuno određen skalarima $x_1, \dots, x_n$ i može se korišćenjem matrične[25)] notacije opisati pomoću tzv. *koordinatne reprezentacije*

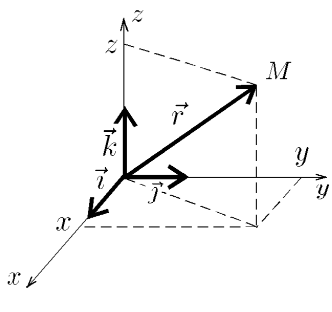
$$\boldsymbol{x} = [x_1 \ \dots \ x_n]^T .$$

Skalari $x_1, \dots, x_n$ nazivaju se *koordinate vektora.* Često se, ako to ne dovodi do zabune, u i $\boldsymbol{x}$ poistovećuju.

Posmatrajmo prostor $V_O(E)$ sa bazom $B = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$. Vektori baze B određuju jedan *koordinatni sistem* prostora $V_O(E)$. Tačku O nazivamo *koordinatni početak.* Neka su $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ i $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$. Bazisni vektori određuju tri ose, u oznaci x, y i z, respektivno (videti sliku 1.1.3). Na osnovu (1.1.2) vidimo da je vektor $\boldsymbol{d}$ potpuno određen skalarima, tj. koordinatama λ, μ, ν.



Sl. 1.1.3



Sl. 1.1.4

Ako su vektori baze izabrani tako da su im pravci uzajamno upravni, a intenziteti jednaki jedinici, tada kažemo da je zadat pravougli koordinatni sistem. U tom slučaju, bazisne jedinične vektore označavamo redom sa $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$

[25)] Teorija matrica se razmatra u sledećem poglavlju.

i $\boldsymbol{k}$. Uočimo proizvoljnu tačku $M \in E$ i radijus vektor $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$. Tada se vektor $\overrightarrow{OM}$ može predstaviti pomoću

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \tag{1.1.3}$$

gde su koordinate x, y i z jednoznačno određene vektorom $\overrightarrow{OM}$, tj. tačkom M (videti sliku 1.1.4). Za koordinate x, y i z kažemo da su redom *apscisa*, *ordinata* i *aplikata* tačke M. S druge strane, svakoj uređenoj trojki realnih brojeva (x, y, z) jednoznačno se može pridružiti vektor $\overrightarrow{OM}$, tj. tačka M, tako da važi (1.1.3). Dakle, preslikavanje $g\colon E \to \mathbb{R}^3$, dato pomoću (1.1.3), je biunivoko. Istu činjenicu smo konstatovali i za preslikavanje $f\colon E \to V_O(E)$, dato pomoću $M \mapsto \overrightarrow{OM}$ (videti napomenu 4.6.2, glava I). Imajući sve ovo u vidu, često identifikujemo tačku M sa uređenom trojkom (x, y, z), pišući $M = (x, y, z)$ ili, pak, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. Nije teško videti da skup $\mathbb{R}^3$, snabdeven unutrašnjom i spoljašnjom kompozicijom

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z'), \quad \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z),$$

za svako (x, y, z), $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ i svako $\lambda \in \mathbb{R}$, čini vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Nula-vektor ovog prostora je uređena trojka $(0, 0, 0)$.

Napomenimo još da se unutrašnja i spoljašnja kompozicija u prostoru $V_O(E)$, kada su vektori izraženi pomoću

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad \text{i} \qquad \boldsymbol{r}' = \overrightarrow{OM'} = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k},$$

svode na

$$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}' = (x + x')\boldsymbol{i} + (y + y')\boldsymbol{j} + (z + z')\boldsymbol{k}, \qquad \lambda\boldsymbol{r} = (\lambda x)\boldsymbol{i} + (\lambda y)\boldsymbol{j} + (\lambda z)\boldsymbol{k}.$$

Primer 1.1.1. Neka je $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \ (i = 1, \ldots, n)\}$. Ako u ovaj skup uvedemo unutrašnju i spoljašnju kompoziciju pomoću

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

on postaje vektorski prostor.

Kao jedna baza ovog prostora može se uzeti skup $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, gde su

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ \ldots, \ e_n = (0, 0, \ldots, 1). \tag{1.1.4}$$

Ukoliko drugačije nije rečeno, uvek ćemo u daljem tekstu podrazumevati da je u prostoru $\mathbb{R}^n$ zadata pomenuta baza (1.1.4), koja se naziva i prirodna baza. Saglasno prethodnom, za tačke ovog prostora, pored oznake $u = (x_1, \ldots, x_n)$, koristićemo i koordinatnu reprezentaciju

$$\boldsymbol{x} = [x_1 \ \ldots \ x_n]^T.$$

Primetimo da je prirodna baza (1.1.4) privilegovana u smislu da se tačka $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i njena koordinatna reprezentacija $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T$ opisuju pomoću istih skalara $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Zato ćemo često koristiti i notaciju $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. $\triangle$

Primer 1.1.2. Neka je $X = \mathbb{C}$ skup kompleksnih brojeva, a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ polje kompleksnih brojeva. Skup $\mathbb{C}$ je linearni prostor nad poljem $\mathbb{C}$ pri standardno uvedenim operacijama sabiranja i množenja kompleksnih brojeva:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}),$$

$$\lambda z = (\alpha, \beta) \cdot (x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x) \qquad (z \in \mathbb{C} \ \text{ i } \ \lambda \in \mathbb{C}).$$

Ovaj linearni prostor je jednodimenzionalni jer se za proizvoljne tačke z_1 i z_2 iz C $(z_1 \neq z_2)$ mogu odrediti kompleksni skalari λ_1 i λ_2, tako da je

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = (0, 0),$$

što znači da su tačke z_1 i z_2 linearno zavisne. Takve vrednosti skalara su, na primer, $\lambda_1 = z_2$ i $\lambda_2 = -z_1$.

Međutim, ako za polje $\mathbb{K}$ uzmemo polje realnih brojeva $\mathbb{R}$, tada je odgovarajući linearni prostor dvodimenzionalan. $\triangle$

Primer 1.1.3. Posmatrajmo stepene funkcije $t \mapsto t^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ definisane na $\mathbb{R}$. Kako je

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad c_0 1 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n = 0$$

samo ako je $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$, zaključujemo da je skup (sistem) funkcija $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ linearno nezavisan. Lineal nad njim je skup svih polinoma[26)] stepena ne višeg od n, u oznaci $\mathcal{P}_n$,

$$\mathcal{P}_n = \big\{u \mid u(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n, \ c_i \in \mathbb{R} \ (i = 0, 1, \ldots, n)\big\}.$$

Ako u skup $\mathcal{P}_n$ uvedemo unutrašnju i spoljašnju kompoziciju (sabiranje dva polinoma i množenje polinoma skalarom) pomoću

$$(u + v)(t) = u(t) + v(t) \quad \text{i} \quad (\lambda u)(t) = \lambda u(t),$$

26) Teorija polinoma biće razmatrana u četvrtoj glavi. Za razumevanje ovog primera dovoljno je znanje iz srednje škole.

tada $\mathcal{P}_n$ postaje vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Nula–vektor ovog prostora je polinom koji je identički jednak nuli. Slično se $\mathcal{P}_n$ može tretirati i kao vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva.

Kako baza prostora $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ sadrži $n+1$ elemenata (vektora, funkcija), prostor $\mathcal{P}_n$ je dimenzije $n+1$. $\triangle$

Primer 1.1.4. Prostor svih polinoma stepena ne višeg od dva, tj. prostor svih kvadratnih trinoma

$$\mathcal{P}_2 = \{u \mid u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2,\ c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

je trodimenzionalan.

Naravno, umesto baze $B = \{1, t, t^2\}$ moguće je uzeti i neku drugu bazu, na primer, $B' = \{1, t-1, t^2+t\}$. Trinom $u(t) = 5 + 3t - 2t^2$ u novoj bazi B' ima reprezentaciju

$$u(t) = 10 + 5(t-1) - 2(t^2+t).$$

Dakle, odgovarajuće koordinatne reprezentacije ovog elementa u u bazama B i B' su $\begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T$ i $\begin{bmatrix} 10 & 5 & -2 \end{bmatrix}^T$, respektivno. $\triangle$

Definicija 1.1.8. Neprazan skup $Y \subset X$ je *potprostor vektorskog prostora* X nad poljem $\mathbb{K}$ ako je Y vektorski prostor nad istim poljem $\mathbb{K}$.

Lako je pokazati da je $Y \subset X$ potprostor prostora X ako i samo ako važe sledeća dva uslova:

(1) $u, v \in Y \ \Rightarrow\ u + v \in Y$;

(2) $u \in Y,\ \alpha \in \mathbb{K} \ \Rightarrow\ \alpha u \in Y$.

Drugim rečima, potrebno je i dovoljno da Y sadrži vektor $\alpha u + \beta v$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{K})$ kad god on sadrži vektore u i v.

Primer 1.1.5. Neka je u prostoru E data prava p i ravan R. Prostori $V_O(p)$ i $V_O(R)$ su potprostori vektorskog prostora $V_O(E)$. $\triangle$

Neka je X vektorski prostor i U skup svih njegovih potprostora. Primetimo da su $\{\theta\}$ i X dva trivijalna potprostora prostora X. Na skupu U možemo definisati dve algebarske operacije koje omogućavaju konstrukciju drugih potprostora na osnovu datih potprostora Y_1 i Y_2.

Definicija 1.1.9. Neka Y_1, $Y_2 \in U$. Suma linearnih potprostora Y_1 i Y_2, u oznaci $Y_1 + Y_2$, je skup vektora oblika $w = u + v$, gde $u \in Y_1$, $v \in Y_2$, tj.

$$Y_1 + Y_2 = \{w \mid w = u + v,\ u \in Y_1,\ v \in Y_2\}.$$

Definicija 1.1.10. Neka $Y_1, Y_2 \in U$. *Presek linearnih potprostora* Y_1 i Y_2, u oznaci $Y_1 \cap Y_2$, je skup svih vektora koji istovremeno pripadaju potprostorima Y_1 i Y_2, tj.

$$Y_1 \cap Y_2 = \{u \mid u \in Y_1 \wedge u \in Y_2\}.$$

Primetimo da suma i presek dva potprostora uvek sadrže nula-vektor prostora X. Može se dokazati da su i oni potprostori prostora X. Takođe, za bilo koji potprostor Y važi

$$Y + \{\theta\} = Y, \qquad Y \cap X = Y.$$

Bez dokaza navodimo sledeću teoremu:

Teorema 1.1.2. *Za dva proizvoljna konačno-dimenzionalna potprostora Y_1 i Y_2 važi jednakost*

$$\dim(Y_1 + Y_2) + \dim(Y_1 \cap Y_2) = \dim Y_1 + \dim Y_2, \tag{1.1.5}$$

gde je dim *oznaka dimenzije prostora.*

Na kraju ovog odeljka uvodimo i pojam direktne sume potprostora.

Definicija 1.1.11. Neka $Y_1, Y_2 \in U$, neka je $Y = Y_1 + Y_2$ i neka je

$$w = u + v \qquad (w \in Y,\ u \in Y_1,\ v \in Y_2).$$

Ako su vektori $u \in Y_1$ i $v \in Y_2$ jednoznačno određeni vektorom w, tada se suma Y s takvim svojstvom naziva *direktna suma* i označava sa

$$Y = Y_1 \dot{+} Y_2\,.$$

Ako je $Y = Y_1 \dot{+} Y_2$, napomenimo da je tada $Y_1 \cap Y_2 = \{\theta\}$. Takvi potprostori Y_1 i Y_2 često se nazivaju komplementarni potprostori.

Prethodna definicija se može proširiti na slučaj više potprostora.

Definicija 1.1.12. Neka su $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \in U$. Ako je za svako $w \in Y$ reprezentacija

$$w = u_1 + u_2 + \cdots + u_m \qquad (u_1 \in Y_1,\ u_2 \in Y_2, \ldots,\ u_m \in Y_m)$$

jedinstvena, suma potprostora je direktna i označava se sa

$$Y = Y_1 \dot{+} Y_2 \dot{+} \cdots \dot{+} Y_m\,.$$

Razlaganjem prostora X na direktnu sumu potprostora često je moguće pojednostaviti problem koji se tretira i izbeći glomazan račun.

Neka je X linearan prostor dimenzije n sa bazom $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Ako definišemo jednodimenzionalne potprostore Y_k kao lineale nad $B_k = \{u_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, tj.

$$Y_1 = L(B_1), \quad Y_2 = L(B_2), \quad \ldots, \quad Y_n = L(B_n),$$

tada je, očigledno, $X = Y_1 \dot{+} Y_2 \dot{+} \cdots \dot{+} Y_n$. Naravno, prostor X se može razložiti na direktnu sumu potprostora i na druge načine, uzimajući potprostore različitih dimenzija. U vezi s tim, navodimo sledeću teoremu koju nije teško dokazati.

Teorema 1.1.3. *Neka su Y_1, Y_2, ..., Y_m potprostori linearnog prostora X. Jednakost*

$$X = Y_1 \dot{+} Y_2 \dot{+} \cdots \dot{+} Y_m$$

važi ako i samo ako je

$$\dim X = \dim Y_1 + \dim Y_2 + \cdots + \dim Y_m\,.$$

Dakle, ako su B_1, $B_2, \ldots, B_m$ baze potprostora Y_1, $Y_2, \ldots, Y_m$, respektivno, tada unija ovih baza predstavlja bazu prostora X.

1.2. Izomorfizam linearnih prostora

Posmatrajmo skup svih linearnih prostora X nad istim poljem $\mathbb{K}$. Svaki od posmatranih linearnih prostora sadrži konkretne elemente – vektore tog prostora, čija priroda često nije bitna. Daleko značajnije su uvedene operacije (unutrašnja i spoljašnja kompozicija), kao i njihova svojstva koja su nezavisna od prirode elemenata. U vezi s tim, uvešćemo pojam izomorfnih prostora.

Definicija 1.2.1. Za dva vektorska prostora X i X' kažemo da su *izomorfni prostori* ako postoji biunivoko preslikavanje $f\colon X \to X'$ takvo da je za svako $u, v \in X$ i svako $\lambda \in \mathbb{K}$

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \qquad f(\lambda u) = \lambda f(u). \tag{1.2.1}$$

Za funkciju f kažemo da je izomorfizam prostora X na prostor X'.

Napomenimo da se za prvo svojstvo funkcije f u (1.2.1) kaže da je *aditivnost*, a da se njena druga osobina u (1.2.1) naziva *homogenost*.

Neka je $u' = f(u)$ $(u \in X,\ u' \in X')$. Ako sa θ i θ' označimo nula-vektore u prostorima X i X' respektivno, tada, na osnovu (1.2.1), imamo

$$f(\theta) = f(0u) = 0f(u) = 0u' = \theta' . \tag{1.2.2}$$

Dakle, nula-vektor prostora X preslikava se u nula-vektor prostora X'. Još važnije svojstvo izomorfnih prostora odnosi se na preslikavanje skupa linearno nezavisnih vektora.

Teorema 1.2.1. *Neka je $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ skup linearno nezavisnih vektora u X i neka je $f: X \to X'$ izomorfizam prostora X na prostor X'. Tada je $A' = f(A) = \{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ skup linearno nezavisnih vektora u prostoru X'.*

Dokaz. Posmatrajmo linearnu kombinaciju vektora iz skupa A', koja je jednaka θ'. Tada, s obzirom na (1.2.1) i (1.2.2), imamo

$$\theta' = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n) = f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = f(\theta),$$

odakle sleduje

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \theta.$$

Kako su vektori $u_1, \ldots, u_n$ linearno nezavisni, iz poslednje jednakosti zaključujemo da svi skalari λ_k $(k = 1, \ldots, n)$ moraju biti jednaki nuli. □

Teorema 1.2.2. *Dva konačno-dimenzionalna prostora X i X', nad istim poljem $\mathbb{K}$, imaju jednake dimenzije ako i samo ako su izomorfna.*

Dokaz. Na osnovu prethodne teoreme može se zaključiti da izomorfni vektorski prostori imaju jednake dimenzije.

Pretpostavimo sada obrnuto, tj. da je $\dim X = \dim X'$, i dokažimo da su X i X' izomorfni. U prostorima X i X' izaberimo proizvoljne bazise $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $B' = \{u'_1, \ldots, u'_n\}$, respektivno, i definišimo preslikavanje $f: X \to X'$ pomoću

$$f(u) = \lambda_1 u'_1 + \cdots + \lambda_n u'_n, \tag{1.2.3}$$

gde je

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n. \tag{1.2.4}$$

Preslikavanje f je biunivoko jer su razlaganja (1.2.3) i (1.2.4) jedinstvena (videti teoremu 1.1.1). Da bismo dokazali da su prostori X i X' izomorfni, izaberimo dva proizvoljna vektora $u, v \in X$ i proizvoljni skalar $\lambda \in \mathbb{K}$. Neka su koordinatne reprezentacije vektora u i v date sa

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n, \qquad v = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n.$$

Tada imamo

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f\big((\lambda_1+\mu_1)u_1 + \cdots + (\lambda_n+\mu_n)u_n\big) \\ &= (\lambda_1+\mu_1)u_1' + \cdots + (\lambda_n+\mu_n)u_n' \\ &= (\lambda_1 u_1' + \cdots + \lambda_n u_n') + (\mu_1 u_1' + \cdots + \mu_n u_n') \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} f(\lambda u) = f\big((\lambda\lambda_1)u_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n)u_n\big) &= (\lambda\lambda_1)u_1' + \cdots + (\lambda\lambda_n)u_n' \\ = \lambda(\lambda_1 u_1' + \cdots + \lambda_n u_n') &= \lambda f(u)\,. \quad \square \end{aligned}$$

Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da je za proizvoljan n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$, sa algebarske tačke gledišta, dovoljno poznavati vektorski prostor $\mathbb{K}^n$ (za prostor $\mathbb{R}^n$ videti primer 1.1.1). Za vektorski prostor $\mathbb{K}^n$ često kažemo da je *koordinatni* ili *aritmetički* prostor.

Definicija 1.2.2. Ako je preslikavanje f izomorfizam vektorskog prostora $(X, +, \cdot)$ na vektorski prostor $(X, +, \cdot)$, za preslikavanje f kažemo da je *automorfizam prostora* $(X, +, \cdot)$.

1.3. Linearni prostor prosto-periodičnih oscilacija

U primeru 1.1.2 naveli smo da je $\mathbb{C}$ linearni dvodimenzionalni prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$. Uobičajena baza u tom prostoru sastoji se od realne i imaginarne jedinice, tj. $B = \{1, i\}$. Kao što je poznato, svaki vektor $z \in \mathbb{C}$, tj. svaki kompleksan broj $z = (x, y)$, može biti predstavljen u obliku

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy,$$

gde su x i y koordinate (realni i imaginarni deo kompleksnog broja).

Za zadati fiksni pozitivan broj ω, posmatrajmo skup funkcija $t \mapsto u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, definisanih na $\mathbb{R}$, gde je $A \geq 0$ i $-\pi < \varphi \leq \pi$, tj.

$$X_\omega = \Big\{ u \;\Big|\; u(t) = A\cos(\omega t + \varphi),\ A \geq 0,\ -\pi < \varphi \leq \pi \Big\}.$$

Takve funkcije su periodične sa periodom $T = 2\pi/\omega$ i u fizici i tehnici su poznate kao *prosto-periodične oscilacije.* Pri tome, za nenegativni parametar A kaže se da je *amplituda*, dok se za φ kaže da je *početna faza.* Ako je amplituda A jedanka nuli, odgovarajuća funkcija se svodi na nulu i tu funkciju ćemo označavati sa $u_0 = u_0(t) = 0$. Razumljivo, zbog periodičnosti, dovoljno je ove funkcije posmatrati kada proizvod $\omega t \in [-\pi, \pi]$.

Neka su $u_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ i $u_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ dve bilo koje funkcije iz X_ω. Ako u X_ω, na uobičajeni način, uvedemo operaciju sabiranja, tada je

$$\begin{aligned}(u_1 + u_2)(t) &= u_1(t) + u_2(t)\\ &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)\\ &= (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \cos \omega t - (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \sin \omega t,\end{aligned}$$

tj.

$$u(t) = (u_1 + u_2)(t) = A \cos \omega t \cos \varphi - A \sin \omega t \sin \varphi = A \cos(\omega t + \varphi),$$

gde smo stavili

$$A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 = A \cos \varphi, \quad A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 = A \sin \varphi, \tag{1.3.1}$$

pri čemu su $A \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Kvadriranjem jednakosti (1.3.1), a zatim sabiranjem, nalazimo

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Primetimo da je $(A_1 + A_2)^2 \geq A^2 \geq (A_1 - A_2)^2 \geq 0$, tj. da se zaista može uzeti da je $A \geq 0$, kao i da postoji jedinstveno φ iz intervala $(-\pi, \pi]$ za koje važi (1.3.1). Ovo je potpuno analogno određivanju modula i glavne vrednosti argumenta kompleksnog broja

$$z = (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) + i(A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2),$$

koji je, inače, zbir kompleksnih brojeva $z_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$ i $z_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$. Moduo zbira $z = z_1 + z_2$ je, evidentno, jednak A, dok je glavna vrednost njegovog argumenta φ. Dakle,

$$z = z_1 + z_2 = A(\cos \varphi + i \sin \varphi) = Ae^{i\varphi}.$$

Na osnovu prethodnog zaključujemo da zbir $u \in X_\omega$. Nije teško dokazati sledeće tvrđenje:

Teorema 1.3.1. $(X_\omega, +)$ *ima strukturu Abelove grupe.*

Očigledno je da je uvedena operacija sabiranja komutativna i asocijativna. Neutralni element je $u_0 = 0$, dok je za $u = A\cos(\omega t + \varphi)$ simetrični element $u' = -u = A\cos(\omega t + \varphi')$, pri čemu je početna faza

$$\varphi' = \begin{cases} \varphi + \pi, & -\pi < \varphi \le 0, \\ \varphi - \pi, & 0 < \varphi \le \pi. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Primer 1.3.1. Neka su

$$u_1 = \cos(\omega t - \pi/6) \quad \text{i} \quad u_2 = \sqrt{3}\,\cos(\omega t + 2\pi/3),$$

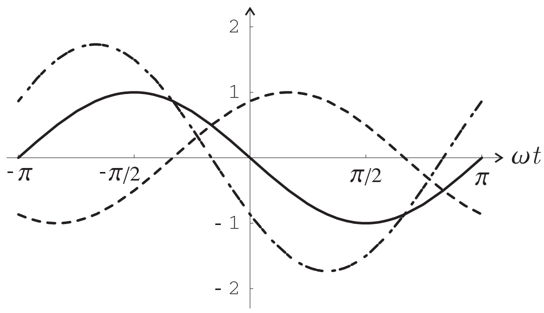
tj. $A_1 = 1$, $\varphi_1 = -\pi/6$, $A_2 = \sqrt{3}$, $\varphi_2 = 2\pi/3$. Kako su, na osnovu prethodnog,

$$A^2 = 1 + 3 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}\,\cos(-\pi/6 - 2\pi/3) = 1,$$

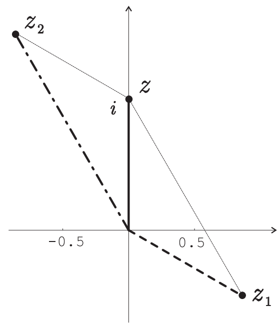
$A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 = 1$, $A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 = 0$, zaključujemo da je $A = 1$ i $\varphi = \pi/2$, tj.

$$u(t) = (u_1 + u_2)(t) = \cos(\omega t + \pi/2) \quad (= -\sin\omega t).$$

Grafici funkcija u_1 (isprekidana linija), u_2 (linija tipa tačka–crta) i zbira u (puna linija), kada $\omega t \in [-\pi, \pi]$, prikazani su na slici 1.3.1.



Sl. 1.3.1



Sl. 1.3.2

S druge strane, odgovarajući kompleksni brojevi $z_1 = e^{-i\pi/6}$ i $z_2 = \sqrt{3}\,e^{i2\pi/3}$ prikazani su na slici 1.3.2. Njihov zbir je $z = z_1 + z_2 = i$, tj. $z = e^{i\pi/2}$. Dakle, moduo je $A = 1$, a glavna vrednost argumenta je $\varphi = \pi/2$.

Primetimo da je znatno lakše obaviti operaciju sabiranja u skupu kompleksnih brojeva, nego sabrati dve prosto-periodične oscilacije. △

Ako uvedemo množenje prosto-periodične oscilacije $u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ skalarom $\lambda \in \mathbb{R}$, pomoću

$$(\lambda u)(t) = \lambda u(t) = \begin{cases} \lambda A\cos(\omega t + \varphi), & \lambda \geq 0, \\ -\lambda A\cos(\omega t + \varphi'), & \lambda < 0, \end{cases}$$

gde je φ' određeno sa (1.3.2), možemo lako zaključiti da, za svako $u, v \in X_\omega$ i svako $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, važe sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned} &\lambda(\mu\, u(t)) = (\lambda\mu)u(t), && (\lambda + \mu)u(t) = \lambda u(t) + \mu u(t), \\ &\lambda(u(t) + v(t)) = \lambda u(t) + \lambda v(t), && 1u(t) = u(t). \end{aligned}$$

Dakle, na osnovu prethodnog zaključujemo da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 1.3.2. *Skup prosto-periodičnih oscilacija X_ω snabdeven operacijom sabiranja $+$ i operacijom množenja realnim skalarom čini vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$.*

I ovaj vektorski prostor, kao i vektorski prostor kompleksnih brojeva nad poljem $\mathbb{R}$ (pomenut na početku ovog odeljka), je dvodimenzionalan. Bilo koje dve linearno nezavisne ne-nula prosto-periodične oscilacije[27)] mogu se uzeti za bazu linearnog prostora X_ω.

Teorema 1.3.3. *Linearni prostori $\mathbb{C}$ i X_ω (nad istim poljem skalara $\mathbb{R}$) su izomorfni.*

Dokaz. Neka je z proizvoljan kompleksni broj predstavljen u Eulerovom obliku $z = Ae^{i\varphi}$, gde A i φ predstavljaju njegov moduo i glavnu vrednost njegovog argumenta, respektivno. Uočimo preslikavanje $f\colon \mathbb{C} \to X_\omega$, definisano pomoću

$$f(Ae^{i\varphi}) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

koje je očigledno biunivoko.

Neka su $z_1 = A_1e^{i\varphi_1}$ i $z_2 = A_2e^{i\varphi_2}$ dva proizvoljna kompleksna broja, čije su slike $u_1(t) = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ i $u_2(t) = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$, respektivno. Kako je $z = z_1 + z_2 = Ae^{i\varphi}$, a $u(t) = u_1(t) + u_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, imamo

$$\begin{aligned} f(A_1e^{i\varphi_1} + A_2e^{i\varphi_2}) = f(Ae^{i\varphi}) &= A\cos(\omega t + \varphi) \\ &= A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= f(A_1e^{i\varphi_1}) + f(A_2e^{i\varphi_2}), \end{aligned}$$

27) Ne-nula prosto-periodične oscilacije sa početnim fazama φ_1 i φ_2 su linearno zavisne (kolinearne) ako su te faze jednake ($\varphi_1 = \varphi_2$) ili ako se razlikuju za π, tj. ako je $\varphi_1 = \varphi_2 \pm \pi$ (videti (1.3.2)).

što znači da je f aditivna funkcija (prvi uslov u (1.2.1)).

Neka je sada $z = Ae^{i\varphi}$ proizvoljan kompleksan broj, φ' definisano sa (1.3.2) i neka je λ proizvoljan realan broj.

Za $\lambda \geq 0$ imamo $f(\lambda Ae^{i\varphi}) = \lambda A\cos(\omega t + \varphi) = \lambda f(Ae^{i\varphi})$, dok je u slučaju $\lambda < 0$,

$$f(\lambda Ae^{i\varphi}) = f(-\lambda Ae^{i\varphi'}) = -\lambda A\cos(\omega t + \varphi') = \lambda A\cos(\omega t + \varphi) = f(Ae^{i\varphi}).$$

Dakle, i drugi uslov u (1.2.1) je zadovoljen.

Ovim smo dokazali da je f izomorfizam prostora $\mathbb{C}$ na prostor X_ω, tj. da su ovi prostori izomofni. $\square$

Zahvaljujući izomorfizmu prostora $\mathbb{C}$ na prostor X_ω, analiza linearnih sistema sa prosto-periodičnim oscilacijama se značajno pojednostavljuje. Naime, sva izračunavanja se mogu sprovesti u prostoru $\mathbb{C}$, a zatim je potrebno samo interpretirati rezultate u prostoru X_ω. Tipičan primer se pojavljuje u elektrotehnici kod analize linearnih električnih kola sa naizmeničnom strujom.

1.4. Normirani prostor

Definicija 1.4.1. Linearni prostor X nad poljem $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$*ili*$\mathbb{N}$) je *normiran* ako postoji nenegativna funkcija $u \mapsto \|u\|$, definisana za svako $u \in X$, takva da je

(1) $\|u\| = 0 \ \Leftrightarrow \ u = \theta$ (definisanost),
(2) $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ (homogenost),
(3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (relacija trougla),

gde su $u, v \in X$ i $\lambda \in \mathbb{K}$. Za ovakvu funkciju $u \mapsto \|u\|$ kažemo da je norma elementa u.

U normirani prostor uvodi se metrika pomoću

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Napomena 1.4.1. Metrika na skupu X je funkcija $d\colon X^2 \to [0, +\infty)$ sa svojstvima datim u definiciji 5.1.1, glava I.

Primer 1.4.1. Vektorski prostor $V_O(E)$ je normiran jer je za svaki vektor $\boldsymbol{r}$ definisan intenzitet ili norma vektora $\|\boldsymbol{r}\| = |\boldsymbol{r}| = r$, pri čemu su ispunjeni svi uslovi iz definicije 1.4.1.

Ako bismo definisali pravougli koordinatni sistem sa bazom $B = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, tada se intenzitet vektora $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ može izraziti u obliku

$$|\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \quad \triangle \tag{1.4.1}$$

Primer 1.4.2. Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ se može normirati uvođenjem norme elementa $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ pomoću

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p} \qquad (1 \le p < +\infty) \tag{1.4.2}$$

ili

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k|.$$

Od svih normi (1.4.2), najčešće se koriste norme za $p = 1$ i $p = 2$, tj. norme

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad \text{i} \qquad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Norma za $p = 2$ poznata je kao euklidska norma i često se označava sa $\|\boldsymbol{x}\|_E$. Specijalno, u prostoru $\mathbb{R}^3$ euklidska norma vektora svodi se na (1.4.1). $\triangle$

Primer 1.4.3. Linearni prostor polinoma $\mathcal{P}_n$ na segmentu $[a, b]$ može postati normiran ako za svako $u \in \mathcal{P}_n$ uvedemo normu, na primer, pomoću

$$\|u\| = \max_{a\le t\le b} |u(t)|.$$

Za ovu normu kažemo da je uniformna norma. $\triangle$

Postojanje norme u linearnom prostoru omogućuje nam da razmatramo problem konvergencije niza tačaka u X.

Definicija 1.4.2. Neka je $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz tačaka u normiranom prostoru X i neka je $u \in X$ takvo da je $\lim\limits_{k\to+\infty} \|u_k - u\| = 0$. Tada kažemo da ovaj niz *konvergira po normi* ka tački u.

S druge strane, kao što je poznato iz prethodne glave (odeljak 2.1), niz $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ za koji je $\lim\limits_{k,n\to+\infty} \|u_k - u_n\| = 0$ naziva se Cauchyev niz.

Definicija 1.4.3. Normiran vektorski prostor je *kompletan prostor* ako u njemu svaki Cauchyev niz konvergira.

Definicija 1.4.4. Za kompletan normirani prostor kažemo da je *Banachov*[28)] *prostor*.

---

28) Stefan Banach (1892–1945), poznati poljski matematičar.

1.5. Skalarni proizvod i unitarni prostor

Definicija 1.5.1. Vektorski prostor X nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ naziva se *prostor sa skalarnim proizvodom* ili *unitarni prostor* ako postoji funkcija $(\cdot,\cdot)\colon X^2 \to \mathbb{C}$ koja za svako $u, v, w \in X$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ zadovoljava sledeće uslove:

(1) $(u, u) \geq 0$,

(2) $(u, u) = 0 \;\Leftrightarrow\; u = \theta$,

(3) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$,

(4) $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$,

(5) $(u, v) = \overline{(v, u)}$.

Funkcija (u, v) se naziva *skalarni proizvod.*

Teorema 1.5.1. *Za skalarni proizvod važi:*

1° $(u, \lambda v) = \bar{\lambda}(u, v)$,

2° $(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$,

3° $|(u, v)|^2 \leq (u, u)(v, v)$.

Dokaz. Tvrđenja 1° i 2° se jednostavno dokazuju. Da bismo dokazali tvrđenje 3°, koje je poznato kao Bunjakowsky–Cauchy–Schwarzova nejednakost (videti odeljak 5.1, glava I), uzmimo tačku $w = u + t(u, v)v$, gde je t realno i $u, v \in X$. Kako je, na osnovu (1) iz definicije 1.5.1,

$$(w, w) = (u + t(u, v)v, u + t(u, v)v) \geq 0,$$

korišćenjem osobina (3)–(5) iz definicije 1.5.1 i osobina 1° i 2° zaključujemo da je

$$(u, u) + 2|(u, v)|^2 t + |(u, v)|^2 (v, v) t^2 \geq 0,$$

odakle sleduje da diskriminanta D dobijenog kvadratnog trinoma mora biti manja ili jednaka nuli, tj.

$$\frac{D}{4} = |(u, v)|^4 - |(u, v)|^2 (u, u)(v, v) \leq 0.$$

Iz poslednje nejednakosti sleduje nejednakost 3°. $\square$

Unitaran vektorski prostor može se normirati uvođenjem norme pomoću

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}, \tag{1.5.1}$$

s obzirom da funkcija $u \mapsto \sqrt{(u,u)}$ ispunjava sve uslove iz definicije 1.4.1. Za tako uvedenu normu kažemo da izvire iz skalarnog proizvoda. S obzirom na (1.5.1), nejednakost $3°$ u teoremi 1.5.1 može se predstaviti u obliku

$$\frac{|(u,v)|}{\|u\| \cdot \|v\|} \le 1 \qquad (u,v \ne \theta). \tag{1.5.2}$$

Ako umesto kompleksnog vektorskog prostora imamo realni vektorski prostor, tada skalarni proizvod $(\cdot,\cdot)\colon X^2 \to \mathbb{R}$, umesto osobine (5) u definiciji 1.5.1, treba da poseduje tzv. osobinu simetrije

(5′) $(u,v) = (v,u)$.

U tom slučaju za prostor X kažemo da je Euklidov ili euklidski prostor.

Posebno ćemo sada razmotriti uvođenje skalarnog proizvoda u trodimenzionalni vektorski prostor $V_O(E)$.

Pretpostavimo da je u prostoru $V_O(E)$ zadata baza $B = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. Neka su dalje

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$$

dva proizvoljna vektora u $V_O(E)$.

Teorema 1.5.2. *Funkcija $(\cdot,\cdot)\colon V_O(E)^2 \to \mathbb{R}$, definisana pomoću*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \tag{1.5.3}$$

je skalarni proizvod.

Dokaz. Direktno ćemo proveriti osobine (1)–(4) iz definicije 1.5.1. Kako je $V_O(E)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$, potrebno je da važi uslov (5′), tj. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$, što je očigledno tačno na osnovu (1.5.3).

Kako je $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, zaključujemo da je $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \ge 0$, pri čemu je $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ ako i samo ako je $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, tj. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$. Takođe, za tri vektora $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}\,(= c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k})$, imamo

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \\ &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}). \end{aligned}$$

Najzad, za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ i svako $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_O(E)$ važi jednakost

$$\begin{aligned}(\lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= (\lambda a_1)b_1 + (\lambda a_2)b_2 + (\lambda a_3)b_3 \\ &= \lambda(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \quad \square\end{aligned}$$

Umesto oznake $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, za skalarni proizvod (1.5.3) češće se koristi oznaka $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ ili još jednostavnije $\boldsymbol{ab}$.

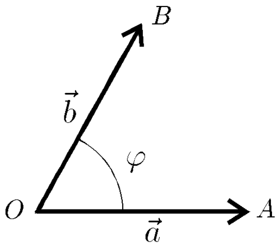
Norma koja izvire iz skalarnog proizvoda (1.5.3) je euklidska norma, definisana pomoću (1.4.1). Dakle, ovde imamo

$$|\boldsymbol{a}|^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

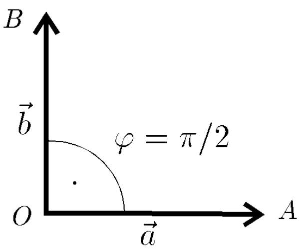
tj.

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

Korišćenjem geometrijske interpretacije vektora, moguće je skalarni proizvod dva vektora uvesti i na jedan drugačiji način. Neka vektori $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ zaklapaju ugao φ (videti sliku 1.5.1).



Sl. 1.5.1



Sl. 1.5.2

Primenom kosinusne teoreme na trougao OAB dobijamo

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\,|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos\varphi,$$

tj.

$$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi \tag{1.5.4}$$

jer je $\overrightarrow{BA} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

S druge strane imamo

$$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}),$$

tj.

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}). \tag{1.5.5}$$

Poređenjem (1.5.4) i (1.5.5) dobijamo jednakost

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi, \tag{1.5.6}$$

koja se može uzeti za definiciju skalarnog proizvoda dva vektora. Nije teško pokazati da su definicione formule (1.5.3) i (1.5.6) ekvivalentne.

Na osnovu (1.5.6), zaključujemo da je skalarni proizvod dva vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ skalar, čija se vrednost nalazi između $-ab$ i $+ab$. Očigledno, iz uslova $\boldsymbol{ab} = 0$ sleduje da je

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o} \quad \vee \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \vee \quad \varphi = \pi/2.$$

Dakle, skalarni proizvod dva vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ jednak je nuli ako je bar jedan od vektora jednak nula-vektoru ili ako su vektori *ortogonalni*, tj. ako je $\varphi = \pi/2$. Na slici 1.5.2 prikazani vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ su ortogonalni.

Kako za bazisne (jedinične) vektore imamo

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1, & \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0, & \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = 0, \\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = 0, & \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = 1, & \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 0, \\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0, & \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} = 0, & \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1, \end{array}$$

zaključujemo da su oni među sobom ortogonalni. Za takvu bazu $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ kažemo da je *ortogonalna baza*. Štaviše, koristi se termin *ortonormirana baza*, ukazujući time da su u pitanju jedinični bazisni vektori. Ako formiramo skalarne proizvode vektora

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},$$

redom sa bazisnim vektorima $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$, dobijamo

$$\boldsymbol{ai} = a_1, \quad \boldsymbol{aj} = a_2, \quad \boldsymbol{ak} = a_3.$$

S druge strane, na osnovu (1.5.6), imamo

$$\boldsymbol{ai} = a\cos\alpha, \quad \boldsymbol{aj} = a\cos\beta, \quad \boldsymbol{ak} = a\cos\gamma,$$

gde su α, β, γ uglovi koje vektor $\boldsymbol{a}$ zaklapa redom sa vektorima $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Dakle, vektor $\boldsymbol{a}$ se može predstaviti u obliku

$$\boldsymbol{a} = a(\cos\alpha \boldsymbol{i} + \cos\beta \boldsymbol{j} + \cos\gamma \boldsymbol{k}). \tag{1.5.7}$$

Kako je $|\boldsymbol{a}| = a$, zaključujemo da je

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Kosinusi uglova α, β, γ mogu se odrediti pomoću

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{a}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{a}.$$

U opštem slučaju, korišćenjem skalarnog proizvoda dva vektora moguće je odrediti ugao φ koji oni zaklapaju. Tako imamo

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{ab} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Primer 1.5.1. Neka su u prostoru $V_O(E)$ dati vektori $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ i $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$. Kako je njihov skalarni proizvod

$$\boldsymbol{ab} = (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k})(4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}) = 2\cdot 4 + 0\cdot 1 + 1\cdot(-3) = 5,$$

a intenziteti

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad \text{i} \quad b = |\boldsymbol{b}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{26},$$

zaključujemo da je $\varphi = \arccos(\sqrt{5/26})$. $\triangle$

Posmatrajmo sada proizvoljni euklidski prostor. Nejednakost (1.5.2) svodi se na

$$-1 \le \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|} \le 1,$$

što daje ideju da se i ovde, kao i u trodimenzionalnom euklidskom prostoru, uvede jedan geometrijski pojam, ugao između dva vektora u i v, pomoću

$$\cos\varphi = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|}. \tag{1.5.8}$$

Primer 1.5.2. Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ postaje euklidski ako se skalarni proizvod uvede pomoću

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

gde su $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Vektori baze $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, dati sa (1.1.4), među sobom su ortogonalni. Dakle, ovo je ortonormirana baza u $\mathbb{R}^n$.

Norma koja izvire iz skalarnog proizvoda, u ovom slučaju

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

je, u stvari, euklidska norma $\|\boldsymbol{x}\|_E$ (videti primer 1.4.2). Na osnovu (1.5.8), ugao između vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ određen je sa

$$\cos\varphi = \frac{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}}.$$

Slično, ako razmatramo kompleksan vektorski prostor $\mathbb{C}^n$, skalarni proizvod je moguće uvesti pomoću

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k.$$

Primetimo da se koordinate vektora $\boldsymbol{y}$ pojavljuju kao konjugovane vrednosti.

Bunjakowsky–Cauchy–Schwarzova nejednakost u $\mathbb{C}^n$ ima oblik

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right)^{1/2}. \quad \triangle$$

Definicija 1.5.2. Unitaran vektorski prostor sa normom (1.5.1) naziva se *pred-Hilbertov*[29)] *prostor*. Ukoliko je ovaj prostor kompletan naziva se *Hilbertov*.

1.6. Konstrukcija ortogonalne baze

Neka je dat linearan prostor X sa skalarnim proizvodom $(\cdot, \cdot)$. U prethodnom odeljku pominjali smo ortogonalnu i ortonormiranu bazu u prostorima $V_O(E)$ i $\mathbb{R}^n$.

[29)] David Hilbert (1862–1943), veliki nemački matematičar.

Definicija 1.6.1. Skup vektora $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ u unitarnom prostoru X je ortogonalan ako je $(u_i, u_k) = 0$, za svako $i \neq k$. Ukoliko je i $\|u_k\| = 1$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, kažemo da je skup U *ortonormiran*.

Neka je $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ proizvoljan skup ortogonalnih nenula vektora. Pokažimo, najpre, da je ovaj skup linearno nezavisan.

Ako pođemo od jednakosti

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \theta$$

i obrazujemo skalarni proizvod sa proizvoljnim vektorom u_k $(1 \leq k \leq n)$, dobijamo

$$\lambda_1(u_1, u_k) + \lambda_2(u_2, u_k) + \cdots + \lambda_n(u_n, u_k) = (\theta, u_k) = 0,$$

što se, zbog ortogonalnosti, svodi na $\lambda_k(u_k, u_k) = 0$. Kako je $(u_k, u_k) = \|u_k\|^2 \neq 0$ i k proizvoljno, sleduje $\lambda_k = 0$, što znači da je posmatrani skup vektora linearno nezavisan.

Jedan ortonormiran skup $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ predstavlja bazu u X ako se svaki vektor $u \in X$, na jedinstven način, može da predstavi linearnom kombinacijom

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n\,. \tag{1.6.1}$$

Očigledno, ovo je moguće ako je $\dim X = n$. Za takvu bazu kažemo da je *ortonormirana*. Obično se vektori ortonormirane baze označavaju sa u_k^* $(k = 1, 2, \dots, n)$. Ukoliko imamo ortogonalnu bazu $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, tada se vektori ortonormirane baze $B^* = \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*\}$ jednostavno dobijaju pomoću

$$u_k^* = \frac{u_k}{\|u_k\|} \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Skalare $x_1, x_2, \dots, x_n$, tj. koordinate vektora u u ortonormiranoj bazi B, možemo dobiti formiranjem skalarnog proizvoda (u, u_k). Tada iz (1.6.1) sleduje

$$x_k = (u, u_k) \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Napomenimo, takođe, da se skalarni proizvod dva vektora u i v predstavljenih u obliku (1.6.1)

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n, \qquad v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \cdots + y_n u_n,$$

svodi na

$$(u, v) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \cdots + x_n\bar{y}_n\,.$$

Naravno,

$$(u, u) = \|u\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2.$$

Zbog jednostavnosti u primenama, ortogonalna baza ima prednosti nad algebarskom bazom u unitarnom (ili Hilbertovom) prostoru. Zato je od interesa proučiti postupak za konstrukciju ortogonalne baze.

Neka je dat skup linearno nezavisnih vektora $\{v_1, v_2, \dots\}$ u n-dimenzionalnom unitarnom prostoru X. Postupak kojim se ovom skupu vektora može pridružiti ortogonalni sistem vektora $\{u_1, u_2, \dots\}$, tako da se lineali nad ovim skupovima poklapaju, poznat je kao *Gram*[30)]*–Schmidtov*[31)] *postupak ortogonalizacije* i on se može iskazati na sledeći način:

Uzmimo najpre $u_1 = v_1$, a zatim u_2 predstavimo u obliku

$$u_2 = v_2 + \lambda_{21}u_1\,,$$

gde je λ_{21} nepoznati parametar koji određujemo iz uslova da je vektor u_2 ortogonalan sa u_1. Tada je

$$(u_2, u_1) = (v_2, u_1) + \lambda_{21}(u_1, u_1) = 0,$$

odakle sleduje

$$\lambda_{21} = -\frac{(v_2, u_1)}{(u_1, u_1)}$$

i

$$u_2 = v_2 - \frac{(v_2, u_1)}{(u_1, u_1)}u_1\,.$$

Pretpostavimo sada da smo konstruisali skup vektora $\{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$. Vektor u_k predstavimo u obliku

$$u_k = v_k + \lambda_{k1}u_1 + \lambda_{k2}u_2 + \cdots + \lambda_{k,k-1}u_{k-1}\,.$$

Tada nepoznate parametre λ_{ki} $(i = 1, 2, \dots, k-1)$ određujemo iz uslova ortogonalnosti vektora u_k sa svim prethodno konstruisanim vektorima u_1, u_2, ..., u_{k-1}. Dakle,

$$(u_k, u_i) = (v_k, u_i) + \sum_{j=1}^{k-1}\lambda_{kj}(u_j, u_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, k-1)\,.$$

---

30) Jorgen Pedersen Gram (1850–1916), danski matematičar.

31) Erhard Schmidt (1876–1959), nemački matematičar.

Kako iz ovih jednakosti sleduje

$$\lambda_{ki} = -\frac{(v_k, u_i)}{(u_i, u_i)} \qquad (i = 1, 2, \dots, k-1),$$

imamo

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(v_k, u_i)}{(u_i, u_i)} u_i \,. \tag{1.6.2}$$

Dakle, u opštem slučaju, vektori ortogonalnog sistema $\{u_1, u_2, \dots\}$ mogu se konstruisati pomoću formule (1.6.2). Odgovarajući ortonomirani sistem vektora je $\{u_1^*, u_2^*, \dots\}$, gde su

$$u_k^* = \frac{u_k}{\|u_k\|} \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije transformiše skup linearno nezavisnih vektora $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ u ortogonalan, a samim tim i linearno nezavisan skup vektora $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Ako ovaj skup ne predstavlja bazu u X, on se uvek može uvođenjem novih ortogonalnih vektora proširiti do baze.

Primer 1.6.1. Neka su u prostoru $V_O(E)$ dati vektori

$$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

Gram–Schmidtovim postupkom ortogonalizacije odredićemo ortogonalnu bazu $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$.

Stavimo, najpre, $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$.

Kako je $\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1 = 4+0+1 = 5$ i $\boldsymbol{b}\boldsymbol{u}_1 = 8+0-3 = 5$, imamo $\lambda_{21} = -5/5 = -1$, pa je

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{b} + \lambda_{21}\boldsymbol{u}_1 = 4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} - (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}) = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}.$$

Kako je, dalje, $\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2 = 4 + 1 + 16 = 21$, $\boldsymbol{c}\boldsymbol{u}_1 = -2 + 0 + 2 = 0$ i $\boldsymbol{c}\boldsymbol{u}_2 = -2 + 2 - 8 = -8$, dobijamo $\lambda_{31} = -0/5 = 0$ i $\lambda_{32} = -(-8)/21 = 8/21$. Tada je

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{c} + \lambda_{31}\boldsymbol{u}_1 + \lambda_{32}\boldsymbol{u}_2 = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} + \frac{8}{21}(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}),$$

tj.

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{5}{21}\big(-\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}\big).$$

Odgovarajuća ortonormirana baza je

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}\big(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}\big),\ \frac{1}{\sqrt{21}}\big(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}\big),\ \frac{1}{\sqrt{105}}\big(-\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}\big) \right\}. \qquad \triangle$$

1.7. Ortogonalni potprostori

Sem ortogonalnih vektora u prostoru X, moguće je razmatrati i tzv. *ortogonalne skupove vektora.* Za dva skupa vektora Y_1 i Y_2 ($Y_1, Y_2 \subset X$) kažemo da su ortogonalna ako je svaki vektor $u \in Y_1$ ortogonalan sa svakim vektorom $v \in Y_2$. Ovu činjenicu označavamo sa $Y_1 \perp Y_2$. Ako skup Y_1 sadrži samo jedan vektor, na primer $Y_1 = \{u\}$, tada se može govoriti o ortogonalnosti vektora u na skup Y_2. Dakle, $u \perp Y_2$ ako je vektor u ortogonalan sa svakim vektorom skupa Y_2. Nije teško dokazati sledeći rezultat:

Teorema 1.7.1. *Da bi vektor $u \in X$ bio ortogonalan na potprostor Y ($Y \subset X$) potrebno je i dovoljno da je on ortogonalan sa svim vektorima proizvoljne baze potprostora Y.*

Dokaz. Neka je $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ proizvoljna baza potprostora Y. Ako je $u \perp Y$, tada je u ortogonalan sa svim vektorima iz Y, pa i sa vektorima baze.

Obrnuto, pretpostavimo da je $(u, v_k) = 0$ za $k = 1, 2, \ldots, m$ i neka je v proizvoljan vektor iz Y. Tada se v može, na jedinstven način, predstaviti pomoću linearne kombinacije bazisnih vektora

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m,$$

odakle dobijamo

$$\begin{aligned}(u, v) &= (u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m)\\ &= \bar{\lambda}_1 (u, v_1) + \bar{\lambda}_2 (u, v_2) + \cdots + \bar{\lambda}_m (u, v_m) = 0.\end{aligned}$$

Dakle, $u \perp Y$. □

Na osnovu prethodnog, zaključujemo da su dva potprostora Y_1 i Y_2 ortogonalna ako i samo ako su im proizvoljne baze ortogonalne.

Za sumu različitih potprostora Y_1, Y_2, $\ldots$, Y_m kažemo da je *ortogonalna* ako su svaka dva potprostora među sobom ortogonalna. Takvu sumu označavamo sa

$$Y = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_m \,. \tag{1.7.1}$$

Teorema 1.7.2. *Ortogonalna suma Y nenula potprostora Y_1, Y_2, $\ldots$, Y_m je uvek direktna suma.*

Dokaz. Ako u svakom od potprostora Y_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) izaberemo ortonormiranu bazu B_k, onda se svaki vektor iz ortogonalne sume (1.7.1) može na jedinstveni način izraziti kao linearna kombinacija vektora iz unije bazisa, tj. iz skupa $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m$. Skup vektora B je baza u Y jer su, zbog ortogonalnosti, svi vektori iz B linearno nezavisni. $\square$

Pretpostavimo da je prostor X ortogonalna suma svojih potprostora Y_1, Y_2, ..., Y_m, tj. da je

$$X = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_m\,.$$

Kako se vektori $u, v \in X$, na jedinstven način, mogu predstaviti u obliku

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_m, \qquad v = v_1 + v_2 + \cdots + v_m\,,$$

gde je $u_k, v_k \in Y_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, skalarni proizvod (u, v) može se izraziti jednostavno kao

$$(u, v) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2) + \cdots + (u_m, v_m)\,.$$

Na kraju ovog odeljka razmotrićemo slučaj dva potprostora koji su komplementarni (videti odeljak 1.1).

Definicija 1.7.1. Neka je Y $(\neq \{\theta\})$ potprostor unitarnog prostora X. Za skup svih vektora $u \in X$ koji su ortogonalni na Y, tj.

$$Y^\perp = \{u \in X \mid u \perp Y\},$$

kažemo da je *ortogonalni komplement potprostora* Y.

Teorema 1.7.3. *Ortogonalni komplement $Y^\perp$ potprostora Y je, takođe, potprostor.*

Dokaz. Ako $u, v \in Y^\perp$, tada je $u \perp Y$ i $v \perp Y$. Takođe, $\alpha u + \beta v \perp Y$ za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, što znači $\alpha u + \beta v \in Y^\perp$. $\square$

Teorema 1.7.4. *Neka je Y potprostor unitarnog prostora X. Tada važi jednakost*

$$X = Y \oplus Y^\perp.$$

Dokaz. U potprostorima Y i $Y^\perp$ izaberimo ortogonalne baze B_1 i B_2, respektivno. Tada je skup vektora $B = B_1 \cup B_2$, zbog ortogonalnosti, linearno nezavisan. Potrebno je dokazati da je skup vektora B baza prostora X.

Pretpostavimo suprotno, tj. da B nije baza, a zatim dopunimo ovaj skup ortogonalnim vektorima do baze. Označimo sa e $(\in X)$ jedan od tih dopunskih vektora. Tada iz činjenice da je $e \perp B_1$ sleduje $e \perp Y$, tj. $e \in Y^\perp$. Isto tako, iz $e \perp B_2$ sleduje $e \perp Y^\perp$. Dakle, vektor e istovremeno pripada $Y^\perp$ i ortogonalan je na $Y^\perp$, što je moguće jedino ako je $e = \theta$. Kako nula-vektor ne može biti bazisni vektor, zaključujemo da je skup B baza. $\square$

2. MATRICE I DETERMINANTE

2.1. Pojam matrice

U mnogim problemima nauke i tehnike veoma je čest slučaj da se pojavljuju izvesne „veličine“ opisane konačnim ili beskonačnim nizom brojeva, na primer,

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n \qquad \text{ili} \qquad a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n,\ \ldots\ ,$$

ili pak nekom pravougaonom šemom brojeva, na primer,

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{matrix}$$

u kojoj se pojavljuje m vrsta i n kolona. Napomenimo da, ponekad, broj vrsta i kolona ne mora biti konačan. Jasno je da svaki niz može biti tretiran kao pravougaona šema sa jednom vrstom ($m = 1$). Obično, brojevi a_i, ili a_{ij}, pripadaju nekom brojnom polju $\mathbb{K}$. U našim razmatranjima uvek ćemo pretpostavljati da je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. U opštem slučaju, kao elementi pravougaone šeme mogu se pojavljivati i drugačije „veličine“.

Definicija 2.1.1. Za pravougaonu šemu brojeva $a_{ij} \in \mathbb{K}$ ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$), predstavljenu u obliku

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{2.1.1}$$

kažemo da je *matrica* tipa $m \times n$ nad poljem $\mathbb{K}$, a za brojeve a_{ij} kažemo da su elementi matrice A.

U zavisnosti od toga da li je polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, za matrice kažemo da su *realne* ili kompleksne matrice.

Umesto oznake (2.1.1) u upotrebi su i označavanja

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{Vmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Elementi matrice A sa istim prvim indeksom čine jednu vrstu matrice. Na primer, elementi

$$a_{i1},\ a_{i2},\ \dots\ ,\ a_{in}$$

čine i-tu vrstu matrice A. Slično, elementi sa istim drugim indeksom čine jednu kolonu matrice. Prema tome, prvi indeks određuje pripadnost vrsti, a drugi indeks pripadnost koloni matrice. Element a_{ij} pripada i-toj vrsti i j-toj koloni matrice A, tj. on se nalazi u preseku i-te vrste i j-te kolone matrice, pa se za njega kaže da se nalazi na mestu (i, j) u matrici A. Kod označavanja elementa matrice a_{ij}, indekse i i j obično ne odvajamo zapetom, tj. ne pišemo $a_{i,j}$, sem u slučajevima kada je to neophodno radi identifikacije. Na primer, $a_{2i-1,j+1}$ je element koji se nalazi na mestu $(2i-1, j+1)$ u datoj matrici A.

Umesto oznake (2.1.1) često se koristi kraći zapis

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\,,$$

pri čemu a_{ij} predstavlja opšti element matrice A, koja ima m vrsta i n kolona. Dakle, prvi indeks i uzima redom vrednosti iz skupa $\{1, 2, \dots , m\}$, a drugi indeks j iz skupa $\{1, 2, \dots , n\}$.

Ako su dve matrice istog tipa, za elemente na mestu (i, j) kažemo da su *odgovarajući elementi*. Na primer, za matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ elementi a_{ij} i b_{ij} su odgovarajući.

Definicija 2.1.2. Za dve matrice A i B kažemo da su *jednake matrice* ako su istog tipa i ako su im odgovarajući elementi jednaki.

To znači da su matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ jednake ako i samo ako je $m = p$, $n = q$ i $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots , m;\ j = 1, 2, \dots , n)$.

Napomenimo da je jednakost matrica, uvedena definicijom 2.1.2, jedna relacija ekvivalencije u skupu matrica.

Definicija 2.1.3. Matricu tipa $m \times n$ čiji su svi elementi jednaki nuli nazivamo *nula-matrica* i označavamo sa O_{mn}.

U slučajevima kada ne može doći do zabune, nula-matricu označavaćemo jednostavno sa O.

Matricu tipa $1 \times n$ nazivamo *matrica-vrsta* i tada pri pisanju elemenata izostavljamo prvi indeks. Na primer, matrica-vrsta je

$$[\,a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n\,].$$

Slično, matricu tipa $n \times 1$ nazivamo *matrica-kolona*. U ovom slučaju, koristi se i termin *vektor-kolona*, ili prosto *vektor*, i pri tom se označava sa

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

U ovom slučaju za elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kažemo da su *koordinate* ili *komponente vektora* $\boldsymbol{a}$. Često za i-tu koordinatu vektora $\boldsymbol{a}$ koristimo oznaku $a_i = \{\boldsymbol{a}\}_i$.

Ako su svi elementi vektora jednaki nuli, govorićemo da je to *nula-vektor* i označavaćemo ga sa $\boldsymbol{o}_n$, ili jednostavno sa $\boldsymbol{o}$, kada ne može doći do zabune.

Definicija 2.1.4. Za matricu tipa

$$A = [a_{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

kažemo da je *kvadratna matrica* reda n nad poljem $\mathbb{K}$.

Umesto oznake $[a_{ij}]_{n\times n}$, korišćene u (2.1.2), za kvadratne matrice reda n često se koristi oznaka $[a_{ij}]_1^n$, koja ukazuje da oba indeksa (i i j) uzimaju redom vrednosti od 1 do n.

Svi elementi kvadratne matrice A, kod kojih su oba indeksa jednaka, tj. elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, obrazuju *glavnu dijagonalu matrice* A. Slično, elementi $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ obrazuju *sporednu dijagonalu matrice* A.

Kvadratnu matricu D, formiranu samo od dijagonalnih elemenata matrice A, tj. od elemenata na glavnoj dijagonali, označavaćemo sa $\operatorname{diag} A$. Dakle,

$$D = \operatorname{diag} A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix},$$

ali i

$$D = \operatorname{diag} A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

Svi elementi van glavne dijagonale matrice $D = \operatorname{diag} A$ su jednaki nuli. Dakle, u opštem slučaju, ako su elementi kvadratne matrice $D = [d_{ij}]_1^n$ takvi da je $d_{ij} = 0$ za svako $i \neq j$, a bar jedan element na glavnoj dijagonali različit od nule, za matricu D kažemo da je *dijagonalna*.

Definicija 2.1.5. Dijagonalna matrica reda n čiji su svi elementi na dijagonali jednaki jedinici naziva se *jedinična matrica* i označava se sa I_n.

Prema tome važi jednakost $I_n = \operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1)$.

U slučajevima kada je jasno koga je reda, jediničnu matricu I_n označavamo samo sa I.

Uvođenjem *Kroneckerove*[32)] *delte*, pomoću

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

jedinična matrica I_n može se predstaviti kao

$$I_n = [\delta_{ij}]_1^n.$$

Na kraju, uvedimo i pojam tzv. trougaone matrice:

Definicija 2.1.6. Ako za kvadratnu matricu $R = [r_{ij}]_1^n$ važi

$$i > j \quad \Rightarrow \quad r_{ij} = 0,$$

kažemo da je R *gornja trougaona matrica.*

Ako za kvadratnu matricu $L = [l_{ij}]_1^n$ važi

$$i < j \quad \Rightarrow \quad l_{ij} = 0,$$

32) Leopold Kronecker (1823–1891), nemački matematičar.

kažemo da je L *donja trougaona matrica*.

Dakle, gornja i donja trougaona matrica reda n imaju sledeće oblike:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

Primetimo da su svi elementi ispod glavne dijagonale u matrici R, kao i svi elementi iznad glavne dijagonale u matrici L, jednaki nuli.

2.2. Linearni operatori

Neka su X i Y linearni prostori nad istim poljem skalara $\mathbb{K}$. Pod operatorom $\mathcal{A}\colon X \to Y$ podrazumeva se preslikavanje

$$u \mapsto g = \mathcal{A}u \tag{2.2.1}$$

koje svakom elementu $u \in X$ pridružuje samo jedan element $g \in Y$.

Prostor X se naziva *oblast definisanosti operatora* $\mathcal{A}$. Element g iz (2.2.1) naziva se slika elementa u, a sam element u original. Skup svih slika, tj. $\{\mathcal{A}u \mid u \in X\}$, naziva se oblast vrednosti operatora $\mathcal{A}$ i označava se sa $\mathcal{A}(X)$. U slučaju, kada svakom elementu $g \in \mathcal{A}(X)$ odgovara samo jedan original, za operator se kaže da je *obostrano jednoznačan*, tj. da je preslikavanje $\mathcal{A}$ bijekcija prostora X na $\mathcal{A}(X)$.

U daljem razmatranju interesuju nas samo tzv. *linearni operatori*, koji imaju značajnu ulogu u opštoj teoriji operatora. Posebno su interesantni linearni operatori na konačno-dimenzionalnim prostorima jer su oni u uskoj vezi sa teorijom matrica.

Pre nego što definišemo linearni operator, definisaćemo aditivni operator i homogeni operator.

Definicija 2.2.1. Operator $\mathcal{A}\colon X \to Y$ je *aditivan* ako je

$$\mathcal{A}(u+v) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}v$$

za svako $u, v \in X$.

Definicija 2.2.2. Operator $\mathcal{A}\colon X \to Y$ je *homogen* ako je

$$\mathcal{A}(\lambda u) = \lambda \mathcal{A}u$$

za svako $u \in X$ i svako $\lambda \in \mathbb{K}$.

Definicija 2.2.3. Operator $\mathcal{A}: X \to Y$ je *linearan* ako je istovremeno aditivan i homogen, tj. ako je za svako $u, v \in X$ i svako $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\mathcal{A}(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathcal{A}u + \mu \mathcal{A}v.$$

Definicija 2.2.4. Za operator $\mathcal{I}: X \to X$, za koji je $\mathcal{I}u = u$ za svako $u \in X$, kažemo da je *identički operator*.

Primer 2.2.1. Neka je α fiksirani skalar iz polja $\mathbb{K}$ i neka je operator $\mathcal{A}: X \to X$ definisan pomoću $\mathcal{A}u = \alpha u$ za svako $u \in X$. Operator $\mathcal{A}$ je linearan jer je

$$\mathcal{A}(\lambda u + \mu v) = \alpha(\lambda u + \mu v) = (\alpha\lambda)u + (\alpha\mu)v = (\lambda\alpha)u + (\mu\alpha)v,$$

tj.

$$\mathcal{A}(\lambda u + \mu v) = \lambda(\alpha u) + \mu(\alpha v) = \lambda \mathcal{A}u + \mu \mathcal{A}v.$$

Ovako definisan operator $\mathcal{A}$ naziva se *skalarni operator*. U specijalnom slučaju, kada je $\alpha = 0$, operator $\mathcal{A}$ se svodi na tzv. *nula-operator* $\mathcal{O}$, dok se za $\alpha = 1$ operator $\mathcal{A}$ svodi na identički (jedinični) operator $\mathcal{I}$.

Primetimo da nula-operator $\mathcal{O}$ preslikava svako $u \in X$ na neutralni element $\theta \in X$, tj. da je $\mathcal{O}u = \theta$. Primetimo, takođe, da se nula-operator može definisati i kao operator koji preslikava svaku tačku prostora X na neutralni element prostora Y. $\triangle$

Skup svih linearnih operatora koji preslikavaju prostor X u prostor Y, označićemo sa $L(X, Y)$.

Teorema 2.2.1. *Neka je $\mathcal{A} \in L(X, Y)$. Tada je $\mathcal{A}\theta = \theta$.*

Dokaz. Kako je

$$\mathcal{A}\theta = \mathcal{A}(\theta + \theta) = \mathcal{A}\theta + \mathcal{A}\theta,$$

zaključujemo da je $\mathcal{A}\theta = \theta$. $\square$

Na samom početku ovog odeljka pomenuli smo $\mathcal{A}(X)$ kao oblast vrednosti operatora $\mathcal{A}$. Za linearni operator $\mathcal{A}$ sa $T_{\mathcal{A}}$ označimo ovu oblast. Nije teško utvrditi da je $T_{\mathcal{A}}$ potprostor prostora Y. Zaista, ako je $g = \mathcal{A}u$ i $h = \mathcal{A}v$, vektor $\alpha g + \beta h$ je slika vektora $\alpha u + \beta v$, za svako $\alpha, \beta \in K$. Dakle, $\alpha g + \beta h \in T_{\mathcal{A}}$.

Definicija 2.2.5. *Rang operatora* $\mathcal{A} \in L(X, Y)$, u oznaci $r_{\mathcal{A}}$ ili $\operatorname{rang} \mathcal{A}$, je dimenzija potprostora $T_{\mathcal{A}}$, tj.

$$r_{\mathcal{A}} = \operatorname{rang} \mathcal{A} = \dim(T_{\mathcal{A}}).$$

U vezi sa potprostorom $T_{\mathcal{A}}$ može se razmatrati i skup vektora $u \in X$ koji zadovoljavaju jednakost $\mathcal{A}u = \theta$.

Definicija 2.2.6. *Jezgro operatora* $\mathcal{A} \in L(X, Y)$, u oznaci $N_{\mathcal{A}}$ ili $\ker \mathcal{A}$, je skup

$$N_{\mathcal{A}} = \ker \mathcal{A} = \{u \in X \mid \mathcal{A}u = \theta\}.$$

Dimenzija jezgra naziva se defekt operatora $\mathcal{A}$ i označava se sa $n_{\mathcal{A}}$ ili $\operatorname{def} \mathcal{A}$.

Jezgro operatora $\ker \mathcal{A} \subset X$ je potprostor prostora X, s obzirom na implikaciju

$$u, v \in \ker \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}) \;\; \alpha u + \beta v \in \ker \mathcal{A}\,.$$

Rang operatora i defekt operatora nisu nezavisne karakteristike linearnog operatora. O tome govori sledeća teorema:

Teorema 2.2.2. *Neka je* $\dim X = n$ *i* $\mathcal{A} \in L(X, Y)$. *Tada je*

$$\operatorname{rang} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A} = n. \tag{2.2.2}$$

Dokaz. Razložimo X na direktnu sumu

$$X = N_{\mathcal{A}} \dotplus M_{\mathcal{A}}\,, \tag{2.2.3}$$

gde je $N_{\mathcal{A}}$ jezgro operatora $\mathcal{A}$, a $M_{\mathcal{A}}$ bilo koji njemu komplementaran potprostor. Za svaki element $g \in T_{\mathcal{A}}$ postoji $u \in X$ takav da je $g = \mathcal{A}u$. Kako se $u \in X$ može predstaviti u obliku zbira

$$u = u_N + u_M,$$

gde $u_N \in N_{\mathcal{A}}$ i $u_M \in M_{\mathcal{A}}$, imamo

$$g = \mathcal{A}u = \mathcal{A}(u_N + u_M) = \mathcal{A}u_N + \mathcal{A}u_M = \mathcal{A}u_M$$

jer je $\mathcal{A}u_N = \theta$. Drugim rečima, proizvoljan vektor $g \in T_{\mathcal{A}}$ je slika jednog vektora iz $M_{\mathcal{A}}$. Može se dokazati da je takav vektor $u_M \in M_{\mathcal{A}}$ jedinstven. Naime, ako pretpostavimo postojanje dva vektora $u_M \in M_{\mathcal{A}}$ i $u'_M \in M_{\mathcal{A}}$, za koje je

$$g = \mathcal{A}u_M = \mathcal{A}u'_M,$$

tada imamo

$$\mathcal{A}(u_M - u'_M) = \theta,$$

tj. $u_M - u'_M \in N_{\mathcal{A}}$.

S druge strane, $u_M - u'_M \in M_{\mathcal{A}}$ jer je $M_{\mathcal{A}}$ potprostor. Kako je, međutim, $N_{\mathcal{A}} \cup M_{\mathcal{A}} = \{\theta\}$, zaključujemo da mora biti $u_M = u'_M$.

Prema tome, linearni operator $\mathcal{A}$ predstavlja biunivoko preslikavanje vektora iz potprostora $M_{\mathcal{A}}$ na $T_{\mathcal{A}}$, tj. $\mathcal{A}$ je izomorfizam, odakle zaključujemo da je $\dim(M_{\mathcal{A}}) = \dim(T_{\mathcal{A}}) = r_{\mathcal{A}}$. Tada, na osnovu (1.1.5) i (2.2.3), imamo

$$\dim(X) = \dim(N_{\mathcal{A}}) + \dim(M_{\mathcal{A}}),$$

tj. (2.2.2). $\square$

Na osnovu (2.2.2) imamo

$$\operatorname{rang}\mathcal{A} = \dim T_{\mathcal{A}} \le \dim X = n, \tag{2.2.4}$$

što znači da dimenzija oblasti vrednosti operatora ne može biti veća od dimenzije oblasti definisanosti operatora.

U daljem tekstu neka su $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in L(X, Y)$.

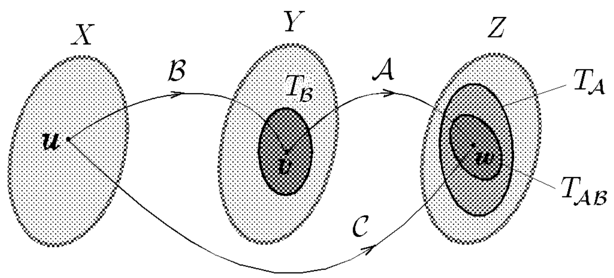
Definicija 2.2.7. *Zbir operatora* $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, u oznaci $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, je operator $\mathcal{C}$ određen pomoću

$$\mathcal{C}u = (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u \qquad (\forall u \in X).$$

Definicija 2.2.8. Proizvod operatora $\mathcal{A}$ i skalara λ iz polja $\mathbb{K}$ je operator $\mathcal{C}$ određen pomoću

$$\mathcal{C}u = (\lambda\mathcal{A})u = \lambda(\mathcal{A}u) \qquad (\forall u \in X).$$

Interesantan slučaj je za $\lambda = -1$. Odgovarajući operator $-\mathcal{A}$ nazivamo *suprotan operator* operatoru $\mathcal{A}$. Primetimo da je $\mathcal{A} + (-\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ nula-operator. Naime, $\mathcal{O}u = \theta$ $(\forall u \in X)$.



Sl. 2.2.1

Definicija 2.2.9. *Proizvod operatora* $\mathcal{A}: Y \to Z$ i $\mathcal{B}: X \to Y$ je operator $\mathcal{C} = \mathcal{AB}: X \to Z$, definisan pomoću

$$\mathcal{C}u = \mathcal{AB}u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u) \qquad (\forall u \in X).$$

Na slici 2.2.1 prikazan je proizvod dva operatora uključujući i odgovarajuće oblasti vrednosti operatora. Interesantno je pitanje o odnosu ranga operatora $\mathcal{C} = \mathcal{AB}$ i ranga operatora $\mathcal{A}$, tj. $\mathcal{B}$.

Kako je (videti sliku 2.2.1) $T_\mathcal{C} = T_{\mathcal{AB}} \subset T_\mathcal{A} \subset Z$, imamo

$$\dim T_\mathcal{C} = \dim T_{\mathcal{AB}} \le \dim T_\mathcal{A} \le \dim Z,$$

tj.

$$\operatorname{rang} \mathcal{C} = \operatorname{rang}(\mathcal{AB}) \le \operatorname{rang} \mathcal{A} \le \dim Z.$$

Primetimo, takođe, da je $\operatorname{rang} \mathcal{B} = \dim T_\mathcal{B} \le \dim Y$.

S druge strane, ako posmatramo operator $\mathcal{A}$ kao preslikavanje $T_\mathcal{B}$ u Z (tj. na $T_{\mathcal{AB}}$) imamo, saglasno (2.2.4),

$$\operatorname{rang}(\mathcal{AB}) = \dim T_{\mathcal{AB}} \le \dim T_\mathcal{B} = \operatorname{rang} \mathcal{B}.$$

Dakle, važi sledeća teorema:

Teorema 2.2.3. *Za operatore* $\mathcal{A}: Y \to Z$ *i* $\mathcal{B}: X \to Y$ *važi*

$$\operatorname{rang}(\mathcal{AB}) \le \min\bigl(\operatorname{rang} \mathcal{A}, \operatorname{rang} \mathcal{B}\bigr). \tag{2.2.5}$$

Može se dati i donje ograničenje za $\operatorname{rang}(\mathcal{AB})$.

Teorema 2.2.4. *Neka su* X, Y, Z *konačno-dimenzionalni prostori. Za operatore* $\mathcal{A}: Y \to Z$ *i* $\mathcal{B}: X \to Y$ *važi*

$$\operatorname{rang} \mathcal{A} + \operatorname{rang} \mathcal{B} - \dim Y \le \operatorname{rang}(\mathcal{AB}). \tag{2.2.6}$$

Dokaz. Primena formule (2.2.2) na operator $\mathcal{A}: Y \to Z$ daje

$$\operatorname{rang} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A} = \dim Y, \tag{2.2.7}$$

gde je $\operatorname{def} \mathcal{A}$ dimenzija jezgra operatora $\mathcal{A}$, tj. dimenzija potprostora $\{v \in Y \mid \mathcal{A}v = \theta\}$.

S druge strane, posmatrajući operator $\mathcal{A}$ kao preslikavanje $T_{\mathcal{B}}$ u Z (tj. na $T_{\mathcal{AB}}$) imamo

$$\operatorname{rang}(\mathcal{AB}) + d = \dim T_{\mathcal{B}} = \operatorname{rang} \mathcal{B}, \tag{2.2.8}$$

gde je d dimenzija jezgra $\{v \in T_{\mathcal{B}} \mid \mathcal{A}v = \theta\}$. Imajući u vidu da je $T_{\mathcal{B}} \subset Y$, zaključujemo da je $d \leq \operatorname{def} \mathcal{A}$, što zajedno sa (2.2.7) i (2.2.8) daje (2.2.6). $\square$

Nejednakost (2.2.6) je poznata kao *Sylvesterova*[33] *nejednakost*.

Ako za svako $u \in X \Rightarrow \mathcal{A}u \in X$, tada se može definisati iterirani operator $\mathcal{A}^n$ (n-ti stepen operatora $\mathcal{A}$) kao

$$\mathcal{A}^n = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{n-1}) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

pri čemu je $\mathcal{A}^0 = \mathcal{I}$ identički operator.

Za operatore $\mathcal{A}^n$ i $\mathcal{A}^m$ ($n, m \in \mathbb{N}_0$) važi jednakost

$$\mathcal{A}^n \mathcal{A}^m = \mathcal{A}^{n+m}.$$

U daljem tekstu izučićemo algebarsku strukturu skupa $L(X, Y)$ u odnosu na prethodno uvedene operacije sabiranja operatora, množenja operatora skalarom i množenja dva operatora.

Neka su X, Y, Z linearni prostori nad poljem skalara $\mathbb{K}$. Nije teško pokazati da su operatori uvedeni definicijama 2.2.7, 2.2.8 i 2.2.9, takođe, linearni operatori.

Teorema 2.2.5. *Važe implikacije*

(1) $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(X, Y) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} + \mathcal{B} \in L(X, Y)$,

(2) $\mathcal{A} \in L(X, Y),\ \lambda \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad \lambda\mathcal{A} \in L(X, Y)$,

(3) $\mathcal{A} \in L(Y, Z),\ \mathcal{B} \in L(X, Y) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{AB} \in L(X, Z)$.

Uvedena operacija sabiranje operatora obezbeđuje da skup linearnih operatora koji preslikavaju X u Y ima strukturu Abelove grupe. Naime, važi sledeći rezultat:

Teorema 2.2.6. *Za svako* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in L(X, Y)$ *imamo:*

(1) $\mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = (\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C}$,

(2) $\mathcal{A} + \mathcal{O} = \mathcal{O} + \mathcal{A} = \mathcal{A}$,

[33] James Joseph Sylvester (1814–1897), engleski matematičar.

(3) *Za svaki operator* $\mathcal{A} \in L(X,Y)$ *postoji jedinstven njemu suprotan operator* $-\mathcal{A} \in L(X,Y)$ *takav da je*

$$\mathcal{A} + (-\mathcal{A}) = (-\mathcal{A}) + \mathcal{A} = \mathcal{O}\,,$$

(4) $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}\,.$

Dakle, struktura $(L(X,Y), +)$ je Abelova grupa. Neutralni element je nula-operator $\mathcal{O}$.

Takođe, bez dokaza navodimo i sledeće tvrđenje:

Teorema 2.2.7. *Za svako* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in L(X,Y)$ *i svako* λ, $\mu \in \mathbb{K}$ *važi*

(1) $\lambda(\mu\mathcal{A}) = (\lambda\mu)\mathcal{A}\,,$
(2) $(\lambda + \mu)\mathcal{A} = \lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{A}\,,$
(3) $\lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \lambda\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}\,,$
(4) $1\mathcal{A} = \mathcal{A}\,.$

Definicijom 2.2.8 uvedeno je množenje operatora skalarom. Na osnovu teorema 2.2.6 i 2.2.7 zaključujemo da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.2.8. *Skup* $L(X,Y)$*, snabdeven operacijom sabiranja kao unutrašnjom kompozicijom i množenjem operatora skalarom kao spoljašnjom kompozicijom, obrazuje linearni prostor nad poljem skalara* $\mathbb{K}$.

Imajući u vidu definiciju 2.2.9, u vezi sa množenjem dva operatora, može se dokazati sledeća teorema:

Teorema 2.2.9. *Neka su* X, Y, Z, W *linearni prostori nad poljem* $\mathbb{K}$*. Tada važi:*

(1) $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$ *za svako* $\mathcal{A} \in L(Z,W)$, $\mathcal{B} \in L(Y,Z)$, $\mathcal{C} \in L(X,Y)\,,$
(2) $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}$ *za svako* $\mathcal{A} \in L(Y,Z)$, $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in L(X,Y)\,,$
(3) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}$ *za svako* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(Y,Z)$, $\mathcal{C} \in L(X,Y)\,.$

Dokaz. Dokaz asocijativnosti množenja sleduje iz činjenice da za svako $u \in X$ imamo:

$$\big(\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C})\big)u = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}u) = \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\mathcal{C}u)\big),$$
$$\big((\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}\big)u = \mathcal{A}\mathcal{B}(\mathcal{C}u) = \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\mathcal{C}u)\big).$$

Za dokaz distributivnosti množenja operatora prema sabiranju operatora pođimo, opet, od proizvoljnog vektora $u \in X$. Tada imamo redom

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C})\big)u &= \mathcal{A}\big((\mathcal{B}+\mathcal{C})u\big) = \mathcal{A}(\mathcal{B}u+\mathcal{C}u) = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)+\mathcal{A}(\mathcal{C}u)\\ &= (\mathcal{A}\mathcal{B})u+(\mathcal{A}\mathcal{C})u = (\mathcal{A}\mathcal{B}+\mathcal{A}\mathcal{C})u,\end{aligned}$$

odakle sleduje jednakost (2). Dokaz poslednje jednakosti izvodi se na sličan način. $\square$

Za skup linearnih operatora koji preslikavaju X u X, u oznaci $L(X,X)$, na osnovu prethodnog zaključujemo da važi sledeći rezultat:

Teorema 2.2.10. *$(L(X,X),+,\cdot)$, gde je $+$ sabiranje operatora, a $\cdot$ množenje operatora, ima algebarsku strukturu prstena.*

U skupu linearnih operatora koji preslikavaju X u X, za koje obično kažemo da deluju u X, moguće je odrediti neki podskup operatora koji ima strukturu grupe u odnosu na operaciju množenja operatora. Da bi se odredio takav podskup potrebno je uvesti pojam regularnog operatora.

Definicija 2.2.10. Za linearni operator $\mathcal{A}\colon X \to X$ kažemo da je *regularan* ili da je *nesingularan* ako se njegovo jezgro sastoji samo od nula-vektora θ.

Za operator koji nije regularan kažemo da je singularan ili da je *neregularan operator*.

Primer 2.2.2. Skalarni operator $\mathcal{A}$, uveden u primeru 2.2.1, je regularan operator za svako $\alpha \neq 0$. Na primer, identički (jedinični) operator $\mathcal{I}$ je regularan ($\alpha = 1$), ali je nula-operator $\mathcal{O}$ singularan ($\alpha = 0$). $\triangle$

Regularni operatori poseduju više interesantnih osobina:

1° Defekt regularnog operatora $\mathcal{A}\colon X \to X$ jednak je nuli, odakle je

$$\operatorname{rang}(\mathcal{A}) = \dim X\,;$$

2° $T_{\mathcal{A}} = X$;

3° Za svako $g \in X$ postoji jedinstveno $u \in X$ takvo da je $\mathcal{A}u = g$ (jedinstvenost originala);

4° Proizvod konačnog broja regularnih operatora je regularan operator.

Osobina 3° je izuzetno važna. Da bismo je dokazali pretpostavimo da za neko $g \in X$ postoje dva vektora u, $u' \in X$ takva da je

$$\mathcal{A}u = g \qquad \text{i} \qquad \mathcal{A}u' = g.$$

Tada je $\mathcal{A}(u-u')=\theta$. Kako se, s druge strane, jezgro regularnog operatora $\mathcal{A}$ sastoji samo od nula-vektora, zaključujemo da je $u-u'=\theta$, tj. $u=u'$. Napomenimo da se često za definiciju regularnog operatora uzima osobina 3°.

Osobine 2° i 3° kazuju da je regularan operator $\mathcal{A}$ bijekcija prostora X na X.

Ranije smo videli da za proizvod operatora generalno važi asocijativni zakon, što znači da i na podskupu regularnih operatora koji preslikavaju X na X ovaj zakon važi.

Vidimo, takođe, da važi

$$(\forall\,\mathcal{A}\colon X\to X)\qquad \mathcal{A}\mathcal{I}=\mathcal{I}\mathcal{A}=\mathcal{A},$$

gde je $\mathcal{I}$ identički operator u X, za koji smo već videli da je regularan operator.

Da bi skup svih regularnih operatora koji deluju u X činio grupu u odnosu na množenje operatora, dovoljno je još pokazati da za svaki regularan operator $\mathcal{A}$ postoji regularan operator $\mathcal{A}^{-1}$, takav da je

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}=\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}=\mathcal{I}.$$

Saglasno osobinama 2° i 3° da svakom vektoru $g\in X$ odgovara jedan i samo jedan vektor $u\in X$, može se za svaki regularan operator $\mathcal{A}$ definisati inverzan operator $\mathcal{A}^{-1}$.

Definicija 2.2.11. Neka je $\mathcal{A}\colon X\to X$ regularan operator. Za preslikavanje $\mathcal{A}^{-1}$, za koje važi

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}u)=u\qquad(\forall u\in X),$$

kažemo da je *inverzan operator* od $\mathcal{A}$.

Teorema 2.2.11. *Neka je $\mathcal{A}\colon X\to X$ regularan linearni operator. Tada je inverzan operator $\mathcal{A}^{-1}$, takođe, regularan linearni operator.*

Dokaz. Neka su $\mathcal{A}u_1=g_1$ i $\mathcal{A}u_2=g_2$, tj. $\mathcal{A}^{-1}g_1=u_1$ i $\mathcal{A}^{-1}g_2=u_2$, i neka su c_1 i c_2 proizvoljni skalari iz polja $\mathbb{K}$. S obzirom da je $\mathcal{A}$ linearan operator, imamo

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{-1}(c_1g_1+c_2g_2)&=\mathcal{A}^{-1}(c_1\mathcal{A}u_1+c_2\mathcal{A}u_2)\\&=\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(c_1u_1+c_2u_2)\\&=c_1u_1+c_2u_2\\&=c_1\mathcal{A}^{-1}g_1+c_2\mathcal{A}^{-1}g_2.\end{aligned}$$

Dokažimo da je i $\mathcal{A}^{-1}$ regularan operator.

Za svako $g \in \ker \mathcal{A}^{-1}$ imamo

$$\mathcal{A}^{-1}g = \theta.$$

Primenom operatora $\mathcal{A}$ na levu i desnu stranu poslednje jednakosti dobijamo

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}g) = \mathcal{A}\theta,$$

tj. $g = \theta$, jer je $\mathcal{A}\theta = \theta$. Dakle, jezgro operatora $\mathcal{A}^{-1}$ sastoji se samo od nula-vektora, tj. operator $\mathcal{A}^{-1}$ je regularan operator. □

Dakle, skup svih regularnih operatora čini grupu u odnosu na množenje operatora. Ova grupa nije komutativna. Međutim, moguće je izabrati jedan podskup S_k regularnih operatora tako da $(S_k, \cdot)$ ima strukturu komutativne grupe.

2.3. Matrica linearnog operatora na konačno-dimenzionalnim prostorima

Neka su X i Y konačno-dimenzionalni vektorski prostori, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, i neka je u prostoru X zadata baza $B_e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Neka je, dalje, $\mathcal{A}\colon X \to Y$ linearan operator.

U prostoru X uočimo proizvoljan vektor u. Tada se on može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija vektora baze B_e, tj.

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n. \tag{2.3.1}$$

Primenom operatora $\mathcal{A}$ na (2.3.1) dobijamo

$$\begin{aligned}\mathcal{A}u &= \mathcal{A}(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n)\\ &= \mathcal{A}(x_1e_1) + \mathcal{A}(x_2e_2) + \cdots + \mathcal{A}(x_ne_n)\\ &= x_1\mathcal{A}e_1 + x_2\mathcal{A}e_2 + \cdots + x_n\mathcal{A}e_n.\end{aligned}$$

Lako je uočiti da je linearan operator $\mathcal{A}$ potpuno određen ako su poznate slike bazisnih vektora $v_j = \mathcal{A}e_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$. Tada je, naime,

$$\mathcal{A}u = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n.$$

U prostoru Y uočimo bazu

$$B_f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$$

i razložimo vektore $\mathcal{A}e_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ po vektorima baze B_f. Tada imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_1 &= a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m, \\ \mathcal{A}e_2 &= a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{m2}f_m, \\ &\vdots \\ \mathcal{A}e_n &= a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \cdots + a_{mn}f_m. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Na osnovu (2.3.2) formirajmo matricu

$$A = A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definicija 2.3.1. Za A_{fe} kažemo da je *matrica operatora* $\mathcal{A}\colon X \to Y$ u odnosu na baze B_e i B_f, tim redom.

Napomenimo da broj vrsta u matrici operatora odgovara dimenziji prostora Y, a broj kolona dimenziji prostora X. Kolone matrice A su, u stvari, koordinate vektora $\mathcal{A}e_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ u odnosu na izabranu bazu B_f. Dakle, da bismo odredili element a_{ij} potrebno je primeniti operator $\mathcal{A}$ na vektor e_j, i u slici $\mathcal{A}e_j$ uzeti i-tu koordinatu[34)], što ćemo označiti sa

$$a_{ij} = \{\mathcal{A}e_j\}_i. \tag{2.3.3}$$

Posmatrajmo sada proizvoljne vektore $u \in X$ i $v \in Y$, čije su koordinatne reprezentacije, u bazama B_e i B_f, date redom sa

$$\begin{aligned} u &= x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n, \\ v &= y_1f_1 + y_2f_2 + \cdots + y_mf_m. \end{aligned}$$

Neka je

$$v = \mathcal{A}u, \tag{2.3.4}$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{m} y_i f_i = \mathcal{A}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathcal{A}e_j.$$

34) Matrica operatora je nad istim poljem skalara $\mathbb{K}$ kao i prostori X i Y.

Korišćenjem (2.3.2) imamo

$$\sum_{i=1}^{m} y_i f_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \Big),$$

odakle, promenom redosleda sumiranja na desnoj strani, dobijamo

$$\sum_{i=1}^{m} y_i f_i = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big) f_i.$$

Kako je sistem vektora B_f linearno nezavisan, dobijamo vezu između koordinata vektora u i v

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

tj.

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Dakle, kod preslikavanja vektora u u vektor v pomoću linearnog operatora $\mathcal{A}$, pri fiksiranim bazama u prostorima X i Y, veze između koordinata ovih vektora date su sistemom jednačina (2.3.5). Koeficijenti ovog sistema jednačina su očigledno elementi matrice operatora. Prema tome, pri fiksiranim bazama u X i Y, postoji uzajamno jednoznačna korespondencija između operatorske jednačine (2.3.4) i sistema jednačina (2.3.5). Drugim rečima, operatorski pristup i matrični pristup[35)] su potpuno ravnopravni i dovoljno je tretirati samo jedan od njih. Naime, uvek se iz (2.3.4) može preći na (2.3.5) i, obrnuto, iz sistema jednačina (2.3.5) na oblik (2.3.4). Po pravilu, matrični pristup je jednostavniji za rad.

Promenom bazisa u prostorima X i Y doći će do promene matrice operatora. Ovaj problem biće tretiran kasnije. Razmotrićemo sada nekoliko primera koji daju konstrukciju matrica nekih operatora.

---

35) Koristi koordinatne reprezentacije vektora i matricu operatora.

Primer 2.3.1. Kod nula-operatora $\mathcal{O}\colon X \to Y$ (videti primer 2.2.1) imamo

$$(\forall i, j) \qquad a_{ij} = \{\mathcal{O}e_j\}_i = \{\theta\}_i = 0.$$

Dakle, ako je $\dim X = n$ i $\dim Y = m$, matrica nula-operatora $\mathcal{O}$ je nula-matrica tipa $m \times n$. $\triangle$

Primer 2.3.2. Kod identičkog operatora $\mathcal{I}\colon X \to X$ imamo

$$a_{ij} = \{\mathcal{I}e_j\}_i = \{e_j\}_i = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = j, \\ 0, & \text{ako je } i \neq j, \end{cases}$$

što znači da je matrica ovog operatora jedinična matrica I, čiji red odgovara dimenziji prostora X. $\triangle$

Primer 2.3.3. Dijagonalnoj matrici

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

odgovara linearni operator $\mathcal{D}\colon X \to X$, čije je delovanje takvo da i-tu koordinatu vektora $u \in X$ množi sa d_i. $\triangle$

Primer 2.3.4. U primeru 1.1.3 razmatrali smo vektorski prostor svih polinoma stepena ne višeg od n, u oznaci $\mathcal{P}_n$. Dimenzija prostora $\mathcal{P}_n$ je $n+1$. Prirodna baza ovog prostora je $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. Definišimo sada linearni operator $\mathcal{D}\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$ pomoću slika bazisnih elemenata

$$\mathcal{D}t^k = kt^{k-1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Ovo je, u stvari, operator diferenciranja, koji jedan polinom iz prostora $\mathcal{P}_n$ (dimenzije $n+1$) preslikava na neki polinom u prostoru $\mathcal{P}_{n-1}$ (dimenzije n). Naš zadatak je da odredimo matricu $D = [d_{ij}]_{n \times (n+1)}$ ovog operatora.

Kako je $e_j = t^{j-1}$ $(j = 1, \ldots, n+1)$ i

$$\mathcal{D}e_j = (j-1)t^{j-2} = (j-1)e_{j-1},$$

imamo, za $i = 1, \ldots, n$,

$$d_{ij} = \{\mathcal{D}e_j\}_i = \{(j-1)e_{j-1}\}_i = \begin{cases} i, & \text{ako je } j-1 = i, \\ 0, & \text{ako je } j-1 \neq i. \end{cases}$$

Uzimajući i u prostoru $\mathcal{P}_{n-1}$ prirodnu bazu, za matricu operatora $\mathcal{D}$ dobijamo

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & n \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

2.4. Operacije sa matricama

U odeljku 2.2 uveli smo operacije sa linearnim operatorima tako da možemo odrediti:

1° zbir dva operatora;
2° proizvod operatora skalarom;
3° proizvod dva operatora.

U prethodnom odeljku pokazali smo da je, pri fiksiranim bazisima u prostorima X i Y, linearni operator $\mathcal{A}$ jednoznačno određen svojom matricom $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, gde su $m = \dim Y$, $n = \dim X$, a elementi matrice dati sa (2.3.3).

Imajući u vidu ove činjenice, moguće je uvesti i odgovarajuće operacije sa matricama, uspostavljajući na taj način dva ekvivalentna pristupa u tretiranju problema: operatorski i matrični pristup.

1° Razmotrimo najpre sabiranje dve matrice A i B. Ideja za uvođenje zbira $C = A + B$ sastoji se u tome da matrice A i B budu, u stvari, matrice dva linearna operatora $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ i da zbir C bude matrica operatora $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Kako je zbir operatora uveden za operatore u prostoru $L(X, Y)$, to proizilazi da matrice A i B moraju biti istog tipa, recimo $m \times n$, gde su $m = \dim Y$ i $n = \dim X$.

Dakle, neka su $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Na osnovu (2.3.3) i definicije 2.2.7 za elemente matrice $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ imamo

$$c_{ij} = \{\mathcal{C}e_j\}_i = \{\mathcal{A}e_j + \mathcal{B}e_j\}_i,$$

tj.

$$c_{ij} = \{\mathcal{A}e_j\}_i + \{\mathcal{B}e_j\}_i = a_{ij} + b_{ij}.$$

Ovo sugeriše sledeću definiciju za sabiranje matrica:

Definicija 2.4.1. *Zbir matrica* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ je matrica $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, gde je

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \qquad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n).$$

Primer 2.4.1. Neka su

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

2° Razmotrimo sada proizvod matrice skalarom. Neka je $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrica operatora $\mathcal{A}: X \to Y$. Sa $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ označimo matricu operatora $\mathcal{C} = \lambda\mathcal{A}$. Tada, na osnovu (2.3.3) i definicije 2.2.8, imamo

$$c_{ij} = \{\mathcal{C}e_j\}_i = \{\lambda\mathcal{A}e_j\}_i = \lambda\{\mathcal{A}e_j\}_i = \lambda a_{ij}.$$

Definicija 2.4.2. Proizvod matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i skalara λ je matrica $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, gde je

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}. \qquad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n).$$

Primer 2.4.2. Za matricu A iz prethodnog primera imamo

$$3A = \begin{bmatrix} 9 & -15 & 9 \\ 0 & 12 & -21 \end{bmatrix}, \qquad -A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad 0A = O. \quad \triangle$$

Za matricu $(-1)A = -A$ kažemo da je *suprotna matrica* matrici A. Zbir A i $-A$ daje nula matricu. Korišćenjem suprotne matrice može se uvesti oduzimanje matrica istog tipa na sledeći način:

Definicija 2.4.3. *Razlika matrica* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ je matrica $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, gde je

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}. \qquad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n).$$

Dakle, važi

$$A - B = A + (-B).$$

3° Razmotrimo sada najsloženiji slučaj – proizvod dve matrice A i B, koji treba da odgovara proizvodu operatora $\mathcal{A}: Y \to Z$ i $\mathcal{B}: X \to Y$. Neka su prostori X, Y, Z sa dimenzijama n, m, p i bazama

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \qquad \{f_1, f_2, \dots, f_m\}, \qquad \{g_1, g_2, \dots, g_p\},$$

respektivno, i neka je proizvod $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}: X \to Z$ dat definicijom 2.2.9.

Najpre treba ustanoviti dimenzije odgovarajućih matrica A, B, C. Na osnovu definicije 2.3.1, ove matrice su redom tipa $p \times m$, $m \times n$, $p \times n$. Dakle, imamo:

$$A = [a_{ij}]_{p\times m}, \qquad B = [b_{ij}]_{m\times n}, \qquad C = [c_{ij}]_{p\times n}.$$

U skladu sa (2.3.3) za elemente matrice C imamo

$$c_{ij} = \{\mathcal{C}e_j\}_i = \{\mathcal{A}(\mathcal{B}e_j)\}_i.$$

Na osnovu (2.3.2), za operatore $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ imamo

$$\mathcal{A}f_k = \sum_{\nu=1}^{p} a_{\nu k} g_\nu \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

i

$$\mathcal{B}e_j = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} f_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

odakle sleduje

$$c_{ij} = \left\{\mathcal{A}\sum_{k=1}^{m} b_{kj} f_k\right\}_i = \left\{\sum_{k=1}^{m} b_{kj}\mathcal{A}f_k\right\}_i,$$

tj.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{kj}\big\{\mathcal{A}f_k\big\}_i .$$

Najzad, kako je $\big\{\mathcal{A}f_k\big\}_i = a_{ik}$, dobijamo

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} .$$

Ovaj rezultat sugeriše sledeću definiciju za množenje matrica:

Definicija 2.4.4. *Proizvod matrica* $A = [a_{ij}]_{p\times m}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ je matrica $C = [c_{ij}]_{p\times n}$, čiji su elementi dati sa

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

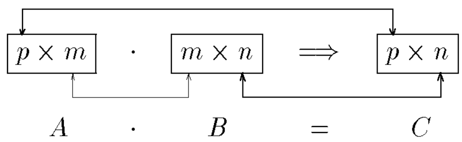
Dakle, možemo zaključiti:

1° Proizvod matrica $C = AB$ defininisan je samo ako je broj kolona u matrici A jednak broju vrsta u matrici B;

2° Broj vrsta u matrici C jednak je broju vrsta u matrici A;

3° Broj kolona u matrici C jednak je broju kolona u matrici B,

što je predstavljeno i na sledećoj šemi:



Ako izdvojimo iz matrice A elemente i-te vrste i formiramo vektor-vrstu

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{im} \end{bmatrix},$$

a iz matrice B elemente j-te kolone i formiramo vektor-kolonu

$$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix},$$

tada se element c_{ij} može izraziti kao proizvod

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{im} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix},$$

što, u stvari, predstavlja skalarni proizvod (videti primer 1.5.2) i-te vrste matrice A i j-te kolone matrice B.

Primer 2.4.3. Neka su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Proizvod AB je matrica tipa 2×3. Dakle,

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 3\cdot 3 & 1\cdot(-1) + 3\cdot(-2) \\ 0\cdot 2 + 4\cdot 1 & 0\cdot 1 + 4\cdot 3 & 0\cdot(-1) + 4\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -7 \\ 4 & 12 & -8 \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

Ako uvedemo vektore $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ kao koordinatne reprezentacije vektora $u \in X$ i $v \in Y$ u bazama B_e i B_f, respektivno (videti prethodni odeljak),

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

sistem jednačina (2.3.5) može se predstaviti u matričnom obliku

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \tag{2.4.1}$$

gde je $A = A_{fe}$ matrica operatora $\mathcal{A}: X \to Y$. Formula (2.4.1) je analogon operatorskoj formuli (2.3.4).

Osobine koje važe za operacije kod operatora važe i za odgovarajuće operacije sa matricama. Tako, na primer, osobina asocijativnosti važi i kod sabiranja i kod množenja matrica. Dakle, jednakosti

$$A + (B + C) = (A + B) + C \qquad \text{i} \qquad A(BC) = (AB)C$$

važe, naravno, pod uslovom da naznačene operacije imaju smisla.

Operacija sabiranja je komutativna, tj. $A + B = B + A$. Međutim, množenje dve matrice nije komutativno. Pre svega, ako postoji proizvod AB, ne mora postojati proizvod BA. Čak i u slučajevima kada postoje AB i BA (na primer, kada su matrice istog reda), u opštem slučaju je

$$AB \neq BA.$$

Da bismo se uverili u to, posmatrajmo jednostavan primer

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O, \qquad BA = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $AB \neq BA$. Iz ovog primera se može izvući još jedan važan zaključak:

$$AB = O \;\not\Rightarrow\; A = O \;\vee\; B = O\,.$$

Imajući ovako definisane operacije sa matricama, skup matrica se može posmatrati kao neka algebarska struktura. Tako, na primer, sledeći rezultat predstavlja analogon teoremi 2.2.6:

Teorema 2.4.1. *Neka je $M_{m,n}$ skup svih matrica tipa $m \times n$. Struktura $(M_{m,n}, +)$ je Abelova grupa.*

Slično se, kao analogon teoremi 2.2.8, može formulisati sledeće tvrđenje:

Teorema 2.4.2. *Skup matrica $M_{m,n}$, snabdeven operacijom sabiranja matrica i operacijom množenja matrice skalarom, obrazuje vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbb{K}$.*

Postavlja se pitanje šta se može uzeti kao baza u ovom prostoru, kao i to kolika je dimenzija ovog prostora. Nije teško uočiti da se kao baza u prostoru $M_{m,n}$ može, na primer, uzeti skup matrica

$$\Big\{ E^{pq} \;\big|\; E^{pq} = \big[e_{ij}^{pq}\big]_{m\times n},\ p = 1, \dots, m;\ q = 1, \dots, n \Big\},$$

čiji su elementi, korišćenjem Kroneckerove delte, dati pomoću $e_{ij}^{pq} = \delta_{ip}\delta_{jq}$. Očigledno, $\dim M_{m,n} = mn$. Kako je prostor $M_{m,n}$ analogon prostoru $L(X,Y)$, to je i $\dim L(X,Y) = mn$, gde su $n = \dim X$ i $m = \dim Y$.

Najzad, kao analogon teoremi 2.2.10 imamo sledeći rezultat:

Teorema 2.4.3. *Neka je M_n skup svih kvadratnih matrica reda n, snabdeven operacijom sabiranja $+$ i operacijom množenja matrica, u oznaci $\cdot$. Tada je struktura $(M_n, +, \cdot)$ prsten sa jedinicom.*

2.5. Transponovana matrica

Definicija 2.5.1. Ako u matrici

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

zamenimo vrste kolonama i obrnuto, dobijamo matricu

$$A^T = [a_{ji}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{bmatrix},$$

koja se zove *transponovana matrica* matrice A.

Primer 2.5.1. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, njena transponovana matrica je

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

Primer 2.5.2. Transponovanjem vektora

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

dobija se matrica-vrsta

$$\boldsymbol{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

Primer 2.5.3. Skalarni proizvod vektora $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$, gde su

$$\boldsymbol{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{y}^T = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix},$$

može se predstaviti u obliku (videti primer 1.5.2)

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x}.$$

Ako se radi o kompleksnim vektorima, tada je

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k = \boldsymbol{y}^* \boldsymbol{x},$$

gde $\boldsymbol{y}^*$ označava vektor koji se dobija transponovanjem vektora $\boldsymbol{y}$ i konjugovanjem njegovih koordinata. $\triangle$

Za operaciju transponovanje važe osobine iskazane sledećim teoremama:

Teorema 2.5.1. 1° $(A^T)^T = A$; 2° $(\lambda A)^T = \lambda A^T \quad (\lambda \in \mathbb{C})$.

Teorema 2.5.2. *Ako su A i B matrice istog tipa tada je*

$$(A+B)^T = A^T + B^T.$$

Teorema 2.5.3. *Za matrice A i B, za koje je definisan proizvod AB, definisan je i proizvod $B^T A^T$ i važi jednakost*

$$(AB)^T = B^T A^T. \tag{2.5.1}$$

Dokaz. Neka su $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{n\times p}$. Tada je element na mestu (i,j) u matrici $AB = C = [c_{ij}]_{m\times p}$ jednak

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad (1 \le i \le m;\ 1 \le j \le p).$$

Element c_{ij} nalazi se u j-toj vrsti i i-toj koloni matrice $(AB)^T$, koja je tipa $p \times m$.

S druge strane, proizvod matrica B^T i A^T, tj.

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & & b_{n2} \\ \vdots & & & \\ b_{1p} & b_{2p} & & b_{np} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{bmatrix},$$

takođe je tipa $p \times m$, pri čemu na mestu (j,i) imamo element

$$b_{1j}a_{i1} + \cdots + b_{nj}a_{in} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

što je, u stvari, element c_{ij}. $\square$

Matematičkom indukcijom može se dokazati sledeći opštiji rezultat:

Teorema 2.5.4. *Za m matrica $A_1, \dots, A_m$, za koje je definisan proizvod $A_1 \cdots A_m$, važi jednakost*

$$(A_1 \cdots A_m)^T = A_m^T \cdots A_1^T.$$

Ako su elementi matrice a_{ij} kompleksni brojevi, tada se može definisati tzv. *konjugovano-transponovana matrica*, u oznaci A^*, pomoću

$$A^* = [\bar{a}_{ji}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \dots & \bar{a}_{m1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & & \bar{a}_{m2} \\ \vdots & & & \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & & \bar{a}_{mn} \end{bmatrix}.$$

Primer 2.5.4. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & 2i \\ -3 & 7+2i \\ -1 & 2+i \end{bmatrix},$$

konjugovano-transponovana matrica je

$$A^* = \begin{bmatrix} 1+i & -3 & -1 \\ -2i & 7-2i & 2-i \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

Teoreme 2.5.1 – 2.5.4 ostaju u važnosti ako se transponovanje zameni sa konjugovanim-transponovanjem. Na primer, analogon jednakosti (2.5.1) je $(AB)^* = B^*A^*$. Naravno, kod matrica nad poljem $\mathbb{R}$ važi $A^* = A^T$.

Primer 2.5.5. Neka je u prostoru matrica $M_{2,2}$ zadata baza (videti teoremu 2.4.1)

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22} \right\}.$$

Odredićemo: (a) matricu operatora transponovanja $\mathcal{T}\colon M_{2,2} \to M_{2,2}$; (b) matricu operatora $\mathcal{F}\colon M_{2,2} \to M_{2,2}$, definisanog pomoću

$$\mathcal{F}X = AX + XB,$$

gde su $A, B \in M_{2,2}$ konstantne matrice.

(a) Kako su

$$\mathcal{T}E^{11} = E^{11}, \quad \mathcal{T}E^{12} = E^{21}, \quad \mathcal{T}E^{21} = E^{12}, \quad \mathcal{T}E^{22} = E^{22},$$

na osnovu (2.3.3), za matricu operatora transponovanja u datoj bazi B, dobijamo

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Neka su

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Kako su

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}E^{11} &= AE^{11} + E^{11}B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathcal{F}E^{12} &= AE^{12} + E^{12}B = \begin{bmatrix} b_{21} & a_{11}+b_{22} \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix}, \\
\mathcal{F}E^{21} &= AE^{21} + E^{21}B = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22}+b_{11} & b_{12} \end{bmatrix}, \\
\mathcal{F}E^{22} &= AE^{22} + E^{22}B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{array}{llllll}
\mathcal{F}E^{11} = & (a_{11}+b_{11})E^{11} + & b_{12}E^{12} + & a_{21}E^{21}, & & \\
\mathcal{F}E^{12} = & b_{21}E^{11} + & (a_{11}+b_{22})E^{12} & & + & a_{21}E^{22}, \\
\mathcal{F}E^{21} = & a_{12}E^{11} & & + (a_{22}+b_{11})E^{21} & + & b_{12}E^{22}, \\
\mathcal{F}E^{22} = & & a_{12}E^{12} + & b_{21}E^{21} & + & (a_{22}+b_{22})E^{22},
\end{array}$$

za matricu operatora $\mathcal{F}$ u bazi B dobijamo

$$F = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & b_{21} & a_{12} & 0 \\ b_{12} & a_{11}+b_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22}+b_{11} & b_{21} \\ 0 & a_{21} & b_{12} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

Napomena 2.5.1. Korišćenjem *Kroneckerovog proizvoda* matrica (videti definiciju 2.12.2), matrica F može se predstaviti u kondenzovanom obliku

$$F = A \otimes I + I \otimes B^T,$$

gde je I jedinična matrica drugog reda.

2.6. Neke klase matrica

U ovom odeljku izučićemo nekoliko važnih klasa kvadratnih matrica.

Definicija 2.6.1. Kvadratna matrica A je *simetrična* ako je $A^T = A$.

Definicija 2.6.2. Kvadratna matrica A je *koso-simetrična* ako je $A^T = -A$.

Kod simetričnih matrica imamo da je $a_{ij} = a_{ji}$, a kod koso-simetričnih $a_{ij} = -a_{ji}$. Iz poslednje jednakosti sleduje da su kod koso-simetričnih matrica elementi na glavnoj dijagonali jednaki nuli, tj. da je $a_{ii} = 0$.

Za kvadratne matrice nad poljem $\mathbb{C}$ mogu se uvesti klase hermitskih i koso-hermitskih matrica pomoću sledećih definicija:

Definicija 2.6.3. Kvadratna matrica A je *hermitska* ako je $A^* = A$.

Definicija 2.6.4. Kvadratna matrica A je *koso-hermitska* ako je $A^* = -A$.

Definicija 2.6.5. Ako za kvadratnu matricu A važi $A^*A = I$, gde je I jedinična matrica, matrica A se naziva *unitarna matrica.*

Definicija 2.6.6. Ako za kvadratnu matricu A važi $A^TA = I$, gde je I jedinična matrica, matrica A se naziva *ortogonalna matrica.*

Neka je V_n skup svih kompleksnih vektora[36] $\boldsymbol{x} = [\,x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n\,]^T$. Korišćenjem skalarnog proizvoda dva vektora

$$\boldsymbol{x} = [\,x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n\,]^T \qquad \text{i} \qquad \boldsymbol{y} = [\,y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n\,]^T,$$

definisanog pomoću

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^*\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k,$$

uslov za hermitsku matricu ($A = A^*$) može se predstaviti u ekvivalentnom obliku

$$(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_n) \qquad (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}).$$

Slično, uslov za koso-hermitsku matricu ($A = -A^*$) može se predstaviti u obliku

$$(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_n) \qquad (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = 0.$$

[36] Može se uzeti da je $V_n = \mathbb{C}^n$.

Definicija 2.6.7. Neka je $\boldsymbol{c} = [\, c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n \,]^T$ fiksni vektor u V_n. Preslikavanje $\mathcal{L} : V_n \to \mathbb{C}$ definisano pomoću

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{c}}) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$$

naziva se *linearna funkcionela* ili *linearna forma.*

Ako je $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, primetimo da je

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = [\, \bar{y}_1 \quad \bar{y}_2 \quad \dots \quad \bar{y}_n \,] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

tj.

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \bar{y}_i. \tag{2.6.1}$$

Neka je

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{2.6.2}$$

Definicija 2.6.8. Preslikavanje $\mathcal{B} : V_n^2 \to \mathbb{C}$ definisano pomoću jednakosti (2.6.1) – (2.6.2) naziva se *bilinearna funkcionela* ili *bilinearna forma.*

Posebno su interesantne bilinearne forme kod kojih je kvadratna matrica $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ hermitska.

Definicija 2.6.9. Preslikavanje $\mathcal{F} : V_n \to \mathbb{C}$ definisano pomoću

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}), \tag{2.6.3}$$

gde je matrica A hermitska, naziva se *kvadratna funkcionela* ili *kvadratna forma.*

U skladu sa (2.6.1) i (2.6.3), kvadratna forma ima reprezentaciju

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \bar{x}_i. \tag{2.6.4}$$

Teorema 2.6.1. *Kvadratna forma ima samo realne vrednosti.*

Dokaz. Konjugovanjem (2.6.4) dobijamo

$$\overline{\mathcal{F}(\boldsymbol{x})} = \overline{\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\bar{x}_i\Big)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}x_j\bar{x}_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}\bar{x}_j x_i.$$

Kako je za hermitsku matricu $\bar{a}_{ij} = a_{ji}$, zamenom indeksa i i j u prethodnoj formuli, zaključujemo da je $\overline{\mathcal{F}(\boldsymbol{x})} = \mathcal{F}(\boldsymbol{x})$, tj. da kvadratna forma $\mathcal{F}(\boldsymbol{x})$ ima realnu vrednost. $\square$

Na osnovu ovog tvrđenja, definicija 2.6.9 može se precizirati u smislu da je kvadratna funkcionela preslikavanje sa V_n na $\mathbb{R}$.

Definicija 2.6.10. Hermitska matrica A naziva se *pozitivno definitna* ako je za svako $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ ispunjen uslov

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^* A\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\bar{x}_i > 0. \tag{2.6.5}$$

Na osnovu (2.6.5) zaključujemo da je za pozitivno definitne matrice potreban uslov $a_{ii} > 0$ $(i = 1, \dots , n)$.

Definicija 2.6.11. Simetrična pozitivno definitna matrica naziva se *normalna matrica*.

Definicija 2.6.12. Za matricu $[a_{ij}]_1^n$ kažemo da je *pozitivna* (*nenegativna*) ako je $a_{ij} > 0$ $(a_{ij} \geq 0)$ za svako $i, j \in \{1, 2, \dots , n\}$.

Definicija 2.6.13. Za matricu $[a_{ij}]_1^n$ kažemo da je *dijagonalno dominantna* ako je

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

za svako $i \in \{1, 2, \dots , n\}$.

2.7. Stepenovanje kvadratne matrice

Definicija 2.7.1. Neka je A kvadratna matrica. *Stepen matrice* A definiše se pomoću

$$A^0 = I, \qquad A^1 = A, \qquad A^n = A\,A^{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Jednostavno se dokazuje sledeće tvrđenje:

Teorema 2.7.1. *Ako su k i m nenegativni celi brojevi, važe formule*

$$A^k A^m = A^{k+m}, \qquad (A^k)^m = A^{km}.$$

S obzirom na stepenovanje, moguće je uvesti još dve specijalne klase kvadratnih matrica:

Definicija 2.7.2. Ako je $A^m = O$ za neko $m \in \mathbb{N}$, tada za matricu A kažemo da je *nilpotentna*. Najmanji broj $k \in \mathbb{N}$ za koji je $A^k = O$ naziva se *stepen nilpotentnosti*.

Definicija 2.7.3. Ako je $A^2 = A$ za matricu A kažemo da je *idempotentna*.

Definicija 2.7.4. Ako je $A^2 = I$ za matricu A kažemo da je *involutivna*.

Primer 2.7.1. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tada je

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 3 \cdot 2 \cdot 2^1 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 36 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 3 \cdot 3 \cdot 2^2 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}.$$

Može se naslutiti da je

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}. \tag{2.7.1}$$

Da bismo dokazali (2.7.1) koristićemo metod indukcije.

Tvrđenje je tačno za $n = 1$.

Pretpostavimo da formula (2.7.1) važi za $n = k$, tj. da je

$$A^k = \begin{bmatrix} 2^k & 3k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Tada imamo

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^k & 3k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix},$$

tj.

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 3(k+1)2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

Napomena 2.7.1. Kada su svi elementi na glavnoj dijagonali matrice A međusobno jednaki, za nalaženje stepena A^n može se koristiti binomna formula. Metod je posebno efikasan ako je matrica A trougaona. Za matricu A iz primera 2.7.1 imamo

$$A^n = (2I + B)^n = 2^n I + \binom{n}{1} 2^{n-1} B + \binom{n}{2} 2^{n-2} B^2 + \cdots,$$

gde je $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Kako je $B^2 = O$, dobijamo

$$A^n = 2^n I + \binom{n}{1} 2^{n-1} B = \begin{bmatrix} 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je matrica B nilpotentna sa stepenom nilpotentnosti dva. △

Napomena 2.7.2. U opštem slučaju, binomna formula

$$(C + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^{n-k} B^k$$

važi samo ako matrice C i B komutiraju.

Primer 2.7.2. Neka je $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Tada redom imamo

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 9 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 14 & 27 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 14 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 40 & 81 \end{bmatrix}.$$

Može se naslutiti da je

$$A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ a_{21}(n) & 3^n \end{bmatrix},$$

pri čemu je teško identifikovati izraz za $a_{21}(n)$. △

Napomena 2.7.3. Pokazaćemo kako se za proizvoljnu kvadratnu matricu drugog reda[37] $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ može naći n-ti stepen

$$A^n = \begin{bmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) \end{bmatrix}. \tag{2.7.2}$$

---

[37] Metod je opšti i važi za matrice proizvoljnog reda, ali se komplikuje sa porastom reda matrice.

Primetimo da je

$$a_{11}(0) = a_{22}(0) = 1, \qquad a_{12}(0) = a_{21}(0) = 0 \tag{2.7.3}$$

i neka je

$$a_{11}(1) = a, \quad a_{12}(1) = b, \quad a_{21}(1) = c, \quad a_{22}(1) = d. \tag{2.7.4}$$

Kako je $A^{n+1} = A \cdot A^n$, na osnovu (2.7.2) imamo

$$\begin{bmatrix} a_{11}(n+1) & a_{12}(n+1) \\ a_{21}(n+1) & a_{22}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) \end{bmatrix},$$

odakle sleduje

$$\begin{aligned} a_{11}(n+1) &= aa_{11}(n) + ba_{21}(n), \quad & a_{21}(n+1) &= ca_{11}(n) + da_{21}(n), \\ a_{12}(n+1) &= aa_{12}(n) + ba_{22}(n), \quad & a_{22}(n+1) &= ca_{12}(n) + da_{22}(n). \end{aligned}$$

Ovaj sistem jednačina, uz uslove (2.7.3) i (2.7.4), definiše elemente matrice A^n. Kako su prve dve jednačine sistema, evidentno, nezavisne od poslednje dve jednačine, to ćemo ih posebno razmatrati.

Sabiranjem prve dve jednačine, uz prethodno množenje prve jednačine sa d, a druge sa $-b$, dobijamo

$$da_{11}(n+1) - ba_{21}(n+1) = (ad - bc)a_{11}(n). \tag{2.7.5}$$

S druge strane, povećavanjem indeksa n za jedinicu u prvoj jednačini, nalazimo

$$a_{11}(n+2) = aa_{11}(n+1) + ba_{21}(n+1). \tag{2.7.6}$$

Najzad, eliminacijom $a_{21}(n+1)$ iz (2.7.5) i (2.7.6), dobijamo

$$a_{11}(n+2) - (a+d)a_{11}(n+1) + (ad - bc)a_{11}(n) = 0.$$

Dakle, dobili smo tzv. diferencnu jednačinu oblika[38)]

$$z(n+2) - 2\alpha z(n+1) + \beta z(n) = 0, \tag{2.7.7}$$

gde su $2\alpha = a + d$ i $\beta = ad - bc$.

Nije teško videti da ćemo i za ostale elemente matrice A^n imati istu jednačinu (2.7.7). Naravno, rešenja će se razlikovati s obzirom na početne uslove (2.7.3) i (2.7.4).

[38)] Jednačine ovog oblika nazivaju se *diferencne jednačine*. Ovde se radi o tzv. *homogenoj linearnoj diferencnoj jednačini drugog reda sa konstantnim koeficijentima*.

Pokazaćemo sada kako se na jedan formalan način može naći rešenje jednačine (2.7.7).

Pretpostavimo rešenje jednačine (2.7.7) u obliku $n \mapsto z(n) = \lambda^n$. Tada imamo da je

$$\lambda^{n+2} - 2\alpha\lambda^{n+1} + \beta\lambda^n = 0.$$

Kako trivijalno rešenje $\lambda = 0$ nije od interesa, zaključujemo da će λ^n biti rešenje jednačine (2.7.7) ako je

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \beta = 0. \tag{2.7.8}$$

Za kvadratnu jednačinu (2.7.8) kažemo da je *karakteristična jednačina diferencne jednačine* (2.7.7).

Neka su λ_1 i λ_2 koreni karakteristične jednačine (2.7.8). Razlikovaćemo dva slučaja:

Slučaj $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ovaj slučaj se pojavljuje kada je $\alpha^2 \neq \beta$. Tada su λ_1^n i λ_2^n rešenja jednačine (2.7.7). Takođe je i njihova linearna kombinacija,

$$z(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n, \tag{2.7.9}$$

rešenje jednačine (2.7.7), pri čemu su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Može se pokazati da rešenje (2.7.9) sadrži sva rešenja jednačine (2.7.7) kada je $\alpha^2 \neq \beta$. Zato se rešenje (2.7.9) naziva *opšte rešenje diferencne jednačine* (2.7.7). Napomenimo da je za nalaženje opšteg rešenja dovoljno poznavati dva linearno nezavisna rešenja jednačine (2.7.7), što su, u našem slučaju, upravo rešenja λ_1^n i λ_2^n. Linearna kombinacija dva takva rešenja daje opšte rešenje jednačine (2.7.7).

Koreni karakteristične jednačine (2.7.8) mogu biti i konjugovano-kompleksni brojevi, na primer, $\lambda_1 = \varrho e^{i\theta}$ i $\lambda_2 = \varrho e^{-i\theta}$. Tada je

$$\begin{aligned} z(n) &= C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = \varrho^n\left(C_1 e^{in\theta} + C_2 e^{-in\theta}\right) \\ &= \varrho^n\big((C_1 + C_2)\cos n\theta + i(C_1 - C_2)\sin n\theta\big), \end{aligned}$$

tj.

$$z(n) = \varrho^n\left(D_1\cos n\theta + D_2\sin n\theta\right),$$

gde su D_1 i D_2 proizvoljne konstante.

Slučaj $\lambda_1 = \lambda_2$. Ovaj slučaj nastupa kada je $\alpha^2 = \beta$. Pored rešenja λ_1^n, koje je evidentno, moguće je pokazati da je i $n\lambda_1^n$ rešenje diferencne jednačine (2.7.7). Zaista, zamenom $z(n) = n\lambda_1^n$, leva strana u (2.7.7), u oznaci $L[z(n)]$, postaje

$$\begin{aligned} L[n\lambda_1^n] &= (n+2)\lambda_1^{n+2} - 2\alpha(n+1)\lambda_1^{n+1} + \beta n\lambda_1^n \\ &= nL[\lambda_1^n] + 2\lambda_1^{n+1}(\lambda_1 - \alpha). \end{aligned}$$

Kako je $L[\lambda_1^n] = 0$ i $\lambda_1 = \alpha$, zaključujemo da je $L[n\lambda_1^n] = 0$.

Dakle, u ovom slučaju, opšte rešenje je

$$z(n) = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n = \lambda_1^n(C_1 + C_2 n),$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Korišćenjem opšteg rešenja jednačine (2.7.7) i početnih uslova (2.7.3) i (2.7.4), nalazimo elemente matrice A^n.

Primer 2.7.3. Za matricu A iz primera 2.7.2 karakteristična jednačina (2.7.7) postaje

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

čija su rešenja $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = -1$. Opšte rešenje odgovarajuće diferencne jednačine

$$z(n+2) - 2z(n+1) - 3z(n) = 0$$

je dato sa

$$z(n) = C_1 3^n + C_2(-1)^n, \tag{2.7.10}$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Da bismo, na primer, odredili $a_{21}(n)$, primetimo najpre da je $a_{21}(0) = 0$ i $a_{21}(1) = 2$. Stavljajući redom $n = 0$ i $n = 1$ u (2.7.10), za $z(n) = a_{21}(n)$, dobijamo

$$C_1 + C_2 = a_{21}(0) = 0 \qquad \text{i} \qquad 3C_1 - C_2 = a_{21}(1) = 2,$$

odakle sleduje $C_1 = 1/2,\ C_2 = -1/2$.

Prema tome,

$$a_{21}(n) = \frac{1}{2}\left(3^n - (-1)^n\right).$$

Slično se mogu naći i ostali elementi matrice A^n. Tako imamo da je

$$A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ \frac{1}{2}\left(3^n - (-1)^n\right) & 3^n \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

2.8. Determinanta matrice

Neka je M_n skup svih kvadratnih matrica reda n nad poljem $\mathbb{C}$. Definisaćemo i izučiti jedno preslikavanje, u oznaci det, skupa M_n u skup $\mathbb{C}$. Preslikavanje $\det : M_n \to \mathbb{C}$ definisaćemo postupno, najpre za $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$.

Slučaj $n = 1$. Neka je $A = [a_{11}]$ kvadratna matrica reda jedan. Preslikaćemo ovu matricu u kompleksan broj a_{11}, pišući

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}.$$

Slučaj $n = 2$. Matricu drugog reda $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ preslikaćemo u kompleksan broj $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, simbolizujući to sa

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Slučaj $n = 3$. Kvadratnoj matrici

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

pridružićemo kompleksan broj $\det A$, određen sa

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\qquad + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Kao što možemo primetiti, u svim slučajevima, u definiciji $\det A$ imamo $n!$ sabiraka i to svaki sa po n faktora, koji predstavljaju elemente matrice. Na primer, pri $n = 3$ imamo $3! = 6$ sabiraka i to svaki sa po tri faktora.

Primetimo, dalje, da svaki sabirak sadrži jedan i samo jedan element iz svake vrste i svake kolone matrice. Prvi indeksi elemenata u svakom sabirku poređani su na istovetan način u tzv. normalnom redosledu. Na primer,

$$\begin{aligned} &\text{za } n = 1: && (1); \\ &\text{za } n = 2: && (1, 2); \\ &\text{za } n = 3: && (1, 2, 3). \end{aligned}$$

Drugi indeksi elemenata u svakom sabirku čine po jednu permutaciju osnovnog skupa. Tako imamo,

$$\begin{aligned} &\text{za } n = 1: && (1); \\ &\text{za } n = 2: && (1, 2),\ (2, 1); \\ &\text{za } n = 3: && (1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2),\ (3, 2, 1). \end{aligned}$$

Najzad, primetimo da su neki sabirci kompleksnog broja $\det A$ sa pozitivnim, a neki sa negativnim predznakom. Isto tako, može se uočiti da sabirci kod kojih drugi indeksi elemenata obrazuju permutaciju parne (neparne) klase imaju pozitivan (negativan) predznak, tj. predznak sabirka je $(-1)^j$, gde je j broj inverzija u permutaciji drugih indeksa elemenata u sabirku u odnosu na osnovnu permutaciju.

Primer 2.8.1. Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

imamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5. \quad \triangle$$

Primer 2.8.2. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & -2 \end{bmatrix},$$

imamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix},$$

tj.

$$\begin{aligned} \det A &= 3 \cdot 0 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 \cdot (-5) - 2 \cdot (-1) \cdot (-2) \\ &\quad + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-5) - 1 \cdot 0 \cdot 1 = 62. \quad \triangle \end{aligned}$$

Proširujući prethodni koncept moguće je definisati preslikavanje $\det A$ za matrice proizvoljnog reda.

Neka je matrica $A \in M_n$ data sa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Preslikavanje $A \mapsto \det A$ definisaćemo pomoću

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

gde se sumiranje izvodi preko svih permutacija $P_\nu = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, dok je j broj inverzija u permutaciji P_ν u odnosu na osnovnu permutaciju $P_1 = (1, 2, \dots, n)$.

Definicija 2.8.1. Broj $D = \det A$ zovemo *determinanta matrice A*.

Determinanta D ima red, koji je jednak redu kvadratne matrice A. Simbolički je predstavljamo slično matrici, navodeći elemente matrice između dve vertikalne crte, pri čemu su elementi, vrste, kolone, dijagonale, ... matrice A sada elementi, vrste, kolone, dijagonale, ... determinante $\det A$.

Analizom zbira

$$\sum (-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{2.8.1}$$

zaključujemo sledeće:

1° Broj sabiraka u (2.8.1) je $n!$ jer je to ukupan broj permutacija skupa indeksa $\{1, 2, \ldots, n\}$;

2° Svaki sabirak u (2.8.1) predstavlja proizvod od n elemenata matrice A, pri čemu se iz svake vrste i svake kolone matrice A pojavljuje jedan i samo jedan element;

3° Sabircima sa parnim (neparnim) permutacijama $P_\nu = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ odgovara pozitivan (negativan) predznak;

4° Svaki element matrice A javlja se kao činilac u $(n-1)!$ sabiraka.

Napomenimo da se kao prvi indeksi elemenata u svim sabircima u (2.8.1) ne mora uzeti osnovna permutacija $P_1 = (1, 2, \ldots, n)$. Naime, može se fiksirati bilo koja permutacija, na primer $P_\mu = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Ako je njen broj inverzija u odnosu na P_1 jednak i, tada se zbir (2.8.1) može izraziti u obliku

$$\sum (-1)^{i+j} a_{i_1j_1} a_{i_2j_2} \cdots a_{i_nj_n}, \tag{2.8.2}$$

gde se sumiranje opet izvodi preko svih permutacija $P_\nu = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ i gde je j broj inverzija u permutaciji P_ν u odnosu na osnovnu permutaciju $P_1 = (1, 2, \ldots, n)$.

Dakle, u zbiru (2.8.2) permutacija $P_\mu = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ je fiksna. Poznavajući osobine permutacija, nije teško uočiti da su zbirovi (2.8.1) i (2.8.2) identični. Naime, preuređenjem elemenata u svakom sabirku

$$a_{i_1j_1} a_{i_2j_2} \cdots a_{i_nj_n} \tag{2.8.3}$$

u smislu da prvi indeksi elemenata budu redom $1, 2, \ldots, n$, tj. da se od permutacije P_μ dođe do permutacije P_1, ništa se neće promeniti u vrednosti sabirka (2.8.3), ali će drugi indeksi elemenata u sabirku obrazovati novu permutaciju $P_{\nu'} = (j_1', j_2', \ldots, j_n')$, koja će se od one u (2.8.3) razlikovati upravo za i inverzija. Drugim rečima, broj inverzija u permutaciji $P_{\nu'}$, u odnosu na osnovnu permutaciju P_1, jednak je $j' = j + i$. Dakle, (2.8.2) postaje

$$\sum (-1)^{j'} a_{1j_1'} a_{2j_2'} \cdots a_{nj_n'},$$

što je ekvivalentno sa (2.8.1).

Predznak $(-1)^{i+j}$ svakog sabirka (2.8.3) zavisi samo od broja inverzija i i j u permutacijama P_μ i P_ν, respektivno.

Primer 2.8.3. Neka je $n = 3$. Izaberimo permutaciju $P_3 = (2, 3, 1)$, čiji je broj inverzija $i = 2$. Na osnovu (2.8.2) imamo

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^2 \big(a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{33}a_{12} - a_{22}a_{31}a_{13} \\ + a_{22}a_{33}a_{11} + a_{23}a_{31}a_{12} - a_{23}a_{32}a_{11} \big).$$

Preuređenjem svakog sabirka u smislu da prvi indeksi budu uređeni po veličini, dobijamo

$$\det A = a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

što je ekvivalentno sa ranije uvedenom definicijom (videti slučaj $n = 3$). $\triangle$

Na osnovu prethodnog može se zaključiti da zbir (2.8.2) predstavlja $\det A$ i u slučaju kada fiksiramo permutaciju $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, a sumiranje sprovedemo preko svih permutacija $P_\mu = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Prema tome, važi opšti rezultat:

Teorema 2.8.1. *Neka je matrica $A \in M_n$ data sa*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Tada se $\det A$ *može izraziti u obliku*

$$\det A = \sum (-1)^{i+j} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n},$$

gde se sumiranje izvodi preko svih permutacija prvih (drugih) indeksa elemenata, dok su drugi (prvi) indeksi elemenata fiksirani.

2.9. Osobine determinanata

U ovom odeljku izučićemo neke osobine determinanata.

Teorema 2.9.1. $\det A^T = \det A$.

Dokaz. Neka je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Kako je $A^T = [a_{ji}]_{n\times n}$, po definiciji, imamo

$$\det A^T = \sum (-1)^j a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n},$$

odakle, na osnovu teoreme 2.8.1, sleduje $\det A^T = \det A$. $\square$

Na osnovu teoreme 2.9.1, zaključujemo da sve osobine determinanata koje se odnose na njene vrste, važe i ako se u tim iskazima reč vrsta zameni rečju kolona. Prema tome, u iskazima koji tretiraju osobine determinanata važi dualizam: vrsta – kolona. Zbog toga ćemo, u daljem tekstu, sve osobine determinanata dokazivati u formulacijama koje se odnose na vrste, znajući da se te iste osobine mogu formulisati i dokazati i za kolone.

Teorema 2.9.2. *Ako se svi elementi jedne vrste matrice A pomnože nekim brojem λ i dobijenu matricu obeležimo sa B, tada je* $\det B = \lambda \det A$.

Dokaz. Neka je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ i neka je matrica B dobijena iz matrice A množenjem njene i-te vrste skalarom λ. Tada, na osnovu definicije determinante, imamo

$$\begin{aligned}\det B &= \sum (-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (\lambda a_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}\\ &= \lambda \sum (-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}\\ &= \lambda \det A. \quad \square\end{aligned}$$

Teorema 2.9.3. *Neka su elementi i-te vrste matrice $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ dati u obliku zbira*

$$a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij} \qquad (i \ \textit{fiksno};\ j = 1, 2, \dots, n).$$

Ako su A' i A'' matrice koje se dobijaju iz A tako što se u i-toj vrsti elementi a_{ij} zamene sa a'_{ij} i a''_{ij}, respektivno, tada je

$$\det A = \det A' + \det A''.$$

Dokaz. Na osnovu definicije determinante, imamo

$$\begin{aligned}\det A &= \sum (-1)^j a_{1j_1} \cdots (a'_{ij_i} + a''_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}\\ &= \sum (-1)^j a_{1j_1} \cdots a'_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum (-1)^j a_{1j_1} \cdots a''_{ij_i} \cdots a_{nj_n}\\ &= \det A' + \det A''. \quad \square\end{aligned}$$

Teorema 2.9.4. *Ako su elementi jedne vrste matrice A jednaki nuli, tada je* $\det A = 0$.

Dokaz. Tvrđenje teoreme sleduje na osnovu zaključka navedenog pod 2° u analizi zbira (2.8.1). □

Teorema 2.9.5. *Ako su u matrici A elementi jedne vrste jednaki odgovarajućim elementima neke druge vrste, tada je* $\det A = 0$.

Dokaz. Neka su i-ta i k-ta vrsta u matrici A jednake, tj. neka je

$$a_{ip} = a_{kp} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.9.1}$$

Uočimo proizvoljan sabirak determinante $\det A$

$$(-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nk_n}. \tag{2.9.2}$$

Takođe, uočimo sabirak koji se razlikuje od ovog samo po jednoj transpoziciji indeksa $j_i \leftrightarrow j_k$. Takav sabirak je

$$-(-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_k} \cdots a_{kj_i} \cdots a_{nk_n}. \tag{2.9.3}$$

Njegov predznak je suprotan predznaku sabirka (2.9.2) s obzirom da je transpozicijom promenjena parnost u permutaciji indeksa.

S obzirom na (2.9.1), sabirak (2.9.3) se svodi na

$$-(-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nk_n},$$

što u zbiru sa (2.9.2) daje nulu. Za ovakva dva sabirka reći ćemo da su odgovarajuća.

Kako za svaki uočeni sabirak postoji njemu odgovarajući sabirak u prethodnom smislu, zaključujemo da je $\det A = 0$. □

Sledeće tvrđenje je posledica teorema 2.9.2 i 2.9.5.

Teorema 2.9.6. *Ako su u matrici A elementi jedne vrste proporcionalni odgovarajućim elementima neke druge vrste, tada je* $\det A = 0$.

Takođe, na osnovu teorema 2.9.2, 2.9.3 i 2.9.6 važe i sledeći rezultati:

Teorema 2.9.7. *Determinanta matrice ne menja vrednost ako se elementima jedne vrste dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste, prethodno pomnoženi istim skalarom.*

Teorema 2.9.8. *Ako je u matrici A jedna vrsta linearna kombinacija ostalih vrsta, tada je* $\det A = 0$.

Teorema 2.9.9. *Ako odgovarajući elementi dve vrste matrice A promene svoja mesta i dobijenu matricu obeležimo sa B, tada važi jednakost*

$$\det B = -\det A. \tag{2.9.4}$$

Dokaz. Neka odgovarajući elementi u i-toj i k-toj vrsti matrice A promene mesta. Tada je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Da bismo dokazali (2.9.4), koristićemo se teoremom 2.9.7.

Pođimo od $\det A$. Njena vrednost se ne menja ako elementima i-te vrste dodamo odgovarajuće elemente k-te vrste. Tako imamo

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ako, sada, elementima k-te vrste dodamo odgovarajuće elemente novoformirane i-te vrste, prethodno pomnožene faktorom -1, dobijamo

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & & & \\ -a_{i1} & -a_{i2} & & -a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Najzad, dodavanjem k-te vrste i-toj vrsti i izvlačenjem faktora -1 iz k-te vrste, dobijamo

$$\det A = -\det B. \quad \square$$

Teorema 2.9.10. *Neka su date kvadratne matrice* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *i* $B = [b_{ij}]_{n\times n}$. *Tada je*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B). \tag{2.9.5}$$

Dokaz. Neka je $C = AB = [c_{ij}]_{n\times n}$, gde je

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad (i, j = 1, 2. \dots, n).$$

Pođimo od $\det C$, tj. od

$$\sum (-1)^j c_{1j_1} \dots c_{nj_n} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kn} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & & & \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k2} & & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn} \end{vmatrix},$$

i potražimo izraz za svaki sabirak $c_{1j_1} \dots c_{nj_n}$ ove determinante. U tom cilju, stavimo: $c_{1j} = 0$ (tj. $a_{1j} = 0$) za $j \neq j_1$; $\dots$; $c_{nj} = 0$ (tj. $a_{nj} = 0$) za $j \neq j_n$. Tada je

$$\begin{aligned} \det C &= \sum (-1)^j c_{1j_1} \dots c_{nj_n} \\ &= \begin{vmatrix} a_{1j_1}b_{j_11} & a_{1j_1}b_{j_12} & \dots & a_{1j_1}b_{j_1n} \\ a_{2j_2}b_{j_21} & a_{2j_2}b_{j_22} & & a_{2j_2}b_{j_2n} \\ \vdots & & & \\ a_{nj_n}b_{j_n1} & a_{nj_n}b_{j_n2} & & a_{nj_n}b_{j_nn} \end{vmatrix} = Q_j \begin{vmatrix} b_{j_11} & b_{j_12} & \dots & b_{j_1n} \\ b_{j_21} & b_{j_22} & & b_{j_2n} \\ \vdots & & & \\ b_{j_n1} & b_{j_n2} & & b_{j_nn} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

gde je $Q_j = a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$.

Ako su neki od brojeva $j_1, j_2, \dots, j_n$ jednaki, tada je determinanta na desnoj strani poslednje jednakosti jednaka nuli, s obzirom da ima bar dve jednake vrste. Ako su, međutim, svi brojevi $j_1, j_2, \dots, j_n$ među sobom različiti, tada je desna strana ove jednakosti

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} (-1)^j (\det B),$$

gde je j broj inverzija u permutaciji $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ u odnosu na osnovnu permutaciju $(1, 2, \dots, n)$.

Prema tome,

$$\det C = \sum (-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} (\det B) = (\det A)(\det B). \quad \square$$

Kako je determinanta matrice jednaka determinanti njene transponovane matrice, na osnovu (2.9.5) zaključujemo da je

$$\det C = \det(AB) = \det(AB^T) = \det(A^T B) = \det(A^T B^T),$$

što znači da kao matricu $C = [c_{ij}]_1^n$ možemo uzeti bilo koju od sledeće četiri matrice: AB, AB^T, $A^T B$, $A^T B^T$. Drugim rečima, proizvod dve determinante može se predstaviti kao determinanta $|c_{ij}|_1^n$, uzimajući za elemente c_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ bilo koji od sledeća četiri izraza:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{jk}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{kj}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{jk}.$$

2.10. Razlaganje determinante

Prilikom izračunavanja determinante trećeg reda, možemo postupiti tako što ćemo izdvojiti iz svih sabiraka elemente samo jedne vrste, ili samo jedne kolone. Izaberimo, na primer, prvu vrstu. Tako imamo

$$\begin{aligned} D = \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

Ako izraze u zagradama protumačimo kao determinante drugog reda, imamo

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

tj.

$$D = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13}, \tag{2.10.1}$$

gde smo sa D_{ij} označili determinante, koje se dobijaju iz determinante D izostavljanjem i-te vrste i j-te kolone. U našem slučaju imamo da je $i = 1$. Za determinantu D_{ij} kažemo da je *minor* ili *subdeterminanta* elementa a_{ij} date determinante. Za formulu (2.10.1) kažemo da je *razlaganje* ili *razvoj determinante* po elementima prve vrste.

Moguće je dati razvoj determinante D i po elementima bilo koje vrste, tj. bilo koje kolone. Tako imamo razvoje

$$\begin{aligned}
D &= -a_{21}D_{21} + a_{22}D_{22} - a_{23}D_{23} \\
&= a_{31}D_{31} - a_{32}D_{32} + a_{33}D_{33} \\
&= a_{11}D_{11} - a_{21}D_{21} + a_{31}D_{31} \\
&= -a_{12}D_{12} + a_{22}D_{22} - a_{32}D_{32} \\
&= a_{13}D_{13} - a_{23}D_{23} + a_{33}D_{33}.
\end{aligned}$$

Na osnovu dobijenih razlaganja determinante trećeg reda, zaključujemo da uz neke elemente u razvoju stoji predznak $+$, a uz neke predznak $-$. Primetimo da uz element a_{ij} uvek stoji $(-1)^{i+j}$. Dakle, ovaj predznak je isključivo određen pozicijom elementa a_{ij} u determinanti, pa se zato i naziva predznak mesta (i, j).

Slično, može se razmatrati i slučaj determinante n-tog reda. Razvijajući takvu determinantu po elementima bilo koje vrste, tj. bilo koje kolone, dobijamo linearnu kombinaciju od n determinanata $(n-1)$-og reda.

Definicija 2.10.1. Ako se u determinanti n-tog reda

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.10.2}$$

izostave elementi i-te vrste i j-te kolone $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, za dobijenu determinantu $(n-1)$-og reda, u oznaci D_{ij}, kažemo da je minor ili subdeterminanta elementa a_{ij}.

Za proizvod predznaka mesta (i, j) i minora elementa a_{ij}, u oznaci A_{ij}, kažemo da je *kofaktor elementa* a_{ij}.

Dakle,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Da bismo razvili determinantu (2.10.2), na primer, po elementima prve vrste, pođimo od definicione formule

$$D = \det A = \sum (-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{2.10.3}$$

gde se sumiranje izvodi preko svih permutacija $P_\nu = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, dok je j broj inverzija u permutaciji P_ν u odnosu na osnovnu permutaciju $P_1 = (1, 2, \dots, n)$.

Da bismo odredili koeficijent uz a_{11} u izrazu (2.10.3), posmatrajmo sve one permutacije P_ν koje počinju sa 1, tj. one kod kojih je $j_1 = 1$. Tada je koeficijent uz a_{11}, upravo, zbir

$$\sum (-1)^k a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}. \tag{2.10.4}$$

Sumiranje se izvodi preko svih permutacija $(j_2, j_3, \dots, j_n)$ osnovnog skupa $\{2, 3, \dots, n\}$, a k je odgovarajući broj inverzija u permutaciji $(j_2, j_3, \dots, j_n)$. Naravno, po definiciji determinante, zbir (2.10.4) predstavlja determinantu

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dakle, koeficijent uz element a_{11} je minor $D_{11} = (-1)^{1+1} D_{11} = A_{11}$.

Odredimo sada koeficijent uz element a_{12}. Taj slučaj se svodi na prethodni. Naime, permutacijom prve i druge kolone u (2.10.2), dolazimo do determinante koja je po znaku suprotna determinanti D. Dakle,

$$D = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.10.5}$$

Na osnovu prethodnog, izostavljanjem prve vrste i prve kolone u determinanti na desnoj strani u (2.10.5), dobijamo koeficijent uz a_{12} u razvoju ove determinante, što je, u stvari, minor

$$D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dakle, koeficijent uz a_{12} u razvoju determinate (2.10.2) je

$$-D_{12} = (-1)^{1+2} D_{12} = A_{12}.$$

U opštem slučaju, za određivanje koeficijenta uz element a_{1k} potrebno je k-tu kolonu u determinanti D redom permutovati sa $(k-1)$-om, $(k-2)$-gom, $\ldots$, i, najzad, sa prvom kolonom, dovodeći na taj način element a_{1k} na poziciju $(1,1)$. Kako se, pri ovome, čini $k-1$ permutacija kolona, to je, saglasno prethodnom, koeficijent uz a_{1k} u razvoju determinante D jednak $(-1)^{k-1} D_{1k} = (-1)^{1+k} D_{1k}$.

Prema tome, determinantu D možemo razviti na sledeći način

$$D = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + \cdots + (-1)^{1+k} a_{1k}D_{1k} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}D_{1n},$$

ili, korišćenjem kofaktora,

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Naravno, kao i u slučaju determinante trećeg reda, moguće je opštu determinantu n-tog reda razložiti po elementima bilo koje vrste, tj. bilo koje kolone. Tako, u stvari, imamo *Laplaceove*[39] *formule*, date sledećom teoremom:

Teorema 2.10.1. *Determinanta D, određena sa* (2.10.2)*, može se pomoću kofaktora njenih elemenata razložiti na sledeće načine:*

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.10.6}$$

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.10.7}$$

Napomena 2.10.1. Determinanta trećeg reda može se izračunati korišćenjem tzv. *Sarrusovog*[40] *pravila* koje se sastoji u proširenju determinante, dopisivanjem prve dve kolone, i uzimanju svih proizvoda po silaznim dijagonalama sa pozitivnim

---

[39] Pierre Simon de Laplace (1749–1827), veliki francuski matematičar.

[40] Pierre Frédérique Sarrus (1798–1861), francuski matematičar.

predznakom i svih proizvoda po uzlaznim dijagonalama sa negativnim predznakom. Dakle,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \big(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\big)$$
$$- \big(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\big).$$

Primer 2.10.1. Pri rešavanju mnogih problema javlja se potreba za izračunavanjem determinante

$$V_n \equiv V_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{vmatrix}, \qquad x_i \neq x_j \ (i \neq j),$$

koja je poznata kao *Vandermondeova*[41] *determinanta*. Red ove determinante je $n + 1$. Pokazaćemo sada da je

$$V_n = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)\,, \tag{2.10.8}$$

gde se množenje obavlja po svim indeksima i, j, za koje je $0 \le i < j \le n$.

Ako elementima $(k+1)$-ve kolone determinante V_n dodamo odgovarajuće elemente k-te kolone, prethodno pomnožene sa $-x_0$, redom za $k = n, n-1, \dots, 1$, dobijamo

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0 x_1 & & x_1^n - x_0 x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0 x_2 & & x_2^n - x_0 x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0 x_n & & x_n^n - x_0 x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Razvijajući V_n po elementima prve vrste, determinanta se svodi na sledeću determinantu n-tog reda

$$V_n = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)x_1 & \dots & (x_1 - x_0)x_1^{n-1} \\ x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)x_2 & & (x_2 - x_0)x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ x_n - x_0 & (x_n - x_0)x_n & & (x_n - x_0)x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

[41] Alexandre Théophile Vandermonde (1735–1796), francuski matematičar.

odakle, izvlačenjem zajedničkih faktora iz prve, druge, $\ldots$, n-te vrste, dobijamo

$$V_n = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\cdots(x_n - x_0)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

tj.

$$V_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\cdots(x_n - x_0)V_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ovim smo dobili rekurzivnu formulu, čijom primenom nalazimo redom

$$\begin{aligned} V_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)V_{n-2}(x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ V_1(x_{n-1}, x_n) &= (x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Iz dobijenih jednakosti neposredno sleduje (2.10.8). $\triangle$

Primer 2.10.2. Neka je

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \qquad (k \ge 0),$$

gde su x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ dati brojevi.

Odredićemo determinantu n-tog reda

$$D = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & & s_n \\ \vdots & & & \\ s_{n-1} & s_n & & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Neka je $V_{n-1} \equiv V_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Vandermondeova determinanta n-tog reda razmatrana u prethodnom primeru. Na osnovu teoreme 2.9.10 i komentara koji sledi ovu teoremu, imamo

$$V_{n-1}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ \vdots & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

tj.

$$V_{n-1}^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & & s_n \\ \vdots & & & \\ s_{n-1} & s_n & & s_{2n-2} \end{vmatrix} = D.$$

Najzad, korišćenjem rezultata iz prethodnog primera dobijamo[42)]

$$D = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)^2. \quad \triangle$$

U vezi sa Laplaceovim formulama moguće je postaviti jedan opštiji problem. Naime, ako u razvoju (2.10.6) umesto kofaktora A_{ik}, koji odgovaraju elementima i-te vrste, uzmemo recimo kofaktore A_{jk}, koji odgovaraju elementima j-te vrste, šta će biti sa ovim zbirom? Slično pitanje može se postaviti i za formulu (2.10.7). Odgovor na ova pitanja daje sledeća teorema:

Teorema 2.10.2. *Za svako $i, j = 1, \dots, n$ važe identiteti:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = D\delta_{ij}\,, \tag{2.10.9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = D\delta_{ij}\,, \tag{2.10.10}$$

gde je δ_{ij} Kroneckerova delta.

Dokaz. Dokazaćemo samo formulu (2.10.9).

Za $j = i$ formula (2.10.9) postaje (2.10.6).

Pretpostavimo sada da je $j \neq i$. Ako determinantu D razvijemo po elementima j-te vrste, imamo

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk} = D\,. \tag{2.10.11}$$

S druge strane, ako stavimo $a_{jk} = a_{ik}$ $(k = 1, \dots, n)$, odgovarajuća determinanta jednaka je nuli jer su dve vrste identične, tako da (2.10.11) implicira (2.10.9).

Formula (2.10.10) dokazuje se analogno. $\square$

[42)] Veličina D predstavlja tzv. *diskriminantu moničnog polinoma*, o čemu će biti reči u šestoj glavi.

2.11. Adjungovana i inverzna matrica

Neka M_n označava skup svih kvadratnih matrica reda n.

Definicija 2.11.1. Neka je A_{ij} kofaktor elementa a_{ij} matrice

$$A = [a_{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Tada se matrica

$$\operatorname{adj} A = \operatorname{adj} [a_{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

naziva *adjungovana matrica* matrice A.

Primetimo da se kofaktori, kao elementi matrice $\operatorname{adj} A$, pojavljuju u tzv. transponovanom obliku, tj. A_{ij} se nalazi u j-toj vrsti i i-toj koloni, dakle, na poziciji koja odgovara elementu a_{ij} u transponovanoj matrici A^T.

Teorema 2.11.1. *Za matrice A i* $\operatorname{adj} A$ *važi jednakost*

$$A \cdot (\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A) \cdot A = (\det A)\, I\,. \tag{2.11.1}$$

Dokaz. Neka je $C = [c_{ij}]_{n\times n} = A \cdot (\operatorname{adj} A)$. Tada se elementi matrice C

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk},$$

na osnovu (2.10.9), mogu izraziti u obliku $c_{ij} = (\det A)\delta_{ij}$, gde je δ_{ij} Kroneckerova delta. Dakle, $C = (\det A)I$. Slično se, korišćenjem (2.10.10), dokazuje da je $(\operatorname{adj} A)A = (\det A)I$. □

Teorema 2.11.2. *Za matricu $A \in M_n$ važi jednakost*

$$\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}. \tag{2.11.2}$$

Dokaz. Primenom teoreme 2.9.10 na (2.11.1) dobijamo

$$(\det A) \det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^n.$$

Ako je $\det A \neq 0$, na osnovu prethodne jednakosti, dobijamo (2.11.2). Međutim, ova formula ostaje u važnosti i u slučaju kada je $\det A = 0$. □

Za determinantu adjungovane matrice koristi se i termin *adjungovana determinanta*.

Definicija 2.11.2. Neka $A \in M_n$. Za matricu $X \in M_n$ kažemo da je *inverzna matrica* matrice A ako je

$$AX = XA = I. \tag{2.11.3}$$

Kada postoji matrica X koja zadovoljava (2.11.3), primenom teoreme 2.9.10, zaključujemo da mora biti $(\det A)(\det X) = \det I = 1$, tj. da se potreban uslov za egzistenciju inverzne matrice svodi na uslov $\det A \neq 0$. Naravno, tada je $\det X = 1/\det A$. Jednostavno se pokazuje da je ovaj uslov, $\det A \neq 0$, istovremeno i dovoljan uslov za egzistenciju inverzne matrice X, za koju ćemo, nadalje, koristiti oznaku A^{-1}.

Teorema 2.11.3. *Ako je* $\det A \neq 0$*, tada inverzna matrica* A^{-1} *postoji, jedinstvena je i može se predstaviti u obliku*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\operatorname{adj} A\,.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\det A \neq 0$. Deljenjem jednakosti (2.11.1) sa $\det A$, dobijamo

$$A\left(\frac{1}{\det A}\,\operatorname{adj} A\right) = \left(\frac{1}{\det A}\,\operatorname{adj} A\right) A = I\,,$$

odakle, poređenjem sa (2.11.3), zaključujemo da je matrica

$$X = \frac{1}{\det A}\,\operatorname{adj} A$$

inverzna matrica za A.

Za dokaz jedinstvenosti inverzne matrice pretpostavimo da postoje dve inverzne matrice X i Y, tj. pretpostavimo da je

$$AX = XA = I \qquad \text{i} \qquad AY = YA = I.$$

Množenjem prve jednakosti sa Y sa leve strane, a druge sa X sa desne strane, dobijamo

$$YAX = YI = Y \qquad \text{i} \qquad YAX = IX = X,$$

odakle sleduje da je $X = Y$. $\square$

Primer 2.11.1. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Kako je

$$\begin{aligned} \det A = 1 \cdot 7 \cdot (-4) + (-3) \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) \cdot 2 \\ - (-1) \cdot 7 \cdot 3 - (-3) \cdot (-2) \cdot (-4) - 1 \cdot 2 \cdot 2 = -1 \neq 0, \end{aligned}$$

zaključujemo da postoji inverzna matrica A^{-1}.

Odredićemo najpre adjungovanu matricu $\operatorname{adj} A$, pri čemu je pogodno poći od transponovane matrice

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Tada redom nalazimo

$$\begin{aligned} A_{11} = D_{11} &= \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = -32, & A_{21} = -D_{21} &= -\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = -14, \\ A_{31} = D_{31} &= \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 1, & A_{12} = -D_{12} &= -\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = -2, \\ A_{22} = D_{22} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = -1, & A_{32} = -D_{32} &= -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 0, \\ A_{13} = D_{13} &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = -25, & A_{23} = -D_{23} &= -\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = -11, \end{aligned}$$

$$A_{33} = D_{33} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = 1.$$

Prema tome,

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -32 & -14 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -25 & -11 & 1 \end{bmatrix}.$$

Najzad, dobijamo

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

Definicija 2.11.3. Ako za matricu $A \in M_n$ postoji inverzna matrica kažemo da je matrica A *regularna* ili *nesingularna matrica*.

U protivnom, za matricu A kažemo da je *singularna* ili *neregularna*.

Napomena 2.11.1. Ako je A matrica operatora $\mathcal{A}\colon X \to X$ ($\dim X = n$) u odnosu na neku fiksiranu bazu B, tada je matrica inverznog operatora $\mathcal{A}^{-1}$, ukoliko postoji, upravo, matrica A^{-1}. Kao što je poznato samo regularni operatori imaju inverzni operator. Dakle, matrice regularnih operatora su regularne matrice.

Primer 2.11.2. Neka je $M_n(x,\alpha)$ skup kvadratnih matrica n-tog reda oblika

$$A = A(x,\alpha) = \begin{bmatrix} x+\alpha & x & x & \dots & x \\ x & x+\alpha & x & & x \\ x & x & x+\alpha & & x \\ \vdots & & & & \\ x & x & x & & x+\alpha \end{bmatrix}.$$

Za određivanje determinante matrice A postupimo na sledeći način:

1° Elementima druge, treće, $\dots$, n-te vrste determinante, redom dodajemo odgovarajuće elemente prve vrste, prethodno pomnožene sa -1. Tada dobijamo

$$\det A = \begin{vmatrix} x+\alpha & x & x & \dots & x \\ -\alpha & \alpha & 0 & & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha & & 0 \\ \vdots & & & & \\ -\alpha & 0 & 0 & & \alpha \end{vmatrix}.$$

2° Elementima prve kolone dodajmo redom odgovarajuće elemente druge, treće, $\dots$, n-te kolone determinante. Tako dobijamo trougaonu determinantu

$$\det A = \begin{vmatrix} nx+\alpha & x & x & \dots & x \\ 0 & \alpha & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^{n-1}(nx+\alpha).$$

Dakle, matrica A je regularna ako je $\alpha \neq 0$ i $nx + \alpha \neq 0$. U tom slučaju, inverzna matrica postoji. Pokazaćemo da je A^{-1} istog oblika kao i matrica A, tj. da je $A(x,\alpha)^{-1} = A(y,\beta)$, gde su y i β parametri koje ćemo odrediti u funkciji parametara x i α.

Ako sa U označimo matricu n-tog reda, čiji su svi elementi jednaki jedinici, tada se matrica A može jednostavno izraziti u obliku $A = xU + \alpha I$.

Pretpostavimo da je $A^{-1} = yU + \beta I$. Tada imamo

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= (xU + \alpha I)(yU + \beta I) \\ &= xyU^2 + \alpha yU + \beta xU + \alpha\beta I \\ &= (nxy + \alpha y + \beta x)U + \alpha\beta I \end{aligned}$$

jer je $U^2 = nU$.

Kako je $AA^{-1} = I$, na osnovu prethodnog, mora biti

$$nxy + \alpha y + \beta x = 0 \qquad \text{i} \qquad \alpha\beta = 1,$$

odakle sleduje

$$y = -\frac{x}{\alpha(nx + \alpha)} \qquad \text{i} \qquad \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

Dakle, $A(x, \alpha)^{-1} = A(y, \beta)$. $\triangle$

Za regularne matrice može se definisati stepen matrice A^k i za negativno celo k. Naime, ako je k prirodan broj, možemo uzeti da je

$$A^{-k} = (A^{-1})^k,$$

ili, što je isto,

$$A^{-k} = (A^k)^{-1}.$$

Teorema 2.11.4. *Za regularnu matricu A važi*

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}. \tag{2.11.4}$$

Dokaz. Kako je A regularna matrica, to je i A^T, takođe, regularna matrica. Transponovanjem jednakosti $AA^{-1} = I$ dobijamo

$$\left(AA^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T A^T = I\,,$$

odakle sleduje (2.11.4). $\square$

Teorema 2.11.5. *Za regularne matrice A i B važi jednakost*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{2.11.5}$$

Dokaz. Kako je

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

i

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I,$$

zaključujemo da jednakost (2.11.5) važi. $\square$

Matematičkom indukcijom može se dokazati da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.11.6. *Za regularne matrice $A_1, \ldots, A_m$ važi jednakost*

$$(A_1 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

2.12. Blok matrice i operacije sa njima

Definicija 2.12.1. Ako se matrica A tipa $m \times n$ mrežom horizontalnih i vertikalnih pravih razloži na više matrica, kaže se da je *matrica razbijena na blokove.*

Blokovi matrice A su matrice A_{ij} tipa $m_i \times n_j$, gde su

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = m \qquad \text{i} \qquad \sum_{j=1}^{q} n_j = n.$$

Operacije sa matricama razbijenim na blokove su formalno iste sa operacijama kod običnih matrica. Naime, važe sledeći rezultati:

Teorema 2.12.1. *Neka su matrice A i B razbijene na blokove, tj. neka je*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2q} \\ \vdots & & & \\ A_{p1} & A_{p2} & & A_{pq} \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & & B_{2q} \\ \vdots & & & \\ B_{p1} & B_{p2} & & B_{pq} \end{bmatrix},$$

gde su A_{ij} i B_{ij} matrice istog tipa. Tada je

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \dots & \lambda A_{1q} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & & \lambda A_{2q} \\ \vdots & & & \\ \lambda A_{p1} & \lambda A_{p2} & & \lambda A_{pq} \end{bmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{K})$$

i

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1q} + B_{1q} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & & A_{2q} + B_{2q} \\ \vdots & & & \\ A_{p1} + B_{p1} & A_{p2} + B_{p2} & & A_{pq} + B_{pq} \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.12.2. *Neka su*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2q} \\ \vdots & & & \\ A_{p1} & A_{p2} & & A_{pq} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & & B_{2s} \\ \vdots & & & \\ B_{q1} & B_{q2} & & B_{qs} \end{bmatrix},$$

i neka su blokovi takvi da je broj kolona bloka A_{ij} jednak broju vrsta bloka B_{jk} $(i = 1, \dots, p;\ j = 1, \dots, q;\ k = 1, \dots, s)$. Tada je

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1s} \\ C_{21} & C_{22} & & C_{2s} \\ \vdots & & & \\ C_{p1} & C_{p2} & & C_{ps} \end{bmatrix},$$

gde je $C_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{q} A_{ij} B_{jk}$ $(i = 1, \dots, p;\ k = 1, \dots, s)$.

Primer 2.12.1. Neka su

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ako stavimo

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix},$$

imamo

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & O \\ O & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

Kako je

$$A_{11}B_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$A_{22}B_{22} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dobijamo

$$AB = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \quad \triangle$$

Neposrednim množenjem može se dokazati sledeći rezultat:

Teorema 2.12.3. *Neka je*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

regularna matrica, gde su A_{11} *i* A_{22} *kvadratne matrice. Ako je matrica* A_{22} *regularna, tada je*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix},$$

gde su

$$\begin{aligned} X_{11} &= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}, \qquad & X_{12} &= -X_{11}A_{12}A_{22}^{-1}, \\ X_{21} &= -A_{22}^{-1}A_{21}X_{11}, & X_{22} &= A_{22}^{-1}(I - A_{21}X_{12}). \end{aligned}$$

Primer 2.12.2. Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

odredićemo A^{-1}. Neka su

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \; A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \; A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \; A_{22} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu teoreme 2.12.3, imamo redom:

$$X_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -7 & -3 \end{bmatrix},$$

$$X_{12} = -X_{11}A_{12}A_{22}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -7 & 20 \\ 5 & -10 \end{bmatrix},$$

$$X_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}X_{11} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$X_{22} = A_{22}^{-1}(I - A_{21}X_{12}) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Dakle,

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\left[\begin{array}{rr|rr} -1 & 3 & -7 & 20 \\ -7 & -3 & 5 & -10 \\ \hline 9 & 3 & -3 & 6 \\ 3 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right]. \quad \triangle$$

Definicija 2.12.2. Neka su A i B pravougaone matrice dimenzija $m \times n$ i $p \times q$, respektivno. Za matricu

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & & a_{2n}B \\ \vdots & & & \\ a_{m1}B & a_{m2}B & & a_{mn}B \end{bmatrix},$$

tipa $mp \times nq$, kažemo da je *Kroneckerov proizvod matrica* A i B.

Može se pokazati da za proizvoljne matrice A, B, C, D, za koje naznačene operacije imaju smisla, i svako $\lambda \in \mathbb{K}$, važe sledeće jednakosti:

(1) $(\lambda A) \otimes B = A \otimes (\lambda B) = \lambda(A \otimes B)$;

(2) $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$;

(3) $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$;

(4) $(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D)$.

Neka je A kvadratna matrica reda n podeljena na blokove na sledeći način

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2p} \\ \vdots & & & \\ A_{p1} & A_{p2} & & A_{pp} \end{bmatrix} \qquad (p \geq 2), \tag{2.12.1}$$

tako da su dijagonalni blokovi A_{11}, A_{22}, ... , A_{pp} kvadratne matrice.

Definicija 2.12.3. Ako su svi vandijagonalni blokovi $A_{ij} = O$ $(i \neq j)$, za matricu A, datu sa (2.12.1), kažemo da je *kvazidijagonalna matrica* i označavamo je sa

$$A = A_{11} \dotplus A_{22} \dotplus \cdots \dotplus A_{pp}. \tag{2.12.2}$$

Dijagonalni blokovi matrice A, koji se pojavljuju u formuli (2.12.2), često se označavaju izostavljanjem drugog indeksa. Tako, formula (2.12.2) postaje

$$A = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \cdots \dotplus A_p. \tag{2.12.3}$$

Primer 2.12.3. Matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je kvazidijagonalna i može se predstaviti u obliku

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{+} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \dot{+} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

Na kraju ovog odeljka navešćemo dve teoreme koje se odnose na operacije sa kvazidijagonalnim matricama.

Teorema 2.12.4. *Ako je λ skalar i k prirodan broj, za kvazidijagonalnu matricu A, oblika*

$$A = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \cdots \dot{+} A_p,$$

gde su matrice A_i $(i = 1, \ldots, p)$ istoga reda, važe jednakosti

$$\begin{aligned} \lambda A &= \lambda A_1 \dot{+} \lambda A_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \lambda A_p, \\ A^T &= A_1^T \dot{+} A_2^T \dot{+} \cdots \dot{+} A_p^T, \\ A^* &= A_1^* \dot{+} A_2^* \dot{+} \cdots \dot{+} A_p^*, \\ A^k &= A_1^k \dot{+} A_2^k \dot{+} \cdots \dot{+} A_p^k. \end{aligned}$$

Teorema 2.12.5. *Za kvazidijagonalne matrice*

$$A = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \cdots \dot{+} A_p \qquad i \qquad B = B_1 \dot{+} B_2 \dot{+} \cdots \dot{+} B_p,$$

gde su matrice A_i i B_i $(i = 1, \ldots, p)$ istoga reda, važe jednakosti

$$A + B = (A_1 + B_1) \dot{+} (A_2 + B_2) \dot{+} \cdots \dot{+} (A_p + B_p)$$

i

$$AB = A_1B_1 \dot{+} A_2B_2 \dot{+} \cdots \dot{+} A_pB_p.$$

3. ZADACI ZA VEŽBU

3.1. Neka su u prostoru $\mathbb{R}^4$ dati vektori

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_1 = (1,1,2,1),\ \boldsymbol{x}_2 = (1,-1,0,1),\ \boldsymbol{x}_3 = (0,0,-1,1),\ \boldsymbol{x}_4 = (1,2,2,0), \\ &\boldsymbol{y}_1 = (1,1,2,1),\ \boldsymbol{y}_2 = (-1,1,0,-1),\ \boldsymbol{y}_3 = (0,0,-2,-2),\ \boldsymbol{y}_4 = (1,2,2,0). \end{aligned}$$

Dokazati da svaki od skupova vektora

$$B_x = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\} \qquad \text{i} \qquad B_y = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4\}$$

čini vektorsku bazu prostora R^4, a zatim izraziti vektor $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1, 1)$ pomoću vektora svake od ovih baza.

3.2. Neka je M skup svih kvadratnih matrica oblika

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ako je operacija $\cdot$ množenje matrica, ispitati strukturu $(M, \cdot)$.

3.3. Neka je M_a kvadratna matrica reda n oblika

$$M_a = \begin{bmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & & a \\ \vdots & & & \\ a & a & & a \end{bmatrix} \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Ako je $\mathcal{M} = \{M_a \mid a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$, ispitati strukturu $(\mathcal{M}, \cdot)$, gde je $\cdot$ množenje matrica.

3.4. Ako je $\mathcal{M}$ skup svih matrica oblika

$$M(a, \alpha) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (a > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}),$$

ispitati strukturu $(\mathcal{M}, \cdot)$. Koje osobine ima preslikavanje $f \colon \mathcal{M} \to \mathbb{C}$, definisano pomoću

$$f\left(M(a, \alpha)\right) = a e^{i\alpha}.$$

3.5. Dokazati: Ako je A unitarna matrica, tada su i matrice A^T, $\bar{A}$ i A^* unitarne matrice.

3.6. Proveriti jednakosti

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -10, \qquad \begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix} = 1.$$

3.7. Proveriti jednakosti

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 5, \qquad \begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix} = 100.$$

3.8. Dokazati jednakost

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & & n \\ 1 & 2 & x+1 & & n \\ \vdots & & & & \\ 1 & 2 & 3 & & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

Uputstvo. Konstatovati prvo da važe jednakosti $D(k) = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n-1)$.

3.9. Proveriti jednakost

$$D(x,z) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = x^2 z^2.$$

Uputstvo. Zaključiti prvo da važe jednakosti:

$$D(-x,z) = D(x,z), \qquad D(x,-z) = D(x,z), \qquad D(0,z) = D(x,0) = 0,$$

kao i da je $D(x,z)$ deljivo i sa x^2 i sa z^2.

3.10. Dokazati jednakosti

1°
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ x & 1 & 2 & & n-1 \\ x & x & 1 & & n-2 \\ \vdots & & & & \\ x & x & x & & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n\big((x-1)^n - x^n\big),$$

2°
$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+2 & x & & x \\ x & x & x+3 & & x \\ \vdots & & & & \\ x & x & x & & x+n \end{vmatrix} = n!\,\Big(1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \cdots + \frac{x}{n}\Big).$$

3.11. Odrediti vrednosti determinanata

$$A=\begin{vmatrix}1 & a & a^2 & a^4\\ 1 & b & b^2 & b^4\\ 1 & c & c^2 & c^4\\ 1 & d & d^2 & d^4\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}1 & a^2 & a^3 & a^4\\ 1 & b^2 & b^3 & b^4\\ 1 & c^2 & c^3 & c^4\\ 1 & d^2 & d^3 & d^4\end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix}1 & a & a^3 & a^4\\ 1 & b & b^3 & b^4\\ 1 & c & c^3 & c^4\\ 1 & d & d^3 & d^4\end{vmatrix}.$$

Uputstvo. Svaku od determinanata A, B, C uporediti sa Vandermondeovom determinantom

$$V_5(a,b,c,d,x)=\begin{vmatrix}1 & a & a^2 & a^3 & a^4\\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4\\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4\\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4\\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4\end{vmatrix}.$$

3.12. Dokazati jednakost

$$D_n(\lambda,a_1,a_2,\dots,a_n)=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_1\\ 0 & \lambda & & 0 & a_2\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & \lambda & a_n\\ a_1 & a_2 & & a_n & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda^2-a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2).$$

Uputstvo. Dokazati prvo da važi rekurentna jednakost

$$D_{n+1}(\lambda,a_1,a_2,\dots,a_{n+1})=\lambda D_n(\lambda,a_2,a_3,\dots,a_{n+1})-\lambda^{n-1}a_1^2 \qquad (n\geq 1).$$

3.13. Proveriti jednakost

$$D_n(a,b)=\begin{vmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n\\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & & a_2b_n\\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & & a_3b_n\\ \vdots & & & & \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & & a_nb_n\end{vmatrix}=a_1b_n\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}b_i-a_ib_{i+1}).$$

Uputstvo. Dokazati da važi rekurentna jednakost

$$D_n(a,b)=\frac{b_n}{b_{n-1}}\Big(a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n\Big)D_{n-1}(a,b) \qquad (n=2,3,\dots).$$

3.14. Ako je $D_n(a,b)$ determinanta reda n zadata sa

$$D_n(a,b)=\begin{vmatrix}0 & a & a & \dots & a\\ b & 0 & a & & a\\ b & b & 0 & & a\\ \vdots & & & & \\ b & b & b & & 0\end{vmatrix},$$

odrediti njenu vrednost.

Rezultat. $D_n(a,b) = (-1)^{n-1}\, ab\, \dfrac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b}$.

3.15. Odrediti sve kvadratne matrice A, reda dva, za koje je $A^2 = A$.

Rezultat. Tražene matrice su

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

3.16. Odrediti sve kvadratne matrice A, reda dva, čiji je kvadrat jedinična matrica.

Rezultat. Tražene matrice su:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \quad (a^2 + bc = 1).$$

3.17. Ako je $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, odrediti $A^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

3.18. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (a \in \mathbb{C}).$$

1° Odrediti $(A+I)^3$.

2° Izračunati A^n $(n \in \mathbb{N})$.

3.19. Odrediti sve matrice M koje su komutativne sa matricom

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

a zatim odrediti matrice M^n, gde je n prirodan broj.

3.20. Neka je u prostoru matrica $M_{2,2}$ zadata baza

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22} \right\}.$$

Odrediti matricu operatora $\mathcal{F}: M_{2,2} \to M_{2,2}$, definisanog pomoću

$$\mathcal{F}X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Napomena. Videti primer 2.5.5.

3.21. Neka je $(S, +, \cdot\,)$ prostor realnih polinoma P stepena ne većeg od tri i neka je $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ njegova baza.

Odrediti matricu operatora $\mathcal{A}: S \longrightarrow S$ definisanu pomoću

$$\mathcal{A}\,P = (x-2)P'(x) \qquad (P \in S),$$

a zatim naći rang $\mathcal{A}$.

3.22. Neka je $(\mathcal{P}, +, \cdot\,)$ prostor realnih polinoma P stepena ne većeg od tri i neka je operator $\mathcal{A}: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{P}$ definisan pomoću

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2 + (x_2 - x_3)t + (x_3 - x_4)t^2 + (x_4 - x_1)t^3.$$

1° Dokazati da je operator $\mathcal{A}$ linearni operator.

2° Odrediti matricu operatora $\mathcal{A}$ ako je baza u prostoru originala zadata sa

$$B_o = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\},$$

a u prostoru slika

$$B_s = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{1,\ 1+t,\ t+t^2,\ t^2+t^3\}.$$

3.23. Neka je $M_n(x, \alpha)$ skup kvadratnih matrica n-tog reda oblika

$$A = \begin{bmatrix} x+\alpha & x & x & \dots & x \\ x & x+\alpha & x & & x \\ \vdots & & & & \\ x & x & x & & x+\alpha \end{bmatrix}.$$

1° Odrediti $\det A$;

2° Ako postoji A^{-1} dokazati da $A^{-1} \in M_n(y, \beta)$, gde su y i β parametri koje treba odrediti u funkciji parametara x i α.

3.24. Neka su matrice A i B zadate sa $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}$.

1° Dokazati da su A i B slične matrice.

2° Odrediti matrice A^{100} i B^{100}.

3° Ako je $C = \dfrac{1}{300}(B^{100} - A^{100})$, odrediti matrice C^2 i C^{-4}.

3.25. Odrediti sve kvadratne matrice A drugog reda za koje je $A^2 = 0$.

Rezultat. $A = \pm \begin{bmatrix} ab & a^2 \\ -b^2 & -ab \end{bmatrix}$.

3.26. Neka je $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Odrediti matricu A^n $(n \in \mathbb{N})$.

Rezultat. $A^{2n} = 2^n I, \quad A^{2n+1} = 2^n A.$

3.27. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

proveriti jednakosti

$$BC - CB = A, \qquad AB - BA = 2B, \qquad CA - AC = 2C.$$

3.28. Pokazati da skup matrica oblika

$$A = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (a, b \in \mathbb{C})$$

ima strukturu prstena sa jedinicom, a zatim odrediti A^n.

Rezultat. $A^n = a^n I + na^{n-1} b \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

3.29. Ako je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$, proveriti jednakost

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a+b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{bmatrix} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

3.30. Dokazati da skup matrica oblika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ $(a, b, c \in \mathbb{C})$ ima strukturu prstena.

3.31. Neka je A kvadratna matrica reda dva. Ako je

$$M(z) = aI + bA \qquad (z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}),$$

odrediti matricu A, znajući da je

$$M(zz') = M(z)M(z') \qquad (z, z' \in \mathbb{C}).$$

Rezultat. $A = \begin{bmatrix} p & q \\ -\frac{1}{q}(1 + p^2) & -p \end{bmatrix} \quad (p, q \in \mathbb{R},\ q \neq 0).$

4.32. Proveriti tvrđenja: U odnosu na operacije sabiranje i množenje matrica, skup matrica oblika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

1° Ima strukturu polja izomorfnog polju $\mathbb{C}$ ako je $a, b \in \mathbb{R}$,

2° Ima strukturu komutativnog prstena sa jedinicom ako je $a, b \in \mathbb{C}$.

3.33. Dokazati da skup matrica oblika

$$M = \begin{bmatrix} x & y \\ -2y & x + 2y \end{bmatrix} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

ima strukturu polja.

3.34. Odrediti sve matrice M koje komutuju sa matricom $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, a zatim pokazati da skup svih tih matrica čini komutativni prsten u odnosu na sabiranje i množenje matrica.

Rezultat. $M = \begin{bmatrix} a & 2b \\ 3b & a + 3b \end{bmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{C}).$

3.35. Date su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ako je n prirodan broj, odrediti matrice A^n i B^n.

Rezultat. $A^n = \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{bmatrix}$ i $B^n = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 - 2^{2n+1} & 2^{2n+1} - 2 \\ 5 - 5 \cdot 2^{2n} & 5 \cdot 2^{2n} - 2 \end{bmatrix}.$

3.36. Neka je $(X_\omega, +, \cdot\,)$ linearni prostor prosto-periodičnih oscilacija nad poljem $\mathbb{R}$ i neka je $\mathcal{D}$ operator definisan pomoću

$$\mathcal{D}\big(A\cos(\omega t+\varphi)\big) = -\omega A\sin(\omega t+\varphi).$$

1° Dokazati da je $\mathcal{D}$ automorfizam prostora $(X_\omega, +, \cdot\,)$.

2° Odrediti matricu opearatora $\mathcal{D}$ u bazi $B = \{\cos\omega t, -\sin\omega t\}$.

3° Ako je f izomorfizam prostora $(X_\omega, +, \cdot\,)$ i $(\mathbb{C}, +, \cdot\,)$, odrediti $f(B)$.

4° Dokazati da je preslikavanje $\mathcal{D}_\mathbb{C} = f\mathcal{D}f^{-1}$ automorfizam prostora $(\mathbb{C}, +, \cdot\,)$.

5° Odrediti matricu operatora $\mathcal{D}_\mathbb{C}$ u bazi $B_\mathbb{C} = \{1,\ i\}$, a zatim odrediti $f^{-1}(B_\mathbb{C})$.

3.37. Neka je $(X_\omega, +, \cdot\,)$ prostor prosto-periodičnih oscilacija nad poljem $\mathbb{R}$ i neka je $\mathcal{I}$ operator za koji je

$$\mathcal{I}\big(A\cos(\omega t+\varphi)\big) = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t+\varphi).$$

1° Dokazati da je $\mathcal{I}$ automorfizam prostora $(X_\omega, +, \cdot\,)$.

2° Odrediti matricu operatora $\mathcal{I}$ u bazi $B = \{\cos\omega t, -\sin\omega t\}$.

3° Ako je f izomorfizam prostora $(X_\omega, +, \cdot\,)$ i $(\mathbb{C}, +, \cdot\,)$, odrediti $f(B)$.

4° Ako je $I_\mathbb{C} = f\mathcal{D}f^{-1}$, dokazati da je $\mathcal{I}_\mathbb{C}$ automorfizam prostora $(\mathbb{C}, +, \cdot\,)$ nad poljem $\mathbb{R}$.

5° Odrediti matricu operatora $\mathcal{I}_\mathbb{C}$ u bazi $B_\mathbb{C} = \{1,\ i\}$.

3.38. Neka je $(X_\omega, +, \cdot\,)$ prostor prosto-periodičnih oscilacija nad poljem $\mathbb{R}$, neka su $\mathcal{D}$ i $\mathcal{I}$ operatori za koje je

$$\mathcal{D}\big(A\cos(\omega t+\varphi)\big) = -\omega A\sin(\omega t+\varphi), \quad \mathcal{I}\big(A\cos(\omega t+\varphi)\big) = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)$$

i neka je f izomorfizam vektorskih prostora $(X_\omega, +, \cdot\,)$ i $(\mathbb{C}, +, \cdot\,)$.

1° Ako je $\mathcal{D}_\mathbb{C} = f\mathcal{D}f^{-1}$ i $\mathcal{I}_\mathbb{C} = f\mathcal{I}f^{-1}$, dokazati da važe jednakosti

$$\mathcal{I}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{I} = \mathcal{I} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{I}_\mathbb{C}\mathcal{D}_\mathbb{C} = \mathcal{D}_\mathbb{C}\mathcal{I}_\mathbb{C} = \mathcal{I}_\mathbb{C},$$

gde su $\mathcal{I}$ i $\mathcal{I}_\mathbb{C}$ identički automorfizmi prostora $(X_\omega, +, \cdot\,)$ i $(C, +, \cdot\,)$, respektivno.

2° Odrediti: $\mathcal{D}^{-1}$, $\mathcal{D}_\mathbb{C}^{-1}$, $\mathcal{I}^{-1}$ i $\mathcal{I}_\mathbb{C}^{-1}$.

III G L A V A

Sistemi linearnih jednačina

1. METODI REŠAVANJA

1.1. Cramerove formule

Posmatrajmo sistem linearnih jednačina

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
&\ \vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n.
\end{aligned}
\tag{1.1.1}
$$

Ako je $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, za sistem jednačina (1.1.1) se kaže da je *homogen sistem.*

Definicija 1.1.1. Uređena n-torka $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ je *rešenje sistema jednačina* (1.1.1) ako se svaka jednačina ovog sistema za $x_k = \xi_k \ (k = 1, 2, \ldots, n)$ svodi na identitet.

Napomenimo da homogeni sistem jednačina uvek ima tzv. *trivijalno rešenje* $\xi_k = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n)$.

Sistem jednačina (1.1.1) može se predstaviti matrično u obliku

$$
A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{1.1.2}
$$

gde su A, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$, redom

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{1.1.3}
$$

U upotrebi je sledeća terminologija: matrica A je *matrica sistema jednačina*, $\boldsymbol{b}$ je *vektor slobodnih članova*, a $\boldsymbol{x}$ je *vektor nepoznatih* ili *vektor rešenja*.

Pod pretpostavkom da je

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.1.4}$$

pokazaćemo kako se može odrediti rešenje sistema jednačina (1.1.1).

Kako je, u ovom slučaju, matrica A regularna, množenjem matričnog oblika sistema jednačina (1.1.2) inverznom matricom A^{-1} sa leve strane, dobijamo

$$A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b},$$

tj.

$$\boldsymbol{x} = \left(\frac{1}{D}\operatorname{adj} A\right)\boldsymbol{b} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Odgovarajući elementi vektora $\boldsymbol{x}$ su

$$x_k = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik} \qquad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{1.1.5}$$

Sada od determinante (1.1.4) formirajmo determinantu D_k, tako što ćemo k-tu kolonu zameniti vektorom $\boldsymbol{b}$,

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Kako se suma na desnoj strani u (1.1.5) može interpretirati kao razvoj determinante D_k po elementima k-te kolone, zaključujemo da je

$$x_k = \frac{D_k}{D} \qquad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{1.1.6}$$

Formule (1.1.6) poznate su kao *Cramerove*[43] *formule.* U stvari, ove formule je izveo Leibnitz[44] još 1678. godine, a Cramer ih je našao tek 1750. godine.

[43] Gabriel Cramer (1704–1752), švajcarski matematičar.

[44] Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646–1716), veliki nemački matematičar.

Prema tome, ako je $D = \det A \neq 0$, sistem jednačina (1.1.1) ima jedinstveno rešenje dato Cramerovim formulama (1.1.6).

U slučaju kada je $D = 0$, a bar jedna od determinanata D_k različita od nule, sistem jednačina (1.1.1) je *nemoguć* (*protivurečan*). Međutim, ako je $D = 0$ i $D_k = 0$, za svako $k = 1, 2, \dots, n$, na osnovu Cramerovih formula ne možemo ništa konkretno zaključiti o rešivosti datog sistema jednačina. Taj slučaj biće razmatran kasnije.

Na osnovu Cramerovih formula može se izvesti zaključak da homogeni sistem jednačina, za koji je $D \neq 0$, ima samo trivijalno rešenje $x_k = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$.

Primer 1.1.1. Neka je dat sistem jednačina

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\ 8x_1 - x_2 + x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Kako je

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 18,$$

sistem ima jedinstveno rešenje

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{18} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{18}{18} = 1,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{18} \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{36}{18} = 2,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{18} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{-18}{18} = -1. \qquad \triangle$$

Napomena 1.1.1. Cramerove formule imaju više teorijski, nego praktični značaj. One zahtevaju izračunavanje $n + 1$ determinanata n-tog reda. Ako bismo vrednost determinante n-tog reda izračunavali po definiciji, potrebno je izvršiti $S_n = n! - 1$ sabiranja (ili oduzimanja) i $M_n = (n - 1)n!$ množenja, što ukupno iznosi $P_n = S_n + M_n \approx n \cdot n!$. Pod pretpostavkom da je za obavljanje jedne računske operacije potrebno $10\,\mu s$, što je slučaj kod većine računara, to bi za izračunavanje vrednosti jedne determinante tridesetog reda bilo potrebno oko

$$\frac{30 \cdot 30! \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{3600 \cdot 24 \cdot 365} \approx 2.5 \cdot 10^{21} \text{ godina.}$$

Uopšteno govoreći ovakav postupak je praktično neprimenljiv već za determinante reda $n > 4$.

1.2. *LR* faktorizacija kvadratne matrice

Kod rešavanja sistema linearnih jednačina često se javlja problem predstavljanja kvadratne matrice u obliku proizvoda dve trougaone matrice. Ovaj odeljak je posvećen ovom problemu.

Teorema 1.2.1. *Ako su sve determinante*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & & a_{kk} \end{vmatrix} \qquad (k = 1, \dots, n-1)$$

različite od nule, matrica $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *može se predstaviti u obliku*

$$A = LR, \tag{1.2.1}$$

gde je L *donja i* R *gornja trougaona matrica.*

Dokaz. Trougaone matrice L i R reda n imaju oblike:

$$L = [l_{ij}]_{n\times n} \qquad (l_{ij} = 0 \ \text{ za } \ i < j), \tag{1.2.2}$$

$$R = [r_{ij}]_{n\times n} \qquad (r_{ij} = 0 \ \text{ za } \ i > j). \tag{1.2.3}$$

Dokažimo najpre tvrđenje za $n = 2$, tj. dokažimo da postoje matrice

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix},$$

obe drugog reda, takve da je

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad (a_{11} \neq 0). \tag{1.2.4}$$

Naravno, jednakost (1.2.4) važi ako i samo ako je

$$l_{11}r_{11} = a_{11}, \quad l_{11}r_{12} = a_{12}, \quad l_{21}r_{11} = a_{21}, \quad l_{21}r_{12} + l_{22}r_{22} = a_{22}. \tag{1.2.5}$$

Kako je iz uslova teoreme $a_{11} \neq 0$, zaključujemo da su l_{11} i r_{11} različiti od nule. Tada, na osnovu (1.2.5), dobijamo

$$
\begin{aligned}
&l_{11} = \frac{a_{11}}{r_{11}}, \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{r_{11}}, \quad r_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{a_{12} r_{11}}{a_{11}},\\
&l_{22} r_{22} = a_{22} - l_{21} r_{12} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}.
\end{aligned}
$$

Prema tome, ako je $r_{11} \neq 0$ i $r_{22} \neq 0$, faktorizacija (1.2.4) je moguća. Na primer, ako je $r_{11} = r_{22} = 1$, imamo faktorizaciju

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})/a_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (a_{11} \neq 0).
$$

Slično, ako je $l_{11} = l_{22} = 1$, važi

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{21}/a_{11} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})/a_{11} \end{bmatrix} \qquad (a_{11} \neq 0).
$$

Za dokaz opšteg slučaja koristićemo metod matematičke indukcije.

Pretpostavimo da je faktorizacija (1.2.1) moguća za matricu A_k reda $n = k$ $(k \geq 2)$, tj. da postoje trougaone matrice L_k i R_k takve da je $A_k = L_k R_k$, a zatim ispitajmo slučaj kada je $n = k + 1$.

Razbijmo najpre matricu A_{k+1} na blokove na sledeći način:

$$
A_{k+1} = \begin{bmatrix} A_k & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v}^T & [a_{k+1,k+1}] \end{bmatrix},
$$

gde su vektori $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ dati sa

$$
\boldsymbol{u}^T = [\, a_{1,k+1} \quad \ldots \quad a_{k,k+1} \,], \qquad \boldsymbol{v}^T = [\, a_{k+1,1} \quad \ldots \quad a_{k+1,k} \,].
$$

Slično učinimo i sa odgovarajućim matricama L_{k+1} i R_{k+1}. Naime, stavimo

$$
L_{k+1} = \begin{bmatrix} L_k & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{x}^T & [l_{k+1,k+1}] \end{bmatrix}, \qquad R_{k+1} = \begin{bmatrix} R_k & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{o}^T & [r_{k+1,k+1}] \end{bmatrix},
$$

gde su

$$
\boldsymbol{x}^T = [\; l_{k+1,1} \; \ldots \; l_{k+1,k} \,], \; \boldsymbol{y}^T = [\; r_{1,k+1} \; \ldots \; r_{k,k+1} \,], \; \boldsymbol{o}^T = [\; 0 \; \ldots \; 0 \,].
$$

Pokažimo sada da je moguće odrediti matrice L_{k+1} i R_{k+1} tako da je $A_{k+1} = L_{k+1}R_{k+1}$. Kako je

$$L_{k+1}R_{k+1} = \begin{bmatrix} L_k & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{x}^T & [l_{k+1,k+1}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_k & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{o}^T & [r_{k+1,k+1}] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_k R_k & L_k \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x}^T R_k & \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} + [l_{k+1,k+1} r_{k+1,k+1}] \end{bmatrix},$$

zahtevana faktorizacija je moguća ako važe jednakosti

$$L_k R_k = A_k, \quad L_k \boldsymbol{y} = \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}^T R_k = \boldsymbol{v}^T \tag{1.2.6}$$

i

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} + [l_{k+1,k+1} r_{k+1,k+1}] = [a_{k+1,k+1}]. \tag{1.2.7}$$

Naravno, prva jednakost u (1.2.6) predstavlja induktivnu hipotezu. Dokaz bi bio kompletan ako bismo iz preostalih jednačina u (1.2.6) i (1.2.7) uspeli da odredimo vektore $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$, kao i elemente $l_{k+1,k+1}$ i $r_{k+1,k+1}$.

Kako je, po pretpostavci, $\det A_k \neq 0$, iz jednakosti

$$\det A_k = \det(L_k R_k) = (\det L_k)(\det R_k)$$

zaključujemo da su $\det L_k$ i $\det R_k$ različite od nule, tj. da su matrice L_k i R_k regularne. Prema tome, na jedinstven način mogu se odrediti $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{y} = L_k^{-1} \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{v}^T R_k^{-1}.$$

Najzad, ako se za jedan od brojeva $l_{k+1,k+1}$ ili $r_{k+1,k+1}$ usvoji izvesna vrednost različita od nule, na osnovu (1.2.7) lako je odrediti onu drugu od njih. $\square$

Predstavljanje kvadratne matrice A u obliku proizvoda jedne donje i jedne gornje trougaone matrice naziva se *LR faktorizacija matrice A*.

S obzirom na (1.2.2) i (1.2.3) i imajući u vidu da je

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} r_{kj} \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

elementi matrica L i R mogu se lako odrediti rekurzivnim postupkom ukoliko se unapred zadaju elementi $r_{ii}\,(\neq 0)$ ili $l_{ii}\,(\neq 0)$ $(i = 1, \dots, n)$.

Tako, na primer, neka su dati brojevi $r_{ii}\,(\neq 0)$ $(i = 1, \dots, n)$. Tada se elementi trougaonih matrica mogu odrediti sledećim postupkom:

Najpre se za $i = 1$ izračunaju elementi

$$
l_{11} = \frac{a_{11}}{r_{11}},
$$

$$
\left.\begin{aligned}
r_{1j} &= \frac{a_{1j}}{l_{11}} \\
l_{j1} &= \frac{a_{j1}}{r_{11}}
\end{aligned}\right\} \qquad (j = 2, \dots, n),
$$

a zatim redom za $i = 2, \dots, n$ elementi:

$$
l_{ii} = \frac{1}{r_{ii}}\Big(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} r_{ki}\Big),
$$

$$
\left.\begin{aligned}
r_{ij} &= \frac{1}{l_{ii}}\Big(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} r_{kj}\Big) \\
l_{ji} &= \frac{1}{r_{ii}}\Big(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} r_{ki}\Big)
\end{aligned}\right\} \qquad (j = i+1, \dots, n).
$$

Slično, mogli bismo iskazati i rekurzivni postupak za određivanje elemenata matrica L i R ako su unapred dati brojevi $l_{ii}\,(\neq 0)$ $(i = 1, \dots, n)$.

U primenama, najčešće se uzima $r_{ii} = 1$ $(i = 1, \dots, n)$ ili pak $l_{ii} = 1$ $(i = 1, \dots, n)$.

Primer 1.2.1. Razložimo matricu

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 14 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}
$$

u obliku (1.2.1), tako da matrica R ima jediničnu dijagonalu.

Kako je $r_{ii} = 1$ $(i = 1, \ldots, 4)$, na osnovu izloženog rekurzivnog postupka imamo redom:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & l_{11} = 1, \\
 & r_{12} = 4,\ l_{21} = 0,\ r_{13} = 1,\ l_{31} = 3,\ r_{14} = 3,\ r_{41} = 1; \\
(2) & l_{22} = -1, \\
 & r_{23} = -2,\ l_{32} = 2,\ r_{24} = 1,\ l_{42} = -2; \\
(3) & l_{33} = 5, \\
 & r_{34} = -2,\ l_{43} = -3; \\
(4) & l_{44} = 2.
\end{array}
$$

Dakle, dobili smo

$$
L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Polazeći od $l_{ii} = 1$ $(i = 1, \ldots, 4)$ možemo faktorizovati matricu A tako da jediničnu dijagonalu ima matrica L. Tada imamo redom

$$
\begin{array}{ll}
(1) & r_{11} = 1, \\
 & r_{12} = 4,\ l_{21} = 0,\ r_{13} = 1,\ l_{31} = 3,\ r_{14} = 3,\ r_{41} = 1; \\
(2) & r_{22} = -1, \\
 & r_{23} = 2,\ l_{32} = -2,\ r_{24} = -1,\ l_{42} = 2; \\
(3) & r_{33} = 5, \\
 & r_{34} = -10,\ l_{43} = -3/5; \\
(4) & r_{44} = 2,
\end{array}
$$

tj.

$$
L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3/5 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
$$

Dakle, u oba slučaja imamo $A = LR$. $\triangle$

Na kraju ovog odeljka pokazaćemo kako se LR faktorizacija matrice može iskoristiti za rešavanje sistema linearnih jednačina (1.1.1), tj.

$$
(1.2.8) \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},
$$

gde su A, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ dati pomoću (1.1.3).

Ako je moguća faktorizacija matrice A u obliku $A = LR$, tada se sistem jednačina (1.2.8) može napisati u obliku

$$LR\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{1.2.9}$$

Ako stavimo $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, sistem jednačina (1.2.9) postaje $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$. Drugim rečima, (1.2.9) može se redukovati na dva sistema sa trougaonim matricama

$$L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \qquad R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y},$$

koji se mogu rešiti sukcesivno, najpre sistem sa matricom L, a zatim sistem sa matricom R.

1.3. Gaussov metod eliminacije

Neka je dat sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

koji ima jedinstveno rešenje. Sistem se može predstaviti matrično u obliku

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{1.3.2}$$

gde su A, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ dati pomoću (1.1.3).

Osnovni metod za rešavanje sistema linearnih jednačina je *Gaussov*[45] *metod eliminacije*, koji ima više varijanata. U suštini, Gaussov metod se zasniva na redukciji sistema (1.3.2), primenom tzv. *elementarnih transformacija*, na trougaoni sistem jednačina

$$R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}, \tag{1.3.3}$$

gde su

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & r_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

[45] Carl Friedrich Gauss (1777–1855), veliki nemački matematičar.

Elementarne transformacije moraju biti takve da sistem jednačina (1.3.3) ima ista rešenja kao i polazni sistem (1.3.2). Za takve sisteme jednačina kažemo da su *ekvivalentni sistemi.*

Sistem jednačina (1.3.3) rešava se sukcesivno polazeći od poslednje jednačine. Naime,

$$x_n = \frac{c_n}{r_{nn}}, \qquad x_i = \frac{1}{r_{ii}}\left(c_i - \sum_{k=i+1}^{n} r_{ik}x_k\right) \qquad (i = n-1, \dots, 1).$$

Napomenimo da su koeficijenti $r_{ii} \neq 0$ jer po pretpostavci sistem (1.3.2), tj. (1.3.3), ima jedinstveno rešenje.

Pokazaćemo sada kako se sistem (1.3.1) može redukovati na ekvivalentan sistem sa trougaonom matricom.

Pod pretpostavkom da je $a_{11} \neq 0$, izračunavamo najpre tzv. eliminacione faktore

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \qquad (i = 2, \dots, n),$$

a zatim, množenjem prve jednačine u sistemu (1.3.1) sa m_{i1} i oduzimanjem od i-te jednačine, dobijamo sistem od $n-1$ jednačina

$$\begin{aligned} a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)}, \\ &\vdots \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)}, \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

gde su

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j}, \quad b_i^{(2)} = b_i - m_{i1}b_1 \quad (i, j = 2, \dots, n).$$

Pod pretpostavkom da je $a_{22}^{(2)} \neq 0$, primenjujući isti postupak na (1.3.4), sa $m_{i2} = a_{i2}^{(2)}/a_{22}^{(2)}$ $(i = 3, \dots, n)$, dobijamo sistem od $n-2$ jednačine

$$\begin{aligned} a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)}, \\ &\vdots \\ a_{n3}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(3)}x_n &= b_n^{(3)}, \end{aligned}$$

gde su

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2}a_{2j}^{(2)}, \quad b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2}b_2^{(2)} \quad (i, j = 3, \dots, n).$$

Nastavljajući ovaj postupak, posle $n-1$ koraka, dolazimo do jednačine

$$a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)}.$$

Najzad, ako iz svakog od dobijenih sistema uzmemo njegovu prvu jednačinu, dobijamo trougaoni sistem jednačina

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)},\\
a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)},\\
a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)},\\
&\vdots\\
a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)},
\end{aligned}$$

pri čemu smo, radi jednoobraznosti, stavili $a_{ij} \equiv a_{ij}^{(1)}$, $b_i \equiv b_i^{(1)}$.

Ovim smo sistem (1.3.2) sveli na trougaoni oblik (1.3.3).

Navedena trougaona redukcija ili, kako se često kaže, *Gaussova eliminacija* ili *Gaussov algoritam*, svodi se na izračunavanje koeficijenata

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)}, \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)},$$

za $i, j = k+1, \dots, n$ i $k = 1, 2, \dots, n-1$. Primetimo da su elementi matrice R i vektora $\boldsymbol{c}$ dati sa

$$r_{ij} = a_{ij}^{(i)}, \quad c_i = b_i^{(i)} \quad (i = 1, \dots, n;\ j = i, \dots, n).$$

Da bi navedena trougaona redukcija egzistirala, potrebno je obezbediti uslov $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. Elementi $a_{kk}^{(k)}$ su poznati kao *glavni elementi* ili *stožerski elementi*. Pod pretpostavkom da je matrica A sistema (1.3.2) regularna, uslove $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ moguće je obezbediti permutacijom jednačina u sistemu.

Primer 1.3.1. Primenimo Gaussov metod eliminacije na sistem jednačina koji je posmatran u primeru 1.1.1.

Kako su $m_{21} = 1/2$ i $m_{31} = 2$, posle prvog eliminacionog koraka dobijamo

$$\begin{aligned} 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{9}{2}, \\ 3x_2 + 3x_3 &= 3. \end{aligned}$$

S obzirom da je $m_{32} = 1$, posle drugog eliminacionog koraka imamo

$$\frac{3}{2}x_3 = -\frac{3}{2}.$$

Dakle, dobili smo trougaoni sistem jednačina

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 - \phantom{\frac{3}{2}}x_3 &= 1, \\ 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{9}{2}, \\ \frac{3}{2}x_3 &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Najzad, polazeći od treće jednačine, dobijamo rešenja

$$\begin{aligned} x_3 &= -1, \\ x_2 &= \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}\cdot(-1)\right) = 2, \\ x_1 &= \frac{1}{4}\big(1 + 2\cdot 2 + (-1)\big) = 1. \quad \triangle \end{aligned}$$

Trougaona redukcija obezbeđuje jednostavno izračunavanje determinante sistema. Naime, važi

$$\det A = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{nn}^{(n)}.$$

Napomena 1.3.1. Za rešavanje sistema od n jednačina sa n nepoznatih, ukupan broj računskih operacija u Gaussovom metodu iznosi

$$N(n) = \frac{1}{6}\left(4n^3 + 9n^2 - 7n\right).$$

Za dovoljno veliko n imamo $N(n) \approx 2n^3/3$. Na primer, za rešavanje sistema od $n = 30$ jednačina potrebno je $0.18\,s$ ako se jedna računska operacija obavlja za $10\,\mu s$.

Sa numeričkog stanovišta, u toku eliminacionog procesa treba vršiti permutacije jednačina u cilju dobijanja maksimalnog po modulu glavnog elementa u svakom eliminacionom koraku. O drugim detaljima Gaussovog metoda, kao i o drugim metodima za rešavanje sistema jednačina, može se naći u knjizi: G. V. MILOVANOVIĆ, *Numerička analiza, I deo* (treće izdanje), Naučna knjiga, Beograd, 1991.

Gaussov metod može biti primenjen i na rešavanje sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

kod koga je broj jednačina veći od broja nepoznatih, tj. $m > n$. U tom slučaju, primenom Gaussovog metoda dobijamo ekvivalentni sistem jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)}, \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)}, \\ &\vdots \\ a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)}, \\ &\vdots \\ a_{mn}^{(n)}x_n &= b_m^{(n)}. \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Dakle, sistem (1.3.5) imaće rešenje ako se iz poslednjih $m-n+1$ jednačina u sistemu (1.3.6) dobija ista vrednost za x_n, tj. ako je

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} = \cdots = \frac{b_m^{(n)}}{a_{mn}^{(n)}}.$$

1.4. Primene na inverziju matrice

Gaussov metod eliminacije može se uspešno primeniti na inverziju matrica.

Neka je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ regularna matrica i neka je

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{nn} \end{bmatrix} = [\,\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{x}_n\,]$$

njena inverzna matrica. Vektori $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, …, $\boldsymbol{x}_n$ su redom prva, druga, …, n-ta kolona matrice X. Definišimo vektore $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ pomoću

$$\boldsymbol{e}_1 = [\,1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0\,]^T,\ \boldsymbol{e}_2 = [\,0 \quad 1 \quad \ldots \quad 0\,]^T, \ldots, \boldsymbol{e}_n = [\,0 \quad 0 \quad \ldots \quad 1\,]^T.$$

S obzirom na jednakost

$$AX = [\,A\boldsymbol{x}_1 \quad A\boldsymbol{x}_2 \quad \ldots \quad A\boldsymbol{x}_n\,] = I = [\,\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{e}_n\,],$$

problem određivanja inverzne matrice može se svesti na rešavanje n sistema linearnih jednačina

$$A\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.4.1}$$

Za rešavanje sistema (1.4.1) pogodno je koristiti Gaussov metod eliminacije, s obzirom da se matrica A pojavljuje kao matrica svih sistema, pa njenu trougaonu redukciju treba izvršiti samo jednom. Pri ovome, sve transformacije koje su potrebne za trougaonu redukciju matrice A treba primeniti i na jediničnu matricu $I = [\,\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{e}_n\,]$. Na taj način matrica A transformiše se u trougaonu matricu R, a matrica I u matricu $C = [\,\boldsymbol{c}_1 \quad \boldsymbol{c}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{c}_n\,]$. Najzad, ostaje da se reše trougaoni sistemi jednačina $R\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{c}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Prema tome, primena Gaussovog metoda može se iskazati kao transformacija matrice $[\,A \quad I\,]$ u matricu $[\,R \quad C\,]$.

2. EKVIVALENTNI SISTEMI VEKTORA I MATRICA

2.1. Ekvivalentni sistemi vektora

Neka su u linearnom prostoru X nad poljem K data dva konačna skupa (sistema) vektora $U = \{u_1, u_2, \ldots\}$ i $U' = \{u'_1, u'_2, \ldots\}$ takvi da se lineali nad njima poklapaju, tj.

$$L(U) = L(U') = Y. \tag{2.1.1}$$

Očigledno, svaki vektor iz Y $(\subset X)$ može biti predstavljen kao linearna kombinacija vektora iz sistema U ili vektora iz sistema U'.

Definicija 2.1.1. Za dva sistema vektora U i U' kažemo da su među sobom *ekvivalentni sistemi* ako svaki vektor iz sistema U može da se izrazi kao linearna kombinacija vektora iz sistema U' i obrnuto.

Na osnovu prethodnog, sistemi U i U' su ekvivalentni ako i samo ako važi (2.1.1). Ekvivalentnost sistema je, očigledno, jedna relacija ekvivalencije, pri čemu osobina tranzitivnosti ove relacije proizilazi neposredno iz osobine linearne kombinacije vektora. Naime, linearna kombinacija vektora iz jednog sistema može biti predstavljena kao linearna kombinacija vektora iz drugog ekvivalentnog sistema.

Neka je S skup svih sistema vektora u prostoru X. S obzirom na uvedenu relaciju ekvivalencije, skup S se može razbiti na klase ekvivalencije. Ako su U i U' dva proizvoljna sistema vektora iz jedne klase ekvivalencije, tada se, evidentno, lineali nad U i U' poklapaju. Interesantno pitanje koje se može postaviti odnosi se na broj vektora u ekvivalentnim sistemima. U vezi s tim, bitnu ulogu igra linearna nezavisnost vektora u sistemu.

Teorema 2.1.1. *Neka je $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ sistem linearno nezavisnih vektora. Ako se svaki vektor iz U može izraziti kao linearna kombinacija vektora iz sistema $U' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$, tada je $m \le n$.*

Dokaz. Pre svega uočimo da u sistemu U ne postoji nula-vektor i pretpostavimo, suprotno tvrđenju teoreme, da je $m > n$. Takođe, radi preglednijeg označavanja stavimo $U' \equiv U^{(1)}$.

Pridružimo sistemu $U^{(1)}$ vektor u_1 i posmatrajmo novi sistem vektora

$$\{u_1, u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}, \tag{2.1.2}$$

koji je ekvivalentan sistemu $U^{(1)}$.

Kako se, prema uslovu teoreme, vektor u_1 može izraziti kao linearna kombinacija vektora is sistema $U^{(1)}$, tj. kako je

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{1i} u'_i,$$

zaključujemo da je sistem vektora (2.1.2) linearno zavisan. Ovo, pak, znači da se, prenumeracijom, neki od vektora sistema $U^{(1)}$, na primer vektor u'_1, može izraziti kao linearna kombinacija preostalih n vektora iz sistema (2.1.2). Ako sada isključimo ovaj vektor iz (2.1.2), dobijamo novi sistem vektora

$$U^{(2)} = \{u_1, u'_2, \ldots, u'_n\}. \tag{2.1.2}$$

Ranije pomenuta osobina linearne kombinacije omogućava da se svaki vektor sistema U može da izrazi kao linearna kombinacija sistema $U^{(2)}$, što znači da se, u uslovu teoreme, $U^{(1)}$ može zameniti sa $U^{(2)}$.

Nastavljajući ovakav postupak izmene sistema $U^{(k)}$ $(k = 1, 2, \dots)$, uvođenjem novih vektora iz sistema U, proizilazi da se vektorima iz U mogu zameniti svi vektori polaznog sistema $U' = U^{(1)}$, svodeći ga tako na sistem

$$U^{(n+1)} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}.$$

Međutim, ovo bi značilo da se svaki vektor iz U može izraziti kao linearna kombinacija vektora iz jednog njegovog podsistema $U^{(n+1)}$ $(\subset U)$, što protivureči činjenici da je U sistem linearno nezavisnih vektora. Dakle, ne može biti $m > n$. $\square$

Posmatrajmo sada dva ekvivalentna sistema linearno nezavisnih vektora. Na osnovu prethodne teoreme svaki od ovih sistema sadrži ne više vektora od drugog, što znači da se ekvivalentni sistemi linearno nezavisnih vektora sastoje od istog broja vektora.

S druge strane, ako imamo sistem U linearno zavisnih vektora, pri čemu svi vektori nisu istovremeno jednaki nula-vektoru, tada u U postoji ekvivalentni podsistem linearno nezavisnih vektora. Za ovaj podsistem kažemo da je *baza sistema vektora* U. Naravno, svaki sistem vektora može imati više baza, ali se sve one sastoje od istog broja vektora. Sve baze ekvivalentnih sistema su istovremeno ekvivalentni sistemi.

Definicija 2.1.2. Broj vektora baze jednog sistema U naziva se *rang sistema* U i označava se sa $\operatorname{rang} U$.

Drugim rečima, $\operatorname{rang} U$ je maksimalan broj linearno nezavisnih vektora sistema U.

Primer 2.1.1. Neka je u prostoru $\mathbb{R}^4$ dat sistem vektora $U = \{u_1, \dots, u_4\}$, gde su

$$u_1 = (4, -2, -3, -1), \quad u_2 = (-7, 3, 5, 3), \quad u_3 = (1, 1, 0, -4), \quad u_4 = (-2, 0, 1, 3).$$

Kako su, na primer, u_3 i u_4 linearno nezavisni vektori i $u_1 = -2u_3 - 3u_4$, $u_2 = 3u_3 + 5u_4$, zaključujemo da je $\operatorname{rang} U = 2$. Sistem U je ekvivalentan sa njegovim podsistemom $B = \{u_3, u_4\}$, koji predstavlja bazu. Naravno, ovo nije jedina baza sistema U. Na primer, baza je i sistem vektora $\{u_1, u_2\}$. Jedan praktičan način za određivanje ranga sistema vektora biće dat kasnije. $\triangle$

2.2. Zavisnost matrice operatora od baze

U odeljku 2.3 uveli smo matricu linearnog operatora $\mathcal{A}\colon X \to Y$ na konačno-dimenzionalnim prostorima i, pri tom, naglasili da matrica operatora zavisi od izabranih baza u prostorima X i Y. U ovom odeljku proučićemo tu zavisnost.

Razmotrićemo najpre promenu koordinata proizvoljnog vektora u prostoru X dimenzije n pri promeni baze $B_e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ u bazu $B_{e'} = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$.

Kako se novi bazisni vektori e'_j $(j = 1, \ldots, n)$ mogu razviti po vektorima baze B_e, imamo

$$\begin{aligned} e'_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \cdots + p_{n1}e_n, \\ e'_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \cdots + p_{n2}e_n, \\ &\vdots \\ e'_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \cdots + p_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Na osnovu (2.2.1) možemo formirati matricu

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & & p_{nn} \end{bmatrix}, \tag{2.2.2}$$

koju nazivamo *matrica transformacije koordinata* pri prelasku sa baze B_e na bazu $B_{e'}$.

Uočimo sada proizvoljan vektor $u \in X$ i razložimo ga po vektorima jedne i druge baze. Tada imamo

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j. \tag{2.2.3}$$

Kako je $e'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$ $(j = 1, \ldots, n)$, (2.2.3) postaje

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j \Big(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \Big) e_i,$$

odakle, na osnovu teoreme 1.1.1, dobijamo

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Prema tome, ako su odgovarajuće koordinatne reprezentacije vektora $u \in X$ u bazama B_e i $B_{e'}$ date sa

$$\boldsymbol{x} = [x_1 \ \ldots \ x_n]^T \qquad \text{i} \qquad \boldsymbol{x}' = [x'_1 \ \ldots \ x'_n]^T,$$

odgovarajuća matrična formula za transformaciju koordinata datog vektora postaje

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}', \tag{2.2.4}$$

gde je matrica P data sa (2.2.2). Dakle, ova transformacija je određena kvadratnom matricom P. Sasvim je jasno da matrica P mora biti regularna tako da iz (2.2.4) sleduje

$$\boldsymbol{x}' = P^{-1}\boldsymbol{x}. \tag{2.2.5}$$

Slično, u prostoru Y dimenzije m uočimo dve baze $B_f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ i $B_{f'} = \{f'_1, \ldots, f'_m\}$. Neka je odgovarajuća matrica transformacije koordinata $Q = [q_{ij}]_{m \times m}$. Tada se transformacija koordinata vektora $v \in Y$, pri prelasku sa baze B_f na bazu $B_{f'}$, saglasno formuli (2.2.4), može predstaviti u obliku

$$\boldsymbol{y} = Q\boldsymbol{y}', \tag{2.2.6}$$

gde su

$$\boldsymbol{y} = [y_1 \ \ldots \ y_n]^T \qquad \text{i} \qquad \boldsymbol{y}' = [y'_1 \ \ldots \ y'_n]^T.$$

Razmotrimo sada promenu matrice operatora $\mathcal{A}\colon X \to Y$ pri promeni bazisa.

Saglasno definiciji 2.3.1, sa $A = A_{fe}$ označimo matricu operatora $\mathcal{A}\colon X \to Y$ u odnosu na baze B_e i B_f. Ako promenimo baze u prostorima X i Y tako da su one $B_{e'}$ i $B_{f'}$, tada odgovarajuću matricu istog operatora $\mathcal{A}$ označimo sa $A' = A_{f'e'}$.

Teorema 2.2.1. *Neka su date baze B_e i $B_{e'}$ u prostoru X i baze B_f i $B_{f'}$ u prostoru Y. Ako su P i Q odgovarajuće matrice transformacija koordinata pri prelasku sa baze B_e na $B_{e'}$ i sa baze B_f na bazu $B_{f'}$, tada za matrice operatora $A = A_{fe}$ i $A' = A_{f'e'}$ važi jednakost*

$$A' = Q^{-1}AP. \tag{2.2.7}$$

Dokaz. Posmatrajmo parove baza (B_e, B_f) i $(B_{e'}, B_{f'})$. Tada za matrični analogon jednakosti $v = \mathcal{A}u$ ($u \in X$, $v \in Y$) imamo dve jednakosti

$$\boldsymbol{y} = A_{fe}\boldsymbol{x} \quad = A\boldsymbol{x}, \tag{2.2.8}$$

$$\boldsymbol{y}' = A_{f'e'}\boldsymbol{x}' = A'\boldsymbol{x}'. \tag{2.2.9}$$

Na osnovu jednakosti (2.2.5), (2.2.6) i (2.2.9) dobijamo

$$\boldsymbol{y} = Q\boldsymbol{y}' = QA_{f'e'}\boldsymbol{x}' = QA_{f'e'}P^{-1}\boldsymbol{x},$$

odakle, poređenjem sa (2.2.8), nalazimo da je

$$A_{fe} = QA_{f'e'}P^{-1}. \tag{2.2.10}$$

Kako su matrice P i Q regularne, $A = A_{fe}$ i $A' = A_{f'e'}$, jednakost (2.2.10) svodi se na (2.2.7). $\square$

Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da jednom linearnom operatoru $\mathcal{A}: X \to Y$ odgovara skup njegovih matrica A_{fe}, definisanih preko svih mogućih parova baza (B_e, B_f) u prostorima X i Y.

Neka je $M_{m,n}$ prostor matrica tipa $m \times n$ i neka je $M_n = M_{n,n}$.

Definicija 2.2.1. Za dve matrice $A, B \in M_{m,n}$ kažemo da su ekvivalentne, u oznaci $A \cong B$, ako postoje regularne kvadratne matrice $S \in M_m$ i $T \in M_n$ takve da je

$$B = SAT. \tag{2.2.11}$$

Nije teško uočiti da je ekvivalentnost matrica jedna relacija ekvivalencije. Zaista, relacija $\cong$ je refleksivna, tj. $A \cong A$, jer jednakost $A = SAT$ važi, na primer, ako su S i T jedinične matrice reda m i n respektivno. Za dokaz osobine simetričnosti primetimo da iz $A \cong B$, tj. iz činjenice da postoje regularne matrice S i T takve da je $B = SAT$, sleduje $A = S^{-1}BT^{-1}$, što znači da je $B \cong A$. Najzad, iz $A \cong B$ i $B \cong C$, tj. iz $B = S'AT'$ i $C = S''BT''$, gde su S', T', S'', T'' regularne matrice, sleduje $C = S''S'AT''T' = SAT$, tj. $A \cong C$, gde su $S = S''S'$ i $T = T''T$ regularne matrice, što znači da je relacija $\cong$ tranzitivna. Skup $M_{m,n}$ se, prema tome, može razbiti na klase ekvivalentnih matrica.

Na osnovu (2.2.7) zaključujemo da su matrice A i A', koje odgovaraju istom operatoru $\mathcal{A}: X \to Y$, ekvivalentne. Takođe, važi i obrnuto, tj. ekvivalentnim matricama odgovara samo jedan operator, o čemu će biti reči u sledećem odeljku. Dakle, svakom linearnom operatoru $\mathcal{A}: X \to Y$ odgovara jedna klasa ekvivalentnih matrica. Može se postaviti pitanje za koji par baza (B_e, B_f) matrica operatora $\mathcal{A}: X \to Y$ ima najprostiju strukturu. Drugim rečima, koja je to matrica sa najprostijom strukturom u jednoj klasi ekvivalentnih matrica? Odgovor na ovo pitanje biće dat kasnije.

Na kraju ovog odeljka pomenimo i slučaj kada operator $\mathcal{A}$ deluje u prostoru X, tj. kada je $Y = X$. Tada operatoru $\mathcal{A}: X \to X$ odgovara kvadratna matrica $A \in M_n$. U tom slučaju, transformacione matrice P i Q se poklapaju pa se kao analogon ekvivalentnosti može uvesti pojam sličnosti matrica:

Definicija 2.2.2. Za dve kvadratne matrice $A, B \in M_n$ kažemo da su *slične matrice*, u oznaci $A \simeq B$, ako postoji regularna kvadratna matrica $P \in M_n$ takva da je

$$B = P^{-1}AP. \tag{2.2.12}$$

Za matricu P kažemo da je *matrica transformacije sličnosti.*

Relacija sličnost matrica je jedna relacija ekvivalencije u skupu matrica M_n. U klasi sličnih matrica, problem konstrukcije matrice najprostije strukture je znatno teži nego u klasi ekvivalentnih matrica. Ovaj problem biće razmatran u šestoj glavi, uvođenjem tzv. spektralne teorije matrica.

2.3. Rang matrice

Neka je data matrica $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in M_{m,n}$. Izaberimo p vrsta i q kolona ove matrice, sa indeksima $i_1, i_2, \ldots, i_p$ i $j_1, j_2, \ldots, j_q$ respektivno, pri čemu je

$$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le m, \qquad 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_q \le n.$$

Definicija 2.3.1. Za matricu tipa $p \times q$ datu pomoću

$$A_{i_1,i_2,\ldots,i_p}^{j_1,j_2,\ldots,j_q} = \begin{bmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_q} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & & a_{i_2j_q} \\ \vdots & & & \\ a_{i_pj_1} & a_{i_pj_2} & & a_{i_pj_q} \end{bmatrix}$$

kažemo da je *submatrica matrice* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

Nije teško videti da za jednu matricu tipa $m \times n$ postoji ukupno $\binom{m}{p}\binom{n}{q}$ submatrica tipa $p\times q$. U daljem razmatranju za nas će biti od interesa samo kvadratne submatrice. Shodno prethodnom, za posmatranu matricu tipa $m \times n$ postoji ukupno $\binom{m}{p}\binom{n}{p}$ submatrica reda p, gde je $p \le \min(m, n)$.

Definicija 2.3.2. Najviši red r regularne submatrice date matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ naziva se *rang matrice* A i označava se sa $r = \operatorname{rang} A$. Rang nula matrice je 0.

Drugim rečima matrica A ima rang r ako među njenim kvadratnim submatricama reda r postoji bar jedna koja je regularna, dok su sve kvadratne submatrice višeg reda od r, ukoliko postoje, singularne. Za determinante kvadratnih submatrica kažemo da su minori. Svaki minor reda r $(= \operatorname{rang} A)$, koji je različit od nule, naziva se *bazisni minor*, a vrste i kolone matrice A na kojima je on definisan nazivaju se *bazisne vrste* i *bazisne kolone*. Napomenimo da mogu da postoje više bazisnih minora.

Na osnovu prethodnog, svaka regularna matrica $A \in M_n$ ima rang n, dok za proizvoljnu matricu $A \in M_{m,n}$ važi nejednakost $\operatorname{rang} A \le \min(m, n)$.

Primer 2.3.1. Data je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rang ove matrice ne može biti veći od tri jer je $\min(m, n) = \min(3, 4) = 3$. Ukupan broj submatrica trećeg reda jednak je $\binom{3}{3}\binom{4}{3} = 4$ i to su:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determinante svih ovih submatrica su jednake nuli jer, dodavanjem elemenata treće vrste odgovarajućim elementima prve vrste, prva vrsta u svim ovim determinantama postaje identična drugoj vrsti. Dakle, sve submatrice trećeg reda su singularne.

Kako je minor drugog reda $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \ne 0$, zaključujemo da je on bazisan i da je $\operatorname{rang} A = 2$. Kao bazisne vrste i kolone, koje odgovaraju ovom bazisnom minoru, pojavljuju se prva i druga vrsta i prva i druga kolona matrice A. Naravno, postoje i drugi bazisni minori drugog reda. $\triangle$

Iz osobina determinanata neposredno sleduje:

Teorema 2.3.1. *Za proizvoljnu matricu A važi* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T$.

Dokaz. Transponovanjem kvadratnih submatrica matrice A dobijamo sve kvadratne submatrice za A^T. Kako se transponovanjem matrice ne menja njena determinanata (videti teoremu 2.9.1), zaključujemo da tvrđenje teoreme važi. $\square$

U odeljku 2.2 uveli smo definiciju ranga linearnog operatora. Sledeća teorema daje vezu između ranga operatora i ranga njegove matrice.

Teorema 2.3.2. *Rang matrice operatora $\mathcal{A}: X \to Y$ jednak je rangu operatora $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Kao i u dokazu teoreme 2.2.2, razložićemo X na direktnu sumu $X = N_{\mathcal{A}} \dot{+} M_{\mathcal{A}}$, gde je $N_{\mathcal{A}}$ jezgro operatora $\mathcal{A}$ i $M_{\mathcal{A}}$ bilo koji njemu komplementaran potprostor. Potprostori $M_{\mathcal{A}}$ i $T_{\mathcal{A}}$ su izomorfni (videti dokaz teoreme 2.2.2 i odeljak 1.2), pri čemu je $\mathcal{A}$ jedan izomorfizam.

Neka je $\dim M_{\mathcal{A}} = \dim T_{\mathcal{A}} = \operatorname{rang} \mathcal{A} = r$.

Uočimo jednu bazu u $M_{\mathcal{A}}$: $\{e_1, \dots, e_r\}$. Kako je $\{\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_r\}$ sistem linearno nezavisnih vektora (videti teoremu 1.2.1), to on predstavlja bazu u $T_{\mathcal{A}}$. Označimo redom vektore ove baze sa $f_1, \dots, f_r$, tj.

$$\mathcal{A}e_j = f_j \qquad (j = 1, \dots, r). \tag{2.3.1}$$

S druge strane, na osnovu formule (2.2.2), za potprostor $N_{\mathcal{A}}$ važi

$$\dim N_{\mathcal{A}} = \operatorname{def} \mathcal{A} = n - \operatorname{rang} \mathcal{A} = n - r.$$

Izaberimo bazu u $N_{\mathcal{A}}$, tj. $n-r$ linearno nezavisnih vektora, označavajući ih redom sa $e_{r+1}, \dots, e_n$.

Očigledno, $B_e = \{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n\}$ je jedna baza u X. Primetimo da je

$$\mathcal{A}e_j = \theta \qquad (j = r+1, \dots, n). \tag{2.3.2}$$

Najzad, bazu potprostora $T_{\mathcal{A}}$ dopunimo linearno nezavisnim vektorima $f_{r+1}, \dots, f_m$ do baze prostora Y, tako da je $B_f = \{f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_m\}$.

Odredimo matricu operatora $\mathcal{A}$ u bazama B_e i B_f. Korišćenjem standardne formule (2.3.3), na osnovu (2.3.1) i (2.3.2), za svako $i = 1, \dots, m$, imamo

$$a_{ij} = \{\mathcal{A}e_j\}_i = \begin{cases} \delta_{ij} & (j = 1, \dots, r), \\ 0 & (j = r+1, \dots, n), \end{cases}$$

gde je δ_{ij} Kroneckerova delta. Prema tome, matrica operatora $\mathcal{A}$, izražena kao blok matrica, ima oblik

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} I_r & | & O_{r,n-r} \\ ---- & - & ------ \\ O_{m-r,r} & | & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}, \tag{2.3.3}$$

gde je I_r jedinična matrica reda r. Ostala tri bloka u matrici A_{fe} su nula matrice odgovarajućih tipova. Očigledno, matrica A_{fe} ima rang r.

Dakle, $\operatorname{rang} A_{fe} = \operatorname{rang} \mathcal{A} = r$. $\square$

Ubuduće, matricu A_{fe} označavaćemo sa E_r.

Na osnovu prethodne teoreme i teorema 2.2.3 i 2.2.4 može se dokazati sledeći rezultat:

Teorema 2.3.3. *Neka $A \in M_{m,n}$ i neka su $S \in M_m$ i $T \in M_n$ proizvoljne regularne matrice. Tada je*

$$\operatorname{rang}(SAT) = \operatorname{rang} A. \tag{2.3.4}$$

Dokaz. Neka su dati prostori X i Y sa dimenzijama n i m respektivno.

Posmatrajmo, najpre, dva operatora $\mathcal{A}: X \to Y$ i $\mathcal{S}: Y \to Y$, čije su matrice redom A i S. Na osnovu nejednakosti (2.2.5) i (2.2.6), zaključujemo da je

$$\operatorname{rang} \mathcal{S} + \operatorname{rang} \mathcal{A} - \dim Y \le \operatorname{rang}(\mathcal{S}\mathcal{A}) \le \min(\operatorname{rang} \mathcal{S}, \operatorname{rang} \mathcal{A}).$$

Saglasno teoremi 2.3.2, ove nejednakosti važe i za odgovarajuće matrice operatora, tako da imamo

$$\operatorname{rang} S + \operatorname{rang} A - \dim Y \le \operatorname{rang}(SA) \le \min(\operatorname{rang} S, \operatorname{rang} A). \tag{2.3.5}$$

Kako je, po pretpostavci teoreme, matrica S regularna, što znači da je $\operatorname{rang} S = m$, iz (2.3.5) sleduje

$$\operatorname{rang} A \le \operatorname{rang}(SA) \le \min(m, \operatorname{rang} A),$$

tj. $\operatorname{rang}(SA) = \operatorname{rang} A$, s obzirom da je

$$\min(m, \operatorname{rang} A) = \operatorname{rang} A \le \min(m, n).$$

Dakle, množenje jedne matrice proizvoljnom regularnom matricom s leve strane ne menja njen rang.

Slično, razmatranjem operatora $\mathcal{A}: X \to Y$ i $\mathcal{T}: X \to X$, čije su matrice redom A i T, dolazimo do nejednakosti

$$\operatorname{rang} \mathcal{A} + \operatorname{rang} \mathcal{T} - \dim X \leq \operatorname{rang}(\mathcal{A}\mathcal{T}) \leq \min(\operatorname{rang} \mathcal{A}, \operatorname{rang} \mathcal{T}),$$

odakle sleduje

$$\operatorname{rang} A \leq \operatorname{rang}(AT) \leq \min(\operatorname{rang} A, n)$$

jer je $\operatorname{rang} T = n$. Kako je $\min(\operatorname{rang} A, n) = \operatorname{rang} A$, zaključujemo da je $\operatorname{rang}(AT) = \operatorname{rang} A$, što znači da se množenjem matrice A proizvoljnom regularnom matricom s desne strane ne menja njen rang.

Prema tome, imamo

$$\operatorname{rang}(SAT) = \operatorname{rang}(S(AT)) = \operatorname{rang}(AT) = \operatorname{rang} A,$$

tj. (2.3.4). $\square$

2.4. Elementarne transformacije i ekvivalentne matrice

Neka je data matrica $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in M_{m,n}$.

Definicija 2.4.1. Pod *elementarnim transformacijama* nad vrstama (kolonama) matrice A podrazumevamo:

1° množenje r-te vrste (kolone) matrice A skalarom λ različitim od nule;

2° dodavanje elemenata s-te vrste (kolone), uz prethodno množenje proizvoljnim skalarom λ, odgovarajućim elementima r-te vrste (kolone);

3° zamenu r-te i s-te vrste (kolone).

Navedene elementarne transformacije mogu se interpretirati i kao množenje matrice A nekom regularnom matricom, koju ćemo zvati transformaciona matrica. Pokazaćemo to u slučaju elementarnih transformacija nad vrstama matrice A.

Ako definišemo kvadratnu matricu $\Delta_r(\lambda)$ reda m pomoću

$$\Delta_r(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \ r\text{-ta vrsta}, \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

tj. $\Delta_r(\lambda) = \big[\delta_{ij}^{(r)}\big]_1^m$, gde je

$$\delta_{ij}^{(r)} = 0 \quad (i \neq j), \qquad \delta_{ii}^{(r)} = 1 \quad (i \neq r), \qquad \delta_{rr}^{(r)} = \lambda \neq 0,$$

tada se elementarna transformacija 1° iz definicije 2.4.1 može iskazati kao proizvod

$$\Delta_r(\lambda)A = \Delta_r(\lambda)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & & a_{rn} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{r1} & \lambda a_{r2} & & \lambda a_{rn} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Za elementarnu transformaciju 2° definišimo matricu

$$E_{rs}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & \lambda & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow r\text{-ta vrsta},$$

$\uparrow$

s-ta kolona

tj. $E_{rs}(\lambda) = \big[e_{ij}^{(r,s)}\big]_1^m$, gde je

$$e_{ij}^{(r,s)} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ \lambda, & i = r,\ j = s, \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Tada je

$$E_{rs}(\lambda)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{s1} & a_{s2} & & a_{sn} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & & a_{rn} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{s1} & & a_{sn} \\ \vdots & & \\ a_{r1} + \lambda a_{s1} & & a_{rn} + \lambda a_{sn} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Transformacija 3° može se shvatiti kao sukcesivno množenje matrice A sa $E_{sr}(-1)$, $E_{rs}(1)$, $E_{sr}(-1)$, $\Delta_s(-1)$, tj.

$$\Delta_s(-1)E_{sr}(-1)E_{rs}(1)E_{sr}(-1)A = P_{rs}A,$$

gde je transformaciona matrica P_{rs} data sa

$$P_{rs} = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix} &
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow s\text{-ta vrsta} \\ \\ \\ \\ \leftarrow r\text{-ta vrsta} \\ \\ \\ \\
\end{array} \\
\begin{array}{cc}
\uparrow & \uparrow \\
s\text{-ta kolona} & r\text{-ta kolona}
\end{array} &
\end{array}$$

Dakle,

$$P_{rs}\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & & & \\
a_{s1} & a_{s2} & & a_{sn} \\
\vdots & & & \\
a_{r1} & a_{r2} & & a_{rn} \\
\vdots & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & & & \\
a_{r1} & a_{r2} & & a_{rn} \\
\vdots & & & \\
a_{s1} & a_{s2} & & a_{sn} \\
\vdots & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn}
\end{bmatrix}.$$

Napomenimo da su u Gaussovom algoritmu korišćene elementarne transformacije nad vrstama matrice, uključujući i vektor slobodnih članova, sa strategijom redukcije matrice sistema jednačina na trougaoni oblik.

Primer 2.4.1. Neka je

$$A = \begin{bmatrix}
0 & -3 & 5 & 0 & -3 \\
4 & -2 & 4 & 1 & 1 \\
1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 3 & -1 & 0
\end{bmatrix}.$$

i $r = 2$, $s = 3$. Redom imamo

$$E_{32}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{32}(-1)A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{23}(1) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{23}(1)E_{32}(-1)A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{32}(-1)E_{23}(1)E_{32}(-1)A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

i, najzad,

$$\Delta_3(-1)E_{32}(-1)E_{23}(1)E_{32}(-1)A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

Napomena 2.4.1. Za matricu P_{rs} kažemo da je *permutaciona matrica* jer se dobija iz jedinične matrice razmeštanjem jedinica tako da se u svakoj vrsti i svakoj koloni nalazi jedna i samo jedna jedinica.

U prethodnom primeru direktno imamo

$$P_{23}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odgovarajuće transformacije kolona izvode se množenjem matrice A s desne strane regularnim matricama reda n.

Teorema 2.4.1. *Primenom elementarnih transformacija nad vrstama ili kolonama matrice ne menja se njen rang.*

Dokaz. Kako je $\det \Delta_r(\lambda) = \lambda \neq 0$ i $\det E_{rs}(\lambda) = 1$, transformacione matrice $\Delta_r(\lambda)$, $E_{rs}(\lambda)$ i P_{rs} su regularne, pa dokaz teoreme sleduje direktno iz teoreme 2.3.3. $\square$

Sledeća teorema daje potrebne i dovoljne uslove za ekvivalentnost matrica:

Teorema 2.4.2. *Neka su $A, B \in M_{m,n}$. Tada je*

$$A \cong B \iff \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \cong B$, tj. da važi $B = SAT$, gde su S i T regularne matrice. Tada, na osnovu teoreme 2.3.3, sleduje $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$.

Sada ostaje da se dokaže implikacija

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B \;\Rightarrow\; A \cong B. \tag{2.4.1}$$

Umesto toga, dokazaćemo jedan opštiji rezultat, tj. da je svaka matrica $A \in M_{m,n}$, sa rangom r, ekvivalentna blok matrici E_r koja je data pomoću (2.3.3). Očigledno, rang matrice E_r jednak je r.

Neka je data matrica $A \in M_{m,n}$ sa rangom r. Ona u bazama B_e i B_f, u prostorima X i Y respektivno, jednoznačno određuje neki linearni operator $\mathcal{A}: X \to Y$, čiji je rang, na osnovu teoreme 2.3.2, jednak r. Međutim, u prostorima X i Y moguće je, kao što smo videli u dokazu pomenute teoreme 2.3.2, izabrati nove baze $B_{e'}$ i $B_{f'}$, tako da matrica operatora $\mathcal{A}$ ima oblik (2.3.3). Prema tome, matrice A i E_r su ekvivalentne jer odgovaraju istom operatoru $\mathcal{A}$.

Na osnovu ovoga, za matrice A i B istog ranga važi implikacija

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = r \;\Rightarrow\; \big(A \cong E_r \wedge B \cong E_r\big).$$

Najzad, kako je $\cong$ relacija ekvivalencije, iz prethodnog sleduje implikacija (2.4.1). $\square$

Na osnovu dokazane teoreme, zaključujemo da klasi ekvivalentnih matrica odgovara samo jedan operator. U toj klasi ekvivalencije, matrica E_r ima najprostiju strukturu. Svaka matrica A koja pripada toj klasi ekvivalencije može se svesti na oblik E_r za koji kažemo da je *Hermiteova kanonička forma* matrice A.

Na osnovu dokaza teorema 2.3.2 i 2.4.2, jednostavno se mogu konstruisati baze $B_{e'}$ i $B_{f'}$, u prostorima X i Y respektivno, za koje se matrica operatora $\mathcal{A}: X \to Y$ svodi na matricu E_r, pri čemu startujemo od proizvoljne baze $B_e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ u prostoru X. Sa r označimo broj linearno nezavisnih vektora u skupu $\{\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n\}$. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je taj skup vektora $\{\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_r\}$[46)], a zatim izrazimo preostale vektore $\{\mathcal{A}e_{r+1}, \ldots, \mathcal{A}e_n\}$ kao linearne kombinacije ovih vektora:

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{k=1}^{r} c_{jk}\mathcal{A}e_k \qquad (j = r+1, \ldots, n). \tag{2.4.2}$$

Tada se u X može definisati nova baza $B_{e'} = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ na sledeći način:

$$\begin{aligned} e'_j &= e_j && (j = 1, \ldots, r), \\ e'_j &= e_j - \sum_{k=1}^{r} c_{jk}e_k && (j = r+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Na osnovu (2.4.2), imamo

$$\mathcal{A}e'_j = \mathcal{A}\Big(e_j - \sum_{k=1}^{r} c_{jk}e_k\Big) = \theta \qquad (j = r+1, \ldots, n).$$

Stavimo, dalje,

$$\mathcal{A}e'_j = \mathcal{A}e_j = f'_j \qquad (j = 1, \ldots, r),$$

gde su $\{f'_1, \ldots, f'_r\}$, po pretpostavci, linearno nezavisni vektori. Dopunimo ovaj skup vektora do baze u Y vektorima $f'_{r+1}, \ldots, f'_m$. Dakle, sada imamo novu bazu i u prostoru Y

$$B_{f'} = \{f'_1, \ldots, f'_r, f'_{r+1}, \ldots, f'_m\}.$$

Kao što je poznato iz dokaza teoreme 2.3.2, matrica operatora $\mathcal{A}$ za novi par baza $(B_{e'}, B_{f'})$ je, upravo, matrica E_r.

Za praktično određivanje ranga matrice $A \in M_{m,n}$ veoma je pogodno korišćenje elementarnih transformacija slično kao u Gaussovom algoritmu, pri čemu se ovde izvršavaju elementarne transformacije i nad vrstama i nad kolonama matrice A, sa strategijom dovođenja matrice na Hermiteovu kanoničku formu (2.3.3).

Ukoliko matrica A nije nula matrica ($\operatorname{rang} O_{m,n} = 0$), uvek je moguće, razmenom vrsta ili kolona (transformacija 3°), dovesti na poziciju $(1,1)$

46) Ovo se, jasno, može ostvariti prenumeracijom bazisnih vektora.

element matrice različit od nule, koji ćemo kao i u Gaussovom algoritmu zvati glavni element. Taj element se može svesti na jedinicu ako se nad prvom vrstom (kolonom) izvrši elementarna transformacija 1° – množenje prve vrste (kolone) recipročnom vrednošću glavnog elementa. Zatim se, na isti način kao u Gaussovom algoritmu, anuliraju elementi u prvoj koloni koji se nalaze ispod „dijagonale". Slično, primenom transformacije 2° nad kolonama, anuliraju se svi elementi u prvoj vrsti desno od „dijagonale", dodavanjem elemenata prve kolone odgovarajućim elementima ostalih kolona, uz prethodno množenje pogodnim skalarima. Ovim postupkom, dobijamo matricu

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & \mid & O_{1,n-1} \\ ---- & - & ---- \\ O_{m-1,1} & \mid & A_1 \end{bmatrix},$$

koja je ekvivalentna matrici A.

Primenom istog postupka na matrični blok A_1, tipa $(m-1) \times (n-1)$, dobijamo

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} I_2 & \mid & O_{2,n-2} \\ ---- & - & ---- \\ O_{m-2,2} & \mid & A_2 \end{bmatrix}.$$

Nastavljajući ovaj algoritam dolazimo do ekvivalentne matrice E_r, iz koje se jednostavno identifikuje rang date matrice A.

Primer 2.4.2. Posmatrajmo matricu A iz primera 2.4.1.

Kako je element na poziciji $(1,1)$ jednak nuli, izvršićemo najpre razmenu, na primer, prve i treće vrste, dobijajući tako ekvivalentnu matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

U cilju anuliranja elemenata u prvoj koloni ispod „dijagonale", dodaćemo elemente prve vrste odgovarajućim elementima druge i četvrte vrste, uz prethodno množenje sa -4 i -2 respektivno. Tako dobijamo matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 12 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Da bismo anulirali i elemente u prvoj vrsti, sem, naravno, elementa na poziciji $(1,1)$, dodaćemo elemente prve kolone odgovarajućim elementima treće, četvrte i pete kolone, uz prethodno množenje sa 2, -1 i -2. Tada se prethodna matrica svodi na matricu

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 12 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & -4 \end{bmatrix},$$

koja je ekvivalentna polaznoj matrici A.

Množenjem druge vrste u matrici $A^{(1)}$ sa $-1/2$ dobijamo ekvivalentnu matricu kod koje je element na poziciji $(2,2)$ jednak jedinici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & -3 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ponavljajući isti postupak na anuliranje elemenata u drugoj koloni i drugoj vrsti (ispod i desno od „dijagonale“) dobijamo ekvivalentnu matricu

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 9/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & 13 & -9/2 & -15/2 \end{bmatrix}.$$

Množenjem treće kolone sa $-1/13$ dobijamo jedinicu na poziciji $(3,3)$. Anuliranjem elemenata treće kolone i treće vrste (ispod i desno od „dijagonale“) dobijamo matricu E_3, tj.

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_3.$$

Dakle, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} E_3 = 3$. $\triangle$

Napomena 2.4.1. U prethodnom primeru mogli smo da izbegnemo rad sa razlomcima da smo posle prvog koraka izvršili razmenu druge i četvrte vrste, dovodeći tako jedinicu na poziciju $(2,2)$. Anuliranjem elemenata u drugoj koloni i drugoj vrsti (ispod i desno od „dijagonale“) dobili bismo

$$\tilde{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -9 & -15 \\ 0 & 0 & 26 & -9 & -15 \end{bmatrix},$$

što, nadalje, daje $\tilde{A}^{(2)} \cong A^{(3)} = E_3$.

2.5. Linearna zavisnost vrsta i kolona matrice

Neka su u linearnim prostorima X i Y date baze $B_e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ i $B_f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, respektivno, i neka je $M_{m,n}$ prostor matrica tipa $m \times n$. Pretpostavimo da je $\mathbb{K}$ polje realnih brojeva[47]. Tada je matricom

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

jednoznačno određen linearni operator $\mathcal{A}\colon X \to Y$, čiji je rang jednak rangu matrice A.

U prostoru X uočimo proizvoljan vektor u. Tada se on može, na jedinstven način, prikazati kao linearna kombinacija vektora baze B_e, tj.

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Neka je $v = \mathcal{A}u = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_m f_m$ i neka su

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

koordinatne reprezentacije za $u \in X$ i $v \in Y$, respektivno. Ako sa V_n označimo prostor svih vektora oblika $\boldsymbol{x} = [\,x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n\,]^T$, tj. $V_n = M_{n,1}$[48], transformacija $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ može se razmatrati kao preslikavanje prostora V_n u V_m.

Kako je $\mathcal{A}u = x_1\mathcal{A}e_1 + x_2\mathcal{A}e_2 + \dots + x_n\mathcal{A}e_n$, rang operatora $\mathcal{A}$, kao dimenzija potprostora $T_{\mathcal{A}}$, predstavlja maksimalan broj linearno nezavisnih vektora u skupu $U = \{\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n\}$, tj. $\operatorname{rang}\mathcal{A} = \operatorname{rang} U$. Potprostoru $T_{\mathcal{A}}$, u matričnom tretiranju problema, odgovara potprostor $\{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in V_n\}$, u oznaci $k(A)$. Kao što je poznato (videti odeljak 2.3), kolone matrice A su koordinate vektora $\mathcal{A}e_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ u odnosu na bazu B_f, što znači da

[47] Slična razmatranja važe i u slučaju polja kompleksnih brojeva.

[48] Prostor V_n se može tretirati i kao $\mathbb{R}^n$.

je $k(A)$ ($\subset V_m$) *prostor kolona matrice* A, tj. skup svih linearnih kombinacija vektora

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Dakle,

$$k(A) = \Big\{ \boldsymbol{a} \ \Big| \ \boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{a}_j \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}) \Big\}.$$

Prema tome, rang operatora $\mathcal{A}$, tj. rang matrice A, poklapa se sa brojem linearno nezavisnih kolona matrice A.

Saglasno definiciji 2.2.6, za skup vektora $\boldsymbol{x} \in V_n$ za koje je $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}_m$ kažemo da je jezgro matrice A. Označićemo ga sa N_A ili $\ker A$. Na osnovu teoreme 2.2.2, zaključujemo da je

$$\dim k(A) + \dim N_A = n\,. \tag{2.5.1}$$

Slično prethodnom, može se definisati i prostor vrsta matrice A, u oznaci $v(A)$, kao

$$v(A) = \Big\{ \boldsymbol{a} \ \Big| \ \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{a}^i \ (\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}) \Big\},$$

gde je

$$\boldsymbol{a}^i = [\, a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{in} \,] \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Češće se, međutim, umesto $v(A)$ koristi prostor $v^*(A)$ koji se dobija iz $v(A)$ transponovanjem njegovih elemenata. Tako je, u stvari,

$$v^*(A) = k(A^T) = \{A^T\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in V_m\}$$

jer pri transponovanju matrice A njene vrste postaju kolone matrice A^T. Očigledno, $v^*(A) \subset V_n$.

Kako je $\operatorname{rang} A^T = \operatorname{rang} A$ (videti teoremu 2.3.1), zaključujemo da je broj linearno nezavisnih vrsta matrice, takođe, jednak rangu matrice A. Dakle, važi

$$\dim v^*(A) = \dim k(A) = \operatorname{rang} A\,. \tag{2.5.2}$$

Jezgro matrice A^T je skup vektora $\boldsymbol{y} \in V_m$ za koje je $A^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}_n$. Naravno, sada je

$$\dim v^*(A) + \dim N_{A^T} = m\,. \tag{2.5.3}$$

Na osnovu prethodnog može se formulisati sledeće tvrđenje:

Teorema 2.5.1. *Bazisne vrste* (*kolone*) *proizvoljnog bazisnog minora matrice* A *obrazuju bazu vektora vrsta* (*kolona*) *matrice* A.

Definicija 2.5.1. Neka matrica $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ sadrži r ($r \le m$) nenula vrsta i neka su one na položaju prvih r vrsta u matrici. Ako je

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & (j < k_i), \\ 1 & (j = k_i), \\ \text{proizvoljno} & (j > k_i), \end{cases}$$

gde je $i \le k_i \le n$ i $k_i < k_{i+1}$ $(i = 1, \dots, r-1)$, tada za matricu A kažemo da ima *trapezoidalnu formu*.

Očigledno, za matricu u trapezoidalnoj formi prvih r vrsta su bazisne i njen rang je jednak r.

Primer 2.5.1. Matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ima trapezoidalnu formu. Njen rang je 3. $\triangle$

Elementarnim transformacijama nad vrstama matrice, svaka matrica A se može dovesti na trapezoidalnu formu. Saglasno teoremi 2.5.1, nenula vrste u trapezoidalnoj formi obrazuju bazu vektora vrsta matrice A.

Korišćenjem teoreme 2.5.1 moguće je problem nalaženja baze datog sistema vektora $U = \{u_1, \dots, u_m\}$, u linearnom prostoru X dimenzije n, svesti na problem nalaženja bazisnih vrsta jedne matrice tipa $m \times n$, tj. nalaženja njene trapezoidalne forme.

Očigledno, ako je U skup linearno nezavisnih vektora, tada on sam predstavlja jednu bazu. Međutim, u opštem slučaju, dati skup vektora U ne mora biti linearno nezavisan. U cilju rešavanja postavljenog problema, izaberimo u X bilo koju bazu $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, a zatim razložimo vektore skupa U po vektorima baze B. Tako dobijamo

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n, \\ u_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n, \\ &\ \vdots \\ u_m &= a_{m1}e_1 + a_{m2}e_2 + \cdots + a_{mn}e_n. \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Na osnovu (2.5.4) formirajmo matricu A tako da koordinate vektora $u_1, u_2, \ldots, u_m$ budu vrste u toj matrici. Dakle,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Kako, u ovom slučaju, vrste matrice A predstavljaju koordinatne reprezentacije vektora iz datog skupa U, problem određivanja baze skupa vektora U svodi se na nalaženje baze vektora vrsta matrice A.

Primer 2.5.2. Posmatrajmo skup vektora U iz primera 2.1.1, gde su

$$u_1 = (4, -2, -3, -1), \quad u_2 = (-7, 3, 5, 3), \quad u_3 = (1, 1, 0, -4), \quad u_4 = (-2, 0, 1, 3).$$

Ako izaberemo prirodnu bazu u prostoru $\mathbb{R}^4$, tada odgovarajuća matrica koordinata ovih vektora postaje

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 & -1 \\ -7 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Primenićemo sada elementarne transformacije nad vrstama matrice A, sa strategijom svođenja matrice na trapezoidalnu formu.

Najpre, razmenimo prvu i treću vrstu, dovodeći element 1 na poziciju $(1, 1)$, a zatim anulirajmo elemente u prvoj koloni ispod dijagonale, dodavanjem elemenata prve vrste odgovarajućim elementima druge, treće i četvrte vrste, uz prethodno množennje sa 7, -4 i 2, respektivno:

$$A \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 \\ -7 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 10 & 5 & -25 \\ 0 & -6 & -3 & 15 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Sada, množenjem druge vrste sa $1/10$, element na poziciji $(2, 2)$ postaje jednak jedinici. Najzad, dodavanjem elemenata druge vrste odgovarajućim elementima treće i četvrte vrste, uz prethodno množenje sa 6 i -2, respektivno, dobijamo

$$A \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $\operatorname{rang} U = 2$ i za bazu sistema U može se uzeti skup vektora $B = \{v_1, v_2\}$, gde su

$$v_1 = u_3 = (1,\ 1,\ 0, -4), \qquad v_2 = (0,\ 1,\ 1/2,\ -5/2).$$

Primetimo da je

$$\begin{aligned} u_1 &= (4, -2, -3, -1) &&= 4v_1 - 6v_2, \\ u_2 &= (-7,\ 3,\ 5,\ 3) &&= -7v_1 + 10v_2, \\ u_3 &= (\ 1,\ 1,\ 0, -4) &&= v_1, \\ u_4 &= (-2,\ 0,\ 1,\ 3) &&= -2v_1 + 2v_2, \end{aligned}$$

tako da su koordinatne reprezentacije ovih vektora u bazi B redom

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -7 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

U prostoru X sa skalarnim proizvodom $(\cdot, \cdot)$ moguće je, bez razlaganja po bazisnim vektorima, ustanoviti da li je neki sistem vektora $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ linearno zavisan ili linearno nezavisan.

Definicija 2.5.2. Za determinantu

$$G(U) = \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & \dots & (u_1, u_m) \\ (u_2, u_1) & (u_2, u_2) & & (u_2, u_m) \\ \vdots & & & \\ (u_m, u_1) & (u_m, u_2) & & (u_m, u_m) \end{vmatrix}$$

kažemo da je *Gramova determinanta* sistema vektora $U = \{u_1, \dots, u_m\}$.

Teorema 2.5.2. *Sistem vektora $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ je linearno zavisan ako i samo ako je $G(U) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo, najpre, da je sistem vektora $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ linearno zavisan, tj. da postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, koji istovremeno nisu jednaki nuli, a da je pri tome

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_m u_m = \theta\,. \tag{2.5.5}$$

Skalarnim množenjem (2.5.5) sa u_j, za svako $j = 1, 2, \dots, m$, dobijamo

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_m u_m,\ u_j) = 0\,,$$

tj.

$$\lambda_1(u_1, u_j) + \lambda_2(u_2, u_j) + \cdots + \lambda_m(u_m, u_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

odakle zaključujemo da su vrste u determinanti zavisne, pa je $G(U) = 0$.

Pretpostavimo sada obrnuto, tj. da je $G(U) = 0$. Tada je rang odgovarajuće matrice manji od m, što znači da su njene vrste linearno zavisne, tj. postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ takvi da istovremeno nisu svi jednaki nuli i da je

$$\lambda_1(u_1, u_j) + \lambda_2(u_2, u_j) + \cdots + \lambda_m(u_m, u_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

tj. da za svako $j = 1, 2, \ldots, m$ važi jednakost

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m,\ u_j) = 0.$$

Množenjem poslednje jednakosti sa λ_j dobijamo[49)]

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m,\ \lambda_j u_j) = 0\,.$$

Najzad, sabiranjem ovih jednakosti za $j = 1, 2, \ldots, m$, nalazimo da je

$$\|\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m\|^2 = 0\,,$$

tj. da je

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m = \theta\,,$$

što znači da su vektori sistema U linearno zavisni. □

Na kraju ovog odeljka vratimo se razmatranju potprostora $k(A)$ i $v^*(A)$, kao i potprostora N_A i N_{A^T}, uz prisustvo skalarnog proizvoda. Napomenimo da je

$$k(A) \subset V_m, \quad v^*(A) \subset V_n, \quad N_A \subset V_n, \quad N_{A^T} \subset V_m\,. \tag{2.5.6}$$

Neka je u prostoru V_m definisan skalarni proizvod pomoću (videti odeljak 2.6, glava II)

$$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{z} = \sum_{k=1}^{m} z_k w_k\,,$$

---

49) U slučaju kompleksnog prostora treba množiti sa $\bar{\lambda}_j$.

gde su

$$\boldsymbol{z} = [\, z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_m \,]^T \qquad \text{i} \qquad \boldsymbol{w} = [\, w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_m \,]^T .$$

Za proizvoljne vektore $\boldsymbol{x} \in V_n$ i $\boldsymbol{y} \in V_m$ važi

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^T \boldsymbol{y}) \tag{2.5.7}$$

jer je

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x} = (A^T\boldsymbol{y})^T \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, A^T\boldsymbol{y}) .$$

Primetimo da su skalarni proizvodi na levoj i desnoj strani jednakosti (2.5.7) iz različitih prostora, tj. iz V_m i V_n, respektivno.

Sledeća teorema pokazuje da se prostori V_n i V_m mogu izraziti kao ortogonalne sume nekih od potprostora iz (2.5.6).

Teorema 2.5.3. *Važe jednakosti*

$$V_n = N_A \oplus v^*(A), \qquad V_m = N_{A^T} \oplus k(A) . \tag{2.5.8}$$

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{x}$ proizvoljan vektor iz jezgra N_A. Tada je $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}_m$, odakle, na osnovu (2.5.7), zaključujemo da je

$$(\forall y \in V_m) \qquad (\boldsymbol{x}, A^T\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{o}_m, \boldsymbol{y}) = 0,$$

što znači da je svaki vektor $\boldsymbol{x} \in N_A$ ortogonalan na skup $\{A^T\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in V_m\}$, tj. $N_A \perp v^*(A)$. Slično se dokazuje da je $N_{A^T} \perp k(A)$.

Najzad, na osnovu jednakosti (2.5.2) i (2.5.1), tj. (2.5.3), zaključujemo da važe ortogonalana razlaganja (2.5.8). □

2.6. Kronecker-Capellieva teorema

U trećem poglavlju razmatrani su neki metodi za rešavanje sistema linearnih jednačina. Korišćenjem pojma ranga matrice moguće je dati potrebne i dovoljne uslove pod kojima jedan sistem linearnih jednačina sa pravougaonom matricom ima rešenje.

Posmatrajmo sistem jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

sa matricom sistema A i vektorom slobodnih članova $\boldsymbol{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Formirajmo matricu B, tipa $m \times (n+1)$, dodajući vektor $\boldsymbol{b}$ matrici A kao $(n+1)$-vu kolonu, tj.

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Za matricu B kažemo da je *proširena matrica sistema* (2.6.1).

Kao što je poznato, svaka uređena n-torka $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ predstavlja rešenje sistema jednačina (2.6.1) ako se svaka jednačina ovog sistema za $x_k = \xi_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ svodi na identitet.

Definicija 2.6.1. Za sistem jednačina (2.6.1) kažemo da je *saglasan* ili da je *rešiv* ako ima bar jedno rešenje.

Teorema 2.6.1. *Sistem jednačina* (2.6.1) *je saglasan ako i samo ako je*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B.$$

Dokaz. Sa $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ označimo vektore-kolona matrice A. Kako se rang matrice poklapa sa rangom sistema vektora-kolona, to je, prema tvrđenju teoreme, sistem jednačina (2.6.1) saglasan ako i samo ako je

$$\operatorname{rang}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\} = \operatorname{rang}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}\}. \tag{2.6.2}$$

Pretpostavimo, najpre, da je sistem jednačina (2.6.1) saglasan, tj. da postoje brojevi $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ takvi da je

$$\xi_1 \boldsymbol{a}_1 + \xi_2 \boldsymbol{a}_2 + \dots + \xi_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}.$$

Dakle, vektor-kolona $\boldsymbol{b}$ je linearna kombinacija vektora $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$. Ovo znači da je bilo koja baza sistema vektora-kolona matrice A, tj. baza prostora kolona, istovremeno i baza za sistem vektora $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}\}$. Prema tome, posmatrani sistemi vektora su ekvivalentni i važi (2.6.2), tj. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$.

Obrnuto, neka je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$, tj. neka važi (2.6.2). Za sistem vektora $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ izaberimo bazu koju čine neki ili svi[50)] njegovi vektori. Pod uslovom (2.6.2), ona će, takođe, biti i baza za prošireni sistem vektora $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}\}$, što znači da se $\boldsymbol{b}$ može izraziti kao linearna kombinacija vektora baze. Samim tim, $\boldsymbol{b}$ se može izraziti i kao linearna kombinacija svih vektora-kolona $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{a}_n$. Dakle, sistem jednačina (2.6.1) je saglasan. $\square$

Teorema 2.6.1 poznata je kao *Kronecker-Capellieva*[51)] *teorema.* Iz dokaza ove teoreme proizilazi i sledeća ekvivalentna formulacija:

Teorema 2.6.1′. *Sistem jednačina* (2.6.1) *je saglasan ako i samo ako* $\boldsymbol{b} \in k(A)$*, gde je* $k(A)$ *prostor kolona matrice* A*.*

Neka je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = r$. Tada među vrstama matrice A, tj. matrice B, postoji tačno r linearno nezavisnih vrsta, što znači da se $m - r$ jednačina može odbaciti ako je $r < m$. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je jedan bazisni minor matrice A definisan pomoću prvih r vrsta i prvih r kolona[52)] matrice A. Ako je $r < m$, odbacivanjem poslednjih $m-r$ jednačina dobijamo sistem

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1,n}x_n,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r &= b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2,n}x_n,\\
&\ \vdots\\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{r,n}x_n,
\end{aligned}
\tag{2.6.3}
$$

pretpostavljajući pri tome da je $r < n$. Za promenljive $x_{r+1}, \ldots, x_n$, koje se nalaze na desnoj strani u sistemu jednačina (2.6.3), kažemo da su *slobodne* ili *nezavisne promenljive*, dok za $x_1, \ldots, x_r$ koristimo termin *bazisne* ili *zavisne promenljive.* Ako je $r = n$, u sistemu jednačina ne postoje slobodne promenljive.

Teorema 2.6.2. *Da bi saglasan sistem linearnih jednačina imao jedinstveno rešenje potrebno je i dovoljno da rang matrice sistema bude jednak broju nepoznatih.*

---

50) Ovo će biti slučaj kada se radi o sistemu linearno nezavisnih vektora.

51) Alfred Capelli (1855–1910), italijanski matematičar.

52) Ovo se, inače, može postići razmenom vrsta i kolona u matrici A.

Dokaz. Ako je $r = \operatorname{rang} A = n$, na osnovu prethodnog, sistem jednačina ima jedinstveno rešenje dato Cramerovim formulama.

Obrnuto, ako sistem (2.6.3) ima jedinstveno rešenje, tada on ne može imati slobodne promenljive, što znači da mora biti $r = n$. $\square$

Kod homogenog sistema jednačina ($b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$) očigledno je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$, tako da je ovaj sistem saglasan. Zaista, homogeni sistem uvek ima tzv. trivijalno rešenje $\xi_k = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Može se postaviti pitanje pod kojim uslovima homogeni sistem jednačina ima i netrivijalno rešenje.

Teorema 2.6.3. *Da bi homogeni sistem linearnih jednačina imao netrivijalno rešenje potrebno je i dovoljno da rang matrice sistema bude manji od broja nepoznatih.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 2.6.2, homogeni sistem jednačina ima jedinstveno (trivijalno) rešenje ako i samo ako je $r = \operatorname{rang} A = n$. Suprotno, za postojanje netrivijalnog rešenja homogenog sistema jednačina potrebno je i dovoljno da je $r < n$. $\square$

Ako je matrica A kvadratna, tj. ako je broj promenljivih jednak broju jednačina u homogenom sistemu, tada se potreban i dovoljan uslov za netrivijalno rešenje homogenog sistema svodi na $\det A = 0$. Ako je, međutim, $\det A \neq 0$, homogeni sistem ima samo trivijalno rešenje.

Vratimo se sistemu (2.6.3), gde je $n - r$ broj slobodnih promenljivih. Bazisne promenljive $x_1, \dots, x_r$ mogu se, primenom Cramerovih formula, jednoznačno izraziti pomoću slobodnih promenljivih $x_{r+1}, \dots, x_n$ u obliku

$$\begin{aligned}
x_1 &= \gamma_1 - \beta_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - \beta_{1,n}x_n,\\
x_2 &= \gamma_2 - \beta_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - \beta_{2,n}x_n,\\
&\vdots\\
x_r &= \gamma_r - \beta_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - \beta_{r,n}x_n,
\end{aligned}$$

gde su

$$\gamma_k = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{r} b_i A_{ik}, \quad \beta_{k,j} = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{r} a_{ij}A_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, r;\ j = r+1, \dots, n),$$

$D\,(\neq 0)$ determinanta (bazisni minor) reda r i A_{ik} kofaktori elemenata a_{ik} za odgovarajuću matricu reda r. Dakle, u ovom slučaju, slobodne promenljive se biraju proizvoljno, pa sistem jednačina ima beskonačno mnogo rešenja.

Primer 2.6.1. Neka je dat sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}
(3+2\lambda)x_1+&(1+3\lambda)x_2+\lambda x_3+(\lambda-1)x_4=3,\\
3\lambda x_1+&(3+2\lambda)x_2+\lambda x_3+(\lambda-1)x_4=1,\\
3\lambda x_1+&\qquad 3\lambda x_2+3x_3+(\lambda-1)x_4=1,\\
3\lambda x_1+&\qquad 3\lambda x_2+\lambda x_3+(\lambda-1)x_4=1,
\end{aligned}$$

gde je λ proizvoljan realan parametar.

Pođimo od proširene matrice sistema

$$B=\begin{bmatrix} 3+2\lambda & 1+3\lambda & \lambda & \lambda-1 & | & 3\\ 3\lambda & 3+2\lambda & \lambda & \lambda-1 & | & 1\\ 3\lambda & 3\lambda & 3 & \lambda-1 & | & 1\\ 3\lambda & 3\lambda & \lambda & \lambda-1 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Dodavanjem elemenata treće vrste odgovarajućim elementima prve, druge i četvrte vrste, uz prethodno množenje sa -1, dobijamo ekvivalentnu matricu

$$B_1=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & \lambda-3 & 0 & | & 2\\ 0 & 3-\lambda & \lambda-3 & 0 & | & 0\\ 3\lambda & 3\lambda & 3 & \lambda-1 & | & 1\\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada, dodavanjem elemenata četvrte vrste odgovarajućim elementima prve i druge vrste, uz prethodno množenje sa -1, dobijamo matricu

$$B_2=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 & | & 2\\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & | & 0\\ 3\lambda & 3\lambda & 3 & \lambda-1 & | & 1\\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

S obzirom na vrednost parametra λ, razlikovaćemo tri slučaja:

SLUČAJ $\lambda=1$. Matrica B_2 se svodi na

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & | & 2\\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 0\\ 3 & 3 & 3 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & -2 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Množenjem prve i druge vrste sa $1/2$ i četvrte vrste sa $-1/2$, a zatim dodavanjem elemenata prve vrste odgovarajućim elementima treće vrste, uz prethodno množenje sa -3, redom imamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & | & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0\\ 3 & 3 & 3 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & | & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0\\ 0 & 3/2 & 3 & 0 & | & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Razmenom treće i četvrte vrste, a zatim dodavanjem elemenata druge i treće vrste odgovarajućim elementima četvrte vrste, uz prethodno množenje sa $-3/2$ i -3, respektivno, redom dobijamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3/2 & 3 & 0 & | & -2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -2 \end{bmatrix}.$$

Iz poslednje matrice zaključujemo da je rang matrice A datog sistema jednačina jednak 3, a rang odgovarajuće proširene matrice jednak 4, što znači da sistem nije saglasan[53)].

Slučaj $\lambda = 3$. Sada se matrica B_2 svodi na

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 9 & 9 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Množenjem treće vrste sa $1/9$, a zatim sukcesivnom razmenom prve i treće, pa druge i treće vrste, redom dobijamo ekvivalentne matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1/3 & 2/9 & | & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/3 & 2/9 & | & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$

odakle zaključujemo da je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 2$. Na osnovu Kronecker-Capellieve teoreme, sistem jednačina je saglasan. U stvari, on je ekvivalentan sistemu jednačina

$$x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{9}x_4 = \frac{1}{9}, \qquad x_2 = 2\,,$$

odakle nalazimo sva rešenja:

$$x_1 = -\frac{17}{9} - \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{9}\beta, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \alpha, \quad x_4 = \beta,$$

gde skalari α i β uzimaju proizvoljne vrednosti. Napomenimo da su, u ovom slučaju, x_3 i x_4 slobodne promenljive.

Slučaj $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq 3$. Množenjem prve, druge i četvrte vrste matrice B_2 sa p, p i $-p$, respektivno, gde je $p = 1/(3-\lambda)$, matrica B_2 se transformiše u ekvivalentnu matricu

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3-\lambda} & 0 & 0 & | & \frac{2}{3-\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 3\lambda & 3\lambda & 3 & \lambda - 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

53) Često se kaže da je *sistem protivurečan* ili *nemoguć*.

Razmenom treće i četvrte vrste, a zatim dodavanjem elemenata prve, druge i treće vrste odgovarajućim elementima četvrte vrste, uz prethodno množenje pogodnim skalarima, dobijamo

$$B_3 \cong \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{3-\lambda} & 0 & 0 & \frac{2}{3-\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & \frac{3-7\lambda}{3-\lambda} \end{array}\right].$$

Najzad, množenjem četvrte vrste sa $1/(\lambda-1)$, matrica B_3 se transformiše na ekvivalentnu matricu

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{3-\lambda} & 0 & 0 & \frac{2}{3-\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3-7\lambda}{(3-\lambda)(\lambda-1)} \end{array}\right],$$

odakle zaključujemo da je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 4$, što znači da sistem jednačina ima jedinstveno rešenje dato sa:

$$x_1 = \frac{2}{3-\lambda}, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = \frac{3-7\lambda}{(3-\lambda)(\lambda-1)}. \quad \triangle$$

Posmatrajmo sada sistem jednačina (2.6.1) u matričnom obliku

$$Ax = \boldsymbol{b}, \tag{2.6.4}$$

kao i odgovarajući homogeni sistem sa transponovanom matricom, tj. sistem

$$A^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}, \tag{2.6.5}$$

gde je $\boldsymbol{o}$ nula-vektor dimenzije n. Za homogeni sistem (2.6.5) kažemo da je *konjugovani homogeni sistem* jednačina.

Na osnovu teoreme 2.6.1′, sistem jednačina (2.6.4) je saglasan ako i samo ako $\boldsymbol{b} \in k(A)$. Skup rešenja homogenog sistema je, u stvari, jezgro N_{A^T}. Dakle, ako je defekt jezgra jednak nuli, tada homogeni sistem (2.6.5) ima samo trivijalno rešenje $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}_m$.

Korišćenjem teoreme 2.5.3, u daljem tekstu, proučićemo izvesne veze koje postoje između nehomogenog sistema jednačina (2.6.4) i konjugovanog homogenog sistema (2.6.5). Pre svega, napomenimo da je

$$r = \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T.$$

Teorema 2.6.4. *Sistem jednačina* (2.6.4) *je saglasan ako i samo ako je vektor* $\boldsymbol{b}$ *ortogonalan sa svim rešenjima konjugovanog homogenog sistema jednačina* (2.6.5).

Dokaz. Pretpostavimo da je sistem jednačina (2.6.4) saglasan, tj. da vektor $\boldsymbol{b} \in k(A)$. Tada je, s obzirom na (2.5.8), $\boldsymbol{b} \perp N_{A^T}$, tj. $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) = 0$, za svako $\boldsymbol{y} \in V_m$ za koje je $A^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$.

Pretpostavimo sada obrnuto, tj. neka je $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) = 0$ za svako $\boldsymbol{y} \in N_{A^T}$. Tada je $\boldsymbol{b} \perp N_{A^T}$, odakle sleduje $\boldsymbol{b} \in k(A)$. □

Teorema 2.6.4 poznata je kao *Fredholmova*[54)] *teorema.*

Ako su sistemi jednačina (2.6.4) i (2.6.5) sa kvadratnom matricom, tj. ako je $m = n$, Fredholmova teorema se može interpretirati u obliku alternative: *Ili sistem jednačina* (2.6.4) *ima jedinstveno rešenje za svaki vektor* $\boldsymbol{b}$*, ili konjugovani homogeni sistem* (2.6.5) *ima netrivijalna rešenja.*

Zaista, ako je $r = n$, tada nastupa prva alternativa jer je $k(A) = V_n$ i $N_{A^T} = \{\boldsymbol{o}_n\}$. Ako je, međutim, $r < n$, tada je $k(A)$ pravi deo od V_n, pa sistem (2.6.4) ne može biti saglasan za one vektore $\boldsymbol{b}$ koji ne pripadaju $k(A)$. U tom slučaju, jezgro N_{A^T} sadrži i nenula vektore tako da konjugovani homogeni sistem (2.6.5) ima i netrivijalna rešenja.

Napomena 2.6.1. Za tzv. operatorske jednačine u nekim funkcionalnim prostorima postoje veoma značajna uopštenja Fredholmove teorije.

Primer 2.6.2. Neka je data matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredićemo, najpre, jednu regularnu matricu S tako da SA ima trapezoidalnu formu. U tom cilju formirajmo proširenu matricu sistema jednačina $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, gde je $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_5 \end{bmatrix}^T$, a zatim primenimo elementarne transformacije nad vrstama ove matrice sa strategijom dobijanja trapezoidalne forme. Tako redom

54) Eric Ivar Fredholm (1866–1927), švedski matematičar.

imamo

$$
\left[\begin{array}{rrrrr|c}
1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_2 \\
1 & 2 & -1 & -1 & 0 & y_3 \\
2 & 4 & 1 & 10 & 1 & y_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5
\end{array}\right]
\cong
\left[\begin{array}{rrrrr|c}
1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_2 \\
0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -y_1+y_3 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2y_1+y_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5
\end{array}\right]
$$

$$
\cong
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1+y_2+y_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2y_1-y_2+y_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5
\end{array}\right]
$$

$$
\cong
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2y_1-y_2+y_4-y_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1+y_2+y_3
\end{array}\right].
$$

Ako je

$$
S\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_5 \\ -2y_1-y_2+y_4-y_5 \\ -y_1+y_2+y_3 \end{bmatrix},
$$

imamo

$$
S = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix},
$$

tj.

$$
SA = \begin{bmatrix}
1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.
$$

Dakle, $\operatorname{rang} A = \dim v(A) = \dim k(A) = 3$. Kao bazis u prostoru vrsta $v(A)$ možemo uzeti nenula vrste

$$
\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

tako da je

$$
v(A) = \big\{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3 \ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R})\big\}.
$$

Dakle, svaki vektor-vrsta $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{bmatrix}$ koji pripada prostoru $v(A)$ mora imati oblik

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 2\lambda_1 & \lambda_2 & 3\lambda_1 + 4\lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

tj. među njegovim koordinatama mora biti sledeća zavisnost

$$\alpha_2 = 2\alpha_1, \qquad \alpha_4 = 3\alpha_1 + 4\alpha_3.$$

Dakle, takvi vektori se mogu predstaviti u obliku

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_1 & \alpha_3 & 3\alpha_1 + 4\alpha_3 & \alpha_5 \end{bmatrix}, \tag{2.6.6}$$

pri čemu su $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ proizvoljni skalari. Na primer, za $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$ i $\alpha_5 = 5$, dobijamo vektor-vrstu $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ iz prostora $v(A)$. Inače, ovaj prostor je trodimenzionalan. Koordinatna reprezentacija vektora (2.6.6) u bazi $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ je

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \end{bmatrix}.$$

Pokazaćemo sada kako se vektor $\boldsymbol{a} \in v(A)$ može izraziti pomoću matrice A.

Kako je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_3\boldsymbol{a}_2 + \alpha_5\boldsymbol{a}_3 &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & 0 & 0 \end{bmatrix} (SA) \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A, \end{aligned}$$

imamo $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_5 \end{bmatrix} A$.

Posmatrajmo sada homogeni sistem jednačina $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Da bismo opisali prostor rešenja, što, u stvari, predstavlja jezgro N_A, posmatrajmo redukovani sistem $(SA)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, tj.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 0, \\ x_3 + 4x_4 &= 0, \\ x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Kako je $x_1 = -2x_2 - 3x_4$, $x_3 = -4x_4$, $x_5 = 0$, prostor rešenja sadrži sve vektore oblika

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2\alpha - 3\beta \\ \alpha \\ -4\beta \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix},$$

gde su α i β proizvoljni skalari. Kao bazis ovog prostora može se uzeti skup $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$, gde su

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Najzad, posmatrajmo nehomogeni sistem jednačina $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. S obzirom da je $\operatorname{rang} A = \dim k(A) = 3$, ovaj sistem jednačina nije saglasan za svako $\boldsymbol{y} \in V_5$. Potrebani i dovoljni uslovi pod kojima je sistem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ saglasan mogu se jednostavno dobiti anuliranjem poslednje dve koordinate u vektoru $S\boldsymbol{y}$. Dakle, to su uslovi

$$-2y_1 - y_2 + y_4 - y_5 = 0, \qquad -y_1 + y_2 + y_3 = 0\,. \tag{2.6.7}$$

Do ovih uslova možemo doći i na osnovu Fredholmove teoreme 2.6.4. Najpre, redukcijom matrice A^T na trapezoidalnu formu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

nalazimo ekvivalentni konjugovani sistem jednačina

$$\begin{aligned} y_1 + y_3 + 2y_4 &= 0, \\ y_2 - y_3 + y_4 &= 0, \\ y_4 + y_5 &= 0, \end{aligned}$$

odakle zaključujemo da prostor rešenja sadrži sve vektore oblika $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{y}_1 + \beta\boldsymbol{y}_1$ (α i β proizvoljni skalari), gde su bazisni vektori

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Iz uslova ortogonalnosti vektora slobodnih članova sa bazisnim vektorima jezgra N_{A^T} sleduje $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1) = -y_1 + y_2 + y_3 = 0$, $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_2) = -2y_1 - y_2 + y_4 - y_5 = 0$, što je, u stvari, (2.6.7). $\triangle$

3. ZADACI ZA VEŽBU

3.1. Različitim metodima (Cramer, Gauss, ...) rešiti sisteme jednačina

$$1^\circ \quad \begin{aligned} 3x+2y-z&=1,\\ x+y+2z&=2,\\ 2x+2y+5z&=3, \end{aligned} \qquad 2^\circ \quad \begin{aligned} 2x-y+z&=8,\\ x-3y-5z&=6,\\ 3x+y-7z&=-4. \end{aligned}$$

Rezultat. 1° $x=-8,\ y=12,\ z=-1,$ 2° $x=2,\ y=-3,\ z=1.$

3.2. Rešiti sisteme jednačina:

$$1^\circ \quad \begin{aligned} 2x-y+3z+2t&=1,\\ 3x+3y+3z+2t&=1,\\ 3x-y-z+2t&=-1,\\ 3x-y+3z-t&=-1, \end{aligned} \qquad 2^\circ \quad \begin{aligned} 2x+y-3z+4t&=1,\\ 3x+2y+4z-3t&=-1,\\ x-3y-z-2t&=0,\\ x+15y+5z+9t&=0. \end{aligned}$$

3.3. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x-y+z-3u+v&=0,\\ 2x-y+2z-u+v&=3,\\ x+3y+z-2u-v&=-1,\\ 3x-2y-z+u+2v&=12,\\ x+y-z-2u+v&=5. \end{aligned}$$

Rezultat. $x=2,\ y=1,\ z=-1,\ u=1,\ v=3.$

3.4. Ako su a,b,c,d i $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ realni brojevi za koje je

$$abcd\neq 0 \qquad \text{i} \qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2>0,$$

rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} ax+by+cz+du&=\alpha,\\ bx-ay+dz-cu&=\beta,\\ cx-dy-az+bu&=\gamma,\\ dx+cy-bz-au&=\delta. \end{aligned}$$

Posebno razmotriti slučaj kada je $abcd = 0$ i $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

3.5. U zavisnosti od vrednosti koje uzima parametar α, diskutovati sistem jednačina

$$\begin{aligned}
\alpha x + y + z + u &= 1,\\
x + \alpha y + z + u &= \alpha,\\
x + y + \alpha z + u &= \alpha^2,\\
x + y + z + \alpha u &= \alpha^3.
\end{aligned}$$

3.6. Neka je $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 > 0$ i neka važe jednakosti

$$x = by + cz + du, \quad y = ax + cz + du, \quad z = ax + by + du, \quad u = ax + by + cz.$$

Odrediti zbir: $S = \dfrac{a}{a+1} + \dfrac{b}{b+1} + \dfrac{c}{c+1} + \dfrac{d}{d+1} \qquad (a, b, c, d \neq -1).$

Uputstvo. Dati skup jednakosti je homogeni sistem jednačina po x, y, z, u.

3.7. Po x, y, z i u rešiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}
x + ay + a^2 z + a^3 u &= a^4,\\
x + by + b^2 z + b^3 u &= b^4,\\
x + cy + c^2 z + c^3 u &= c^4,\\
x + dy + d^2 z + d^3 u &= d^4,
\end{aligned}$$

gde su a, b, c, d među sobom različiti realni ili kompleksni brojevi.

Uputstvo. Očigledno, veličine a, b, c, d su koreni jednačine

$$\lambda^4 - u\lambda^3 - z\lambda^2 - y\lambda - x = 0.$$

3.8. Odrediti rang svake od matrica

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43\\ 75 & 94 & 53 & 132\\ 75 & 94 & 54 & 134\\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155\\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86\\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38\\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80\\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118\\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 17 & 28 & 45 & 11 & 39\\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50\\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11\\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55\\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{bmatrix}.$$

Rezultat. $\operatorname{rang} A = 3$, $\operatorname{rang} B = 2$, $\operatorname{rang} C = 3$, $\operatorname{rang} D = 2$.

IV G L A V A

Algebarski polinomi i racionalne funkcije

1. ALGEBARSKI POLINOMI

1.1. Prsten polinoma

Neka je $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ polje koje ćemo označavati prosto sa $\mathbb{K}$ i neka su 0 i 1 neutralni elementi u odnosu na operacije $+$ i $\cdot$, respektivno[55)]. Umesto $a \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{K})$ pisaćemo jednostavno ab. Neka je, dalje, operacija stepenovanja uvedena na uobičajeni način pomoću

$$(\forall x \in \mathbb{K}) \qquad x^0 = 1, \quad x^k = xx^{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Definicija 1.1.1. Ako $x \in \mathbb{K}$ i $a_k \in \mathbb{K}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, formalni izraz

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{1.1.1}$$

naziva se *algebarski polinom po* x *nad poljem* $\mathbb{K}$. Za elemente a_k kažemo da su *koeficijenti polinoma* $P(x)$. Ako je koeficijent $a_n \neq 0$, za polinom $P(x)$ kažemo da je *stepena* n i to označavamo sa $\operatorname{dg} P(x) = n$. Za koeficijent $a_n \neq 0$ kažemo da je *vodeći* ili *najstariji koeficijent* polinoma $P(x)$.

Dakle, stepen polinoma $P(x)$ je najviši stepen od x koji se pojavljuje u izrazu za $P(x)$ sa nenula koeficijentima.

[55)] Dobar deo materijala za ovu glavu preuzet je iz monografije: G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias, *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Scientific, Singapore – New Jersey – London – Hong Kong, 1994.

Definicija 1.1.2. Za polinom

$$O(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^{n-1} + 0x^n$$

kažemo da je *nula polinom* i označavamo ga prosto sa 0.

Stepen nula polinoma $O(x)$ ($\equiv 0$) se ne definiše.

Polinomi stepena nula se nazivaju konstante i to su elementi polja $\mathbb{K}$. Element $x \in \mathbb{K}$ može se interpretirati kao polinom prvog stepena definisan sa $P(x) = x$. Za element x koristi se termin *neodređena*. Za polinom $P(x)$ definisan sa (1.1.1) kaže se da je *polinom po neodređenoj x*.

Definicija 1.1.3. Za polinom čiji je vodeći koeficijent jednak jedinici kažemo da je *moničan*.

Dakle, monični polinom ima oblik

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n.$$

Skup svih polinoma nad poljem $\mathbb{K}$ označavamo sa $\mathbb{K}[x]$. Od interesa je često uočiti skup svih onih polinoma čiji stepen nije veći od n. Taj podskup ćemo označavati sa $\mathcal{P}_n[x]$ (videti primer 1.1.3, glava III). Proizvoljni polinom iz $\mathcal{P}_n[x]$ ima oblik

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (a_k \in \mathbb{K}),$$

pri čemu ako je $\operatorname{dg} P(x) = m < n$ imamo da je $a_{m+1} = \cdots = a_n = 0$.

U skup $\mathbb{K}[x]$ možemo uvesti relaciju *jednakost* kao i operacije: *sabiranje* i *množenje* polinoma na sledeći način:

Definicija 1.1.4. Polinomi

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \text{i} \quad Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

su *jednaki* ako i samo ako je $a_k = b_k$ za svako $k \geq 0$, tj. kada su njihovi koeficijenti jednaki.

Definicija 1.1.5. Za dva polinoma

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \text{i} \quad Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

zbir i *proizvod* su redom

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_r x^r$$

i

$$(PQ)(x) = P(x)Q(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_sx^s,$$

gde su

$$c_k = a_k + b_k \qquad \bigl(0 \le k \le r = \max(n,m)\bigr)$$

i

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \qquad (0 \le k \le s = n+m).$$

Dakle, ako $P(x) \in \mathcal{P}_n[x]$ i $Q(x) \in \mathcal{P}_m[x]$, tada $(P+Q)(x) \in \mathcal{P}_r[x]$ i $(PQ)(x) \in \mathcal{P}_s[x]$, gde su $r = \max(n,m)$ i $s = n+m$. Napomenimo da za nenula polinome $P(x)$ i $Q(x)$ važi

$$\operatorname{dg}(PQ)(x) = \operatorname{dg} P(x) + \operatorname{dg} Q(x).$$

Takođe, ako $P(x), Q(x) \in \mathbb{K}[x]$ and $P(x) + Q(x) \not\equiv 0$, tada je

$$\operatorname{dg}(P+Q)(x) \le \max\bigl\{\operatorname{dg} P(x), \operatorname{dg} Q(x)\bigr\}.$$

Primer 1.1.1. Neka je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i

$$P(x) = 2 - 3x + 5x^2 \quad \text{i} \quad Q(x) = 2x - x^2 + 2x^3.$$

Tada je

$$S(x) = (P+Q)(x) = 2 - x + 4x^2 + 2x^3$$

i

$$R(x) = (PQ)(x) = 4x - 8x^2 + 17x^3 - 11x^4 + 10x^5.$$

Dakle, $\operatorname{dg} S(x) = 3$ i $\operatorname{dg} R(x) = 5$.

Ako je, međutim, $P(x) = 2 - 3x + x^2 - 2x^3$, tada je $(P+Q)(x) = 2 - x$, što znači da je zbir ova dva polinoma polinom prvog stepena. $\triangle$

Kao specijalan slučaj proizvoda polinoma imamo proizvod polinoma $P(x)$ skalarom α ($\in \mathbb{K}$), koji se može tretirati kao polinom nultog stepena. Dakle,

$$\alpha P(x) = \alpha(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \cdots + (\alpha a_n)x^n.$$

Nije teško dokazati sledeći rezultat:

Teorema 1.1.1. *Skup $\mathbb{K}[x]$ snabdeven sabiranjem i množenjem polinoma čini komutativni prsten sa jedinicom.*

Inverzni element od $Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ $\big(\in \mathbb{K}[x]\big)$ u odnosu na sabiranje je $\sum_{k=0}^{m} (-b_k)x^k$, koji ćemo označavati sa $-Q(x)$. Tada možemo definisati *oduzimanje* polinoma pomoću

$$(P-Q)(x) = P(x) + \big(-Q(x)\big).$$

Napomenimo da za polinome u skupu $\mathbb{K}[x]$ ne postoji operacija deljenje, tj. operacija inverzna operaciji množenja (videti sledeći odeljak).

Slično prethodnom, možemo definisati *polinom po m neodređenih $x_1, \dots, x_m$ nad poljem* $\mathbb{K}$:

Definicija 1.1.6. Neka su $k_1, \dots, k_m$ nenegativni celi brojevi i

$$\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_m), \quad |\boldsymbol{k}| = k_1 + \dots + k_m, \quad \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} = x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}.$$

Polinom po m nedređenih $x_1, \dots, x_m$ nad poljem $\mathbb{K}$ je izraz oblika

$$P(\boldsymbol{x}) = P(x_1, \dots, x_m) = \sum_{|\boldsymbol{k}| \le n} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}, \tag{1.1.2}$$

gde su $a_{\boldsymbol{k}}$ $(\in \mathbb{K})$ njegovi koeficijenti.

Skup takvih polinoma, u oznaci $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$, sa uvedenim odgovarajućim operacijama sabiranja i množenja polinoma, čini, takođe, komutativni prsten sa jedinicom.

Definicija 1.1.7. Proizvod $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} = x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}$ se naziva *primitivni monom* stepena $|\boldsymbol{k}| = k_1 + \dots + k_m$. Polinom

$$a x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m} \qquad (a \in \mathbb{K})$$

se naziva *monom*. Ako je $P(\boldsymbol{x})$ polinom iz prstena $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$ definisan sa (1.1.2) i $P(\boldsymbol{x}) \not\equiv 0$, tada se kao *stepen* polinoma $P(\boldsymbol{x})$ uzima maksimum stepena monoma koji se pojavljuju u polinomu. (Njihovi koeficijenti $a_{\boldsymbol{k}}$ su različiti od nule.)

Napomenimo da je stepen polinoma $P(\boldsymbol{x})$ nula ako i samo ako je $P(\boldsymbol{x}) = a x_1^0 \cdots x_m^0 = a$ $(a \ne 0)$.

Polinom $P(x_1, \dots, x_m)$ po m neodređenih može se razmatrati kao polinom po jednoj neodređenoj, recimo x_1, sa koeficijentima u $\mathbb{K}[x_2, \dots, x_n]$. Stepen d_1 takvog polinoma se naziva *stepen od* $P(x_1, \dots, x_m)$ *po* x_1. Jasno je da je d_1 najveći ceo broj koji se pojavljuje kao eksponent od x_1 u monomima $a_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}$ sa $a_{\boldsymbol{k}} \neq 0$. Slično se definiše stepen polinoma po bilo kojoj neodređenoj x_k $(k = 1, \dots, m)$. Naravno, ovi stepeni d_k su različiti od stepena polinoma $P(x_1, \dots, x_m)$, koji se ponekad naziva *totalni stepen*.

Primer 1.1.2. Polinom $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^2 x_3 + 2x_1^4 x_2$ ima totalni stepen 6, dok su 4, 2 i 1 redom stepeni po x_1, x_2 i x_3. △

Definicija 1.1.8. Za polinom $P(x_1, \dots, x_m)$ kažemo da je *homogeni polinom* ako i samo ako su njegovi nenula monomi istog stepena. Stepen homogenog polinoma se naziva *stepen homogenosti* polinoma.

Ako je $P(x_1, \dots, x_m)$ homogeni polinom stepena homogenosti d tada je

$$P(tx_1, \dots, tx_m) \equiv t^d P(x_1, \dots, x_m).$$

Primer 1.1.3. 1° Polinom

$$P(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 x_2^2 - 5x_1 x_2 x_3 + x_3^3$$

je homogen stepena 3.

2° Ako je $P(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$ imamo

$$P(tx_1, tx_2, tx_3) = t^6 P(x_1, x_2, x_3).$$

Ovo znači da je posmatrani polinom homogen stepena homogenosti 6. △

Polinomi se, takođe, mogu razmatrati nad strukturama koje su jednostavnije od polja, na primer, nad prstenom sa jedinicom. Razmotrimo sada jedan takav slučaj.

Saglasno teoremi 2.4.3 (glava III), skup M_m svih kvadratnih matrica reda m nad poljem skalara $\mathbb{K}$ (realnih ili kompleksnih brojeva), snabdeven operacijama sabiranje i množenje matrica, predstavlja prsten sa jedinicom I (jedinična matrica reda m). Ako $X \in M_m$ i $A_k \in M_m$ $(k = 0, 1, \dots, n)$, tada za

$$P(X) = A_0 + A_1 X + \cdots + A_n X^n = \sum_{k=0}^{n} A_k X^k \tag{1.1.3}$$

kažemo da je *polinom nad* M_m ili prosto *matrični polinom*. U slučaju kada su matrični koeficijenti A_k dati kao $A_k = a_k I$ $(k = 0, 1, \dots, n)$, gde su a_k

skalari iz polja $\mathbb{K}$, a I jedinična matrica reda m, tada se matrični polinom (1.1.3) svodi na

$$P(X) = a_0 I + a_1 X + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Na kraju ovog odeljka ukažimo na važnu činjenicu da se polinom može tretirati i kao funkcija. Naime, na osnovu (1.1.1) može se definisati preslikavanje $P\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, pomoću

$$t \mapsto P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n,$$

i uočiti homomorfizam $P(x) \mapsto P(t)$. Preslikavanje P nazivamo *polinomska funkcija*. Napomenimo da je ovde x neodređena, a t promenljiva. Ne ulazeći dublje u algebarsko tretiranje ovog problema[56)] napomenimo da se može dokazati sledeći važan rezultat:

Teorema 1.1.2. *Homomorfizam $P(x) \mapsto P(t)$ je izomorfizam ako i samo ako je polje $\mathbb{K}$ beskonačno.*

Dakle, za beskonačna polja jednostavno nećemo praviti razliku između polinoma i polinomske funkcije, a za neodređenu x koristićemo i termin promenljiva. Takva beskonačna polja su, na primer, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Međutim, u konačnim poljima iz jednakosti polinomskih funkcija ne sleduje jednakost polinoma.

Kada ne može doći do zabune, umesto termina polinomska funkcija $t \mapsto P(t)$ koristićemo jednostavno termin polinom P. Skup svih polinomskih funkcija (polinoma) ne višeg stepena od n označavaćemo sa $\mathcal{P}_n$.

Slično se može definisati i polinomska funkcija sa više promenljivih.

1.2. Deljivost polinoma

Dokazaćemo, najpre, jednu veoma važnu osobinu polinoma.

Teorema 1.2.1. *Za svaki polinom $P(x)$ i svaki nenula polinom $Q(x)$, postoje jedinstveni polinomi $S(x)$ i $R(x)$ takvi da važi jednakost*

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x), \tag{1.2.1}$$

[56)] Za detalje videti, na primer, knjigu: N. Jacobson, *Basic Algebra I*, W. H. Freeman and Company, New York, 1985.

pri čemu je $R(x)$ *nula polinom ili* $\operatorname{dg} R(x) < \operatorname{dg} Q(x)$.

Dokaz. Pretpostavimo da $P(x)$ i $Q(x)$ imaju stepene n i m, respektivno, i da su

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \text{i} \quad Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m.$$

Ako je $n < m$ ili $P(x) = 0$, tada (1.2.1) važi sa $S(x) \equiv 0$ i $R(x) = P(x)$. Pretpostavimo zato da je $n \geq m$.

Posmatrajmo polinom

$$P_1(x) = P(x) - \frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m} Q(x),$$

čiji je stepen, očigledno, manji od n. Sa n_1 označimo taj stepen, a sa $a_{n_1}^{(1)}$ najstariji koeficijent polinoma $P_1(x)$. Ako je $n_1 \geq m$ stavimo dalje

$$P_2(x) = P_1(x) - \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m}\, x^{n_1-m} Q(x),$$

i sa n_2 i $a_{n_2}^{(2)}$ označimo stepen i najstariji koeficijent ovog polinoma, respektivno. Proces nastavljamo ako je $n_2 \geq m$.

Jasno je da stepeni polinoma $P_1(x), P_2(x), \ldots$ opadaju i da posle konačnog broja koraka dobijamo jednakost

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) - \frac{a_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_m}\, x^{n_{k-1}-m} Q(x),$$

u kojoj je $P_k(x)$ nula polinom ili takav da mu je stepen n_k manji od m. U tom slučaju proces prekidamo, a $P_k(x)$ se, korišćenjem prethodnih jednakosti, može predstaviti u obliku $P_k(x) = P(x) - S(x)Q(x)$, gde smo stavili

$$S(x) = \frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m} + \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m}\, x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_m}\, x^{n_{k-1}-m}.$$

Dakle, ovaj polinom $S(x)$ i $R(x) = P_k(x)$ zadovoljavaju jednakost (1.2.1), pri čemu je $R(x)$ nula polinom ili je njegov stepen manji od stepena polinoma $Q(x)$.

Za dokaz jedinstvenosti polinoma $S(x)$ i $R(x)$, pretpostavimo da postoje i polinomi $\hat{S}(x)$ i $\hat{R}(x)$, koji zadovoljavaju jednakost

$$P(x) = \hat{S}(x) Q(x) + \hat{R}(x),$$

pri čemu je $\hat{R}(x) \equiv 0$ ili $\operatorname{dg} \hat{R}(x) < \operatorname{dg} Q(x)$. Tada je

$$\big(S(x) - \hat{S}(x)\big)Q(x) = \hat{R}(x) - R(x), \tag{1.2.2}$$

pri čemu je polinom na desnoj strani ove jednakosti nula polinom ili je, pak njegov stepen manji od stepena polinoma $Q(x)$. S druge strane, ako je $S(x) - \hat{S}(x) \not\equiv 0$, tada polinom na levoj strani u jednakosti (1.2.2) je ne manjeg stepena od stepena polinoma $Q(x)$. Prema tome, jednakost (1.2.2) je moguća samo ako je

$$\hat{S}(x) = S(x), \qquad \hat{R}(x) = R(x). \quad \square$$

Kao što je rečeno u prethodnom odeljku, za polinome u skupu $\mathbb{K}[x]$ ne postoji operacija deljenje, inverzna operaciji množenja. Može se, međutim, saglasno osobini iz prethodne teoreme, definisati *deljenje* polinoma polinomom sa *ostatkom*.

Definicija 1.2.1. Za polinom $S(x)$ koji zadovoljava (1.2.1) kažemo da je *količnik* pri deljenju polinoma $P(x)$ polinomom $Q(x)$ ($\not\equiv 0$), a za odgovarajući polinom $R(x)$ da je *ostatak* pri tom deljenju.

Ako je ostatak nula polinom, kažemo da je $P(x)$ deljivo sa $Q(x)$ i polinom $Q(x)$ zovemo *delilac* polinoma $P(x)$.

Činjenicu da je $Q(x)$ delilac polinoma $P(x)$ simbolizujemo sa $Q(x)|P(x)$. Neke osobine deljivosti polinoma navodimo u sledećoj teoremi.

Teorema 1.2.2. *Za proizvoljne polinome $P(x), Q(x), U(x)$ važe tvrđenja*:

(a) $P(x)|P(x)$;

(b) *Ako $Q(x)|P(x)$ i $P(x)|Q(x)$, tada je $P(x) = \alpha Q(x)$ za neko $\alpha \in \mathbb{K}$* ;

(c) *Ako $U(x)|Q(x)$ i $Q(x)|P(x)$ tada $U(x)|P(x)$* ;

(d) *Ako $U(x)|P(x)$ i $U(x)|Q(x)$, tada $U(x)|\alpha P(x) + \beta Q(x)$ za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*

1.3. Najveći zajednički delilac

Definicija 1.3.1. Polinom $D(x)$ je *zajednički delilac* za polinome $P(x)$ i $Q(x)$ ako $D(x)|P(x)$ i $D(x)|Q(x)$.

Definicija 1.3.2. Polinom $D(x)$ je *najveći zajednički delilac* za polinome $P(x)$ i $Q(x)$, tj. $D(x) = \mathrm{NZD}(P(x), Q(x))$, ako je zajednički delilac za ove polinome i ako je deljiv sa svim ostalim zajedničkim deliocima ovih polinoma.

Primetimo da ako je $D(x) = \mathrm{NZD}(P(x), Q(x))$, tada je i polinom $\alpha D(x)$ ($\alpha \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{K}$) takođe najveći zajednički delilac polinoma $P(x)$ i $Q(x)$.

Teorema 1.3.1. *Za svaka dva polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ postoji najveći zajednički delilac $D(x)$ i on je jedinstven do na multiplikativnu konstantu.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathrm{dg}\, P(x) \geq \mathrm{dg}\, Q(x)$. Sa $S_1(x)$ i $R_1(x)$ označimo redom količnik i ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $Q(x)$. Ako je $R_1(x) \equiv 0$ tada je $Q(x)$ najveći zajednički delilac polinoma $P(x)$ i $Q(x)$. Međutim, ako $R_1(x)$ nije nula polinom, tada delimo polinom $Q(x)$ sa $R_1(x)$, i odgovarajući količnik i ostatak pri deljenju označavamo sa $S_2(x)$ i $R_2(x)$, respektivno. Ako je $R_2(x) \equiv 0$ tada je $R_1(x)$ najveći zajednički delilac za polinome $P(x)$ i $Q(x)$. Zaista, iz

$$
\begin{aligned}
P(x) &= S_1(x)Q(x) + R_1(x), \\
Q(x) &= S_2(x)R_1(x) + R_2(x),
\end{aligned}
\tag{1.3.1}
$$

sleduje $P(x) = (S_1(x)S_2(x) + 1)R_1(x)$ i $Q(x) = S_2(x)R_1(x)$, tj. $R_1(x)|P(x)$ i $R_1(x)|Q(x)$. Da bismo dokazali da je $R_1(x)$ najveći zajednički delilac za $P(x)$ i $Q(x)$ dovoljno je pretpostaviti da ovi polinomi imaju zajednički delilac $D(x)$ i primetiti da iz (1.3.1) sleduje $D(x)|R_1(x)$.

Međutim, ukoliko $R_2(x)$ nije nula polinom, prethodni postupak se nastavlja, saglasno sledećim jednakostima,

$$
\begin{aligned}
R_1(x) &= S_3(x)R_2(x) + R_3(x), \\
R_2(x) &= S_4(x)R_3(x) + R_4(x), \\
&\ \vdots \\
R_{k-1}(x) &= S_{k+1}(x)R_k(x) + R_{k+1}(x),
\end{aligned}
\tag{1.3.2}
$$

sve do ispunjenja uslova $R_{k+1}(x) \equiv 0$. Tada je $R_k(x) = \mathrm{NZD}(P(x), Q(x))$. Ovo zaključujemo sličnim rezonovanjem kao u slučaju $k = 1$. $\square$

Napomena 1.3.1. U dokazu ove teoreme korišćen je Euklidov algoritam, pri čemu su za određivanje najvećeg zajedničkog delioca (NZD) dva polinoma bitni samo ostaci $R_\nu(x)$, a ne i količnici $S_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Imajući na umu jedinstvenost NZD do na multiplikativnu konstantu moguće je u svakom koraku Euklidovog algoritma množiti ostatke $R_\nu(x)$ pogodnim konstantama različitim od nule u cilju dobijanja jednostavnijih izraza pri deljenju.

Definicija 1.3.3. Ako je najveći zajednički delilac za polinome $P(x)$ i $Q(x)$ konstanta, za te polinome kažemo da su *uzajamno prosti*.

Primer 1.3.1. Za polinome u $\mathbb{R}[x]$,

$$P(x) = 2x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x - 8, \qquad Q(x) = x^3 + x^2 + 4,$$

odredićemo NZD. Kako je

$$\begin{array}{rrrrl}
(2x^4 + 4x^3 + & x^2 - & 2x - & 8) & : (x^3 + x^2 + 4) = 2x + 2 \\
\underline{2x^4 + 2x^3} & \underline{} & \underline{+ \ 8x} & \underline{} & \\
2x^3 + & x^2 - & 10x - & 8 & \\
\underline{2x^3 +} & \underline{2x^2} & \underline{} & \underline{+ \ 8} & \\
- & x^2 - & 10x - & 16 &
\end{array}$$

imamo

$$P(x) = (2x + 2)Q(x) - (x^2 + 10x + 16).$$

Uzmimo da je $R_1(x) = x^2 + 10x + 16$ (pomnoženo sa -1) i podelimo $Q(x)$ sa $R_1(x)$. Dakle,

$$\begin{array}{rrrrl}
(x^3 + & x^2 & & + \ 4) & : (x^2 + 10x + 16) = x - 9 \\
\underline{x^3 +} & \underline{10x^2 +} & \underline{16x} & \underline{} & \\
- & 9x^2 - & 16x + & 4 & \\
\underline{-} & \underline{9x^2 -} & \underline{90x -} & \underline{144} & \\
& & 74x + & 148 &
\end{array}$$

tj.

$$Q(x) = (x - 9)R_1(x) + 74x + 148.$$

Uzmimo $R_2(x) = x + 2$ (pomnoženo sa $1/74$) i podelimo $R_1(x)$ sa $R_2(x)$. Kako je $R_1(x) = (x + 8)R_2(x)$, zaključujemo da je

$$\text{NZD}(P(x), Q(x)) = R_2(x) = x + 2. \quad \triangle$$

Teorema 1.3.2. *Ako je* $D(x) = \text{NZD}(P(x), Q(x))$ *tada postoje polinomi* $U(x)$ *i* $V(x)$ *takvi da je*

$$D(x) = U(x)P(x) + V(x)Q(x). \tag{1.3.3}$$

Dokaz. Na osnovu (1.3.1) i (1.3.2) imamo redom

$$
\begin{aligned}
&R_1(x) = P(x) - S_1(x)Q(x),\\
&R_2(x) = -S_2(x)P(x) + \big(1 + S_1(x)S_2(x)\big)Q(x),\\
&R_3(x) = \big(1 + S_2(x)S_3(x)\big)\big)P(x) - \big(S_1(x) + S_3(x) + S_1(x)S_2(x)S_3(x)\big)Q(x),
\end{aligned}
$$

itd. Najzad, $D(x) = R_k(x)$ ima oblik (1.3.3). $\square$

1.4. Bézoutov stav i Hornerova šema

Neka je $a \in \mathbb{K}$ i $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Tada je

$$P(a) = a_0 + a_1a + \cdots + a_na^n$$

jedan element u polju $\mathbb{K}$. Za $P(a)$ kažemo da je *vrednost* polinoma u tački $x = a$.

Za element $a \in \mathbb{K}$ kažemo da je *nula* polinoma $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ ako je vrednost polinoma u toj tački jednaka nuli, tj. $P(a) = 0$. U tom slučaju, za polinom prvog stepena $x - a$ kažemo da je *linearni faktor*.

Teorema 1.4.1. *Ako je a nula polinoma $P(x) \in \mathbb{K}[x]$, tada je $P(x)$ deljiv linearnim faktorom $x - a$.*

Dokaz. Kako je

$$x^k - a^k = (x^{k-1} + x^{k-2}a + \cdots + xa^{k-2} + a^{k-1})(x - a),$$

imamo

$$
\begin{aligned}
P(x) - P(a) &= a_1(x - a) + a_2(x^2 - a^2) + \cdots + a_n(x^n - a^n)\\
&= \big[a_1 + a_2(x + a) + \cdots + a_n(x^{n-1} + \cdots + a^{n-1})\big]\,(x - a)\\
&= Q(x)(x - a),
\end{aligned}
$$

gde je $Q(x)$ polinom stepena $n - 1$. S druge strane, po pretpostavci je $P(a) = 0$, pa imamo da je $P(x) = Q(x)(x-a)$, što znači da je polinom $P(x)$ deljiv linearnim faktorom $x - a$. $\square$

Sledeće tvrđenje je poznato kao *Bézoutov*[57] *stav*:

---

[57] Etienne Bézout (1730–1783), francuski matematičar.

Teorema 1.4.2. *Ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x - a$ jednak je vrednosti polinoma $P(a)$.*

Dokaz. Kako je $Q(x) = x - a$ polinom prvog stepena, na osnovu teoreme 1.2.1, postoji jedinstveni polinom $S(x)$ i konstanta R (polinom stepena nula) tako da je

$$P(x) = S(x)(x - a) + R. \tag{1.4.1}$$

Stavljajući $x = a$ u (1.4.1) dobijamo $R = P(a)$. $\square$

Korišćenjem prethodne teoreme, svaki polinom $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ stepena n možemo na jedinstven način predstaviti (razložiti) po stepenima od $x - a$, tj.

$$P(x) = A_0 + A_1(x - a) + A_2(x - a)^2 + \cdots + A_n(x - a)^n, \tag{1.4.2}$$

gde su A_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ elementi polja $\mathbb{K}$. Zaista, na osnovu (1.4.1) imamo

$$P(x) = A_0 + P_1(x)(x - a), \tag{1.4.3}$$

gde smo stavili $A_0 = R = P(a)$ i $P_1(x) = S(x)$. Ako je $P_1(x)$ polinom nultog stepena traženi razvoj (1.4.2) je dobijen. U protivnom slučaju, delimo polinom $P_1(x)$ sa $x - a$, dobijajući pritom da je

$$P_1(x) = A_1 + P_2(x)(x - a), \tag{1.4.4}$$

gde je $A_1 = P_1(a)$. Na ovaj način, kombinujući (1.4.3) i (1.4.4), dobijamo

$$P(x) = A_0 + A_1(x - a) + P_2(x)(x - a)^2.$$

Nastavljajući ovaj postupak dobićemo razvoj (1.4.2).

Definicija 1.4.1. Ako je $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ proizvoljan polinom iz $\mathbb{K}[x]$, tada za polinom

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} \in \mathbb{K}[x]$$

kažemo da je (*prvi*) *izvod* polinoma $P(x)$. Za preslikavanje $P(x) \mapsto P'(x)$ kažemo da je *diferenciranje* u prstenu $\mathbb{K}[x]$.

Viši izvodi $P^{(k)}(x)$ definišu se rekurzivno; na primer, izvod polinoma $P'(x)$ naziva se *drugi izvod* polinoma $P(x)$, itd. Po definiciji, $P^{(0)}(x) \equiv P(x)$.

Napomenimo da je $\operatorname{dg} P'(x) = \operatorname{dg} P(x) - 1$. Takođe, za svako $k > n = \operatorname{dg} P(x)$ imamo da je $P^{(k)}(x)$ nula polinom.

Očigledno, kada je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, polinomska funkcija $t \mapsto P(t)$ je realna funkcija realne promenljive t. Ona je, kao što znamo iz glave V, neprekidna i diferencijabilna za svako $t \in \mathbb{R}$, a za $|t| \to +\infty$ teži ka $+\infty$ ako je stepen $n \geq 1$. Kao što je rečeno u odeljku 1.1, za beskonačna polja ne pravimo razliku između polinoma i polinomske funkcije. U tom slučaju, primenom Taylorove formule (videti odeljak 1.12, glava V), koeficijenti A_k u razlaganju (1.4.2) mogu se izraziti pomoću

$$A_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) \qquad (k = 0, 1, \dots, n). \tag{1.4.5}$$

Tako dobijamo Taylorovo razlaganje

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ovi rezultati važe i u slučaju polja kompleksnih brojeva $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Jedan elementaran, ali važan problem je izračunavanje vrednosti polinoma za dato $x = a$. Predstavimo polinom po opadajućim stepenima

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n. \tag{1.4.6}$$

Ako bismo izračunavali vrednost polinoma $P(a)$, na osnovu (1.4.6), bilo bi potrebno $2n-1$ množenja i n sabiranja. Međutim, ukoliko $P(x)$ predstavimo u obliku

$$P(x) = (\cdots((a_0 x + a_1)x + a_2)x + \cdots + a_{n-1})x + a_n \tag{1.4.7}$$

potrebno je samo n množenja i n sabiranja.

Sa $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ označimo koeficijente polinoma $S(x)$ u (1.4.1) i stavimo $b_n = R$. Tada imamo

$$\begin{aligned} & a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \\ & \qquad = (b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1})(x-a) + b_n, \end{aligned}$$

odakle, upoređivanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene na levoj i desnoj strani prethodne jednakosti, dobijamo

$$a_0 = b_0, \qquad a_k = b_k - b_{k-1} a \qquad (k = 1, \dots, n).$$

Na osnovu ovih jednakosti može se formirati rekurzivni postupak za izračunavanje vrednosti polinoma za $x = a$:

$$b_0 = a_0, \qquad b_k = a_k + b_{k-1}a \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{1.4.8}$$

koji posle n koraka daje vrednost polinoma, tj. $P(a) = b_n$. Primetimo da su koeficijenti b_k, u stvari, vrednosti u odgovarajućim zagradama u (1.4.7) izračunate za $x = a$.

Izloženi postupak (1.4.8) poznat je kao *Hornerova*[58] *šema i može se interpretirati kroz sledeću šemu:*

a	a_0	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
		$b_0 a$	$b_1 a$	$b_2 a$		$b_{n-2}a$	$b_{n-1}a$
	b_0	b_1	b_2	b_3		b_{n-1}	$b_n = P(a)$

Prvu vrstu, dakle, započinjemo sa vrednošću $x = a$ za koju izračunavamo vrednost polinoma, a zatim pišemo koeficijente polinoma (1.4.6), počev od najstarijeg koeficijenta. U trećoj vrsti pišemo koeficijente b_k, koje izračunavamo sabiranjem odgovarajućih elemenata prve i druge vrste, pri čemu je $b_0 = a_0$. Elemente druge vrste formiramo množenjem vrednosti a sa prethodnim elementom iz treće vrste. Elementi treće vrste su, dakle, koeficijenti polinoma $S(x)$ i ostatak pri deljenju $R = P(a)$.

Nastavljajući postupak deljenja dobijenog količnika $S(x)$ sa $x - a$ moguće je dobiti razlaganje (1.4.2)*. Koeficijenti u tom razlaganju A_k su, upravo, ostaci pri ovim deljenjima. Na taj način, Hornerovom šemom i korišćenjem* (1.4.5)*, mogu se odrediti svi izvodi polinoma $P(x)$ u tački $x = a$,*

$$P^{(k)}(a) = k!A_k, \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{1.4.9}$$

Primer 1.4.1. Neka je $P(x) = 4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 16x - 12 \in \mathbb{R}[x]$. Primenom Hornerove šeme odredićemo vrednost $P(2)$:

2	4	−4	13	−16	−12
		8	8	42	52
	4	4	21	26	40

Dakle, $P(2) = 40$. Količnik pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x - 2$ je polinom $S(x) = 4x^3 + 4x^2 + 21x + 26$, a ostatak deljenja je $R = P(2) = 40$. Navedena šema se može uprostiti izostavljanjem druge vrste. Na primer, za $a = -1/2$ imamo

[58] William George Horner (1773–1827), engleski matematičar.

$-1/2$	4	-4	13	-16	-12
	4	-6	16	-24	0

odakle zaključujemo da je $a = -1/2$ nula polinoma $P(x)$.

Primenimo sada postupak sukcesivnog deljenja u cilju dobijanja razlaganja polinoma $P(x)$ po stepenima od $x-2$ i izračunavanja izvoda polinoma u tački $x = 2$.

Postupak je prikazan u sledećoj tabeli:

2	4	-4	13	-16	-12
	4	4	21	26	40
	4	12	45	116	
	4	20	85		
	4	28			
	4				

Prema tome,

$$P(x) = 40 + 116(x-2) + 85(x-2)^2 + 28(x-2)^3 + 4(x-2)^4.$$

Na osnovu (1.4.9) imamo redom $P'(2) = A_1 = 116$, $P''(2) = 2A_2 = 170$, $P'''(2) = 6A_3 = 168$, $P^{(4)}(2) = 24A_4 = 96$. $\triangle$

1.5. Osnovni stav algebre i faktorizacija polinoma

U daljem izlaganju posmatraćemo polinome na tzv. *algebarski zatvorenim* poljima.

Definicija 1.5.1. Za polje $\mathbb{K}$ kažemo da je algebarski zatvoreno ako svaki polinom $P(x) \in \mathbb{K}[x]$, različit od konstante, ima bar jednu nulu u $\mathbb{K}$.

Da sva polja nisu algebarski zatvorena ukazuje sledeći primer.

Primer 1.5.1. Posmatrajmo polinom $P(x) = 1 + x^2$ nad poljem $\mathbb{K}$. Ako je $\mathbb{K}$ polje racionalnih brojeva ili polje realnih brojeva, $P(x)$ nema ni jednu nulu u $\mathbb{K}$. Međutim, na polju $\mathbb{C}$ ovaj polinom ima dve nule $x = i$ i $x = -i$. $\triangle$

Sledeća teorema o algebarskoj zatvorenosti polja kompleksnih brojeva tradicionalno se naziva *osnovna teorema algebre*:

Teorema 1.5.1. *Svaki polinom $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ stepena $n \geq 1$ ima bar jednu nulu.*

Postoji više različitih dokaza ove teoreme. Jedan kratak dokaz se može dati metodima *Kompleksne analize*. Korišćenje elementarnog matematičkog aparata zahteva komplikovan dokaz pa ćemo ga ovde zbog toga izostaviti.

Teorema 1.5.1 se često formuliše i u obliku:

Teorema 1.5.2. *Svaki polinom $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ stepena $n \geq 1$ je proizvod n linearnih faktora.*

Očigledno iz teoreme 1.5.2 sleduje teorema 1.5.1. Obrnuto, ako je x_1 nula polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ koja postoji na osnovu teoreme 1.5.1, tada je, na osnovu teoreme 1.4.1, $P(x)$ deljiv linearnim faktorom $x - x_1$, tj. važi

$$P(x) = (x - x_1)P_1(x),$$

gde je $P_1(x)$ polinom stepena $n - 1$. Ako je $n \geq 2$, tada ponovo primenom teoreme 1.5.1, zaključujemo da $P_1(x)$ ima bar jednu nulu, recimo x_2, tako da je

$$P_1(x) = (x - x_2)P_2(x), \qquad \operatorname{dg} P_2(x) = n - 2.$$

Dakle,

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)P_2(x).$$

Nastavljajući ovakav postupak dolazimo do faktorizacije

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)P_n(x),$$

gde je $\operatorname{dg} P_n(x) = 0$, tj. $P_n(x)$ se svodi na najstariji koeficijent polinoma $P(x)$.

Dakle, polinom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1.5.1}$$

sa kompleksnim koeficijentima $a_0, a_1, \ldots, a_n$ i $a_n \neq 0$ ima n nula $x_1, x_2, \ldots, x_n$, i važi

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n). \tag{1.5.2}$$

Među kompleksnim brojevima $x_1, x_2, \ldots, x_n$ može biti i jednakih. U sledećoj definiciji uvodimo pojam *višestruke nule* polinoma $P(x)$.

Definicija 1.5.2. Za nulu x_1 polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ kažemo da je višestruka reda k $(\in \mathbb{N})$ ako postoji polinom $Q(x)$ takav da je

$$P(x) = (x - x_1)^k Q(x), \qquad Q(x_1) \neq 0. \tag{1.5.3}$$

Ako je $k = 1$ kažemo da je nula x_1 prosta ili jednostruka.

Teorema 1.5.3. *Ako je $x = x_1$ višestruka nula reda $k > 1$ polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, tada je ona nula reda $k - 1$ izvodnog polinoma $P'(x) \in \mathbb{C}[x]$.*

Dokaz. Pretpostavljajući da je $x = x_1$ višestruka nula reda $k > 1$ polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, na osnovu prethodne definicije postoji polinom $Q(x)$ takav da važi (1.5.3). Tada je[59)]

$$P'(x) = k(x - x_1)^{k-1}Q(x) + (x - x_1)^k Q'(x) = (x - x_1)^{k-1}Q_1(x),$$

gde je $Q_1(x) = kQ(x) + (x - x_1)Q'(x)$. Kako je $Q_1(x_1) = kQ(x_1) \neq 0$, zaključujemo da je $x = x_1$ višestruka nula reda $k - 1$ izvodnog polinoma $P'(x)$. □

Teorema 1.5.4. *Kompleksan broj x_1 je višestruka nula reda k polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ ako i samo ako je*

$$P(x_1) = P'(x_1) = \cdots = P^{(k-1)}(x_1) = 0, \quad P^{(k)}(x_1) \neq 0. \tag{1.5.4}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $x = x_1$ višestruka nula reda k polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$. Tada, sukcesivnom primenom prethodne teoreme na $P(x)$, $P'(x), \ldots, P^{(k-1)}(x)$, dobijamo (1.5.4).

Obrnuto, ako pretpostavimo da važi (1.5.4), tada se Taylorovo razlaganje polinoma u tački $x = x_1$ (videti odeljak 1.4)

$$P(x) = P(x_1) + \frac{P'(x_1)}{1!}(x - x_1) + \frac{P''(x_1)}{2!}(x - x_1)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^n$$

svodi na

$$P(x) = (x - x_1)^k \left[\frac{P^{(k)}(x_1)}{k!} + \frac{P^{(k+1)}(x_1)}{(k+1)!}(x - x_1) \cdots + \frac{P^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^{n-k} \right],$$

59) Ne pravimo razliku između polinoma i polinomske funkcije i koristimo pravila za diferenciranje funkcija.

tj. $P(x) = (x - x_1)^k Q(x)$, gde je $Q(x_1) = P^{(k)}(x_1)/k! \neq 0$, što znači da je x_1 višestruka nula reda k polinoma $P(x)$. $\square$

Primer 1.5.2. Da bismo dokazali da je polinom

$$P(x) = 2x^{n+1} - n(n+1)a^{n-1}x^2 + 2(n^2-1)a^n x - n(n-1)a^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

deljiv sa $(x-a)^3$ dovoljno je proveriti da li su ispunjeni uslovi $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$. Kako je

$$\begin{aligned} P'(x) &= 2(n+1)x^n - 2n(n+1)a^{n-1}x + 2(n^2-1)a^n, \\ P''(x) &= 2n(n+1)x^{n-1} - 2n(n+1)a^{n-1}, \end{aligned}$$

nalazimo redom

$$\begin{aligned} P(a) &= 2a^{n+1} - n(n+1)a^{n-1}a^2 + 2(n^2-1)a^n a - n(n-1)a^{n+1} = 0, \\ P'(a) &= 2(n+1)a^n - 2n(n+1)a^{n-1}a + 2(n^2-1)a^n = 0, \\ P''(a) &= 2n(n+1)a^{n-1} - 2n(n+1)a^{n-1} = 0. \quad \triangle \end{aligned}$$

Kao direktnu posledicu teoreme 1.5.2 imamo sledeći rezultat:

Teorema 1.5.5. *Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ među sobom različite nule polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ stepena n sa redom višestrukosti $k_1, k_2, \ldots, k_m$, respektivno. Tada važi faktorizacija*

$$P(x) = a_n (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \cdots (x-x_m)^{k_m}, \tag{1.5.5}$$

gde je $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, a a_n je najstariji koeficijent polinoma $P(x)$.

Faktorizacija (1.5.5) se naziva *kanoničko razlaganje polinoma $P(x)$ na faktore.*

Teorema 1.5.6. *Kanoničko razlaganje* (1.5.5) *je jedinstveno.*

Dokaz. Pretpostavimo da, pored kanoničkog razlaganja (1.5.5), postoji drugo kanoničko razlaganje

$$P(x) = a_n (x-y_1)^{l_1}(x-y_2)^{l_2} \cdots (x-x_r)^{l_r},$$

gde je $l_1 + l_2 + \cdots + l_r = n$. Tada mora važiti jednakost

$$(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_m)^{k_m} = (x-y_1)^{l_1}(x-y_2)^{l_2}\cdots(x-y_r)^{l_r}. \tag{1.5.6}$$

Nije teško videti da se skupovi nula

$$X_m = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \quad \text{i} \quad Y_r = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$$

moraju poklapati. Naime, ako to nije slučaj, jednakost nije moguća za svako $x \in \mathbb{C}$. Na primer, ako $x_1 \notin Y_r$, tada za $x = x_1$ leva strana u (1.5.6) postaje nula, dok je pri tome desna strana različita od nule. Prema tome, ako postoje dva kanonička razlaganja onda bi jednakost (1.5.6) eventualno bila moguća samo kada je $X_m = Y_r$, tj. kada je

$$(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_m)^{k_m} = (x-x_1)^{l_1}(x-x_2)^{l_2}\cdots(x-x_m)^{l_m}. \tag{1.5.7}$$

Pretpostavimo sada da je, na primer, $k_1 \neq l_1$ i neka je $k_1 > l_1$. Deobom (1.5.7) sa faktorom $(x-x_1)^{l_1}$ dobijamo

$$(x-x_1)^{k_1-l_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_m)^{k_m} = (x-x_2)^{l_2}\cdots(x-x_m)^{l_m},$$

odakle, stavljajući $x = x_1$, zaključujemo da mora biti $k_1 = l_1$ jer bi u protivnom slučaju leva strana bila nula, a desna različita od nule. Na ovaj način dokazujemo da mora biti $k_i = l_i$ za svako $i = 1, \ldots, m$, što znači da je kanoničko razlaganje (1.5.5) jedinstveno. $\square$

Napomena 1.5.1. Na kraju ovog odeljka ukažimo na mogućnost da se polinom sa višestrukim nulama, čije je kanoničko razlaganje dato sa (1.5.5), može redukovati na polinom sa samo prostim nulama x_1, x_2, $\ldots$, x_m. Pretpostavimo da je $D(x)$ najveći zajednički delilac za polinome $P(x)$ i $P'(x)$, tj. $D(x) = \mathrm{NZD}(P(x), P'(x)$. Ukoliko je $D(x)$ konstanta, polinomi $P(x)$ i $P'(x)$ su uzajamno prosti, što znači da oni nemaju zajedničkih faktora, tj. polinom $P(x)$ ima samo proste nule. Međutim, ukoliko je $\operatorname{dg} D(x) \geq 1$, polinom $P(x)$ ima višestruke nule jer su tada faktori polinoma $D(x)$, upravo, zajednički faktori polinoma $P(x)$ i $P'(x)$. Zato deljenje polinoma $P(x)$ sa $D(x)$ daje kao količnik polinom koji ima iste nule kao i polinom $P(x)$, ali su one sve proste. Dakle, taj polinom ima faktorizaciju

$$\frac{P(x)}{D(x)} = c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m),$$

gde je c neka konstanta.

1.6. Vièteove formule

Posmatrajmo polinom $P(x)$ sa kompleksnim koeficijentima stepena n koji je dat sa (1.5.1). Neka su njegove nule redom x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Iz jednakosti polinoma, na osnovu (1.5.1) i (1.5.2), dobijamo tzv. Vièteove[60] formule

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\vdots \\ x_1x_2 \cdots x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Označimo leve strane u prethodnim jednakostima redom sa $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n$. Detaljnije razmatranje ovih veličina koje se, inače, nazivaju *elementarne simetrične funkcije* biće dato u odeljku 3.1. Nije teško zaključiti da važi

$$\begin{aligned} a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} &+ a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 \\ &\equiv a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\ &\equiv a_n(x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n). \end{aligned}$$

1.7. Nule realnih polinoma

Neka je

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \tag{1.7.1}$$

gde su koeficijenti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi i $a_n \neq 0$. Za takav polinom koristićemo termin *realni polinom*. Nule realnih polinoma su, u opštem slučaju, kompleksni brojevi. Dokazaćemo da se one javljaju kao parovi konjugovano-kompleksnih brojeva.

Teorema 1.7.1. *Ako je x_ν kompleksna nula reda k_ν realnog polinoma $P(x)$, tada je i $\bar{x}_\nu$ takođe njegova kompleksna nula istog reda.*

Dokaz. Na osnovu (1.7.1) imamo

$$\overline{P(x)} = a_n\bar{x}^n + a_{n-1}\bar{x}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{x} + a_0 = P(\bar{x}).$$

S druge strane, na osnovu faktorizacije (1.5.5), tj.

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_m)^{k_m} \qquad \big(k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n\big),$$

[60] François Viète (1540–1603), poznati francuski matematičar.

zaključujemo da je

$$\overline{P(x)} = P(\bar{x}) = a_n(\bar{x} - x_1)^{k_1}(\bar{x} - x_2)^{k_2} \cdots (\bar{x} - x_m)^{k_m},$$

tj.

$$P(x) = a_n(x - \bar{x}_1)^{k_1}(x - \bar{x}_2)^{k_2} \cdots (x - \bar{x}_m)^{k_m},$$

odakle neposredno sleduje tvrđenje teoreme. □

Na osnovu prthodnog izlaganja možemo zaključiti da realni polinom može imati realne nule i/ili parove konjugovano-kompleksnih nula. Pretpostavimo da polinom $P(x)$ ima realne nule $x_1, \ldots, x_m$, reda višestrukosti $k_1, \ldots, k_m$, respektivno, i parove konjugovano-kompleksnih nula $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_l \pm i\beta_l$, reda višestrukosti $s_1, \ldots, s_l$, takođe respektivno. Naravno, mora biti

$$\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu + 2\sum_{\nu=1}^{l} s_\nu = \operatorname{dg} P(x).$$

Kako je

$$(x - \alpha_\nu - i\beta_\nu)(x - \alpha_\nu + i\beta_\nu) = (x - \alpha_\nu)^2 + \beta_\nu^2 = x^2 + p_\nu x + q_\nu \quad (p, q \in \mathbb{R}),$$

parovima konjugovano-kompleksnih nula odgovaraju kvadratni faktori

$$x^2 + p_\nu x + q_\nu \qquad \big(p_\nu = -2\alpha_\nu,\ q_\nu = \alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2\big)$$

odgovarajuće višestrukosti s_ν.

Prema tome, realni polinom $P(x)$ se može faktorisati u obliku

$$P(x) = a_n \prod_{\nu=1}^{m} (x - x_\nu)^{k_\nu} \prod_{\nu=1}^{l} (x^2 + p_\nu x + q_\nu)^{s_\nu}, \tag{1.7.2}$$

gde je a_n najstariji koeficijent polinoma $P(x)$.

Primer 1.7.1. Neka je $P(x) = x^6 - 2x^3 + 1$. Kako je

$$P(x) = (x^3 - 1)^2 = \big((x - 1)(x^2 + x + 1)\big)^2,$$

faktorizacija (1.7.2) postaje $P(x) = (x-1)^2(x^2+x+1)^2$, što znači da polinom ima dvostruku realnu nulu $x = 1$ i par konjugovano-kompleksnih nula $x = \big(-1 \pm \sqrt{3}\big)/2$, čiji je red višestrukosti, takođe, dva. △

Primer 1.7.2. Jedna nula polinoma $P(x) = 4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 16x - 12$ je $-2i$. Kako je ovo realni prolinom, on mora imati i konjugovanu nulu $2i$. Polinom $P(x)$ je, dakle, deljiv faktorom $(x+2i)(x-2i) = x^2 + 4$. Kako je

$$(4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 16x - 12) : (x^2 + 4) = 4x^2 - 4x - 3 = 4\Big(x + \frac{1}{2}\Big)\Big(x - \frac{3}{2}\Big),$$

faktorizovani oblik polinoma $P(x)$ je

$$P(x) = 4\Big(x + \frac{1}{2}\Big)\Big(x - \frac{3}{2}\Big)(x^2 + 4).$$

Njegove nule su redom $x_1 = -1/2$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = -2i$, $x_4 = 2i$. Napomenimo da smo, u primeru 1.4.1, Hornerovom šemom zaključili da je $P(-1/2) = 0$. $\triangle$

Razmotrimo sada potrebne uslove da jedan realni polinom sa celobrojnim koeficijentima ima racionalne nule.

Teorema 1.7.2. *Neka je $P(x)$ realni polinom sa celobrojnim koeficijentima,*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (a_k \in a_{,j,} b_{j,}\ a_0 a_n \neq 0).$$

Ako je $x_1 = p/q$ nula ovog polinoma, gde su p i q uzajamno prosti celi brojevi, tada a_0 deljivo sa p i a_n deljivo sa q, tj. važe relacije $p|a_0$ i $q|a_n$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $x_1 = p/q \in \mathbb{Q}$ nula polinoma $P(x)$, tj. da je

$$P(x_1) = a_n\Big(\frac{p}{q}\Big)^n + a_{n-1}\Big(\frac{p}{q}\Big)^{n-1} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Ako ovu jednakost pomnožimo sa q^{n-1} dobijamo da je

$$a_n\frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} = 0,$$

odakle zaključujemo da $q|a_n$ jer su p i q uzajamno prosti brojevi. Slično, množenjem poslednje jednakosti sa q/p dobijamo

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_0\frac{q^n}{p} = 0,$$

odakle zaključujemo da $p|a_0$. $\square$

Primer 1.7.3. Na polinom iz primera 1.7.2 možemo primeniti prethodnu teoremu. Faktori broja $12\,(= -a_0)$ su: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12. Pozitivni faktori broja $4\,(= a_4)$ su: 1, 2, 4. Na osnovu teoreme 1.7.2, racionalne nule polinoma (ukoliko postoje) pripadaju sledećem skupu:

$$\Big\{\pm1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm2,\ \pm3,\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{3}{4},\ \pm4,\ \pm6,\ \pm12\Big\}.$$

To su, kao što smo videli u primeru 1.7.2, $x_1 = -1/2$ i $x_2 = 3/2$. $\triangle$

Rolleova teorema (videti odeljak 1.11, glava V) može se ovde iskazati u obliku:

Teorema 1.7.3. *Između dve uzastopne realne nule x_1 i x_2 ($x_1 < x_2$) realnog polinoma $P(x)$ nalazi se bar jedna nula izvodnog polinoma $P'(x)$.*

Takođe, za realne polinome važe sledeći rezultati koji su posledice Rolleove teoreme:

Teorema 1.7.4. *Između dve uzastopne realne nule x_1' i x_2' ($x_1' < x_2'$) realnog izvodnog polinoma $P'(x)$ nalazi se najviše jedna nula polinoma $P(x)$.*

Teorema 1.7.5. *Ako su sve nule realnog polinoma $P(x)$ realne, tada su i sve nule izvodnog polinoma $P'(x)$ realne i nule izvodnog polinoma $P'(x)$ razdvajaju nule polinoma $P(x)$.*

Teorema 1.7.6. *Realni polinom $P(x)$ ne može imati više od $k+1$ realnih nula ako izvodni polinom $P'(x)$ ima k realnih nula.*

1.8. Broj realnih nula

Ovaj odeljak posvećujemo pitanju broja realnih nula datog polinoma $P(x)$ u intervalu (a, b), u oznaci $N(a, b) \equiv N(a, b; P)$. Da bismo formulisali osnovne rezultate koji se odnose na broj $N(a, b)$, potrebno je najpre uvesti definiciju varijacije (promene znaka) u jednom konačnom nizu realnih brojeva

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \tag{1.8.1}$$

od kojih nijedan nije nula.

Definicija 1.8.1. Ako je $a_k a_{k+1} < 0$ $(1 \le k \le n-1)$ kažemo da na mestu k u nizu (1.8.1) postoji *varijacija* ili *promena znaka*.

Primer 1.8.1. Niz brojeva $\{-4, -2, 1, -3, -2, 5, 2\}$ ima ukupno tri varijacije koje postoje na drugom (članovi niza -2 i 1), trećem (1 i 3), i na petom mestu (sa članovima -2 i 5). $\triangle$

Napomena 1.8.1. Često se, radi lakšeg praćenja promene znaka, datom nizu realnih brojeva pridružuje niz simbola $+$ i $-$. Tako za niz iz primera 1.8.1 imamo

$$\{-4, -2, 1, -3, -2, 5, 2\} \mapsto \{-, -, +, -, -, +, +\}.$$

Broj varijacija u nizu koji ima i članove koji su jednaki nuli određuje se tako što se takvi članovi ne uzimaju u obzir.

Primer 1.8.2. Kod određivanja broja varijacija u nizu $\{0, -2, 0, 0, 3, 4, 0, 1, 3\}$ treba posmatrati niz $\{-2, 3, 4, 1, 3\}$. Ovaj niz ima samo jednu varijaciju. $\triangle$

Neka V označava broj varijacija u nizu

$$\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\} \qquad (a_0 > 0,\ a_n \neq 0) \tag{1.8.2}$$

čiji su članovi koeficijenti realnog polinoma

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \qquad (a_0 > 0). \tag{1.8.3}$$

Sledeće tvrđenje, koje navodimo bez dokaza, poznato je kao Descartesova teorema:

Teorema 1.8.1. *Broj pozitivnih nula polinoma* (1.8.3) *jednak je broju varijacija u nizu* (1.8.2) *ili je od njega manji za paran broj* $2m$, *tj.* $N(0, +\infty; P) = V - 2m$.

Napomena 1.8.2. U prethodnoj teoremi višestruke nule se računaju onoliko puta koliki je njihov red višestrukosti.

Napomena 1.8.3. Broj negativnih nula polinoma (1.8.3) moguće je analizirati primenom teoreme na polinom $Q(x) = (-1)^n P(-x)$.

Primer 1.8.3. Neka je $P(x) = x^5 - x^3 + 1$. Njegovi koeficijenti čine niz $\{1, 0, -1, 0, 0, 1\}$, čiji je broj varijacija $V = 2$. Na osnovu Descartesove teoreme, polinom $P(x)$ ima dve ili nijednu pozitivnu nulu. Za analizu broja negativnih nula posmatrajmo polinom $Q(x) = -P(-x) = x^5 + x^3 - 1$, čiji koeficijenti čine niz $\{1, 0, 1, 0, 0, -1\}$. Kako ovaj niz ima samo jednu varijaciju, zaključujemo da polinom $Q(x)$ ima jednu pozitivnu nulu, tj. polinom $P(x)$ ima samo jednu negativnu nulu. $\triangle$

Za određivanje tačnog broja realnih nula jednog realnog polinoma u datom intervalu postoji opšti metod, zasnovan na Sturmovoj[61)] teoremi. Za polinom bez višestrukih nula može se formirati niz polinoma, tzv. *Sturmov niz*, na osnovu koga se može odrediti tačan broj njegovih realnih nula u bilo kom intervalu (a, b). Kao što je poznato (videti napomenu 1.5.1) polinom $P(x)$ se uvek može „očistiti“ od višestrukih nula, uzimajući umesto $P(x)$ polinom $P(x)/\operatorname{NZD}(P(x), P'(x))$.

Dakle, pretpostavimo da polinom $P(x)$ nema višestrukih nula i formirajmo niz polinoma

$$\boldsymbol{s}[x] = \bigl\{P_0(x), P_1(x), \ldots, P_m(x)\bigr\},$$

startujući sa

$$P_0(x) = P(x) \qquad \text{i} \qquad P_1(x) = P'(x).$$

[61)] Jacques Charles François Sturm (1803–1855), francuski matematičar.

Slično kao u Euklidovom algoritmu dalje članove niza $\boldsymbol{s}[x]$ određujemo pomoću

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= P_1(x)Q_1(x) - P_2(x), \\
P_1(x) &= P_2(x)Q_2(x) - P_3(x), \\
&\ \vdots \\
P_{k-1}(x) &= P_k(x)Q_k(x) - P_{k+1}(x), \\
&\ \vdots \\
P_{m-2}(x) &= P_{m-1}(x)Q_{m-1}(x) - P_m(x),
\end{aligned}
\tag{1.8.4}
$$

gde su $\operatorname{dg} P_{k+1}(x) < \operatorname{dg} P_k(x)$ $(k = 1, \ldots, m-1)$ i $\operatorname{dg} P_m(x) = 0$. Primetimo da ovde ostatak pri deljenju $P_{k-1}(x)$ sa $P_k(x)$ označen sa $-P_{k+1}(x)$.

Od izuzetnog značaja je proučiti osobine Sturmovog niza $\boldsymbol{s}[x]$ i broj varijacija u tom nizu, u oznaci $V(\boldsymbol{s}[x])$. Preciznije rečeno, interesuje nas promena u broju varijacija u nizu $\boldsymbol{s}[x]$ kada se x menja duž intervala (a, b). Jasno je, da promene neće biti ako nijedan član niza ne menja svoj znak na ovom intervalu.

Lema 1.8.2. *Neka je $P(x)$ realni polinom sa prostim nulama i $\boldsymbol{s}[x]$ njegov Sturmov niz. Tada važi*:

(a) *Uzastopni članovi niza $\boldsymbol{s}[x]$ nemaju zajedničkih nula*;

(b) *Ako je $x = a$ realna nula polinoma $P_k(x)$ $(1 \le k \le m-1)$, tada je*

$$
P_{k-1}(a)P_{k+1}(a) < 0\,;
\tag{1.8.5}
$$

(c) *Ako je $x = a$ realna nula polinoma $P_k(x)$ $(1 \le k \le m-1)$, tada postoji okolina ove tačke u kojoj se broj varijacija u Sturmovom nizu ne menja, tj.* $V(\boldsymbol{s}[x]) = \text{const}$ *za svako $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$*;

(d) *Ako je $x = a$ realna nula polinoma $P(x)$, tada za dovoljno malo pozitivno ε imamo $V(\boldsymbol{s}[a+\varepsilon]) = V(\boldsymbol{s}[a-\varepsilon]) - 1$.*

Dokaz. (a) Pretpostavimo suprotno, tj. da $P_k(x)$ i $P_{k+1}(x)$ imaju zajedničku nulu $x = a$. Tada, na osnovu (1.8.4), zaključujemo da je $P_{k-1}(a) = 0$. Ovo dalje znači da je i $P_{k-2}(a) = 0$, $\ldots$, $P_1(a) = 0$, $P_0(a) = 0$, tj. da je $x = a$ višestruka nula polinoma $P(x)$. Ovo je, međutim, u kontradikciji sa pretpostavkom da polinom nema višestrukih nula.

(b) Ako je $P_k(a) = 0$ iz (1.8.4) sleduje $P_{k-1}(a) = -P_{k+1}(a)$, tj.

$$P_{k-1}(a)P_{k+1}(a) = -P_{k+1}(a)^2.$$

Kako je, na osnovu (a), $P_{k+1}(a) \neq 0$, zaključujemo da važi (1.8.5).

(c) Na osnovu (a) i (b) zaključujemo da su $P_{k-1}(a)$ i $P_{k+1}(a)$ $(1 \leq k \leq m-1)$ različiti od nule i suprotnog su znaka. Zbog neprekidnosti polinomskih funkcija (videti komentare u odeljku 1.4), postoji okolina tačke $x = a$ u kojoj $P_{k-1}(x)$ i $P_{k+1}(x)$ nemaju nula, tj. konstantnog su znaka za svako $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Može se pretpostaviti, na primer, da je u toj okolini $P_{k-1}(x) < 0$ i $P_{k+1}(x) > 0$. Tada imamo sledeće mogućnosti:

x	$\operatorname{sgn} P_{k-1}(x)$	$\operatorname{sgn} P_k(x)$	$\operatorname{sgn} P_{k+1}(x)$
$x < a$	$-$	$+$	$+$
$x > a$	$-$	$-$	$+$
$x < a$	$-$	$-$	$+$
$x > a$	$-$	$+$	$+$

Dakle, broj varijacija ostaje nepromenjen kada se x menja duž intervala $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

(d) Polinom $P(x)$ nema višestrukih nula pa je $P'(a) = P_1(a) \neq 0$. Ovo znači da se može izabrati dovoljno malo $\varepsilon > 0$ tako da se u intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ izvod $P'(x)$ ne anulira i da u tom intervalu polinom $P(x)$ ima samo jednu realnu nulu $x = a$. Slično, kao i u slučaju (c), šematski možemo analizirati moguće slučajeve kada $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$:

x	$\operatorname{sgn} P(x)$	$\operatorname{sgn} P'(x)$	$\operatorname{sgn} P(x)$	$\operatorname{sgn} P'(x)$
$x < a$	$-$	$+$	$+$	$-$
$x > a$	$+$	$+$	$-$	$-$

Kao što možemo videti, postoji jedna varijacija u nizu $\{P(x), P'(x)\}$ za $x < a$, dok za $x > a$ ovaj niz ne menja znak. Prema tome, imamo smanjivanje broja varijacija za jedinicu. $\square$

Na osnovu prethodne leme jednostavno se dokazuje sledeća Sturmova teorema:

Teorema 1.8.3. *Neka je $\boldsymbol{s}[x]$ Sturmov niz za polinom $P(x)$ bez višestrukih nula i neka $x = a$ i $x = b$ nisu njegove nule, tj. neka je $P_0(a)P_0(b) \neq 0$.*

Tada je broj realnih nula polinoma $P(x)$ u intervalu (a,b) jednak razlici broja varijacija u nizovima $\boldsymbol{s}[a]$ i $\boldsymbol{s}[b]$, tj.

$$N(a,b) = V(\boldsymbol{s}[a]) - V(\boldsymbol{s}[b]).$$

Dokaz. Evidentno je da do promene broja varijacija u Sturmovom nizu može doći samo kada x rastući od a do b prolazi kroz neku nulu članova Sturmovog niza. Na osnovu leme 1.8.2, pri prolasku kroz nulu nekog od polinoma $P_k(x)$ $(1 \le k \le m-1)$, broj varijacija u Sturmovom nizu ostaje nepromenjen. Jedino, pri prolasku kroz jednu nulu polinoma $P(x)$ broj varijacija se smanjuje za jedinicu. Ovo znači da razlika između broja varijacija u Sturmovom nizu za $x = a$ i za $x = b$ daje tačno broj nula polinoma $P(x)$ koji se nalaze u intervalu (a,b). $\square$

Primer 1.8.4. Neka je

$$P(x) = 4x^8 - 23x^6 - 5x^5 + 43x^4 + 20x^3 - 24x^2 - 20x - 4.$$

Da bismo eliminisali višestruke nule ovog polinoma (ukoliko postoje) potrebno je odrediti najpre najveći zajednički delilac za $P(x)$ i $P'(x) = 32x^7 - 138x^5 - 25x^4 + 172x^3 + 60x^2 - 48x - 20$. Euklidovim algoritmom (videti odeljak 1.3) nalazimo

$$\mathrm{NZD}(P(x), P'(x)) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2.$$

Tada, deljenjem $P(x)$ sa $2x^3 + x^2 - 4x - 2$ dobijamo

$$P_0(x) = 2x^5 - x^4 - 7x^3 + x^2 + 6x + 2.$$

Dakle, ovaj polinom ima samo proste nule. Pomoću Sturmovog niza možemo odrediti broj njegovih realnih nula u bilo kom intervalu (a,b).

Sa $P_1(x)$ označimo izvod polinoma $P_0(x)$, tj.

$$P_1(x) = 10x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 2x + 6.$$

Ako $50P_0(x)$ podelimo[62)] sa $P_1(x)$ dobijamo količnik $10x - 1$, dok je ostatak pri ovom deljenju uzet sa negativnim znakom

$$P_2(x) = 144x^3 - 9x^2 - 242x - 106.$$

---

62) U cilju dobijanja jednostavnijih izraza, i ovde, kao i kod određivanja najvećeg zajedničkog delioca za dva polinoma (videti napomenu 1.3.1), u postupku dobijanja Sturmovog niza moguće je množiti članove niza proizvoljnim pozitivnim konstantama. Pozitivnost konstanata je bitna zbog očuvanja znaka članova niza.

Sada deljenjem $1152P_1(x)$ sa $P_2(x)$ dobijamo količnik $80x-27$ i odgovarajući ostatak $-5075x^2+4250x+4050$. Za član $P_3(x)$ u Sturmovom nizu uzimamo ovaj ostatak, prethodno pomnožen sa $-1/25$, tj. $P_3(x)=203x^2-170x-162$.

Slično, deljenjem $41209P_2(x)$ sa $P_3(x)$ dobijamo kao količnik $29232x+22653$, dok je ostatak $-1385984x-698368$. Za član $P_4(x)$ u Sturmovom nizu uzimamo prethodni ostatak sa negativnim znakom (uz dodatno deljenje sa 512). Dakle, $P_4(x)=2707x+1364$.

Najzad, $7327849P_3(x)/P_4(x)$ daje količnik $549521x-737082$ i odgovarajući ostatak -181731690. Za poslednji član Sturmovog niza možemo uzeti $P_5(x)=1$.

Na ovaj način, dobili smo Sturmov niz

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s}[x]=\bigl\{&2x^5-x^4-7x^3+x^2+6x+2,\ 10x^4-4x^3-21x^2+2x+6,\\ &144x^3-9x^2-242x-106,\ 203x^2-170x-162,\ 2707x+1364,\ 1\bigr\},\end{aligned}$$

za koji, na primer, imamo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s}[-2]&=\{-30,110,-810,990,-4050,1\} &&\mapsto\{-,+,-,+,-,+\}, && V(\boldsymbol{s}[-2])=5,\\
\boldsymbol{s}[-1]&=\{1,-3,-17,211,-1343,1\} &&\mapsto\{+,-,-,+,-,+\}, && V(\boldsymbol{s}[-1])=4,\\
\boldsymbol{s}[0]&=\{2,6,-106,-162,1364,1\} &&\mapsto\{+,+,-,-,+,+\}, && V(\boldsymbol{s}[0])=2,\\
\boldsymbol{s}[1]&=\{3,-7,-213,-129,4071,1\} &&\mapsto\{+,-,-,-,+,+\}, && V(\boldsymbol{s}[1])=2,\\
\boldsymbol{s}[2]&=\{10,54,526,310,6778,1\} &&\mapsto\{+,+,+,+,+,+\}, && V(\boldsymbol{s}[2])=0.
\end{aligned}$$

Primetimo, takođe, da je $V(\boldsymbol{s}[-\infty])=5$ i $V(\boldsymbol{s}[+\infty])=0$, s obzirom na

$$\boldsymbol{s}[-\infty]\mapsto\{-,+,-,+,-,+\}\quad\text{i}\quad\boldsymbol{s}[+\infty]\mapsto\{+,+,+,+,+,+\}.$$

Sada možemo, na osnovu Sturmove teoreme, da odredimo broj realnih nula polinoma $P_0(x)$ u intervalu (a,b). Označavajući taj broj sa $N(a,b)$, imamo

$$\begin{aligned}
&N(-\infty,-2)=5-5=0, && N(-2,-1)=5-4=1, && N(-1,0)=4-2=2,\\
&N(0,1)=2-2=0, && N(1,2)=2-0=2, && N(2,+\infty)=0-0=0.
\end{aligned}$$

Dakle, polinom petog stepena $P_0(x)$ ima sve realne nule i to jednu u intervalu $(-2-1)$ i po dve u intervalima $(-1,0)$ i $(1,2)$. Napomenimo da su njegove nule $-1/2$, $\pm\sqrt{2}$, $(1\pm\sqrt{5})/2$. Inače, nule $-1/2$ i $\pm\sqrt{2}$ su dvostruke za polazni polinom $P(x)$. $\triangle$

2. ALGEBARSKE JEDNAČINE

2.1. Rešavanje algebarskih jednačina

Jedan od glavnih problema algebre je nalaženje *rešenja* algebarskih jednačina.

Definicija 2.1.1. Ako je $P(x)$ polinom stepena n, pod *algebarskom jednačinom n-tog stepena* podrazumevamo jednačinu

$$P(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0. \tag{2.1.1}$$

Koren ili rešenje jednačine (2.1.1) je svaka nula polinoma $P(x)$.

Očigledno je da rešenje jednačine (2.1.1) zavisi od koeficijenata a_0, a_1, ..., a_n. Dakle, ako je $x = a$ rešenje ove jednačine, tada je a funkcija koeficijenata, tj. $a = F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Pretpostavimo da je funkcija F obrazovana konačnom primenom operacija sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i korenovanja nad koeficijentima a_0, a_1, ..., a_n. Rešiti jednačinu (2.1.1) pomoću *radikala* znači odrediti sve takve funkcije F za koje je $F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ rešenje jednačine (2.1.1).

Za rešenje opšte kubne jednačine zaslužni su italijanski algebristi Scipione del Ferro, Niccolò Tartaglia i Gerolamo Cardano iz šesnaestog veka[63)]. U tom periodu dobijeno je i rešenje za opštu algebarsku jednačinu četvrtog stepena.

Svi napori tokom sledeća dva veka bili su usmereni na rešavanje opštih algebarskih jednačina stepena većeg od četiri, ali bezuspešno. Jedan od važnih doprinosa Gaussa u teoriji algebarskih jednačina je, svakako, kompletno rešenje binomne jednačine[64)]

$$x^n - 1 = 0, \tag{2.1.2}$$

[63)] Njihov rad je veoma značajan za istoriju algebre. Scipione del Ferro (1465–1526) nikad nije publikovao svoje rešenje, već ga je samo saopštio nekim svojim prijateljima. Gerolamo Cardano (1501–1576) je bio čuveni lekar, astrolog, filozof i matematičar, koji je živeo u Milanu. Niccolò Tartaglia (1500–1557) je, takođe, italijanski matematičar, čija je godina rođenja, prema raspoloživim izvorima, nesiguran podatak.

[64)] Ova jednačina je usko povezana sa konstrukcijom pravilnog poligona od n strana koji je upisan u dati krug. Starogrčki mistik, matematičar i prirodnjak Pitagora (569?–500? pre naše ere) znao je da konstruiše pravilne poligone sa 3, 4, 5 i 6 stranica. Njihove konstrukcije se mogu naći i četvrtoj knjizi *Euklidovi elementi*. Gauss je bio još na Univerzitetu (1796) kada je otkrio da pravilan poligon sa 17 stranica može biti upisan u dati krug korišćenjem samo lenjira i šestara. Kasnije, on je dokazao da pravilan n-tougao može biti konstruisan samo pomoću lenjira i šestara ako i samo ako je ispunjen bilo koji od sledećih uslova: (1) n je prost broj oblika $2^{2^k} + 1$, ili je proizvod različitih prostih brojeva ovog oblika; (2) n je neki stepen od 2; (3) n je proizvod brojeva koji zadovoljavaju uslove (1) i (2). Na osnovu ovoga, pokazano je da mogu biti konstruisani pravilni poligoni sa 257 i 65537 stranica. Godine 1801. pojavilo se značajno Gaussovo delo *Aritmetička ispitivanja*.

pomoću radikala. Rešavanje binomne jednačine razmatrali smo u odeljku 3.5, glava I. Prisetimo se samo da su koreni ove jednačine kompleksni brojevi raspoređeni na jediničnom krugu tako da predstavljaju temena pravilnog poligona od n strana koji je upisan u ovaj krug. Dakle, binomna jednačina (2.1.2), ili kako se drugačije kaže *n-ti koren iz jedinice*, ima n rešenja koja odgovaraju tzv. *granama* n-tog korena, kojih ima tačno n.

Za jednačinu (2.1.1) kažemo da je *opšta algebarska jednačina* ako su njeni koeficijenti a_0, a_1, $\ldots$, a_n opšti brojevi. Ukoliko su, međutim, svi koeficijenti dati kao fiksne numeričke konstante, tada za jednačinu kažemo da je *numerička algebarska jednačina*. Ruffini[65)], Abel, Galois[66)], i drugi, dokazali su da se opšta algebarska jednačina stepena $n \geq 5$ ne može rešiti pomoću radikala. Rešenje je, dakle, moguće samo za jednačine stepena $n \leq 4$. U narednim odeljcima dajemo rešenja za kvadratne jednačine ($n = 2$), kubne jednačine ($n = 3$) i jednačine četvrtog stepena ($n = 4$).

S druge strane, numeričke algebarske jednačine mogu se rešiti sa proizvoljnom tačnošću raznim iterativnim metodima[67)].

Na kraju ovog odeljka napomenimo da je Galois dao kompletan odgovor na pitanje pod kojim se uslovima neka algebarska jednačina može rešiti pomoću radikala.

2.2. Kvadratna jednačina

Neka su x_1 i x_2 koreni kompleksne kvadratne jednačine

$$x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \tag{2.2.1}$$

reprezentovani pomoću kompleksnih brojeva α i β,

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad x_2 = \alpha - \beta. \tag{2.2.2}$$

Tada je

$$2\alpha = -a_1, \qquad \alpha^2 - \beta^2 = a_0. \tag{2.2.3}$$

Iz (2.2.3) dobijamo $\alpha = -a_1/2$ kao i linearnu jednačinu za β^2 iz koje $\pm\beta$ može biti određeno. Dakle,

$$x_1 = -\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_0}, \qquad x_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_0}. \tag{2.2.4}$$

Napomena 2.2.1. Grana kvadratnog korena u (2.2.4) može biti izbrana proizvoljno. Izbor grane utiče samo na redosled rešenja x_1 i x_2. Slična primedba važi i za jednačine trećeg i četvrtog stepena.

---

65) Paolo Ruffini (1765–1822), italijanski matematičar.

66) Evariste Galois (1811–1832), francuski matematičar.

67) Ovi metodi se proučavaju u okviru kursa *Numerička matematika*.

2.3. Kubna jednačina

Posmatrajmo kompleksnu jednačinu trećeg stepena, ili tzv. kubnu jednačinu,

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \tag{2.3.1}$$

Njeni koreni x_1, x_2 i x_3 se mogu predstaviti kompleksnim brojevima α, β i γ u obliku

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha + q_0\beta + q_0\gamma,\\ x_2 &= \alpha + q_1\beta + q_2\gamma,\\ x_3 &= \alpha + q_2\beta + q_1\gamma, \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

gde su q_k, $k = 0, 1, 2$, dati sa

$$q_0 = 1, \quad q_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad q_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Tada, na osnovu Viѐteovih formula

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a_2,\\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= a_1,\\ x_1x_2x_3 &= -a_0, \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

imamo

$$\begin{aligned} 3\alpha &= -a_2,\\ 3\alpha^2 - 3\beta\gamma &= a_1,\\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma &= -a_0. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Iz jednačina (2.3.4) možemo naći sumu $3^3(\beta^3 + \gamma^3)$ i proizvod $3^6(\beta^3\gamma^3)$, pomoću kojih se može formirati kvadratna jednačina

$$(3v)^6 + (2a_2^3 - 9a_1a_2 + 27a_0)(3v)^3 + (a_2^2 - 3a_1)^3 = 0, \tag{2.3.5}$$

čija rešenja su $(3\beta)^3$ i $(3\gamma)^3$.

Ako stavimo

$$Q = a_2^2 - 3a_1, \qquad R = -2a_2^3 + 9a_1a_2 - 27a_0, \tag{2.3.6}$$

iz kvadratne jednačine (2.3.5) sleduje

$$(3\beta)^3 = \frac{R + \sqrt{R^2 - 4Q^3}}{2}, \qquad (3\gamma)^3 = \frac{R - \sqrt{R^2 - 4Q^3}}{2}. \tag{2.3.7}$$

Dakle,

$$\alpha = -\frac{a_2}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{R+\sqrt{R^2 - 4Q^3}}{2}}, \quad \gamma = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{R-\sqrt{R^2 - 4Q^3}}{2}}. \tag{2.3.8}$$

Grana kubnog korena u drugoj jednačini u (2.3.8) može biti izabrana proizvoljno, ali u trećoj jednačini ona mora biti izabrana tako da je $\beta\gamma = Q/9$. Poslednji zahtev proizilazi iz druge jednačine u (2.3.4).

Napomena 2.3.1. U knjizi: D. S. Mitrinović[68] i D. Ž. Đoković[69], *Polinomi i matrice*, Naučna knjiga, Beograd, 1966 (str. 121–126) izložen je Cardanoov metod za rešavanje kubne jednačine.

2.4. Jednačina četvrtog stepena

Neka su koreni x_1, x_2, x_3 i x_4 kompleksne jednačine četvrtog stepena

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{2.4.1}$$

reprezentovani pomoću

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha + \beta + \gamma + \delta, \\ x_2 &= \alpha + \beta - \gamma - \delta, \\ x_3 &= \alpha - \beta + \gamma - \delta, \\ x_4 &= \alpha - \beta - \gamma + \delta, \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

gde su $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kompleksni brojevi. Tada imamo

$$\begin{aligned} 4\alpha &= -a_3, \\ 6\alpha^2 - 2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) &= a_2, \\ 4\alpha^3 - 4\alpha(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 8\beta\gamma\delta &= -a_1, \\ \alpha^4 + (\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)^2 - 2\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) & \\ -4(\beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \gamma^2\delta^2) + 8\alpha\beta\gamma\delta &= a_0. \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

[68] Dragoslav S. Mitrinović (1908–1995), poznati jugoslovenski matematičar.

[69] Dragomir Ž. Đoković (1938–), poznati jugoslovenski matematičar koji živi i radi u Kanadi.

Na osnovu (2.4.3) dobijamo

$$4^2(\beta^2+\gamma^2+\delta^2), \qquad 4^4(\beta^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+\gamma^2\delta^2), \qquad 4^6\beta^2\gamma^2\delta^2,$$

koji su, u stvari, koeficijenti kubne jednačine

$$\begin{aligned}(16v^2)^3 - (3a_3^2 - 8a_2)(16v^2)^2 \\ +(3a_3^4 - 16a_2a_3^2 + 16a_1a_3 + 16a_2^2 - 64a_0)(16v^2) \\ - (a_3^3 - 4a_2a_3 + 8a_1)^2 = 0.\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Njena rešenja su $(4\beta)^2, (4\gamma)^2$ i $(4\delta)^2$. Dakle, jednačine (2.4.3) definišu vrednost za $\alpha, \alpha = -a_3/4$, i impliciraju jednačinu treég stepena (2.4.4) za određivanje β^2, γ^2 i δ^2.

Ako stavimo

$$\begin{aligned}P &= a_3^3 - 4a_2a_3 + 8a_1, \\ Q &= 12a_0 + a_2^2 - 3a_1a_3, \\ R &= 27a_0a_3^2 - 9a_1a_2a_3 + 2a_2^3 - 72a_0a_2 + 27a_1^2\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

i

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= a_3^2 - \frac{8}{3}\,a_2, \\ \beta_0 &= \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{R+\sqrt{R^2-4Q^3}}{2}}, \\ \gamma_0 &= \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{R-\sqrt{R^2-4Q^3}}{2}},\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

tada su

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{a_3}{4}, \\ \beta &= \frac{1}{4}\sqrt{\alpha_0+\beta_0+\gamma_0}, \\ \gamma &= \frac{1}{4}\sqrt{\alpha_0+q_1\beta_0+q_2\gamma_0}, \\ \delta &= \frac{1}{4}\sqrt{\alpha_0+q_2\beta_0+q_1\gamma_0},\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

gde su q_1 i q_2 dva ne-realna kubna korena iz jedinice, čiji redosled nije bitan.

Bilo koji izbor grane kubnog korena u (2.4.6) za koji je

$$\beta_0\gamma_0 = \frac{16Q}{9} \tag{2.4.8}$$

je dozvoljen. Slično je moguć proizvoljan izbor znaka kvadratnog korena u (2.4.7) za koji je

$$\beta\gamma\delta = -\frac{P}{64}\,. \tag{2.4.9}$$

Ograničenje (2.4.9) za izbor znaka veličina β, γ i δ u (2.4.7) proizilazi iz prve tri jednačine u (2.4.3).

Može se, takođe, dokazati sledeća karakterizacija:

Teorema 2.4.1. *Neka je*

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{2.4.10}$$

realna jednačina četvrtog stepena i neka su

$$\begin{aligned} Q &= 12a_0 + a_2^2 - 3a_1a_3, \\ R &= 27a_0a_3^2 - 9a_1a_2a_3 + 2a_2^3 - 72a_0a_2 + 27a_1^2, \end{aligned}$$

i

$$T = 3a_3^2 - 8a_2 + 8\,\mathrm{Re}\left(\sqrt[3]{\frac{R+\sqrt{R^2-4Q^3}}{2}}\right). \tag{2.4.11}$$

Računajući višestrukost korena

(1) *ako je* $R^2-4Q^3 > 0$ *tada su dva i samo dva korena jednačine* (2.4.10) *realna;*

(2) *ako je* $R^2 - 4Q^3 = 0$ *tada su dva korena jednačine* (2.4.10) *realna, dok su preostala dva korena realna, ako i samo ako je* $T \geq 0$ *za sva tri moguća izbora kubnog korena u* (2.4.11);

(3) *ako je* $R^2 - 4Q^3 < 0$ *tada su* (a) *četiri korena jednačine* (2.4.10) *realna ako i samo ako je* $T \geq 0$ *za sva tri moguća izbora kubnog korena u* (2.4.11); *i* (b) *Nijedan koren jednačine* (2.4.10) *nije realan ako i samo ako je* $T < 0$ *za najmanje jedan od moguća tri izbora kubnog korena u* (2.4.11).

Isto tako važe i sledeća dva tvrđenja:

Teorema 2.4.2. 1° *Kubna jednačina* (2.3.1) *ima dva jednaka korena ako i samo ako je* $R^2 - 4Q^3 = 0$ *i ima tri jednaka korena ako i samo ako je* $R = Q = 0$, *gde su*

$$R = -2a_3^3 + 9a_2a_3 - 27a_1, \qquad Q = a_3^2 - 3a_2\,;$$

2° *Jednačina četvrtog stepena* (2.4.1) *ima dva jednaka korena ako i samo ako je* $R^2 - 4Q^3 = 0$ *i ima tri jednaka korena ako i samo ako je* $R = Q = 0$, *gde su*

$$R = 27a_0a_3^2 - 9a_1a_2a_3 + 2a_2^3 - 72a_0a_2 + 27a_1^2,$$
$$Q = 12a_0 + a_2^2 - 3a_1a_3.$$

Ove teoreme se mogu neposredno dokazati korišćenjem algebrskih rešenja koja su prethodno data.

Teorema 2.4.3. 1° *Jednačina četvrtog stepena* (2.4.1) *ima dva para jednakih korena ako i samo ako su ispunjeni uslovi*

$$R^2 - 4Q^3 = 0 \qquad i \qquad 32R = 27\alpha_0^3.$$

2° *Jednačina* (2.4.1) *ima četiri jednaka korena ako i samo ako je* $R = Q = \alpha_0 = 0$.

3. POLINOMSKE FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH

3.1. Simetrični polinomi

Sva razmatranja u ovom poglavlju se odnose na polinome nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva.

Polinomska funkcija $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se naziva *simetrični* polinom po x_1, x_2, …, x_n ako je invarijantna za svaku permutaciju izvršenu nad x_1, x_2, …, x_n. Umesto simetrični polinom koristi se i termin *simetrična* funkcija.

Na primer,

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv P_1(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc, \\ P_2 &\equiv P_2(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

su simetrični polinomi, ili simetrične funkcije, promenljivih a, b, c.

Uzimajući sumu svih različitih članova (monoma) dobijenih iz tipičnog člana oblika

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m},$$

gde su $k_1, k_2, \ldots, k_m$ prirodni brojevi, i zamenom indeksa 1, 2, ..., m sa svim mogućim uređenjima od m ($\le n$) brojeva uzetih od 1, 2, ..., n, dobija se simetrična funkcija promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$, koju označavamo sa

$$\sum x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m},$$

ili kraće kao $[k_1, k_2, \ldots, k_m]$.

U opštem slučaju, ako je t proizvod stepena od $x_1, x_2, \ldots, x_n$, čiji su eksponenti pozitivni celi brojevi, tada $\sum t$ označava sumu ovog člana t i svih različitih članova dobijenih iz t permutacijom promenljivih. Na primer, ako imamo samo tri promenljive a, b, c, tada je

$$\sum a^2 b^2 c = [2, 2, 1] = a^2 b^2 c + b^2 c^2 a + c^2 a^2 b.$$

Takvi simetrični polinomi se nazivaju Σ-*polinomi*.

Dva standardna slučaja Σ-polinoma od n promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su:

1° *Centralne simetrične funkcije* (*polinomi*)

$$s_k = \sum x_1^k = [k] = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \quad (k \ge 0);$$

2° *Elementarne* (*osnovne*) *simetrične funkcije*

$$\sigma_k = \sum x_1 x_2 \cdots x_k = [\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k \text{ puta}}] \qquad (1 \le k \le n).$$

Za $k = 0$ imamo $s_0 = n$ i $\sigma_0 = 1$. Takođe, uzimamo da je $\sigma_k = 0$ za $k > n$.

U Σ-notaciji, polinomi u (3.1.1) mogu se predstaviti jednostavnije

$$P_1 = \sum a^3 - 3 \sum abc = [3] - 3[1, 1, 1],$$
$$P_2 = \sum a^2 - \sum ab = [2] - [1, 1].$$

Korišćenjem funkcija s_k i σ_k, imamo

$$P_1 = s_3 - 3\sigma_3, \qquad P_2 = s_2 - \sigma_2.$$

Elementarne simetrične funkcije od $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koristili smo u odeljku 1.6 u cilju dobijanja Vièteovih formula za korene algebarskih jednačina stepena n. Naime, tada smo imali

$$\begin{aligned} P(x) &= \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \\ &= x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x + (-1)^n \sigma_n. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Posmatrajmo sada polinom $Q_i(x)$, definisan sa

$$Q_i(x) = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{n}(x - x_\nu) = \frac{P(x)}{x - x_i} \qquad (1 \le i \le n)$$

i elementarne simetrične funkcije promenljivih $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Stavljajući

$$\sigma_k^{(i)} = [\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k \text{ puta}}] \qquad (1 \le k \le n-1), \qquad \sigma_0^{(i)} = 1,$$

imamo

$$Q_i(x) = x^{n-1} - \sigma_1^{(i)} x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}^{(i)}.$$

Na osnovu ovoga i (3.1.2) dobijamo

$$\sigma_k = \sigma_k^{(i)} + x_i \sigma_{k-1}^{(i)}\,. \tag{3.1.3}$$

Korišćenjem (3.1.3) nalazimo

$$\sigma_0^{(i)} = 1, \quad \sigma_1^{(1)} = \sigma_1 - x_i, \quad \sigma_2^{(i)} = \sigma_2 - x_i\sigma_1 + x_i^2.$$

U opštem slučaju, imamo

$$\sigma_k^{(i)} = \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu x_i^\nu \sigma_{k-\nu} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3.1.4}$$

Veza između funkcija s_k i σ_k data je sledećom Newtonovom teoremom:

Teorema 3.1.1. *Za svako* k $(1 \le k \le n-1)$ *važi jednakost*

$$\sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu} s_{\nu} \sigma_{k-\nu} + k\sigma_k = 0. \tag{3.1.5}$$

Dokaz. Diferenciranjem (3.1.2) dobijamo

$$P'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(x)}{x - x_i} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k)\sigma_k x^{n-k-1}.$$

Kako je

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{P(x)}{x - x_i} = \sum_{i=1}^{n} Q_i(x) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sigma_k^{(i)} x^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \Big(\sum_{i=1}^{n} \sigma_k^{(i)} \Big) x^{n-k-1}, \end{aligned}$$

zaključujemo da je

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_k^{(i)} = (n-k)\sigma_k \qquad (0 \le k \le n-1).$$

Korišćenjem (3.1.4) nalazimo

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} x_i^{\nu} \sigma_{k-\nu} = (n-k)\sigma_k \qquad (k \le n-1),$$

tj.

$$\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} s_{\nu} \sigma_{k-\nu} = (n-k)\sigma_k \qquad (k \le n-1).$$

Kako je $s_0 = n$, ova jednakost se svodi na (3.1.5). $\square$

Napomena 3.1.1. Jednakost (3.1.5) važi, takođe, za $k \ge n$, stavljajući, naravno, $\sigma_{\nu} = 0$ za $\nu > n$.

Za $k = 1, 2, \ldots$, iz (3.1.5) dobijamo trougaoni sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}
s_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 1\sigma_1,\\
\sigma_1 s_1 - \quad s_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 2\sigma_2,\\
\sigma_2 s_1 - \quad \sigma_1 s_2 + \quad s_3 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 3\sigma_3,\\
&\ \vdots\\
\sigma_{k-1}s_1 - \sigma_{k-2}s_2 + \sigma_{k-3}s_3 - \cdots + (-1)^{k-1}s_k &= k\sigma_k,
\end{aligned}$$

odakle nalazimo sledeću eksplicitnu formulu

$$s_k = (-1)^{k-1}\begin{vmatrix}
1 & & & & & 1\sigma_1\\
\sigma_1 & 1 & & & & 2\sigma_2\\
\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & & & 3\sigma_3\\
\vdots & & & \ddots & & \\
\sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \sigma_{k-4} & & 1 & (k-1)\sigma_{k-1}\\
\sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & & \sigma_1 & k\sigma_k
\end{vmatrix},$$

odakle, na primer, za $k = 1, 2, 3, 4$, imamo

$$\begin{aligned}
&s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \quad s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,\\
&s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4\,.
\end{aligned}$$

Važi i obrnuta formula

$$\sigma_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\begin{vmatrix}
1 & & & & & s_1\\
s_1 & 2 & & & & s_2\\
s_2 & s_1 & 3 & & & s_3\\
\vdots & & & \ddots & & \\
s_{k-2} & s_{k-3} & s_{k-4} & & k-1 & s_{k-1}\\
s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & & s_1 & s_k
\end{vmatrix}.$$

Na primer, za $k = 1, 2, 3, 4$, imamo

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = s_1, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2), \quad \sigma_3 = \frac{1}{6}(s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3),\\
&\sigma_4 = \frac{1}{24}(s_1^4 - 6s_1^2s_2 + 8s_1s_3 + 3s_2^2 - 6s_4).
\end{aligned}$$

Sada možemo da formulišemo tzv. *osnovnu teoremu za simetrične funkcije*:

Teorema 3.1.2. *Svaki simetrični polinom* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *može biti izražen kao polinom od elementarnih simetričnih funkcija* σ_1, σ_2, $\ldots$, σ_n, *tj.*

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n). \tag{3.1.6}$$

Štaviše, koeficijenti ovog polinoma se dobijaju iz koeficijenata simetrične funkcije samo pomoću operacija sabiranje i oduzimanje.

Postoji više različitih dokaza ove teoreme. Jedan od dokaza dao je Cauchy.

Neka su sada $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ promenljive. Definišimo *težine* monoma

$$\sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \cdots \sigma_n^{\alpha_n}$$

kao sumu $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n$. Takođe, definišimo i težinu polinoma $p(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ kao maksimum težina monoma koji se pojavljuju u ovom polinomu. Ako svaki od ovih monoma ima istu težinu, tada kažemo da je polinom *izobaričan*.

Teorema 3.1.3. *Neka je* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *simetrični polinom. Ako je polinom* $p(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ *određen sa* (3.1.6), *tada je njegov totalni stepen jednak stepenu polinoma* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Teorema 3.1.4. *Neka je* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *homogeni simetrični polinom stepena* d. *Ako je* $p(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ *definisan sa* (3.1.6), *tada je on izobaričan polinom težine* d.

Napomena 3.1.2. Dokazi ovih teorema mogu se naći u knjizi: Đ. Kurepa[70)], *Viša algebra I* (treće izdanje), Građevinska knjiga, Beograd, 1979 (str. 697–698).

Primer 3.1.1. (a) Neka je $P(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)$. Ovo je simetrični homogeni polinom trećeg stepena. Njegov stepen po promenljivoj x_1 je $d_1 = 2$. Takođe, $d_2 = d_3 = 2$. Odgovarajući polinom $p(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ biće izobarični polinom težine 3 i totalnog stepena 2. S obzirom na prethodnu teoremu, njegov oblik mora biti

$$P(x_1, x_2, x_3) = p(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = A\sigma_1\sigma_2 + B\sigma_3, \tag{3.1.7}$$

gde su A i B konstante.

Stavljajući $x_1 = 0$ i $x_2 = x_3 = 1$ imamo $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$, $P = 2$. Tada, iz (3.1.7) sleduje $A = 1$. Slično, za $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ nalazimo da su $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$, $P = 8$, a zatim $B = -1$. Dakle,

$$p(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3.$$

[70)] Đuro Kurepa (1907–1993), poznati jugoslovenski matematičar.

(b) Neka je $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum x_1^2 x_2 x_3$. Ovo je simetrični homogeni polinom stepena 4. Kako je njegov stepen po x_1 jednak 2 zaključujemo da odgovarajući polinom $p(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ ima oblik

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = A\sigma_1\sigma_3 + B\sigma_2^2 + C\sigma_4, \tag{3.1.8}$$

gde su A, B, C konstante.

Za $n = 3$ i $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 1$ imamo $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$, $\sigma_4 = 0$, i $P = 0$. Tada (3.1.8) daje $B = 0$. Slično, za $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = 1$ dobijamo $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = -1$, a

$$P = x_1^2 x_2 x_3 + x_2^2 x_1 x_3 + x_3^2 x_1 x_2$$

postaje $P = -1$. Dakle, (3.1.8) se redukuje na $-1 = A \cdot 1 \cdot (-1)$, tj. $A = 1$.

Za $n = 4$ i $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ dobijamo

$$\sigma_1 = 4, \quad \sigma_2 = 6, \quad \sigma_3 = 4, \quad \sigma_4 = 1, \quad P = 12.$$

Iz (3.1.8) sleduje $C = -4$.

Dakle, za svako n imamo

$$\sum x_1^2 x_2 x_3 = p(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4.$$

(c) Neka je $n > 4$ i $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum x_1^2 x_2^2 x_3$. Tada je

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_4 + 5\sigma_5. \quad \triangle$$

3.2. Rezultanta i diskriminanta polinoma

Neka su

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu} \qquad \text{i} \qquad Q(x) = \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu x^{m-\nu}$$

polinomi stepena n i m, respektivno, gde je $a_0 b_0 \neq 0$. Neka su dalje $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koreni jednačine $P(x) = 0$. Jednačine $P(x) = 0$ i $Q(x) = 0$ imaju zajedničke korene ako i samo ako je

$$Q(x_1)Q(x_2)\cdots Q(x_n) = 0\,.$$

Međutim, leva strana u ovoj jednakosti je simetrična funkcija korena jednačine $P(x)=0$, stepena m po svakom korenu, i kao takva može biti izražena u obliku polinoma stepena m po elementarnim simetričnim funkcijama[71)].

Definišimo sada

$$R(P,Q)=a_0^m Q(x_1)Q(x_2)\cdots Q(x_n) \tag{3.2.1}$$

kao *rezultantu* (ili *eliminantu*) polinoma $P(x)$ i $Q(x)$. To je, očigledno, funkcija njihovih koeficijenata i može biti predstavljena kao determinanta reda $n+m$ u obliku:

$$R(P,Q)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_n & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_m & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \text{ vrsta} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \text{ vrsta} \end{array}$$

Primer 3.2.1. Za dva kvadratna polinoma (trinoma)

$$P(x)=a_0x^2+a_1x+a_2 \quad \text{i} \quad Q(x)=b_0x^2+b_1x+b_2$$

imamo

$$R(P,Q)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

tj.

$$R(P,Q)=(a_0b_2-a_2b_0)^2-(a_0b_1-a_1b_0)(a_1b_2-a_2b_1). \tag{3.2.2}$$

Neka su $P(x)=x^2+x-2$, $Q(x)=x^2+1$, i $S(x)=x^2-3x+2$. Na osnovu (3.2.2) nalazimo $R(P,Q)=10$, $R(P,S)=0$, $R(Q,S)=10$. Ovo znači da samo polinomi $P(x)$ and $S(x)$ imaju zajedničku nulu ($x=1$). △

Neka su $y_1,y_2,\dots,y_m$ koreni jednačine $Q(x)=0$. S obzirom na (3.2.1) imamo

$$R(P,Q)=a_0^m\prod_{k=1}^n b_0\prod_{i=1}^m (x_k-y_i)=a_0^m b_0^n\prod_{k=1}^n\prod_{i=1}^m (x_k-y_i).$$

[71)] Ovo je fundamentalna teorema o simetričnim funkcijama.

Primetimo da je $R(Q,P) = (-1)^{nm} R(P,Q)$.

Definišimo, takođe, *diskriminantu* polinoma $P(x)$ kao izraz

$$D = D(P) = a_0^{2n-2}(x_1 - x_2)^2 \cdots (x_1 - x_n)^2 (x_2 - x_3)^2 \cdots (x_{n-1} - x_n)^2,$$

gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ njegove nule i a_0 najstariji koeficijent. Zbog činjenice da je stepen po bilo kojoj nuli jednak $2(n-1)$, simetrična funkcija D može biti izražena kao polinom od a_0, a_1, $\ldots$,a_n. Diferenciranjem

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

dobijamo

$$\begin{aligned} P'(x_1) &= a_0(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n), \\ P'(x_2) &= a_0(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n), \\ &\vdots \\ P'(x_n) &= a_0(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1}), \end{aligned}$$

odakle sleduje

$$\begin{aligned} a_0^{n-1} P'(x_1) \cdots P'(x_n) &= a_0^{2n-1}(-1)^{n(n-1)/2}(x_1 - x_2)^2 \cdots (x_{n-1} - x_n)^2 \\ &= (-1)^{n(n-1)/2} a_0 D\,. \end{aligned}$$

Leva strana je jednaka rezultanti polinoma $P(x)$ i $P'(x)$. Dakle,

(3.2.3) $$D(P) = (-1)^{n(n-1)/2} a_0^{-1} R(P, P').$$

Na osnovu prethodnih razmatranja možemo zaključiti da *polinom ima višestruke nule ako i samo ako je njegova diskriminanta jednaka nuli*.

Korišćenjem funkcija $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ $(k \geq 0)$, diskriminanta polinoma $P(x)$ može biti predstavljena u obliku determinante reda n

(3.2.4) $$D = a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & & s_n \\ \vdots & & & \\ s_{n-1} & s_n & & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

(videti primer 2.10.2, glava II).

U izvesnim slučajevima moguće je naći eksplicitne formule za diskriminantu polinoma. U sledećim primerima dajemo eksplicitne formule u slučaju kvadratnog i kubnog polinoma kao i za opšti trinom.

Primer 3.2.2. Neka su $n = 2$, $P(x) = ax^2 + bx + c$, i neka su x_1 i x_2 nule polinoma $P(x)$. Kako su $s_0 = 2$ i

$$s_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad s_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2},$$

formula (3.2.4) daje diskriminantu kvadratnog trinoma

$$D = a^2(s_0 s_2 - s_1^2) = b^2 - 4ac. \quad \triangle$$

Primer 3.2.3. Neka su $n = 3$, $P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, a x_1, x_2 i x_3 su nule polinoma $P(x)$. Odredićemo diskriminantu ovog polinoma korišćenjem razvoja homogene simetrične funkcije

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$$

po elementarnim simetričnim funkcijama σ_1, σ_2, σ_3. Kako je $F(x_1, x_2, x_3)$ četvrtog stepena po bilo kojoj nuli, a takođe i homogen polinom stepena homogenosti $d = 6$, ovaj razvoj mora imati oblik

$$F = A\sigma_3^2 + B\sigma_2^3 + C\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + D\sigma_1^3\sigma_3 + E\sigma_1^2\sigma_2^2, \tag{3.2.5}$$

gde su A, B, C, D, E konstante, čije vrednosti treba odrediti. Primetimo da je svaki član u (3.2.5) oblika $c\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\sigma_3^{\alpha_3}$, gde je c konstanta, a $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}_0^3$ takvo da

$$0 < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 4 \quad \text{i} \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 6.$$

Uzimajući $x_1 = 0$, $x_2 = -x_3 = 1$ nalazimo $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = 0$, $F = 4$. Tada iz (3.2.5) dobijamo $B = -4$. Slično, za $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 1$ dobijamo $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$, $F = 0$, i $B + 4E = 0$, tj. $E = 1$. Dakle, (3.2.5) se predstaviti u obliku

$$\sigma_3(A\sigma_3 + C\sigma_1\sigma_2 + D\sigma_1^3) = F + 4\sigma_2^3 - \sigma_1^2\sigma_2^2. \tag{3.2.6}$$

Stavljajući $(1, 1, -2)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$, umesto (x_1, x_2, x_3), dobijamo

$$4A = 4(-3)^3, \quad A + C - D = -5, \quad A + 9C + 27D = 25,$$

respektivno. Rešavanjem ovog sistema jednačina nalazimo $A = -27$, $C = 18$, $D = -4$.

Kako su $\sigma_1 = -a_1/a_0$, $\sigma_2 = a_2/a_0$, $\sigma_3 = -a_3/a_0$, na osnovu (3.2.5) dobijamo diskriminantu kubnog polinoma

$$\begin{aligned} D(P) &= a_0^4 (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \\ &= a_0^4 \left[-27\sigma_3^2 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 \right] \\ &= -27a_0^2a_3^2 - 4a_0a_2^3 + 18a_0a_1a_2a_3 - 4a_1^3a_3 + a_1^2a_2^2. \end{aligned}$$

Isti rezultat može biti dobijen korišćenjem (3.2.4) i centralnih simetričnih funkcija s_k, $0 \le k \le 4$.

U specijalnom slučaju kada su $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = p$, $a_3 = q$, zaključujemo da je diskriminanta polinoma $P(x) = x^3 + px + q$ data sa

$$D(P) = -27q^2 - 4p^3. \quad \triangle$$

Primer 3.2.4. Neka je $P(x) = ax^{m+n} + bx^m + c$ i neka su $\mu = m/d$ i $\nu = n/d$, gde je d najveći zajednički delilac brojeva m i n.

Nule izvoda $P'(x) = (m+n)ax^{m+n-1} + mbx^{m-1}$ su date sa

$$\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_{m-1} = 0 \quad \text{i} \quad \xi_{m+k} = \xi_m \varepsilon^k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

gde su $\varepsilon = \exp(2\pi i/n)$ i $\xi_m^n = -mb/\big((m+n)a\big)$.

Kako su $P(\xi_1) = P(\xi_2) = \cdots = P(\xi_{m-1}) = c$ i

$$P(\xi_m\varepsilon^k) = a\xi_m^{m+n}\varepsilon^{k(m+n)} + b\xi_m^m\varepsilon^{km} + c = c + \frac{nb}{m+n}\xi_m^m\varepsilon^{km},$$

dobijamo rezultantu za $P'(x)$ i $P(x)$ u obliku

$$\begin{aligned} R(P', P) &= (m+n)^{m+n} a^{m+n} \prod_{k=1}^{m-1} P(\xi_k) \prod_{k=0}^{n-1} P(\xi_m\varepsilon^k) \\ &= (m+n)^{m+n} a^{m+n} c^{m-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(c + \frac{nb}{m+n}\xi_m^m\varepsilon^{km} \right). \end{aligned}$$

S druge strane

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \left(c + \frac{nb}{m+n}\xi_m^m\varepsilon^{km} \right) &= \left[\prod_{k=0}^{\nu-1} \left(c + \frac{nb}{m+n}\xi_m^m\eta^k \right) \right]^d, \\ &= \left[c^\nu - (-1)^{\mu+\nu} \frac{m^\mu n^\nu b^{\mu+\nu}}{(m+n)^{\mu+\nu} a^\mu} \right]^d, \end{aligned}$$

gde je $\eta = \exp(2\pi i/\nu)$.

Dakle,

$$R(P, P') = R(P', P) = a^n c^{m-1} \big[(m+n)^{\mu+\nu} a^\mu c^\nu - (-1)^{\mu+\nu} m^\mu n^\nu b^{\mu+\nu}\big]^d.$$

Najzad, na osnovu (3.2.3) dobijamo

$$D(P) = (-1)^s a^{n-1} c^{m-1} \big[(m+n)^{\mu+\nu} a^\mu c^\nu - (-1)^{\mu+\nu} m^\mu n^\nu b^{\mu+\nu}\big]^d,$$

gde je $s = (m+n)(m+n-1)/2$.

Za $m = 1$ i $n = 2$ imamo $P(x) = ax^3 + bx + c$ i $d = 1$, $\mu = 1$, $\nu = 2$, $s = 3$. Prethodni izraz za diskriminantu se redukuje na $-27a^2c^2 - 4ab^3$. $\triangle$

Na kraju ovog odeljka pomenimo i sledeću interesantnu formulu

$$D(PQ) = D(P)D(Q)R(P, Q)^2,$$

gde su $P(x)$ and $Q(x)$ proizvoljni polinomi.

4. HURWITZOVI POLINOMI

4.1. Definicija Hurwitzovih polinoma

U mnogim problemima koji se odnose na stabilnost sistema (elektronskih, mehaničkih, itd.) pojavljuju se polinomi čije sve nule imaju negativan realni deo. U ovom poglavlju razmatraćemo takvu klasu polinoma i dati potrebne i dovoljne uslove da jedan polinom pripada ovakvoj klasi. Jedno algoritamsko rešenje ovog problema iz 1877. godine, koje je nedovoljno poznato u literaturi, potiče od Routha[72)]. Elegantno rešenje ovog problema u determinantnom obliku dao je Hurwitz[73)] 1895. godine i zato se polinomi iz ove klase nazivaju *Hurwitzovi polinomi* ili kraće H-*polinomi*. Dakle, realan polinom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (a_n \neq 0) \tag{4.1.1}$$

je H-polinom ako sve njegove nule x_k $(k = 1, \ldots, n)$ imaju osobinu $\operatorname{Re} x_k < 0$.

Ne umanjujući opštost razmatranja, na dalje pretpostavljamo da je najstariji koeficijent polinoma pozitivan.

---

72) Edward John Routh, *Stability of given state of motion*, London, 1877. Bliže biografske podatke o Routhu ne posedujemo.

73) Adolf Hurwitz (1859–1919), nemački matematičar.

Teorema 4.1.1. *Ako je polinom* (4.1.1) *sa* $a_n > 0$ H-*polinom, tada su svi njegovi koeficijenti pozitivni.*

Dokaz. Pretpostavimo da H-polinom (4.1.1) ima konjugovano kompleksne nule

$$x_k = -\alpha_k + i\beta_k, \quad x_{2m-k+1} = \bar{x_k}, \quad k = 1, \dots, m,$$

i realne nule

$$x_{2m+k} = -\gamma_k, \qquad k = 1, \dots, n-2m,$$

gde su $\alpha_k, \gamma_k > 0$. Tada se on može faktorisati u obliku

$$P(x) = a_n \prod_{k=1}^{m} (x + \alpha_k - i\beta_k)(x + \alpha_k + i\beta_k) \prod_{k=1}^{n-2m} (x + \gamma_k),$$

tj.

$$P(x) = a_n \prod_{k=1}^{m} (x^2 + 2\alpha_k x + \alpha_k^2 + \beta_k^2) \prod_{k=1}^{n-2m} (x + \gamma_k).$$

Kako je $a_n > 0$ i kako svi kvadratni i linearni faktori imaju pozitivne koeficijente zaključujemo da polinom P ima sve pozitivne koeficijente. $\triangle$

Napomena 4.1.1. Obrnuto tvrđenje vazi za $n = 1$ i $n = 2$, tj. polinomi $a_a + a_1 x$ i $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, sa $a_0, a_1, a_2 > 0$, su H-polinomi. Ovakvo tvrđenje ne važi za $n \geq 3$. Na primer, $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ nije H-polinom. Njegove nule se mogu odrediti iz faktorizacije

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = (x+1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

4.2. Schurov metod

Posmatrajmo proizvoljan kompleksni polinom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (a_n \neq 0). \tag{4.2.1}$$

Sa $P^*(x)$ označimo polinom koji se dobija iz (4.2.1) zamenom koeficijenata sa odgovarajućim konjugovanim vrednostima i promeni znaka koeficijentima uz neparni stepen od x, tj.

$$P^*(x) = \bar{a}_0 - \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 x^2 - \cdots + (-1)^n \bar{a}_n x^n. \tag{4.2.2}$$

Primetimo da iz $P(x) = U(x)V(x)$ sleduje $P^*(x) = U^*(x)V^*(x)$. Takođe, $(P^*)^*(x) = P(x)$.

Pretpostavimo da su $x_k = \alpha_k + i\beta_k$, $k = 1, \ldots, n$ nule polinoma $P^*(x)$. Tada imamo faktorizacije

$$P(x) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k), \tag{4.2.3}$$

$$P^*(x) = \bar{a}_n \prod_{k=1}^{n} (-x - \bar{x}_k) = (-1)^n \bar{a}_n \prod_{k=1}^{n} (x + \bar{x}_k). \tag{4.2.4}$$

Dokazaćemo sada jedan pomoćni rezultat:

Teorema 4.2.1. *Ako je* $P(x)$ H-*polinom, tj.* $\operatorname{Re} x_k = \alpha_k < 0$, $k = 1, \ldots, n$, *tada važe nejednakosti*

$$\begin{array}{rl} |P(x)| > |P^*(x)| \geq 0 & \quad \textit{za} \quad \operatorname{Re} x > 0, \\ |P^*(x)| > |\,P(x)\,| \geq 0 & \quad \textit{za} \quad \operatorname{Re} x < 0, \\ |P(x)| = |P^*(x)| > 0 & \quad \textit{za} \quad \operatorname{Re} x = 0, \end{array}$$

Dokaz. Za dokaz ovih nejednakosti dovoljno je za proizvoljno k $(1 \leq k \leq n)$ uočiti razliku

$$\begin{aligned} D &= |x + \bar{x}_k|^2 - |x - x_k|^2 \\ &= (x + \bar{x}_k)(\bar{x} + x_k) - (x - x_k)(\bar{x} - \bar{x}_k) \\ &= (x + \bar{x})(x_k + \bar{x}_k), \end{aligned}$$

koja, zamenom $x_k = \alpha_k + i\beta_k$, postaje $D = 4\alpha_k \operatorname{Re} x$, odakle zaključujemo da D ima suprotan znak od $\operatorname{Re} x$. Dakle, imamo

$$\begin{array}{ll} |x - x_k| > |x + \bar{x}_k| & \quad \text{za } \operatorname{Re} x > 0, \\ |x - x_k| < |x + \bar{x}_k| & \quad \text{za } \operatorname{Re} x < 0, \\ |x - x_k| = |x + \bar{x}_k| & \quad \text{za } \operatorname{Re} x = 0, \end{array}$$

što zajedno sa (4.2.3) i (4.2.4) daje tvrđenje teoreme. $\square$

Nejednakosti u teoremi 4.2.1 nazivaju se *Schurove*[74)] *nejednakosti.* Korišćenjem tih nejedakosti možemo dokazati sledeće tvrđenje:

[74)] Issai Schur (1875–1941), nemački matematičar.

Teorema 4.2.2. *Ako su a i b proizvoljne kompleksne konstante takve da je $|a| > |b|$, tada je $P(x)$* H*-polinom ako i samo ako je*

$$Q(x) = aP(x) - bP^*(x), \tag{4.2.5}$$

H*-polinom.*

Dokaz. Ako polinom $P(x)$ ima samo nule sa negativnim realnim delom, tj. ako je on H-polinom, tada na osnovu prethodne teoreme, za $\operatorname{Re} x \geq 0$ imamo $|P(x)| \geq |P^*(x)|$. Štaviše, za $|a| > |b|$ imamo

$$|aP(x)| > |bP^*(x)| \qquad (\operatorname{Re} x \geq 0),$$

što znači da je $Q(x) \neq 0$ za svako x za koje je $\operatorname{Re} x \geq 0$, tj. $Q(x)$ je H-polinom.

Obrnuto, neka $Q(x)$ ima samo nule sa negativnim realnim delom. Tada, na osnovu

$$Q(x) = aP(x) - bP^*(x), \qquad Q^*(x) = \bar{a}P^*(x) - \bar{b}P(x),$$

dobijamo

$$P(x) = \frac{\bar{a}}{|a|^2 - |b|^2}\, Q(x) + \frac{b}{|a|^2 - |b|^2}\, Q^*(x). \tag{4.2.6}$$

Kako je koeficijent uz $Q(x)$ u (4.2.6) veći po modulu od koeficijenta uz $Q^*(x)$, na osnovu prvog dela tvrđenja, zaključujemo da je $P(x)$ H-polinom. □

Neka je ξ proizvoljan kompleksan broj sa negativnim realnim delom. Ako je $P(x)$ H-polinom, na osnovu Schurovih relacija imamo da je

$$|P^*(\xi)| > |P(\xi)|. \tag{4.2.7}$$

Ako stavimo $a = P^*(\xi)$ i $b = P(\xi)$, na osnovu prethodne teoreme i (4.2.5) zaključujemo da jednačina

$$P^*(\xi)P(x) - P(\xi)P^*(x) = 0 \tag{4.2.8}$$

ima samo korene sa negativnim realnim delom. Važi i obrnuto, ako jednačina (4.2.8) ima korene u levoj poluravni i (4.2.7) važi za $\operatorname{Re} \xi < 0$, tada je $P(x)$ H-polinom. Ovim smo dokazali tvrđenje:

Teorema 4.2.3. *Neka je* ξ *proizvoljan kompleksan broj takav da je* $\operatorname{Re}\xi < 0$. *Polinom* $P(x)$ *je* H-*polinom samo ako je*

$$S_\xi(x) = \frac{P^*(\xi)P(x) - P(\xi)P^*(x)}{x - \xi} \tag{4.2.9}$$

H-*polinom i* $|P^*(\xi)| > |P(\xi)|$.

Poslednja teorema daje rekurzivni postupak, poznat kao *Schurov metod*, za ispitivanje da li je jedan polinom Hurwitzov ili nije. Naime, problem za polinom stepena n se svodi na odgovarajuí problem za polinom stepena $n-1$ uz proveru jedne nejednakosti. Obično se uzima $\xi = -1$.

Polinom $S_\xi(x)$ definisan pomoću (4.2.9) može se razmatrati i kao polinom po stepenima od ξ,

$$S_\xi(x) = R_x(\xi) = r_0(x) + r_1(x)\xi + \cdots + r_{n-1}(x)\xi^{n-1}, \tag{4.2.10}$$

gde su koeficijenti $r_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, polinomi po x, stepena ne višeg od $n-1$. Kako je

$$\begin{aligned} P^*(\xi)P(x) - P(\xi)P^*(x) &= (x - \xi)R_x(\xi) \\ &= xr_0(x) + \big(xr_1(x) - r_0(x)\big)\xi + \cdots - r_{n-1}(x)\xi^n, \end{aligned}$$

korišćenjem (4.2.1) i (4.2.2) i poređenjem koeficijenata u prethodnoj jednakosti uz ξ^k, za $k = 0$ i $k = 1$, dobijamo

$$\bar{a}_0 P(x) - a_0 P^*(x) = xr_0(x), \quad -\bar{a}_1 P(x) - a_1 P^*(x) = xr_1(x) - r_0(x),$$

odakle sleduje

$$U(x)P(x) - V(x)P^*(x) = x^2\big(r_0(x) + r_1(x)\xi\big),$$

gde su

$$U(x) = \bar{a}_0 x + \bar{a}_0\xi - a_1 x\xi, \qquad V(x) = a_0 x + a_0\xi + a_1 x\xi.$$

Može se dokazati i sledeći rezultat (videti knjigu na bugarskom jeziku: N. Obreškov[75]), *Nule polinoma*, BAN, Sofija, 1963 (str. 189–191)).

Teorema 4.2.4. *Neka je* ξ *proizvoljan kompleksan broj takav da je* $\operatorname{Re}\xi < 0$. *Polinom* $P(x)$ *je* H-*polinom samo ako je*

$$a_0 \neq 0, \qquad \operatorname{Re}(a_1/a_0) > 0$$

i polinom $Q(x) = r_0(x) + \xi r_1(x)$, *stepena* $n-1$, H-*polinom.*

---

75) Nikola Obreškov (1896–1963), poznati bugarski matematičar.

4.3. Primena na polinome sa realnim koeficijentima

Prethodno izloženi Schurov metod se može uprostiti ako je polinom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (a_0 > 0). \tag{4.3.1}$$

sa realnim koeficijentima.

Definišimo determinante $D_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, pomoću

$$D_k^{(n)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & a_{2k-4} & & a_k \end{vmatrix},$$

gde stavljamo $a_\nu = 0$ za $\nu > n$.

Teorema 4.3.1. *Polinom $P(x)$ dat pomoću* (4.3.1) *je* H-*polinom ako i samo ako su sve determinante $D_k^{(n)}$, za $k = 1, 2, \ldots, n$, pozitivne.*

Dokaz. Kako se (4.3.1) može predstaviti u obliku

$$P(x) = G(x^2) + xH(x^2),$$

gde su polinomi $G(t)$ i $H(t)$ dati sa

$$G(t) = a_1 + a_3 t + a_5 t^2 + \cdots, \quad H(t) = a_0 + a_2 t + a_4 t^2 + \cdots,$$

imamo

$$P^*(x) = G(x^2) - xH(x^2).$$

Tada se polinomi $r_0(x)$ i $r_1(x)$ u razvoju (4.2.10) mogu izraziti u obliku

$$r_0(x) = 2a_0 H(x^2), \qquad x r_1(x) = 2a_0 H(x^2) - 2a_1 G(x^2). \tag{4.3.2}$$

Da bismo primenili teoremu 4.2.4 potrebno je naći odgovarajući polinom $Q(x) = r_0(x) + \xi r_1(x)$ stepena $n-1$. Na osnovu (4.3.2) imamo

$$\frac{1}{2} Q(x) = a_0 \Big(1 + \frac{\xi}{x}\Big) H(x^2) - a_1 \frac{\xi}{x} G(x^2), \qquad \operatorname{Re} \xi < 0.$$

Ako stavimo[76] $\xi = -a_0$, prethodna jednakost se svodi na

$$Q_1(x) = \frac{1}{2a_0}\, Q(x) = \Big(1 - \frac{a_0}{x}\Big) H(x^2) + \frac{a_1}{x}\, G(x^2),$$

tj.

$$Q_1(x) = a_1 + (a_1a_2 - a_0a_3)x + a_3x^2 + (a_1a_4 - a_0a_5)x^3 + a_5x^4 + \cdots .$$

Sada, na osnovu teoreme 4.2.4, sleduje da je polinom (4.3.1) H-polinom ako i samo ako je $Q_1(x)$ H-polinom i $a_1 > 0$.

Tvrđenje, očigledno, važi za $n = 1$. Pretpostavimo da tvrđenje važi za polinome stepena $n-1$. Neka su pritom odgovarajuće determinante $D_k^{(n-1)}$, $k = 1, 2, \ldots , n-1$, za $Q_1(x)$ date sa

$$D_k^{(n-1)} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_3 & a_1a_2 - a_0a_3 & a_1 & \\ a_5 & a_1a_4 - a_0a_5 & a_3 & \\ \vdots & & & \end{vmatrix}.$$

Ako elementima druge kolone dodamo odgovarajuće elemente prve kolone, uz prethodno množenje sa a_0, zatim elementima četvrte kolone dodamo elemente treće kolone, uz prethodno množenje sa a_0, i tako dalje, dobijamo

$$D_k^{(n-1)} = a_1^p D_k^{(n)}, \qquad p = \left[\frac{k+1}{2}\right] - 1,$$

odakle zaključujemo da su uslovi

$$D_k^{(n-1)} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots , n-1, \quad a_1 > 0$$

ekvivalentni sa uslovima $D_k^{(n)} > 0$, $k = 1, 2, \ldots , n$. $\square$

U specijalnom slučaju kada se radi o polinomima trećeg i četvrtog stepena, iz teoreme 4.3.1 dobijamo sledeće rezultate:

Teorema 4.3.2. *Polinom sa realnim koeficijentima*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \qquad (a_0 > 0)$$

je H-*polinom ako i samo ako su ispunjeni uslovi*

$$D_1^{(3)} = a_1 > 0, \qquad D_2^{(3)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 > 0,$$

$$D_3^{(3)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 D_2^{(3)} > 0.$$

[76] I. Schur je u svom dokazu koristio $\xi = -1$.

Teorema 4.3.3. *Polinom sa realnim koeficijentima*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \qquad (a_0 > 0)$$

je H-*polinom ako i samo ako su ispunjeni uslovi*

$$D_1^{(4)} = a_1 > 0, \qquad D_2^{(4)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 > 0,$$

$$D_3^{(4)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2 > 0,$$

$$D_4^{(4)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_4D_3^{(4)} > 0.$$

Primer 4.3.1. 1° Koeficijenti polinoma $2 + x + x^2 + x^3$ su $a_0 = 2$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, pa su odgovarajuće determinante redom jednake:

$$D_1^{(3)} = 1 > 0, \quad D_2^{(3)} = -1 < 0, \quad D_3^{(3)} = -1 < 0.$$

Ovo znači da dati polinom nije H-polinom.

2° Za polinom $1 + x + 2x^2 + x^3$ odgovarajuće determinate su

$$D_1^{(3)} = 1 > 0, \quad D_2^{(3)} = 1 > 0, \quad D_3^{(3)} = 1 > 0,$$

odakle zaključujemo da se radi o H-polinomu. △

5. RACIONALNE FUNKCIJE

5.1. Racionalna funkcija

Neka su $P(x)$ i $Q(x)$ algebarski polinomi takvi da je $\operatorname{dg} P(x) = n$ i $\operatorname{dg} Q(x) = m$, tj.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \qquad \text{i} \qquad Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{m-k} \qquad (a_0, b_0 \neq 0).$$

Definicija 5.1.1. Funkcija $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ naziva se *racionalna funkcija* reda $[n/m]$.

Definicija 5.1.2. Ako su polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ relativno prosti, tj. nemaju zajednički faktor stepena $r \geq 1$, tada se za racionalnu funkciju $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ kaže da je *nesvodljiva racionalna funkcija*.

Definicija 5.1.3. Ako je stepen polinoma $P(x)$ manji od stepena polinoma $Q(x)$, tj. ako je $\operatorname{dg} P(x) < \operatorname{dg} Q(x)$, racionalna funkcija $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ naziva se *prava racionalna funkcija*.

U protivnom slučaju radi se o *nepravoj racionalnoj funkciji*.

Svaka neprava racionalna funkcija uvek se može prestaviti kao zbir jednog polinoma i jedne prave racionalne funkcije, što se postiže deljenjem polinoma $P(x)$ polinomom $Q(x)$.

Primer 5.1.1. Posmatrajmo racionalnu funkciju

$$R(x) = \frac{x^6 + 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 4x - 7}{x^4 + 5x^2 + 4}.$$

Deljenjem brojioca imeniocem dobijamo

$$\begin{array}{l}
(x^6 + 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 4x - 7) : (x^4 + 5x^2 + 4) = x^2 - 2 \\
\underline{x^6 + 5x^4 \qquad + 4x^2 \qquad\qquad} \\
\quad - 2x^4 + x^3 - 9x^2 + 4x - 7 \\
\quad \underline{- 2x^4 \qquad - 10x^2 \qquad - 8} \\
\qquad\qquad x^3 + x^2 + 4x + 1
\end{array}$$

tj.

$$R(x) = x^2 - 2 + \frac{x^3 + x^2 + 4x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4}. \quad \triangle$$

U našem daljem razmatranju ograničićemo se samo na realne racionalne funkcije, tj. na slučaj kada su $P(x)$ i $Q(x)$ realni polinomi. Najpre ćemo se upoznati sa tzv. prostim ili parcijalnim razlomcima, kao i sa odgovarajućim rastavljanjem ili razlaganjem nesvodljive prave racionalne funkcije.

Definicija 5.1.4. Funkcije

$$x \mapsto \frac{A}{(x-a)^k} \qquad \text{i} \qquad x \mapsto \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} \qquad (k = 1, 2, \dots),$$

gde su A, M, N, a, p, q realne konstante i $p^2 - 4q < 0$, nazivaju se *prosti* ili *parcijalni razlomci*.

5.2. Rastavljanje prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke

U mnogim primenama veoma je važno rastavljanje prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke. Sa jednom takvom primenom srešćemo se kod integracije racionalnih funkcija (videti odeljak 3.1, glava VII).

Neka je $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ nesvodljiva prava racionalna funkcija. Rastavljanje takve funkcije na parcijalne razlomke oslanja se na sledeće dve leme.

Lema 5.2.1. *Neka je a realan koren reda višestrukosti r polinoma $Q(x)$, tj. neka je*

$$Q(x) = (x-a)^r Q_1(x) \qquad (\operatorname{dg} Q_1(x) = \operatorname{dg} Q(x) - r). \tag{5.2.1}$$

Tada postoji jedinstveno rastavljanje prave racionalne funkcije u obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_r}{(x-a)^r} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{r-1}Q_1(x)}, \tag{5.2.2}$$

gde je A_r realna konstanta, a drugi član na desnoj strani jednakosti (5.2.2) *je, takođe, prava racionalna funkcija.*

Dokaz. Pretpostavimo da važi (5.2.2). Tada imamo

$$P(x) \equiv A_r Q_1(x) + (x-a)P_1(x), \tag{5.2.3}$$

odakle zaključujemo da je $A_r = P(a)/Q_1(a)$. Konstanta A_r egzistira jedinstveno jer je $Q_1(a) \neq 0$. Zamenom ove vrednosti za A_r u (5.2.3) dobijamo

$$P_1(x) = \frac{P(x) - A_r Q_1(x)}{x-a}.$$

Očigledno je

$$\operatorname{dg} P_1(x) \le \max(\operatorname{dg} P(x), \operatorname{dg} Q_1(x)) - 1 \le \operatorname{dg} Q(x) - 2.$$

Kako je stepen polinoma $(x-a)^{r-1}Q_1(x)$, koji se pojavljuje na desnoj strani u (5.2.2), jednak $\operatorname{dg} Q(x) - 1$, zaključujemo da je ovaj član, takođe, prava racionalna funkcija. $\square$

Lema 5.2.2. *Neka je x^2+px+q $(p,q\in\mathbb{R};\ p^2<4q)$ faktor višestrukosti s $(s\in\mathbb{N})$ polinoma $Q(x)$, tj. neka je*

$$Q(x)=(x^2+px+q)^sQ_1(x)\qquad(\deg Q_1(x)=\deg Q(x)-2s). \tag{5.2.4}$$

Tada postoji jedinstveno rastavljanje prave racionalne funkcije u obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{s-1}Q_1(x)}, \tag{5.2.5}$$

gde su M_s i N_s realne konstante, a drugi član na desnoj strani u (5.2.5) *je, takođe, prava racionalna funkcija.*

Dokaz. Koreni kvadratnog trinoma x^2+px+q su konjugovano-kompleksni brojevi jer je $p^2<4q$. Označimo ih sa $\alpha\pm i\beta$. Slično, kao i u dokazu prethodne leme, pretpostavimo da egzistira (5.2.5). Tada imamo

$$P(x)\equiv(M_sx+N_s)Q_1(x)+(x^2+px+q)P_1(x). \tag{5.2.6}$$

Stavljajući $x=a=\alpha+i\beta$ i $x=\bar a=\alpha-i\beta$ dobijamo

$$P(a)=(M_sa+N_s)Q_1(a),\qquad P(\bar a)=(M_s\bar a+N_s)Q_1(\bar a),$$

tj.

$$M_sa+N_s=\frac{P(a)}{Q_1(a)}=w,\quad M_s\bar a+N_s=\frac{P(\bar a)}{Q_1(\bar a)}=\overline{\left(\frac{P(a)}{Q_1(a)}\right)}=\overline{w}. \tag{5.2.7}$$

Napomenimo da su $Q_1(a)$ i $Q_1(\bar a)$ različiti od nule.

Rešavanjem sistema jednačina (5.2.7) nalazimo jedinstvena realna rešenja

$$M_s=\frac{\operatorname{Im}(w)}{\operatorname{Im}(a)}\quad\text{i}\quad N_s=\frac{\operatorname{Im}(a\overline{w})}{\operatorname{Im}(a)},$$

jer je $\operatorname{Im}(a)=\beta\neq0$.

Potrebno je još dokazati da je drugi član na desnoj strani u (5.2.5) prava racionalna funkcija. Stavljanjem nađenih vrednosti za M_s i N_s u (5.2.6) dobijamo

$$P_1(x)=\frac{P(x)-(M_sx+N_s)Q_1(x)}{x^2+px+q},$$

i tada, jednostavno kao u prethodnoj lemi, dokazujemo da je

$$\operatorname{dg} P_1(x) < \operatorname{dg} Q(x) - 2. \quad \square$$

Ako lemu 5.2.1 primenimo r puta, zaključujemo da se prava racionalna funkcija $x \mapsto R(x)$ može predstaviti u obliku

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_r}{(x-a)^r} + \frac{A_{r-1}}{(x-a)^{r-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} + R_1(x),$$

gde je $x \mapsto R_1(x)$, takođe, prava racionalna funkcija čiji je imenilac polinom $Q_1(x)$, definisan pomoću (5.2.1).

Slično, primenom leme 5.2.2 s-puta, dobijamo

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_s x + N_s}{(x^2+px+q)^s} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + R_2(x),$$

gde je $x \mapsto R_2(x)$ prava racionalna funkcija čiji je imenilac polinom $Q_1(x)$ određen pomoću (5.2.4).

Pretpostavimo sada da polinom $Q(x)$ ima realne nule $a_1, \ldots, a_m$, reda višestrukosti $r_1, \ldots, r_m$, respektivno, i parove konjugovano-kompleksnih nula $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_l \pm i\beta_l$, reda višestrukosti $s_1, \ldots, s_l$, takođe respektivno. Naravno, mora biti

$$\sum_{k=1}^{m} r_k + 2\sum_{k=1}^{l} s_k = \operatorname{dg} Q(x).$$

Parovima konjugovano-kompleksnih nula odgovaraju kvadratni faktori $x^2 + p_k x + q_k$ ($p_k = -2\alpha_k,\ q_k = \alpha_k^2 + \beta_k^2$) odgovarajuće višestrukosti s_k.

Polinom $Q(x)$ se može faktorisati u obliku

$$Q(x) = A\prod_{k=1}^{m}(x-a_k)^{r_k}\prod_{k=1}^{l}(x^2+p_k x+q_k)^{s_k}, \tag{5.2.8}$$

gde je A najstariji koeficijent polinoma $Q(x)$. Ne umanjujući opštost može se uzeti $A = 1$.

Na osnovu prethodnog izlaganja, prava racionalna funkcija se može rastaviti na parcijalne razlomke čiji oblik zavisi od oblika faktora u (5.2.8). Naime, faktoru $(x-a)^r$ odgovara oblik

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x-a)^r},$$

a faktoru $(x^2+px+q)^s$ oblik

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}.$$

Tako imamo sledeći rezultat:

Teorema 5.2.3. *Neka je* $x\mapsto R(x)=P(x)/Q(x)$ *nesvodljiva prava racionalna funkcija, pri čemu se polinom* $Q(x)$ *može faktorisati u obliku* (5.2.8). *Tada je*

$$R(x)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{r_k}\frac{A_{kn}}{(x-a_k)^n}+\sum_{k=1}^{l}\sum_{n=1}^{s_k}\frac{M_{kn}x+N_{kn}}{(x^2+p_kx+q_k)^n}, \tag{5.2.9}$$

gde se nepoznati koeficijenti A_{kn}, M_{kn}, N_{kn}, *mogu odrediti metodom neodređenih koeficijenata.*

Primer 5.2.1. Na osnovu (5.2.9), racionalna funkcija

$$R(x)=\frac{8x^3+21x-11}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}$$

može se predstaviti u obliku

$$R(x)=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)^2}. \tag{5.2.10}$$

Nepoznate koeficijente A_k, M_k, N_k $(k=1,2)$ određujemo iz identiteta

$$\begin{aligned}A_1(x-1)(x^2+x+1)^2+A_2(x^2+x+1)^2&\\+(M_1x+N_1)(x-1)^2(x^2+x+1)+(M_2x+N_2)(x-1)^2&\\\equiv 8x^3+21x-11,&\end{aligned}$$

tj. iz

$$\begin{aligned}(A_1+M_1)x^5+(A_1+A_2-M_1+N_1)x^4&\\+(A_1+2A_2-N_1+M_2)x^3+(-A_1+3A_2-M_1-2M_2+N_2)x^2&\\+(-A_1+2A_2+M_1-N_1+M_2-2N_2)x+(-A_1+A_2+N_1+N_2)&\\\equiv 8x^3+21x-11\ ,&\end{aligned}$$

Dakle, traženi koeficijenti su rešenja sistema linearnih jednačina

$$
\begin{aligned}
A_1 \quad\quad\; + M_1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad &= \ \ 0, \\
A_1 + \ A_2 - M_1 + N_1 \quad\quad\quad\quad\quad &= \ \ 0, \\
A_1 + 2A_2 \quad\quad - N_1 + \ M_2 \quad\quad &= \ \ 8, \\
-A_1 + 3A_2 - M_1 \quad\quad - 2M_2 + \ N_2 &= \ \ 0, \\
-A_1 + 2A_2 + M_1 - N_1 + \ M_2 - 2N_2 &= \ 21, \\
-A_1 + \ A_2 \quad\quad + N_1 \quad\quad\quad + \ N_2 &= -11,
\end{aligned}
$$

odakle nalazimo

$$
A_1 = 1,\ A_2 = 2,\ M_1 = -1,\ N_1 = -4,\ M_2 = -1,\ N_2 = -8.
$$

Važi, dakle, rastavljanje

$$
R(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{x+4}{x^2+x+1} - \frac{x+8}{(x^2+x+1)^2}. \quad \triangle
$$

Napomena 5.2.1. Koeficijenti A_1 i A_2 u (5.2.10) mogu se odrediti tzv. metodom ostataka.[77)]

Ako $R(x)$ pomnožimo sa $(x-1)^2$, a zatim pustimo da $x \to 1$, dobijamo

$$
A_2 = \lim_{x\to 1} (x-1)^2 R(x) = \lim_{x\to 1} \frac{8x^3 + 21x - 11}{(x^2+x+1)^2} = 2.
$$

Koeficijent A_1 dobija se, na nešto komplikovaniji način, kao

$$
A_1 = \lim_{x\to 1} \frac{d}{dx} \Big\{ (x-1)^2 R(x) \Big\} = \lim_{x\to 1} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{8x^3 + 21x - 11}{(x^2+x+1)^2} \right\},
$$

odakle je

$$
A_1 = \lim_{x\to 1} \frac{(24x^2 + 21)(x^2+x+1) - 2(2x+1)(8x^3 + 21x - 11)}{(x^2+x+1)^3} = 1\,.
$$

U opštem slučaju, metod ostataka je pogodan za određivanje koeficijenata A_{kn} u razlaganju (5.2.9), pri čemu je

$$
A_{k,r_k-i} = \frac{1}{i!} \lim_{x\to a_k} \frac{d^i}{dx^i} \big\{ (x-a_k)^{r_k} R(x) \big\} \quad (k = 1, 2, \dots, m;\ i = 0, 1, \dots, r_k - 1).
$$

---

77) Ovaj metod se proučava u *Kompleksnoj analizi*.

Primer 5.2.2. Na osnovu (5.2.9), racionalna funkcija

$$R(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

ima razlaganje

$$\begin{aligned} R(x) = & \frac{A_{11}}{x+1} \\ & + \frac{A_{21}}{x+2} + \frac{A_{22}}{(x+2)^2} \\ & + \frac{A_{31}}{x+3} + \frac{A_{32}}{(x+3)^2} + \frac{A_{33}}{(x+3)^3}. \end{aligned}$$

Primenom metoda ostataka dobijamo

$$A_{11} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{1}{8},$$

$$A_{22} = \lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+1)(x+3)^3} = -1,$$

$$A_{21} = \lim_{x\to -2} \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{(x+1)(x+3)^3}\right\} = \lim_{x\to -2} \frac{-4x-6}{(x+1)^2(x+3)^4} = 2,$$

$$A_{33} = \lim_{x\to -3} \frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = -\frac{1}{2},$$

$$A_{32} = \lim_{x\to -3} \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\right\} = \lim_{x\to -3} \frac{-3x-4}{(x+1)^2(x+2)^3} = -\frac{5}{4},$$

$$A_{31} = \frac{1}{2!}\lim_{x\to -3} \frac{d^2}{dx^2}\left\{\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\right\} = \frac{1}{2}\lim_{x\to -3} \frac{12x^2+32x+22}{(x+1)^3(x+2)^4} = -\frac{17}{8}.$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned} R(x) = & \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} \\ & - \frac{17}{8}\cdot\frac{1}{x+3} - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+3)^3}. \end{aligned}$$ △

6. ZADACI ZA VEŽBU

6.1. Rastaviti na proste činioce polinom

$$P(x) = (x+1)^{100} + (x-1)^{100}.$$

Rezultat.

$$P(x)=\prod_{k=0}^{99}\Big(x-i\cot\frac{2k+1}{100}\,\pi\Big)=\prod_{k=0}^{49}\Big(x^2+\cot^2\frac{2k+1}{100}\,\pi\Big).$$

6.2. Odrediti najveći zajednički delilac za polinome

$$\begin{aligned}P(x)&=x^5+x^4+2x^3+2x^2+2x+1,\\ Q(x)&=x^4+4x^3+6x^2+5x+2,\end{aligned}\tag{1}$$

i

$$\begin{aligned}P(x)&=x^5+x^4+3x^3+4x^2+4x+2,\\ Q(x)&=x^5+2x^4+3x^3+6x^2+6x+2.\end{aligned}\tag{2}$$

Rezultat. (1) x^2+x+1, (2) x^3+2x+2.

6.3. Ako je n neparan prirodan broj, dokazati da je izraz

$$(a+b+c)^n-a^n-b^n-c^n\tag{1}$$

deljiv izrazom

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3.$$

Uputstvo. Prethodno dokazati da je

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a),$$

što znači da zatim treba pokazati da je izraz (1) deljiv redom sa $a+b$, $b+c$ i $c+a$.

U tom smislu posmatrati polinome

$$f(x)=(x+b+c)^n-x^n-b^n-c^n \quad \text{i} \quad g(x)=(x+a+c)^n-x^n-a^n-c^n.$$

6.4. Odrediti brojeve a, b, p, q tako da je

$$x^3+15x^2+3x+5=p(x-a)^3+q(x-b)^3,$$

a zatim odrediti realan koren jednačine

$$x^3+15x^2+3x+5=0.$$

Rezultat. $x = \dfrac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}}$.

6.5. Odrediti polinom $P(z)$ šestog stepena, tako da je $P(z) + 1$ deljiv polinomom $(z-1)^3$ i da je polinom $P(z) + 2$ deljiv sa z^4.

Rezultat. $P(z) = 10z^6 - 24z^5 + 15z^4 - 2$.

6.6. Odrediti p i q tako da je $z^{2m} + pz^m + q$ $(m \in \mathbb{N})$ deljivo sa $z^2 + z + 1$.

Rezultat. Ako je m deljivo sa 3, tada je $1 + p + q = 0$, a ako m nije deljivo sa 3, tada je $p = q = 1$.

6.7. Dat je polinom

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Odrediti uslov koji treba da zadovolje koeficijenti a, b, c, d da bi postojali polinom $Q(x)$ i konstanta r tako da je

$$P(x) = Q(x)^2 + r.$$

Primenom ove mogućnosti, rešiti jednačinu

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Rezultat. Traženi uslov je: $a^3 - 4ab + 8c = 0$, a rešenja jednačine su: $1,\ -2,\ \dfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$.

6.8. Ako su $m, n \in \mathbb{N}$ i $P(x)$ proizvoljni polinom, dokazati da je polinom

$$P(x)^m + \big(1 - P(x)\big)^n - 1$$

deljiv polinomom $P(x) - P(x)^2$.

6.9. Odrediti realne parametre a i b tako da je polinom $x^4 + 3x^2 + ax + b$ deljiv polinomom $x^2 - 2ax + 2$.

Rezultat. 1° $a = 0,\ b = 2$ i 2° $a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ b = 3$.

6.10. Odrediti koeficijente a, b, c tako da izraz

$$\frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x-1} + \frac{x^3 + bx^2 + cx + a}{x-2} + \frac{x^3 + cx^2 + ax + b}{x-3}$$

bude polinom.

Rezultat. $a = 4.2, \quad b = -0.9, \quad c = -4.3.$

6.11. Odrediti polinom $P(x)$ stepena $n = 7$, ako se zna da je

$$P(1) = P(1/2) = P(1/3) = P(1/4) = 0,$$

$$P'(1) = 1, \quad P'(1/2) = P'(1/3) = P'(1/4) = 0.$$

Rezultat. $P(x) = (x-1)\Big(x - \dfrac{1}{2}\Big)^2 \Big(x - \dfrac{1}{3}\Big)^2 \Big(x - \dfrac{1}{4}\Big)^2.$

6.12. Neka je dat polinom

$$P(x) = x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 21x^2 + 20x - 5.$$

Ako su x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 nule polinoma P i ako se zna da važi jednakost $x_4x_5 = 5$, odrediti svih pet nula polinoma P.

Rezultat. $x_1 = 1, \; x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \; x_3 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \; x_4 = i\sqrt{5}, \; x_5 = -i\sqrt{5}.$

6.13. Rešiti jednačinu

$$z^4 + (1-i)z^3 + 2iz^2 + (1+i)z - 1 = 0,$$

stavljajući da je $u = z + i/z$.

Rezultat. Rešenja su: $z = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ i $z = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}(1-i).$

6.14. Odrediti λ tako da jednačina

$$z^4 + z^3 - 2z^2 + \lambda z - 3 = 0$$

ima dva suprotna korena, a zatim rešiti posmatranu jednačinu.

Rezultat. $\lambda = 1$ i $\lambda = -3$.

6.15. Neka je

$$P(z) = 3z^4 - z^3 + (2+3i)z^2 + (1+2i)z + 1 + i.$$

Dokazati da polinomi $P(z)$ i $\bar{P}(z)$ imaju dve zajedničke nule, a zatim rešiti jednačinu $P(z) = 0$.

Rezultat. Rešenja jednačine su: $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3}, \quad i, \quad 1-i.$

6.16. Neka je a realan i pozitivan broj. Proveriti tvrđenje: Sva tri korena jednačine

$$z^3 + az^2 + 4z + a = 0$$

imaju negativne realne delove.

6.17. Ako je $P(z) = az^2 + bz + c$, odrediti a, b, c, m tako da je

$$P(z) = P(mz + 1).$$

Rezultat. $m = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ i $P(z) = a(z-1)(z-m-1)$.

6.18. Ako su a, b, c koreni jednačine $z^3 + z^2 + q = 0$, odrediti zbir

$$s = \frac{a^2 + b^2}{c^2} + \frac{b^2 + c^2}{a^2} + \frac{c^2 + a^2}{b^2}\,.$$

Rezultat. $s = -\dfrac{2}{q} - 3$.

V G L A V A

Spektralna teorija operatora i matrica

1. PROBLEM SOPSTVENIH VREDNOSTI

1.1. Sopstveni vektori i sopstvene vrednosti

Neka je X konačno-dimenzionalni linearni prostor nad poljem $\mathbb{K}$ i neka je $\mathcal{A}: X \to X$ linearan operator koji vektoru $u \in X$ pridružuje vektor $v = \mathcal{A}u$ koji, takođe, pripada prostoru X. Od interesa je proučiti slučaj kada su vektori u i v kolinearni.

Definicija 1.1.1. Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ i nenula vektor $u \in X$ se nazivaju *sopstvena vrednost* i *sopstveni vektor* za operator $\mathcal{A}: X \to X$, respektivno, ako je $\mathcal{A}u = \lambda u$.

Pored termina sopstvena vrednost i sopstveni vektor koriste se i termini: *karakteristična* (*svojstvena*) *vrednost* i *karakteristični* (*svojstveni*) *vektor*. Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore za dati operator $\mathcal{A}$ znači rešiti tzv. *problem sopstvenih vrednosti* za operator $\mathcal{A}$.

Na osnovu prethodne definicije možemo zaključiti sledeće:

1° Ako je $u\,(\neq \theta)$ sopstveni vektor operatora $\mathcal{A}$ koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ, tada za svako $\alpha \neq 0$ vektor αu je, takođe, sopstveni vektor koji odgovara istoj sopstvenoj vrednosti λ.

2° Ako su u i v sopstveni vektori operatora $\mathcal{A}$ koji odgovaraju istoj sopstvenoj vrednosti λ, tada je $\alpha u + \beta v$, takođe, sopstveni vektor koji odgovara istoj sopstvenoj vrednosti λ.

3° Skup svih sopstvenih vektora koji odgovaraju istoj sopstvenoj vrednosti λ ne obrazuje linearni potprostor prostora X jer nula vektor θ ne pripada ovom skupu. Ako, međutim, proširimo ovaj skup sa nula vektorom, tada on postaje potprostor, koji se naziva *sopstveni* potprostor operatora $\mathcal{A}$ koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Ovaj potprostor označavaćemo sa U_λ.

Primer 1.1.1. Posmatrajmo skalarni operator (videti primer 2.2.1, glava III) definisan pomoću $\mathcal{A}u = \alpha u$ $(u \in X)$, gde je α fiksirani skalar iz polja $\mathbb{K}$. Ovaj linearni operator ima samo jednu sopstvenu vrednost $\lambda = \alpha$ i jedan sopstveni potprostor koji se poklapa sa X. Napomenimo da su nula-operator $\mathcal{O}$ i identički operator $\mathcal{I}$ specijalni slučajevi posmatranog operatora $\mathcal{A}$, za $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$, respektivno. $\triangle$

Primer 1.1.2. Posmatrajmo tzv. *projekcioni operator* ili *projektor* $\mathcal{P}: X \to X$, za koji važi $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$. Kako je

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}u) = \mathcal{P}^2 u = \mathcal{P}u = 1 \cdot \mathcal{P}u, \quad \mathcal{P}((\mathcal{I} - \mathcal{P})u) = (\mathcal{P} - \mathcal{P}^2)u = \theta = 0 \cdot (\mathcal{I} - \mathcal{P})u,$$

zaključujemo da projekcioni operator $\mathcal{P}$ ima bar dve različite sopstvene vrednosti $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 0$. Odgovarajuće sopstvene potprostore čine skupovi vrednosti operatora $\mathcal{P}$ i operatora $\mathcal{I} - \mathcal{P}$, tj. $T_{\mathcal{P}}$ i $T_{\mathcal{I}-\mathcal{P}}$. $\triangle$

Primer 1.1.3. Neka je u prostoru $V_O(R)$ (videti odeljak 1.1, glava II) definisan operator rotacije $\mathcal{R}$, koji vektor $\boldsymbol{r} = r(\boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\sin\alpha)$ preslikava na vektor

$$\boldsymbol{s} = \mathcal{R}\boldsymbol{r} = r\left[\boldsymbol{i}\cos\left(\alpha + \tfrac{\pi}{2}\right) + \boldsymbol{j}\sin\left(\alpha + \tfrac{\pi}{2}\right)\right] = r\left[-\boldsymbol{i}\sin\alpha + \boldsymbol{j}\cos\alpha\right].$$

Kako vektori $\boldsymbol{r}$ i $\mathcal{R}\boldsymbol{r}$ ne mogu biti kolinearni, zaključujemo da operator rotacije nema sopstvene vektore. $\triangle$

Neka je $\mathcal{A}: X \to X$ linearan operator i $a_0, a_1, \ldots, a_n$ skalari iz polja $\mathbb{K}$. Posmatrajmo linearni operator $\mathcal{B}: X \to X$, definisan pomoću tzv. operatorskog polinoma

$$\mathcal{B} = P(\mathcal{A}) = a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{A} + \cdots + a_n\mathcal{A}^n. \tag{1.1.1}$$

Kako za dva polinoma $P(\lambda), Q(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ važi $P(\lambda)Q(\lambda) = Q(\lambda)P(\lambda)$, ovo svojstvo se jednostavno prenosi i na operatorski slučaj. Dakle, imamo

$$P(\mathcal{A})Q(\mathcal{A}) = Q(\mathcal{A})P(\mathcal{A}).$$

Ova osobina biće često korišćena u daljem razmatranju.

Teorema 1.1.1. *Ako je λ sopstvena vrednost i u sopstveni vektor operatora $\mathcal{A}: X \to X$, tada je u, takođe, sopstveni vektor operatora $\mathcal{B} = P(\mathcal{A})$, koji odgovara sopstvenoj vrednosti $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$.*

Dokaz. Kako je

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}u &= \lambda u,\\
\mathcal{A}^2 u &= \mathcal{A}(\mathcal{A}u) = \mathcal{A}(\lambda u) = \lambda\mathcal{A}u = \lambda^2 u,\\
\mathcal{A}^3 u &= \mathcal{A}(\mathcal{A}^2 u) = \mathcal{A}(\lambda^2 u) = \lambda^2\mathcal{A}u = \lambda^3 u,
\end{aligned}$$

može se zaključiti da je

$$\mathcal{A}^k u = \lambda^k u,$$

tj. da je u sopstveni vektor i za iterirani operator $\mathcal{A}^k$, koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ^k. Najzad, na osnovu

$$\begin{aligned} P(\mathcal{A})u &= (a_0\mathcal{I} + a_1\mathcal{A} + \cdots + a_n\mathcal{A}^n)\, u \\ &= a_0\mathcal{I}u + a_1\mathcal{A}u + \cdots + a_n\mathcal{A}^n u \\ &= a_0 u + a_1\lambda u + \cdots + a_n\lambda^n u \\ &= (a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n)\, u, \end{aligned}$$

zaključujemo da je tvrđenje teoreme tačno. $\square$

Teorema 1.1.2. *Neka su u_1, u_2, …, u_m sopstveni vektori operatora $\mathcal{A}$, koji odgovaraju među sobom različitim sopstvenim vrednostima λ_1, λ_2, …, λ_m. Tada je $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ sistem linearno nezavisnih vektora.*

Dokaz. Tvrđenje je, očigledno, tačno za $m = 1$ jer sopstveni vektor ne može biti nula-vektor. Pretpostavimo sada da je tvrđenje tačno za bilo koji sistem od $m-1$ sopstvenih vektora, a da nije tačno za sistem U. Dakle, pretpostavimo da je U sistem linearno zavisnih vektora, što znači da postoje skalari α_1, α_2, …, α_m takvi da je

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = \theta, \tag{1.1.2}$$

a da pri tome svi skalari nisu istovremeno jednaki nuli. Na primer, neka je $\alpha_1 \neq 0$. Kako je $\mathcal{A}u_k = \lambda_k u_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, primenom operatora $\mathcal{A}$ na (1.1.2) dobijamo

$$\alpha_1\lambda_1 u_1 + \alpha_2\lambda_2 u_2 + \cdots + \alpha_m\lambda_m u_m = \theta. \tag{1.1.3}$$

S druge strane, množenjem (1.1.2) sa $-\lambda_m$ i sabiranjem sa (1.1.3), dobijamo

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)u_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_m)u_2 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)u_{m-1} = \theta. \tag{1.1.4}$$

Kako je, po pretpostavci, svaki sistem od $m-1$ sopstvenih vektora linearno nezavisan, zaključujemo da svi koeficijenti u (1.1.4) moraju biti jednaki nuli, pa i $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) = 0$. Ovo, međutim, protivureči činjenici da je $\lambda_1 \neq \lambda_m$ i pretpostavci da je $\alpha_1 \neq 0$. Dakle, sistem vektora U je linearno nezavisan. $\square$

Sledeći rezultat je neposredna posledica prethodne teoreme:

Teorema 1.1.3. *Neka je X n-dimenzionalni linearni prostor. Linearni operator $\mathcal{A}\colon X \to X$ ne može imati više od n među sobom različitih sopstvenih vrednosti.*

Definicija 1.1.2. Za linearni operator $\mathcal{A}$, koji deluje u n-dimenzionalnom linearnom prostoru X i ima n linearno nezavisnih sopstvenih vektora, kažemo da je *operator proste strukture*.

Neka su $u_1, u_2, \dots, u_n$ linearno nezavisni sopstveni vektori operatora proste strukture $\mathcal{A}\colon X \to X$, koji odgovaraju sopstvenim vrednostima λ_1, λ_2, ..., λ_n. Na osnovu prethodnog, takav sistem vektora $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ može se uzeti za bazu n-dimenzionalnog prostora X. Kako je

$$\mathcal{A}u_j = \lambda_j u_j \qquad (j = 1, 2, \dots, n),$$

zaključujemo da matrica operatora proste strukture u ovoj bazi ima dijagonalni oblik (videti odeljak 2.3, glava III)

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{1.1.5}$$

Važi i obrnuto, tj. ako je matrica operatora $\mathcal{A}$ u nekoj bazi $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dijagonalna, tada je taj operator proste strukture, pri čemu su bazisni vektori $u_1, u_2, \dots, u_n$, u stvari, njegovi sopstveni vektori, a dijagonalni elementi matrice su sopstvene vrednosti tog operatora. Napomenimo da pritom sve sopstvene vrednosti ne moraju biti među sobom različite.

Prema tome, za operatore proste strukture problem konstrukcije baze u kojoj matrica operatora ima najprostiji mogući oblik je veoma jednostavan. Baza se, dakle, sastoji od sopstvenih vektora, a matrica operatora je dijagonalna sa sopstvenim vrednostima na glavnoj dijagonali. Drugim rečima, matrica operatora proste strukture uvek je slična nekoj dijagonalnoj matrici (za sličnost matrica videti definiciju 5.2.3, glava III). Međutim, klasa operatora proste strukture ne iscrpljuje skup svih linearnih operatora $L(X, X)$. Naš glavni cilj u ovom poglavlju biće konstrukcija baze u kojoj matrica proizvoljnog linearnog operatora na konačno dimenzionalnom prostoru ima najprostiji mogući oblik, tzv. *Jordanov*[78] *kanonički oblik*.

[78] Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922), francuski matematičar.

1.2. Karakteristični polinom

Kao što smo videli u prethodnom odeljku, može se desiti slučaj da jedan linearni operator nema sopstvene vektore. Ovaj odeljak posvećujemo problemu egzistencije sopstvenih vektora putem karakterizacije ovog problema pomoću algebarske jednačine.

Neka je X n-dimenzionalan linearni prostor i $\mathcal{A}: X \to X$ linearan operator. U prostoru X izaberimo proizvoljnu bazu $B_e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Tada jednačini

$$\mathcal{A}u = \lambda u, \tag{1.2.1}$$

koja definiše problem sopstvenih vrednosti za operator $\mathcal{A}$, možemo pridružiti odgovarajuću matričnu jednačinu

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \tag{1.2.2}$$

gde je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrica operatora $\mathcal{A}$ u bazi B_e i $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$ koordinatna reprezentacija vektora

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

Matrični analogon problema (1.2.1) je, dakle, definisan homogenim sistemom linearnih jednačina (1.2.2), tj.

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}, \tag{1.2.3}$$

čija nas netrivijalna rešenja $\boldsymbol{x}$ interesuju. Takva rešenja predstavljaju koordinatne reprezentacije sopstvenih vektora operatora $\mathcal{A}$ u bazi B. Takođe, za njih kažemo da su *sopstveni vektori matrice* A. Odgovarajuće vrednosti λ za koje postoje ova netrivijalna rešenja predstavljaju odgovarajuće *sopstvene vrednosti matrice* A, tj. operatora $\mathcal{A}$.

Kao što je poznato (videti odeljak 4.6, glava III) sistem jednačina (1.2.3) ima netrivijalna rešenja ako je njegova determinanta jednaka nuli. Dakle, imamo

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1.2.4}$$

Napomena 1.2.1. Uslov (1.2.4) je ekvivalentan uslovu da je operator $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}$ singularan (videti definiciju 2.2.10, glava III).

Razvijanjem determinante u (1.2.4) dobijamo polinom stepena n po λ, čiji je vodeći koeficijent $(-1)^n$. Koeficijenti tog polinoma ne zavise od λ i određeni su pomoću elemenata matrice A. Napomenimo ovde da ti koeficijenti ne zavise od izbora baze u X, već samo od osobina operatora $\mathcal{A}$. Zaista, uzimajući drugi bazis $B_{e'} = \{e'_1, e'_2, \dots , e'_n\}$ različit od B, odgovarajuća matrica operatora postaje A', koja je slična sa matricom A (videti definiciju 4.2.3, glava III). Dakle, $A' = P^{-1}AP$, gde je P matrica transformacije sličnosti. Kako je $\det(P^{-1}) = 1/\det(P)$ imamo redom

$$\begin{aligned}\det(A'-\lambda I) &= \det\big(P^{-1}AP-\lambda P^{-1}IP\big)\\ &= \det\big(P^{-1}(A-\lambda I)P\big)\\ &= \det\big(P^{-1}\big)\det(A-\lambda I)\det(P)\\ &= \det(A-\lambda I).\end{aligned}$$

Prema tome, polinom $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I)$ ne zavisi od izabrane baze u prostoru X već samo od karakteristika operatora $\mathcal{A}$.

Definicija 1.2.1. Za $\lambda \mapsto P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ kažemo da je *karakteristični polinom* operatora $\mathcal{A}$ (ili matrice A). Za moničan polinom

$$H(\lambda) = (-1)^n P(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^n p_n \tag{1.2.5}$$

kažemo da je *normalizovani karakteristični polinom* operatora $\mathcal{A}$ (ili matrice A).

Na osnovu prethodnog, slične matrice imaju isti karakteristični polinom.

Napomena 1.2.2. Za određivanje koeficijenata p_k $(k = 1, 2, \dots , n)$ karakterističnog polinoma (1.2.5) postoji veći broj numeričkih metoda, o kojima se može naći u knjizi: G. V. Milovanović, *Numerička analiza, I deo* (treće izdanje), Naučna knjiga, Beograd, 1991.

Jedan od metoda za određivanje koeficijenata karakterističnog polinoma zasniva se na transformaciji matrice A na tzv. *Frobeniusov*[79] *oblik*

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.2.6}$$

[79] Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917), nemački matematičar.

pri čemu su matrice A i F slične. S obzirom da slične matrice imaju identične karakteristične polinome, jednostavno se, na osnovu (1.2.6), dobija karakteristični polinom matrice A. Naime, ako $\det(F-\lambda I)$ razvijemo po elementima prve kolone dobijamo

$$P(\lambda) = (f_1 - \lambda)(-\lambda)^{n-1} - f_2(-\lambda)^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} f_n,$$

tj.

$$P(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n - f_1\lambda^{n-1} - f_2\lambda^{n-2} - \cdots - f_n\right).$$

Dakle, svakom operatoru $\mathcal{A}$ odgovara jedinstven karakteristični polinom čiji su koeficijenti dati sa

$$p_k = (-1)^{k-1} f_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Obrnuto, svaki polinom oblika (1.2.5) predstavlja karakteristični polinom nekog linearnog operatora, čija matrica u nekoj bazi ima oblik (1.2.6), gde su $f_k = (-1)^{k-1} p_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Na osnovu prethodnog možemo zaključiti da potreban i dovoljan uslov da $\lambda \in \mathbb{K}$ bude sopstvena vrednost operatora $\mathcal{A}$ je da takvo λ bude rešenje tzv. *karakteristične jednačine*

$$\text{(1.2.7)} \qquad \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^n p_n = 0,$$

tj. bude nula karakterističnog polinoma. Napomenimo da, u opštem slučaju, algebarska jednačina (1.2.7), sa koeficijentima iz polja $\mathbb{K}$, ne mora uvek imati rešenje u polju $\mathbb{K}$, što pokazuje sledeći primer.

Primer 1.2.1. Za operator rotacije $\mathcal{R}$ koji deluje u realnom prostoru $V_O(R)$ (videti primer 1.1.3), u bazi $B = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ imamo

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad H(\lambda) = P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Karakteristična jednačina $\lambda^2 + 1 = 0$ nema korene na polju realnih brojeva, što je u skladu sa ranijim zaključkom u primeru 1.1.3. $\triangle$

Primer 1.2.2. Neka operator $\mathcal{A}$ deluje u dvodimenzionalnom prostoru nad poljem $\mathbb{R}$ i neka je njegova matrica u nekoj bazi data sa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu karakteristične jednačine

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

dobijamo sopstvene vrednosti operatora: $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 3$.

Da bismo odredili sopstvene vektore koji odgovaraju ovim sopstvenim vrednostima, posmatraćemo odgovarajuće homogene sisteme jednačina (1.2.3), tj.

$$(1.2.8) \qquad (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0, \quad 2x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0.$$

Za $\lambda = \lambda_1 = -1$, (1.2.8) se svodi na jednu jednačinu $2x_1 + 2x_2 = 0$, odakle sleduje $x_2 = -x_1$. Uzimajući $x_1 = 1$ nalazimo $x_2 = -1$, pa je odgovarajući sopstveni vektor

$$\boldsymbol{x}_1 = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

gde je C_1 proizvoljna realna konstanta različita od nule.

Za $\lambda = \lambda_2 = 3$, (1.2.8) se, takođe, svodi na jednu jednačinu $-2x_1 + 2x_2 = 0$, tj. na $x_1 = x_2$. Dakle, možemo uzeti da je $x_1 = x_2 = 1$. Odgovarajući sopstveni vektor je

$$\boldsymbol{x}_2 = C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

gde je C_2 proizvoljna realna konstanta različita od nule. $\triangle$

Samo u algebarski zatvorenom polju $\mathbb{K}$ (videti definiciju 1.5.1) svaki polinom sa koeficijentima iz $\mathbb{K}$ ima bar jednu nulu u ovom polju, što znači da svaki linearni operator $\mathcal{A}$ koji deluje u linearnom prostoru X nad algebarski zatvorenim poljem $\mathbb{K}$ ima bar jedan sopstveni vektor. Kao što je poznato, takvo polje je, na primer, polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. U daljem tekstu razmatraćemo linearne operatore koji deluju u kompleksnom linearnom prostoru ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). U tom slučaju, karakteristični polinom ima faktorizaciju

$$(1.2.9) \qquad P(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r},$$

gde su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ među sobom različite sopstvene vrednosti, čija je višestrukost redom $n_1, n_2, \ldots, n_r$ i pri čemu je $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.

Na kraju ovog odeljka daćemo neke dodatne napomene u vezi operatora proste strukture.

Neka je $\mathcal{A}$ linearni operator proste strukture koji deluje u n-dimenzionalnom kompleksnom linearnom prostoru X. Saglasno definiciji 1.1.2, operator $\mathcal{A}$ ima n linearno nezavisnih sopstvenih vektora $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Neka su $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_n$ njihove koordinatne reprezentacije u nekoj bazi $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, tj.

$$u_k = x_{1k}e_1 + x_{2k}e_2 + \cdots + x_{nk}e_n, \quad \boldsymbol{x}_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ako je A matrica operatora $\mathcal{A}$ u bazi B, tada se na osnovu onoga što je rečeno na kraju prethodnog odeljka i teoreme 4.2.1 (glava III) može zaključiti da se, pri prelasku sa baze B na bazu sastavljenu od sopstvenih vektora $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, matrica A transformiše na dijagonalni oblik (1.1.5), pri čemu je transformaciona matrica P data pomoću

$$P = [\,\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{x}_n\,] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kako je

$$P^{-1}P = P^{-1}\,[\,\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{x}_n\,] = [\,P^{-1}\boldsymbol{x}_1 \quad P^{-1}\boldsymbol{x}_2 \quad \ldots \quad P^{-1}\boldsymbol{x}_n\,] = I,$$

dijagonalizacija matrice A može se, u ovom slučaju, realizovati pomoću

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}\,[\,A\boldsymbol{x}_1 \quad A\boldsymbol{x}_2 \quad \ldots \quad A\boldsymbol{x}_n\,] \\ &= P^{-1}\,[\,\lambda_1\boldsymbol{x}_1 \quad \lambda_2\boldsymbol{x}_2 \quad \ldots \quad \lambda_n\boldsymbol{x}_n\,], \end{aligned}$$

tj.

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

gde su $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ sopstvene vrednosti operatora proste strukture. Kao što je ranije napomenuto sve sopstvene vrednosti ne moraju biti međusobom različite.

Primer 1.2.3. Operator $\mathcal{A}$ iz primera 1.2.2 je proste strukture jer ima dva linearno nezavisna sopstvena vektora. Uzimajući za bazu sopstvene vektore (na primer, sa $C_1 = C_2 = 1$) dobijamo dijagonalnu matricu operatora

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Transformaciona matrica P, sastavljena na osnovu koordinatnih reprezentacija sopstvenih vektora, je

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada imamo

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = D. \quad \triangle$$

Primer 1.2.4. Neka je data matrica operatora sa

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za odgovarajući karakteristični polinom dobijamo

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda),$$

odakle zaključujemo da su sopstvene vrednosti operatora (tj. matrice A) date sa: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Kao i u primeru 1.2.2 određujemo sada sopstvene vektore iz sledećeg homogenog sistema jednačina

$$\begin{aligned} (3-\lambda)x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ -2x_1 + (4-\lambda)x_2 - 2x_3 &= 0, \\ -2x_1 + 2x_2 - \lambda x_3 &= 0, \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

uzimajući za λ dobijene sopstvene vrednosti.

Tako za dvostruku sopstvenu vrednost $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 2$, sve tri jednačine iz prethodnog sistema svode se na istu jednačinu

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0,$$

odakle zaključujemo da imamo dve slobodne promenljive, na primer x_1 i x_2, a da je promenljiva x_3 tada određena sa $x_3 = x_2 - x_1$. Prema tome, ako uzmemo recimo $x_1 = x_2 = 1$, dobijamo $x_3 = 0$. Slično, za $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, dobijamo $x_3 = 1$. Na ovaj način nalazimo dva linearno nezavisna sopstvena vektora, čije su koordinatne reprezentacije redom

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Za $\lambda = \lambda_3 = 3$, sistem (1.2.10) se svodi na dve jednačine

$$-x_2 + x_3 = 0, \qquad -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0,$$

odakle, uzimajući da je x_1 slobodna promenljiva, dobijamo

$$x_2 = x_3 = -2x_1.$$

Tako, ako stavimo $x_1 = -1$, imamo $x_2 = x_3 = 2$. Prema tome, sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda_3 = 3$ ima reprezentaciju

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

S obzirom da imamo tri linearno nezavisna sopstvena vektora, operator koji razmatramo je proste strukture, što znači da se njegova matrica može svesti na dijagonalni oblik. Saglasno prethodnom, transformaciona matrica P i njena inverzna matrica su redom

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

pa je

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad \triangle \tag{1.2.11}$$

Bez dokaza navodimo sledeći rezultat:

Teorema 1.2.1. *Potrebni i dovoljni uslovi da operator $\mathcal{A}\colon X \to X$ bude proste strukture su da svakoj sopstvenoj vrednosti odgovara onoliko linearno nezavisnih sopstvenih vektora kolika je njena višestrukost.*

Napomena 1.2.3. U primeru 1.2.4 dvostrukoj sopstvenoj vrednosti odgovaraju dva linearno nezavisna sopstvena vektora.

Napomena 1.2.4. Kod matrica operatora proste strukture veoma je jednostavno određivanje stepena matrice A^k $(k \in \mathbb{N})$, s obzirom na jednakost

$$\bigl(P^{-1}AP\bigr)^k = \underbrace{\bigl(P^{-1}AP\bigr)\bigl(P^{-1}AP\bigr)\ldots\bigl(P^{-1}AP\bigr)}_{k \text{ puta}} = P^{-1}A^kP = D^k,$$

odakle sleduje

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1},$$

gde su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti operatora proste strukture i P transformaciona matrica.

Primer 1.2.5. Na osnovu (1.2.11) imamo da je

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 3^k & 2^k - 3^k & 3^k - 2^k \\ 2(2^k - 3^k) & 2 \cdot 3^k - 2^k & 2(2^k - 3^k) \\ 2(2^k - 3^k) & 2(3^k - 2^k) & 3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k \end{bmatrix},$$

za svako $k \in \mathbb{N}$. $\triangle$

1.3. Cayley-Hamiltonova teorema

Teorema 1.3.1. *Neka je $P(\lambda)$ karakteristični polinom linearnog operatora $\mathcal{A}\colon X \to X$. Tada je $P(\mathcal{A})$ nula-operator.*

Drugim rečima, ako je A matrica operatora $\mathcal{A}\colon X \to X$, tada je $P(A) = O$, tj. matrica A zadovoljava svoj karakteristični polinom. Ovaj rezultat je poznat kao *Cayley-Hamiltonova*[80] *teorema.*

Dokaz teoreme 1.3.1. Neka je

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \left[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^n p_n\right]$$

karakteristični polinom operatora $\mathcal{A}$, tj. matrice A.

Primetimo najpre da se svi elementi matrice $B = \operatorname{adj}(A - \lambda I) = [b_{ij}]_{n\times n}$ mogu predstaviti u obliku polinoma ne višeg stepena od $n-1$, tj. kao

$$b_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{ij}^{(k)}\lambda^k \qquad (i,j = 1,\ldots,n), \tag{1.3.1}$$

gde koeficijenti $b_{ij}^{(k)}$ ne zavise od λ. Zaista, elementi b_{ij} se mogu predstaviti u obliku (1.3.1) jer kao kofaktori elemenata matrice $A - \lambda I$ predstavljaju determinante reda $n-1$.

[80] William Rowan Hamilton (1805–1865), irski matematičar i astronom.

Sada se matrica B može predstaviti u obliku

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \lambda^k = B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}, \tag{1.3.2}$$

gde je $B_k = \big[b_{ij}^{(k)}\big]_{n\times n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Kako je, na osnovu teoreme 2.11.1 (glava III),

$$F = (A - \lambda I)B = \det(A - \lambda I)I = P(\lambda)I,$$

korišćenjem karakterističnog polinoma imamo

$$F = (-1)^n \left[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^n p_n\right] I,$$

tj.

$$F = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k p_{n-k}\lambda^k I \qquad (p_0 = 1).$$

S druge strane, na osnovu (1.3.2) zaključujemo da je

$$F = (A - \lambda I)B = AB_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(AB_k - B_{k-1}\right)\lambda^k - B_{n-1}\lambda^n.$$

Upoređivanjem dobijenih izraza za F nalazimo:

$$\begin{aligned} AB_0 &= p_n I, \\ AB_k - B_{k-1} &= (-1)^k p_{n-k} I \qquad (1 \le k \le n-1), \\ -B_{n-1} &= (-1)^n p_0 I = (-1)^n I, \end{aligned}$$

čijim množenjem redom sa I, A^k $(1 \le k \le n-1)$, A^n, a zatim sabiranjem tako dobijenih jednakosti, dobijamo

$$p_n I - p_{n-1}A + p_{n-2}A^2 - \cdots + (-1)^{n-1}p_1 A^{n-1} + (-1)^n A^n = O, \tag{1.3.3}$$

tj. $P(A) = O$. $\square$

Na osnovu (1.3.3) stepeni matrice A^k za $k \ge n$ mogu se izraziti kao linearne kombinacije matrica I, A, $\ldots$, A^{n-1}. Tako imamo

$$A^n = (-1)^{n-1}\big[p_n I - p_{n-1}A + p_{n-2}A^2 - \cdots + (-1)^{n-1}p_1 A^{n-1}\big]. \tag{1.3.4}$$

Množenjem sa A dobijamo

$$A^{n+1} = (-1)^{n-1}\big[p_n A - p_{n-1}A^2 + p_{n-2}A^3 - \cdots + (-1)^{n-1}p_1 A^n\big],$$

odakle, korišćenjem (1.3.4), nalazimo

$$\begin{aligned} A^{n+1} = (-1)^{n-1}\big[p_1 p_n I - (p_1 p_{n-1} - p_n)A + (p_1 p_{n-2} - p_{n-1})A^2 - \cdots \\ + (-1)^{n-1}(p_1^2 - p_2)A^{n-1}\big]. \end{aligned}$$

Ponavljanjem ovog postupka moguće je dobiti matrice A^{n+2}, A^{n+3}, itd.

Ako je matrica A regularna, tada, množenjem (1.3.3) sa A^{-1}, dobijamo

$$A^{-1} = \frac{1}{p_n}\left[p_{n-1}I - p_{n-2}A + \cdots + (-1)^{n-2}p_1 A^{n-2} + (-1)^{n-1}A^{n-1}\right],$$

gde je $p_n = \det A = P(0)$.

1.4. Minimalni polinom

Neka je $f(\lambda)$ proizvoljan algebarski polinom i A matrica operatora $\mathcal{A}$ koji deluje u n-dimenzionalnom linearnom prostoru X. Jasno je da postoji beskonačno mnogo polinoma za koje je $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, tj. $f(A) = O$. Jedan takav polinom je, na primer, karakteristični polinom $P(\lambda)$, razmatran u prethodnim odeljcima. Može se postaviti pitanje određivanja polinoma najnižeg mogućeg stepena sa ovakvom osobinom.

Definicija 1.4.1. Monični polinom $M(\lambda)$ najnižeg mogućeg stepena za koji je $M(\mathcal{A})$ nula-operator naziva se *minimalni polinom* operatora $\mathcal{A}$.

Koristi se i termin *minimalni polinom matrice* A jer je $M(A) = O$.

Teorema 1.4.1. *Za svaki operator* $\mathcal{A}\colon X \to X$ *postoji jedinstven minimalni polinom i on je delilac svakog polinoma* $f(\lambda)$ *za koji je* $f(\mathcal{A})$ *nula-operator.*

Dokaz. Neka je $H(\lambda)$ normalizovani karakteristični polinom operatora $\mathcal{A}$. Postojanje bar jednog minimalnog polinoma obezbeđeno je činjenicom da je $H(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$.

Da bismo dokazali jedinstvenost minimalnog polinoma pretpostavimo da postoje dva različita minimalna polinoma $M(\lambda)$ i $\widetilde{M}(\lambda)$ za operator $\mathcal{A}$ ($\operatorname{dg} M(\lambda) = \operatorname{dg} \widetilde{M}(\lambda) = m$). Tada je $r(\lambda) = M(\lambda) - \widetilde{M}(\lambda)$ polinom nižeg stepena od m i za njega važi $r(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Ovo protivureči činjenici da su $M(\lambda)$ i $\widetilde{M}(\lambda)$ minimalni polinomi za operator $\mathcal{A}$.

Za dokaz deljivosti $M(\lambda)|f(\lambda)$ pođimo od jednakosti

$$f(\lambda) = M(\lambda)p(\lambda) + q(\lambda),$$

gde su $p(\lambda)$ i $q(\lambda)$ polinomi nižeg stepena od stepena polinoma $M(\lambda)$. Kako je

$$q(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}) - M(\mathcal{A})p(\mathcal{A}) = \mathcal{O},$$

zaključujemo da mora biti $q(\lambda) \equiv 0$, tj. $M(\lambda)|f(\lambda)$. Naime, u protivnom slučaju, tj. kada $q(\lambda)$ nije nula-polinom, polinom $m(\lambda)$ ne bi bio minimalan, što je, inače, pretpostavka od koje smo pošli. $\square$

Kao posledica prethodne teoreme je sledeći rezultat:

Teorema 1.4.2. *Minimalni polinom operatora $\mathcal{A}$ je delilac njegovog karakterističnog polinoma.*

Ova teorema ima i praktični značaj kod nalaženja minimalnog polinoma. Naime, minimalni polinom treba tražiti samo među polinomima koji su delioci karakterističnog polinoma.

Primer 1.4.1. Za matricu iz primera 1.2.4 normalizovani karakteristični polinom je $H(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$. Delioci polinoma $H(\lambda)$ su:

$$\lambda - 2, \quad \lambda - 3, \quad (\lambda - 2)(\lambda - 3), \quad (\lambda - 2)^2, \quad H(\lambda).$$

Kako je

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix},$$

i $(A - 2I)(A - 3I) = O$, zaključujemo da je minimalni polinom $m(\lambda)$ određen sa

$$M(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Zbog jedinstvenosti minimalnog polinoma nije bilo potrebno nalaženje matrice $(A - 2I)^2$ jer smo već našli polinom drugog stepena koji se anulira za A. $\triangle$

Napomena 1.4.1. Ovaj postupak traženja minimalnog polinoma može se dodatno uprostiti. U narednom odeljku pokazaćemo da minimalni i karakteristični polinom moraju imati iste skupove nula, što znači da se oni mogu razlikovati samo u redu višestrukosti ovih nula. Znajući tu činjenicu, u prethodnom primeru, za minimalni polinom bili bi kandidati samo polinom $(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ i karakteristični polinom $H(\lambda)$.

2. STRUKTURA LINEARNOG OPERATORA

2.1. Invarijantni potprostori

Neka je X kompleksan linearni prostor i $\mathcal{A}: X \to X$ linearni operator koji, na osnovu pretpostavke da je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ima bar jedan sopstveni vektor.

Definicija 2.1.1. Za potprostor U linearnog prostora X kažemo da je *invarijantan* u odnosu na operator $\mathcal{A}: X \to X$, ili da je $\mathcal{A}$-*invarijantan*, ako za svako $u \in U$ sleduje da i $\mathcal{A}u \in U$.

Dakle, invarijantni potprostori se karakterišu u odnosu na linearni operator $\mathcal{A}: X \to X$. Napomenimo da svaki linearni operator ima uvek dva trivijalna invarijantna potprostora: $\{\theta\}$ i X, koji nisu od interesa. U kompleksnom linearnom prostoru, kakav mi razmatramo, uvek postoji i bar jedan netrivijalan invarijantni potprostor, tzv. sopstveni potprostor, o čemu je bilo reči u odeljku 1.1.

Primer 2.1.1. Neka je λ sopstvena vrednost operatora $\mathcal{A}: X \to X$ i neka je U_λ sopstveni potprostor operatora $\mathcal{A}$ koji odgovara ovoj sopstvenoj vrednosti. Kako za svako $u \in U_\lambda$ imamo $\mathcal{A}u = \lambda u \in U_\lambda$, zaključujemo da je potprostor U_λ invarijantan u odnosu na operator $\mathcal{A}$. $\triangle$

Primer 2.1.2. Za polinom $f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ i linearni oprator $\mathcal{A}: X \to X$ uočimo operatorski polinom $f(\mathcal{A})$. Neka je U jezgro operatora $\mathcal{B} = P(\mathcal{A})$ (videti definiciju 2.2.6, glava III), tj.

$$U = N_{\mathcal{B}} = \ker f(\mathcal{A}) = \{u \in X \mid f(\mathcal{A})u = \theta\}.$$

Dokazaćemo da je U jedan $\mathcal{A}$-invarijantni potprostor.

Pretpostavimo da $u \in U$, tj. da je $f(\mathcal{A})u = \theta$. Kako je $\mathcal{A}f(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A})A$, imamo

$$(\forall u \in U) \qquad f(\mathcal{A})(\mathcal{A}u) = f(\mathcal{A})\mathcal{A}u = \mathcal{A}\big(f(\mathcal{A})u\big) = \mathcal{A}\theta = \theta.$$

Dakle, zaključujemo da $\mathcal{A}u$ pripada, takođe, jezgru operatora $\mathcal{B} = f(\mathcal{A})$.

Takođe se može dokazati da je i oblast vrednosti operatora $f(\mathcal{A})$, u oznaci T_f, invarijantni potprostor u odnosu na operator $\mathcal{A}$. Zaista, ako $u \in T_f$, tada je $u = f(\mathcal{A})v$ za neko $v \in X$. Zato je sada

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}f(\mathcal{A})v = f(\mathcal{A})(\mathcal{A}v) \in T_f. \quad \triangle$$

U spektralnoj teoriji operatora veoma je značajno razlaganje prostora X na direktnu sumu invarijantnih potprostora. Tada je, pogodnom konstrukcijom bazisa u ovim potprostorima, moguće dobiti najprostiji oblik za matricu operatora, tj. Jordanov kanonički oblik.

Neka je U netrivijalni invarijantni potprostor prostora X u odnosu na operator $\mathcal{A}: X \to X$, gde su $\dim X = n$ i $\dim U = m$, i neka je V neki njemu komplementaran potprostor tako da je $X = U \dot{+} V$. Naglasimo da komplementarni potprostor može da se konstruiše na različite načine, kao i to da se može desiti da među takvim komplementarnim potprostorima ne postoji nijedan invarijantni potprostor. Naravno, ako bi i V bio invariajantni potprostor tada dobijamo razlaganje prostora na direktnu sumu invarijantnih potprostora. Ovakvo razlaganje je veoma važno jer značajno uprošćava analizu dejstva operatora u prostoru X, koje se može nezavisno tretirati na svakom od invarijantnih potprostora. Umesto operatora $\mathcal{A}$ može se uzeti njegova restrikcija na svaki od potprostora. Važna činjenica sa početka ovog odeljka važi sada za svaki od invarijantnih potprostora. Dakle, svaki od ovih potprostora ima bar jedan sopstveni vektor.

Izaberimo sada u X bazu $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tako da prvih m vektora $e_1, e_2, \dots, e_m$ pripada invarijantnom potprostoru U, tj. da je $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ baza u U. Kako i slike ovih vektora, takođe, pripadaju potprostoru U, to ih je moguće razložiti po bazi u U na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}e_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{m1}e_m,\\
\mathcal{A}e_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{m2}e_m,\\
&\vdots\\
\mathcal{A}e_m &= a_{1m}e_1 + a_{2m}e_2 + \cdots + a_{mm}e_m,
\end{aligned}
$$

odakle zaključujemo (videti odeljak 2.3, glava III) da matrica operatora $\mathcal{A}$ u bazi B ima oblik

$$
\left[\begin{array}{cccc|ccc}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & & a_{2m} & a_{2,m+1} & & a_{2n}\\
\vdots & & & & \vdots & & \\
a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm} & a_{m,m+1} & & a_{mn}\\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n}\\
\vdots & & & & \vdots & & \\
0 & 0 & & 0 & a_{n,m+1} & & a_{nn}
\end{array}\right],
$$

što se jednostavnije može izraziti blok matricom

$$
\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}\\ O & A_{22}\end{bmatrix}, \tag{2.1.1}
$$

gde su A_{11} i A_{22} kvadratne matrice reda m i $n-m$, respektivno, A_{12} matrica tipa $m \times (n-m)$ i O nula matrica tipa $(n-m) \times m$.

Pretpostavimo sada da je i V invarijantni potprostor. Izborom baze B, tako što prvih m vektora pripada potprostoru U, a preostalih $n-m$ vektora potprostoru V, zaključujemo da se vektori $\mathcal{A}e_{m+1}, \ldots, \mathcal{A}e_n$ razlažu samo po vektorima $e_{m+1}, \ldots, e_n$, što znači da blok A_{12} u (2.1.1) postaje nula-matrica. Dakle, u ovom slučaju, matrica operatora dobija tzv. kvazidijagonalni oblik (videti definiciju 2.12.3, glava III)

$$A_{ee} = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} = A_{11} \dot{+} A_{22}. \tag{2.1.2}$$

Izložićemo sada jedan način za razlaganje (dekompoziciju) prostora na direktnu sumu invarijantnih potprostora korišćenjem faktorizacije polinoma sa dva faktora čiji je najveći zajednički delilac jednak jedinici.

Teorema 2.1.1. *Neka je $\mathcal{A}: X \to X$ linearni operator i $f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ polinom za koji je $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ i koji se može razložiti na proizvod dva polinoma $f_1(\lambda)$ i $f_2(\lambda)$, čiji su stepeni ne niži od jedinice, a njihov najveći zajednički delilac jednak jedinici. Ako su $N_{f_1} = \ker f_1(\mathcal{A})$ i $N_{f_2} = \ker f_2(\mathcal{A})$, tada važi razlaganje $X = N_{f_1} \dot{+} N_{f_2}$.*

Dokaz. Dakle, neka je $f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda)$, $\operatorname{dg} f_1(\lambda), \operatorname{dg} f_2(\lambda) \geq 1$, i neka je $\operatorname{NZD}\big(f_1(\lambda), f_2(\lambda)\big) = 1$.

Na osnovu teoreme 1.3.2 postoje polinomi $U(\lambda)$ i $V(\lambda)$ takvi da se najveći zajednički delilac može predstaviti u obliku $1 = U(\lambda)f_1(\lambda)+V(\lambda)f_2(\lambda)$. Ovo daje

$$\mathcal{I} = U(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A}) + V(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A}),$$

tj.

$$u = U(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})u + V(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A})u \qquad (u \in X). \tag{2.1.3}$$

Kako je

$$f_2(\mathcal{A})\big(U(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})u\big) = U(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A})u = U(\mathcal{A})f(\mathcal{A})u = \theta,$$

zaključujemo da prvi član na desnoj strani u (2.1.3) pripada invarijantnom potprostoru N_{f_2} (videti primer 2.1.3). Slično pokazujemo da drugi član pripada jezgru N_{f_1}. Dakle, prostor X je suma invarijantnih potprostora N_{f_1} i N_{f_2}.

Da bismo dokazali da je ova suma direktna, potrebno je dokazati da je za svako $u \in X$ reprezentacija

$$u = u_1 + u_2 \qquad (u_1 \in N_{f_1},\ u_2 \in N_{f_2}) \tag{2.1.4}$$

jedinstvena. Zaista, primenom operatora $U(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})$ na (2.1.4) dobijamo

$$U(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})u = U(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})u_2 \tag{2.1.5}$$

jer je $f_1(\mathcal{A})u_1 = \theta$. Uzimajući sada u_2, umesto u, jednakost (2.1.3) se svodi na

$$u_2 = U(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})u_2 \tag{2.1.6}$$

jer je $f_2(\mathcal{A})u_2 = \theta$. Kombinovanjem (2.1.5) i (2.1.6) vidimo da je u_2 jednoznačno određeno pomoću

$$u_2 = U(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})u.$$

Slično, $u_1 = U(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A})u$. $\square$

Prethodni rezultat se može proširiti na slučaj kada se polinom $f(\lambda)$ može izraziti kao proizvod više faktora. Daćemo formulaciju takvog rezultata za slučaj kompleksnog polja $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Teorema 2.1.2. *Neka je X linearni prostor nad poljem $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}\colon X \to X$ linearni operator, $f(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ polinom takav da je $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ sa faktorizacijom*

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r},$$

gde su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ među sobom različite nule. Ako sa N_i označimo jezgro operatora $(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{I})^{k_i}$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, tada je X direktna suma potprostora N_1, N_2, $\dots$, N_r.

Od posebnog interesa je slučaj kada je $f(\lambda)$, u prethodnoj teoremi, minimalni polinom operatora $\mathcal{A}$, tj.

$$f(\lambda) = M(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}. \tag{2.1.7}$$

Tada razlaganje prostora dato sa

$$X = N_1 \dotplus N_2 \dotplus \cdots \dotplus N_r,$$

gde su jezgra $N_i = \ker(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{I})^{m_i}$ invarijantni potprostori za koje se koristi naziv *korenski potprostori*. Za vektore ovih potprostora kažemo da su *korenski vektori*.

Na osnovu prethodnog (videti (2.1.2)), uzimajući bazu B u prostoru X, kao uniju baza B_1, B_2, $\ldots$, B_r iz potprostora N_1, N_2, $\ldots$, N_r, respektivno, matrica operatora $\mathcal{A}$ dobija kvazidijagonalni oblik

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{rr} \end{bmatrix} = A_{11} \dotplus A_{22} \dotplus \cdots \dotplus A_{rr}, \tag{2.1.8}$$

gde su A_{ii} kvadratne matrice reda

$$n_i = \dim N_i = \dim \{\ker(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i}\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Može se dokazati da je determinanta matrice A jednaka proizvodu determinanti dijagonalnih blokova, tako da se karakteristični polinom matrice $\mathcal{A}$ može odrediti kao proizvod karakterističnih polinoma dijagonalnih blok matrica A_{ii}, tj.

$$\det(A - \lambda I_n) = \prod_{i=1}^{r} \det(A_{ii} - \lambda I_{n_i}), \tag{2.1.9}$$

gde su I_n i I_{n_i} jedinične matrice reda n i n_i, respektivno, pri čemu je $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Matrica A_{ii} odgovara restrikciji operatora $\mathcal{A}$ na potprostor N_i.

Razmotrimo sada jedan od korenskih potprostora $N_i = \ker(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i}$. Pretpostavimo da je μ sopstvena vrednost operatora $\mathcal{A}$ (restrikovanog na N_i) i u odgovarajući sopstveni vektor. Tada, dejstvom operatora $\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I}$ na ovaj vektor, dobijamo

$$(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})u = \mathcal{A}u - \lambda_i u = \mu u - \lambda_i u = (\mu - \lambda_i)u,$$

što dalje daje

$$(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i} u = (\mu - \lambda_i)^{m_i} u = \theta.$$

Kako je $u \neq 0$, poslednja jednakost daje $\mu = \lambda_i$. Prema tome, svi koreni karakterističnog polinoma restrikcije operatora $\mathcal{A}$ na N_i, u oznaci $\mathcal{A}_i$, se poklapaju sa λ_i, tako da je karakteristični polinom operatora $\mathcal{A}_i \colon N_i \to N_i$ (ili matrice A_{ii}) dat sa

$$\det(A_{ii} - \lambda I_{n_i}) = (\lambda_i - \lambda)^{n_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Korišćenjem (2.1.9), dobijamo karakteristični polinom operatora $\mathcal{A} \colon X \to X$ (ili matrice A),

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} (\lambda_2 - \lambda)^{n_2} \cdots (\lambda_r - \lambda)^{n_r}.$$

Na osnovu ovoga i (2.1.7), zaključujemo da važi sledeći rezultat:

Teorema 2.1.3. *Skup nula minimalnog polinoma $M(\lambda)$ poklapa se sa skupom nula karakterističnog polinoma $P(\lambda)$ za operator $\mathcal{A}\colon X \to X$. Višestrukosti nula u karakterističnom polinomu odgovaraju dimenzijama korenskih potprostora.*

Dakle, ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ među sobom različite sopstvene vrednosti, čija je višestrukost redom $n_1, n_2, \ldots, n_r$, pri čemu je $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, normalizovani karakteristični polinom operatora $\mathcal{A}$ dat je sa

$$H(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}, \tag{2.1.10}$$

dok minimalni polinom ima oblik

$$M(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}, \tag{2.1.11}$$

gde je $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = m$ i $0 < m_i \le n_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$.

Na osnovu dosadašnjeg izlaganja, matricu operatora $\mathcal{A}$ uspeli smo da svedemo na kvazidijagonalni oblik (2.1.8), gde su blokovi A_{ii} kvadratne matrice reda n_i i svaka od njih odgovara restrikciji operatora $\mathcal{A}$ na korenski potprostor $N_i = \ker \mathcal{A}_i = \ker(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i}$.

U cilju dalje redukcije matrice operatora na najprostiji mogući oblik, razmotrićemo detaljnije konstrukciju korenskih potprostora. Pretpostavimo da $u \in N_i$. Tada je, u opštem slučaju, $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{n_i} u = \theta$. Međutim, za svaki konkretni vektor $u \in N_i$ moguća je jednakost $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^k u = \theta$ i pri nekom $k < n_i$. Na primer, ako je u sopstveni vektor operatora $\mathcal{A}$, koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ_i, čiji je red višestrukosti n_i veći od jedinice, tada je $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})u = \theta$. Sledeća definicija precizira ovu činjenicu.

Definicija 2.1.2. Najmanji broj $k \in \mathbb{N}_0$ za koji je $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^k u = \theta$ naziva se *visina korenskog vektora* $u \in N_i$.

Dakle, svi korenski vektori $u \in N_i$ (koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti λ_i) imaju visine koje nisu veće od višestrukosti n_i. Može se desiti slučaj, kao kod operatora proste strukture, da visine svih korenskih vektora ne budu veće od jedinice, bez obzira na višestrukost sopstvenih vrednosti.

Posmatrajmo sada korenski potprostor N_i, koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ_i višestrukosti n_i. Sa h označimo maksimalnu visinu korenskih vektora iz N_i. Napomenimo, još jednom, da je $h \le n_i$. Nije teško pokazati da se korenski potprostor N_i sastoji od vektora svih visina od 0 do h. Ovo proizilazi iz sledeće činjenice: ako je $u \in N_i$ vektor visine k, tada je vektor $\mathcal{A}_i u = (\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})u$ visine $k - 1$.

Teorema 2.1.4. *Ako sa U_k označimo skup svih vektora iz N_i, čija visina nije veća od $k\,(\leq h)$, tada je U_k potprostor od N_i i pritom važi*

$$\theta = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_{h-1} \subset U_h = N_i. \tag{2.1.12}$$

Dokaz. Neka $u, v \in U_k$. Tada je $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^k u = (\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^k v = \theta$, tj.

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}) \qquad (\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^k (\alpha u + \beta v) = \theta,$$

odakle zaključujemo da proizvoljna linearna kombinacija $\alpha u + \beta v$ pripada skupu U_k, što znači da je U_k potprostor. Na osnovu definicije skupa U_k, očigledno važi (2.1.12). $\square$

U daljem tekstu opisaćemo jedan način za dobijanje tzv. *kanoničke baze* potprostora $U_h = N_i$. Neka su dimenzije potprostora U_k, koji se pojavljuju u (2.1.12), redom d_k, tako da imamo

$$0 = d_0 < d_1 < \cdots < d_{h-1} < d_h = n_i.$$

Postupak će se sastojati iz h koraka.

Korak $k = 1$. U potprostoru U_h uočimo $p_1 = d_h - d_{h-1}$ linearno nezavisnih vektora $e_1, \ldots, e_{p_1}$, čiji lineal u direktnoj sumi sa U_{h-1} daje U_h, tj.

$$L(e_1, \ldots, e_{p_1}) \dotplus U_{h-1} = U_h.$$

Primetimo da su svi korenski vektori $e_1, \ldots, e_{p_1}$ visine h i da ne postoji njihova ne-nula linearna kombinacija koja pripada potprostoru U_{h-1}. Ako je $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I}$, ovim vektorima pridružimo vektore $\mathcal{A}_i^k e_1, \ldots, \mathcal{A}_i^k e_{p_1}$ $(k = 1, \ldots, h-1)$ tako da na dalje posmatramo sledeći skup vektora

$$\left\{ \begin{array}{rcr} e_1, & \ldots, & e_{p_1}, \\ \mathcal{A}_i e_1, & \ldots, & \mathcal{A}_i e_{p_1}, \\ \mathcal{A}_i^2 e_1, & \ldots, & \mathcal{A}_i^2 e_{p_1}, \\ \vdots & & \\ \mathcal{A}_i^{h-1} e_1, & \ldots, & \mathcal{A}_i^{h-1} e_{p_1}, \end{array} \right. \tag{2.1.13}$$

za koji ćemo pokazati da je linearno nezavisan. Zaista, ako na linearnu kombinaciju

$$\sum_{\nu=1}^{p_1} \alpha_\nu^{(0)} e_\nu + \sum_{\nu=1}^{p_1} \alpha_\nu^{(1)} \mathcal{A}_i e_\nu + \sum_{\nu=1}^{p_1} \alpha_\nu^{(2)} \mathcal{A}_i^2 e_\nu + \cdots + \sum_{\nu=1}^{p_1} \alpha_\nu^{(h-1)} \mathcal{A}_i^{h-1} e_\nu = \theta$$

primenimo operator $\mathcal{A}_i^{h-1}$, sve sume na levoj strani, osim prve, se anuliraju, tako da dobijamo

$$\mathcal{A}_i^{h-1}\left(\sum_{\nu=1}^{p_1}\alpha_\nu^{(0)}e_\nu\right)=\sum_{\nu=1}^{p_1}\alpha_\nu^{(0)}\mathcal{A}_i^{h-1}e_\nu=\theta,$$

što znači da linearna kombinacija vektora $e_1,\ldots,e_{p_1}$ pripada potprostoru U_{h-1}. Ovo je pak moguće samo ako su svi koeficijenti $\alpha_\nu^{(0)}$ jednaki nuli. Ako sada na polaznu linearnu kombinaciju vektora primenimo operator $\mathcal{A}_i^{h-2}$, na isti način zaključujemo da svi koeficijenti $\alpha_\nu^{(1)}$ moraju biti jednaki nuli. Nastavljajući ovakvo rezonovanje dokazujemo da se linearna kombinacija vektora (2.1.1) može anulirati samo ako su svi koeficijenti $\alpha_\nu^{(k)}$ ($\nu=1,\ldots,p_1$; $k=0,1,\ldots,h-1$) jednaki nuli, što znači da su ovi vektori linearno nezavisni. Štaviše, ne postoji ne-nula linearna kombinacija vektora iz ν-te vrste u (2.1.13) koja pripada potprostoru $U_{h-\nu}$.

Korak $k=2$. Sistem vektora koji se pojavljuju u drugoj vrsti u (2.1.13) dopunimo linearno nezavisnim vektorima $e_{p_1+1},\ldots,e_{p_2}$ iz potprostora U_{h-1}, tako da je

$$L(\mathcal{A}_ie_1,\ldots,\mathcal{A}_ie_{p_1},e_{p_1+1},\ldots,e_{p_2})\dotplus U_{h-2}=U_{h-1}.$$

Svi vektori iz ovog skupa (ukupno njih $p_2=d_{h-1}-d_{h-2}$) su korenski vektori visine $h-1$, čija nijedna ne-nula linearna kombinacija ne pripada potprostoru U_{h-2}. Na isti način, kao i u prethodnom koraku, formirajmo skup vektora

$$\left\{\begin{array}{ccc} e_{p_1+1}, & \ldots, & e_{p_2}, \\ \mathcal{A}_ie_{p_1+1}, & \ldots, & \mathcal{A}_ie_{p_2}, \\ & \vdots & \\ \mathcal{A}_i^{h-2}e_{p_1+1}, & \ldots, & \mathcal{A}_i^{h-2}e_{p_2}. \end{array}\right. \tag{2.1.14}$$

Na sličan način, sada se za sistem vektora $\mathcal{A}_ie_1,\ldots,\mathcal{A}_ie_{p_1},e_{p_1+1},\ldots,e_{p_2}$ mogu dokazati iste činjenice kao i za vektore $e_1,\ldots,e_{p_1}$ u prethodnom koraku, zamenjijući h sa $h-1$.

Koraci $k=\ell$ $(2<\ell\le h)$. Nastavljajući postupak na isti način kao u prethodnim koracima, redom se prelazi na potprostore U_{h-2}, U_{h-3}, ..., U_1, i na taj način dobijamo sistem od ukupno n_i linearno nezavisnih vektora u korenskom potprostoru N_i. Poslednja tablica tipa (2.1.13) – (2.1.14) (za $k=h$) sastoji se iz samo jedne vrste

$$e_{p_{h-1}+1}\,,\ \ldots\ ,\ f_{p_h}, \tag{2.1.15}$$

čiji vektori pripadaju potprostoru H_1, i gde je $p_h = d_1 - d_0 = d_1$.

Vektori iz tablica (2.1.13) – (2.1.15) mogu se predstaviti u kompaktnijem obliku uvođenjem notacije sa dva indeksa $e_j^{(k)}$, gde gornji indeks označava visinu korenskog vektora. Sledeću tablicu formiramo od vektora iz prethodnih tablica, navodeći ih s leva na desno i ravnajući ih prema poslednjoj vrsti:

$$
\left\{
\begin{array}{llllllll}
e_1^{(h)}, & \dots, e_{p_1}^{(h)}, & & & & & & \\
e_1^{(h-1)}, & \dots, e_{p_1}^{(h-1)}, & e_{p_1+1}^{(h-1)}, & \dots, e_{p_2}^{(h-1)}, & & & & \\
\vdots & & & & & & & \\
e_1^{(1)}, & \dots, e_{p_1}^{(1)}, & e_{p_1+1}^{(1)}, & \dots, e_{p_2}^{(1)}, & \dots, e_{p_{h-1}+1}^{(1)}, & \dots, e_{p_h}^{(1)}. & &
\end{array}
\right. \tag{2.1.16}
$$

Primetimo da vektori koji se nalaze u prvoj vrsti ove tablice imaju visinu h, vektori iz druge vrste imaju visinu $h-1$, itd. Vektori iz poslednje vrste imaju visinu 1. Svaka kolona tablice određuje po jedan invarijantni potprostor operatora $\mathcal{A}_i$, tj. operatora $\mathcal{A}$. Za takve potprostore kažemo da su *ciklički* i označavamo ih sa C_j $(j = 1, 2, \dots, p_h)$. Dakle, vektori koji se nalaze u j-toj koloni čine bazu cikličkog potprostora C_j. Dimenzija prvih p_1 cikličkih potprostora je h, sledećih $p_2 - p_1$ potprostora je $h-1$, itd. Najzad, poslednje kolone (ukupno $p_h - p_{h-1}$) određuju jednodimenzionalne cikličke potprostore.

Na osnovu prethodnog, dolazimo do sledećeg rezultata:

Teorema 2.1.5. *Direktna suma p_h cikličkih potprostora C_j, generisanih pomoću kolona tablice* (2.1.16), *daje potprostor N_i.*

Vektori iz tablice (2.1.16) čine tzv. *kanoničku bazu* invarijantnog potprostora N_i.

2.2. Jordanov kanonički oblik

Neka je X linearni prostor nad poljem $\mathbb{C}$ i $\mathcal{A}: X \to X$ linearni operator, čije su sopstvene vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ među sobom različite, sa redom višestrukosti $n_1, n_2, \dots, n_r$, respektivno, pri čemu je $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Normalizovani karakteristični polinom i minimalni polinom operatora $\mathcal{A}$ neka su dati sa (2.1.10) i (2.1.11), respektivno. Za invarijantni potprostor $N_i = \ker(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i}$, koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ_i, razmotrićemo, najpre, ciklički potprostor C_1, generisan bazom (videti prethodni odeljak)

$$
B_1^{(i)} = \left\{ e_1^{(1)}, e_1^{(2)}, \dots, e_1^{(h-1)}, e_1^{(h)} \right\}.
$$

Kao što se da primetiti, bazisne vektore smo uzeli iz prve kolone tablice (2.1.16), polazeći od poslednje vrste. Kako za slike bazisnih vektora pomoću operatora $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I}$ važi

$$\mathcal{A}_i e_1^{(1)} = 0, \quad \mathcal{A}_i e_1^{(2)} = e_1^{(1)}, \quad \ldots, \quad \mathcal{A}_i e_1^{(h)} = e_1^{(h-1)},$$

zaključujemo da je

$$\mathcal{A} e_1^{(1)} = \lambda_i e_1^{(1)}, \quad \mathcal{A} e_1^{(k)} = \lambda_i e_1^{(k)} + e_1^{(k-1)} \quad (k = 2, \ldots, h).$$

Ovo znači da matrica restrikcije operatora $\mathcal{A}$ na ciklički potprostor C_1 (u bazi $B_1^{(i)}$) dobija jednostavan oblik (videti odeljak 2.3, glava III)

$$J^{(1)}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}. \tag{2.2.1}$$

Matrica reda h, označena u (2.2.1) sa $J^{(1)}(\lambda_i)$, naziva se *Jordanov blok* i najčešće se piše u obliku

$$J_h^{(1)}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix},$$

prikazujući samo ne-nula elemente. Matrica $J_h^{(1)}(\lambda_i)$ je, dakle, dvo-dijagonalna, sa istim elementima na dijagonali koji su jednaki λ_i i sa jediničnom gornjom subdijagonalom. Nije teško ustanoviti da su sve njene sopstvene vrednosti jednake λ_i.

Na potpuno sličan način moguće je konstruisati Jordanov blok za restrikciju operatora $\mathcal{A}$ na bilo koji ciklički potprostor C_j $(j = 1, 2, \ldots, p_h)$. Označimo takav blok sa $J_k^{(j)}(\lambda_i)$, gde k označava dimenziju potprostora C_j, tj. broj bazisnih vektora u j-toj koloni tablice (2.1.16). U stvari, k je red matrice $J_k^{(j)}(\lambda_i)$. Napomenimo da bazisne vektore treba uzimati iz j-te kolone, polazeći od poslednje vrste. Na taj način dobijamo bazu $B_j^{(i)} = \{e_j^{(1)}, e_j^{(2)}, \ldots, e_j^{(k)}\}$.

Ako sada uzmemo kanoničku bazu invarijantnog potprostora N_i, kao uniju baza $B_j^{(i)}$ $(j = 1, 2, \ldots, p_h)$, tj.

$$B^{(i)} = \{B_1^{(i)}, B_2^{(i)}, \ldots, B_{p_h}^{(i)}\}, \tag{2.2.2}$$

na osnovu teoreme 2.1.5 i prethodnog razmatranja možemo zaključiti da restrikciji operatora $\mathcal{A}$ na invarijantni potprostor N_i, u bazi $B^{(i)}$ odgovara kvazidijagonalna Jordanova matrica reda n_i

$$J_{n_i}(\lambda_i) = J_h^{(1)}(\lambda_i) \dotplus \cdots \dotplus J_1^{(p_h)}(\lambda_i), \tag{2.2.3}$$

tj.

$$J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} J_h^{(1)}(\lambda_i) & & \\ & \ddots & \\ & & J_1^{(p_h)}(\lambda_i). \end{bmatrix}. \tag{2.2.4}$$

Primetimo da su na dijagonali u matrici $J_{n_i}(\lambda_i)$ poređani Jordanovi blokovi, čije dimenzije (redovi) čine nerastući niz. Neki od Jordanovih blokova nižeg reda od h ne moraju se pojavljivati u (2.2.3), tj. (2.2.4), ali red kvazidijagonalne matrice mora biti jednak dimenziji potprostora N_i. Dakle, red matrice $J_{n_i}(\lambda_i)$ mora biti jednak n_i.

Sada smo u situaciji da konstruišemo Jordanov kanonički oblik bilo koje kvadratne matrice A, koja se inače, kao što je poznato, uvek može dovesti na kvazidijagonalni oblik (videti (2.1.8))

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{rr} \end{bmatrix} = A_{11} \dotplus A_{22} \dotplus \cdots \dotplus A_{rr},$$

gde su A_{ii} kvadratne matrice reda $n_i = \dim N_i = \dim\{\ker(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{m_i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. U prethodnom razmatranju, pokazali smo kako se izborom kanoničkog bazisa $B^{(i)}$ svaka od ovih matrica A_{ii} može redukovati na Jordanov oblik $J_{n_i}(\lambda_i)$.

Na osnovu teoreme 2.1.2, prostor X se može razložiti na direktnu sumu invarijantnih korenskih potprostora N_i. U svakom od ovih potprostora izaberimo kanoničke baze $B^{(i)}$, date pomoću (2.2.2), a zatim formirajmo bazu B, kao uniju ovih baza,

$$B = \{B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(r)}\},$$

tj.

$$B = \Big\{B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots, B_{p_{h_1}}^{(1)}; B_1^{(2)}, B_2^{(2)}, \ldots, B_{p_{h_2}}^{(2)}; \ldots; B_1^{(r)}, B_2^{(r)}, \ldots, B_{p_{h_r}}^{(r)}\Big\},$$

gde je h_i maksimalna visina korenskih vektora u N_i. Na ovaj način smo dobili tzv. *Jordanovu kanoničku bazu* prostora X u odnosu na operator $\mathcal{A}$. Matrica operatora $\mathcal{A}$, u odnosu na ovu bazu, dobija kvazidijagonalni oblik

$$J = J_{n_1}(\lambda_1) \dotplus J_{n_2}(\lambda_2) \dotplus \cdots \dotplus J_{n_r}(\lambda_r), \tag{2.2.5}$$

gde su dijagonalni blokovi, upravo Jordanovi blokovi, čije su dimenzije redom $n_1, n_2, \ldots, n_r$ $(n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r)$ i sopstvene vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Za ovu kvazidijagonalnu matricu

$$J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_r}(\lambda_r) \end{bmatrix}$$

kažemo da je *Jordanov kanonički oblik* matrice operatora $\mathcal{A}$.

Na osnovu prethodnog razmatranja može se zaključiti da jedan linearni operator u prostoru X definiše klasu sličnih matrica (videti definiciju 4.2.3, glava III). Dobijeni rezultati pokazuju da se svaka kvadratna matrica može svesti na Jordanov kanonički oblik. Naime, važi sledeći rezultat:

Teorema 2.2.1. *Svaka kvadratna matrica A je slična nekoj Jordanovoj matrici J, tj. za svaku kvadratnu matricu A postoji regularna matrica P (matrica transformacije sličnosti) takva da je $J = P^{-1}AP$.*

Dakle, dve kvadratne matrice istog reda su slične ako i samo ako se one svode na isti Jordanov kanonički oblik, ili prostije na istu Jordanovu matricu.

Primer 2.2.1. Za datu matricu operatora

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

odredićemo Jordanovu matricu, kao i odgovarajuću kanoničku bazu.

Nađimo, najpre, karakteristični polinom i sopstvene vrednosti. Kako je

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix}4-\lambda & 1 & 1 & 1\\ -1 & 2-\lambda & -1 & -1\\ 6 & 1 & -1-\lambda & 1\\ -6 & -1 & 4 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-\lambda & 3-\lambda & 0 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1 & -1\\ 6 & 1 & -1-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3-\lambda\end{vmatrix},$$

$$=(3-\lambda)^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1 & -1\\ 6 & 1 & -1-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix},$$

tj.

$$P(\lambda)=(3-\lambda)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 3-\lambda & 0 & -1\\ 6 & -5 & -2-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix},$$

imamo

$$P(\lambda)=-(\lambda-3)^2(\lambda+2)\begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & -1\\ -5 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-3)^3(\lambda+2),$$

odakle dobijamo dve sopstvene vrednosti:

$\lambda=\lambda_1=3$ (višestrukost $n_1=3$), $\quad\lambda=\lambda_2=-2$ $(n_2=1)$.

Rešavanjem homogenog sistema jednačina

$$\begin{aligned}(4-\lambda)x_1+{}&x_2+{}&x_3+{}&x_4&=0,\\ -x_1+(2-\lambda)&x_2-{}&x_3-{}&x_4&=0,\\ 6x_1+{}&x_2+(-1-\lambda)&x_3+{}&x_4&=0,\\ -6x_1-{}&x_2+{}&4x_3+(2-\lambda)&x_4&=0,\end{aligned}\tag{2.2.6}$$

odredićemo sopstvene vektore koji odgovaraju sopstvenim vrednostima $\lambda=\lambda_1$ i $\lambda=\lambda_2$.

Za $\lambda=\lambda_1=3$, odgovarajući homogeni sistem jednačina se svodi na dve jednačine

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0,\quad 6x_1+x_2-4x_3+x_4=0,$$

tj.

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0,\quad x_1-x_3=0,$$

odakle nalazimo

$$x_1=x_3=\alpha,\quad x_2=-2\alpha-\beta,\quad x_4=\beta,$$

gde su α i β proizvoljne konstante koje istovremeno nisu jednake nuli. Kako je

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

zaključujemo da trostrukoj sopstvenoj vrednosti $\lambda = \lambda_1 = 3$ odgovaraju dva linearno nezavisna sopstvena vektora:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \tag{2.2.7}$$

što znači da je odgovarajući sopstveni potprostor dvodimenzionalan.

Za $\lambda = \lambda_2 = -2$, sistem (2.2.6) se svodi na

$$\begin{aligned} 6x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ -6x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 0, \end{aligned}$$

odakle dobijamo $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$. Stavljajući $x_3 = 1$ nalazimo sopstveni vektor $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$. Ovde je jasno da je sopstveni potprostor jednodimenzionalan.

Za određivanje kanoničke baze posmatrajmo homogene sisteme jednačina

$$(A - 3I)^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \quad \text{i} \quad (A - 3I)^3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}. \tag{2.2.8}$$

Kako je

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

i

$$(A-3I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 0 & 25 & 0 \\ 25 & 0 & -25 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A-3I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 125 & 0 & -125 & 0 \\ -125 & 0 & 125 & 0 \end{bmatrix},$$

sistemi u (2.2.8) su ekvivalentni. Dimenzija jezgra N_1 (korenskog invarijantnog potprostora koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda_1 = 3$) je $n_1 = 3$. Na osnovu (2.2.8), koordinatna reprezentacija korenskih vektora $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ može se okarakterisati uslovom $x_1 = x_3$. Maksimalna visina korenskih vektora $h = 2$, tako da se (2.1.12), u ovom slučaju, svodi na

$$\theta = U_0 \subset U_1 \subset U_2 = N_1,$$

gde je U_1 sopstveni potprostor dimenzije $d_1 = 2$. Kako su $d_0 = 0$ i $d_2 = 3$, prema izloženom postupku (korak $k = 1$), nalazimo da je $p_1 = d_2 - d_1 = 1$, što znači da u potprostoru U_2 treba izabrati samo jedan vektor, čiji lineal u direktnoj sumi sa sopstvenim potprostorom U_1 daje potprostor U_2. Ako, na primer, stavimo $x_2 = x_4 = 0$ i $x_1 = x_3 = 1$, korenski vektor ($\in N_1$), čija je koordinatna reprezentacija $\boldsymbol{e}_1 = [1\ 0\ 1\ 0]^T$, ne pripada potprostoru U_1. Zaista, jednostavno je proveriti da se ovaj vektor ne može izraziti kao linearna kombinacija dva linearno nezavisna vektora koji su dati u (2.2.7). Napomenimo da je U_1 je sopstveni potprostor dimenzije $d_1 = 2$ i da se sopstveni vektori (2.2.7) mogu uzeti za bazisne vektore potprostora U_1. Dakle, imamo

$$L(\boldsymbol{e}_1) \dot{+} U_1 = U_2$$

i odgovarajuća tablica (2.1.13) postaje[81)]

$$\left\{ \begin{aligned} &\boldsymbol{e}_1, \\ (A - 3I)&\boldsymbol{e}_1. \end{aligned} \right. \tag{2.2.9}$$

U drugoj vrsti tablice (2.2.9), vektor

$$\boldsymbol{e}_1^{(1)} = (A - 3I)\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ima visinu 1 i pripada potprostoru U_1.

Kako je $p_2 = d_1 - d_0 = 2$, u drugom koraku našeg postupka potrebno je drugu vrstu u (2.2.9) dopuniti vektorom $\boldsymbol{e}_2$, tako da je $L(\boldsymbol{e}_1^{(1)}, \boldsymbol{e}_2) = U_1$. Primetimo da je $U_0 = \theta$. Za vektor $\boldsymbol{e}_2$ možemo uzeti, na primer, sopstveni vektor $[0\ \ -1\ 0\ 1]^T$ iz (2.2.7), koji linearno nezavisan sa vektorom $\boldsymbol{e}_1^{(1)}$.

Ovim smo dobili kompletnu tablicu (2.1.16) koja odgovara korenskom potprostoru N_1:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{e}_1^{(2)}, & \\ \boldsymbol{e}_1^{(1)}, & \boldsymbol{e}_2^{(1)}, \end{array} \right.$$

81) Vektori su dati u koordinatnoj reprezentaciji.

gde su

$$
\boldsymbol{e}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1^{(2)} = \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2^{(1)} = \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.2.10}
$$

Ovi vektori čine kanoničku bazu korenskog potprostora N_1.

Ako vektorima (2.2.10) dodamo sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda_2 = -2$ (N_2 je jednodimenzionalni potprostor) dobijamo Jordanovu kanoničku bazu

$$
B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \tag{2.2.11}
$$

dok je Jordanov kanonički oblik matrice A dat sa

$$
J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.
$$

Napomenimo da se pomoću bazisnih vektora (2.2.11) može konstruisati matrica transformacije sličnosti

$$
P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},
$$

čija je inverzna matrica data sa

$$
P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Najzad, primetimo da je $P^{-1}AP = J$. $\triangle$

Na osnovu teoreme 2.12.4 (glava II) za stepenovanje Jordanove matrice (2.2.5) važi:

$$
J^m = (J_{n_1}(\lambda_1))^m \dot{+} (J_{n_2}(\lambda_2))^m \dot{+} \cdots \dot{+} (J_{n_r}(\lambda_r))^m, \tag{2.2.12}
$$

tj.

$$J^m = \begin{bmatrix} (J_{n_1}(\lambda_1))^m & & & \\ & (J_{n_2}(\lambda_2))^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & (J_{n_r}(\lambda_r))^m \end{bmatrix},$$

gde je m nenegativan ceo broj. Za stepen Jordanovog bloka reda k

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}, \tag{2.2.13}$$

matematičkom indukcijom jednostavno dokazujemo da važi

$$(J_k(\lambda))^m = \begin{bmatrix} \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \binom{m}{2}\lambda^{m-2} & \cdots & \binom{m}{k-1}\lambda^{m-k+1} \\ & \lambda^m & \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & & \binom{m}{k-2}\lambda^{m-k+2} \\ & & \lambda^m & & \binom{m}{k-3}\lambda^{m-k+3} \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda^m \end{bmatrix}. \tag{2.2.14}$$

Posmatrajmo sada algebarski polinom $Q(x) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu \in \mathbb{C}[x]$ i odgovarajući matrični polinom

$$Q(A) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu A^\nu,$$

gde je A data kvadratna matrica. Kako je ova matrica slična nekoj Jordanovoj matrici J, to postoji regularna matrica P takva da je $J = P^{-1}AP$, tj. $A = PJP^{-1}$.

Korišćenjem (2.2.12), matrica $Q(J)$ se može izraziti u obliku

$$\begin{aligned} Q(J) &= \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu J^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{m} \Big((J_{n_1}(\lambda_1))^\nu \dotplus (J_{n_2}(\lambda_2))^\nu \dotplus \cdots \dotplus (J_{n_r}(\lambda_r))^\nu \Big) \\ &= Q\big(J_{n_1}(\lambda_1)\big) \dotplus Q\big(J_{n_2}(\lambda_2)\big) \dotplus \cdots \dotplus Q\big(J_{n_r}(\lambda_r)\big), \end{aligned}$$

pa je tada

$$Q(A) = Q\big(PJP^{-1}\big) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu \big(PJP^{-1}\big)^\nu = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu PJ^\nu P^{-1},$$

tj.

$$Q(A) = P\left(\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu J^\nu P^{-1}\right) = PQ(J)P^{-1}.$$

U slučaju Jordanovog bloka (2.2.13) imamo

$$Q(J_k(\lambda)) = \begin{bmatrix} Q(\lambda) & \frac{1}{1!}Q'(\lambda) & \frac{1}{2!}Q''(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(k-1)!}Q^{(k-1)}(\lambda) \\ & Q(\lambda) & \frac{1}{1!}Q'(\lambda) & & \frac{1}{(k-2)!}Q^{(k-2)}(\lambda) \\ & & Q(\lambda) & & \frac{1}{(k-3)!}Q^{(k-3)}(\lambda) \\ & & & \ddots & \\ & & & & Q(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Primetimo da se za $Q(x) = x^m$ iz ove jednakosti dobija (2.2.14).

3. ZADACI ZA VEŽBU

3.1. Data je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}.$$

Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice A, kao i sopstvene vrednosti matrice $f(A)$, gde je $f(x) = x^5 - x^3 + 2$.

3.2. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Korišćenjem Cayley-Hamiltonove teoreme odrediti $A^6 - 25A^2 + 112A$.

3.3. Neka je $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$.

Odrediti sopstvene vrednosti, sopstvene vektore i minimalni polinom matrice A.

3.4. Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

a zatim naći A^n $(n \in \mathbb{N})$.

3.5. Neka je data matrica

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{bmatrix}.$$

1° Utvrditi da je matrica A nesingularna matrica.
2° Odrediti sopstvene vrednosti λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 matrice A.
3° Odrediti sopstvene vektore matrice A.
4° Dijagonalizirati datu matricu.
5° Odrediti kavadratne matrice M_1, M_2, M_3, M_4 reda četiri, tako da je

$$A = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 + \lambda_4 M_4.$$

6° Ako je $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, ispitati da li je množenje matrica unutrašnja operacija u skupu $\mathcal{M}$.
7° Odrediti matricu A^n $(n \in \mathbb{N})$.
8° Odrediti matricu A^{-1}.
9° Ispitati da li se dokazano razlaganje matrice A može iskoristiti i za određivanje matrica A^{-n}.

3.6. Odrediti matrice M i M' ako je

$$M' \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.7. Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{bmatrix},$$

a zatim odrediti matrice M^n $(n \in \mathbb{N})$ i M^{-1}.

Rezultat. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2,\quad \boldsymbol{x}_1 = [-a\ \ 1\ \ 0]^T,\quad \boldsymbol{x}_2 = [-a^2\ \ 0\ \ 1]^T,\quad \boldsymbol{x}_3 = [a^2\ \ a\ \ 1]^T$,

$$M^n = -\frac{(-1)^n}{3a^2}\begin{bmatrix} -2a^2 & a^3 & a^4 \\ a & -2a^2 & a^3 \\ 1 & a & -2a^2 \end{bmatrix} + \frac{2^n}{3a^2}\begin{bmatrix} a^2 & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & a^3 \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix},$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2a^2}\begin{bmatrix} -a^2 & a^3 & a^4 \\ a & -a^2 & a^3 \\ 1 & a & -a^2 \end{bmatrix}.$$

3.8. Neka je $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$.

1° Dokazati da svaka matrica B koja je komutativna sa matricom A ima oblik
$$B = \begin{bmatrix} u-4v & v \\ -7v & u \end{bmatrix}.$$

2° Dokazati da je A^n oblika
$$A^n = \begin{bmatrix} u_n - 4v_n & v_n \\ -7v_n & u_n \end{bmatrix}.$$

3° Odrediti u_{n+1} i v_{n+1} pomoću u_n i v_n

4° Neka je $a = \alpha + i\beta$ kompleksan broj i neka je $w_n = u_n + av_n$. Odrediti kompleksan broj a tako da je količnik w_{n+1}/w_n konstanta.

5° Odrediti w_n, u_n, v_n i A^n.

3.9. Odrediti minimalni polinom matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rezultat. $M(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$.

3.10. Proveriti tvrđenje: Jordanovi kanonički oblici matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

su, redom, matrice

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad J_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.11. Neka su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

date matrice.

Proveriti tvrđenje: Matrica J je Jordanova forma matrice A.

3.12. Odrediti Jordanove kanoničke oblike matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rezultat. Traženi Jordanovi kanonički oblici datih matrica su redom

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_C = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon^5 \end{bmatrix},$$

gde je $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}\cdot$

VI GLAVA

Elementi analitičke geometrije

1. VEKTORSKA ALGEBRA

1.1. Koordinatni sistemi

U ovom poglavlju posebnu pažnju posvećujemo izomorfnim prostorima $V_O(E)$ i $\mathbb{R}^3$, koje smo razmatrali u odeljcima 1.1, 1.4 i 1.5 (glava II). Tom prilikom, uveli smo pravougli koordinatni sistem sa bazisnim jediničnim ortogonalnim vektorima $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, tako da se svaki vektor $\boldsymbol{r} \in V_O(E)$ opisuje pomoću tri koordinate: x, y, z kao

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\,.$$

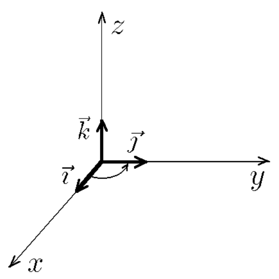
Na taj način smo uspostavili biunivoku korespondenciju između ovih prostora, uključujući, naravno, i sam prostor E. Sledeća šema ukazuje na tu korespondenciju.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ V_O(E) \arrow[rr, leftrightarrow] & & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ \vec{r} \arrow[rr, leftrightarrow] & & (x,y,z) \end{tikzcd}$$

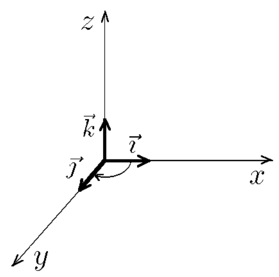
Kao što je navedeno u odeljku 1.1, tačke ovih prostora obično poistovećujemo pišući $M = (x, y, z)$ ili, pak, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$.

Za pravougli koordinatni sistem koristimo i termin *Dekartov pravougli koordinatni sistem* ili *Dekartov ortogonalni trijedar*. Jedinični vektori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ i $\boldsymbol{k}$, postavljeni u tački O definišu tri *koordinatne* (*Dekartove*) *ose*: x-osu, y-osu i z-osu, respektivno. Pravougli koordinatni sistem označavamo sa $Oxyz$.

U dosadašnjem izlaganju, međusobni položaj bazisnih (koordinatnih) vektora nije bio bitan. Za naš dalji rad, međutim, neophodno je precizirati ovaj položaj. U upotrebi su dva pravougla koordinatna sistema: *desni* (*engleski*) i *levi* (*francuski*) (slike 1.1.1 i 1.1.2). Kod desnog sistema ili tzv. *trijedra desne orijentacije* rotacija vektora $\boldsymbol{i}$ prema vektoru $\boldsymbol{j}$ oko z-ose najkraćim



Sl. 1.1.1



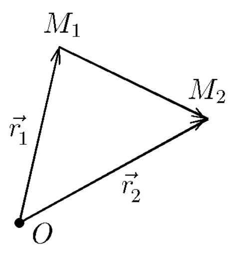
Sl. 1.1.2

putem, posmatrano sa kraja vektora $\boldsymbol{k}$, izvodi se u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku. Suprotno, kod levog sistema ili tzv. *trijedra leve orijentacije* pomenuta rotacija vektora izvodi se u smeru kretanja kazaljke na časovniku.

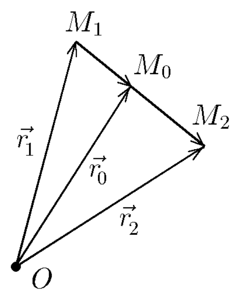
Trijedar desne orijentacije može biti predstavljen sa tri prsta desne ruke, pri čemu palcu, kažiprstu i srednjem prstu odgovaraju vektori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ i $\boldsymbol{k}$, respektivno. Odgovarajućim prstima leve ruke može biti predstavljen trijedar leve orijentacije. U našem daljem razmatranju uvek ćemo koristiti trijedar desne orijentacije.

U odeljcima 1.3 i 1.4 definisali smo normu ili intenzitet vektora i skalarni proizvod dva vektora. Ovde ćemo ukazati na dva jednostavna problema:

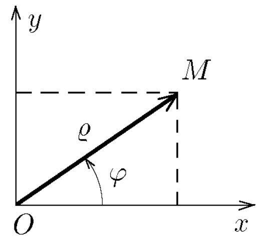
1. Rastojanje dve tačke u prostoru. Neka su date tačke M_1 i M_2, kojima odgovaraju radijus vektori $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, respektivno (slika 1.1.3).



Sl. 1.1.3



Sl. 1.1.4



Sl. 1.1.5

Kako je $\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, rastojanje tačaka M_1 i M_2 može se odrediti kao

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|\,,$$

tj.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

2. Deoba duži u datoj razmeri. Neka je data duž $\overline{M_1M_2}$ sa radijus vektorima $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ tačaka M_1 i M_2 i neka je potrebno odrediti radijus vektor $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ tačke M_0 koja deli duž u datoj razmeri, tj. tako da je

$$\frac{\overline{M_1M_0}}{\overline{M_0M_2}} = \lambda \qquad (\lambda > 0). \tag{1.1.1}$$

Kako je (videti sliku 1.1.4)

$$\overrightarrow{M_1M_0} = \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \qquad \overrightarrow{M_0M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0,$$

iz kolinearnosti ovih vektora i jednakosti (1.6.1) sleduje

$$\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1 = \lambda(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0),$$

odakle dobijamo

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{r}_2}{1 + \lambda}\,, \tag{1.1.2}$$

tj.

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\,. \tag{1.1.3}$$

U specijalnom slučaju, kada je $\lambda = 1$, imamo deobu duži na jednake delove. Tada se (1.1.2) i (1.1.3) svode redom na

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)$$

i

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Osim pravouglog koordinatnog sistema u upotrebi su i drugi sistemi, koji ponekad na jednostavniji način daju opis tačaka u prostoru E. Ovde ćemo ukazati na dva takva sistema: *polarno-cilindrični* i *sferni*.

Polarno-cilindrični koordinatni sistem. Već u prvoj glavi (odeljak 2.2) uveli smo polarni koordinatni sistem za predstavljanje grafika funkcija i uspostavili vezu između polarnih i pravouglih koordinata u ravni (videti sliku 1.1.5). Sada ćemo definisati tzv. *polarno-cilindrični koordinatni sistem* u prostoru E.

Izaberimo u prostoru E proizvoljnu ravan R i u njoj definišimo polarni koordinatni sistem, a zatim kroz pol O postavimo osu Oz normalno na ravan R (slika 1.1.6). Svaka tačka prostora E, tj. svaki vektor $\overrightarrow{OM}$, može se potpuno opisati pomoću polarnih koordinata ϱ i φ i aplikate z. Za ove koordinate kažemo da su *polarno-cilindrične koordinate*. Njihov opseg vrednosti je sledeći:

$$0 \le \varrho < +\infty, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad -\infty < z < +\infty\,.$$

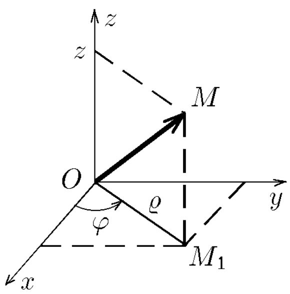
Polarni ugao φ za tačke na z-osi nije određen.

Dakle, polarno-cilindrični sistem je kombinacija polarnog i pravouglog sistema, sa dve polarne koordinate ϱ i φ i jednom Dekartovom koordinatom z. Prema tome, veza između koordinata ovih sistema je data sa

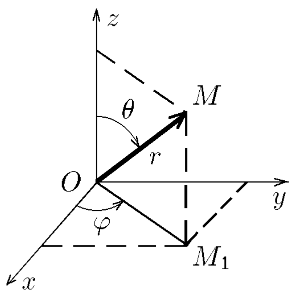
(1.1.4) $$x = \varrho\cos\varphi, \qquad y = \varrho\sin\varphi\,,$$

tj.

$$\varrho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\varrho}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\varrho}\,.$$



Sl. 1.1.6



Sl. 1.1.7

Sferni koordinatni sistem. Uočimo pravougli koordinatni sistem $Oxyz$ sa odgovarajućim polarnim sistemom u ravni Oxy. Neka je M proizvoljna tačka prostora različita od tačke O i neka je M_1 ortogonalna projekcija tačke M na ravan Oxy. Ako sa r označimo rastojanje tačke M od koordinatnog početka O, tj. intenzitet vektora $\overrightarrow{OM}$, sa θ ugao koji ovaj vektor zaklapa sa osom Oz i, najzad, sa φ polarni ugao tačke M_1 (slika 1.1.7), tada se pomoću trojke (r, φ, θ) može potpuno opisati položaj tačke M. Mogući opseg vrednosti ovih koordinata, koje su poznate kao *sferne koordinate*, je:

$$0 \le r < +\infty, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi, \qquad 0 \le \theta \le \pi\,.$$

Koordinata r se naziva *radijus*, dok se za koordinate φ i θ koriste termini *dužina* i *širina*, respektivno.

Za sve tačke na Oz-osi koordinata φ nije određena. Tačka O je određena samo radijusom $r = 0$.

Veza između pravouglih i sfernih koordinata je data sa:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta\,. \tag{1.1.4}$$

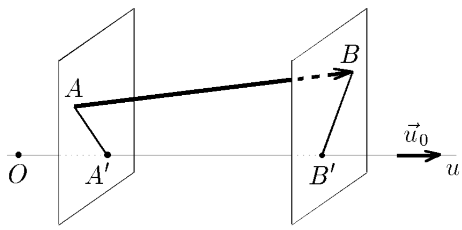
Napomena 1.1.1. Ponekad se sfereni koordinatni sistem definiše tako što se umesto ugla θ uzima njemu komplementarni ugao θ', tj. ugao koji zaklapa radijus vektor $\overrightarrow{OM}$ sa Oxy ravni. U tom slučaju, u (1.1.4) $\sin\theta$ treba zameniti sa $\cos\theta'$, a $\cos\theta$ sa $\sin\theta'$. Mogući opseg vrednosti takve koordinate je $-\pi/2 \le \theta' \le \pi/2$.

1.2. Projekcija vektora na osu

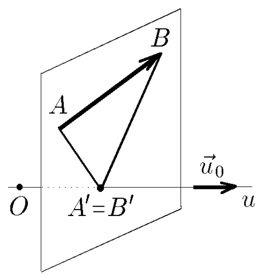
Neka je dat vektor $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ i osa u orijentisana jediničnim vektorom $\boldsymbol{u}_0$. Kroz tačke A i B postavimo ravni koje su normalne na u-osu (slika 1.2.1). Preseci ovih ravni sa osom određuju tačke A' i B'. Vektor $\overrightarrow{A'B'}$ može se izraziti pomoću jediničnog vektora $\boldsymbol{u}_0$

$$\overrightarrow{A'B'} = p\,\boldsymbol{u}_0 = a\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_0\,, \tag{1.2.1}$$

gde je $a = |\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{AB}|$ i φ ugao koji zaklapaju vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\boldsymbol{u}$.



Sl. 1.2.1



Sl. 1.2.2

Definicija 1.2.1. Za veličinu $p = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ iz (1.2.1) kažemo da je *projekcija vektora* $\overrightarrow{AB}$ *na osu* u i označavamo je sa

$$p = \operatorname{Pr}_u \overrightarrow{AB}\,.$$

Umesto Pr_u koristi se i oznaka $\operatorname{Pr}_{\boldsymbol{u}_0}$.

Iz jednakosti $\operatorname{Pr}_u \boldsymbol{a} = a\cos\varphi$ zaključujemo da važi

$$-a \le \operatorname{Pr}_u \boldsymbol{a} \le a\,.$$

Ako vektor $\boldsymbol{a}$ leži u ravni koja je normalna na osu u, tada je $\operatorname{Pr}_u \boldsymbol{a} = 0$ (slika 1.2.2). Očigledno da je $\operatorname{Pr}_u \boldsymbol{a} > 0$ ako je ugao φ oštar, dok je u slučaju tupog ugla projekcija negativna.

Nije teško zaključiti da je preslikavanje $\boldsymbol{a} \mapsto \operatorname{Pr}_u \boldsymbol{a}$ linearno, tj. da važi sledeći rezultat:

Teorema 1.2.1. *Za proizvoljne vektore* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$ *i proizvoljni skalar* λ *važi jednakost*

$$\operatorname{Pr}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \operatorname{Pr}_u \boldsymbol{a} + \operatorname{Pr}_u \boldsymbol{b}\,, \qquad \operatorname{Pr}_u(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda \operatorname{Pr}_u \boldsymbol{a}\,.$$

U odeljku 1.4 definisali smo i razmatrali skalarni proizvod dva vektora iz prostora $V_O(E)$. Korišćenjem projekcije vektora na osu, skalarni proizvod

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi$$

može se predstaviti u obliku

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}| \operatorname{Pr}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \operatorname{Pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}.$$

Na kraju ovog odeljka naglasimo da su koordinate vektora

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},$$

upravo, projekcije vektora $\boldsymbol{a}$ na koordinatne ose, tj.

$$a_1 = \operatorname{Pr}_x \boldsymbol{a}, \quad a_2 = \operatorname{Pr}_y \boldsymbol{a}, \quad a_3 = \operatorname{Pr}_z \boldsymbol{a}.$$

1.3. Vektorski proizvod dva vektora

U odeljku 1.4 definisali smo skalarni proizvod dva vektora iz $V = V_O(E)$. Mogućno je, međutim, definisati i proizvod dva vektora tako da je rezultat vektor. Drugim rečima, uređenom paru $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in V^2$ treba dodeliti treći vektor $\boldsymbol{c} \in V$.

Neka su dati vektori $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ i $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$.

Definicija 1.3.1. *Vektorski proizvod* vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, u oznaci $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, je vektor

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k}\,. \tag{1.3.1}$$

Vektorski proizvod (1.3.1) može se predstaviti u obliku determinante trećeg reda

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{1.3.2}$$

Ponekad, umesto oznake $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ koristi se oznaka $[\boldsymbol{ab}]$.

Iz osobina determinanata sleduje:

Teorema 1.3.1. *Za proizvoljne vektore* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *i svaki skalar* λ *važe jednakosti*

1° $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}\,,$
2° $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}\,,$
3° $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}\,,$
4° $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\,,$
5° $(\lambda\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\,.$

Iz osobina 2° i 5° sleduje da je vektorski proizvod dva kolinearna vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$ jednak nula-vektoru. Važi i obrnuto. Očigledno je da se kolinearnost vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, u skalarnom obliku, može iskazati na način

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda\,.$$

Za bazisne (koordinatne) vektore $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ imamo

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{o}, \qquad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{o}, \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{o}\,.$$

Na osnovu definicije 1.3.1 imamo

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \boldsymbol{i} + 0 \cdot \boldsymbol{j} + 1 \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\,.$$

Slično se može pokazati da su $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$ i $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$. Dakle, imamo

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}\,.$$

Teorema 1.3.2. *Neka je φ $(0 \le \varphi \le \pi)$ ugao između vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Tada se intenzitet vektorskog proizvoda $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ može izraziti u obliku*

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\varphi\,. \tag{1.3.3}$$

Dokaz. Na osnovu (1.3.1) imamo

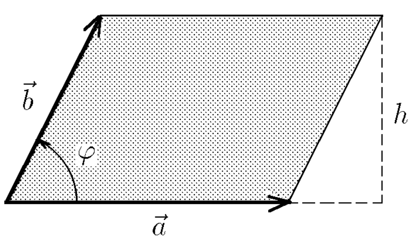
$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) \\ &\qquad - 2a_2a_3b_2b_3 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_1a_2b_1b_2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2, \end{aligned}$$

tj.

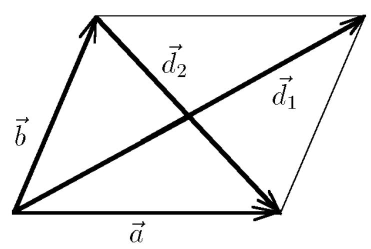
$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\varphi \\ &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\varphi\,. \quad \square \end{aligned}$$

Jednakost (1.3.3) pokazuje da je intenzitet vektorskog proizvoda $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ jednak brojno površini paralelograma konstruisanog nad vektorima $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Zaista, sa sl. 1.3.1 vidimo da je visina paralelograma $h = |\boldsymbol{b}| \sin\varphi$, pa je odgovarajuća površina

$$P = |\boldsymbol{a}|h = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\varphi\,.$$



Sl. 1.3.1



Sl. 1.3.2

Primer 1.3.1. Neka su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ proizvoljni nekolinearni vektori. Za vektorski proizvod vektora $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ imamo

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}) = -2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,.$$

Interpretirajući vektore $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ kao vektore dijagonala paralelograma, konstruisanog nad vektorima $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ (sl. 1.3.2), imamo da je

$$\boldsymbol{d}_1 \times \boldsymbol{d}_2 = -2\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,,$$

odakle sleduje

$$|\boldsymbol{d}_1 \times \boldsymbol{d}_2| = 2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,,$$

tj. površina paralelograma čije su stranice dijagonale $\boldsymbol{d}_1$ i $\boldsymbol{d}_2$ nekog drugog paralelograma jednaka je dvostrukoj površini tog drugog paralelograma. $\triangle$

Da bismo ustanovili pravac i smer vektorskog proizvoda $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ u odnosu na vektore $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, primetimo, najpre, da je skalarni proizvod vektora $\boldsymbol{c}$ i $\boldsymbol{a}$ jednak nuli. Zaista,

$$\boldsymbol{ca} = (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 = 0\,.$$

Kako je, takođe, $\boldsymbol{cb} = 0$, zaključujemo da je vektor $\boldsymbol{c}$ ortogonalan i na vektor $\boldsymbol{a}$ i na vektor $\boldsymbol{b}$. Dakle, geometrijski posmatrano, pravac vektorskog proizvoda $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ je upravan na ravan u kojoj leže vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$.

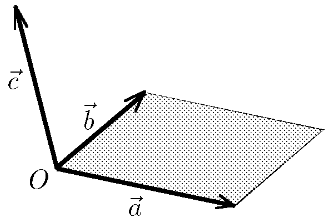
Najzad, ostaje otvoreno pitanje smera vektorskog proizvoda. Od dva moguća smera, pravi smer je onaj koji obezbeđuje da vektori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ čine trijedar desne orijentacije. Da je ovo zaista tako, dovoljno je konstatovati ovu činjenicu za bazisne vektore $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, koji čine trijedar desne orijentacije.

Na osnovu prethodnog, moguće je vektorski proizvod ekvivalentno definisati i na sledeći način:

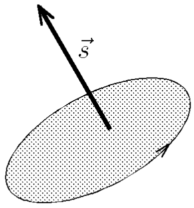
Definicija 1.3.2. Vektorski proizvod $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ je vektor $\boldsymbol{c}$ takav da važi:

1° intenzitet vektora $\boldsymbol{c}$ je brojno jednak površini paralelograma konstruisanog nad vektorima $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$;
2° pravac vektora $\boldsymbol{c}$ je normalan na ravan ovog paralelograma;
3° vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ i njihov vektorski proizvod $\boldsymbol{c}$ obrazuju trijedar desne orijentacije.

Na slici 1.3.3 prikazan je vektorski proizvod $\boldsymbol{c}$ kao vektor koji je normalan na ravan paralelograma konstruisanog nad vektorima $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ i sa njima obrazuje trijedar desne orijentacije.



Sl. 1.3.3



Sl. 1.3.4

U opštem slučaju, svakoj ravnoj figuri može se korespondirati tzv. *vektor površine*. U tom cilju, potrebno je najpre utvrditi smer obilaženja po konturi ravne figure (slika 1.3.4). Vektor površine je tada onaj vektor koji je normalan na ravan figure i s čijeg kraja se usvojeni smer obilaženja konture vidi kao suprotan smeru kretanja kazaljke na časovniku[82)]. Za ovako definisani smer vektora površine kažemo da je saglasan orijentaciji konture.

Vektorski proizvod $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ je, prema tome, vektor površine paralelograma konstruisanog nad vektorima $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, pri čemu se za smer obilaženja po konturi paralelograma uzima smer prvog vektora $\boldsymbol{a}$ u vektorskom proizvodu.

Definicija 1.3.3. *Vektor površine ravne figure* je vektor čiji je:

1° intenzitet brojno jednak veličini površine ravne figure;
2° pravac normalan na ravan figure;
3° smer saglasan orijentaciji konture ravne figure.

Primer 1.3.2. Odredićemo površinu trougla čija su temena u nekolinearnim tačkama M_k, sa radijus vektorima $\boldsymbol{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ (slika 1.3.5).

Kako je površina trougla $\triangle M_1M_2M_3$, u oznaci $P_\triangle$, jednaka polovini površine paralelograma konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{M_1M_2}$ i $\overrightarrow{M_1M_3}$ i kako je

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \qquad \text{i} \qquad \overrightarrow{M_1M_3} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1,$$

imamo

$$P_\triangle = |\boldsymbol{p}| = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \right| = \frac{1}{2} \left| (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) \right| .$$

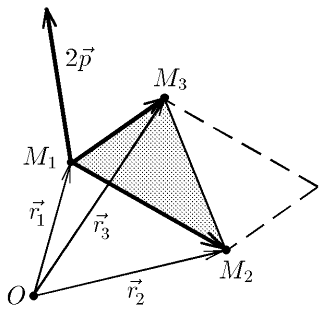
Korišćenjem koordinatnih reprezentacija vektora i jednakosti (1.3.2), dobijamo

$$P_\triangle = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} \right|,$$

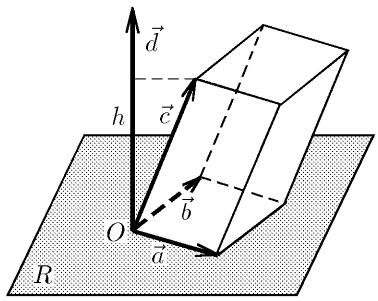
82) U fizici i elektrotehnici se ovo interpretira kao *pravilo desne zavojnice*. Naime, okretanjem desne zavojnice u smeru obilaženja po konturi, njeno pravolinijsko kretanje je u smeru vektora površine.

tj.

$$P_\triangle = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2 \right)^{1/2}.$$



Sl. 1.3.5



Sl. 1.4.1

Ako su sve tri tačke, na primer, u ravni Oxy, tada je $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, pa se prethodna formula svodi na

$$\begin{aligned} P_\triangle &= \frac{1}{2} \left| \, (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \, \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \, x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \, \right|. \quad \triangle \end{aligned}$$

Napomena 1.3.1. Pomoću vektorskog proizvoda veoma često se u fizici i tehnici iskazuju izvesne fizičke veličine. Navešćemo samo neke od njih:

1° Neka sila $\boldsymbol{F}$ deluje u tački M (M je tzv. napadna tačka). Moment sile $\boldsymbol{F}$ u odnosu na tačku O, u oznaci $\boldsymbol{m}$, izražava se vektorskim proizvodom vektora položaja $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ i sile $\boldsymbol{F}$, tj. $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$.

2° Kod krivolinijskog kretanja materijalne tačke M u ravni sa ugaonom brzinom $\boldsymbol{\omega}$, njena periferna brzina $\boldsymbol{v}$ se izražava u obliku $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, gde je $\boldsymbol{r}$ radijus vektor $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$.

3° Neka se provodnik nalazi u homogenom magnetskom polju indukcije $\boldsymbol{B}$. Ako struju u provodniku obrazuju pokretna opterećenja q koja se kreću srednjom brzinom $\boldsymbol{v}$, onda je elektromagnetska sila (po jednom opterećenju q) koja dejstvuje na provodnik jednaka $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ (Lorentzova[83)] sila).

[83)] Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), čuveni holandski fizičar, tvorac klasične elektronske teorije i dobitnik Nobelove nagrade za fiziku 1902. godine.

1.4. Mešoviti proizvod tri vektora

Definicija 1.4.1. Skalarni proizvod vektorskog proizvoda $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ i vektora $\boldsymbol{c}$, u oznaci $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$, naziva se *mešoviti proizvod vektora* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Neka su dati vektori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Konstruišimo paralelopiped nad ovim vektorima i stavimo $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}$ (slika 1.4.1).

Kako je

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{c} = d\,\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{d}}\,\boldsymbol{c}$$

i $d = |\boldsymbol{d}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ površina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, tj. površina osnove prethodno konstruisanog paralelopipeda, i kako je, u našem slučaju, $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{d}}\,\boldsymbol{c} = h > 0$ visina paralelopipeda koja odgovara ovoj osnovi, zaključujemo da

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = dh$$

predstavlja zapreminu V paralelograma konstruisanog nad vektorima $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

Moguća je, međutim, i takva situacija da je $Pr_{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{c} < 0$. Tada je mešoviti proizvod vektora jednak $-V$.

U svakom slučaju, mešoviti proizvod tri vektora po apsolutnoj vrednosti jednak je zapremini paralelopipeda konstruisanog nad ovim vektorima

$$|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}| = V\,.$$

Ako su redom $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$, tada se mešoviti proizvod može izraziti u obliku

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} (c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{1.4.1}$$

s obzirom da je

$$\boldsymbol{i}\boldsymbol{c} = c_1, \qquad \boldsymbol{j}\boldsymbol{c} = c_2, \qquad \boldsymbol{k}\boldsymbol{c} = c_3\,.$$

Ako u determinanti na desnoj strani jednakosti (1.4.1) zamenimo, najpre, prvu i drugu, a zatim drugu i treću vrstu, vrednost determinante se neće promeniti[84]. Na taj način, (1.4.1) svodi se na

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1.4.2}$$

[84] Pri ovakvoj permutaciji vrsta, samo je znak determinante dva puta bio promenjen.

Interpretirajući dobijenu determinantu kao mešoviti proizvod, na osnovu (1.4.1) i (1.4.2), zaključujemo da je $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$. Dakle, pri ovakvoj permutaciji vektora, koju nazivamo ciklička permutacija, vrednost mešovitog proizvoda se ne menja. Tako, u stvari, imamo

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}. \tag{1.4.3}$$

Primetimo da, na osnovu (1.4.3) i osobine skalarnog proizvoda, važe jednakosti $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ i $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$, odakle zaključujemo da je $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$, što kazuje da, u mešovitom proizvodu, skalarni i vektorski proizvod mogu uzajamno da promene mesta.

Međutim, ako permutujemo samo dva vektora, iz osobine determinanata sleduje da mešoviti proizvod menja znak. Dakle, imamo

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})\boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}.$$

Jednostavno se dokazuju i sledeće osobine mešovitog proizvoda:

Teorema 1.4.1. *Za proizvoljne vektore $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ i proizvoljne skalare λ i μ, važe jednakosti*

1° $\lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = (\lambda\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \lambda\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\lambda\boldsymbol{c}$,

2° $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{d}$,

3° $\big((\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}\big)\boldsymbol{d} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})\boldsymbol{d} + \mu(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\boldsymbol{d}$.

Iz osobina determinanata sleduje da je mešoviti proizvod tri vektora jednak nuli ako i samo ako postoji linearna zavisnost među vrstama determinante. Poslednji uslov se svodi na linearnu zavisnost vektora $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, tj. na njihovu komplanarnost. Prema tome, komplanarnost vektora izražena pomoću (videti odeljak 1.1) $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$ (λ, μ skalari) može se iskazati i pomoću mešovitog proizvoda

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = 0\,.$$

Ovo se, takođe, može zaključiti i iz geometrijske interpretacije mešovitog proizvoda. Zaista, zapremina paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ jednaka je nuli ako i samo ako su vektori komplanarni.

Napomena 1.4.1. Neke skalarne veličine u fizici i tehnici mogu se predstaviti mešovitim proizvodom tri vektorske veličine. Navodimo dva primera:

1° Neka se pravolinijski provodnik dužine ℓ, orijentisan kao vektor $\boldsymbol{\ell}$, kreće brzinom $\boldsymbol{v}$ u homogenom magnetskom polju indukcije $\boldsymbol{B}$. Tada se na krajevima tog provodnika indukuje elektromotorna sila određena mešovitim proizvodom $e = \boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$.

2° Pomoću mešovitog proizvoda vektora osnovne translacije $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, izračunava se zapremina primitivne ćelije kristalne rešetke (videti: S. M. Stoilković, *Materijali za elektroniku*, Naučna knjiga komerc, Beograd, 2000).

1.5. Dvostruki proizvod tri vektora

Definicija 1.5.1. Za vektorski proizvod vektora $\boldsymbol{a}$ i vektorskog proizvoda $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, u oznaci $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, kažemo da je *dvostruki proizvod vektora* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Za dvostruki proizvod tri vektora koristi se i termin *dvostruki vektorski proizvod*.

Na osnovu osobine vektorskog proizvoda moguće je zaključiti da su vektori $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ komplanarni, što znači da je dvostruki vektorski proizvod moguće izraziti kao linearnu kombinaciju vektora $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$, tj.

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \lambda \boldsymbol{b} + \mu \boldsymbol{c},$$

gde su λ i μ neki skalari.

Preciznije, važi sledeći rezultat:

Teorema 1.5.1. *Za tri vektora* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *važi*

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}, \tag{1.5.1}$$

gde su $\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}$ *i* $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ *skalarni proizvodi vektora* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{c}$, *i* $\boldsymbol{a}$ *i* $\boldsymbol{b}$, *respektivno.*

Dokaz. Neka su redom $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$ i neka je $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = d_1\boldsymbol{i} + d_2\boldsymbol{j} + d_3\boldsymbol{k}$.

Kako je

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix},$$

imamo

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (a_2d_3 - a_3d_2)\boldsymbol{i} + (a_3d_1 - a_1d_3)\boldsymbol{j} + (a_1d_2 - a_2d_1)\boldsymbol{k}.$$

Odredićemo, najpre, prvu koordinatu dvostrukog vektorskog proizvoda.

Kako je

$$\boldsymbol{d} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k},$$

imamo

$$\begin{aligned} a_2 d_3 - a_3 d_2 &= a_2(b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3(b_3 c_1 - b_1 c_3) \\ &= b_1(a_2 c_2 + a_3 c_3) - c_1(a_2 b_2 + a_3 b_3), \end{aligned}$$

odakle, dodavanjem i oduzimanjem člana $a_1 b_1 c_1$, dobijamo

$$\begin{aligned} a_2 d_3 - a_3 d_2 &= b_1(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) - c_1(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ &= b_1(\boldsymbol{ac}) - c_1(\boldsymbol{ab}). \end{aligned}$$

Slično, nalazimo

$$\begin{aligned} a_3 d_1 - a_1 d_3 &= b_2(\boldsymbol{ac}) - c_2(\boldsymbol{ab}), \\ a_1 d_2 - a_2 d_1 &= b_3(\boldsymbol{ac}) - c_3(\boldsymbol{ab}). \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{ac})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}. \quad \square$$

Jednakost (1.5.1) može se predstaviti u obliku determinante

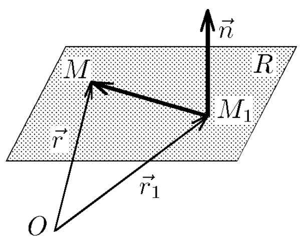
$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{ac} \end{vmatrix}.$$

2. RAVAN I PRAVA

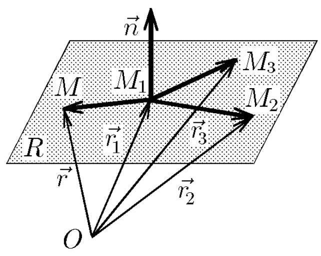
2.1. Razni oblici jednačine ravni

Neka je u prostoru $V_O(E)$ definisan pravougli koordinatni sistem. Koordinate tačaka koje leže u nekoj ravni ne mogu biti proizvoljne, već moraju zadovoljavati izvesne uslove date tzv. *jednačinom ravni.*

Pretpostavimo da ravan R prolazi kroz tačku M_1 i da je normalna na dati vektor $\boldsymbol{n}$ (slika 2.1.1). Odredićemo jednačinu skupa svih tačaka M koje leže u ravni R. Neka su radijus vektori tačaka M_1 i M redom $\boldsymbol{r}_1$ i $\boldsymbol{r}$. Kako



Sl. 2.1.1



Sl. 2.1.2

vektor $\overrightarrow{M_1M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$ leži u ravni R to je on normalan na dati vektor $\boldsymbol{n}$, pa je njihov skalarni proizvod jednak nuli, tj.

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{n} = 0\,. \tag{2.1.1}$$

Očigledno, važi i obrnuto, tj. ako radijus vektor $\boldsymbol{r}$ proizvoljne tačke $M \in E$ zadovoljava jednačinu (2.1.1), tada tačka M pripada ravni R.

Ovim smo dobili jednačinu ravni koja prolazi kroz datu tačku M_1 i koja je normalana na dati vektor $\boldsymbol{n}$. Za vektor $\boldsymbol{n}$ kažemo da je *vektor normale.*

Ako stavimo $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n} = -D$, (2.1.1) se svodi na tzv. *opšti oblik* jednačine ravni

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{n} + D = 0\,. \tag{2.1.2}$$

Ako uzmemo da su koordinate vektora normale redom A, B, C, tj. $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$, odgovarajući skalarni opšti oblik jednačine ravni je

$$Ax + By + Cz + D = 0\,,$$

što se dobija iz (2.1.2) stavljanjem $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. Takođe, za $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ iz (2.1.1) dobijamo odgovarajući skalarni analogon

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0\,.$$

Kako je ravan potpuno određena pomoću tri nekolinearne tačke M_k, sa koordinatama x_k, y_k, z_k $(k = 1, 2, 3)$, korišćenjem (2.1.1) moguće je naći jednačinu te ravni R ako se prethodno odredi vektor normale $\boldsymbol{n}$. Kako vektori

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \qquad \text{i} \qquad \overrightarrow{M_1M_3} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1$$

leže u ravni R (slika 2.1.2), za vektor normale se može uzeti njihov vektorski proizvod. Dakle,

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)\,,$$

pa je odgovarajuća jednačina ravni data mešovitim vektorskim proizvodom

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\big[(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)\big] = 0\,. \tag{2.1.3}$$

Interpretirajući mešoviti vektorski proizvod u (2.1.3) kao determinantu trećeg reda, dolazimo do skalarne jednačine

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{2.1.4}$$

Ako tačke M_k $(k = 1, 2, 3)$ odaberemo na koordinatnim osama, tj. uzmemo $\boldsymbol{r}_1 = a\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{r}_2 = b\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{r}_3 = c\boldsymbol{k}$, na osnovu (2.1.3) dobijamo

$$(\boldsymbol{r} - a\boldsymbol{i})\big[(b\boldsymbol{j} - a\boldsymbol{i}) \times (c\boldsymbol{k} - a\boldsymbol{i})\big] = 0\,,$$

tj.

$$(\boldsymbol{r} - a\boldsymbol{i})(bc\boldsymbol{i} + ac\boldsymbol{j} + ab\boldsymbol{k}) = 0\,.$$

Iz ove jednačine, ili direktno iz (2.1.4), sleduje tzv. *segmentni oblik* jednačine ravni

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1\,, \tag{2.1.5}$$

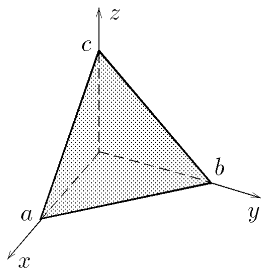
gde su a, b, c odgovarajući odsečci na koordinatnim osama (slika 2.1.3). Do segmentnog oblika možemo doći i iz opšteg oblika (2.1.2) deljenjem sa $-D \neq 0$. Tako dobijamo

$$\boldsymbol{r} \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{-D} = 1. \tag{2.1.6}$$

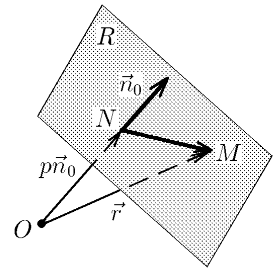
Ako stavimo $A/(-D) = a$, $B/(-D) = b$, $C/(-D) = c$, imamo

$$\frac{\boldsymbol{n}}{-D} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k},$$

pa se (2.1.6) svodi na (2.1.5). Napomenimo da slučaj $D = 0$ odgovara ravni koja prolazi kroz koordinatni početak.



Sl. 2.1.3



Sl. 2.1.4

Od interesa je proučiti i tzv. *normalni oblik* jednačine ravni. Neka je p odstojanje pola O od ravni R, tj. $\overline{ON} = p > 0$, i neka je $\boldsymbol{n}_0$ jedinični vektor normale za ravan R (slika 2.1.4). Kako je

$$\overrightarrow{ON} = p\boldsymbol{n}_0 \qquad \text{i} \qquad |\boldsymbol{n}_0| = 1,$$

imamo

$$(\boldsymbol{r} - p\boldsymbol{n}_0)\boldsymbol{n}_0 = 0,$$

tj.

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_0 - p = 0\,. \tag{2.1.7}$$

Ovo je normalni oblik jednačine ravni.

S obzirom da svaki vektor može da se izrazi pomoću kosinusa uglova α, β, γ, koje ovaj vektor zaklapa redom sa vektorima $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ (videti (1.5.7)), to za jedinični vektor $\boldsymbol{n}_0$ imamo

$$\boldsymbol{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Kako je $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, iz (2.1.7) sleduje odgovarajući skalarni oblik

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Normalni oblik jednačine ravni možemo dobiti i iz opšteg oblika (2.1.2), deljenjem sa $n = |\boldsymbol{n}|$ ili sa $-n$, pri čemu u jednačini

$$\boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{\pm n} + \frac{D}{\pm n} = 0$$

treba izabrati znak + ili − tako da je

$$\frac{D}{\pm n} = -p < 0\,.$$

Odgovarajući skalarni analogon ima oblik

$$\frac{Ax + By + Cy + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0\,, \tag{2.1.8}$$

gde je

$$\frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = -p < 0\,.$$

Normalni oblik jednačine ravni je veoma pogodan za određivanje odstojanja neke tačke M_1 od date ravni R, tj. za nalaženje intenziteta vektora $d = |\overrightarrow{M_2M_1}|$, gde je M_2 ortogonalna projekcija tačke M_1 na ravan R. Kako tačka M_2 pripada ravni R, njen radijus vektor $\boldsymbol{r}_2$ zadovoljava jednačinu (2.1.7), tj. važi

$$\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{n}_0 - p = 0. \tag{2.1.9}$$

Vektor $\overrightarrow{M_2M_1}$ je kolinearan sa $\boldsymbol{n}_0$, tako da se može izraziti u obliku $\overrightarrow{M_2M_1} = \lambda\boldsymbol{n}_0$. Kako je $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \lambda\boldsymbol{n}_0$ (slika 2.1.5), na osnovu (2.1.9) dobijamo

$$(\boldsymbol{r}_1 - \lambda\boldsymbol{n}_0)\boldsymbol{n}_0 - p = 0,$$

tj.

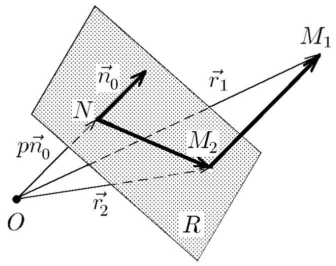
$$\lambda = \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}_0 - p\,.$$

Dakle, traženo odstojanje je

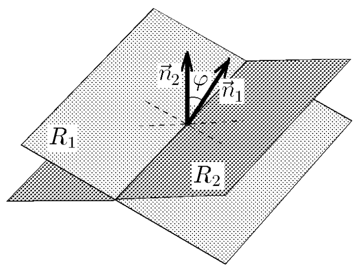
$$d = |\lambda| = |\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}_0 - p|\,.$$

Ako je $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, iz skalarnog oblika (2.1.8) sleduje

$$d = \left|\,\frac{Ax_1 + By_1 + Cy_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,\right|\,.$$



Sl. 2.1.5



Sl. 2.1.6

Na kraju ovog odeljka razmotrimo slučaj dve ravni

$$(R_1) \quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1 + D_1 = 0, \qquad (R_2) \quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2 + D_2 = 0. \tag{2.1.10}$$

Ravni R_1 i R_2 su paralelne ili se poklapaju ako su im vektori $\boldsymbol{n}_1$ i $\boldsymbol{n}_2$ kolinearni, tj. ako je $\boldsymbol{n}_2 = \lambda \boldsymbol{n}_1$, gde je λ skalar. Ovaj uslov *paralelnosti* može biti izražen i u obliku

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{o}.$$

Kada se ravni R_1 i R_2 seku (slika 2.1.6), ugao φ između ovih ravni je, u stvari, ugao između vektora narmala $\boldsymbol{n}_1$ i $\boldsymbol{n}_2$. Dakle,

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2}{n_1 n_2} \qquad (n_1 = |\boldsymbol{n}_1|,\ n_2 = |\boldsymbol{n}_2|).$$

Uslov ortogonalnosti ravni R_1 i R_2 može se izraziti u obliku

$$\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = 0\,.$$

Ako su ravni date skalarnim jednačinama

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\,, \tag{2.1.11}$$

tada se uslov ortogonalnosti svodi na

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,$$

a uslov paralelnosti na

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}\,.$$

2.2. Razni oblici jednačina prave

Neka su date ravni R_1 i R_2 kao u (2.1.10) i neka je $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 \neq \boldsymbol{o}$, tj. neka se ravni seku. Tada njihov presek određuje pravu p, koja se može predstaviti skupom jednačina

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1 + D_1 = 0, \qquad \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2 + D_2 = 0. \tag{2.2.1}$$

Za jednačine (2.2.1) kažemo da predstavljaju *opšti vektorski oblik* jednačina prave u prostoru. Odgovarajuće skalarne jednačine su date sa (2.1.11).

Skup svih ravni koje prolaze kroz presek ravni R_1 i R_2 naziva se *pramen ravni*. Svaka ravan koja pripada ovom pramenu može se definisati jednačinom

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1 + D_1 + \lambda(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2 + D_2) = 0,$$

tj.

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{n}_1 + \lambda\boldsymbol{n}_2) + (D_1 + \lambda D_2) = 0, \tag{2.2.2}$$

i dobija se iz (2.2.2) za neku konkretnu vrednost λ. Napomenimo da se ravan R_2 može dobiti iz (2.2.2) deljenjem sa $\lambda \neq 0$, a zatim prelaženjem na graničnu vrednost kada $\lambda \to +\infty$ (ili $-\infty$).

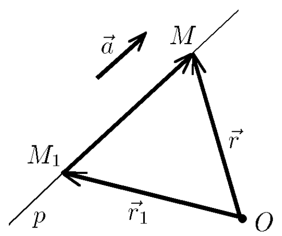
Prava p se može definisati i pomoću dve proizvoljne ravni pramena (2.2.2).

Prava p se daleko češće zadaje pomoću tačke M kroz koju ona prolazi i vektora $\boldsymbol{a}$ kome je paralelna.

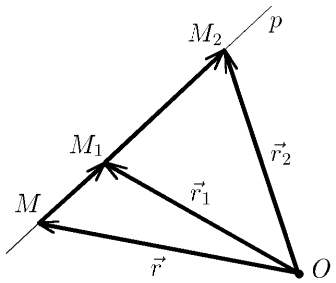
Neka je M proizvoljna tačka prave p i neka su $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{r}_1$ radijus vektori tačaka M i M_1, respektivno (slika 2.2.1). Kako su vektori $\boldsymbol{a}$ i $\overrightarrow{M_1M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$ kolinearni, imamo da je $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = \lambda\boldsymbol{a}$, gde je λ skalar. Dakle,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\boldsymbol{a} \tag{2.2.3}$$

predstavlja *vektorsku jednačinu prave kroz datu tačku*. Za $\boldsymbol{a}$ kažemo da je *vektor pravca* prave p.



Sl. 2.2.1



Sl. 2.2.2

Kako se uslov kolinearnosti može izraziti i pomoću vektorskog proizvoda, imamo

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o},$$

tj.

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}, \tag{2.2.4}$$

gde smo stavili $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Ako uzmemo $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, iz (2.2.3) sleduju tzv. *parametarske jednačine prave*:

$$x = x_1 + \lambda a_1, \quad y = y_1 + \lambda a_2, \quad z = z_1 + \lambda a_3\,. \tag{2.2.5}$$

Eliminacijom parametra λ iz (2.2.5) dobijamo tzv. *simetrični oblik* jednačina prave:

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}\,. \tag{2.2.6}$$

Simetrični oblik (2.2.6) može se izraziti i u obliku

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}\,,$$

gde su α, β, γ uglovi koje zaklapa vektor $\boldsymbol{a}$ sa koordinatnim vektorima $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, respektivno.

Prava p je potpuno određena dvema tačkama M_1 i M_2. Neka su radijus vektori ovih tačaka redom $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ (slika 2.2.2). Kako se vektor $\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ može uzeti kao vektor pravca prave p, na osnovu (2.2.3), dobijamo vektorsku jednačinu

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1), \tag{2.2.7}$$

tj.

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{o},$$

odakle sleduje

$$\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\,.$$

Odgovarajući simetrični oblik jednačina prave kroz dve tačke je

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\,.$$

Primer 2.2.1. Simetrični oblik jednačina prave koja prolazi kroz date tačke $(1,-1,3)$ i $(5,-4,3)$ je

$$\frac{x-1}{5-1}=\frac{y+1}{-4+1}=\frac{z-3}{3-3},$$

tj.

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-3}{0}.$$

Vektor $4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$ je vektor pravca ove prave. Odgovarajuće parametarske jednačine prave su:

$$x=1+4\lambda,\quad y=-1-3\lambda,\quad z=3,$$

gde je λ proizvoljan skalar. △

Sada ćemo razmotriti problem svođenja jednog vektorskog oblika jednačina prave na drugi. To su, u stvari, oblici (2.2.1), (2.2.3) i (2.2.4).

1. (2.2.3) $\Rightarrow$ (2.2.4). Ovo je pokazano ranije, gde je $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{a}$.

2. (2.2.4) $\Rightarrow$ (2.2.3). Ako (2.2.4) pomnožimo vektorski sa $\boldsymbol{a}$, imamo

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$

odakle, razvijanjem dvostrukog vektorskog proizvoda, dobijamo

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a})\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$

tj.

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}+\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}, \tag{2.2.8}$$

što predstavlja oblik (2.2.3) sa

$$\boldsymbol{r}_1=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2},\qquad \lambda=\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{a}|^2}.$$

3. (2.2.1) $\Rightarrow$ (2.2.4). Množenjem druge jednačine u (2.2.1) sa $\boldsymbol{n}_1$ i prve sa $-\boldsymbol{n}_2$, a zatim sabiranjem tako dobijenih jednačina, imamo

$$(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2)\boldsymbol{n}_1-(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{n}_2=D_1\boldsymbol{n}_2-D_2\boldsymbol{n}_1.$$

Korišćenjem dvostrukog vektorskog proizvoda, poslednja jednačina postaje

$$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)=D_1\boldsymbol{n}_2-D_2\boldsymbol{n}_1, \tag{2.2.9}$$

što predstavlja oblik (2.2.4), pri čemu je

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2, \qquad \boldsymbol{b} = D_1\boldsymbol{n}_2 - D_2\boldsymbol{n}_1 \,.$$

4. (2.2.3) $\Rightarrow$ (2.2.1). Množenjem (2.2.3) bilo kojim vektorima $\boldsymbol{n}_1$ i $\boldsymbol{n}_2$ ($\boldsymbol{n}_1 \neq \boldsymbol{n}_2$) koji su ortogonalni na $\boldsymbol{a}$, dobijamo

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}_1 + \lambda\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_1 \qquad \text{i} \qquad \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}_2 + \lambda\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_2,$$

tj.

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_1 + D_1 = 0 \qquad \text{i} \qquad \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}_2 + D_2 = 0,$$

gde smo stavili $D_1 = -\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}_1$ i $D_2 = -\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}_2$. Napomenimo da ova reprezentacija nije jedinstvena. Obično se kao $\boldsymbol{n}_1$ i $\boldsymbol{n}_2$ uzimaju dva od vektora $(a_2, -a_1, 0)$, $(a_3, 0, -a_1)$, $(0, a_3, -a_2)$, gde je $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, a što je u skladu sa (2.2.6).

Primer 2.2.2. Neka su date dve ravni

$$x + 2y - z + 1 = 0, \qquad x - y + z + 3 = 0. \tag{2.2.10}$$

Ove ravni se seku jer je

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (1, 2, -1) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -3) \neq \boldsymbol{o}\,.$$

Njihov presek određuje pravu p čiji je vektor pravca

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (1, -2, -3).$$

Kako je

$$\boldsymbol{b} = D_1\boldsymbol{n}_2 - D_2\boldsymbol{n}_1 = (1, -1, 1) - 3(1, 2, -1) = (-2, -7, 4),$$

na osnovu (2.2.9), jednačina

$$\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}) = -2\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$$

predstavlja pravu p.

Kako je $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{14}$ i

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & -7 & 4 \end{vmatrix} = -29\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 11\boldsymbol{k},$$

na osnovu (2.2.8), dobijamo

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{14}(-29\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 11\boldsymbol{k}) + \lambda(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}).$$

Odgovarajući simetrični oblik jednačina prave je

$$\frac{x + 29/14}{1} = \frac{y - 1/7}{-2} = \frac{z + 11/14}{-3}. \tag{2.2.11}$$

Do simetričnog oblika jednačina prave mogli smo doći jednostavnije uzimajući proizvoljnu tačku prave p. Ako, na primer, stavimo $z = 0$, iz (2.2.10) sleduje $x = -7/3$ i $y = 2/3$, što znači da tačka $(-7/3, 2/3, 0)$ leži na pravoj p, čiji je simetrični oblik

$$\frac{x + 7/3}{1} = \frac{y - 2/3}{-2} = \frac{z}{-3}. \tag{2.2.12}$$

Može se pokazati da su jednačine (2.2.11) i (2.2.12) ekvivalentne. Zaista, odgovarajuće parametarske jednačine

$$x = -\frac{29}{14} + \lambda, \qquad y = \frac{1}{7} - 2\lambda, \qquad z = -\frac{11}{14} - 3\lambda$$

i

$$x = -\frac{7}{3} + \mu, \qquad y = \frac{2}{3} - 2\mu, \qquad z = -3\mu$$

su ekvivalentne jer se za $\mu = \lambda + 11/42$ svode jedne na druge. $\triangle$

Razmotrimo sada slučaj dve prave

$$(p_1) \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda\boldsymbol{a}, \qquad\qquad (p_2) \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \mu\boldsymbol{b}. \tag{2.2.13}$$

Za ugao φ koji zaklapaju vektori $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ kažemo da je ugao između ove dve prave. Dakle,

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{ab} \qquad (a = |\boldsymbol{a}|,\ b = |\boldsymbol{b}|).$$

Uslov normalnosti pravih može se iskazati pomoću $\boldsymbol{ab} = 0$, dok se uslov paralelnosti iskazuje kolinearnošću vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ ili pomoću $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$.

Primer 2.2.3. Neka su jednačinama (2.2.13) date dve mimoilazne prave p_1 i p_2. Odredićemo najkraće rastojanje između ovih pravih. Štaviše, odredićemo jednačine zajedničke normale, tj. jednačine prave p koja prolazi kroz najkraće rastojanje pravih p_1 i p_2. Vektor pravca prave p je, očigledno, vektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Postavimo, najpre, ravan R koja prolazi kroz pravu p_2 i paralelna je pravoj p_1, a zatim konstruišimo dve ravni R_1 i R_2 koje su normalne na R i prolaze kroz prave p_1 i p_2, respektivno (slika 2.2.3).

Vektor normale ravni R je, u stvari, vektor pravca prave p, pa je jednačina ravni R data sa

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0. \tag{2.2.14}$$

Kako je ravan R_1 normalna na ravan R i prolazi kroz pravu p_1, to se za njen vektor normale može uzeti vektor $\boldsymbol{n}_1=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}$. Slično, za vektor normale ravni R_2 može se uzeti $\boldsymbol{n}_2=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}$. Imajući u vidu da ove ravni prolaze kroz prave p_1 i p_2, tj. kroz tačke M_1 i M_2 sa radijus vektorima $\boldsymbol{r}_1$ i $\boldsymbol{r}_2$, respektivno, jednostavno dobijamo njihove vektorske jednačine:

$$(R_1)\quad (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}]=0,\qquad (R_2)\quad (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}]=0.$$

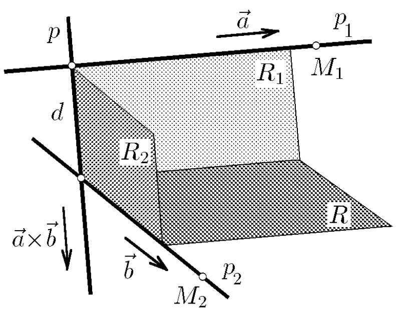
Ovaj skup jednačina predstavlja jednačine zajedničke normale p pravih p_1 i p_2. Jasno je da je prava p normalna na ravan R i da seče obe prave p_1 i p_2. Rastojanje između presečnih tačaka je, u stvari, najkraće rastojanje između mimoilaznih pravih. Ono se, međutim, može odrediti i kao odstojanje bilo koje tačke prave p_1 od ravni R jer je prava p_1 paralelna sa njom, a prava p_2 leži u njoj. Prema tome, ako uzmemo, na primer, tačku M_1 i normalni oblik jednačine (2.2.14), dobijamo najkraće rastojanje

$$d=\frac{|(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}. \quad\triangle \tag{2.2.15}$$

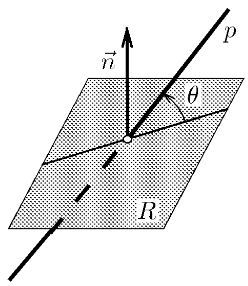
Na osnovu (2.2.15) zaključujemo da se uslov preseka dve prave može iskazati u obliku

$$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0\,. \tag{2.2.16}$$

Do ovog uslova može se doći i jednostavnije. Naime, ako se prave p_1 i p_2 seku, to su onda vektori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ komplanarni, pa je njihov mešoviti proizvod jednak nuli.



Sl. 2.2.3



Sl. 2.3.1

Uslov (2.2.16) se može predstaviti i u skalarnom obliku

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

gde smo uzeli da su vektori pravaca pravih p_1 i p_2 redom $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, kao i $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

2.3. Uzajamni odnos prave i ravni

Posmatrajmo pravu p i ravan R čije su jednačine

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{r}\boldsymbol{n} + D = 0\,. \tag{2.3.1}$$

Ako je $\boldsymbol{a}\boldsymbol{n} = 0$, prava p je paralelna ravni R ili leži u njoj.

Ako je $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{n}$, tj. ako je $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{o}$, prava je normalna na ravan R.

U opštem slučaju, kada je $\boldsymbol{a}\boldsymbol{n} \neq 0$, prava seče ravan. Za ugao θ koji zaklapa prava p sa svojom projekcijom u ravni R kažemo da je ugao između prave i ravni. To je, u stvari, ugao koji je komplementaran uglu između vektora pravca prave p i vektora normale ravni R (slika 2.3.1). Dakle,

$$\sin\theta = \cos(\pi/2 - \theta) = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}}{an} \qquad (a = |\boldsymbol{a}|,\ n = |\boldsymbol{n}|).$$

Kako radijus vektor tačke preseka prave i ravni mora zadovoljavati obe jednačine u (2.3.1), imamo

$$(\boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{a})\boldsymbol{n} + D = 0,$$

tj.

$$\lambda = -\frac{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n} + D}{\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}}\,.$$

Dakle, radijus vektor tačke preseka je

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \frac{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n} + D}{\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{a}\,.$$

Primer 2.3.1. Neka su date prava p i ravan R pomoću

$$(p) \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}, \qquad (R) \quad x + 5y - z - 10 = 0.$$

Ovde je $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$ i $\boldsymbol{n} = (1, 5, -1)$.

Kako su parametarske jednačine prave p

$$x = 1 + \lambda, \quad y = 2 + 2\lambda, \quad z = 3 + 3\lambda, \tag{2.3.2}$$

iz jednačine ravni dobijamo

$$1 + \lambda + 5(2 + 2\lambda) - (3 + 3\lambda) - 10 = 0,$$

tj. $\lambda = 1/4$. Sada, zamenom ove vrednosti u (2.3.2), nalazimo

$$x = \frac{5}{4}, \qquad y = \frac{5}{2}, \qquad z = \frac{15}{4}.$$

Dakle, presek prave p i ravni R je u tački $(5/4, 5/2, 15/4)$.

Kako je $a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{14}$, $n = |\boldsymbol{n}| = \sqrt{27}$ i $\boldsymbol{an} = 8$, za ugao θ između prave i ravni važi

$$\sin\theta = \frac{\boldsymbol{an}}{an} = \frac{4\sqrt{42}}{63}. \quad \triangle$$

Primer 2.3.2. Neka je data ravan R pomoću $x + 2y - z - 5 = 0$ i tačka M_1 sa koordinatama $(1, 2, 3)$. Odredićemo pravu p koja je normalna na ravan R i prolazi kroz tačku M_1. Za vektor pravca takve prave može se uzeti vektor normale ravni R, tj. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n} = (1, 2, -1)$. Dakle, simetrični oblik jednačina prave p je

$$\frac{x-1}{1} = \frac{x-2}{2} = \frac{x-3}{-1}.$$

Prema tome, presek prave p i ravni R je u tački $(3/2, 3, 5/2)$. $\triangle$

3. POVRŠI DRUGOG REDA

3.1. Kvadratne forme i hiperpovrši drugog reda

U odeljku 2.6, glava II, definisana je kvadratna forma $\mathcal{F}\colon V_n \to \mathbb{R}$ pomoću

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\bar{x}_i, \tag{3.1.1}$$

gde je $V_n = \mathbb{C}^n$ i matrica $A = [a_{ij}]_1^n$ hermitska.

U daljem izlaganju, uzećemo da je A simetrična realna matrica i da je V_n skup realnih vektora $\boldsymbol{x} = [\,x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n\,]^T$. U tom slučaju, $\bar{x}_i$ u (3.1.1) treba zameniti sa x_i.

Osnovni zadatak vezan za kvadratne forme sastoji se u transformaciji forme na najprostiji mogući oblik primenom linearne transformacije koordinata $x_1, x_2, \ldots, x_n$ u $y_1, y_2, \ldots, y_n$, pomoću regularne transformacione matrice $P = [p_{ij}]_1^n$ (videti odeljak 1.2, glava IV).

Dakle, neka je $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$. Tada je

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (AP\boldsymbol{y}, P\boldsymbol{y}) = (P^T AP\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}),$$

tj.

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = (B\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \mathcal{G}(\boldsymbol{y}),$$

gde je $B = P^T AP$ matrica transformisane kvadratne forme $\mathcal{G}(\boldsymbol{y})$. Očigledno, izborom matrice P moguće je menjati oblik matrice kvadratne forme.

Matrica kvadratne forme je simetrična i može se predstaviti u obliku proizvoda

$$A = Q^T \Lambda Q,$$

gde je Q ortogonalna matrica ($Q^T Q = I$), a $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ dijagonalna matrica. Ako stavimo $\boldsymbol{y} = Q\boldsymbol{x}$, imamo

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (Q^T \Lambda Q\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\Lambda Q\boldsymbol{x}, Q\boldsymbol{x}) = (\Lambda \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}),$$

tj.

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \tag{3.1.2}$$

Za dobijenu kvadratnu formu (3.1.2) kažemo da je *kanonička*. Svaka kanonička kvadratna forma može se dalje svesti na tzv. *normalnu* kvadratnu formu kod koje koeficijenti $\lambda_i \in \{-1, 0, 1\}$. Takva forma ima oblik

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{z}) = z_1^2 + \cdots + z_r^2 - z_{r+1}^2 - \cdots - z_m^2. \tag{3.1.3}$$

Ne umanjujući opštost razmatranja, možemo pretpostaviti da su koeficijenti $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ u (3.1.2) pozitivni, $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m$ negativni, a ostali $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ jednaki nuli. Tada, stavljanjem

$$z_i = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i}\, y_i, & 1 \le i \le r, \\ \sqrt{-\lambda_i}\, y_i, & r+1 \le i \le m, \\ \quad y_i, & m+1 \le i \le n, \end{cases}$$

(3.1.2) se redukuje na (3.1.3).

Definicija 3.1.1. *Hiperpovrš drugog reda* u prostoru $V_n = \mathbb{R}^n$ predstavlja geometrijsko mesto tačaka, čije koordinate zadovoljavaju jednačinu

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) + c = 0, \tag{3.1.4}$$

gde je $A = [a_{ij}]_1^n$ realna simetrična matrica, $\boldsymbol{b} = [\, b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n \,]^T$ realni vektor i c realna konstanta.

U slučaju $n = 3$, (3.1.4) predstavlja *površ drugog reda*, a u slučaju $n = 2$ *krivu drugog reda*.

Kao i u slučaju kvadratne forme, (3.1.4) može se transformisati na kanoničku formu. Ne ulazeći u detalje, ovde dajemo samo pregled kanoničkih formi u slučaju $n = 2$ i $n = 3$.

1° Slučaj $n = 2$. Ovde se (3.1.4) svodi na jedan od kanoničkih oblika[85)]

$$\begin{cases} \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + a_0 = 0, \\ \lambda_2 y^2 + b_0 x = 0, \\ \lambda_1 x^2 + a_0 = 0, \end{cases}$$

pri čemu smo za koordinate uzeli x i y.

2° Slučaj $n = 3$. Površi drugog reda (3.1.4) transformišu se na jedan od sledećih kanoničkih oblika

$$\begin{cases} \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + a_0 = 0, \\ \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + b_0 z = 0, \\ \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + a_0 = 0, \\ \lambda_2 y^2 + b_0 x = 0, \\ \lambda_1 x^2 + a_0 = 0. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

U sledećem odeljku razmatraćemo kanoničke oblike površi drugog reda (3.1.5).

3.2. Površi drugog reda u $\mathbb{R}^3$

Analizijamo najpre jednačinu

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + a_0 = 0. \tag{3.2.1}$$

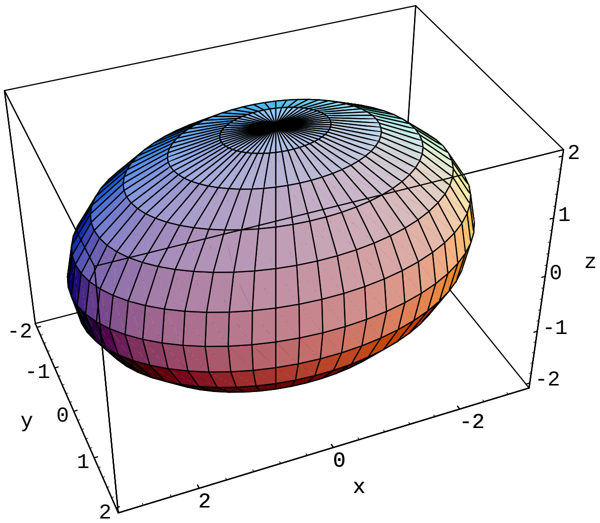
85) Krive drugog reda (elipsa, hiperbola, parabola) izučavaju se u srednjoj školi.

Razlikovaćemo više slučajeva:

(1) SLUČAJ $a_0 \neq 0$, $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2) = \operatorname{sgn}(\lambda_3) = -\operatorname{sgn}(a_0)$. Tada, stavljajući $\lambda_1 a^2 = \lambda_2 b^2 = \lambda_3 c^2 = -a_0$, (3.2.1) se svodi na kanoničku jednačinu elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3.2.2}$$

Površ poznata kao *elipsoid* ima centar simetrije u koordinatnom početku (videti sl. 3.2.1). Brojevi a, b, c nazivaju se *poluose elipsoida*. Presek elipsoida sa bilo kojom ravni daje elipsu.



Sl. 3.2.1

Za $a = b = c = R$, (3.2.2) se svodi na jednačinu sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

čiji je poluprečnik R. Inače, *sfera* poluprečnika R i sa centrom u tački (p, q, r) ima sledeću jednačinu

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2 = R^2.$$

(2) SLUČAJ $a_0 \neq 0$, $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2) = \operatorname{sgn}(\lambda_3) = \operatorname{sgn}(a_0)$. Standardna zamena koeficijenata daje

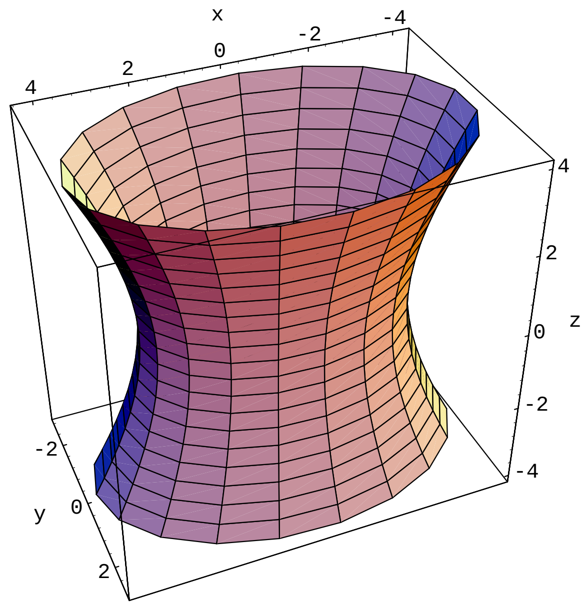
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

odakle zaključujemo da nijedna tačka iz $\mathbb{R}^3$ ne zadovoljava jednačinu.

(3) SLUČAJ $a_0 = 0$, $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2) = \operatorname{sgn}(\lambda_3)$. Ovde dobijamo jednačinu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

koju zadovoljava samo jedna tačka – koordinatni početak $(0, 0, 0)$.



Sl. 3.2.2

(4) SLUČAJ $a_0 \neq 0$, $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2) = -\operatorname{sgn}(\lambda_3) = -\operatorname{sgn}(a_0)$. Standardna zamena koeficijenata daje jednačinu

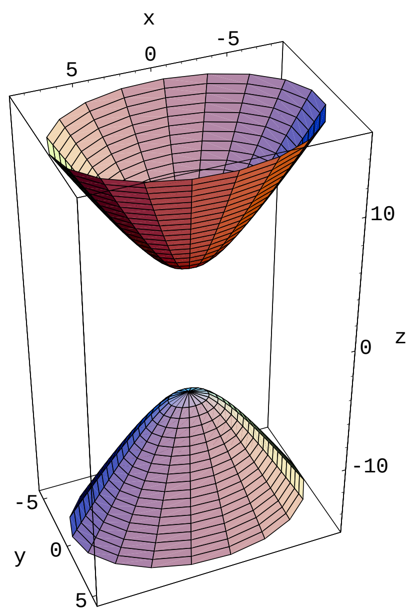
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{3.2.3}$$

koja opisuje površ poznatu kao *jednograni hiperboloid* (sl. 3.2.2). Presek (3.2.3) sa ravni $z = h$ daje elipsu

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad z = h,$$

gde su

$$\alpha = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \qquad \beta = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}.$$



Sl. 3.2.3

(5) Slučaj $a_0 \neq 0$, $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2) = \operatorname{sgn}(a_0) = -\operatorname{sgn}(\lambda_3)$. Ovde dobijamo jednačinu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

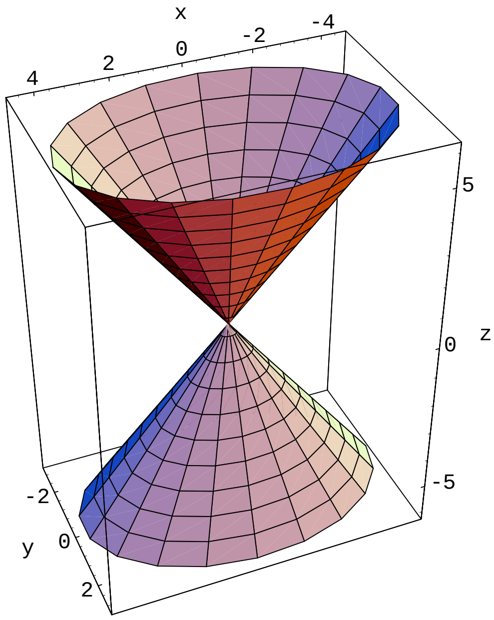
koja opisuje tzv. *dvograni hiperboloid* (sl. 3.2.3). Presek takvog hiperboloida sa ravni $z = h$ moguć je samo za $|h| \geq c$, i pritom daje elipse

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad z = h,$$

čije su poluose

$$\alpha = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\,, \qquad \beta = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\,.$$

Za $|h| < c$ ne postoji presek. Presek dvogranog hiperboloida sa ravni Oxz ili Oyz daje hiperbole.



Sl. 3.2.4

(6) SLUČAJ $a_0 = 0$, $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2) = -\operatorname{sgn}(\lambda_3)$. Ovde imamo jednačinu

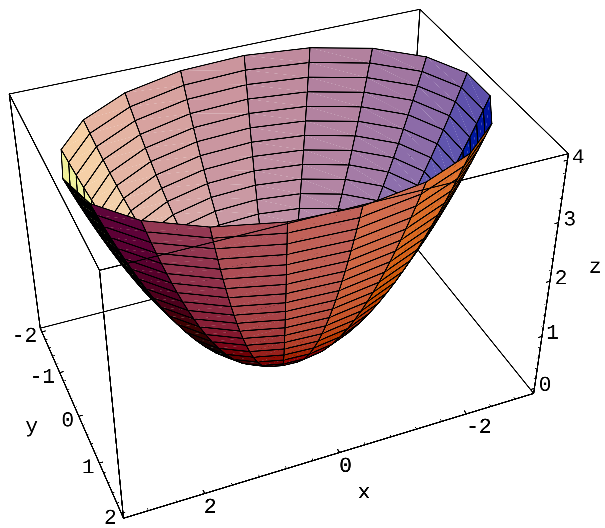
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

koja određuje površ poznatu kao *eliptički konus* (sl. 3.2.4). Presek takvog konusa sa ravni $z = h$ daje elipsu.

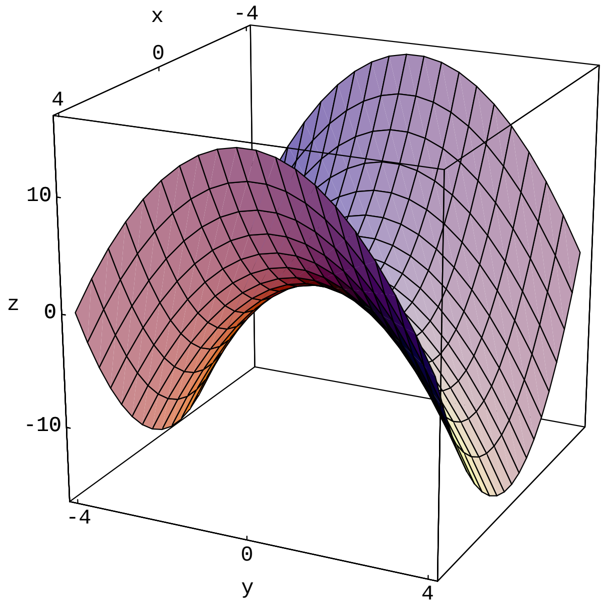
Razmotrimo sada drugu jednačinu u (3.1.5), tj.

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + b_0 z = 0.$$

Nastavljajući analizu na istovetan način, dobijamo sledeće slučajeve:



Sl. 3.2.5



Sl. 3.2.6

(7) SLUČAJ $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2)$. Ovo daje

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \text{ili} \quad z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\,. \tag{3.2.4}$$

Dovoljno je razmotriti samo prvu jednačinu, koja opisuje tzv. eliptički paraboloid (sl. 3.2.5). Preseci ovog paraboloida sa ravni $z = h > 0$ su elipse

$$\frac{x^2}{a^2 h} + \frac{y^2}{b^2 h} = 1.$$

Sa porastom h, poluose tih elipsi se povećavaju. Presek eliptičkog paraboloida sa ravnima $y = h$ i $x = h$ daje parabole.

Druga jednačina u (3.2.4) se odnosi na eliptički paraboloid koji je simetričan sa prethodnim u odnosu na ravan Oxy.

(8) SLUČAJ $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = -\operatorname{sgn}(\lambda_2)$. Kao tipična jednačina u ovom slučaju je

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\,,$$

koja opisuje tzv. *hiperbolički paraboloid* (sl. 3.2.6).

Presek ovakvog paraboloida sa ravni $z = h$ daje hiperbolu

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{za} \quad h > 0,$$

gde su $\alpha = a\sqrt{h}$, $\beta = b\sqrt{h}$. Za $h < 0$ imamo, takođe, hiperbole

$$-\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

gde su $\alpha = a\sqrt{-h}$, $\beta = b\sqrt{-h}$.

4. ZADACI ZA VEŽBU

4.1. Odrediti ravan (α) koja prolazi kroz tačku $M(1, -2, 3)$ i upravna je na ravnima

$$(\beta) \qquad 2x + y - z - 2 = 0 \qquad \text{i} \qquad (\gamma) \qquad x - y - z - 3 = 0.$$

4.2. Date su prave p_1 i p_2 jednačinama:

$$(p_1): \quad \vec{r} \times (2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}) = -29\vec{i} + 7\vec{j} + 10\vec{k}$$

i

$$(p_2): \quad \vec{r} \times (5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 10\vec{k}.$$

1° Da li se prave p_1 i p_2 seku?
2° Kroz tačku $A(4, 0, -1)$ postaviti pravu p koja seče date prave.

4.3. Date su prave p_1 i p_2 jednačinama:

$$(p_1): \begin{cases} x - y - z - 7 = 0, \\ 3x - 4y - 11 = 0 \end{cases} \qquad \text{i} \qquad (p_2): \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0, \\ x + y + 1 = 0. \end{cases}$$

1° Ne tražeći presečnu tačku, dokazati da se prave p_1 i p_2 seku.
2° Odrediti presečnu tačku A pravih p_1 i p_2.
3° Odrediti jednačine ravni α_1 i α_2 koje prolaze kroz tačku A i normalne su na pravama p_1 i p_2, respektivno.

4.4. Odrediti pravu p koja prolazi kroz tačku $M(2, 2, -2)$ i seče prave

$$(q): \begin{cases} y + 3z - 5 \ = \ 0, \\ x + 2z - 7 \ = \ 0 \end{cases} \qquad \text{i} \qquad (r): \ \frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2} \ .$$

4.5. Odrediti tačku B simetričnu tački $A(1, 3, -4)$ u odnosu na ravan

$$3x + y - 2z = 0.$$

4.6. Date su ravni R_1 i R_2 i prava p jednačinama

$$(R_1): \ x = 0, \qquad (R_2): \ y = 2, \qquad (p): \ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1} \ .$$

Ako su P_1 i P_2 tačke prodora prave p kroz ravni R_1 i R_2, odrediti tačku $P_3 \in R_1 \cap R_2$ tako da površina trougla $P_1P_2P_3$ bude minimalna.

4.7. Data je prava p jednačinama

$$5x - 4y + 3z + 20 = 0, \qquad 3x - 4y + z - 8 = 0$$

i tačka $C(2, 3, -1)$. Odrediti jednačinu sfere čiji je centar u tački C i koja na pravoj p odseca odsečak dužine $d = 16$.

4.8. Tačke $M_1(4,0,4)$, $M_2(4,4,4)$, $M_3(4,4,0)$ i tačka S na sferi

$$x^2+y^2+z^2=4,$$

određuju tetraedar $SM_1M_2M_3$.

Odrediti tačku S tako da zapremina tetraedra bude: (a) najveća; (b) najmanja.

4.9. Prave p i q date su jednačinama

$$(p)\ :\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3} \qquad \text{i} \qquad (q)\ :\ \frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}\,.$$

1° Proveriti tvrđenje: Prave p i q se ne seku.

2° Odrediti paralelne ravni α i β tako da ravan α sadrži pravu p a da ravan β sadrži pravu q.

3° Odrediti odstojanje između pravih p i q.

4.10. U Descartesovom koordinatnom sistemu, date su prave p_1 i p_2 jednačinama

$$(p_1)\ :\ \begin{cases} x-y-z+8=0, \\ 5x+y+z+10=0 \end{cases} \qquad \text{i} \qquad (p_2)\ :\ \begin{cases} x+y+z-2=0, \\ 2x+y-3z+9=0. \end{cases}$$

Ako je M tačka njihovog preseka i M_1, M_2, M_3 njene projekcije na koordinatne ose, odrediti zapreminu tetraedra $OM_1M_2M_3$ i površinu trougla $M_1M_2M_3$.

4.11. Ako je tačno tvrđenje: Sve ravni

$$(t+1)^2x+(t^2-t+1)y+(t^2+1)z=0$$

sadrže jednu fiksnu pravu p, odrediti tu pravu.

Uputstvo. Konstatovati da za svako t mora da važi jednakost

$$(t^2+1)(x+y+z)+t(2x-y)=0.$$

4.12. Od svih sfera koje prolaze kroz tačke

$$A(1,-2,8), \quad B(3,2,-2) \quad \text{i} \quad C(-1,0,4),$$

odrediti onu koja ima najmanji poluprečnik.

4.13. Na krugu K, određenog jednačinama

$$(K): \quad x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{i} \qquad z = 0,$$

odrediti tačku koja je najbliža ravni α čija je jednačina

$$(\alpha): \quad x + 2y + 3z = 12.$$

4.14. Ako je ABC oštrougli trougao, odrediti u njegovoj ravni tačku M tako da zbir

$$\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM}$$

ima najmanju vrednost.

Literatura

1. D. Adnađević i Z. Kadelburg: *Matematička analiza, I.* Naučna knjiga, Beograd 1990.
2. S. Aljančić: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu.* Građevinska knjiga, Beograd 1968.
3. J. Dieudonné: *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press, New York 1969.
4. Г. М. Фихтенгольц: *Курс дифференциального и интегрального исчисления, I.* Физматгиз, Москва 1962.
5. Ф. Р. Гантмахер: *Теория матриц.* Наука, Москва 1988.
6. Х. Д. Икрамов: *Задачник по линейной алгебре.* Наука, Москва 1975.
7. В. А. Ильин и Э. Г. Позняк: *Основы математического анализа, I.* Наука, Москва 1971.
8. В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов: *Математический анализ, I.* Изд. Московского университета, Москва 1985.
9. J. D. Kečkić: *Algebra I, Elementi linearne algebre i teorije polinoma.* Privredni pregled, Beograd 1973.
10. Л. Д. Кудрявцев: *Курс математического анализа, I.* Высшая школа, Москва 1981.
11. Đ. Kurepa: *Viša algebra, I.* Građevinska knjiga, Beograd 1979.
12. Đ. Kurepa: *Viša algebra, II.* Građevinska knjiga, Beograd 1979.
13. S. Kurepa: *Uvod u matematiku, Skupovi – strukture – brojevi.* Tehnička knjiga, Zagreb 1975.
14. S. Kurepa: *Uvod u linearnu algebru.* Školska knjiga, Zagreb 1990.
15. P. Lankaster: *Theory of Matrices.* Academic Press, New York – London 1969.
16. И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда: *Математический анализ, I.* Вища школа, Киев 1983.
17. S. Mardešić: *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, I dio, Brojevi – konvergencija – neprekidnost.* Školska knjiga, Zagreb 1988.
18. M. Marjanović: *Matematička analiza I.* Naučna knjiga, Beograd 1979.

19. D. Mihailović i R. R. Janić: *Elementi matematičke analize I.* Naučna knjiga, Beograd 1985.
20. P. M. Miličić: *Matematika I, Linearna algebra i analitička geometrija – realna analiza i numerička analiza.* Naučna knjiga, Beograd 1982.
21. G. V. Milovanović: *Numerička analiza, I deo.* Naučna knjiga, Beograd 1991.
22. D. S. Mitrinović i D. Ž. Đoković: *Polinomi i matrice.* ICS, Beograd 1975.
23. D. S. Mitrinović, D. Mihailović i P. M. Vasić: *Linearna algebra. Polinomi. Analitička geometrija.* Građevinska knjiga, Beograd 1973.
24. D. S. Mitrinović i P. M. Vasić: *Analitičke nejednakosti.* Građevinska knjiga, Beograd 1970.
25. С. М. Никольский: *Курс математического анализа, I.* Наука, Москва 1975.
26. W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, New York 1976.
27. А. М. Тер-Крикоров и М. И. Шабунин: *Курс математического анализа.* Наука, Москва 1988.
28. В. В. Воеводин: *Линейная алгебра.* Наука, Москва 1974.
29. В. А. Зорич: *Математический анализ, I.* Наука, Москва 1981.