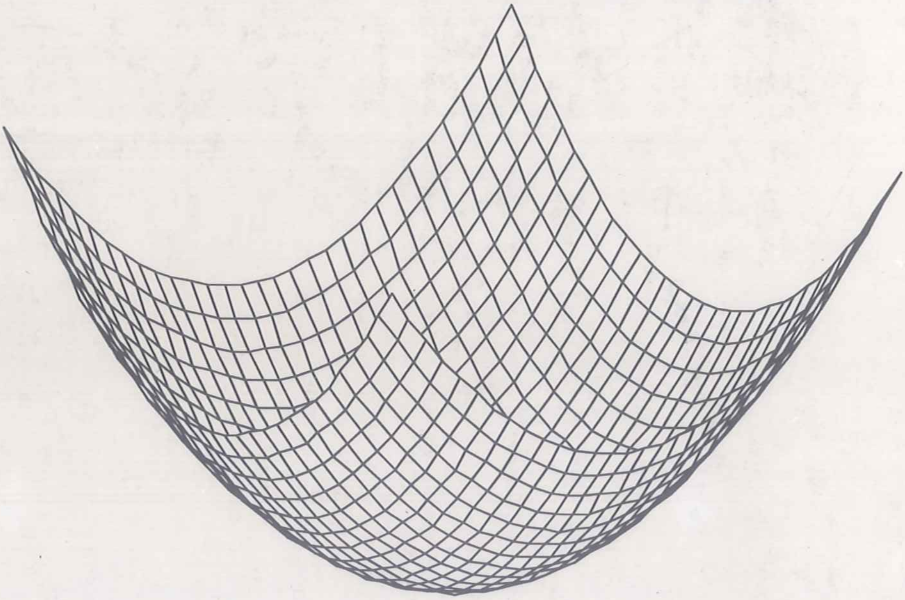
GOSPAVA B. ĐORĐEVIĆ
GRADIMIR V. MILOVANOVIĆ



ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE II

za studente Tehnološkog fakulteta

UNIVERZITET U NIŠU
Tehnološki fakultet Leskovac

GOSPAVA B. ĐORĐEVIĆ

GRADIMIR V. MILOVANOVIĆ

ZBIRKA
REŠENIH ZADATAKA
IZ MATEMATIKE II

za studente Tehnološkog fakulteta

Leskovac, 1997.

UNIVERZITET U NIŠU
Tehnološki fakultet u Leskovcu

dr GOSPAVA B. ĐORĐEVIĆ, dr GRADIMIR V. MILOVANOVIĆ
ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE II

Recenzent
dr Nenad Cakić

Za izdavača
Prof. dr. Mihajlo Stanković

Urednik
Prof. dr Milorad Cakić

Odlukom Uređivačkog odbora Tehnološkog fakulteta u Leskovcu Univerziteta u Nišu, 06 broj 1309/1-2 od 02.12.1997. god. ova knjiga odobrena je kao pomoćni udžbenik za predmet Matematika II za studente Tehnološkog fakulteta u Leskovcu

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд
517.3/ .4(075.8) (076)
ЂОРЂЕВИЋ, Госпава Б.
Zbirka rešenih zadataka iz Matematike II : za studente Tehnološkog fakulteta /Gospava B. Đorđević, Gradimir V. Milovanović. - Leskovac : Tehnološki fakultet, 1997 (Leskovac : Cicero). - 181 str. : graf. prikazi : 24 cm
Tiraž 300.
ISBN 86-82367-22-X
1. Миловановић, Градимир, В.
517.52(075.8) (076)
514.742.4 (075.8) (076)
а) Математичка анализа - Задаци б) Векторски рачун - Задаци с) Теорија вероватноће - Задаци
ID = 59290380

Kompjuterska obrada
mr Dragan Đorđević, dr Gospava Đorđević

Štampa: SGP "Cicero" Leskovac
Tiraž: 300 primeraka

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Zbirka rešenih zadataka je pisana po važećem nastavnom programu predmeta Matematika II za studente Tehnološkog fakulteta u Leskovcu, a takođe može korisno poslužiti i drugim studentima kojima odgovara sadržaj i obim obuhvaćen ovom Zbirkom. Ispred svake celine dat je pregled najvažnijih definicija i teorema. Teorijske osnove ove Zbirke predstavlja odgovarajući udžbenik *Matematika II*, sa kojim ova Zbirka zadataka čini nerazdvojnu celinu. U skladu sa tim, u ovoj Zbirci zadataka zadržane su oznake korišćene u pomenutom udžbeniku.

Materijal izložen u ovoj Zbirci raspoređen je u pet celina – glava. U prvoj glavi obrađeni su numerički i stepeni redovi sa primenama. Druga glava sadrži višestruke, krivolinijske i površinske integrale. U trećoj glavi dati su elementi vektorske analize sa elementima teorije polja. U četvrtoj glavi obrađena je Laplaceova transformacija sa primenom na rešavanje diferencijalnih jednačina, dok peta glava obuhvata elemente teorije verovatnoće.

Skoro svaki zadatak je u potpunosti rešen, osim malog broja zadataka koji su ostavljeni čitaocu za samostalni rad.

Verujemo da će ova Zbirka rešenih zadataka, zajedno sa pomenutim udžbenikom, u mnogome olakšati studentima Tehnološkog fakulteta u Leskovcu pripremanje ispita iz Matematike II.

Recenzent, dr Nenad Cakić, pročitao je rukopis i svojim primedbama poboljšao prvobitni tekst ove Zbirke zadataka, na čemu mu autori srdačno zahvaljuju.

Obradu teksta na računaru izvršili su autori. Konačno sređivanje teksta, kao i crtanje slika, uradio je mr Dragan Đorđević, asistent Filozofsog Fakulteta u Nišu.

Leskovac, novembar 1997. Autori

I GLAVA

TEORIJA REDOVA

1. NUMERIČKI REDOVI

1.1. Redovi sa pozitivnim članovima

Neka je (a_n) proizvoljan niz realnih brojeva. Izraz oblika

$$(1) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

naziva se *numerički* (*brojni*) *red*, pri čemu je a_n opšti član reda (1).

Izraz oblika

$$(2) \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

naziva se n-ta parcijalna suma reda (1).

Kaže se da je red (1) *konvergentan* ako njegov niz $\{S_n\}$ parcijalnih suma konvergira. Drugim rečima, ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, kaže se da red (1) konvergira i ima sumu (zbir) S, što se zapisuje $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Ako red konvergira, onda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Ako je $S = +\infty$ ili $S = -\infty$, ili S ne postoji, red (1) je *divergentan*.

Ostatak R_n reda (1) dat je sa

$$(3) \qquad R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Ako red (1) konvergira, tada ostatak reda R_n teži nuli kad n teži beskonačnosti.

Teorema 1. *Cauchyev potreban i dovoljan uslov da red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira jeste:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N(\epsilon) > 0)(\forall p > 0)(\forall n \geq N(\epsilon)) \quad |S_{n+p} - S_n| < \epsilon.$$

Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0, \tag{4}$$

naziva se red sa pozitivnim članovima. Niz (S_n) parcijalnih suma reda (4) je rastući, pa zato red konvergira, ili, divergira ka $+\infty$.

Ispitivanje konvergencije redova sa pozitivnim članovima efikasnije se izvodi primenom brojnih kriterijuma (testova) konvergencije. Navodimo neke testove konvergencije, pri čemu se pozivamo na red (4).

Kriterijumi upoređivanja. (i) Neka je dat red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, pri čemu je za $n \geq n_0$ ispunjena nejednakost $a_n \leq b_n$. Tada, iz konvergencije reda $\sum b_n$ sledi konvergencija reda $\sum a_n$, a iz divergencije reda $\sum a_n$ sledi divergencija reda $\sum b_n$.

(ii) Ako važi jednakost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k, \quad (k \neq 0, k \neq \infty),$$

tada redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ istovremeno konvergiraju ili istovremeno divergiraju.

Ako je $k = 0$, onda iz konvergencije reda $\sum b_n$ sledi konvergencija reda $\sum a_n$, a iz divergencije reda $\sum a_n$ sledi divergencija reda $\sum b_n$.

(iii) Ako je ispunjena nejednakost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

onda:

1° iz konvergencije reda $\sum b_n$ sledi konvegrencija reda $\sum a_n$:

2° iz divergencije reda $\sum a_n$ sledi divergencija reda $\sum b_n$.

Cauchyev kriterijum. Neka za red (4) važi:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Tada

(i) za $q < 1$, red (4) konvergira;

(ii) za $q > 1$, red (4) divergira;

(iii) za $q = 1$ pitanje konvergencije reda (4) ostaje nerešeno, tj. red (4) može konvergirati, ili, divergirati.

D'Alembertov kriterijum. Neka za red (4) važi:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Tada:

(i) za $q < 1$, red (4) konvergira;

(ii) za $q > 1$, red (4) divergira;

(iii) za $q = 1$ pitanje konvergencije reda (4) ostaje nerešeno, tj. red (4) može konvergirati, ili, divergirati.

Raabeov kriterijum. Neka za red (4) važi:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p.$$

Tada:

(i) za $p > 1$, red (4) konvergira;

(ii) za $p < 1$, red (4) divergira;

(iii) za $p = 1$ pitanje kovergencije reda (4) ostaje nerešeno, tj. red (4) može konvergirati, ili, divergirati.

Gaussov kriterijum. Ako se za red (4) i $n > n_0$, važi

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = l + \frac{p}{n} + \frac{A_n}{n^{1+\alpha}},$$

gde je $|A_n| < K, (K > 0) (n = 1, 2, \dots)$ i $\alpha > 0$. Tada:

(i) za $l > 1$, red (4) konvergira;

(ii) za $l = 1$ i $p > 1$, red (4) konvergira;

(iii) za $l < 1$, red (4) divergira;

(iv) za $l = 1$ i $p \leq 1$, red (4) divergira.

Cauchyev integralni kriterijum. Neka je $f(x)$ neprekidna, pozitivna i nerastuća funkcija za $x \geq a$ i neka je $a_n = f(n)$. Tada, red (4) i integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

istovremeno konvergiraju ili istovremeno divergiraju.

1.2. Zadaci

1.2.1. Ispitati kovergenciju geometrijskog reda $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Rešenje. Parcijalna suma reda je

$$S_n = \sum_{n=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

odakle sledi: za $|q| < 1$ red konvergira i njegova suma je $S = 1/(1-q)$, za $|q| \geq 1$ red divergira.

1.2.2. Ispitati konvergenciju i naći sumu reda:

$$1^\circ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n; \quad 2^\circ \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^n;$$

$$3^\circ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n+1}; \quad 4^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots.$$

Rešenje. 1° Red konvergira, a njegova suma je $S = 2$;

2° Red divergira;

3° Red konvergira, a njegova suma je $S = \frac{12}{7}$;

4° Parcijalna suma reda je

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

a granična vrednost je

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Dakle, red je konvergentan i njegova suma je $S = 1$.

1.2.3. Ispitati konvergenciju harmonijskog reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Rešenje. *Prvi način:* Prema Cauchyevom kriterijumu, imamo

$$|S_{n+p} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p}$$

odakle, za $p = 2n$, nalazimo

$$|S_{3n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} > \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}.$$

Sledi, red divergira.

Drugi način: Koristeći Cauchyev integralni kriterijum, nalazimo da red divergira jer divergira odgovarajući integral, tj.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty.$$

1.2.4. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

i naći njegovu sumu.

Rešenje. Opšti član reda a_n se razlaže u zbir na sledeći način

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2(n+3)}.$$

Parcijalna suma reda je

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3}.$$

Ako u drugom i trećem sabirku izvršimo prenumeraciju, imamo

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+3)} \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+3)}. \end{aligned}$$

Sledi, red je konvergentan, a njegova suma je $S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1/12$.

1.2.5. Dokazati da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$$

konvergentan red.

Rešenje. Kako je

$$\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right),$$

to je

$$\begin{aligned} S_n = &\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) + \cdots \\ &+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right) + \\ &+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right). \end{aligned}$$

Sledi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{11}{18}.$$

1.2.6. Dokazati da je red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n-1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)$$

konvergentan.

Rešenje. Parcijalna suma reda je

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k-1} - 2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} + \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k} - 2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} + \sum_{k=2}^{n+1}\sqrt{k} \\ &= -1 - \sqrt{n} + \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

Sledi, $S = \lim_{n\to\infty} S_n = -1$.

1.2.7. Dokazati da red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$$

ima sumu 2.

Rešenje. Kako je

$$a_n = \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2},$$

to je

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6}\right) + \dots$$
$$+ \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2}\right).$$

Sledi

$$S_n = 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2},$$

i

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 2.$$

1.2.8. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Koristeći Cauchyev integralni kriterijum, nalazimo

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{za } \alpha > 1, \\ +\infty, & \text{za } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Sledi, za $\alpha > 1$, red je konvergentan, za $\alpha \leq 1$, red je divergentan. Za $\alpha = 1$, red se zove harmonijski, za $\alpha > 1$, red se zove hiperharmonijski.

1.2.9. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n}$.

Rešenje. Za dovoljno veliko n važi:

$$\frac{\sqrt{n+2}}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Kako je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergentan, to je i polazni red divergentan.

1.2.10. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$.

Rešenje. *Prvi način:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{2}{n})}{\frac{1}{n}} = 2,$$

to je, prema kriterijumu upoređivanja, polazni red divergentan, jer se upoređuje sa harmonijskim redom $\sum \frac{1}{n}$.

Drugi način:

$$a_n = \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = \ln(n+2) - \ln n,$$

odakle nalazimo S_n:

$$\begin{aligned} S_n &= (\ln 3 - \ln 1) + (\ln 4 - \ln 2) + (\ln 5 - \ln 3) + (\ln 6 - \ln 4) + \dots \\ &+ (\ln n - \ln(n-2)) + (\ln(n+1) - \ln(n-1)) + (\ln(n+2) - \ln n) \\ &= \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln 2. \end{aligned}$$

Odakle, prelaskom na graničnu vrednost, nalazimo da je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

Sledi, red je divergentan.

1.2.11. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+1}}{(5n^2+3n+2)^{\frac{n+3}{2}}}.$$

Rešenje. Primenom Cauchyevog kriterijuma, nalazimo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n+1}}{(5n^2+5n+2)^{\frac{n+3}{2}}}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{5n^2+3n+2}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(5n^2+3n+2)^{3/2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Sledi, red je konvergentan.

1.2.12. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{\sqrt{n^3}}.$$

Rešenje.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{\frac{n^{3/2}}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\sqrt{n}+2-\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+3}\right)^{\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{e} < 1. \end{aligned}$$

Sledi, prema Cauchyevom kriterijumu, red konvergira.

1.2.13. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^{n+2}}{3^{n+1}}$.

Rešenje.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n2^{n+2}}{3^{n+1}}} = \frac{2}{3}.$$

Sledi, red je konvergentan.

1.2.14. Dokazati da je red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n+5}}{5^{2n+3}},$$

konvergentan.

1.2.15. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}.$$

Rešenje. Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+4+5/n}$$
$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{(n+1)/(-2)}\right]^{-2} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{3+5/n} = e^{-2},$$

to, prema Cauchyevom kriterijumu, red konvergira.

1.2.16. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{5n+2} - \sqrt{5n-2}\,\right]^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Rešenje. Za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$, važi

$$a_n = \left[\sqrt{5n+2} - \sqrt{5n-2}\,\right]^{\alpha} = \left[\frac{4}{\sqrt{5n+2}+\sqrt{5n-2}}\right]^{\alpha} \sim \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{\alpha} n^{\alpha/2}}.$$

Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{\alpha} n^{\alpha/2}}$$

konvergira za $\alpha > 2$, a divergira za $\alpha \leq 2$. Stoga i polazni red konvergira za $\alpha > 2$, a divergira za $\alpha \leq 2$.

1.2.17. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{3n^2+1} - \sqrt[3]{3n^2-1}\right).$$

Rešenje. Za dovoljno veliko n važi:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt[3]{3n^2+1} - \sqrt[3]{3n^2-1} \\ &= \frac{2}{\sqrt[3]{(3n^2+1)^2} + \sqrt[3]{(3n^2+1)(3n^2-1)} + \sqrt[3]{(3n^2-1)^2}} \sim \frac{1}{n^{4/3}}. \end{aligned}$$

Kako red $\sum 1/n^{4/3}$ konvergira, to i polazni red konvergira.

1.2.18. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}\right).$$

Rešenje. Za dovoljno veliko n važi:

$$a_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} = \frac{-3n^4+2n^3-3n^2}{A} \sim -\frac{1}{2n},$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} A = &\left(\sqrt[6]{(n^3+1)^2} + \sqrt[6]{(n^2+1)^3}\right)\left(\sqrt[3]{(n^3+1)^4} + \sqrt[3]{(n^3+1)(n^2+1)^3}\right. \\ &\left. + \sqrt{(n^2+1)^2}\right). \end{aligned}$$

Kako je $\sum \frac{1}{2n}$ divergentan red, to je i polazni red divergentan.

1.2.19. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{5n^2+2} - \sqrt[3]{5n^2-2}}{\sqrt{n}}.$$

Rešenje. Za dovoljno veliko n, važi:

$$a_n \sim \frac{1}{n^{11/6}}.$$

Kako je red $\sum \frac{1}{n^{\frac{11}{6}}}$ konvergentan, to je i polazni red konvergentan.

1.2.20. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Rešenje.

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1+\ln 2}{2},$$

sledi, prema Cauchyevom integralnom kriterijumu, red konvergira.

1.2.21. U zavisnosti od parametra p, ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}.$$

Rešenje.

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx = \frac{1}{(1-p)^2} + \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{(1-p)^2} \cdot ((1-p)\ln x - 1).$$

Očigledno, integral konvegira za $p > 1$ i divergira za $p \leq 1$. Sledi, polazni red konvergira za $p > 1$, i divergira za $p \leq 1$.

1.2.22. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, \quad a > 0.$$

Rešenje.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{e}.$$

Sledi, za $a < e$ red konvergira, za $a > e$ red divergira (D'Alembertov kriterijum).

Za $a = e$ red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}.$$

Koriseći Stirlingovu formulu

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n+\frac{q}{12n}}, \quad 0 < q < 1,$$

za dovoljno veliko n, važi

$$\frac{e^n n!}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n}.$$

Red $\sum \sqrt{2\pi n}$ divergira, stoga i polazni red divergira.

1.2.23. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}.$$

Rešenje. Kako integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$$

divergira, to i red divergira.

1.2.24. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Rešenje. Kako je

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \frac{1}{2},$$

to, prema Raabeovom kriterijumu, red divergira.

1.2.25. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{n+2}{n-1}.$$

Rešenje. Ako je

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \ln \frac{x+2}{x-1},$$

onda je

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \ln \frac{x+2}{x-1} dx = \frac{2\pi}{3} - 4\sqrt{3}\ln 2 - 4\sqrt{2}\ln(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

Dakle, red je, prema Cauchyevom integralnom kriterijumu, konvergentan.

1.2.26. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+a)(5+2a)\dots(5+na)}{(3+b)(3+2b)\dots(3+nb)}, \qquad a>0,\, b>0.$$

Rešenje. Lako se proverava da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+(n+1)a}{3+(n+1)b} = \frac{a}{b}.$$

Prema D'Alembertovom kriterijumu, red konvergira za $a<b$, divergira za $a>b$.

Za $a=b$ red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+a)(5+2a)\dots(5+na)}{(3+a)(3+2a)\dots(3+na)},$$

a ovaj red divergira, jer opšti član a_n ne teži nuli, kad $n\to\infty$, tj. $a_n = \left(1+\frac{2}{3+a}\right)\left(1+\frac{2}{3+2a}\right)\dots\left(1+\frac{2}{3+na}\right) > 1$.

1.2.27. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^n}$.

Rešenje. Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{e} < 1,$$

to, prema D'Alembertovom kriterijumu, red konvergira.

1.2.28. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!(2n+1)}.$$

Rešenje. Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 0,$$

to, prema D'Alembertovom kriterijumu, red konvergira.

1.2.29. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n)!)^2}{(4n)!!}.$$

Rešenje.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{2} = +\infty.$$

Sledi, red divergira.

1.2.30. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!!}{(4n)!!}$.

Rešenje. Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{4} < 1,$$

to je red konvergentan (na osnovu D'Alembertovog krterijuma).

1.2.31. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Rešenje.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

Sledi, red je konvergentan.

1.2.32. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)3^{n+1}}{5^{n-1}}.$$

Rešenje. Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{5},$$

to, prema D'Alembertovom kriterijumu, red konvergira.

1.2.33. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}, \qquad a > 0.$$

Rešenje. Lako se proverava da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{1+a^{n+1}} = \begin{cases} a, & \text{za} \quad 0 < a < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{za} \quad a = 1 \\ 0, & \text{za} \quad a > 1. \end{cases}$$

Prema D'Alembertovom kriterijumu, red je konvergentan za svako $a > 0$.

1.2.34. Dokazati da je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n}$ konvergentan red.

Rešenje. Red konvergira na osnovu Cauchyevog kriterijuma:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0.$$

1.2.35. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$.

Rešenje. Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+1}\sqrt{n}}{2^{2n+1}\sqrt{n+1}} = +\infty,$$

to red, prema D'Alembertovom kriterijumu, divergira.

1.2.36. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$.

Rešenje. Red konverginra na osnovu Cauchyevog kriterijuma:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e} = \frac{1}{e} < 1.$$

1.2.37. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Rešenje. Za dovoljno veliko n važi $\sin 1/\sqrt{n} \sim 1/\sqrt{n}$. Kako red $\sum 1/\sqrt{n}$ divergira, to i polazni red divergira.

1.2.38. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}.$$

Rešenje. *I način.* Za opšti član reda važi jednakost

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2n-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1},$$

prema kojoj nalazimo

$$S_n = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \cdots +$$
$$+ \operatorname{arctg} \frac{1}{2n-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1}.$$

Sledi, red konvergira i njegova suma je $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi/4$.

II način. Za dovoljno velko n: $\operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} \sim \frac{1}{2n^2}$. Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ je konvergentan, što povlači konvergenciju polaznog reda.

1.2.39. Dokazati da red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(10^{-1/(n+1)} - 10^{-1/n}\right)$$

ima sumu $S = -1/10$.

Rešenje.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(10^{-\frac{1}{k+1}} - 10^{\frac{1}{k}}\right) = \frac{1}{10^{\frac{1}{n+1}}} - \frac{1}{10}.$$

Sledi, $S = \lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{1}{10}$.

1.2.40. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2+5}{(n+2)!}.$$

Rešenje. Opšti član a_n se razlaže u zbir na sledeći način:

$$\frac{2n^2+5}{(n+2)!} = \frac{13}{(n+2)!} - \frac{6}{(n+1)!} + \frac{2}{n!},$$

na osnovu čega nalazimo:

$$\begin{aligned} S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2+5}{(n+2)!} &= 13\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!} - 6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \\ &= 13(e-2) - 6(e-1) + 2e = 9e - 20. \end{aligned}$$

Sledi, red je konvergentan.

Uputstvo: Koristiti razvoj

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

1.2.41. Naći sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+m)}, \quad m \in \mathbf{N}.$$

Rešenje. Iz

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n(n+1)\dots(n+m)} = \\
&= \frac{A}{n(n+1)\dots(n+m-1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n(n+1)\dots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}\right),
\end{aligned}
$$

nalazimo

$$
S_n = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}\right).
$$

Sledi, red je konvergentan i njegova suma je $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1/(m \cdot m!)$.

1.2.42. Naći sumu reda

$$
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}.
$$

Rešenje. Kako je

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)}{2^{n-1}} - 1 \\
&= 2\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2}S,
\end{aligned}
$$

to je $S = 2/9$.

1.2.43. Naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(2n+1)!}$.

Rešenje. Iz

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^2}{(2n+1)!} = \frac{A}{(2n+1)!} + \frac{B}{(2n)!} + \frac{C}{(2n-1)!} \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(2n)!} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(2n-1)!},
\end{aligned}
$$

nalazimo sumu S:

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{4}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}\right] \\
&= \frac{1}{4}(2\,\mathrm{sh}\,1 - \mathrm{ch}\,1).
\end{aligned}
$$

Uputstvo: $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$, $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$.

1.2.44. Naći sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!}.$$

Rešenje. Prema jednakosti

$$\frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} = -\frac{80}{(n+3)!} + \frac{53}{(n+2)!} - \frac{15}{(n+1)!} + \frac{2}{n!},$$

nalazimo $S = 109 - 40e$.

1.2.45. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right).$$

Rešenje. Za dovoljno veliko n važi

$$\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergira, sledi polazni red divergira.

1.2.46. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}.$$

Rešenje. Prema nejednakosti $\sin x < x$ za $x > 0$, važi

$$0 \leq \frac{1}{n} \sin\frac{\pi}{\sqrt{n}} < \frac{\pi}{n\sqrt{n}} = \frac{\pi}{n^{3/2}}.$$

Red $\sum \dfrac{\pi}{n^{3/2}}$ konvergira, stoga i polazni red konvergira.

1.2.47. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 - b}\right).$$

Rešenje. Red konvergira za $a = \frac{3}{2}b$.

1.2.48. Dokazati da red $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n!}$ divergira.

1.3. Alternativni redovi

Red čiji su članovi naizmenično pozitivni i negativni (ili obrnuto) naziva se *alternativan red*, a zapisuje se na sledeći način

$$(1) \qquad a_o - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n > 0.$$

Leibnitzov kriterijum. Alternativan red (1) je konvergentan ako niz $\{a_n\}$ monotono opada i teži nuli kad $n \to \infty$. U tom slučaju ostatak alternativnog reda manji je po apsolutnoj vrednosti od apsolutne vrednosti prvog izostavljenog člana i ima isti znak kao taj član.

Neka je $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ alternativan red i $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ odgovarajući red sa pozitivnim članovima. Kaže se da red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ apsolutno konvergira ako je red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ konvergentan.

Za konvergentan red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ kažemo da je uslovno konvergentan ako je red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ divergentan.

Cauchyeva teorema. Ako je red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ konvergentan, tada je red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ takođe konvergentan.

1.4. Zadaci

1.4.1. Ispitati konvergenciju alternativnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Rešenje. Niz $\left(\frac{1}{n}\right)$ je monotono opadajući i opšti član teži nuli, kad $n \to \infty$. Dakle, prema Leibnitzovom kriterijumu, red uslovno konvergira.

1.4.2. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n+1)}$.

Rešenje. Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$ konvergira, pa polazni red apsolutno konvergira.

1.4.3. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+1)^{\frac{1}{3}}}$.

Rešenje. Red uslovno konvergira.

1.4.4. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{(n^2)^{\frac{1}{3}}}$.

Rešenje. Opšti član teži nuli kad $n \to \infty$, a niz $\sin \frac{\pi}{n^{\frac{2}{3}}}$ monotono opada, pa je red uslovno konvergentan. Red nije apsolutno konvergentan jer se opšti član, za dovoljno veliko n, ponaša kao $\frac{\pi}{n^{\frac{2}{3}}}$ a red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^{\frac{2}{3}}}$ divergira.

1.4.5. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Za $\alpha > 0$ red uslovno konvergira; za $\alpha \leq 0$ red divergira; za $\alpha > 1$ red apsolutno konvergira.

1.4.6. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$.

Rešenje. Pošto su ispunjeni uslovi Leibnitzovog kriterijuma, red uslovno konvergira.

1.4.7. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^{\frac{1}{2}} - (-1)^n}$.

Rešenje. Opšti član reda se može razložiti u zbir na sledeći način

$$\frac{(-1)^n}{(2n)^{\frac{1}{2}} - (-1)^n} = \frac{(-1)^n \left((2n)^{\frac{1}{2}} + (-1)^n\right)}{2n-1} = \frac{(-1)^n (2n)^{\frac{1}{2}}}{2n-1} + \frac{1}{2n-1}.$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)^{\frac{1}{2}}}{2n-1}$ uslovno konvergira, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ divergira, pa zato polazni red divergira.

1.4.8. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \left(\sin \frac{1}{n^3}\right)$.

Rešenje. Opšti član reda, za dovoljno veliko n, ponaša se kao $\frac{(-1)^n}{n^3}$. Kako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergira, to polazni red apsolutno konvergira.

2. STEPENI REDOVI

2.1. Uvodne napomene

Red oblika $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, čiji su članovi funkcije realne promenljive x, naziva se *funkcionalni red.* Funkcionalni red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

naziva se *stepeni red.*

Abelova teorema. 1° Ako je stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergentan za $x = p$, $(p \neq 0)$, onda je red apsolutno konvergentan za svako x za koje je $|x| < |p|$.

2° Ako je stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergentan za $x = q$, onda je red divergentan za svako x za koje je $|x| > q$.

Posledica Abelove teoreme. Za svaki stepeni red $\sum_{n=10}^{\infty} a_n x^n$ postoji R, gde je $0 \leq R \leq +\infty$, tako da:

1° za $|x| < R$, red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je konvergentan,

2° za $|x| > R$, red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je divergentan.

Za $x = \pm R$ se konvergencija posebno ispituje.

Broj R je poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum a_n x^n$, a interval $(-R, +R)$ je oblast konvergencije istog stepenog reda.

Poluprečnik konvergencije R se može izračunati na sledeći način:

$$1^\circ \quad R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \quad \text{ili}, \quad 2^\circ \quad R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Ako je $R = 0$, red konvergira samo za $x = 0$. Za $R = \infty$, red konvergira za svako $x \in (-\infty, +\infty)$.

Neka je R poluprečnik stepenog reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i neka je $-R < a < b < R$. Za x iz $[a, b]$ red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se može integraliti i diferencirati član po član. Redovi dobijeni od $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ integraljenjem i diferenciranjem, imaju isti poluprečnik konvergencije R .

Svakoj funkciji $f(x)$, koja ima neprekidne izvode proizvoljnog reda u tački $x = 0$, može se pridružiti jedan stepeni red, i to

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

U stvari, koristeći Taylorovu formulu, funkcija $f(x)$ se može razviti u stepeni red oblika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

2.2. Zadaci

2.2.1. Ispitati konvergenciju stepenog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Rešenje. Poluprečnik konvergencije je $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$. Za $x = -1$ red postaje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, koji uslovno konvergira. Za $x = 1$ red postaje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, koji divergira . Dakle, red konvergira za $-1 \leq x < 1$.

2.2.2. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+(-3)^n}{n}(x-1)^n$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{5^n+(-3)^n}{n}\right|}{\left|\frac{5^{(n+1)}+(-3)^{(n+1)}}{n+1}\right|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{5^n+(-3)^n}{5^{n+1}+(-3)^{n+1}}\right| = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Red apsolutno konvergira za $|x-1| < \frac{1}{5}$, odnosno za $\frac{4}{5} < x < \frac{6}{5}$. Za $x = \frac{4}{5}$, imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n + (-3)^n}{5^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n}{n}.$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ uslovno konvergira, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n}$ konvergira, pa polazni red konvergira u tački $x = \frac{4}{5}$. Za $x = \frac{6}{5}$, imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{n} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{5^n n}.$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira , pa i polazni red divergira u tački $x = \frac{6}{5}$.

2.2.3. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

Rešenje.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!2^n} \frac{(2n+2)!2^{n+1}}{((n+1)!)^2} = 8.$$

Red apsolutno konvergira za $-7 < x < 9$. Za $x = -7$ red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!},$$

koji divergira (prema Leibnitzovom kriterijumu). Za $x = 9$ red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^{(2n)}}{(2n)!},$$

koji, prema Raabeovom kriterijumu, divergira.

2.2.4. Naći oblast konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2} x^n$.

Rešenje. $R^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$. Red apsolutno konvergira za $\frac{-1}{e^2} < x < \frac{1}{e^2}$. Za $x = \frac{-1}{e^2}$ red postaje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}}{e^{2n}}$, koji divergira, (opšti član teži 1, kad $n \to \infty$). Za $x = \frac{1}{e^2}$ red, takođe divergira.

2.2.5. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n. \tag{1}$$

Rešenje. Poluprečnik konvergencije je

$$R = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p \left(\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}\right)^p = 1.$$

Red apsolutno konvergira za $-1 < \frac{x+1}{x-1} < 1$, odnosno, za $-\infty < x < 0$. Za $x = 0$ red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p,$$

za koji važi:

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{1}$$

Za $p > 0$ red (1) konvergira, za $p > 2$ red (1) apsolutno konvergira. Za $0 < p \leq 2$ red (1) uslovno konvergira (Gaussov kriterijum).

2.2.6. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n.$$

Rešenje. Poluprečnik konvergencije je $R = 2^p$. Red apsolutno konvergira za $-2^p < x < 2^p$. Za $x = -2^p$ red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p 2^{np}, \tag{1}$$

za koji važi:

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left(1 + \frac{1}{2(n+1)}\right)^p \\ &= 1 + \frac{p}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Red (1) apsolutno konvergira za $p > 2$ (Gaussov kriterijum), a divergira za $0 < p \leq 2$.

Za $x = 2^p$ red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p 2^{pn},$$

za koji važi:

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1 + \frac{p}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Tada, prema Gaussovom kriterijumu, red apsolutno konvergira za $p > 2$. Uslovno konvergira za $0 < p \leq 2$ (prema Leibnitzovom kriterijumu).

2.2.7. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n (x+2)^n.$$

Rešenje.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1.$$

Red apsolutno konvergira za $-3 < x < -1$. Za $x = -3$ red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

koji divergira. Za $x = -1$ red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

koji, prema Leibnitzovom kriterijumu, uslovno konvergira.

Uputstvo Za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$, važi:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Dakle, oblast konvergencije polaznog reda je $-3 < x \leq -1$.

2.2.8. Ispitati oblast konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + (-1)^n)^n}{n} x^n.$$

Rešenje.

$$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 3.$$

Dakle, red apsolutno konvergira za $\frac{-1}{3} < x < \frac{1}{3}$. Za $x = -\frac{1}{3}$ imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + (-1)^n)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}.$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}$ konvergira, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ divergira, pa polazni red divergira za $x = \frac{-1}{3}$. Za $x = \frac{1}{3}$ red se razlaže na zbir divergentnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ i reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}}.$$

Sledi, red divergira i u tački $x = 1/3$

2.2.9 Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}(x+1)^n.$$

Rešenje. Poluprečnik konvergencije reda je $R = 1$. Red apsolutno konvergira za $-2 < x < 0$. Za $x = -2$ imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n} = \sum_{n=1, n\neq 4,9,16,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Prvi sabirak je alternativan red koji uslovno konvergira, drugi sabirak je konvergentan red. Sledi, polazni red je uslovno konvergentan za $x = -2$.

Za $x = 0$ red se može predstaviti u obliku:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot A_n$$

gde je $A_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+2n}$. Opšti član A_n teži nuli kad $n \to \infty$ a niz (A_n) monotono opada, jer je:

$$\begin{aligned}
&A_n - A_{n+1} = \\
&= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+2n} - \frac{1}{(n+1)^2} - \cdots - \frac{1}{(n+1)^2 + 2(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \frac{2n+1}{(n^2+k)(n^2+2n+1+k)} - \frac{1}{n^2+4n+2} - \frac{1}{n^2+4n+3)} \\
&> \frac{(2n+1)^2}{(n^2+2n)\cdot(n^2+4n+1)} - \frac{1}{n^2+4n+2} - \frac{1}{n^2+4n+3} > 0,
\end{aligned}$$

što povlači uslovnu konvergenciju polaznog reda u tački $x = 0$ (Leibnitzov kriterijum). Sledi, oblast konvergencije polaznog reda je $-2 \leq x \leq 0$.

2.2.10. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}, \quad a > 0,\ b > 0.$$

Rešenje.

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \\
&= a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}.
\end{aligned}$$

Tada je: $R = a$ za $a \geq b$ i $R = b$ za $a < b$, tj. $R = \max(a, b)$. Za $R = a$ red apsolutno konvergira za $-a < x < a$. Za $x = -a$ red postaje $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{a^n + b^n}$ koji divergira. Za $x = a$ red, takođe divergira. Za $R = b$ red apsolutno konvergira za $-b < x < b$ a za $x = \pm b$ red divergira. Ako je $a = b$ red konvergira u oblasti $-a < x < a$.

2.2.11. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^{n^2} x^{n^2}$.

Rešenje. Kako je

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{(|5\,x|)^{n^2}}$$
$$= \lim_{n \to \infty} |5x|^n,$$

to imamo sledeće mogućnosti: red konvergira za $\frac{-1}{5} < x < \frac{1}{5}$, za $x = \pm\frac{1}{5}$ red divergira.

2.2.12. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(3n+1)^2}\, x^{3n-1}.$$

Rešenje.

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n-1}}{(3n+1)^2} \cdot \frac{(3n+4)^2}{3^n} = 1/3.$$

Red apsolutno konvergira za $\frac{-1}{\sqrt[3]{3}} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Za $x = \frac{-1}{\sqrt[3]{3}}$ red apsolutno konvergira. Za $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ red postaje

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)^2}$$

koji konvergira. Dakle, oblast konvergencije polaznog reda je $\frac{-1}{\sqrt[3]{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

2.2.13. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cos^n x}{(n+2)^2}.$$

Rešenje. Smenom $2\cos x = t$ red postaje

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)^2}.$$

Tada je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Red (1) apsolutno konvergira za $-1 < t < 1$ ili za $\frac{-1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$. Za $\cos x = -1/2$ red apsolutno konvergira, za $\cos x = 1/2$ red konvergira. Sledi, oblast konvergencije polaznog reda je

$$\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi,$$

gde je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

2.2.14. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{na^{n^2}}{n+1}\right)^p \frac{x^n}{n!},$$

za $a > 0$ i $p \in \mathbb{R}$.

Rešenje.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{a^{(2n+1)p}}.$$

Odakle nalazimo: $R = 0$ za $a > 1$ i $p > 0$ ili $0 < a \leq 1$ i $p < 0$; $R = \infty$ za $0 < a \leq 1$ i $p \geq 0$ ili $a > 1$ i $p \leq 0$.

2.2.15. Naći oblast konvergencije reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3n+1}.$$

Rešenje. Smenom $\dfrac{x+1}{x-1} = t$ red postaje

$$t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t^3)^n}{3n+1}. \tag{2}$$

Tada je $R = 1$, pa red (2) apsolutno konvergira za $-1 < t < 1$ a polazni red konvergira za $-\infty < x < 0$. Za $x = 0$ red postaje $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$, koji divergira.

2.2.16. Ispitati oblast definisanosti funkcije

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n(x-2)}}{n^2}.$$

Rešenje. Poluprečnik konvergencije je $R = 1$, funkcija $f(x)$ je definisana za $e^{-(x-2)} < 1$, odnosno za $2 < x < +\infty$. Za $x = 2$ red postaje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, koji konvergira. Dakle, funkcija $f(x)$ je definisana za $2 \le x < +\infty$.

2.2.17. Odrediti oblast definisanosti funkcije

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\frac{x-1}{x+1}}}{n^3}.$$

Rešenje. Smenom $e^{-\dfrac{x-1}{x+1}} = t$ red postaje $\sum \dfrac{t^n}{n^3}$. Poluprečnik konvergencije reda je $R = 1$, a oblast definisanosti funkcije je $-1 < t < 1$ ili $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Za $x = -1$ funkcija je definisana i ima vrednost $f(-1) = 0$, za $x = 1$ imamo

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Kako je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergentan, to je funkcija definisana za $x = 1$. Dakle, oblast definisanosti date funkcije je $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

2.2.18. Odrediti oblast definisanosti funkcije

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} e^{n\frac{1-x}{1+x}}.$$

Rešenje. Poluprečnik konvergencije reda je $R = e$, a funkcija je definisana za $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Funkcija je definisana i u tački $x = -1$, jer je $f(-1) = 0$. U tački $x = 0$ funkcija nije definisana, jer je

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} e^{n},$$

a red $f(0)$ divergira. Dakle, funkcija $f(x)$ je definisana u intervalu $x \in (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$.

2.2.19. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{tg}^n x$, gde je

$$a_n = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p, \quad p > 0.$$

Rešenje. Poluprečnik konvergencije reda je $R = 1$, pa red konvergira apsolutno za $-1 < \operatorname{tg} x < 1$, odnosno za $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$. Za $\operatorname{tg} x = -1$ red postaje

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p .$$

Kako je

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

to, prema Gaussovom kriterijumu, red apsolutno konvergira za $p > 2$. Za $0 < p \leq 2$ red (1) uslovno konvergira. Za $\operatorname{tg} x = 1$, red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p ,$$

koji konvergira za $p > 2$, a divergira za $0 < p \leq 2$ (prema Gaussovom kriterijumu).

2.2.20. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{x-1}{2}\right)^n .$$

Rešenje. Red apsolutno konvergira za $x \in (-1, 3)$. Za $x = -1$ red postaje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left((1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$, koji divergira. Za $x = 3$ red takođe divergira.

2.2.21. Odrediti oblast definisanosti funkcije date pomoću

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{a^{n^2}} \operatorname{tg}^n x.$$

Rešenje. Poluprečnik konvergencije reda je

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{a^{2n+1}}{n+2}.$$

Slede dve mogućnosti: $R = \infty$, za $a > 1$, i $R = 0$, za $0 < a \leq 1$. Dakle, za $a > 1$, funkcija je definisana za $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Za $tgx = \pm 1$ red konvergira, prema D'Alembertovom kriterijumu. Sledi, oblast definisanosti funkcije je interval: $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$

2.2.22. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^n.$$

Rešenje. $R = 1$, a interval apsolutne konvergencije $x \in (-1, 1)$. Za $x = -1$ red je alternativan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}$, koji uslovno konvergira. Za $x = 1$ red divergira. Sledi, red konvergira za $x \in [-1, 1)$.

2.2.23. Dokazati da red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2+2}$ konvergira za $x \in [-2, 0]$.

2.2.24. Ispitati konvergenciju hipergeometrijskog reda

$$\sum_{n-0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!(\gamma)_n} x^n,$$

gde je $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$ Pochhammerov simbol.

Rešenje. $R = 1$, pa red apsolutno konvergira za $x \in -1, 1)$. Za $x = -1$ red je postaje

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!(\gamma)_n}$$

koji, prema Gaussovom kriterijumu, apsolutno konvergira za $\alpha + \beta < \gamma$. Uslovno konvergira za $\alpha + \beta \geq \gamma$. Za $x = 1$ red je sa pozitivnim članovima koji konvergira za $\alpha + \beta < \gamma$ (Gaussov kriterijum).

2.2 25. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, gde je

$$a_n = \frac{1}{a^n + n\, b^n}$$

Rešenje. Poluprečnik konvergencije reda je

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{a^{n+1} + (n+1)\, b^{n+1}}{a^n + n\, b^n}$$

pri čemu je $a > 0$ i $b > 0$. U zavisnosti od parametara a i b, nalazimo da je poluprečnik konvergencije: (i) $R = b$ za $a < b$, pa red konvergira za $x \in (-b, b)$; (ii) $R = a$ za $a \geq b$, pa red konvergira za $x \in (-a, a)$. U slučaju kada je $R = b$, ispitajmo konvergenciju reda na krajevima intervala. Naime, za $x = \pm b$ imamo redove:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{a^n + nb^n} \tag{1}$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{b^n}{a^n + nb^n}. \tag{2}$$

Red (1) divergira, a red (2) uslovno konvergira, pa polazni red konvergira za $x \in [-b, b)$. Slično, za $R = a$, nalazimo da red konvergira za $x \in [-a, a)$.

2.2.26. Dat je red

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{tg}^{4n+2} x}{(2n+1)3^{2n+1}}.$$

(a) Odrediti oblast konvergencije datog reda. (b) Naći sumu reda.

Rešenje. (a) Smenom $\operatorname{tg}^2 x = t$ red postaje

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)3^{2n+1}}.$$

čiji je poluprečnik konvergencije $R = 9$, dok polazni red konvergira za $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$, odnosno za $-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$. Za $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$ red uslovno konvergira. Dakle, red konvergira za $-\frac{\pi}{3} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + k\pi$. ($b$) Neka je suma reda

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n+2}}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}}$$

Funkcija $S(t)$ se može, u intervalu $-\sqrt{3} < t < \sqrt{3}$, diferencirati član po član, pa tako nalazimo:

$$S'(t) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n+1}}{3^{2n+1}} = \frac{6t}{9 + t^4}.$$

A zatim, integraljenjem funkcije $S'(t)$ po t, u intervalu konvergencije, nalazimo da je suma reda $S(x) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{3}$.

2.2.27. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n, \quad a > 0,\ b > 0.$$

Rešenje.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}}{\frac{a^{n+1}}{n+1} + \frac{b^{n+1}}{(n+1)^2}},$$

odakle sledi: (i) $R = \frac{1}{b}$ za $a < b$, i (ii) $R = \frac{1}{a}$ za $a > b$. U slučaju kada je $R = \frac{1}{b}$, interval konvergencije reda je $-\frac{1}{b} < x < \frac{1}{b}$. Za $x = -\frac{1}{b}$ red se razlaže na zbir apsolutno konvergentnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, i uslovno konvergentnog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{a}{b}\right)^n$. Za $x = \frac{1}{b}$ red, takođe konvergira. Oblast konvergencije polaznog reda je, u slučaju $a < b$, $-\frac{1}{b} \leq x \leq \frac{1}{b}$. Posmatrajmo slučaj $a > b$ i $R = \frac{1}{a}$. Red konvergira apsolutno u intervalu $-\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a}$. Za $x = -\frac{1}{a}$ red se razlaže na dva sabirka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^n} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Kako su oba sabirka konvergentni redovi, to polazni red konvergira za $x = -\frac{1}{a}$. Za $x = \frac{1}{a}$ red divergira. Dakle, polazni red konvergira u intervalu $-\frac{1}{a} \leq x < \frac{1}{a}$. Za $a = b$ red postaje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2}(n+1)x^n$, i ima poluprečnik konvergencije $R = \frac{1}{a}$. Za $x = \frac{1}{a}$ red divergira, za $x = -\frac{1}{a}$ isti uslovno konvergira.

2.2 28. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{a^{\sqrt{n}}}, \qquad a > 0.$$

Rešenje.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\sqrt{n+1}}}{a^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} = 1.$$

Red apsolutno konvergira za $0 < x < 2$. Za $x = 0$, red konvergira za $a > 1$ a divergira za $0 < a \leq 1$, za $x = 2$, red konvergira za $a > 1$ a divergira za $0 < a \leq 1$.

2.2.29. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(3+1)(3+\sqrt{2})\dots(3+\sqrt{n})}\, x^n.$$

Rešenje.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \left(3 + \sqrt{n+1}\right) = 1.$$

Red apsolutno konvergira za $-1 < x < 1$. Za $x = -1$ red postaje

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n!}}{(3+1)(3+\sqrt{2})\dots(3+\sqrt{n})}.$$

Red (1) apsolutno konvergira. Za $x = 1$ red, takođe konvergira. Dakle, oblast konvergencije polaznog reda je $-1 \le x \le 1$.

2.2.30. Ispitati konvergenciju stepenog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)} x^{2n}, \qquad a > 0,$$

a, zatim, naći sumu reda za $a = 1$.

Rešenje.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \infty.$$

Red apsolutno konvergira za $x \in (-\infty, +\infty)$. Za $a = 1$ red postaje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^{2n}$ čija je suma:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x^2)^{n-1}}{n!} \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} - 1 - x^2\right) = \frac{1}{x^2}\left(e^{x^2} - 1 - x^2\right). \end{aligned}$$

2.2.31. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha}\, n\, x^n}.$$

Rešenje. $R = 1$, red apsolutno konvergira za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Za $x = -1$ red apsolutno konvergira za $\alpha > 0$, uslovno konvergira za $-1 < \alpha \le 0$, i divergira za $\alpha \le -1$. Za $x = 1$ red konvergira za $\alpha > 0$, i divergira za $\alpha \le 0$.

2.2.32. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{p/2}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n.$$

Rešenje. Smenom $\dfrac{2x}{1+x^2} = t$ red dobija sledeći oblik

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, n^{p/2}\, t^n. \tag{2}$$

Ppolupréčnik konvergencije reda (2) je $R = 1$, red (2) apsolutno konvergira za $-1 < t < 1$, dok polazni red apsolutno konvergira za $x \in (-\infty, +\infty)$ i $x \neq \pm 1$.

Za $x = 1$ red apsolutno konvergira za $p < 2$, uslovno konvergira za $-2 \leq p < 0$, a divergira za $p \geq 2$. Za $x = -1$ red konvergira za $p < -2$, a divergira za $p \geq -2$.

2.2 33. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{\frac{p+1}{2}}\, \mathrm{tg}^{\,n} x^2.$$

Rešenje.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{p+1}{2}}}{(n+1)^{\frac{p+1}{2}}} = 1.$$

Red apsolutno konvergira za $|\,\mathrm{tg}\, x^2| < 1$, odnosno za $|x| < \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Za $\mathrm{tg}\, x^2 = 1$ red apsolutno konvergira za $p < -3$, uslovno konvergira za $-3 \leq p < -1$, a divergira za $p \geq -1$. Za $\mathrm{tg}\, x^2 = -1$, red konvergira za $p < -3$, a divergira za $p \geq -3$.

2.2.34. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1},$$

a zatim naći sumu istog.

Rešenje. $R = 1$, red apsolutno konvergira za $0 < x^2 < 1$, odnosno, za $|x| < 1$. Za $x = -1$ red apsolutno konvergira. Za $x = 1$ red, takođe apsolutno konvergira. Dakle, oblast konvergencije polaznog reda je $|x| \leq 1$. U intervalu $x \in (-1, 1)$ red se može integraliti i diferencirati član po član, pa tako nalazimo sumu reda:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n-1} = x \cdot f(x)$$

pri čemu je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

Zatim, diferenciranjem funkcije $f(x)$, nalazimo

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x},$$

odakle, integraljenjem, nalazimo da je $f(x) = \operatorname{arctg} x$ a, onda je suma polaznog reda data sa

$$S(x) = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + C$$

Međutim, kako je $S(0) = C$ to je $C = 0$, pa je

$$S(x) = \frac{1}{2} \left(x^2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x - x \right).$$

2.2.35. Dat je stepeni red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n}{n! n^{\alpha n}} x^n, \qquad \alpha - \mathbb{R}.$$

(a) Odrediti poluprečnik konvergencije datog reda; (b) Za $\alpha = 0$ naći sumu reda.

Rešenje. (a)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n}{n! n^{\alpha n}} \frac{(n+1)!(n+1)^{\alpha(n+1)}}{2^{n+1} + n + 1}$$

Prema poslednjoj relaciji, nalazimo da je: $R = \infty$, za $\alpha > -1$; $R = 0$, za $\alpha < -1$; $R = \frac{1}{2e}$, za $\alpha = -1$.

(b)

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^{2x} + xe^x - 1.$$

Funkcija $S(x)$ je definisana u intervalu $x \in (-\infty, +\infty)$, jer je $R = \infty$.

2.2 36. Dat je stepeni red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n + a^n) n^{\alpha n}}{n!} x^n.$$

(a) Odrediti poluprečnik konvergencije datog reda; (b) Za $\alpha = 1$, $a - 2$ ispitati konvergenciju na krajevima intervala konvergencije; (c) Za $\alpha = 0$ i $a = -\frac{1}{3}$, sumirati red.

Rešenje. (a)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n + a^n)n^{\alpha n}}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(2^{n+1} + a^{n+1})(n+1)^{\alpha(n+1)}}.$$

U zavisnosti od realnog parametra a, imamo sledeća dva slučaja: 1° $a < 2$, $R = \infty$, za $\alpha < 1$; $R = 0$, za $\alpha > 1$; $R = \frac{1}{2e}$, za $\alpha = 1$. 2° $a \geq 2$, $R = \infty$, za $\alpha < 1$; $R = 0$, za $\alpha > 1$; $R = \frac{1}{ae}$, za $\alpha = 1$. (b) Za $\alpha = 1$ i $a \geq 2$ poluprečnik konvergencije reda je $R = \frac{1}{ae}$, pa red apsolutno konvergira za $|x| < \frac{1}{ae}$. Za $x = -\dfrac{1}{ae}$ red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(2^n + a^n)n^n}{a^n e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{2}{a}\right)^n \left(\frac{n}{e}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Lako se može pokazati da red uslovno konvergira u tački $x = -\frac{1}{ae}$.

Za $x = \frac{1}{ae}$ red se razlaže na dva sabirka na sledeći način:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n + a^n)n^n}{n! a^n e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{a}\right)^n \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Kako je prvi sabirak konvergentan red, a drugi sabirak divergentan red, to polazni red divergira u tački $x = \frac{1}{ae}$.

(c) Neka je $\alpha = 0$ i $a = -\frac{1}{3}$, tada je:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} \frac{x^n}{n!} = e^{2x} + e^{-\frac{x}{3}} - 2.$$

Dakle, suma reda, za $\alpha = 0$ i $a = -\frac{1}{3}$, je funkcija $S(x) = e^{2x} + e^{-\frac{x}{3}} - 2$, koja je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$.

2.2.37. Dat je stepeni red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n}{n! n^{\alpha n}} x^n.$$

(a) Odrediti poluprečnik konvergencije datog reda; (b) Za $\alpha = -1$ ispitati konvergenciju na krajevima intervala konvergencije; (c) Za $\alpha = 0$ naći zbir reda.

Rešenje. (a) Kao i u prethodnom zadatku 2.2.36, nalazimo da je: $R = \infty$, za $\alpha > -1$; $R = 0$, za $\alpha < -1$ i $R = \frac{e}{3}$, za $\alpha = -1$.

(b) Za $\alpha = -1$, red postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n}{n!} n^n x^n,$$

čiji je poluprečnik konvergencije $R = \frac{e}{3}$, pa red apsolutno konvergira za $|x| < \frac{e}{3}$. Za $x = -\frac{e}{3}$ red se razlaže na zbir redova

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e^n n^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{3^n} \frac{n^n}{(n-1)!}.$$

Drugi sabirak je divergentan red, pa i polazni red divergira u tački $x = -\frac{e}{3}$. Za $x = \frac{e}{3}$ red, takođe, divergira.

(c) Za $\alpha = 0$ red je konvergentan, a njegova suma je

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = e^{3x} + xe^x - 1.$$

2.2.38. Sledeće funkcije razviti u stepeni red po x:

$$
\begin{aligned}
&1^\circ \quad f(x) = e^x \quad \text{i} \quad f(x) = e^{-x};\\
&2^\circ \quad f(x) = e^{-x^2}; \quad 3^\circ \quad f(x) = \sin x;\\
&4^\circ \quad f(x) = \cos x; \quad 5^\circ \quad f(x) = \sin^2 x;\\
&6^\circ \quad f(x) = \cos^2 x; \quad 7^\circ \quad f(x) = \ln(1+x);\\
&8^\circ \quad f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; \quad 9^\circ \quad f(x) = \frac{2x}{(x+1)(1-x^2)};\\
&10^\circ \quad f(x) = \ln(1 - x + x^2 - x^3); \quad 11^\circ \quad f(x) = \arcsin x;\\
&12^\circ \quad f(x) = \operatorname{arctg} x; \quad 13^\circ \quad f(x) = e^x \sin x;\\
&14^\circ \quad f(x) = e^x \cos x; \quad 15^\circ \quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}.
\end{aligned}
$$

Rešenje.

$$1^\circ \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}; \quad 2^\circ \quad e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!};$$

koji konvergiraju za $|x| < +\infty$.

3°

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

koji konvergira za svako $|x| < +\infty$.

4°

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

koji konvergira za svako $|x| < +\infty$.

5°

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right).$$

6°

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right).$$

7°

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

A, zatim, integraljenjem funkcije $f'(x)$ u intervalu $|x| < 1$, nalazimo razvoj funkcije $\ln(1+x)$

$$f(x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^n\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

8°

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

9°

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n-1} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n}, \end{aligned}$$

koji konvergira za $|x| < 1$.

10°

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(1 - x + x^2 - x^3\right) = \ln(1-x) + \ln(1+x^2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

11°

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}+1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+1.$$

Kako red

$$f'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

apsolutno konvergira za $|x|<1$, to je:

$$f(x)=\arcsin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^x x^{2n}\,dx+x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

13° Prema poznatim relacijama

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

i

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x,$$

nalazimo

$$\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$$

i

$$\sin x=-\frac{i}{2}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right).$$

Tako nalazimo razvoj

$$\begin{aligned}
e^x\sin x&=-\frac{i}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}\,x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{n!}\,x^n\right)\\
&=-\frac{i}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,2^{\frac{n}{2}}\left(\cos n\frac{\pi}{4}+i\sin n\frac{\pi}{4}\right)-\right.\\
&\left.-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,2^{\frac{n}{2}}\left(\cos n\frac{\pi}{4}-i\sin n\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}x^n}{n!}\,\sin n\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Prema nejednakosti

$$\left|\frac{x^n(2^{\frac{n}{2}})}{n!}\,\sin n\frac{\pi}{4}\right|\leq\frac{|x|^n 2^{\frac{n}{2}}}{n!},$$

nalazimo da red $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n 2^{\frac{n}{2}}}{n!}$ konvergira za $|x|<\infty$.

14° Slično prethodnom zadatku, nalazimo da je razvoj funkcije $f(x) = e^x \cos x$ dat sa:

$$e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n 2^{\frac{n}{2}}}{n!} \cos n\frac{\pi}{4},$$

koji konvergira za $|x| < \infty$.

15°

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = -1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} x^{2n},$$

a sada, integraljenjem funkcije $f'(x)$, nalazimo

$$\operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

koji konvergira za $|x| < 1$.

2.2.39. Naći sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Rešenje. Poluprečnik konvergencije reda je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1,$$

pa red apsolutno konvergira za $|x| < 1$. Suma reda je $(x < 1)$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^x x^n dx}{(n+2)(n+3)} \\ &= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^x x^{n+1} dx}{n+3}\right) dx = \int_0^x \left(\int_0^x \left(\int_0^x \frac{x^3}{1-x}\, dx\right) dx\right) dx \\ &= -\frac{x^3}{6}\left(\frac{x^2}{10} + \frac{x}{4} + 1\right). \end{aligned}$$

2.2.40. Naći sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{n!}.$$

Rešenje. Red konvergira za $|x| < \infty$ pa je suma reda

$$S(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n!} = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}\right)' = x\left(e^x + xe^x - 1\right).$$

2.2.41. Naći sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{(2n+1)!}.$$

Rešenje. Posmatramo stepeni red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{nx^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

čiji je poluprečnik konvergencije $R = \infty$. Suma posmatranog stepenog reda je

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{2}x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{2}\sin x. \end{aligned}$$

Suma polaznog numeričkog reda je $S(1)$ i ima vrednost

$$S(1) = \frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1).$$

3. REŠAVANJE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA POMOĆU REDOVA

3.1. Uvodne napomene

Neka je data diferencijalna jednačina

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{1}$$

Tačka x_0 je obična tačka diferencijalne jednačine (1) ako su koeficijenti $a_i(x)$ $(i = 0, 1, 2)$, analitičke funkcije u toj tački, tj. mogu se u toj tački razviti u konvergentan Taylorov red poluprečnika $R > 0$ i $a_0(x_0) \neq 0$. Neka je x_0 obična tačka diferencijalne jednačine (1) i neka Taylorovi redovi koeficijenata $a_i(x)$ $i = 0, 1, 2$ konvergiraju u intervalu $|x - x_0| < R$, $R > 0$, tada se rešenje diferencijalne jednačine (1) traži u obliku stepenog reda

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

koji konvergira za $|x - x_0| < R$. Pomenuti pojmovi se, takođe, odnose i na diferencijalne jednačine n-tog reda $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ovde dajemo rešenja nekih diferencijalnih jednačina prvog, drugog i trećeg reda, koje se najčešće koriste u praksi.

3.2. Zadaci

3.2.1. Naći rešenje diferencijalne jednačine

$$y' + y = x, \quad y(0) = 1,$$

u obliku stepenog reda.

Rešenje. Neka je rešenje jednačine $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Tada je

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

pa zamenom u datoj diferencijalnoj jednačini, nalazimo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x. \tag{1}$$

Rešenje sistema jednačinačina (1) je: $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, a ostali koeficijenti a_n, za $n = 2, 3, 4, \ldots$, se nalaze pomoću rekurentne relacije

$$(n+1) a_{n+1} + a_n = 0. \tag{2}$$

Prema rekurentnoj relaciji (2), a koristeći indukciju po n, nalazimo koeficijente:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_n = (-1)^n \frac{2}{n!}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Dakle, rešenje date diferencijalne jednačine je

$$y(x) = 1 - x + 2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!} = 2e^{-x} + x - 1.$$

3.2.2. Naći rešenje diferencijalne jednačine

$$y' - y = x^3 + x,$$

koje zadovoljava uslov $y(0) = 1$.

Rešenje. Neka je $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ rešenje date diferencijalne jednačine. Onda je $y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Zamenom izraza za $y(x)$ i $y'(x)$ u diferencijalnoj jednačini, nalazimo koeficijente:

$$a_1 = a_0 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_n = \frac{8}{n!}, \quad n = 5, 6, \ldots.$$

Dakle, rešenje date diferencijalne jednačine je

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + 8\sum_{n=5}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 8e^x - x^3 - 3x^2 - 7x - 7.$$

3.2.3. Naći rešenje diferencijalne jednačine

$$y' + y^2 = x^3,$$

koje ispunjava uslov $y(0) = 1/2$.

Rešenje. Neka je rešenje date diferencijalne jednačine $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Tada je $y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Zamenom izraza za $y(x)$ i $y'(x)$ u diferencijalnoj jednačini, nalazimo da su koeficijenti traženog stepenog reda rešenja sistema jednačina:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n\left(a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0\right) = x^3.$$

Sledi:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = -\frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{8}, \quad a_3 = -\frac{3}{16}, \quad a_4 = \frac{9}{32}.$$

Ostale koeficijente nalazimo iz rekurentne relacije

$$(n+1)a_{n+1} + a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0 = 0,$$

za $n = 5, 6, \ldots$. Naime, rešenje date diferencijalne jednačine je

$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{6}x^3 + \frac{9}{32}x^4 - \frac{1}{64}x^5 + \ldots.$$

3.2.4. Naći rešenje diferencijalne jednačine

$$(1 + x)y' + y = 2x,$$

koje ispunjava uslov $y(0) = a_0$.

Rešenje. Ako je $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ rešenje date diferencijalne jednačine, onda je $y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Nalazimo da je

$$y(x) = a_0 \left(1 - x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n x^n\right) + x^2.$$

3.2.5. Naći rešenje diferencijalne jednačine

$$y' = x^2 + y, \quad \text{za} \quad y(0) = a_0.$$

Rešenje. Neka je rešenje date diferencijalne stepeni red $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, pri čemu je $y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Sada, prema datoj diferencijalnoj jednačini i prethodnih izraza za $y(x)$ i $y'(x)$, nalazimo koeficijente a_n:

$$a_1 = a_0, \quad a_2 = \frac{a_0}{2!}, \quad a_n = \frac{2 + a_0}{n!}, \quad n = 3, 4, \ldots.$$

Tako nalazimo da je

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = (a_0 + 2)e^x - x^2 - 2x - 2.$$

3.2.6. Naći rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + x^2 y' - 2xy = x^2 + x + 2, \quad \text{za} \quad Y(0) = a_0,\ y'(0) = a_1.$$

Rešenje. Neka je $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ rešenje date diferencijalne jednačine. Onda funkcije $y(x)$, $y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ i $y''(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n+1) a_n x^{n-2}$ zadovoljavaju polaznu diferencijalnu jednačinu. Naime, zamenom pomenutih funkcija u diferencijalnoj jednačini, nalazimo da je rešenje $y(x)$

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0\left(1+\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{5\cdot 18}-\frac{x^9}{9\cdot 5\cdot 36}-\dots\right)\\ &+a_1\left(x+\frac{x^4}{12}-\frac{x^7}{7\cdot 36}-\dots\right)\\ &+x^2+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{5\cdot 36}-\frac{x^7}{7\cdot 36}-\frac{x^9}{2\cdot 9\cdot 5\cdot 36}-\dots. \end{aligned}$$

3.2.7. Naći rešenje diferencijalne jednačine

$$(1-x^2)y''-xy'+y=0,\quad \text{za}\quad y(0)=a_0,\ y'(0)=a_1.$$

Rešenje. Neka je stepeni red $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ rešenje date diferencijalne jednačine. Zatim, zamenom izraza $y(x)$, $y'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ i $y''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$ u datoj diferencijalnoj jednačini, nalazimo:

$$y(x)=a_0\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{16}-\frac{5}{8\cdot 16}\cdot x^8-\dots\right)+a_1x.$$

3.2.8. Naći rešenje diferencijalne jednačine

$$\left(1+x^2\right)y''+xy'=y,\quad \text{za}\quad y(0)=a_0,\ y'(0)=a_1.$$

Rešenje. Ako je $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ rešenje, tada je $y'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ i $y''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$. Zamenom izraza $y(x)$, $y'(x)$ i $y''(x)$ u datoj diferencijalnoj jednačini, nalazimo da je rešenje:

$$y(x)=a_0+a_1x+a_0\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\,\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,x^{2k}.$$

3.2.9. Data je generalisana Hermiteova diferencijalna jednačina

$$3y'''-8xy'+8ky=0.$$

Naći opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

Rešenje. Pretpostavimo da je rešenje date diferencijalne jednačine stepeni red $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a onda diferenciranjem nalazimo

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\
y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \\
y'''(x) &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3},
\end{aligned}
$$

čijom zamenom u datoj diferencijalnoj jednačini, nalazimo da je opšte rešenje:

$$
\begin{aligned}
y(x) = a_0 &\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{3^n} \prod_{i=1}^{n} (3i-3-k) \frac{x^{3n}}{(3n)!}\right) \\
+ a_1 &\left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{3^n} \prod_{i=1}^{n} (3i-2-k) \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}\right) . \\
+ a_2 &\left(x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{3^n} \prod_{i=1}^{n} (3i-1-k) \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}\right)
\end{aligned}
$$

3.2.10. Naći opšte rešenje Fibonaccieve diferencijalne jednačine

$$\left(4 + x^2\right) y'' + 3xy' - k(k+2)y = 0.$$

Rešenje. Pod pretpostavkom da je $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ rešenje date diferencijalne jednačine i zamenom odgovarajućih izvodnih redova

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

u diferencijalnoj jednačini, dolazimo do rešenja:

$$
\begin{aligned}
y(x) = a_0 &\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{2n} (k-2n+2i)}{4^n (2n)!} x^{2n}\right) \\
+ a_1 &\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{2n+1} (k-2n-1+2i)}{4^n (k+1)(2n+1)!} x^{2n+1}\right).
\end{aligned}
$$

3.2.11. Naći rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + xy' = 2x.$$

Rešenje. Neka je stepeni red $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ rešenje date jednačine. Zamenom izraza za $y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ i $y''(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ u diferencijalnoj jednačini, dolazimo do sledećeg sistema jednačina

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left((n+1)(n+2)a_{n+2} + n a_n\right) x^n + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + 2a_2 + a_1 x = 2x.$$

Rešavanjem ovog sistema nalazimo koeficijente a_n:

$$a_{2n} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad a_{2n+1} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!} (2 - a_1).$$

Traženo rešenje je:

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2 - a_1}{2^n (2n+1)\, n!}\, x^{2n+1} \\ &= a_0 + a_1 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^n (2n+1) n!} \right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{2^{n-1} (2n+1) n!}. \end{aligned}$$

Poluprečnik konvergencije stepenog reda $y(x)$ je $R = \infty$.

II GLAVA

INTEGRACIJA

1. DVOSTRUKI INTEGRALI

1.1. Uvodne napomene

1° Neka je $z = f(x, y)$ neprekidna funkcija nad zatvorenom pravilnom oblašću D. Pod *dvostrukim integralom* funkcije $z = f(x, y)$ nad D podrazumeva se broj

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{max|\Delta x_i|\to 0\\ max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$

gde je $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, a zbir se odnosi na sve vrednosti i i j za koje $(x_i, y_j) \in D$.

2° Ako je

$$D = \{(x,y)|a \le x \le b, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x)\},$$

pri čemu su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ neprekidne funkcije na segmentu $[a, b]$, onda važi

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

3° Uvođenjem polarnih koordinata: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, dobijamo formulu

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi.$$

1.2. Zadaci

1.2.1. Po definiciji izračunati integral $\iint_D x^2y^2\,dx\,dy$, ako je oblast integracije D data sa $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Rešenje. Funkcija $f(x,y) = x^2y^2$ je neprekidna u oblasti D, pa je integrabilna u istoj. Integral nalazimo na sledeći način.

Interval $[0,1]$ delimo na n jednakih delova, odnosno, nalazimo da je: $x_i = i/n$, $x_{i+1} = (i+1)/n$, $\Delta x_i = 1/n$, $y_j = j/n$, $y_{j+1} = (j+1)/n$, $\Delta y_j = 1/n$. Prema definiciji dvostrukog integrala, imamo

$$\begin{aligned}\iint_D x^2y^2\,dx\,dy &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}\frac{j^2}{n^2}\frac{1}{n}\frac{1}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36n^6} = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

1.2.2. Po definiciji izračunati integral $\iint_D xy\,dx\,dy$, ako je D oblast integracije data sa $a \le x \le b$, $c \le y \le d$.

Rešenje. Funkcija $f(x,y) = xy$ je neprekidna u oblasti D , pa je integrabilna u njoj. Integral tražimo na sledeći način.

Intervale $[a,b]$ i $[c,d]$ delimo na n jednkih delova, pa tako nalazimo da je $\Delta x_i = (b-a)/n$ i $\Delta y_j = (d-c)/n$. Traženi integral je

$$\begin{aligned}I &= \iint_D xy\,dx\,dy\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a+\frac{b-a}{n}(i-1)\right)\sum_{j=1}^{n}\left(c+\frac{d-c}{n}(j-1)\right)\frac{(b-a)(d-c)}{n^2}\right)\\ &= \frac{1}{4}(b^2-a^2)(d^2-c^2)\end{aligned}$$

1.2.3. Prema definiciji izračunati integral $\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$, ako je oblast integracije data sa: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Rešenje. Zadatak se rešava na sličan način kao i prethodna dva zadatka. Naime, nalazimo da je: $x_i = i/n$, $\Delta x_i = 1/n$, $y_j = j/n$, $\Delta y_j = 1/n$. Onda je traženi integral:

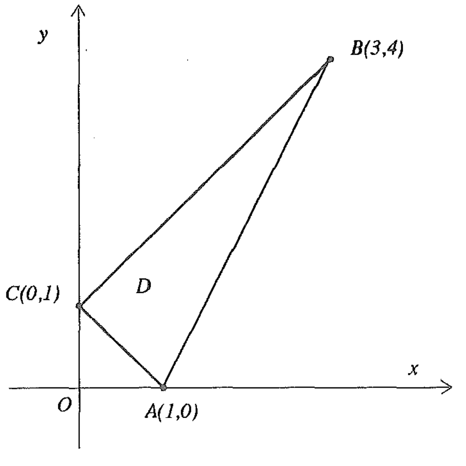
$$\begin{aligned}\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}e^{x_i}\sum_{j=1}^{n}e^{y_j}\right)\frac{1}{n^2}\\ &= (1-e)^2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{1/n}}\right)^2 = (1-e)^2.\end{aligned}$$

U sledećim zadacima ispisati granice integracije u dvostrukom integralu $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ za oba moguća poretka.

1.2.4. Oblast D je $\triangle ABC$ sa temenima $A(1,0)$, $B(3,4)$, $C(0,1)$.

Rešenje. (Slika 1)

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{1+x} f(x,y)\,dy + \int_1^3 dx \int_{2x-2}^{1+x} f(x,y)\,dy \\ &= \int_0^1 dy \int_{1-y}^{y/2+1} f(x,y)\,dx + \int_1^4 dy \int_{y-1}^{y/2+1} f(x,y)\,dx.\end{aligned}$$

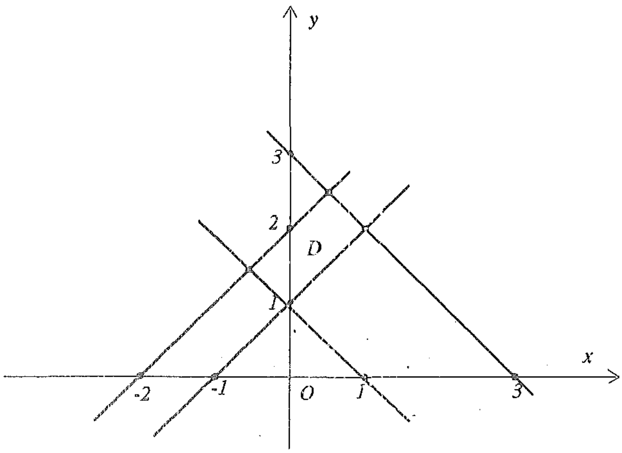


Slika 1

1.2.5. Oblast D je četvorougao određen linijama: $x+y=1$, $x+y=3$, $y-x=1$, $y-x=2$, slika 2.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{-1/2}^{0} dx \int_{1-x}^{2+x} f(x,y)\,dy + \int_0^{1/2} dx \int_{1+x}^{2+x} f(x,y)\,dy \\ &\quad + \int_{1/2}^{1} dx \int_{1+x}^{3-x} f(x,y)\,dy \\ &= \int_1^{3/2} dy \int_{1-y}^{y-1} f(x,y)\,dx \\ &\quad + \int_{3/2}^{2} dy \int_{y-2}^{y-1} f(x.y)\,dx + \int_2^{5/2} dy \int_{y-2}^{3-y} f(x,y)\,dx.\end{aligned}$$



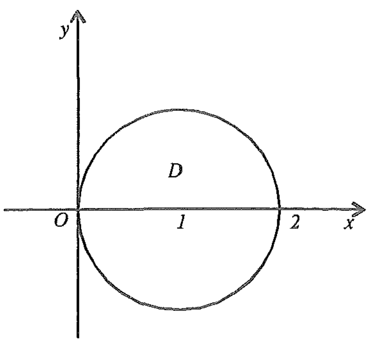
Slika 2

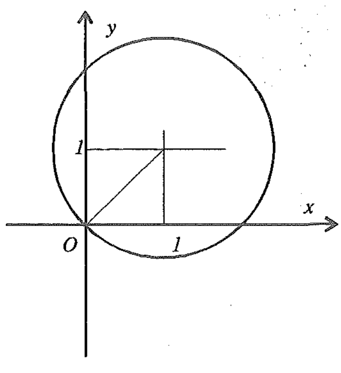
1.2.6. Oblast D je krug:

$$1^\circ \quad x^2+y^2=a^2 \quad , \quad 2^\circ \quad x^2+y^2=2x, \quad 3^\circ \quad x^2+y^2=2(x+y).$$

Rešenje. 1°

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy \\ &= \int_{-a}^{a} dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx.\end{aligned}$$





Slika 3 Slika 4

2° (Slika 3)

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$$
$$= \int_{-1}^{1} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

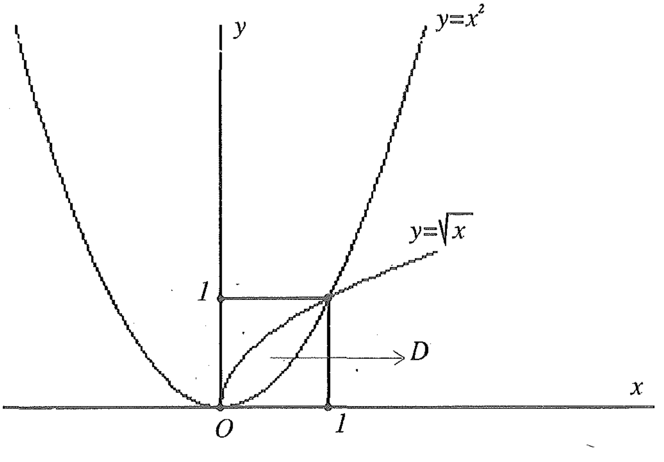
3° (Slika 4)

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} dx \int_{1-\sqrt{1-x^2+2x}}^{1+\sqrt{1-x^2+2x}} f(x,y)\,dy$$
$$= \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2+2y}}^{1+\sqrt{1-y^2+2y}} f(x,y)\,dx.$$

1.2.7. Oblast D je ograničena linijama $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ (slika 5).

Rešenje.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$



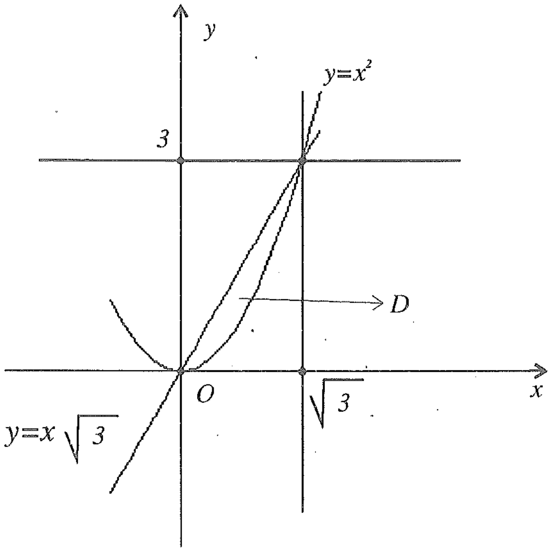
Slika 5

U sledećim zadacima rekonstruisati oblast integracije, a zatim promeniti poredak integracije:

1.2.8. $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2}^{x\sqrt{3}} f(x,y)\,dy.$

Rešenje. (Slika 6)

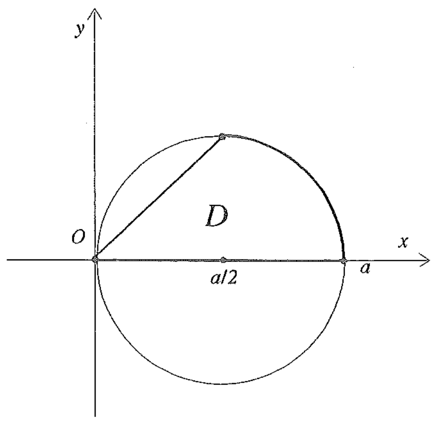
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2}^{x\sqrt{3}} f(x,y)\,dy = \int_0^3 dy \int_{y/\sqrt{3}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$



Slika 6

1.2.9. $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{a/2} dy \int_y^{R(y)} f(x,y)\,dx$, gde je

$$R(y) = \frac{a+\sqrt{a^2-4y^2}}{2}.$$



Slika 7

Rešenje. (Slika 7)

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^{a/2} dy \int_y^{R(y)} f(x,y)\,dx \\ &= \int_0^{a/2} dx \int_0^{x} f(x,y)\,dy + \int_{a/2}^{a} dx \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} f(x,y)\,dy.\end{aligned}$$

1.2.10. $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx.$

Rešenje.

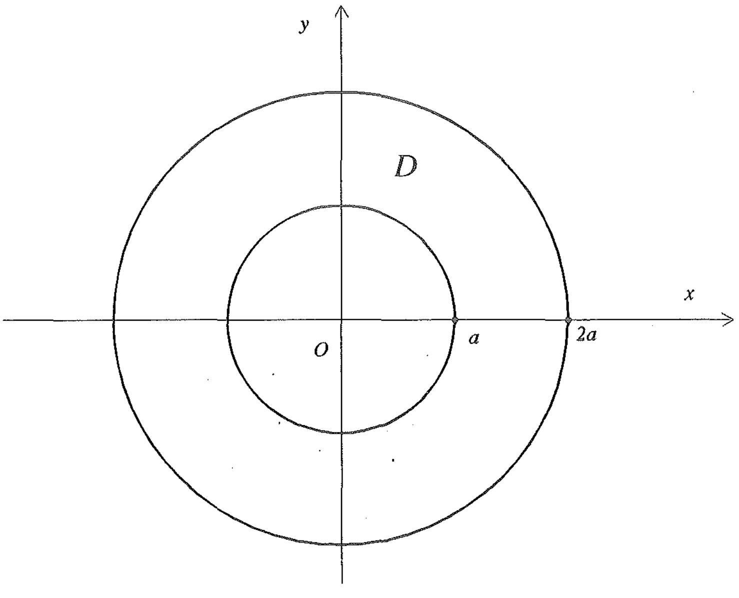
$$I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

1.2.11. U dvostrukom integralu $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ preći na polarne koordinate i napisati oba moguća poretka, ako je oblast integracije data sa:

$$1^\circ\ \ x^2+y^2 \le x, \qquad 2^\circ\ \ a^2 \le x^2+y^2 \le 4a^2.$$

Rešenje. 1° $x^2+y^2 \le x$, odakle, prelaskom na polarne koordinate, nalazimo da se polazni integral transformiše na sledeći način:

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr \\ &= \int_0^1 r\,dr \int_{-\arccos r}^{\arccos r} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.\end{aligned}$$



Slika 8

2° $a^2 \le x^2+y^2 \le 4a^2$, (slika 8), odakle, prelaskom na polarne koordinate, nalazimo da se polazni integral transformiše na sledeći način:

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{2a} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr \\ &= \int_a^{2a} r\,dr \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.\end{aligned}$$

1.2.12. Ako je oblast integracije $D = \{(x,y) | \, 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 1\}$, prelaskom na polarne koordinate transformisati dvostruki integral $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

Rešenje. Uvođenjem polarnih koordinata, oblast D se deli na oblasti:

$$D_1 : \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad r \in \left[0, \frac{1}{\cos\varphi}\right] \quad i \quad D_2 : \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \quad r \in \left[0, \frac{1}{\sin\varphi}\right]$$

u jednom poretku, a u drugom poretku, imamo oblasti:

$$D_1' : r \in \left[1, \sqrt{2}\right], \quad \varphi \in \left[\arccos\frac{1}{r}, \arcsin\frac{1}{r}\right]; \quad D_2' : r \in [0,1], \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

1.2.13. Dvostruki integral $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ transformisati uvođenjem polarnih koordinata, ako je oblast integracije

$$D = \{(x,y) | \, y = \frac{x\sqrt{3}}{3}, \quad y = x, \quad x = 1\}.$$

Rešenje. Uvođenjem polarnih koordinata $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, oblast integracije D se transformiše na sledeći način:

$$\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right], \quad r \in \left[0, \frac{1}{\cos\varphi}\right]$$

u jednom smeru integracije. Promenom smera integracije, imamo:

$$D_1 : r \in \left[0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right], \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right], \quad D_2 : r \in \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{2}\right], \quad \varphi \in \left[\arccos\frac{1}{r}, \frac{\pi}{4}\right]$$

1.2.14. Ako je D oblast integracije ograničena sa: $x^2 + y^2 \le 1$, $x^2 + y^2 \le 2x$, (slika 9), ispisati granice u oba moguća poretka, u dvostrukom integralu

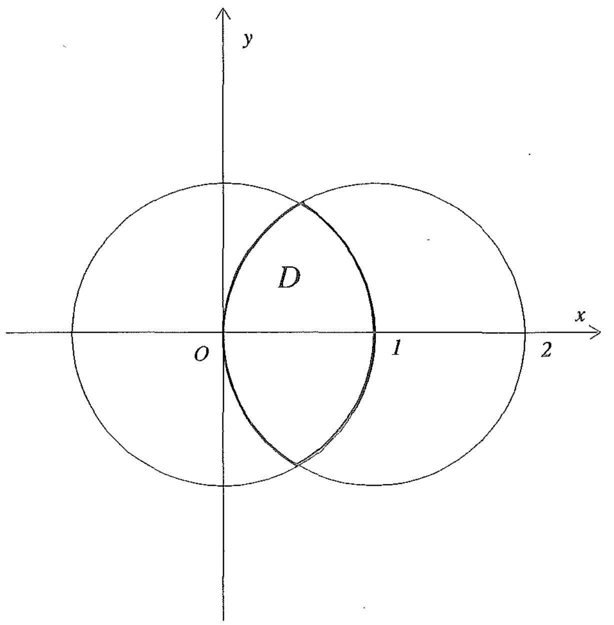
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Rešenje. Uvođenjem polarnih koordinata, oblast D se transformiše na sledeći način:

$$r \in [0,1], \quad \varphi \in \left[-\arccos\frac{r}{2}, \arccos\frac{r}{2}\right].$$

U drugom poretku integracije, granice integracije su:

$$D_1 : \varphi \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right], r \in [0,1]\,; \; D_2 : \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right], r \in [0, 2\cos\varphi]\,;$$
$$D_3 : \varphi \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right], r \in [0, 2\cos\varphi]\,.$$

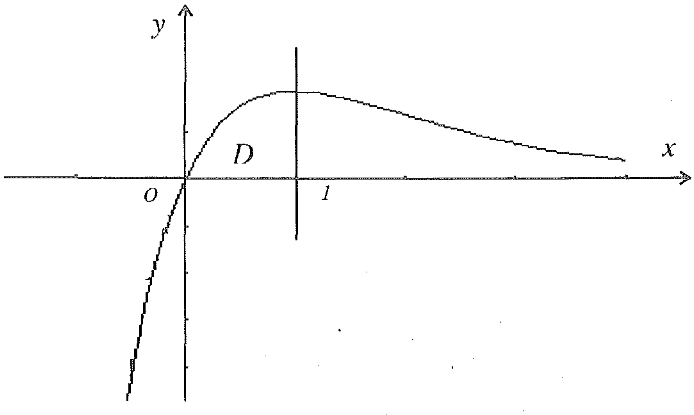


Slika 9

1.2.15. Izračunati $\iint_D xy\,dx\,dy$, ako je oblast integracije D ograničena krivom $y = xe^{-x}$ i pravama $x = 1$ i $y = 0$.

Rešenje. (Slika 10)

$$I = \int_0^1 x\,dx \int_0^{xe^{-x}} y\,dy = \frac{3e^2 - 19}{16e^2}.$$



Slika 10

1.2.16. Izračunati

$$I = \iint_D y \frac{(x+1)\ln(x+1)}{(x-1)^2}\, dx\, dy,$$

ako je D oblast ograničena linijama: $y = 1$, $x = 0$, $x = 1 - \sqrt{1-y^2}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 y\, dy \int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} \frac{(x+1)\ln(x+1)}{(x-1)^2}\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{(x+1)\ln(x+1)}{(x-1)^2}\, dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^1 y\, dy = \ln 2 - \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

1.2.17. Izračunati

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{1/x} \frac{y^2\, dy}{(x+y)^2 \sqrt{1+y^2}}.$$

Rešenje.

$$I = \int_0^1 \frac{y^2\, dy}{\sqrt{1+y^2}} \int_0^y \frac{dx}{(x+y)^2} + \int_1^\infty \frac{y^2}{\sqrt{1+y^2}} \int_0^{1/y} \frac{dx}{(x+y)^2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

1.2.18. Naći vrednost integrala $I = \iint_D x^2 y\, dx\, dy$, ako je oblast integracije D ograničena linijama $y = x^2$ i $y - x = 2$.

Rešenje.

$$I = \int_{-1}^2 x^2\, dx \int_{x^2}^{2+x} y\, dy = \frac{531}{70}.$$

1.2.19. Izračunati integral $I = \iint_D y^2\,dx\,dy$, ako je D oblast ograničena linijama: $x = 0$, $y = 0$, $x = 1 + \cos y$, $y = \pi$.

Rešenje.

$$I = \int_0^{\pi} y^2\,dy \int_0^{1+\cos y} dx = \frac{\pi}{3}\left(\pi^2 - 6\right).$$

1.2.20. Ako je D oblast ograničena linijama:

$$y = 0, \quad y = \sqrt{x}, \quad x^2 + y^2 = 2,$$

izračunati integral $I = \iint_D xy\,dx\,dy$.

Rešenje.

$$I = \int_0^1 x\,dx \int_0^{\sqrt{x}} y\,dy + \int_1^{\sqrt{2}} x\,dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} y\,dy = \frac{7}{24}.$$

1.2.21. Izračunati integral $I = \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, ako je oblast D ograničena linijama: $y \geq 0$, $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4}$, $x^2 + y^2 = ax$.

Rešenje.

$$I = \int_0^{a/4} dx \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} (x^2 + y^2)\,dy + \int_{a/4}^{a/2} dx \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}} (x^2 + y^2)\,dy,$$

odakle, prelaskom na polarne koordinate, nalazimo da je

$$I = \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_0^{a/2} r^3\,dr + \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^3\,dr = \frac{a^4\pi}{48} - \frac{7a^4\sqrt{3}}{256}.$$

1.2.22. Izračunati integral $I = \iint_D 2y\,dx\,dy$, ako je oblast D ograničena linijama: $y = 0$, $x = 0$, $y = \ln x$, $y = 1$.

Rešenje.

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 2y\,dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 2y\,dy = 2.$$

1.2.23. Izračunati integral $I = \int_0^a \int_y^a e^{x^2}\,dx\,dy$.

Rešenje.

$$I = \int_0^a dy \int_y^a e^{x^2}\,dx = \int_0^a e^{x^2}\,dx \int_0^x dy = \frac{1}{2}\left(e^{a^2} - 1\right).$$

1.2.24. Naći vrednost integrala $I = \iint_D (x^2 - y)\,dx\,dy$, ako je D oblast ograničena linijama:

$$x + y = a, \quad x + y = 3a, \quad y = x, \quad y - x = a.$$

Rešenje. Oblast D se deli na sledeće tri oblasti:

$D_1: \quad x \in \left[0, \frac{a}{2}\right], \quad y \in [a - x, a + x],$

$D_2: \quad x \in \left[\frac{a}{2}, a\right], \quad y \in [x, x + a],$

$D_3: \quad x \in \left[a, \frac{3a}{2}\right], \quad y \in [x, 3a - x].$

Traženi integral je:

$$I = \int_0^{a/2} dx \int_{a-x}^{a+x} (x^2 - y)\,dy + \int_{a/2}^{a} dx \int_x^{x+a} (x^2 - y)\,dy$$
$$+ \int_a^{3a/2} dx \int_x^{3a-x} (x^2 - y)\,dy$$
$$= \frac{2a^4}{3} - \frac{5a^3}{4}.$$

1.2.25. Izračunati dvostruki integral $I = \iint_D xy\,dx\,dy$, ako je D oblast ograničena sa:

$$y = 0, \quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Rešenje.

$$I = \int_0^{2a\pi} x\,dx \int_0^{a(1-\cos t)} y\,dy = \frac{64}{3} a^4 \pi.$$

1.2.26. Izračunati $I = \iint_D \dfrac{dx\,dy}{(x + 1 - y)^3}$, ako je D oblast ograničena sa:

$$y = x, \quad y = x + a, \quad y = a, \quad y = 2a.$$

Rešenje. Oblast D se razlaže na sledeće dve oblasti:

$D_1: \quad x \in [0, a], \quad y \in [a, x + a],$

$D_2: \quad x \in [a, 2a], \quad y \in [x, 2a],$

a traženi integral je:

$$I = \int_0^a dx \int_a^{x+a} \frac{dy}{(x + 1 - y)^3} + \int_a^{2a} dx \int_x^{2a} \frac{dy}{(x + 1 - y)^3} = \frac{a^2(2 - a)}{2(1 - a)^2}.$$

1.2.27. Izračunati $I = \iint_D xy^2 e^{xy}\, dx\, dy$, pri čemu je D dato sa: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Rešenje. $I = \int_0^1 x\, dx \int_0^1 y^2 e^{xy}\, dy = 3 - e$.

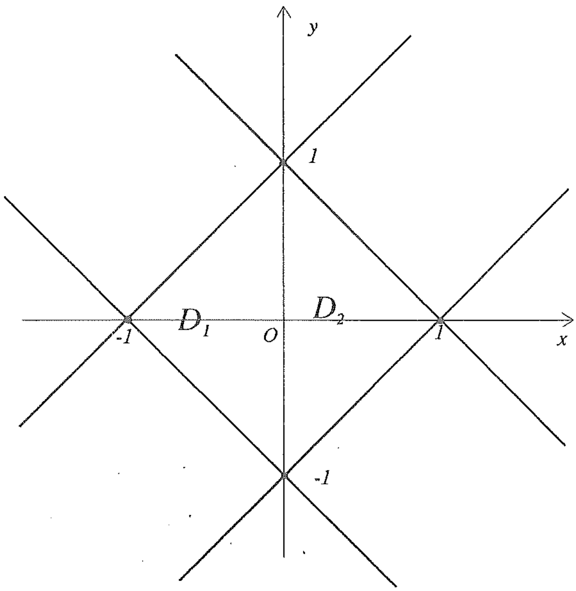
1.2.28. Naći vrednost integrala $I = \iint_D (x+y)^2\, dx\, dy$ ako je$D$: $|x| + |y| \leq 1$.

Rešenje. Oblast D se razlaže na sledeće dve:

$$D_1 : x \in [-1, 0]\,,\ y \in [-1 - x, 1 + x]\,; \quad D_2 : x \in [0, 1]\,,\ y \in [x - 1, 1 - x]\,.$$

Sada nalazimo vrednost traženog integrala:

$$I = \int_{-1}^{0} dx \int_{-1-x}^{1+x} (x + y)^2\, dy + \int_{0}^{1} dx \int_{x-1}^{1-x} (x + y)^2\, dy = \frac{2}{3}.$$



Slika 11

1.2.29. Izračunati $I = \iint_D \sin(x + y)\, dx\, dy$, ako je D oblast ograničena linijama: $y = 0$, $y = x$, $x = \pi/2$.

Rešenje. $I = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \sin(x + y)\, dy = 1$.

1.2.30. Ako je D oblast integracije ograničena sa: $xy = 2$ i $x + y = 3$, izračunati integral $I = \iint_D x^2 y\, dx\, dy$.

Rešenje. $I = \int_1^2 dx \int_{2/x}^{3-x} x^2 y\, dy = \dfrac{7}{20}$.

1.2.31. Naći $I(\alpha) = \iint_D (x+y)^{-\alpha}\,dx\,dy$, ako je D oblast ograničena linijama: $x > 0$, $y > 0$, $0 < a \le x + y \le 1$. Zatim, naći α tako da postoji $\lim_{\alpha \to 0} I(\alpha)$.

Rešenje. Oblast D integracije se razlaže na sledeće dve oblasti:

$$D_1: \quad x \in [0, a], \quad y \in [a - x, 1 - x]; \quad D_2: \quad x \in [a, 1], \quad y \in [0, 1 - x],$$

a integral je

$$I = \int_0^a dx \int_{a-x}^{1-x} (x+y)^{-\alpha}\,dy + \int_a^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)^{-\alpha}\,dy = \frac{1}{2-\alpha} - \frac{a^{2-\alpha}}{2-\alpha}.$$

Sada je $\lim_{a \to 0} I(\alpha) = \dfrac{1}{2-\alpha}$ za $2 \neq \alpha$.

1.2.32. Izračunati integral $I = \iint_D (x+y)\,dx\,dy$, ako je D oblast ograničena linijama:

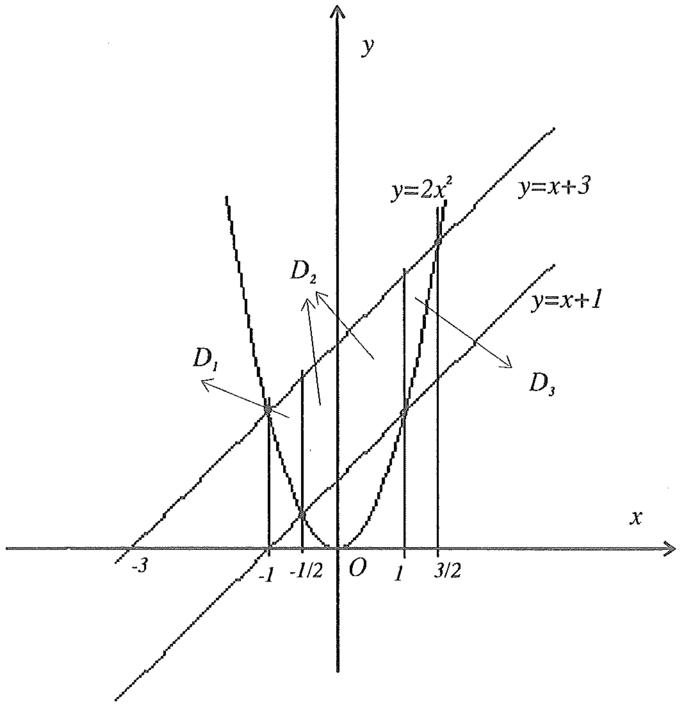
$$y = 2x^2, \quad y = 1 + x, \quad y = 3 + x.$$

Rešenje. Oblast integracije D se razlaže na sledeće tri oblasti (slika 12):

$$D_1: x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \; y \in \left[2x^2, x+3\right]; \quad D_2: x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right], \; y \in [1+x, x+3];$$
$$D_3: x \in \left[1, \frac{3}{2}\right], \; y \in \left[2x^2, x+3\right],$$

pa je traženi integral

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{-1/2} dx \int_{2x^2}^{x+3} (x+y)\,dy \\ &+ \int_{-1/2}^{1} dx \int_{1+x}^{x+3} (x+y)\,dy + \int_1^{3/2} dx \int_{2x^2}^{x+3} (x+y)\,dy \\ &= \frac{843}{80}. \end{aligned}$$



Slika 12

1.2.33. Izračunati dvostruki integral $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, ako je D oblast integracije ograničena sa: $x \geq 0$, $x^2+y^2 \leq 2$, $y = x^2$.

Rešenje.

$$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy,$$

odakle, prelaskom na polarne koordinate, nalazimo da je:

$$I = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} r^2\,dr + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^2\,dr = \frac{2}{45}\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{\pi\sqrt{2}}{6}.$$

1.2.34. Neka je D oblast ograničena sa:

$$y \geq 0, \quad x^2+y^2 = \frac{a^2}{4}, \quad x^2+y^2 = ax, \quad a > 0.$$

Naći integral $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

Rešenje. Presek krivih

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}, \quad x^2 + y^2 = ax$$

je tačka $A\left(a/2, a\sqrt{3}/4\right)$. Prelaskom na polarne koordinate, nalazimo

$$I = \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_0^{a/2} r^2\, dr + \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2\, dr = \frac{a^3}{72}(\pi + 16 - 9\sqrt{3}).$$

1.2.35. Izračunati $I = \iint_D \left(a^2 - x^2 - y^2\right) dx\, dy$, ako je D: $x^2 + y^2 \leq ay$.

Rešenje. Uvođenjem polarnih koordinata, imamo:

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a\sin\varphi} r(a^2 - r^2)\, dr = \frac{5a^4\pi}{32}.$$

1.2.36. Izračunati integral $I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, ako je D oblast ograničena sa:

1° $x^2 + y^2 = a^2, \quad y = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}, \quad y = x\sqrt{3};$

2° $y = x, \quad x^2 + y^2 = x, \quad y > 0.$

Rešenje. 1° Uvođenjem polarnih koordinata, nalazimo da je:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int_0^a r^3\, dr = \frac{a^4\pi}{24}.$$

2° I ovde uvodimo polarne koordinate, pa nalazimo da je:

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} r^3\, dr = \frac{1}{128}(3\pi - 8).$$

1.2.37. Izračunati dvostruki integral $I = \iint_D \cos\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$, ako je D oblast ograničena linijama:

$$x^2 + y^2 = 4\pi^2, \ x^2 + y^2 = \pi^2, \ y = x, \ y = x\sqrt{3}, \ y > 0, \ x > 0.$$

Rešenje. Uvođenjem polarnih koordinata, nalazimo da je

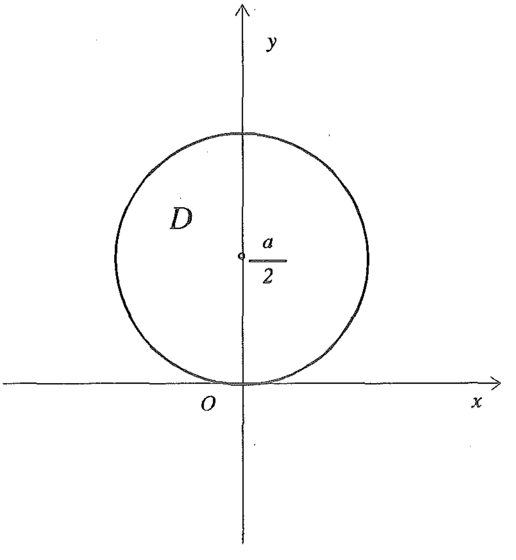
$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_{\pi}^{2\pi} r\cos r\, dr = \frac{\pi}{6}.$$

1.2.38. Naći vrednost integrala $I = \iint_D x^2\sqrt{1-x^2-4y^2}\,dx\,dy$, ako je D oblast data sa $x^2+4y^2 \le 1$.

Rešenje. Prelaskom na polarne koordinate $x = r\cos\varphi$, $y = 1/2r\sin\varphi$, nalazimo da je:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3\cos^2\varphi\sqrt{1-r^2}\,dr = \frac{\pi}{15}.$$

1.2.39. Naći vrednost integrala $I = \iint_D y^2\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$, ako je D: $x^2+y^2 \le ay$, $a > 0$.



Slika 13

Rešenje. Uvođenjem polarnih koordinata, (slika 13) nalazimo

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a\sin\varphi} r^3\sin^2\varphi\sqrt{a^2-r^2}\,dr = \frac{a^5\pi}{15} - \frac{92a^5}{1575}.$$

1.2.40. Izračunati

$$I = \iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)\ln^3(x^2+y^2)}$$

ako je D oblast data sa: $e^2 \le x^2+y^2 \le e^4$.

Rešenje. Prelaskom na polarne koordinate, imamo

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_e^{e^2} \frac{r\,dr}{r^2\ln^3 r^2} = \frac{3\pi}{32}.$$

1.2.41. Izračunati integral

$$I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2}}\, dx\, dy$$

ako je $D : \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} \le 1$.

Rešenje. Ako uvedemo polarne koordinate: $x = r\sqrt{3}\cos\varphi$, $y = r\sqrt{2}\sin\varphi$, imamo da je $|J| = r\sqrt{6}$, pa je traženi integral

$$I = \sqrt{6} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1 - r^2}\, dr = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}.$$

1.2.42. Ako je D oblast integracije data sa

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \le 1, \quad \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} \le 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0,$$

naći integral

$$I = \iint_D y\sqrt{4 - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2}}\, dx\, dy.$$

Rešenje. Uvođenjem polarnih koordinata: $x = r\sqrt{3}\cos\varphi$, $y = r\sqrt{2}\sin\varphi$, nalazimo da je

$$I = \sqrt{6} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^2 r^2\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{4 - r^2}\, dr = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(8\pi + 3\sqrt{3}\right).$$

1.2.43. Izračunati $I = \iint_D \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{y}\, dx\, dy$, ako je D oblast ograničena sa:

$$1 \le x^2 + y^2 \le 4, \quad y \ge \frac{x\sqrt{3}}{3}, \quad y \le x.$$

Rešenje. Uvođenjem polarnh koordinata: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, imamo

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\varphi \int_1^2 \operatorname{arcctg}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} r\, dr = \frac{5\pi^2}{192}.$$

1.2.44. Naći vrednost integrala $I = \iint_D |y - x|\, dx\, dy$, ako je D oblast ograničena sa: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Rešenje. Kako je

$$|y-x| = \begin{cases} y-x, & y \geq x \\ x-y, & y < x. \end{cases}$$

to se oblast D razlaže na sledeće dve:

$$D_1 : \ x \in [0,1]\,,\ y \in [x,1]\,; \quad D_2 : \ x \in [0,1]\,,\ y \in [0,x]\,.$$

Traženi integral je

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 (y-x)\,dy + \int_0^1 dx \int_0^x (x-y)\,dy = \frac{1}{3}.$$

1.2.45. Naći integral $I = \iint_D |xy|\,dx\,dy$, ako je D oblast data sa: $x^2+y^2 \leq 1$.

Rešenje. Oblast D se razlaže na sledeće oblasti:

$$\begin{aligned}
D_1 &: \quad |xy| = xy,\ x \in [0,1]\,,\ y \in \left[0, \sqrt{1-x^2}\right]\,, \\
D_2 &: \quad |xy| = -xy,\ x \in [-1,0]\,,\ y \in \left[0, \sqrt{1-x^2}\right]\,, \\
D_3 &: \quad |xy| = xy,\ x \in [-1,0]\,,\ y \in \left[-\sqrt{1-x^2}, 0\right]\,, \\
D_4 & \quad\ \ |xy| = -xy,\ x \in [0,1]\,,\ y \in \left[-\sqrt{1-x^2}, 0\right]\,.
\end{aligned}$$

Sada je traženi integral

$$\begin{aligned}
I = &\int_0^1 x\,dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy - \int_{-1}^0 x\,dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy \\
&+ \int_{-1}^0 x\,dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 y\,dy - \int_0^1 x\,dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 y\,dy = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

1.2.46. Izračunati $\iint_D \sqrt{|x-y^2|}\,dx\,dy$, ako je oblast D ograničena sa: $0 \leq x \leq 1$, $|y| \leq 1$.

Rešenje. Traženi integral je

$$I = \int_{-1}^1 dy \int_0^{y^2} \sqrt{y^2-x}\,dx + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \sqrt{x-y^2}\,dy = \frac{\pi}{4}.$$

1.2.47. Izračunati

$$I = \iint_D \left| \frac{y-x}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx\,dy$$

ako je oblast D data sa: $x^2 + y^2 \leq 1$.

Rešenje. Uvođenjem polarnih koordinata, oblast D se razlaže na sledeće tri oblasti:

$$\begin{aligned}
D_1 : \quad & \frac{y-x}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \geq 0,\ \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right],\ r \in \left[0, \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right], \\
D_2 : \quad & \frac{y-x}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 < 0,\ \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right],\ r \in \left[\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), 1\right], \\
D_3 : \quad & \frac{y-x}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 < 0,\ \varphi \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right],\ r \in [0,1].
\end{aligned}$$

Traženi integral je $\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$;

$$I_1 = \iint_{D_1} = \int_{\pi 4}^{5\pi/4} d\varphi \int_0^{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} r\left(r\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - r^2\right) dr = \frac{\pi}{32}.$$

$$I_2 = \iint_{D_2} = -\int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi \int_{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}^{1} r\left(r\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - r^2\right) dr = \frac{9\pi}{32} - \frac{2}{3}.$$

$$I_3 = \iint_{D_3} = \int_{5\pi/4}^{9\pi/4} d\varphi \int_0^1 r\left(r^2 - r\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right) dr = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}.$$

Dakle, vrednost polaznog integrala je: $I = I_1 + I_2 + I_3 = \dfrac{9\pi}{16}$.

1.2.48. Izračunati $I = \iint_D |\sin(x+y)|\, dx\, dy$, ako je oblast D data sa: $0 \leq x \leq y$, $0 \leq y \leq \pi$.

Rešenje. Oblast D se razlaže na oblasti:

$$\begin{aligned}
D_1 : \quad & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ y \in [x, \pi - x],\ \sin(x+y) \geq 0, \\
D_2 : \quad & y \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],\ x \in [\pi - y, y],\ \sin(x+y) < 0.
\end{aligned}$$

Traženi integral je

$$I = \int_0^{\pi/2} dx \int_x^{\pi - x} \sin(x+y)\, dy - \int_{\pi/2}^{\pi} dy \int_{\pi - y}^{y} \sin(x+y)\, dx = \pi.$$

1.2.49. Naći površine ograničene linijama:

1° $4x^2 + y^2 = 4,$

2° $x^2 + y^2 = x, \quad y = 0, \quad y = x\sqrt{3}$

3° $y^2 = 2x, \quad y = \dfrac{1}{2}x^2$

4° $xy = 2, \quad x + y = 3$

5° $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad y = 0, \quad t \in [0, 2\pi]$

6° $y = x^2(1 - \ln x), \quad y = 0, \quad x = e$

7° $y = (x+2)e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 1.$

Rešenje. 1° Tražena površina je $P = \iint_D dx\,dy = 4\iint_{D_1} dx\,dy$, gde je oblast D_1 u polarnim koordinatama data sa: $D_1 : \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], r \in [0,1]$. Dakle, tražena površina je $P = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 2r\,dr = 2\pi$.

2° Površina ograničena navedenim krivim linijama, data je sa $P = \iint_D dx\,dy$, pri čemu je oblast D, u polarnim koordinatama, data sa $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, $r \in [0, \cos\varphi]$ pa je tražena površina

$$P = \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} r\,dr = \frac{1}{48}(4\pi + 3\sqrt{3}).$$

3° Oblast D ograničena datim parabolama je D: $x \in [0,2]$, $y \in \left[\dfrac{1}{2}x^2, \sqrt{2x}\right]$, pa je površina iste jednaka

$$P = \iint_D dx\,dy = \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x^2}^{\sqrt{2x}} dy = \frac{4}{3}.$$

4° Površina tražene oblasti D: $x \in [1,2]$, $y \in \left[\dfrac{2}{x}, 3 - x\right]$ je

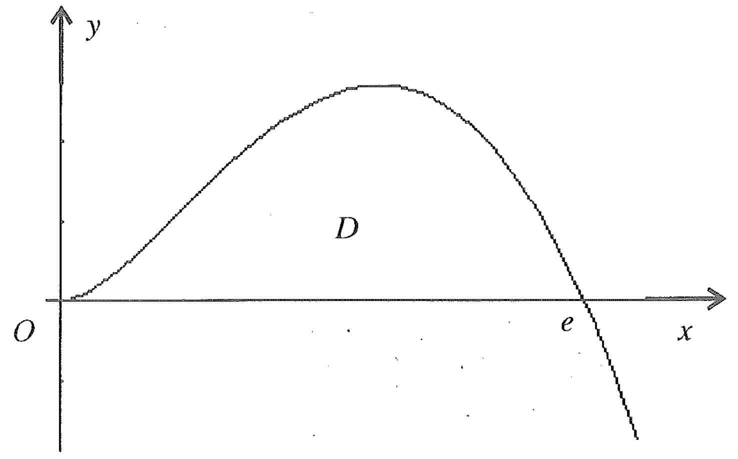
$$P = \int_1^2 dx \int_{2/x}^{3-x} dy = \frac{1}{2}(3 - 4\ln 2).$$

5°

$$P = \iint_D dx\,dy = \int_0^{2a\pi} dx \int_0^{a(1-\cos t)} dy = 3a^2\pi.$$

6° (Slika 14)

$$P = \iint_D dx\,dy = \int_0^e dx \int_0^{x^2(1-\ln x)} dy = \frac{e^3}{9}.$$



Slika 14

7° Oblast ograničena datim krivim linijama je

$$D : x \in [0,1], y \in \left[0, (x+2)e^{-x}\right]$$

a površina iste je

$$P = \iint_D dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^{(x+2)e^{-x}} dy = 3 - 4e^{-1}.$$

1.2.50. Naći površinu oblasti ograničene krivom

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$$

pri čemu je: $a > 0$, $b > 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Rešenje. Ako uvedemo uopštene polarne koordinate: $x = ar\cos^2\varphi$, $y = br\sin^2\varphi$, nalazimo da jednačina date krive ima oblik

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi + \frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi}$$

a apsolutna vrednost Jakobijana je $|J| = 2abr\sin\varphi\cos\varphi$. Površina oblasti je

$$P = 2ab \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \int_0^A r\, dr = \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right),$$

gde je

$$A = \sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi + \frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi}.$$

1.2.51. Naći površinu oblasti ograničene krivom

$$\left(x^2+y^2\right)^2=a\left(x^3+y^3\right).$$

Rešenje. Uvođenjem polarnih koordinata: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, jednačina date krive postaje $r=a\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)$, pri čemu su granice oblasti D:

$$\varphi\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right],\quad r\in\left[0,a\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)\right].$$

Površina date oblasti je sada

$$P=\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}d\varphi\int_0^{R(\varphi)}r\,dr=\frac{5a^2\pi}{16},$$

pri čemu je

$$R(\varphi)=a\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right).$$

1.2.52. Naći površinu oblasti ograničene krivama:

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1,\quad x=0,\quad y=0.$$

Rešenje. Ako uvedemo uopštene polarne koordinate: $x=ar\cos^4\varphi$, $y=br\sin^4\varphi$, jednačina krive $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ postaje $r=1$, a apsolutna vrednost Jakobijana je

$$|J|=4abr\sin^3\varphi\cos^3\varphi,$$

pri čemu su granice: $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $r\in[0,1]$. Površina oblasti D je:

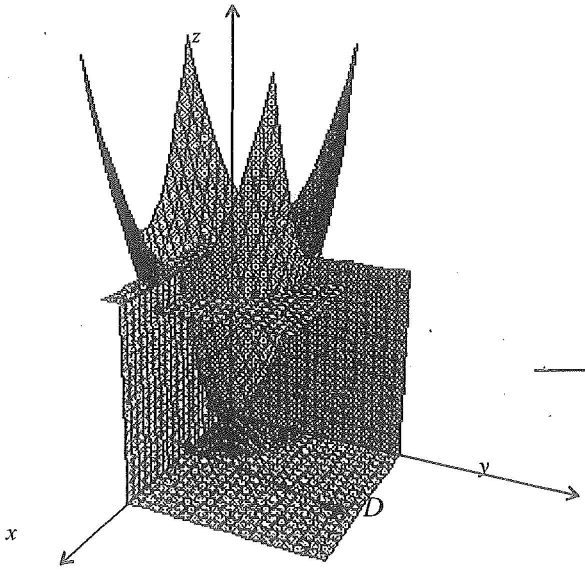
$$P=4ab\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi\int_0^1 r\,dr=\frac{ab}{6}.$$

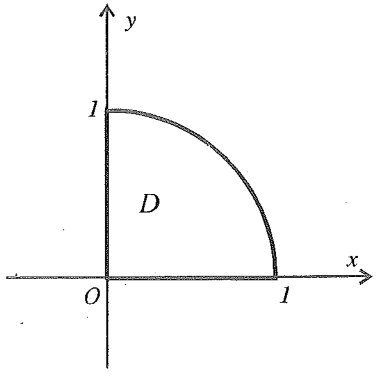
1.2.53. Naći zapreminu tela ograničenog površima:

$$z=x^2+y^2,\quad z=0,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=1.$$

Rešenje. Zapremina tela je (slika 15)

$$V=\iint_D z\,dx\,dy=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dx\,dy=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1 r^3\,dr=\frac{\pi}{8}.$$





Slika 15

1.2.54. Naći zapreminu tela ograničenog površima:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}.$$

Rešenje.

$$V=\iint_D z\,dx\,dy=8(V_1-V_2),$$

gde su V_1 i V_2 dati sa:

$$V_1=c\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$$

$$V_2=c\iint_D\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy.$$

Presek površi je elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{1}{2}$ u ravni $z=c\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Uvođenjem polarnih koordinata: $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$, nalazimo da su V_1 i V_2:

$$V_1=abc\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}/2}r\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac{\pi}{2}abc\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right),$$

$$V_2=abc\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}/2}r^2\,dr=abc\frac{\pi\sqrt{2}}{24}.$$

Dakle, tražena zapremina je

$$V = \frac{2}{3} abc\,\pi \left(2 - \sqrt{2}\right).$$

1.2.55. Naći zapreminu tela ograničenog površima:

$$1^\circ \quad z = x^2 + y^2, \quad z = x + y.$$
$$2^\circ \quad x = y^2 + z^2, \quad x = y + z.$$

Rešenje. 2° Presek datih površi je krug

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Uvođenjem polarnih koordinata: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, nalazimo da je

$$|J| = r, \quad r \in \left[0, \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

Zapremina je $V = V_2 - V_1$, gde su V_1 i V_2:

$$V_1 = \iint_D \left(z^2 + y^2\right)\, dz\, dy = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} r^3\, dr = \frac{3\pi}{8},$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \iint_D (z + y)\, dy\, dz \\ &= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\sin\varphi + \cos\varphi)\, d\varphi \int_0^{\sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} r^2\, dr = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, tražena zapremina je
$V = V_2 - V_1 = \dfrac{\pi}{8}.$

1.2.56. Naći zapreminu tela ograničenog površima:

$$y = x^{3/2} + z^{3/2}, \quad x + z = 1, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad z = 0.$$

Rešenje. $V = \iint_D y\, dz\, dx = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x^{3/2} + z^{3/2}\right) dz = \dfrac{8}{35}.$

1.2.57. Naći zapreminu tela ograničenog elipsoidom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Rešenje. Uvođenjem uopštenih polarnih koordinata: $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, imamo:

$$z^2 = c^2\left(1 - r^2\right), \quad z = \pm c\sqrt{1 - r^2}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 1], \quad |J| = abr.$$

Zapremina je $V = 2abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1 - r^2}\, dr = \dfrac{4abc\pi}{3}$.

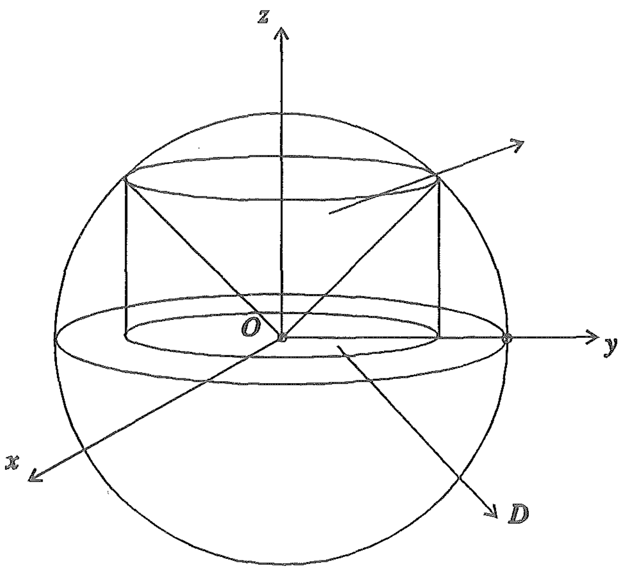
1.2.58. Naći zapreminu tela ograničenog površima:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Rešenje. $V = \iint_D z\, dx\, dy = \iint_D c\left(1 - \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) dx\, dy = \dfrac{abc}{6}$.

1.2.59. Naći zapreminu tela ograničenog površima (slika 16):

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$



Slika 16

Rešenje. Presek površi je krug $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}$ u ravni $z = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Zapremina tela je $V = V_1 - V_2$, gde su:

$$V_1 = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy, \quad V_2 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Uvođenjem polarnih koordinata, nalazimo da je;

$$V_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}/2} r\sqrt{a^2 - r^2}\, dr = \frac{a^3}{6}(4 - \sqrt{2})\pi,$$

$$V_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}/2} r^2\, dr = \frac{a^3\sqrt{2}\pi}{6}.$$

Zapremina tela je $V = V_1 - V_2 = \dfrac{a^3\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$.

1.2.60. Naći zapreminu tela ograničenog ravnima:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad y = b, \quad x = a,$$

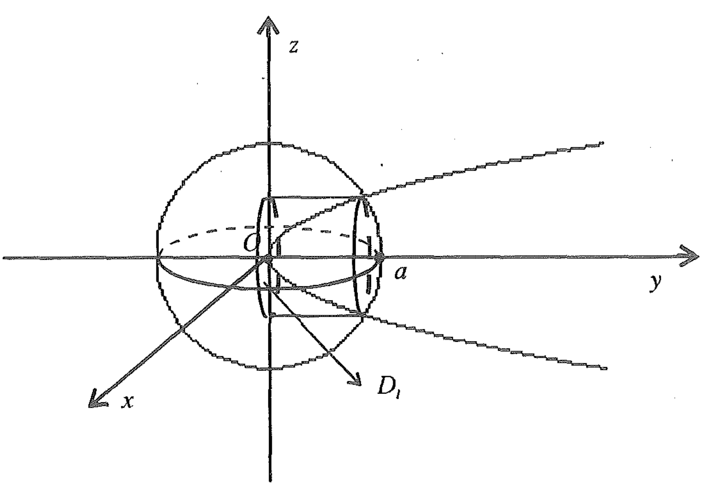
i eliptičkim paraboloidom $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}$.

Rešenje.

$$V = \iint_D z\, dx\, dy = \int_0^a dx \int_0^b \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right) dy = \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q}\right).$$

1.2.61. Izračunati zapreminu tela ograničenog površima:

$$x^2 + z^2 = ay, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2; \quad a > 0.$$



Slika 17

Rešenje. Zapremina je (slika 17)

$$V = 4 \iint_{D_1} (y_2 - y_1)\, dx\, dy, \quad D_1: \quad x^2 + z^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sqrt{5} - 1} \right)^2,$$

gde su funkcije y_1 i y_2 date sa: $y_1 = \dfrac{1}{a}\left(x^2 + z^2\right)$, $y_2 = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}$.

1.2.62. Naći zapreminu tela ograničenog površima:

$$\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 + \frac{x}{a} = 1, \quad x = 0.$$

Rešenje. Prelaskom na polarne koordinate:

$$y = br\cos\varphi, \quad z = cr\sin\varphi, \quad |J| = bcr, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 1].$$

$$V = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\left(1 - r^4\right) dr = \frac{2abc\pi}{3}.$$

1.2.63. Naći zapreminu tela ograničenog površi

$$(1) \qquad \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} \right)^3 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Rešenje. Uvodimo modifikovane polarne koordinate: $z = cr\cos^3\varphi$, $x = ar\sin^3\varphi$ i nalazimo $|J| = 3acr\sin^2\varphi\cos^2\varphi$, dok jednačina (1) dobija oblik $y^2 = b^2(1 - r^2)$. Zapremina tela je

$$V = 3abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, dr.$$

Kako je $y = \pm b\sqrt{1 - r^2}$, to je

$$V = 2 \iint_D y\, dz\, dx = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 3abcr\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sqrt{1 - r^2}\, dr = \frac{abc\pi}{2}.$$

1.2.64. Naći zapreminu tela ograičenog površima (slika 18):

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad z \geq 0,$$
$$0 < a < b.$$

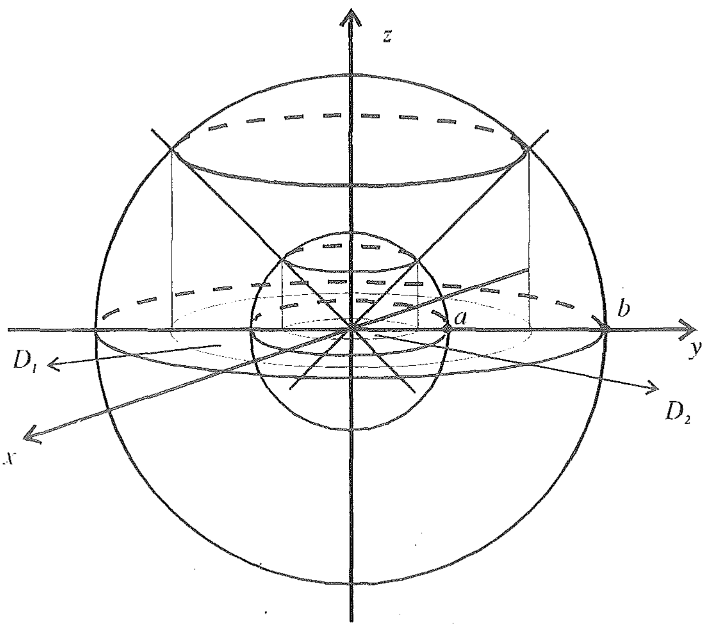
Rešenje. Neka je $V = V_1 - V_2$,

$$V_1 = \iint_{D_1} \left(\sqrt{b^2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx\, dy$$

gde je oblast D_1: $x^2 + y^2 = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$.

$$V_2 = \iint_{D_2} \left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

gde je oblast D_2: $x^2 + y^2 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Slika 18

Uvođenjem polarnih koordinata: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, nalazimo da je:

$$V_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{b\sqrt{2}/2} r\left(\sqrt{b^2 - r^2} - r\right) dr = \frac{\pi b^3(2-\sqrt{2})}{6}.$$

$$V_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}/2} r\left(\sqrt{a^2 - r^2} - r\right) dr = \frac{\pi a^3(2-\sqrt{2})}{3}.$$

Dakle, zapremina tela je $V = V_1 - V_2 = \dfrac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})\left(b^3 - a^3\right)$.

2. TROSTRUKI INTEGRALI

2.1. Uvodne napomene

1° Neka je $f(x, y)$ neprekidna funkcija u oblasti V određenoj nejednakostima

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$$

gde su $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ neprekidne funkcije, tada se *trostruki integral* funkcije $f(x, y, z)$ u oblasti V može izračunati na sledeći način:

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

2° Uvođenjem cilindričnih koordinata

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

tada se trostruki integral funkcije $f(x, y, z)$ uzet po oblasti V, izračunava po frmuli

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)|J|\, dr\, dz\, d\varphi,$$

gde je J Jakobijan dat sa

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = r.$$

3° Uvođenjem sfernih koordinata:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta$$

nalazimo da je Jakobijan

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = r^2\sin\theta$$

a integral se transformiše u

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iiint_{V'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta.$$

2.2. Zadaci

2.2.1. Izračunati integral $I = \iiint_V xy\,dx\,dy\,dz$, ako je V oblast ograničena koordinatnim ravnima i ravni $3x + 6y + 2z = 6$.

Rešenje.

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{1-x/2} dy \int_0^{3(1-x/2-y)} xy\,dz = \frac{1}{10}.$$

2.2.2. Izračunati integral $I = \iiint_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, ako je oblast integracije V ograničena površima:

$$x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y = b, \quad z = 0, \quad z = c$$

za $a, b, c > 0$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (x + 2y + z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x + 2y + z)\,dz \\ &= \frac{abc}{2}(a + 2b + c). \end{aligned}$$

2.2.3. Izračunati

$$I = \int_0^{e-1} dx \int_0^{e-x-1} dy \int_e^{x+y+e} \frac{\ln(z - x - y)}{x + y - e}\,dz.$$

Rešenje.

$$I = \int_0^{e-1} dx \int_0^{e-x-1} (-1 + \ln(e - x - y))\,dy = 2e - \frac{3e^2}{4} - \frac{3}{4}.$$

2.2.4. Izračunati $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + 3z^2}\,dx\,dy\,dz$, ako je oblast V ograničena sa $x^2 + y^2 + 3z^2 = 3a^2$.

Rešenje. Uvođenjem sfernih koordinata:

$$x = ra\sqrt{3}\cos\varphi\sin\theta, \quad y = ra\sqrt{3}\sin\varphi\sin\theta, \quad z = ra\cos\theta$$

nalazimo da je:

$$|J| = r^2 3a^3 \sin\theta, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi], \quad r \in [0, 1]$$

a traženi integral je

$$I=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^1 3a^4 r^3 \sqrt{3}\, dr = 3a^4\pi\sqrt{3}.$$

2.2.5. Izračunati integral $I = \iiint_V y^2 z\, dx\, dy\, dz$, ako je V oblast ograničena sa $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=a$, $a>0$.

Rešenje. Uvođenjem cilindričnih koordinata: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, oblast V je

$$\varphi\in[0.2\pi]\,,\quad r\in[0,a]\,,\quad z\in[r,a]\,,\quad |J|=r,$$

pa je traženi integral

$$I=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a} r\, dr \int_r^a r^2 \sin^2\varphi\, z\, dz = \frac{a^6\pi}{24}.$$

2.2.6. Izračunati integral $I=\iiint_V xy\sin(x+z)\, dx\, dy\, dz$, ako je V ograničena površima:

$$y=\sqrt{x},\quad y=0,\quad z=0,\quad x+z=\frac{\pi}{2}.$$

Rešenje.

$$I=\int_0^{\pi/2} x\, dx \int_0^{\sqrt{x}} y\, dy \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \sin(x+z)\, dz = \frac{\pi^2-8}{8}.$$

2.2.7. Izračunati

$$I=\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\, dy\, dz$$

ako je oblast V određena sa: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, ako je $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Rešenje. Uvođenjem uopštenih polarnih koordinata:

$$x=ar\cos\varphi\sin\theta,\quad y=br\sin\varphi\sin\theta,\quad z=cr\cos\theta$$

nalazimo:

$$|J|=abcr^2\sin\theta,\quad o\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},\quad 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}.$$

Traženi integral je

$$I=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int_0^1 r^4abc\,dr=\frac{abc\pi}{10}.$$

2.2.8. Izračunati $I=\iiint_V\left(a^2-x^2-z^2\right)dx\,dy\,dz$, ako je V oblast ograničena površima:

$$x^2+z^2=2ay,\quad x^2+y^2+z^2=3a^2,\quad a>0.$$

Rešenje. Uvođenjem cilindričnih koordinata: $z=r\cos\varphi$, $x=r\sin\varphi$, $y=y$, nalazimo da je

$$|J|=r,\quad \varphi\in[0,2\pi],\quad r\in\left[0,a\sqrt{2}\right],\quad y\in\left[\frac{r^2}{2a},\sqrt{3a^2-r^2}\right],$$

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a\sqrt{2}}r\,dr\int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}}\left(a^2-r^2\right)dy=\frac{a^5\pi}{15}(19-6\sqrt{3}).$$

2.2.9. Izračunati

$$I=\iiint_V\frac{dx\,dy\,dz}{(x+a)^2-y^2-z^2}$$

ako je V oblast ograničena paraboloidom $x=\dfrac{1}{2a}\left(y^2+z^2\right)$ i ravni $x=b$, $a>0$, $b>0$.

Rešenje. Uvođenjem cilindričnih koordinata, nalazimo da je traženi integral

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2ab}}r\,dr\int_{\frac{r^2}{2a}}^{b}\frac{dx}{(x+a)^2-r^2}\\&=4\pi\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{ab}}{a}-4\pi\,a\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2ab}-a}{a}\\&-8a\,\pi\ln a+2a\,\pi\ln\left((-a)\left(\sqrt{2ab}-a-b\right)\right)\\&+2a\,\pi\ln\left(a\left(\sqrt{2ab}+a+b\right)\right)-2\pi(a+b)\ln\left(\sqrt{2ab}+a+b\right)\\&-2\pi(a+b)\ln\left(\sqrt{2ab}-a-b\right)+2\pi(a+b)\ln\left(-(a+b)^2\right)-2a\pi^2.\end{aligned}$$

2.2.10. Izračunati integral

$$I=\iiint_V\frac{x\ln\left(x^2+y^2+z^2+R^2\right)}{x^2+y^2+z^2+R^2}\,dx\,dy\,dz$$

ako je V oblast ograničena sa:

$$x^2+y^2+z^2=R^2, \quad x\geq 0, \quad y\geq 0, \quad z\geq 0.$$

Rešenje. Prelaskom na sferne koordinate, nalazimo da je tražena oblast

$$\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \quad r\in[0,R].$$

Traženi integral je

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R r^3\sin^2\theta\cos\varphi\frac{\ln\left(r^2+R^2\right)}{r^2+R^2}\,dr \\
&= -\frac{\pi R^2\ln^2 2}{16}-\frac{\pi R^2\ln R\ln 2}{4}+\frac{\pi R^2\ln(2R)}{4}-\frac{\pi R^2}{8} \\
&= \frac{\pi R^2}{16}\left[4\ln 2+4\ln R-\ln^2(2R^2)+4\ln^2 R-2\right].
\end{aligned}$$

2.2.11. Izračunati $I=\iiint_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz$, ako je V oblast ograničena površima:

$$x^2+y^2=z^2, \quad x^2+y^2+z^2=1, \quad z\geq 0$$

Rešenje. Presek površi je $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$, $z=\dfrac{1}{2}$. Uvođenjem cilindričnih koordinata, nalazimo da je

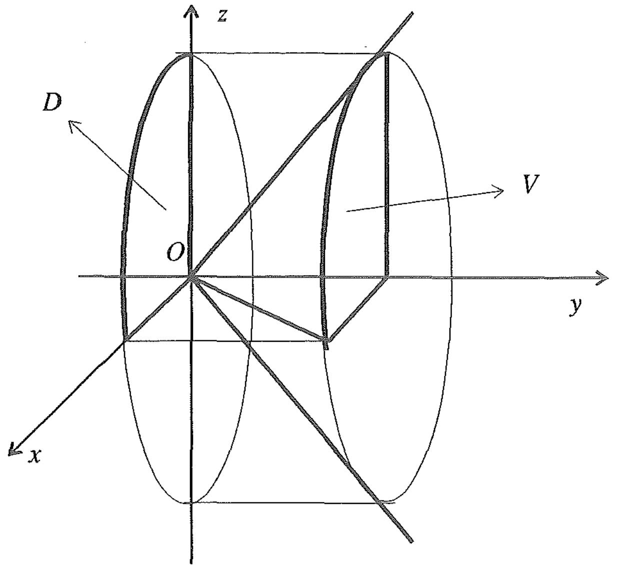
$$I=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\sqrt{2}/2} r\,dr\int_r^{\sqrt{1-r^2}}\left(r^2+z^2\right)\,dz=\frac{\pi}{5}(2-\sqrt{2}).$$

2.2.12. Izračunati integral

$$I=\iiint_V\frac{xy\,dx\,dy\,dz}{x^2+z^2-a^2}$$

ako je V oblast ograničena sa:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(x^2+z^2\right), \quad y=\frac{b}{2}, \quad x\geq 0, \quad z\geq 0, \quad y>0.$$



Slika 19

Rešenje. Uvođenjem cilindričnih koordinata: $x = r\sin\varphi$, $z = r\cos\varphi$, $y = y$, nalazimo da je (slika 19):

$$I = \frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a/2} r\,dr \int_{br/a}^{b/2} \frac{r\sin\varphi y\,dy}{r^2 - a^2} = \frac{b^3}{48}(9\ln 3 - 10).$$

2.2.13. U trostrukom integralu $I = \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ odrediti granice u Dekartovim, cilindričnim i sfernim koordinatama, ako je V oblast ograničena površima (slika 20):

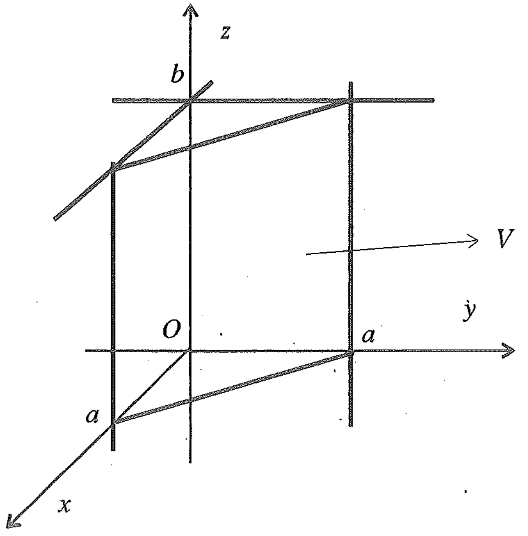
$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x + y \leq a, \quad z \leq b.$$

Rešenje. U Dekartovim koordinatama:

$$V: \quad x \in [0,a], \quad y \in [0, a-x], \quad z \in [0,b]$$

pa je integral

$$I = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^b f(x,y,z)\,dz.$$



Slika 20

U cilindričnim koordinatama $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, a integral je

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin\varphi+\cos\varphi}} r\,dr \int_0^b f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,dz.$$

U sfernim koordinatama $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, a integral je $I = \iiint_{V_1} + \iiint_{V_2}$, pri čemu su oblasti V_1 i V_2 određene sa:

$$V_1: \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \quad \theta \in \left[0, \operatorname{arctg}\frac{a}{b(\sin\varphi+\cos\varphi)}\right], \quad r \in \left[0, \frac{b}{\cos\theta}\right]$$

$$V_2: \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \theta \in \left[\operatorname{arctg}\frac{a}{b(\sin\varphi+\cos\varphi)}, \frac{\pi}{2}\right], \quad r \in [0, R],$$

pri čemu je $R = \dfrac{a}{\sin\theta(\sin\varphi+\cos\varphi)}$.

2.2.14. Izračunati $I = \iiint_V x\sqrt{y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, ako je V oblast ograničena konusom $x^2 = y^2 + z^2$ i ravni $x = a$ za $a > 0$.

Rešenje. Uvođenjem cilindričnih koordinata $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, $x = x$, nalazimo da je

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\,dr \int_r^a xr\,dx = \frac{2a^5\pi}{15}.$$

2.2.15. Izračunati $I = \iiint_V z\,dx\,dy\,dz$, ako je V oblast ograničena sa:

$$x^2 + y^2 = a^2z^2, \quad z = \frac{1}{a}, \quad 0 \le z < \frac{1}{a}, \quad a > 0.$$

Rešenje. Uvođenjem cilindričnih koordinata, nalazimo da je

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\, dr \int_{r/a}^{1/a} z\, dz = \frac{\pi}{4a^2}.$$

2.2.16. Izračunati vrednost integrala $I = \iiint_V dx\, dy\, dz$, ako je V oblast ograničena površi $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^4 = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}$ za $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $h > 0$, $k > 0$.

Rešenje. Uvođenjem modifikovanih sfernih koordinata:

$$x = ar\cos^2\varphi \sin^2\theta, \; y = br\sin^2\varphi\sin^2\theta, \; z = cr\cos^2\theta,$$

jednačina površi postaje

$$r^3 = \sin^2\theta \left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi + \frac{b}{k}\sin^2\varphi\right),$$

a Jakobijan je $|J| = 4abcr^2 \sin\varphi\cos\varphi\sin^3\theta\cos\theta$. Traženi integral je

$$I = 4abc \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R r^2 \sin\varphi\cos\varphi\sin^3\theta\cos\theta\, dr = \frac{abc}{18}\left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k}\right).$$

2.2.17. Izračunati integral $I = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$, ako je V oblast ograničena sferom $x^2+y^2+z^2 = z$.

Rešenje. Uvođenjem sfernih koordinata $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, nalazimo da je

$$|J| = r^2\sin\theta, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad r \in [0, \cos\theta].$$

Traženi integral je

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\cos\theta} r^3\, dr = \frac{\pi}{10}.$$

2.2.18. Izračunati $I = \iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right) dx\, dy\, dz$, ako je V oblast ograničena površima $y^2 + z^2 = x$, $x = a$, $a > 0$.

Rešenje. $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{a}} r\, dr \int_{r^2}^{a} \left(r^2 + x^2\right) dx = \dfrac{a^3\pi}{12}(2 + 3a)$.

2.2.19. Izračunati $I = \iiint_V x^2 \ln\left(x^2+y^2+z^2\right) dx\, dy\, dz$, ako je V oblast ograničena površi $x^2+y^2+z^2 = z$.

Rešenje. Uvođenjem sfernih koordinata $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, nalazimo da je $|J| = r^2\sin\theta$, $\varphi\in[0,2\pi]$, $r\in[0,\cos\theta]$, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Sada je traženi integral $I = -\dfrac{59\pi}{7200}$.

2.2.20. Naći zapreminu tela ograničenog površima:

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

i

$$(2)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\ c>0,\ z\geq 0.$$

Rešenje. Presek površi (1) i (2) je: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ u ravni $z = c\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Uvođenjem cilindričnih koordinata: $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, $z = z$, imamo

$$\begin{aligned} V &= 2abc\pi\int_0^R\left(r\sqrt{1-r^2}-r^3\right)dr \\ &= \frac{abc\pi}{12}\left[3\sqrt{5}-1-4\left(3-\sqrt{5}\right)\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right]. \end{aligned}$$

2.2.21. Naći zapreminu tela ograničenog površima:

$$0\leq x\leq 1,\quad 0\leq y\leq 1,\quad x^2+y^2\geq 1,\quad 0\leq z\leq\left(x^2+y^2\right)^3.$$

Rešenje. Uvođenjem cilindričnih koordinata, nalazimo da je

$$V=\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_1^{\frac{1}{\cos\varphi}}r\,dr\int_0^{r^6}dz+\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\varphi\int_1^{\frac{1}{\sin\varphi}}r\,dr\int_0^{r^6}dz=\frac{24}{35}-\frac{\pi}{16}.$$

2.2.22. Naći zapreminu tela ograničenog zatvorenom površi

$$x^2+y^2+z^2=4az-3a^2,\quad z^2=4\left(x^2+y^2\right).$$

Rešenje. Presek površi je $z_1 = 2a$ i $z_2 = \left(\dfrac{6}{5}\right)a$. Zapremina tela je $V = V_1 - V_2$, pri čemu su V_1 i V_2 date sa

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a}r\,dr\int_{2r}^{2a+\sqrt{a^2-r^2}}dz=\frac{4}{3}a^3\pi, \\ V_2 &= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{3a/5}r\,dr\int_0^{2a-\sqrt{a^2-r^2}}dz=\frac{8a^3\pi}{75}. \end{aligned}$$

Zapremina tela je $V = V_1 - V_2 = \dfrac{92}{75}a^3\pi$.

2.2.23. Naći zapreminu tela ograničenog površima: (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ i (2) $x^2 + y^2 \leq z^2$.

Rešenje. Presek površi (1) i (2) je $x^2 + y^2 = a^2$, $z = a$. Uvođenjem cilindričnih koordinata, nalazimo da je

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\,dr \int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} dz = a^3\pi.$$

2.2.24. Naći zapreminu tela ograničenog zatvorenom površi

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right)^3 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1. \tag{1}$$

Rešenje. Uvedimo modifikovane sferne koordinate:

$$x = ar\cos^3\varphi\sin\theta, \quad y = br\sin^3\varphi\sin\theta, \quad z = cr\cos\theta.$$

Jednačina površi (1) sada postaje $r = 1$, a Jakobijan je

$$|J| = 3abcr^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sin\theta.$$

Zapremina tela je

$$V = \iiint_V |J|\,dr\,d\varphi\,d\theta = \frac{abc\pi}{2}.$$

2.2.25. Naći zapreminu tela ograničenog zatvorenom površi

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 = axyz, \quad a > 0.$$

Rešenje. Zapremina tela je $V = \iiint_V dx\,dy\,dz$. Prelaskom na sferne koordinate jednačina površi postaje $r^3 = a\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\cos\theta$. Prema polaznoj jednačini površi, važi $xyz \geq 0$, a taj uslov je ispunjen u sledećim slučajevima:

$$1^\circ\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$2^\circ\ \varphi \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$3^\circ\ \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right];$$

$$4^\circ\ \varphi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Zapremina tela je

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_0^R r^2\, dr + \int_\pi^{3\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_0^R r^2\, dr \\
&+ \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^R r^2\, dr + \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^R r^2\, dr \\
&= \frac{a}{6}.
\end{aligned}
$$

2.2.26. Naći zapreminu tela ograničenog površi

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{d}$$

za $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Rešenje. Uvođenjem modifikovanih sfernih koordinata:

$$x = ar\cos^2\varphi \sin^2\theta,\ y = br\sin^2\varphi\sin^2\theta,\ z = cr\cos^2\theta,$$

nalazimo da je $|J| = 2abcr^2 \sin 2\varphi \sin^3\theta\cos\theta$, a jednačina površi postaje

$$r = \frac{a}{d}\cos^2\varphi\sin^2\theta.$$

Zapremina tela je

$$V = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R |J|\, dr = \frac{a^4bc}{60d^3}.$$

2.2.27. Naći zapreminu tela ograničenog sa:

$$(1) \qquad \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1$$

za $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Rešenje. Uvođenjem modifikovanih sfernih koordinata:

$$x = ar\cos^4\varphi\sin^4\theta,\ y = br\sin^4\varphi\sin^4\theta,\ z = cr\cos^4\theta,$$

jednačina (1) postaje $r = 1$, a Jakobijan je $J = 16abcr^2\sin^3\varphi\sin^7\theta\cos^3\theta\cos^3\varphi$. Kako je $x \geq 0$, $y \geq 0$ i $z \geq 0$, to je $\varphi \in [0, \pi/2]$, a $\theta \in [0, \pi/2]$. Zapremina tela je $V = \dfrac{abc}{90}$.

2.2.28. Naći zapreminu tela ograničenog površima 1° $x^2+y^2+z^2=R^2$.

2° $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ za $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Rešenje. 1° Uvođenjem sfernih koordinata, nalazimo da je $V=\dfrac{4R^3\pi}{3}$.

2° Uvođenjem sfernih koordinata: $x=ar\cos\varphi\sin\theta$, $y=br\sin\varphi\sin\theta$, $z=cr\cos\theta$, nalazimo da je zapremina tela $V=\dfrac{4abc\pi}{3}$.

2.2.29. Naći zapreminu tela ograničenog zatvorenom površi

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=y.$$

Rešenje. Slično zadatku 2.2.28, nalazimo da je zapremina tela $V=\dfrac{ab^2c\pi}{3}$.

2.2.30. Naći zapreminu tela ograničenog zatvorenom površi

$$\sqrt[3]{\frac{x}{a}}+\sqrt[3]{\frac{y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{z}{c}}=1, \tag{1}$$

za $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

Rešenje. Uvođenjem modifikovanih sfernih koordinata;

$$x=ar\cos^6\varphi\sin^6\theta,\ y=br\sin^6\varphi\sin^6\theta,\ z=cr\cos^6\theta,$$

jednačina (1) postaje $\sqrt[3]{r}=1$, a Jakobijan je

$$J=36abcr^2\sin^5\varphi\cos^5\varphi\sin^{11}\theta\cos^5\theta.$$

Zapremina tela je $V=\dfrac{abc}{1680}$.

2.2.31. Naći zapreminu tela ograničenog zatvorenom površi

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c}=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$$

za $x>0$, $y>0$, $z>0$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Rešenje. Uvođenjem modifikovanih sfernih koordinata:

$$x=ar\cos^2\varphi\sin\theta,\ y=br\sin^2\varphi\sin\theta,\ z=cr\cos\theta,$$

dobijamo

$$r=\sin\theta\left(\frac{a}{h}cos^2\varphi-\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\ \text{ i } J=2abcr^2\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi.$$

Zapremina tela je

$$V=\frac{abc\pi}{64}\left(\frac{a}{h}-\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

3. KRIVOLINIJSKI INTEGRALI

3.1 Uvodne napomene

1° Ako je funkcija $f(x,y,z)$ definisana i neprekidna u svim tačkama deo po deo glatke krive

$$c = \{(x,y,z) \mid x = x(t), y = y(t), z = z(t) \ (t_1 \le t \le t_2)\}, \tag{1}$$

a ds diferencijal luka krive, tada se *krivolinijski integral prve vrste* izračunava po formuli

$$\int_c f(x,y,z)\, ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt. \tag{2}$$

Integral (2) ne zavisi od orijentacije krive c.

2° Ako su funkcije $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$ neprekidne u svakoj tački $M(t)$ krive c, koja se pomera u smeru rašćenja parametra t, tada se *krivolinijski integral dvuge vrste* izračunava po formuli

$$\begin{aligned} &\int_c P(x,y,z)\ dx + Q(x,y,z)\ dy + R(x,y,z)\ dz \\ &\quad = \int_{t_1}^{t_2} \big[P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) \\ &\qquad + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big]\ dt. \end{aligned} \tag{3}$$

Promenom smera integracije duž krive c, integral (3) menja znak.

3° Ako je

$$P(x,y,z)\ dx + Q(x,y,z)\ dy + R(x,y,z)\ dz = du,$$

gde je $u = u(x,y,z)$ jednoznačna funkcija (biunivoko preslikavanje) u oblasti V, tada, nezavisno od putanje c ($c \in V$), imamo

$$\int_c P\ dx + Q\ dy + R\ dz = u(x_2,y_2,z_2) - u(x_1,y_1,z_1), \tag{4}$$

gde su $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ početna i krajnja tačka putanje integracije, respektivno.

U specijalnom slučaju, ako je V jednostruko povezana oblast, a funkcije P, Q, R imaju neprekidne parcijalne izvode prvog reda, tada (4) važi ako i samo ako su ispunjeni uslovi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

pri čemu se funkcija u može naći u obliku

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\ dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\ dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\ dz + C,$$

gde je (x_0, y_0, z_0) neka fiksirana tačaka oblasti V i C proizvoljna konstanta.

4° Neka je c zatvorena prosta deo po deo glatka kriva (kontura) koja ograničava jednostruko povezanu oblast D, koja pri obilasku konture ostaje sa leve strane, i neka su funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ neprekidne, kao i njihovi parcijalni izvodi prvog reda, u oblasti D i na njenom rubu (granici) $c = \partial D$, tada važi *Greenova formula*

$$\oint_c P(x, y)\ dx + Q(x, y)\ dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\ dx\, dy. \tag{5}$$

Ova formula, dakle, daje vezu između krivolinijskog duž proste zatvorene krive i dvostrukog integrala po oblasti D ograničene krivom c. Formula (5) važi i u opštijem slučaju kada je D konačna oblast ograničena sa više prostih kontura ako se pod granicom $c = \partial D$ podrazumeva suma svih rubnih kontura čiji je pravac obilaženja izabran tako da oblast D ostaje sa leve strane.

5° Površina P ograničena prostom deo po deo glatkom konturom c izračunava se pomoću

$$P = \oint_c x\ dy = -\oint_c y\ dx = \frac{1}{2} \oint_c (x\ dy - y\ dx).$$

3.2. Zadaci

3.2.1. Ako je c deo krive $y = \sqrt{x}$ od $x = 0$ do $x = 2$, izračunati krivolinijski integral $I = \int_c y\,ds$.

Rešenje. Kako je $y' = 1/(2\sqrt{x})$ imamo

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx = \frac{\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

Smenom $1 + 4x = t^2$, $1 \le t \le 3$ $(2\,dx = t\,dt)$ nalazimo

$$I = \int_0^2 \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+4x}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^3 t^2\,dt = \frac{13}{6}.$$

3.2.2. Izračunati $I = \int_c xy\,ds$, ako je c luk cikloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi\,(a > 0).$$

Rešenje. Kako su $x' = a(1 - \cos t)$ i $y' = a \sin t$, imamo

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = 2a \sin\frac{t}{2}\,dt,$$

pa je

$$I = \int_c xy\,ds = \int_0^{2\pi} a^2(t - \sin t)(1 - \cos t)2a \sin\frac{t}{2}\,dt = 2a^3(I_1 - I_2 - I_3 + I_4),$$

gde su

$$I_1 = \int_0^{2\pi} t\sin(t/2)\,dt = 4\pi, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} t\cos t \sin(t/2)\,dt = -\frac{4}{3}\pi,$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \sin t \sin(t/2)\,dt = 0,\ I_4 = \int_0^{2\pi} \sin t \cos t \sin(t/2)\,dt = 0.$$

Dakle,

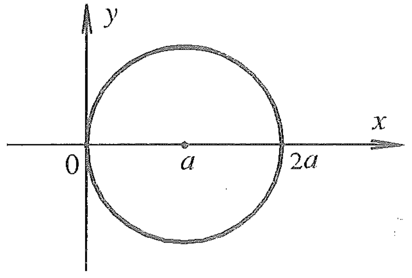
$$I = 2a^3\left[4\pi + \frac{4}{3}\pi\right] = \frac{32}{3}a^3\pi.$$

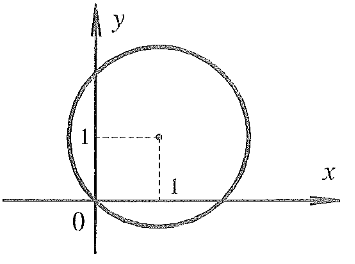
3.2.3. Izračunati $I = \int_C (x^2 + y^2)\,ds$, ako je kriva c data sa:

$$\text{(a)} \quad x^2 + y^2 = 2ax; \quad \text{(b)} \quad x^2 + y^2 = 2(x + y).$$

Rešenje. (a) Kriva c je kružnica $(x-a)^2+y^2=a^2$ (slika 21(a))), čije su parametarske jednačine date sa

$$x=a(1+\cos t), \quad y=a\sin t, \quad t\in[0,2\pi].$$





Slika 21 (a) Slika 21 (b)

Kako je

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=a\,dt,$$

to je

$$I=\int_c(x^2+y^2)\,ds=\int_0^{2\pi}2a^3(1+\cos t)\,dt=4a^3\pi.$$

(b) U ovom slučaju parametarske jednačine kružnice $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ (slika 21(b)) su

$$x=1+\sqrt{2}\cos t \quad ,y=1+\sqrt{2}\sin t, \quad t\in[0,2\pi].$$

Kako je diferencijal luka krive jednak $ds=\sqrt{2}\,dt$, imamo

$$I=\int_0^{2\pi}2\sqrt{2}\left[2+\sqrt{2}(\sin t+\cos t)\right]\,dt=8\pi\sqrt{2}.$$

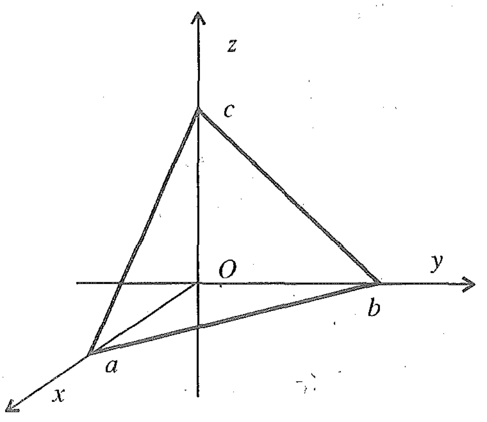
3.2.4. Ako je kriva c kontura $\triangle ABC$: $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$, za $a>0$, $b>0$, $c>0$, naći krivolinijski integral $I=\int_c(x+y+z)ds$.

Rešenje. Neka je $c=c_1+c_2+c_3$, pri čemu su c_1, c_2 i c_3 sledeće krive (slika 22):

$$c_1\,:\,x=a\left(1-\frac{y}{b}\right),\ ds=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\,dy.$$

$$c_2\,:\,y=b\left(1-\frac{z}{c}\right),\ ds=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{c}\,dz.$$

$$c_3\,:\,z=c\left(1-\frac{x}{a}\right),\ ds=\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a}\,dx.$$



Slika 22

Tako nalazimo da je

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2}\left((a+b)\sqrt{a^2+b^2} + (a+c)\sqrt{a^2+c^2} + (b+c)\sqrt{b^2+c^2}\right)$$

23.2.5. Ako je c kriva $x^2 + y^2 = ay$, $a > 0$, izračunati krivolinijski integral $I = \int_c \left(x^2 - y^2\right) ds$.

Rešenje. Parametarske jednačine krive c su:

$$x = \frac{a}{2}\cos t, \quad y = \frac{a}{2}(1 + \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

pa je traženi integral

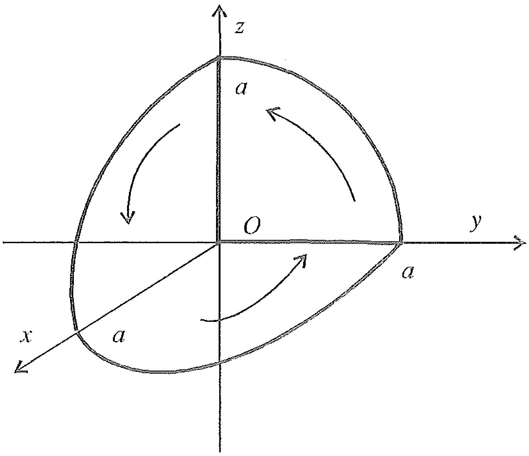
$$I = \frac{a^3}{8}\int_0^{2\pi}(\cos 2t - 1 - 2\sin t)dt = -\frac{a^3\pi}{4}.$$

Napomena: zadatak se može rešiti i uvođenjem polarnih koordinata.

3.2.6. Izračunati krivolinijski integral $I = \int_c (x + y + 2z)ds$, ako je kriva c kontura sfernog trougla koji isecaju koordinatne ravni na sferi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (slika 23).

Rešenje. Kako je $c = c_1 + c_2 + c_3$, pri čemu su: $c_1 : x^2 + y^2 = a^2$, $c_2 : y^2 + z^2 =$

a^2, $c_3 : x^2 + z^2 = a^2$, to je traženi integral $I = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3} = 8a^2$.



Slika 23

3.2.7. Izračunati krivolinijski integral $I = \int_c y^2 ds$, ako je kriva c:
$1^\circ \quad x^2 + y^2 = ax,\ y \geq 0,$
2° kontura $\triangle ABC : A(0,0),\ B(1,0),\ C(1,1)$.

Rešenje. 1° Kako je parametarski oblik krive c

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos t),\ y = \frac{a}{2}\sin t,\ t \in [0, \pi]$$

to je

$$I = \frac{a^3}{16}\int_0^\pi (1 - \cos 2t)\, dt = \frac{a^3\pi}{16}.$$

2° $c = c_1 + c_2 + c_3$, pa je $I = I_1 + I_2 + I_3$, gde su:

$$I_1 = \int_{c_1} y^2\, ds = 0,\ I_2 = \int_{c_2} y^2\, ds = \int_0^1 y^2\, dy = \frac{1}{3},$$

$$I_3 = \int_{c_3} y^2\, ds = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Traženi krivolinijski integral je $I = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

3.2.8. Ako je kriva c prvi svod cikloide

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$$

izračunati krivolinijski integral $I = \int_c x ds$.

Rešenje.

$$I = 2a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2}\, dt = 8a^2\pi.$$

3.2.9. Ako je c deo prave $y = x + 3$ od tačke (-3,0) do tačke (0,3), izračunati krivolinijski integral $I = \int_c \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Rešenje.

$$I = -\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 9/2}} = \ln(3 + 2\sqrt{2}).$$

3.2.10. Izračunati krivolinijski integral $I = \int_c xy ds$, ako je c kontura pravougaonika: $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

Rešenje. $I = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3} + \int_{c_4}$, gde su:

$$c_1 : y = 0,\ I_1 = 0, \quad c_4 : x = 0, I_4 = 0,$$
$$c_2 : x = a,\ ds = dy,\ I_2 = \int_0^b ay\, dy = \frac{ab^2}{2},$$
$$c_3 : y = b,\ ds = dx,\ I_3 = \int_0^a bx\, dx = \frac{a^2 b}{2}.$$

Dakle, imamo $I = \frac{ab(a + b)}{2}$.

3.2.11. Ako je kriva c: $x^2 + y^2 = x$, izračunati krivolinijski integral $I = \int_c \sqrt{x^2 + y^2} ds$.

Rešenje. Kako se kriva c može napisati u kanoničnom obliku $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$, to je njen parametarski oblik

$$x = \frac{1}{2}(1 + \cos t), \quad y = \frac{1}{2}\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Tako nalazimo da je $I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\cos t/2|\, dt = 2$.

3.2.12. Izračunati krivolinijski integral $I = \int_c \sqrt{x^2 + y^2} ds$, ako je kriva c: $x^2 + y^2 = a(x + y)$, $a > 0$.

Rešenje. Partametarske jednačine krive c su:

$$x = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{2}\cos t), \quad y = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{2}\sin t),$$

odakle nalazimo $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\, dt, \quad t \in [0, 2\pi]$. Sada imamo

$$\begin{aligned} I &= a^2 \int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right| dt \\ &= a^2 \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}\right) dt - a^2 \int_{5\pi/4}^{9\pi/4} \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}\right) dt = 4a^2. \end{aligned}$$

3.2.13. Izračunati $I = \int_c x^2 ds$, ako je c krug: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$.

Rešenje. Iz datih jednačina sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ i ravni $x + y + z = 0$, nalazimo

$$z = \frac{-x \pm \sqrt{2a^2 - 3x^2}}{2}, \quad -a\sqrt{2/3} \le x \le a\sqrt{2/3}.$$

Takođe, iz pomenutih jednačina, nalazimo

$$y'_x = \frac{z - x}{y - z}, \quad z'_x = \frac{x - y}{y - z}, \quad ds = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2a^2 - 3x^2}}\, dx.$$

Sada imamo

$$I = 4a\sqrt{3} \int_0^{a\sqrt{2/3}} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{2a^2 - 3x^2}} = \frac{2}{3} a^3 \pi.$$

3.2.14. Izračunati krivolinijski integral

$$\int_c \left(x^2 + y^2\right) dx + \left(x^2 - y^2\right) dy,$$

ako je c kontura trougla ograničenog linijama:

1° $y = 1 - |1 - x|$, $y = 0$.

$$2^\circ \quad y = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1, \\ 2 - x, & 1 \le x < 2. \end{cases}, \qquad y = 0.$$

Rešenje. 1° Kriva integracije je $c = c_1 + c_2 + c_3$, gde je:

$$\begin{aligned} &c_1 : y = 0,\ dy = 0,\ I_1 = \frac{8}{3}, \\ &c_2 : y = 2 - x,\ dy = -\,dx,\ x \in [2, 1],\ I_2 = -\frac{2}{3}, \\ &c_3 : y = x,\ dy = dx,\ x \in [1, 0],\ I_3 = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Sada je $I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{4}{3}$.

2° Kriva integracije je $c = c_1 + c_2 + c_3$, gde su:

$$c_1 : y = 0,\ I_1 = \frac{8}{3},$$
$$c_2 : y = 2 - x,\ dy = -\,dx,\ x \in [2,1],\ I_2 = -\frac{2}{3},$$
$$c_3 : y = x^2,\ dy = 2x\,dx,\ x \in [1,0],\ I_3 = -\frac{7}{10}.$$

Odavde je $I = \frac{13}{10}$.

3.2.15. Izračunati krivolinijski integral $\int_c \frac{x\,dy - y\,dx}{x+y}$, ako je c kontura trougla:

1° $\triangle ABC : A(1,0), B(2,1), C(0,2)$.

2° $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$.

Rešenje. 1° $c = c_1 + c_2 + c_3$ gde su:

$$c_1 : y = x - 1,\ dy = dx,\ x \in [1,2],\ I_1 = \int_{c_1} = \frac{1}{2}\ln 3,$$
$$c_3 : y = -2x + 2,\ dy = -2\,dx\ x \in [0,1],\ I_3 = \int_{c_2} = -2\ln 2,$$
$$c_2 : y = 2 - \frac{1}{2}x,\ dy = -\frac{1}{2}\,dx,\ x \in [2,0],\ I_2 = 4(\ln 3 - \ln 2).$$

Dakle, traženi integral je $I = \frac{3}{2}(3\ln 3 - 4\ln 2)$.

2° $c = c_1 + c_2 + c_3$, gde su:

$$c_1 : y = 0,\ I_1 = \int_{c_1} = 0,$$
$$c_2 : y = 1 - x,\ I_2 = \int_{c_2} = 1,$$
$$c_3 : x = 0,\ I_3 = \int_{c_3} = 0.$$

Dakle, imamo $I = 1$.

3.2.16. Izračunati krivolinijski integral $I = \int_c x^3\,dy - y^3\,dx$, ako je c data sa:

1° $x^2 + y^2 = a^2$.

2° $x^2 + y^2 = ax$.

Rešenje. 1° Parametarske jednačine krive c su:

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t \in [0, 2\pi].$$

Sada je $I = a^4 \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) dt = \frac{3}{2} a^4 \pi$.

2° Uvođenjem polarnih koordinata:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

nalazimo da je $I = \dfrac{9a^4\pi}{32}$.

3.2.17. Ako je c gornja polovina kruga $(x-1)^2 + y^2 = 1$, izračunati $I = \int_c \left(x^2 + y^2\right) dx$.

Rešenje. Parametarske jednačine krive c su:

$$x = 1 + \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, \pi].$$

Traženi integral je $I = \int_0^\pi (2 + 2\cos t)(-\sin t)\, dt = -4$.

3.2.18. Ako je kriva c zatvorena kontura koju obrazuju linije: $y = 0$, $x = 1$, $y = x^2$, izračunati $I = \int_c xy\, dx + (x+y)\, dy$.

Rešenje. $I = I_1 + I_2 + I_3 = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3}$, gde su: $I_1 = 0$, $I_2 = \int_0^1 (1+y)\, dy = \frac{3}{2}$, $I_3 = -\int_0^1 (3x^3 + 2x^2)\, dx = -\frac{17}{12}$. Dakle, imamo $I = \frac{1}{12}$.

3.2.19. Ako je kriva c određena sa: $y = x - 2\sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, izračunati integral $I = \int_c x\, dy + \dfrac{y}{1+x}\, dx$.

Rešenje. Funkcija $y = x - 2\sqrt{x}$ je definisana za $x \geq 0$.

Traženi integral je

$$I = \int_0^4 \left(x - \sqrt{x} + \frac{x - 2\sqrt{x}}{1+x}\right) dx = 4\operatorname{arctg} 2 - 4/3 - \ln 5.$$

3.2.20. Izračunati krivolinijski integral $I = \oint_c xy^2\, dy - x^2 y\, dx$, po zatvorenoj krivoj c: $x^2 + y^2 = 2x$.

Rešenje. Parametarske jednačine krive c su:

$$x = 1 + \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi],$$

odakle nalazimo $I = \dfrac{5\pi}{2}$.

3.2.21. Izračunati krivolinijski integral

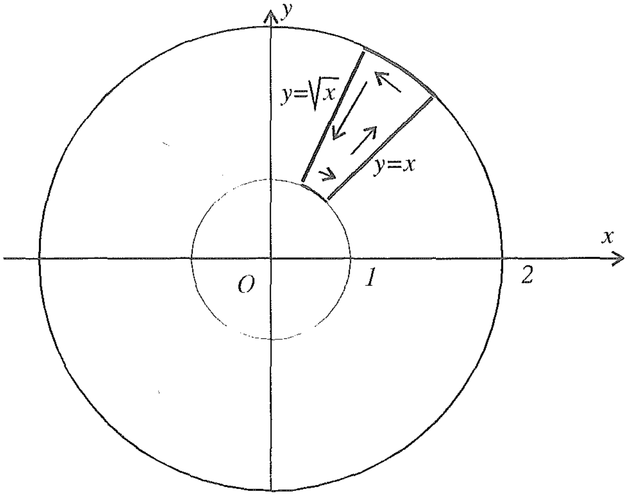
$$I = \oint_c y^3 e^{-y}\, dy - \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\, dx$$

ako je kriva c pozitivno orijentisana i ograničava oblast (slika 24):

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \leq y \leq x\sqrt{3}.$$

Rešenje. Oblast D ograničena datim krivim linijama je, u polarnim koordinatama, $D : \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$, $r \in [1,2]$. Primenom Greenove formule, imamo

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \frac{\pi}{12} \ln 2.$$



Slika 24

3.2.22. Ako je c luk kruga $x^2 + y^2 = 1$, od tačke $A(0,1)$ do tačke $B(1,0)$, izračunati $I = \int_c y^2\, dx - x^2\, dy$.

Rešenje. $I = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \dfrac{4}{3}$.

3.2.23. Ako je c luk parabole $y^2 = x$ koji iseca prava $y = x - 2$, izračunati $I = \int_c xy\, dx$.

Rešenje. $I = 2\int_{-1}^2 y^4\, dy = \dfrac{66}{5}$.

3.2.24. Izračunati $I = \oint_c \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|}$, ako je kriva c:

1° kontura četvorougla $ABCD$: $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$.

2° $\triangle ABC$: $A(1,0)$, $B(3,0)$, $C(2,2)$.

Rešenje. 1° Kriva c se sastoji iz sledećih linija:

$$c_1 : y = 1 - x, \; c_2 : y = 1 + x, \; c_3 : y = -1 - x, \; c_4 : x = 1 + y.$$

Tako nalazimo da je $I_1 = 0$, $I_2 = -2$, $I_3 = 0$, $I_4 = 2$, pa je $I = 0$.

2° Kriva c je zbir sledećih linija;

$$c_1 : y = \frac{1}{2}(x - 1), \; c_2 : y = 4 - x, \; c_3 : y = 2x - 2.$$

Zatim, nalazimo da je $I_1 = 2\ln 2$, $I_2 = 0$, $I_3 = -2\ln 2$. Dakle, traženi integral je $I = 0$.

3.2.25. Izračunati $I = \int_c 6x^2 y\, dx + 10xy\, dy$, ako je kriva c:

1° Kontura četvorougla određenog linijama

$$x = 1, \; y = 0, \; x = 2, \; y = x^3.$$

2° Luk parabole $y = x^3$ od tačke $x = 0$ do tačke $x = 1$.

Rešenje. 1° $c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$, gde su

$$c_1 : y = 0, \; c_2 : x = 2, \; c_3 : y = x^3, \; c_4 : x = 1.$$

Tako nalazimo da je $I = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3} + \int_{c_4} = \dfrac{194}{7}$.

2° $\quad I = \int_0^1 (6x^5 + 30x^6)\, dx \doteq \dfrac{37}{7}$.

3.2.26. Ako je kriva c luk cikloide:

$$x = 2(t - \sin t), \; y = 2(1 - \cos t), \; 0 \le t \le 2\pi$$

dokazati da je $I = \int_c x\, dx - y\, dy = 8\pi^2$.

3.2.27. Izračunati $I = \int_c y\, dx - x\, dy$, ako je c: $x = \dfrac{3at}{1 + t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}$ petlja Descartovog lista.

Rešenje. $I = \int_0^\infty x\, dx - y\, dy = -3a^2$.

3.2.28. Izračunati krivolinijski integral $I = \int_c (xy + x + y)\, dx + (xy + x - y)\, dy$, ako je c:

1° $x^2 + 4y^2 = 4$; 2° $x^2 + y^2 = y$;
3° $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$.
Rezultat proveriti primenom Greenove formule.

Rešenje. 1° Parametarske jednačine krive c su:

$$x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi],$$

odakle nalazimo

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [(2\sin t\cos t + 2\cos t + \sin t)(-2\sin t)]\,dt \\ &+ \int_0^{2\pi} [(2\sin t\cos t + 2\cos t - \sin t)\cos t]\,dt = 0. \end{aligned}$$

Primenom Greenove formule, imamo $I = \iint_D (y-x)\,dx\,dy = 0$, pri čemu je oblast D: $x^2 + 4y^2 = 4$.

2° Parametarske jednačine krive c su:

$$x = \frac{1}{2}\cos t,\ y = \frac{1}{2}(1+\sin t),\ t \in [0, 2\pi].$$

Zatim, nalazimo $I = \dfrac{\pi}{8}$.

Primenom Greenove formule, imamo $I = \iint_D (y-x)\,dx\,dy = \dfrac{\pi}{8}$.

3° Parametarske jednačine krive c su:

$$x = 1 + \sqrt{2}\cos t,\ y = 1 + \sqrt{2}\sin t,\ t \in [0, 2\pi].$$

Zatim, nalazimo

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (-3\sqrt{2}\sin t + 4\cos 2t - 2\sin 2t)\,dt \\ &- \int_0^{2\pi} \left(2\sqrt{2}\sin^2 t\cos t - \sqrt{2}\cos t - 2\sqrt{2}\sin t\cos^2 t\right)dt = 0. \end{aligned}$$

Primenom Greenove formule, imamo

$$I = \iint_D (y-x)\,dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}\cos(\varphi-\pi/4)} r^2(\sin\varphi - \cos\varphi)\,d\varphi = 0.$$

3.2.29. Izračunati $I = \int_c x\,dy + \dfrac{y}{2+x}\,dx$, ako je kriva c data jednačinom: $y = (x+2)\,e^{-x}$ od tačke $x = 0$ do $x = 1$.

Rešenje.

$$I=\int_c x\,dy+\frac{y}{2+x}\,dx=\int_0^1 e^{-x}\left(1-x-x^2\right)\,dx=6e^{-1}-2.$$

3.2.30. Izračunati $I=\int_c x\,dy+y\,dx$, ako je kriva c zadata jednačinom $y=x^2(1-\ln x)$, od tačke $x=0$ do $x=\sqrt{e}$.

Rešenje.

$$I=\int_0^{\sqrt{e}}\left(x^2(1-2\ln x)+x^2(1-\ln x)\right)\,dx=\frac{e\sqrt{e}}{2}.$$

3.2.31. Ako je kriva c kontura određena linijama $y=x^2$ i $y=\sqrt{x}$, naći integral $I=\int_c\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy$.

Rešenje. $I=I_1+I_2=\int_{c_1}+\int_{c_2}$, gde su:

$$c_1:\ y=x^2,\ x\in[0,1],\ I_1=\frac{7}{10},$$
$$c_2:\ y=\sqrt{x},\ x\in[1,0],\ I_2=-\frac{7}{10}.$$

Dakle, traženi integral je $I=I_1+I_2=0$.

3.2.32. Izračunati krivolinijski integral $I=\int_c xy\,dx$, ako je kriva c određena linijama:

$$y=\sqrt{x},\ x\le 1,\ (x-1)^2+y^2=1,\ x>1,\ y\ge 0.$$

Rešenje. Kriva c se sastoji iz linija:

$$c_1:\ y=0,\ x\in[0,2],$$
$$c_2:\ y=\sqrt{2x-x^2},\ x\in[2,1],$$
$$c_3:\ y=\sqrt{x},\ x\in[1,0],$$

pa je traženi integral $I=I_1+I_2+I_3=-\dfrac{11}{15}-\dfrac{\pi}{4}$.

Primenom Greenove formule, imamo

$$I=-\iint_D x\,dx\,dy=-\int_0^1 x\,dx\int_0^{\sqrt{2}}dy-\int_1^2 x\,dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}dy=-\frac{\pi}{4}-\frac{11}{15}.$$

3.2.33. Izračunati $I=\int_c z^2\,dx+x^2\,dy+y^2\,dz$, ako je c kontura $\triangle$ koji koordinatne ravni isecaju na površi:

1° $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$;

$2^\circ \quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

Rešenje. 1° Sferni trougao se sastoji iz krivih linija:

$$\begin{aligned} c_1 &: x^2+y^2=R^2,\ z=0,\\ c_2 &: y^2+z^2=R^2,\ x=0,\\ c_3 &: x^2+z^2=R^2,\ y=0. \end{aligned}$$

Sada nalazimo da je $I=I_1+I_2+I_3=\frac{2}{3}R^3+\frac{2}{3}R^3+\frac{2}{3}R^3=2R^3$.

2° Kontura krivolinijskog trougla se sastoji iz sledećih krivih linija:

$$\begin{aligned} c_1 &: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0,\\ c_2 &: \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0,\\ c_3 &: \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0. \end{aligned}$$

Traženi integral je

$$\begin{aligned} I=I_1+I_2+I_3 &= \frac{2}{3}a^2b+\frac{2}{3}b^2c+\frac{2}{3}ac^2\\ &= \frac{2}{3}\left(a^2b+b^2c+ac^2\right). \end{aligned}$$

3.2.34. Izračunati $I=\int_c \left(y^2+z^2\right)dx+\left(z^2+x^2\right)dy+\left(x^2+y^2\right)dz$, ako je kriva c presek površi:

$$x^2+y^2+z^2=2Ry,\ x^2+y^2=2ay,\ 0<a<R.$$

Rešenje. Parametarski oblik jednačine krive c je: $x=a\cos t,\ y=a(1+\sin t)$ i nalazimo $z=\sqrt{2a(R-a)}\sqrt{1+\sin t}$,

$$\begin{aligned} dx &= -a\sin t\,dt,\ dy=a\cos t\,dt\\ dz &= \sqrt{2a(R-a)}\frac{\cos t\,dt}{2\sqrt{1+\sin t}},\ t\in[0,2\pi]. \end{aligned}$$

Traženi integral je

$$\begin{aligned} I = {} & a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\sin t + \sin^2 t\right)(-a\sin t)\, dt \\ & - 2a^2(R-a) \int_0^{2\pi} (1+\sin t)\sin t\, dt \\ & + 2a^2(R-a) \int_0^{2\pi} (1+\sin t)\cos t\, dt + a^3 \int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt \\ & + a^2\sqrt{2a(R-a)} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 t\, dt}{2\sqrt{1+\sin t}} \\ & + a^2\sqrt{2a(R-a)} \int_0^{2\pi} (1+2\sin t)\frac{\cos t\, dt}{2\sqrt{1+\sin t}} \\ & + a^2\sqrt{2a(R-a)} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t\cos t\, dt}{2\sqrt{1+\sin t}} \\ = {} & -2a^2 R\pi. \end{aligned}$$

3.2.35. Izračunati $I = \oint_c y\,dx + z\,dy + x\,dz$, ako je kriva c presek površi $y^2 + z^2 = r^2$, $y^2 = rx$.

Rešenje. Uvođenjem parametarskih koordinata: $y = r\cos t$, $z = r\sin t$, dobijamo $x = r\cos^2 t$ i

$$dx = -2r\cos t\sin t\, dt,\ dy = -r\sin t\, dt,\ dz = r\cos t\, dt,\ t \in [0, 2\pi]\,.$$

Traženi integral je $I = -r^2\pi$.

3.2.36. Izračunati $I = \oint_c (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$ po zatvorenoj krivoj c koja je data u preseku površi $y^2 + z^2 = b^2$ i $\dfrac{y}{b} + \dfrac{x}{a} = 1$, za $a > 0$ i $b > 0$.

Rešenje. Uvođenjem parametarskih koordinata:

$$y = b\cos t,\ z = b\sin t,\ x = a(1-\cos t),$$

nalazimo diferencijale:

$$dy = -b\sin t\, dt,\ dz = b\cos t\, dt,\ dx = a\sin t\, dt,\ t \in [0, 2\pi]\,.$$

Traženi integral je $I = -2b\pi(a+b)$.

3.2.37. Izračunati integral $I = \oint_c \left(4y^2 + 2x^2\right)\, dx + (z+x)\,dy + y\,dz$, po zatvorenoj krivoj c: $z = x^2$, $z = 1 - x^2 - y^2$.

Rešenje. Prema jednačini površi $x^2 + y^2 = 1 - z$ sledi $z \le 1$. Presek datih površi je elipsa $2x^2 + y^2 = 1$, koja ima parametarske jednačine: $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Tako nalazimo $I = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

3.2.38. Ako je c deo Vivijanijeve krive:

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=ax,\ z\geq 0,\ a>0,$$

izračunati $I=\int_c y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz$.

Rešenje. Ako uvedemo smenu: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, nalazimo da je $r=a\cos\theta$, $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Iz datih jednačina površi, nalazimo da je $z=a|\sin\theta|$. Traženi integral je $I=-\dfrac{a^3\pi}{4}$.

3.2.39. Naći integral $I=\oint_c 3y\,dx+2z\,dy-x\,dz$ po zatvorenoj krivoj koja se nalazi y preseku ravni $x+y+z=\dfrac{3a}{2}$ i kocke: $0\leq x\leq a$, $0\leq y\leq a$, $0\leq z\leq a$.

Rešenje. Kako se kriva c nalazi u preseku date ravni i kocke, to se ista sastoji iz sledećih šest linija:

$$c_1:\ y=\frac{3a}{2}-x,\ z=0,\ x\in\left[a,\frac{a}{2}\right];\quad c_2:\ x=\frac{a}{2}-z,\ y=a,\ z\in\left[0,\frac{a}{2}\right];$$
$$c_3:\ y=\frac{3}{2}a-z,\ x=0,\ z\in\left[\frac{a}{2},a\right];\quad c_4:\ x=\frac{a}{2}-y,\ z=a,\ y\in\left[\frac{a}{2},0\right]$$
$$c_5:\ x=\frac{3}{2}a-z,\ y=0,\ z\in\left[a,\frac{a}{2}\right];\quad c_6:\ y=\frac{a}{2}-z,\ x=a,\ z\in\left[\frac{a}{2},0\right].$$

Traženi integral je

$$\begin{aligned}I&=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6\\&=-\frac{9a^2}{8}-\frac{13a^2}{8}-\frac{3a^2}{4}-\frac{5a^2}{8}+\frac{3a^2}{8}+\frac{3a^2}{4}=-3a^2.\end{aligned}$$

3.2.40. Neka je c presečna kriva površi $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{x}{a}$ i $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}$, za $a>0$, $b>0$, $c>0$. Naći $\oint_c y\,dx+x^2\,dy+z\,dz$.

Rešenje. Presečna kriva se nalazi u ravni $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}$. Druga jednačina površi se može napisati u obliku

$$\frac{\left(y-\frac{b}{2}\right)^2}{b^2}+\frac{\left(z-\frac{c}{2}\right)^2}{c^2}=\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Jednačina (1) ima parametarski oblik:

$$y=\frac{b}{2}(1+\sqrt{2}\cos t),\ z=\frac{c}{2}(1+\sqrt{2}\sin t),\ x=\frac{a}{2}(2+\sqrt{2}\sin t+\sqrt{2}\cos t),$$

odakle imamo

$$dx = \frac{a\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t)\,dt,\ dy = -\frac{b\sqrt{2}}{2}\sin t\,dt,\ dz = \frac{c\sqrt{2}}{2}\cos t\,dt.$$

Traženi integral je $I = \dfrac{ab\pi}{2}(1-2a)$.

3.2.41. Izračunati $I = \int_c y\,dx + 2x\,dy$, ako je c kriva koja ograničava oblast D: $x^2+y^2-2x<0$, $x^2+y^2-2y<0$.

Rešenje. Primenom Greenove formule, nalazimo

$$I = \int_c y\,dx + 2x\,dy = \iint_D dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dy = \frac{\pi}{2} - 1.$$

3.2.42. Izračunati $I = \oint_c (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, ako je c zatvorena kriva data presekom površi: $x^2+y^2=a^2$, $\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{b}=1$, za $a>0$ i $b>0$.

Rešenje. Parametarske jednačine krive c su:

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = b(1-\sin t),\ t\in[0,2\pi]\,.$$

Odatle nalazimo da je traženi integral $I = -2a\pi(a+b)$.

3.2.43. Izračunati $I = \oint_c y\,dx + z\,dy + x\,dz$, ako je c zatvorena kriva data pomoću: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y+z=a$.

Rešenje. Presek površi je elipsa

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\left(y-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 1, \tag{1}$$

gde je $A = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Parametarske jednačine krive (1) su:

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t,\ y = \frac{a}{2}(1+\sin t),\ z = \frac{a}{2}(1-\sin t),\ t\in[0,2\pi]\,.$$

Traženi integral je $I = -\dfrac{a^2\pi\sqrt{2}}{2}$.

3.2.44. Naći krivolinijski integral $I = \oint_c (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, ako je c krug dat pomoću:

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\ y = x\operatorname{tg}\alpha,\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

Rešenje. Parametarske jednačine krive c su:

$$x = r\cos\varphi\sin t,\ y = r\sin\varphi\sin t,\ z = r\cos t,\ t \in [0, 2\pi]\,.$$

Prema jednačini krive c, takođe nalazimo: $\alpha = \varphi$, $r = a$, a parametarske jednačine krive c postaju:

$$x = a\cos\alpha\sin t,\ y = a\sin\alpha\sin t,\ z = a\cos t.$$

Sada je traženi integral $I = 2a^2\pi(\sin\alpha - \cos\alpha)$.

3.2.45. Izračunati $I = \int_c xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, ako je c data pomoću: $x^2 + y^2 + z^2 = 2ay,\ z = y,\ x > 0$.

Rešenje. Parametarske jednačine krive c su:

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cos t,\ y = \frac{a}{2}(1 + \sin t),\ z = \frac{a}{2}(1 + \sin t),$$

odakle je

$$dx = -\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin t\,dt,\ dy = \frac{a}{2}\cos t\,dt,\ dz = \frac{a}{2}\cos t\,dt$$

a prema nejednakosti $x > 0$ sledi $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Traženi integral je $I = \frac{a^3}{48}(8 + 3\pi\sqrt{2})$.

3.2.46. Izračunati $I = \int_c xy\,dx + zy\,dy + xz\,dz$, ako je kriva c data pomoću: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x = z$.

Rešenje. Kriva c ima jednačinu

$$\frac{x^2}{\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

Parametarske jednačine iste krive c su:

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}}\cos t,\ y = R\sin t,\ z = \frac{R\sqrt{2}}{2}\cos t.$$

Zatim, nalazimo

$$dx = -\frac{R\sqrt{2}}{2}\sin t\,dt,\ dy = R\cos t\,dt,\ dz = -\frac{R\sqrt{2}}{2}\sin t\,dt,\ t \in [0, 2\pi]\,.$$

Traženi integral je $I = 0$.

3.2.47. Naći dužinu luka krive c zadate pomoću: $x = 3t,\ y = 3t^2$, $z = 2t^2$, od tačke $(0, 0, 0)$ do $(3, 3, 2)$.

Rešenje. Ako dužinu luka označimo sa s, imamo

$$s = \int_c ds = \int_0^1 \frac{9 + 52t^2}{\sqrt{9 + 52t^2}} \, dt = \frac{9\sqrt{52}}{104} \ln \frac{\sqrt{52} + \sqrt{61}}{3} + \frac{\sqrt{61}}{2}.$$

3.2.48. Naći dužinu luka krive c:

$$x = e^{-t} \cos t, \; y = e^{-t} \sin t, \; z = e^{-t}, \; t \in (0, \infty).$$

Rešenje. Diferencijal luka s je $ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} \, dt$, pa je luk krive c : $s = \sqrt{3} \int_0^{\infty} e^{-t} \, dt = \sqrt{3}$.

3.2.49. Naći obim sfernog trougla koji isecaju koordinatne ravni sa:

1° sferom $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,

2° ravni $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$,

u prvom oktantu.

Rešenje. 1° $s = s_1 + s_2 + s_3 = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3} = \dfrac{3a\pi}{2}$, gde su:

$$c_1 : x^2 + y^2 = a^2, \, z = 0; \; c_2 : y^2 + z^2 = a^2, \, x = 0; \; c_3 : x^2 + z^2 = a^2, \, y = 0.$$

2° $s = s_1 + s_2 + s_3 = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3}$, gde su

$$c_1 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \; c_2 : \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1; \; c_3 : \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1.$$

Luk s krive c je $s = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2}$.

3.2.50. Naći površinu figure ograničene petljom krive

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^{12} = xy.$$

Rešenje. Površina figure je

$$P = \frac{1}{2} \oint_c x \, dy - y \, dx. \tag{1}$$

Kriva c je definisana samo za $x \geq 0$ i $y \geq 0$. Dakle, kriva c je samo u prvom oktantu. Uvođenjem modifikovanih polarnih koordinata: $x = r \cos^4 \theta$, $y = r \sin^4 \theta$, nalazimo da je $r = \sin \theta \cos \theta$ i $\theta \in [0, \pi/2]$. Tražena površna je, prema (4): $P = \dfrac{1}{32} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta (1 - \cos^2 2\theta)^2 \, d\theta = \dfrac{1}{30}$.

3.2.51. Izračunati integral $I = \oint_c x \, dx + dz + y^2 z^3 \, dy$, ako je kriva c data jednačinama: $y^2 + z^2 = r^2$, $x = 0$

Rešenje. Parametarske jednačine krive c su: $y = r \cos t$, $z = r \sin t$, $x = 0$, odakle je

$$dx = 0, \; dy = -r \sin t \, dt, \; dz = r \cos t \, dt, \; t \in [0, 2\pi].$$

Traženi integral je

$$I = -\frac{r^6}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) \, dt + \frac{r^6}{8} \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 2t - \cos^3 2t\right) \, dt = -\frac{r^6 \pi}{8}.$$

4. POVRŠINSKI INTEGRALI

4.1. Uvodne napomene

1° Ako je S deo po deo glatka dvostrana površ definisana jednačinama

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \quad (u,v) \in D,$$

a funkcija $f(x,y,z)$ je definisana i nerekidna na površi S, onda je *površinski integral prve vrste* funkcije $f(x,y,z)$ po površi S, dat sa:

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f\,[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]\,\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

gde je

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$
$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

U specijalnom slučaju, ako je jednačina površi S data sa: $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$, pri čemu je $z(x,y)$ jednoznačna neprekidno-diferencijabilna funkcija, onda je *površinski integral prve vrste* dat sa

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy,$$

za $p = \partial z/\partial x$, $q = \partial z/\partial y$.

2° Ako je S glatka dvostrana površ, na kojoj je izabrana jedna od dveju strana, određena smerom normale $\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, a funkcije: $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ definisane i neprekidne na površi S, onda je *površinski integral druge vrste* funkcije $f(x,y,z)$ po površi S, dat sa

$$\begin{aligned} &\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy \\ (1)\qquad &= \iint_S [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\,dS. \end{aligned}$$

Promenom strane površi integral (1) menja znak.

3° Ako su $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ neprekidno-diferencijabilne funkcije a c prosta zatvorena deo po deo glatka kriva, koja ograničava konačnu deo po deo gltatku dvostranu površ S, onda važi *Stocesova formula*:

$$\oint_c P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

gde su $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kosinusi pravca normale površi S, orijentisane na onu stranu, u odnosu na koju se obilazak konture c vrši suprotno kretanju kazaljke na časovniku.

4° Ako je S deo po deo glatka površ, koja ograničava oblast V, $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ neprekidne funkcije zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti $V+S$, onda važi *formula Ostrogradskog*:

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$
$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

gde su $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ kosinusi pravca spoljne normale površi S.

4.2. Zadaci

4.2.1. Izračunati površinski integral $I = \iint_S (x+2y-z)dS$, ako je S deo ravni $3x+6y+2z=6$, u prvom oktantu.

Rešenje. Jednačina površi S je $z = 3(1 - x/2 - y)$, odakle nalazimo da je $p = -3/2$, $q = -3$, $dS = \sqrt{1+p^2+q^2} = (7/2)\,dx\,dy$. Traženi integral je

$$I = \frac{7}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x/2} \left(x + 2y - 3\left(1 - \frac{x}{2} - y\right)\right) dx\,dy = \frac{7}{6}.$$

4.2.2. Izračunati površinski integral $\iint_S \dfrac{dS}{(1+y+z)^3}$ pri čemu je S deo ravni $x+y+z=1$ u prvom oktantu.

Rešenje. Kako je $dS = \sqrt{3}\,dx\,dy$, to je traženi integral

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{\sqrt{3}}{(1+y+1-x-y)^3} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

4.2.3. Izračunati $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, ako je S: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Rešenje. Površ S se sastoji iz površi S_1 i S_2:

$$S_1: \quad z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}; \quad S_2: \quad z = -\sqrt{R^2-x^2-y^2};$$

pa je traženi integral

$$I = 2R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r^2\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}} = R^3\pi^2.$$

4.2.4. Izračunati $I = \iint_S \dfrac{dS}{x^2+y^2+z^2}$, ako je površ S deo cilindra $y^2+z^2=R^2$ ograničen ravnima: $z=0$, $x=0$, $y=0$, $x=a$, za $a>0$.

Rešenje. Površ S ima jednačinu $z = \sqrt{R^2-y^2}$, pri čemu je $p=0$ a $q = -y/\sqrt{R^2-y^2}$. Element površine je

$$dS = \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\,dx\,dy$$

pa je traženi integral

$$I = \int_0^R dy \int_0^a \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-y^2}\,(x^2+R^2)} = \frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}\frac{a}{R}.$$

4.2.5. Izračunati $I = \iint_S \dfrac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, ako je S deo cilindra $x^2+y^2=R^2$ između ravni $z=0$ i $z=h$, $h>0$.

Rešenje. Površ S ima jednačine $y = \pm\sqrt{R^2-x^2}$, stoga je $p = \dfrac{\partial y}{\partial x} = \pm\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, $q=0$. Zatim, nalazimo

$$dS = \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx\,dz = \frac{R\,dx\,dz}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Traženi integral je

$$I = 2\iint_D \frac{R\,dx\,dz}{\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{R^2+z^2}} = 2R\pi\ln\frac{h+\sqrt{R^2+h^2}}{R}.$$

4.2.6. Izračunati
$$I = \iint_S z\left(x^2+y^2\right)dS,$$
ako je površ S data sa $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

Rešenje. Kako je
$$dS = \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$
onda je traženi integral
$$I = a\iint_D \left(x^2+y^2\right)\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$
Prelaskom na polarne koordinate: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, nalazimo
$$I = a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3\,dr = \frac{a^5\pi}{2}.$$

4.2.7. Izračunati $I = \iint_S (xy+xz+yz)dS$, ako je S deo površi $z = \sqrt{x^2+y^2}$, isečen cilindrom $x^2+y^2 = 2ay$, $a>0$.

Rešenje. Iz jednačine površi S nalazimo da je $p = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $q = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, odakle imamo
$$dS \doteq \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,dx\,dy.$$
Uvođenjem polarnih koordinata: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, nalazimo da je traženi integral
$$I = \sqrt{2}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2a\sin\varphi} r^3(\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi+\sin\varphi)\,dr = \frac{64a^4\sqrt{2}}{15}.$$

4.2.8. Izračunati $I = \iint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}dS$, ako je S deo površi $x^2+y^2+z^2 = R^2$, isečen površi $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Rešenje. Presek datih površi je krug $x^2+y^2 = R^2/2$ u ravni $z = R/\sqrt{2}$. Sada nalazimo:
$$p = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad q = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad dS = \frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$
$$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2+R^2-x^2-y^2}\,dS,$$

odakle, prelaskom na polarne koordinate, imamo

$$I = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R\sqrt{2}/2} \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = R^3\pi\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

4.2.9. Izračunati $I = \iint_S \frac{dS}{d^2}$, ako je S deo površi $y^2 + z^2 = R^2$ od $x = 0$ do $x = a$, $a > 0$, a d je rastojanje tačke na površi od koordinatnog početka.

Rešenje. Važi $d^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + R^2$ i

$$dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy = \frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2 - y^2}}.$$

Traženi integral postaje

$$I = 2R \int_{-R}^{R} dy \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{R^2 - y^2}\,(x^2 + R^2)} = 2\pi \operatorname{arctg} \frac{a}{R}.$$

4.2.10. Izračunati $I = \iint_S \frac{dS}{d}$, ako je S deo površi $y = xz$ isečen cilindrom $x^2 + z^2 = R^2$, a d je rastojanje tačke površi od y ose.

Rešenje. Kako je $d = \sqrt{x^2 + z^2}$, to, uvođenjem polarnih koordinata, nalazimo

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r\sqrt{1 + r^2}}{r}\,dr = \pi\left(\ln\left(R + \sqrt{1 + R^2}\right) + R\sqrt{1 + R^2}\right).$$

4.2.11. Izračunati $I = \iint_S \left(z^2 + y^2\right) dS$, ako je S površ koja ograničava telo $\sqrt{y^2 + z^2} \le x \le a$, $a > 0$.

Rešenje. Površ S se sastoji iz površi S_1: $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ i S_2: $x = a$, odakle nalazimo: $dS_1 = \sqrt{2}\,dy\,dz$, $dS_2 = dy\,dz$. Oblast D je data sa $y^2 + z^2 = a^2$, a, zatim uvođenjem polarnih koordinata, nalazimo da je traženi integral $I = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}$, odnosno

$$I = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3\,dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3\,dr = \frac{a^4\pi}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

4.2.12. Izračunati $I = \iint_S (x + y + z)\,dS$, ako je S: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \ge 0$.

Rešenje. Nalazimo da je

$$p = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad q = \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad dS = \frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

a onda je, prelaskom na polarne koordinate, traženi integral

$$I = R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} \left(r\cos\varphi + r\sin\varphi + \sqrt{R^2 - r^2}\right) = R^3\pi.$$

4.2.13. Ako je S površ koja ograničava telo: $z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$, $0 \le z \le 1$, naći integral $I = \iint_S z dS$.

Rešenje. Uvođenjem polarnih koordinata: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, nalazimo da je $I = I_1 + I_2 = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}$, pri čemu su površi S_1 i S_2 date jednačinama

$$S_1 : \quad z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right); \quad S_2 : \quad z = 1.$$

Sada je

$$I_1 = \iint_{S_1} z dS = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1 + r^2}\,dr = \frac{2\pi}{15}\left(1 + 6\sqrt{3}\right),$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\,dr = 2\pi.$$

Dakle, traženi integral je $I = I_1 + I_2 = \frac{4\pi}{15}\left(8 + 3\sqrt{3}\right)$.

4.2.14. Izračunati $I = \iint_S z^2 dS$, ako je S deo površi konusa

$$x = r\cos\varphi\sin\alpha,\ y = r\sin\varphi\sin\alpha,\ z = r\cos\alpha,$$
$$0 \le r \le a;\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

a α je konstanta, $0 < \alpha < \pi$.

Rešenje. Prema datim jednačinama površi S, nalazimo

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi\sin\alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi\sin\alpha, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \cos\alpha,$$
$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -r\sin\alpha\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial\varphi} = r\cos\varphi\sin\alpha, \quad \frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0,$$

pa je

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = r^2\sin^2\alpha, \quad dS = \sqrt{EG - F^2} = r\sin\alpha\,dr\,d\varphi,$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3\sin\alpha\cos^2\alpha\,dr = \frac{a^4\pi}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha.$$

4.2.15. Izračunati $I = \iint_S z dS$, ako je S deo površi zadate parametarski: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, $0 < u < \alpha$, $0 < v < 2\pi$.

Rešenje. Važi:

$$E = \cos^2 v + \sin^2 v = 1, \quad F = 0, \quad G = 1 + u^2,$$

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \sqrt{1+u^2}\, du\, dv.$$

Traženi integral je

$$I = \int_0^\alpha du \int_0^{2\pi} v\sqrt{1+u^2}\, dv = \pi^2\left(\ln\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right) + \alpha\sqrt{1+\alpha^2}\right).$$

4.2.16. Izračunati $I = \iint_S z\, dx\, dy + x\, dx\, dz + y\, dy\, dz$, ako je S gornji deo ravni $x + y + z = 1$ isečen koordinatnim ravnima.

Rešenje. Spoljna normala površi S je vektor $\vec{n}=(1,1,1)$ a odgovarajući jedinični vektor je $\vec{n_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Traženi integral je $I = I_1 + I_2 + I_3$, pri čemu su:

$$I_1 = \iint_D (1 - x - y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy = \frac{1}{6},$$
$$I_2 = \iint_{D_1} x\, dx\, dz = \int_0^1 x\, dx \int_0^{1-x} dz = \frac{1}{6},$$
$$I_3 = \iint_{D_2} y\, dy\, dz = \int_0^1 y\, dy \int_0^{1-y} dz = \frac{1}{6}.$$

Tako nalazimo da je $I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2}$.

4.2.17. Izračunati $I = \iint_S xyz\, dx\, dz$, ako je S spoljna strana sfere $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.

Rešenje. Površ S se sastoji iz dve površi:

$$S_1 : y = \sqrt{R^2 - x^2 - z^2} \quad \text{i} \quad S_2 : y = -\sqrt{R^2 - x^2 - z^2},$$

pa je traženi integral $I = 2\iint_D xz\sqrt{R^2 - x^2 - z^2}\, dx\, dz$, odakle, prelaskom na polarne koordinate, nalazimo

$$I = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R r^3 \sin\varphi\cos\varphi\sqrt{R^2 - r^2}\, dr = \frac{2R^5}{15}.$$

4.2.18. Izračunati $I = \iint_S x\sqrt{4x^2 + y^2}\, dx\, dy$, ako je S donja strana elipse $4x^2 + y^2 \leq 4$, $x > 0$.

Rešenje. Vektor spoljne normale je $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{k}$, $\cos\gamma < 0$, pa je

$$I = -\iint_D x\sqrt{4x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Uvođenjem polarnih koordinata,integral postaje

$$I = -2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^2\cos\varphi\sqrt{4r^2}\,dr = -2.$$

4.2.19. Izračunati $I = \iint_S 2\,dx\,dy + y\,dx\,dz - x^2 z\,dy\,dz$, ako je S spoljna strana elipsoida $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, koja pripada prvom oktantu.

Rešenje. Vektor spoljne normale je $\overrightarrow{n} = \dfrac{xc^2}{a^2 z}\overrightarrow{i} + \dfrac{yc^2}{b^2 z}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, a traženi integral je $I = I_1 + I_2 + I_3$, gde su:

$$I_1 = 2\iint_{D_1} dx\,dy = 2\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy = \frac{ab\pi}{2},$$

$$I_2 = \iint_{D_3} y\,dx\,dz = \int_0^a dx\int_0^{c\sqrt{1-x^2/a^2}} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dz = \frac{abc\pi}{6},$$

$$I_3 = -\iint_{D_2} za^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)dy\,dz = -\frac{2a^2bc^2}{15}.$$

Sada imamo $I = I_1 + I_2 + I_3 = \dfrac{ab\pi}{2} + \dfrac{abc\pi}{6} - \dfrac{2a^2bc^2}{15}$.

4.2.20. Izračunati

$$I = \iint_S (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy$$

ako je S spoljna strana tela ograničenog površima $x = \sqrt{y^2+z^2}$, $x = a$, $a > 0$.

Rešenje. Površ S se sastoji iz površi S_1 i S_2, pri čemu su:

$$S_1: \quad x = \sqrt{y^2+z^2}; \quad \overrightarrow{n_0} = \frac{1}{x\sqrt{2}}(-x, y, z)$$

$$S_2: \quad x = a; \quad \overrightarrow{n_0} = \overrightarrow{i} = (1, 0, 0).$$

Dakle, polazni integral je $I = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = I_1 + I_2$, gde su:

$$I_1 = -\iint_{S_1} (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy = 0,$$

$$I_2 = \iint_{S_2} = \int_{-a}^{a} dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} (y-z)\,dz = 0.$$

Dakle, $I = 0$.

4.2.21. Izračunati $I = \iint_S yz^2\,dy\,dz + x^2\,dz\,dx - xy^2\,dx\,dy$, ako je S unutrašnja strana konusne površi $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le h$, $h > 0$.

Rešenje. Važi $\overrightarrow{n_0} = \dfrac{1}{z\sqrt{2}}(x, y, z)$ i

$$\begin{aligned} I &= \iint_S yz^2\,dy\,dz + x^2\,dz\,dx - xy^2\,dx\,dy \\ &= \int_0^h z^2\,dz \int_{-z}^{z} y\,dy + \int_0^h dz \int_{-z}^{z} x^2\,dx - \int_{-h}^{h} x\,dx \int_{-\sqrt{h^2-x^2}}^{\sqrt{h^2-x^2}} y^2\,dy \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

4.2.22. Izračunati $I = \iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, ako je S spoljašnja strana paralelopipeda: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$. Rezultat proveriti formulom Ostrogradskog.

Rešenje. Površ S se sastoji iz sledećih površi:

$$\begin{aligned} &S_1 : z = 0,\ dz = 0,\ \vec{n} = -\vec{k}; \quad &&S_2 : x = 0,\ dx = 0,\ \vec{n} = -\vec{i}; \\ &S_3 : y = 0,\ dy = 0,\ \vec{n} = -\vec{j}; \quad &&S_4 : x = a,\ dx = 0,\ \vec{n} = \vec{i}; \\ &S_5 : y = b,\ dy = 0,\ \vec{n} = \vec{j}; \quad &&S_6 : z = c,\ dz = 0,\ \vec{n} = \vec{k}. \end{aligned}$$

Dakle, integral je $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6$, gde su: $I_1 = 0$, $I_2 = 0$,$I_3 = 0$,

$$I_4 = \iint_{S_4} = \iint_D a^2\,dy\,dz = a^2 \int_0^b dy \int_0^c dz = a^2bc,$$

$I_5 = \iint_{S_5} = ab^2c$, $I_6 = \iint_{S_6} = abc^2$. Tako nalazimo da je $I = abc(a+b+c)$.

Primenom formule Ostrogradskog, imamo

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (2x + 2y + 2z)\,dx\,dy\,dz \\ &= 2\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x+y+z)\,dz = abc(a+b+c). \end{aligned}$$

4.2.23. Izračunati $I = \iint_S z\,dx\,dy$, ako je S unutrašnja strana tetraedra koji određuju ravni: $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Rezultat proveriti primenom formule Ostrogradskog.

Rešenje. Površ S se sastoji iz površi:

$$S_1 : z = 0,\ dz = 0,\ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{k}; \qquad S_2 : x = 0,\ dx = 0,\ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{i};$$

$$S_3 : y = 0,\ dy = 0,\ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{j};$$

$$S_4 : x + y + z = 1,\ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}.$$

Traženi integral je sada $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, gde su: $I_1 = \iint_{S_1} z\,dx\,dy = 0$, $I_2 = \iint_{S_2} z\,dx\,dy = 0$, $I_3 = \iint_{S_3} z\,dx\,dy = 0$,

$$I_4 = \iint_{S_4} (1 - x - y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)\,dy = -\frac{1}{6},$$

a onda je $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -\dfrac{1}{6}$.

Primenom formule Ostrogradskog, nalazimo da je

$$I = -\iiint_V dx\,dy\,dz = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = -\frac{1}{6}.$$

4.2.24. Izračunati $\iint_S z\,dx\,dy + y\,dx\,dz + x\,dy\,dz$, ako je S unutrašnja strana tetraedra ograničenog površima: $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Rezultat proveriti primenom formule Ostrogradskog.

Rešenje. Površ S se sastoji iz površi:

$$S_1 : z = 0,\ dz = 0,\ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{k}; \quad S_2 : x = 0,\ dx = 0,\ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{i};$$

$$S_3 : y = 0,\ dy = 0,\ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{j}; \quad S_4 : x + y + z = 1,\ \overrightarrow{n_0} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Traženi integral je $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, pri čemu su: $I_1 = 0$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$,

$$I_4 = -\iint_{S_4} (1 - x - y)\,dx\,dy + y\,dx\,dz + x\,dy\,dz = J_1 + J_2 + J_3$$

$$J_1 = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)\,dy$$

$$J_2 = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - z)\,dz$$

$$J_3 = -\int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1 - y - z)\,dz$$

Naime, nalazimo $I_4 = -1/2$. Dakle, traženi integral je $I = -1/2$.

Primenom formule Ostrogradskog, nalazimo

$$I = -3 \iiint_V dx\, dy\, dz = -3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = -1/2.$$

4.2.25. Izračunati $I = \iint_S y\, dy\, dz + z\, dx\, dz + x\, dx\, dy$, ako je S spoljna strana tetraedra koji je određen ravnima: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$.

Rešenje. Primetimo da je $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, pri čemu su:

$$S_1 : z = 0,\ dz = 0,\ \vec{n} = -\vec{k}; \quad S_2 : x = 0,\ dx = 0,\ \vec{n} = -\vec{i};$$
$$S_3 : y = 0,\ dy = 0,\ \vec{n} = -\vec{j}; \quad S_4 : x + y + z = 1,\ \vec{n} = (1, 1, 1).$$

Sada je $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, gde su integrali I_1, I_2, I_3 i I_4 dati sa:

$$I_1 = \iint_{S_1} = -\int_0^a x\, dx \int_0^{a-x} dy = -\frac{a^3}{6},$$
$$I_2 = \iint_{S_2} = -\int_0^a y\, dy \int_0^{a-y} dz = -\frac{a^3}{6},$$
$$I_3 = \iint_{S_3} = -\int_0^a z\, dz \int_0^{a-z} dx = -\frac{a^3}{6},$$
$$I_4 = \iint_{S_4}$$
$$= \int_0^a y\, dy \int_0^{a-y} dz + \int_0^a dx \int_0^{a-x} z\, dz + \int_0^a x\, dx \int_0^{a-x} dy = \frac{a^3}{2}.$$

Tako nalazimo da je $I = 0$.

Primenom formule Ostrogradskog, imamo $I = \iiint_V 0\, dx\, dy\, dz = 0$.

4.2.26. Izračunati $I = \iint_S yz\, dy\, dz + xz\, dx\, dz + xy\, dx\, dy$, ako je S spoljna strana kocke: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$.

Rešenje. Primetimo da je $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$, pri čemu su:

$$S_1 : z = 0,\ dz = 0,\ \vec{n} = -\vec{k}; \quad S_2 : x = 0,\ dx = 0,\ \vec{n} = -\vec{i};$$
$$S_3 : y = 0,\ dy = 0,\ \vec{n} = -\vec{j}; \quad S_4 : x = a,\ dx = 0,\ \vec{n} = \vec{i};$$
$$S_5 : y = a,\ dy = 0,\ \vec{n} = \vec{j}; \quad S_6 : z = a,\ dz = 0,\ \vec{n} = \vec{k}.$$

Traženi integral je $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 0$, jer je: $I_1 = -a^4/4$, $I_2 = -a^4/4$, $I_3 = -a^4/4$, $I_4 = a^4/4$, $I_5 = a^4/4$, $I_6 = a^4/4$.

Primenom formule Ostrogradskog, imamo $I = \iiint_V 0\,dx\,dy\,dz = 0$.

4.2.27. Izračunati $I = \iint_S \left(\frac{dy\,dz}{x} + \frac{dx\,dz}{y} + \frac{dx\,dy}{z}\right)$, gde je S spoljna strana elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Rešenje. Neka je $S = S_1 + S_2$, gde su

$$S_1 : z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad S_2 : z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Traženi ntegral je

$$I = 2\iint_S \left(\frac{1}{x}\cos\alpha + \frac{1}{y}\cos\beta + \frac{1}{z}\cos\gamma\right) dS,$$

gde je vektor spoljne normale dat sa $\overrightarrow{n_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, pri čemu su kosinusi dati sa

$$\cos\alpha = \frac{x}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{c^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Tako nalazimo da je $I = \frac{4\pi}{abc}\left(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\right)$.

4.2.28. Izračunati $I = \iint_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, ako je S spoljna strana sfere $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Rešenje. Neka je $S = S_1 + S_2$, pri čemu su

$$S_1 : \quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}; \quad \overrightarrow{n_0} = -\frac{1}{R}(x, y, z),$$

$$S_2 : \quad z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}; \quad \overrightarrow{n_0} = \frac{1}{R}(x, y, z).$$

Element površine je $dS_1 = \frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$. Uvođenjem polarnih koordinata: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, imamo

$$I_1 = I_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2R^3\pi.$$

Traženi integral je $I = I_1 + I_2 = 4R^3\pi$.

4.2.29. Izračunati $I = \iint_S yz\,dy\,dz + xz\,dz\,dx + xy\,dx\,dy$, ako je S spoljna strana površi određene površima:

$$y^2 + z^2 = R^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x = a, \quad (a > 0), \quad z = 0.$$

Rešenje. Neka je $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, pri čemu važi

$$S_1 : x = a,\ dx = 0,\ \vec{n} = \vec{i}; \qquad S_2 : z = 0,\ dz = 0,\ \vec{n} = -\vec{k};$$
$$S_3;\ x = 0,\ dx = 0,\ \vec{n} = -\vec{i}; \qquad S_4 : y = 0,\ dy = 0,\ \vec{n} = -\vec{j};$$
$$S_5 : y^2 + z^2 = R^2,\ \vec{n_0} = (0, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}).$$

Dakle, traženi integral je $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$, za $I_j = \iint_{S_j}$:

$$I_1 = \int_0^R y\,dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} z\,dz = \frac{R^4}{8},$$
$$I_2 = -\frac{a^2R^2}{4}, \quad I_3 = -\frac{R^4}{8}, \quad I_4 = -\frac{a^2R^2}{4}, \quad I_5 = \frac{a^2R^2}{2},$$

odakle, imamo $I = 0$.

Primenom formule Ostrogradskog, nalazimo

$$I = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = 0.$$

4.2.30. Izračunati $I = \oint_c 8y\sqrt{(1-x^2-z^2)^3}\,dx + xy^3\,dy + \sin z\,dz$, ako se kriva c dobija presekom elipsoida $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ i ravni $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, u prvom oktantu. (a) Direktno; (b) Primenom Stocesove formule.

Rešenje. (a) Neka je $c = c_1 + c_2 + c_3$, gde su:

$$c_1 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\ z = 0,\ dz = 0; \qquad c_2 : \frac{y^2}{4} + z^2 = 1,\ x = 0,\ dx = 0;$$
$$c_3 : x^2 + z^2 = 1,\ y = 0,\ dy = 0.$$

Sada je $I = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{32}{5}$, pri čemu su:

$$I_1 = \oint_{c_1} 8y\sqrt{(1-x^2-z^2)^3}\,dx + xy^3\,dy = -\frac{32}{5},$$
$$I_2 = \oint_{c_2} \sin z\,dz = 1 - \cos 1, \quad I_3 = \oint_{c_3} \sin z\,dz = \cos 1 - 1.$$

(b) Primenom Stocesove formule, imamo

$$I = \oint_c P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(-24yz\sqrt{1-x^2-z^2}\cos\beta\right) dS = -\frac{32}{5},$$

pri čemu je $\overrightarrow{n} = \frac{x}{z}\overrightarrow{i} + \frac{y}{4z}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ vektor spoljne normale površi S: $z = \sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{4}}$.

4.2.31. Izračunati $I = \oint_c x^2\,dx + xy\,dy + xyz\,dz$, ako je kriva c kontura $\triangle ABC$: $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$, (a) Direktno; (b) Primenom Stocesove formule.

Rešenje. (a) Neka je $c = c_1 + c_2 + c_3$, pri čemu su:

$$c_1 : x = a\left(1 - \frac{y}{b}\right),\ z = 0,\ dz = 0; \quad c_2 : y = b\left(1 - \frac{z}{c}\right),\ x = 0,\ dx = 0,$$
$$c_3 : z = c\left(1 - \frac{x}{a}\right),\ y = 0,\ dy = 0.$$

Traženi integral je $I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{ab^2}{6}$, gde su:

$$I_1 = \oint_{c_1} x^2\,dx + xy\,dy = \frac{ab^2}{6} - \frac{a^3}{3},$$
$$I_2 = \oint_{c_2} = 0, \quad I_3 = \oint_{c_3} x^2\,dx = \frac{a^3}{3}.$$

(b) Primenom Stocesove formule, imamo

$$I = \iint_S (xz\cos\alpha - yz\cos\beta + y\cos\gamma)\,dS,$$

gde je S: $z = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$, a $\overrightarrow{n} = \frac{c}{a}\overrightarrow{i} + \frac{c}{b}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ je vektor spoljne normale površi S. Konačno, rešavanjem poslednjeg integrala, nalazimo da je $I = \frac{ab^2}{6}$.

4.2.32. Izračunati krivolinijski integral $I = \oint_c y\,dx + x^2\,dy + z\,dz$, ako je kriva c određena presekom površi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ i $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ za $c > 0$. (a) Direktno; (b) Stocesovom formulom.

Rešenje. (a) Kriva c ima jednačinu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ u ravni $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Kanoničan oblik krive c je

$$\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1,$$

a parametarske jednačine krive c su: $x = \frac{a}{2}\left(1+\sqrt{2}\cos t\right)$, $y = \frac{b}{2}\left(1+\sqrt{2}\sin t\right)$. Traženi integral je $I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{ab\pi}{2}(a-1)$, gde su:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{ab}{4}\int_0^{2\pi}(\sqrt{2}\sin t + 2\sin^2 t)\,dt = -\frac{ab\pi}{2},\\
I_2 &= \frac{a^2b\sqrt{2}}{8}\int_0^{2\pi}(\cos t + 2\sqrt{2}\cos^2 t + 2\cos^3 t)\,dt = \frac{a^2b\pi}{2},\\
I_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

(b) Primenom Stocesove formule, imamo

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_S (2x-1)\cos\gamma dS\\
&= ab\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sin\varphi+\cos\varphi} r(2ar\cos\varphi - 1)\,dr = \frac{ab\pi}{2}(a-1).
\end{aligned}
$$

4.2.33. Izračunati krivolinijski integral $I = \oint_c (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, ako je c luk elipse $x^2+y^2=a^2$, $\frac{y}{a}+\frac{z}{h}=1$.

Rešenje. Primenom Stocesove formule, nalazimo

$$
I = -2\iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)dS = -2a(a+h)\pi,
$$

gde je vektor spoljne normale površi S dat sa

$$
\overrightarrow{n_0} = \left(0, \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right).
$$

4.2.34. Izračunati $I = \oint_c x^3y\,dx + x\left(y^2+z^2\right)^{3/2}\,dy + e^z\,dz$, ako je kriva c presek površi $x = \sqrt{y^2+z^2}$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=2$.

Rešenje. Primenom Stocesove formule, imamo

$$
I = \iint_S \left(-3xz\sqrt{y^2+z^2} + \cos\gamma\left(\left(y^2+z^2\right)^{3/2} - x^3\right)\right) dS.
$$

Odnosno, traženi integral je $I = -3\iint_S xz\sqrt{y^2+z^2}\cos\alpha\,dS = -14$.

4.2.35. Izračunati $I = \oint_c \left(y^2+z^2\right)\,dx + \left(z^2+x^2\right)\,dy + \left(x^2+y^2\right)\,dz$, ako je c kriva data sa $x^2+y^2+z^2 = 2ax$, $x^2+y^2 = 2bx$, pri čemu je $z \geq 0$.

Rešenje. Kriva c ograničava površ S: $z = \sqrt{2ax - x^2 - y^2}$, odakle je $p = \dfrac{a-x}{z}$, $q = -\dfrac{y}{z}$, $dS = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy = \dfrac{a}{z}\,dx\,dy$. Vektor spoljne normale površi S je $\overrightarrow{n_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, odnosno, vektor normale je $\overrightarrow{n_0} = \dfrac{1}{a}(x-a, y, z)$, a traženi integral je

$$I = 2\iint_S ((y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma)dS = 2ab^2\pi.$$

4.2.36. Izračunati $I = \iint_S y^2 z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2 y\,dz\,dx$, ako je S spoljna strana površi, koju obrazuju površi

$$z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

u prvom oktantu: (a) Direktno; (b) Primenom formule Ostrogradskog.

Rešenje. (a) Površ S se sastoji iz sledećih površi:

$$S_1 : z = 0,\ dz = 0,\ I_1 = 0;\ S_2 : x = 0,\ dx = 0,\ I_2 = 0;$$
$$S_3 : y = 0,\ dy = 0,\ I_3 = 0;$$
$$S_4 : x^2 + y^2 = a^2,\ \vec{n} = \left(\frac{x}{y}, 1, 0\right),\ dS = \frac{a}{y}\,dx\,dz;$$
$$S_5 : z = x^2 + y^2,\ dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dx\,dy,$$
$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(-2x, -2y, 1);$$

pri čemu je $I_4 = \dfrac{a^6\pi}{8} + \dfrac{a^6\pi}{16}$ i

$$I_5 = \iint_{S_5} \left(-2x^2 z - 2x^2 y^2 + y^2 z\right)\,dx\,dy = -\frac{a^6\pi}{16}.$$

Polazni integral je $I = \dfrac{a^6\pi}{8}$.

(b) Primenom formule Ostrogradskog, imamo

$$I = \iiint_V \left(z + x^2 + y^2\right)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{x^2+y^2} \left(z + x^2 + y^2\right)\,dz = \frac{a^6\pi}{8}.$$

4.2.37. Izračunati $I = \iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + z^2\,dx\,dy$, ako je S spoljna strana kocke: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$. (a) Direktno; (b) Formulom Ostrogradskog.

Rešenje. (a) Neka je $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$, pri čemu su:

$$S_1 : z = 0,\ I_1 = 0; \quad S_2 : x = 0,\ I_2 = 0;$$

$$S_3 : y = 0,\ I_3 = 0; \quad S_4 : x = 1,\ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{i};$$

$$S_5 : y = 1,\ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{j};\ S_6 : z = 1,\ \overrightarrow{n} = \overrightarrow{k}.$$

Zatim nalazimo da je $I = I_4 + I_5 + I_6 = 3$.

(b) Primenom formule Ostrogradskog, imamo

$$I = 2\iiint_V (x + y + z)\,dx\,dy\,dz = 3.$$

4.2.38. Izračunati $I = \iint_S xy\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + zy\,dx\,dy$, ako je S unutrašnja strana tela ograničenog površima: $x^2+z^2 = y^2$, $0 \le y \le b$, $b > 0$. (a) Direktno; (b) Primenom formule Ostrogradskog.

Rešenje. (a) Ako je $S = S_1 + S_2$, onda je

$$I_1 = \iint_{S_1} = 0,\ I_2 = \iint_{S_2} = -b^4\pi,\ I = I_1 + I_2 = -b^4\pi.$$

4.2.39. Izračunati $I = \oint_c 3y\,dx + 2z\,dy - x\,dz$, ako je c zatvorena kriva koja se dobija u preseku ravni $x+y+z = (3/2)a$ i kocke: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$.

Rešenje. Primenom Stocesove formule, imamo

$$I = \iint_S (-2\cos\alpha + \cos\beta - 3\cos\gamma)dS = -\frac{3a^2}{2}.$$

4.2.40. Izračunati $I = \iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, ako je S spoljna strana sferne površi $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Rešenje. Primenom formule Ostrogradskog, imamo

$$I = 2\iiint_V (x + y + z)\,dx\,dy\,dz = \frac{8R^3\pi}{3}(a + b + c).$$

III GLAVA

VEKTORSKA ANALIZA

1. VEKTORSKE FUNKCIJE

1.1. Uvodne napomene

1° Funkcija $\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j} + a_3 \overrightarrow{k}$, koja preslikava skup realnih brojeva $D \subset R$ u skup trodimenzionalnih vektora V^3 u oznaci

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}(t) = a_1(t)\overrightarrow{i} + a_2(t)\overrightarrow{j} + a_3(t)\overrightarrow{k},$$

naziva se *vektorska funkcija realne promenljive.*

2° *Hodograf vektorske funkcije* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}(t)$ je skup krajnjih tačaka vektora $\overrightarrow{a}$ sa početkom u datoj tački O. Tačka O je pol hodografa.

3° Kaže se da vektorska funkcija $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}(t)$ ima za graničnu vrednost vektor $\overrightarrow{b}$, kad $t \to \alpha$, ako i samo ako:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta(\epsilon) > 0)(\forall t)(0 < |t - \alpha| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |\overrightarrow{a}(t) - \overrightarrow{b}| < \epsilon.$$

Piše se $\lim\limits_{t \to \alpha} \overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{b}$

4° *Izvod funkcije* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}(t)$ u tački t, naziva se vektor

$$\overrightarrow{a}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{a}(t + \Delta t) - \overrightarrow{a}(t)}{\Delta t},$$

ako ovaj limes postoji.

5° *Skalarno polje.* Skalarna funkcija $u(\overrightarrow{r}) = u(x, y, z)$, gde je $\overrightarrow{r}$ vektor položaja tačke $M(x, y, z)$, zajedno sa svojom oblašću definisanosti, je *skalarno polje.*

Vektor $\dfrac{\partial u}{\partial x}\overrightarrow{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\overrightarrow{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\overrightarrow{k}$ je *gradijent skalarnog polja* u tački $M(x, y, z)$, a označava se

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overrightarrow{k}.$$

Izvod u datom pravcu. Neka je l pravac određen jediničnim vektorom $\overrightarrow{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. *Izvod funkcije $u(x,y,z)$ po pravcu l u datoj tački $M(x,y,z)$*, u oznaci $\frac{du}{dl}$, je:

$$\frac{du}{dl} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

6° *Vektorsko polje.* Vektorska funkcija $\overrightarrow{a}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{a}(x,y,z)$, zajedno sa svojom oblašću definisanosti, je *vektorsko polje.*

Vektorska linija vektorskog polja je kriva kod koje je u svakoj tački vektora položaja $\overrightarrow{r}$ tangenta paralelna sa vektorom $\overrightarrow{a}(\overrightarrow{r})$, tj. *vektorske linije* su određene jednačinom

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{dr} = 0.$$

Divergencija vektorske funkcije

$$\overrightarrow{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)),$$

u oznaci $\operatorname{div}\overrightarrow{a}$, je:

$$\operatorname{div}\overrightarrow{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Rotor vektorske funkcije $\overrightarrow{a}$, u oznaci $\operatorname{rot}\overrightarrow{a}$, je:

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix}.$$

1.2. Zadaci

1.2.1. Vektor položaja pokretne tačke u proizvoljnom vremenskom trenutku t dat je sa

$$\vec{r}(t) = -2t^2\vec{i} + \vec{j} + 3t^2\vec{k}.$$

Odrediti: 1° Putanju tačke. 2° Brzinu. 3° Ubrzanje.

Rešenje. 1° Putanja je kriva data jednačinama:

$$x = -2t^2, \quad y = 1, \quad z = 3t^2.$$

2°

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (-4t, 0, 6t).$$

3°

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -4\vec{i} + 6\vec{k}.$$

1.2.2. Data je jednačina kretanja

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j} + ct\,\vec{k}.$$

Odrediti trajektoriju kretanja, brzinu i ubrzanje kretanja, intezitete brzine i ubrzanja u proizvoljnom vremenskom trenutku t.

Rešenje. Trajektorija je zavojnica: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = ct$.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\sin t\,\vec{i} + b\cos t\,\vec{j} + c\,\vec{k},$$

$$\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -a\cos t\,\vec{i} - b\sin t\,\vec{j},$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \quad |\vec{w}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

1.2.3. Dokazati sledeće jednakosti:

1° $\operatorname{grad}(c_1 u + c_2 v) = c_1 \operatorname{grad} u + c_2 \operatorname{grad} v$

2° $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$

3° $\operatorname{grad}\dfrac{u}{v} = \dfrac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$

4° $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u.$

Rešenje. Dokazaćemo jednakost 1°, a ostale se na sličan način dokazuju.

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(c_1 u + c_2 v) &= \left(c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \frac{\partial v}{\partial x}\right)\overrightarrow{i} + \left(c_1 \frac{\partial u}{\partial y} + c_2 \frac{\partial v}{\partial y}\right)\overrightarrow{j} \\ &+ \left(c_1 \frac{\partial u}{\partial z} + c_2 \frac{\partial v}{\partial z}\right)\overrightarrow{k} \\ &= c_1(\operatorname{grad} u) + c_2(\operatorname{grad} v).\end{aligned}$$

1.2.4. Naći $\dfrac{du}{dl}$ u tački $\overrightarrow{r_0} = (1, -1, 2)$, ako je

$$u = xy + xz \quad \text{a} \quad \overrightarrow{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Izračunati $|\operatorname{grad} u|$ u toj tački.

Rešenje. Nalazimo

$$\frac{du}{dl} = (\operatorname{grad} u)\overrightarrow{e} = (y+z)\cos\alpha + x\cos\beta + x\cos\gamma.$$

U tački $\overrightarrow{r_0}(1, -1, 2)$ je

$$\frac{du}{dl} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma,$$

dok je intezitet $|\operatorname{grad} u|$: $|\operatorname{grad} u| = \sqrt{3}$.

1.2.5. Naći izvod funkcije

$$u(\overrightarrow{r}) = x^3 - y^3 + 3z^2 + xyz$$

u tački $M_0(-1, 1, 1)$ po pravcu vektora $\overrightarrow{e} = (-1, 0, 0)$.

Rešenje.

$$\operatorname{grad} u(M_0) = 4\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}.$$

$$\frac{du(M_0)}{dl} = -4.$$

1.2.6. Date su funkcije

$$u_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad u_2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Naći odgovarajuće ekviskalarne površi i gradijente.

Rešenje. Ekviskalarna površ za funkciju u_1 je

$$c_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

gde je $c_1 = u_1(x_0, y_0, z_0)$. Odnosno, ekviskalarna površ je data sa $x^2 + y^2 + z^2 = c$.

$$\operatorname{grad} u_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).$$

$$\operatorname{grad} u_2 = 2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).$$

Ako je $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, vektor položaja proizvoljne tačke $M(x, y, z)$, to je

$$u_1 = u_1(\vec{r}) = |\vec{r}|, \quad u_2 = u_2(\vec{r}) = |\vec{r}|^2,$$

pa je

$$\operatorname{grad} u_1 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad \operatorname{grad} u_2 = 2(\vec{r}) = 2\vec{r}.$$

1.2.7. Odrediti vektorske linije vektorskog polja $\vec{a}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$.

Rešenje. Vektorske linije datog vektorskog polja $\vec{a}$ nalazimo iz jednačine

$$\vec{a} \times d\vec{r} = 0.$$

Naime, imamo sistem diferencijalnih jednačina

$$y\,dz = z\,dy, \quad x\,dz = z\,dx, \quad x\,dy = y\,dx,$$

čija su rešenja

$$y = c_1 z, \quad x = c_2 z, \quad y = c_3 x.$$

Dakle, vektorske linije vektorskog polja $\vec{a}$ su linije preseka ravni

$$y = c_1 z, \quad x = c_2 z, \quad y = c_3 x.$$

1.2.8. Naći oblast definisanosti i ekviskalarne linije skalarnog polja

$$u(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}.$$

Rešenje. Oblast definisanosti funkcije u je

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leq 1.$$

Sledi, oblast definisanosti je skup tačaka koje zadovoljavaju uslov

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leq 1.$$

Ekviskalarne linije nalazimo iz jednakosti

$$c = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2},$$

za $c \geq 0$, odnosno, ekviskalarne linije su

$$\text{(1)} \qquad \frac{x^2}{4 - c^2} + \frac{y^2}{\frac{4 - c^2}{2}} = 1,$$

Za $0 \leq c < 2$, jednačina (1) je elipsa sa poluosama $a^2 = 4 - c^2$, $b^2 = (4 - c^2)/2$. Za $c = 2$, ekviskalarne linije se svode na koordinatni početak.

1.2.9. Dato je skalarno polje $u(x, y, z)$. Dokazati da je u svakoj tački M_0, $\operatorname{grad} u(M_0)$ normalan na ekviskalarnu površ datog polja koja prolazi kroz tačku M_0.

Rešenje. Neka je α ekviskalarna površ polja $u(x, y, z)$ koja prolazi kroz datu tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Naime, površ α ima jednačinu

$$u(x, y, z) = c_0, \ c_0 = u(x_0, y_0, z_0).$$

Neka je

$$\text{(1)} \qquad \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k},$$

proizvoljna kriva koja prolazi kroz $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i leži na datoj ekviskalarnoj površi α, odakle važi jednakost

$$\text{(2)} \qquad u(x(t), y(t), z(t)) = c_0.$$

Diferenciranjem (2) po t, nalazimo

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{grad} u \cdot (\overrightarrow{r})'(t_0) = 0,$$

gde je $\overrightarrow{r}'(t_0)$ tangentni vektor krive (1) u tački M_0. Prema (3) sledi: $\operatorname{grad} u(M_0)$ je normalan na svaku krivu ekviskalarne površi α koje prolaze kroz tačku M_0, a to znači i na svaku ekviskalarnu površ α.

1.2.10. Naći jedinični vektor $\overrightarrow{n_0}$ koji je normalan na površ $F(x, y, z) = 0$ u proizvoljnoj tački $M(x, y, z)$ date površi.

Rešenje. Neka je $u(x, y, z)$ skalarno polje. Ekviskalarne površi u polju u nalazimo iz jednačine

$$u(x, y, z) = c.$$

Jedna mogućnost je $c = 0$, tj.

$$u(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Vektor

$$\operatorname{grad} u(M) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

je normalan na datu ekviskalarnu površ (1) u tački M (prema prethodnom zadatku). Traženi jedinični vektor $\vec{n_0}$ je dat sa

$$\vec{n_0} = \pm\frac{\operatorname{grad} u(M)}{|\operatorname{grad} u(M)|},$$

1.2.11. Dato je skalarno polje

$$u(x, y, z) = \ln\left(x^2 + y^2 - z^2\right).$$

Odrediti oblast definisanosti funkcije u i $\operatorname{grad} u$ u tački $M_0(1, 1, 1)$.

Rešenje. Oblast definisanosti funkcije $u(x, y, z)$ je

$$x^2 + y^2 > z^2.$$

Dakle, oblast definisanosti je skup svih tačaka prostora $\mathbb{R}^3$ koje su spoljašnje za konusnu površ $x^2 + y^2 = z^2$, odnosno, $\mathbb{R}^3$ bez unutrašnjih i bez rubnih tačaka konusne površi $x^2 + y^2 = z^2$.

$$\operatorname{grad} u(M) = \frac{2}{x^2 + y^2 - z^2}(x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}),$$

a u tački M_0 je

$$\operatorname{grad} u(M_0) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}).$$

1.2.12. Neka je $\vec{r} = (x, y, z)$ vektor položaja tačke $M(x, y, z)$ a $\vec{a}$ i $\vec{b}$ konstantni vektori. Naći $\operatorname{grad} u$ i ekviskalarne površi skalarnog polja

$$u = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{r}.$$

Rešenje. Skalarno polje je

$$u = x(a_2b_3 - a_3b_2) + y(b_1a_3 - a_1b_3) + z(a_1b_2 - a_2b_1).$$

$$\operatorname{grad} u = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}.$$

Ekviskalarne površi su paralelne ravni sa normalnim vektorom $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, jer se dobija iz jednakosti

$$\operatorname{grad} u \cdot \overrightarrow{r} = C,$$

ili, u segmentnom obliku

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

gde smo uveli oznake:

$$a = \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{C}, \quad b = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{C}, \quad c = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{C}.$$

1.2.13. Neka je $\overrightarrow{r}$ vektor položaja tačke $M(x, y, z)$. Naći $\operatorname{grad} |\overrightarrow{r}|^3$, $\operatorname{grad} f(|\overrightarrow{r}|)$, gde je $f(r)$ diferencijabilna funkcija.

Rešenje. Kako je $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, to je

$$|\overrightarrow{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

pa je

$$\operatorname{grad} |\overrightarrow{r}|^3 = 3|\overrightarrow{r}| \cdot \overrightarrow{r}, \quad \operatorname{grad} f(r) = \overrightarrow{r_0} \cdot f'(r).$$

1.2.14. Naći $\operatorname{grad} \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{r}}{\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{r}}$, gde je $\overrightarrow{r}$ vektor položaja tačke $M(x, y, z)$ a vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ su konstantni vektori.

Rešenje.

$$\operatorname{grad} \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{r}}{\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{r}} = \frac{\overrightarrow{r} \times \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)}{\left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{r}\right)^2}.$$

1.2.15. Naći izvod skalarnog polja

$$u(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{2}$$

u tački $M(x, y, z)$ u pravcu vektora $\overrightarrow{r}$. Kad je taj izvod jednak $|\operatorname{grad} u|$?

Rešenje.

$$\frac{du}{dr} = \operatorname{grad} u \cdot \overrightarrow{r_0}, \quad \operatorname{grad} u(M) = \frac{x}{2}\overrightarrow{i} + \frac{2y}{3}\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}.$$

Kako je

$$\overrightarrow{r_0} = \frac{\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}),$$

to je

$$\frac{du}{dr} = 2\frac{u(x,y,z)}{|\overrightarrow{r}|}.$$

Ako je $\frac{du}{dr} = |\operatorname{grad} u|$, onda je

$$\operatorname{grad} u \cdot \overrightarrow{r_0} = |\operatorname{grad} u|.$$

Odatle nalazimo da je $\operatorname{grad} u = K \cdot \overrightarrow{r_0}$. Naime, za

$$u(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{2}$$

važi nejednakost $|\operatorname{grad} u| \neq \frac{du}{dr}$.

1.2.16. Dato je skalarno polje

$$u(x,y,z) = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Naći izvod polja u u tački $M(a/\sqrt{2}, 0, c/\sqrt{2})$ u pravcu unutrašnje normale u tački M_0 krive

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \ y = 0.$$

Rešenje. Za funkciju

$$u(x,y,z) = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right),$$

imamo

$$\operatorname{grad} u = -\frac{2x}{a^2}\overrightarrow{i} - \frac{2z}{c^2}\overrightarrow{k}.$$

U tački $M_0\left(a/\sqrt{2}, 0, c/\sqrt{2}\right)$ nalazimo da je

(1) $$\operatorname{grad} u(M_0) = -\frac{\sqrt{2}}{a}\overrightarrow{i} - \frac{\sqrt{2}}{c}\overrightarrow{k}.$$

Jednačina površi je

$$S: \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

pa je

$$\operatorname{grad} S = \frac{2x}{a^2}\vec{i} + \frac{2z}{c^2}\vec{k}.$$

Kako je vektor normale dat sa

$$\vec{n} = \pm\frac{\operatorname{grad} S}{|\operatorname{grad} S|} = \pm\frac{\vec{m}}{A},$$

gde smo uveli sledeće oznake

$$\vec{m} = \frac{x}{a^2}\vec{i} + \frac{z}{c^2}\vec{k} \quad \text{i} \quad A = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}},$$

to je vektor normale u tački $M\left(a/\sqrt{2}, 0, c/\sqrt{2}\right)$

$$\overrightarrow{n_M} = \pm\frac{(c, 0, a)}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Vektor $\overrightarrow{n_M}$ gradi tup ugao sa pozitivnim delom z ose, pa je jedinični vektor normale u tački M dat sa

(2)
$$\overrightarrow{n_0} = -\frac{(c, 0, a)}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Prema (1) i (2), sledi

$$\frac{du(M)}{dl} = \operatorname{grad} u(M) \cdot \overrightarrow{n_0} = \frac{1}{ac}\sqrt{2(a^2 + c^2)}.$$

Tako nalazimo da je

$$\frac{du(M)}{dl} = \frac{\sqrt{2\,(a^2 + c^2)}}{ac}.$$

1.2.17. Naći vektorske linije vektorskog polja:

$$1^\circ \quad \vec{a} = x\,\vec{i} - y\,\vec{j} + z\,\vec{k}, \qquad 2^\circ \quad \vec{a} = \vec{i} + x\,\vec{k}.$$

Rešenje. 1° Vektorske lininije se nalaze iz jednačine $\vec{a} \times d\vec{r} = 0$, odakle dolazimo do sistema diferencijalnih jednačina:

(1)
$$y\,dz = -z\,dy, \qquad z\,dx = x\,dz, \qquad x\,dy + y\,dx = 0.$$

Rešenje sistema (1) je:

$$xy = c_1, \quad z = c_2 x.$$

Tražene vektorske linije su u preseku površi

$$xy = c_1, \quad z = c_2 x.$$

2° Iz $\vec{a} = \vec{i} + x\vec{k}$ i $\vec{a} \times d\vec{r} = 0$, nalazimo da su vektorske linije polja $\vec{a} = \vec{i} + x\vec{k}$ određene presekom površi:

$$y = c_1, \quad z = \frac{x^2}{2} + c_2.$$

1.2.18. Odrediti vektorske linije vektorskog polja

$$\vec{a} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}.$$

Rešenje. Vektorsko polje je

$$\vec{a} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{x^2 + y^2 + z^2},$$

čije su vektorske linije rešenja jednačine $\vec{a} \times d\vec{r} = 0$. Naime, vektorske linije vektorskog polja $\vec{a}$ nalaze se u preseku površi

$$z = c_2 y, \quad x = c_1 y$$

a to su prave

$$\frac{z}{c_2} = \frac{x}{c_1} = y,$$

pri čemu su c_1 i c_2 realne konstante.

1.2.19. Naći divergenciju i rotor vektorskog polja $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

Rešenje.

$$\operatorname{div}\vec{a} = 2(x+y+z), \quad \operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}.$$

U tačkama van ravni $x+y+z=0$ vektorsko polje $\vec{a}$ je bezvrtložno, jer je $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, a $\operatorname{div}\vec{a} \neq 0$ u tačkama van ravni $x+y+z=0$.

U tačkama ravni $x+y+z=0$, polje $\vec{a}$ je potencijalno, jer je $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$ i $\operatorname{div}\vec{a} = 0$.

1.2.20. Neka je $f(r)$ diferencijabilna funkcija a

$$\overrightarrow{c} = x^2\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$$

dati vektor. Naći div $\left(f(r)\overrightarrow{c}\right)$.

Rešenje.

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f(r)\overrightarrow{c}) &= \operatorname{div}\left(f(r)x^2\overrightarrow{i} + f(r)y^2\overrightarrow{j} + f(r)z^2\overrightarrow{k}\right)\\ &= \frac{f'(r)}{r}\left(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{r}\right) + 2f(r)\left(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{l}\right),\end{aligned}$$

pri čemu je $\overrightarrow{l} = (1,1,1)$.

1.2.21. Dato je vektorsko polje

$$\overrightarrow{b} = yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}.$$

Naći rot $\overrightarrow{b}$ i div $\overrightarrow{b}$. Može li važiti jednakost div $\overrightarrow{b} = 0$?

Rešenje. Kako je rot $\overrightarrow{b} = 0$, to je polje $\overrightarrow{b}$ bezvrtložno. Pošto je div $\overrightarrow{b} = 0$, polje $\overrightarrow{b}$ je Laplaceovo u svim tačkama prostora $\mathbb{R}^3$.

1.2.22. Neka je dato vektorsko polje

$$\overrightarrow{a} = f(r)\overrightarrow{r},$$

gde je $f(r)$ diferencijabilna funkcija. Naći $f(r)$ tako da je div $\overrightarrow{a} = 0$.

Rešenje. Primetimo da je div $\overrightarrow{a} = 3f(r) + rf'(r)$. Funkciju $f(r)$ nalazimo iz jednačine

$$3f(r) + rf'(r) = 0. \tag{1}$$

Rešenja jednačine (1) su

$$f(r) = \frac{c}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

Sledi

$$\operatorname{div}\overrightarrow{a} = 0 \quad \text{za} \quad f(r) = \frac{c}{r^3}.$$

1.2.23. Ako je $\overrightarrow{c}$ konstantni vektor a $\overrightarrow{r}$ vektor položaja tačke $M(x, y, z)$, naći:

$$\operatorname{rot}\left(f(r)\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{c}\right) \quad \text{i} \quad \operatorname{rot}\left(\overrightarrow{c} \cdot f(r)\overrightarrow{r}\right).$$

Rešenje. Prema poznatim osobinama rotora, nalazimo da je

$$\operatorname{rot}\left(f(r)\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{c}\right) = \frac{f'(r)}{r}\left(\left(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{r}\right) \times \overrightarrow{r}\right) - 2f(r)\overrightarrow{c}.$$

$$\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{c} f(r)\overrightarrow{r}\right) = -\overrightarrow{c} \times \operatorname{grad} f(r).$$

Sledi

$$\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{c} f(r)\overrightarrow{r}\right) = \frac{f'(r)}{r}\left(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{c}\right).$$

1.2.24. Polje $\overrightarrow{a}$ je potencijalno (u prvom oktantu) ca potencijalom $f(r)$, gde je $f(r)$ dvaput diferencijabilna funkcija. Odrediti $f(r)$ tako da je $\operatorname{div}\overrightarrow{a} = 3$.

Rešenje. Polje $\overrightarrow{a}$ je potencijalno, pa je $\operatorname{grad} f(r) = \overrightarrow{a}$, a onda je $\operatorname{div}\overrightarrow{a} = 3$. Dakle, važi jednakost

$$2rf''(r) + 6f'(r) = 3. \tag{1}$$

Rešenja jednačine (1) su

$$f(r) = \frac{r^2}{8} - \frac{c_1}{r^2} + c_2,$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

1.2.25. Polje $\overrightarrow{a}$ je potencijalno u prvom oktantu sa potencijalom $r^2 f(r)$, gde je $f(r)$ dvaput diferencijabilna funkcija. Odrediti funkciju $f(r)$ tako da je $\overrightarrow{a}$ Laplaceovo polje.

Rešenje. Kako je $\operatorname{grad}\left(r^2 f(r)\right) = a$ i $\operatorname{div}\overrightarrow{a} = 0$, to je

$$f(r) = \frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{r^2}.$$

2. TEORIJA POLJA

2.1. Uvodne napomene

1° Neka je

$$\overrightarrow{a} = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$$

dati vektor. *Fluks vektora* $\overrightarrow{a}$ kroz određenu stranu površi S je površinski integral

$$F = \iint_S \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS,$$

gde je

$$\overrightarrow{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

jedinični vektor normale na S (uzet u pozitivnom smeru). Ako je S spoljašnja strana zatvorene površi koja ograničava telo V, tada važi formula Ostrogradskog.

2° *Rad (cirkulacija) vektora*

$$\overrightarrow{a} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$$

duž krive c je krivolinijski integral

$$R = \int_c \overrightarrow{a}\, d\overrightarrow{r} = \int_c P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Ako je c zatvorena kriva, cirkulacija vektora $\overrightarrow{a}$ duž krive c je:

$$C = \oint_c \overrightarrow{a} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S \overrightarrow{n}\,\mathrm{rot}\,\overrightarrow{a}\, dS.$$

2.2. Zadaci

2.2.1. Dato je vektorsko polje

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + (y-a)\overrightarrow{j}.$$

Naći rad datog polja po prvom luku cikloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Rešenje.

$$R = \int_c \overrightarrow{a}\, d\overrightarrow{r} = a^2 \int_0^{2\pi} (t - t\cos t - \sin t)dt = 2a^2\pi^2.$$

2.2.2. Dato je vektorsko polje

$$\overrightarrow{b} = x\overrightarrow{i} - xy\overrightarrow{j} + yz\overrightarrow{k}.$$

Naći cirkulaciju vektora $\overrightarrow{b}$ duž krive c:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x + y + z = a.$$

Rešenje.

$$C = \oint_c \overrightarrow{b}\, d\overrightarrow{r} = a^3\pi.$$

2.2.3. Naći cirkulaciju vektora

$$\overrightarrow{a} = \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$

duž konture koja ograničava oblast D:

$$D = \{(x,y)|\, r^2 \le x^2 + y^2 \le R^2, \quad \frac{x\sqrt{3}}{3} \le y \le x\}.$$

Rešenje. Oblast D je ogeraničena krivom $c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$, gde su krive c_i:

$$c_1 : y = \frac{x\sqrt{3}}{3}, \quad x \in \left[\frac{r\sqrt{3}}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right].$$

$$c_2 : x^2 + y^2 + R^2, \quad y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

$$c_3 : y = x, \quad x \in \left[\frac{R\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}\right].$$

$$c_4 : x^2 + y^2 = r^2.$$

Cirkulacija vektora $\overrightarrow{a}$ je

$$C = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -\frac{\pi}{12} \ln \frac{R}{r}.$$

Primenom Greenove formule, imamo

$$C = -\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2}\, dx\, dy = -\int_{\pi/6}^{\pi/4} d\varphi \int_r^R \frac{dr}{r} = -\frac{\pi}{12} \ln \frac{R}{r}.$$

2.2.4. Izračunati rad sile

$$F = z^2 \overrightarrow{i} + x^2 \overrightarrow{j} + y^2 \overrightarrow{k}$$

duž krive c određene presekom površi:

$$x^2 + y^2 = ay, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0$$

u prvom oktantu, od tačke $A(0, a, 0)$ do tačke $B(0, 0, a)$.

Rešenje.

$$R = \int_c \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \frac{11}{30} a^3 - \frac{a^3 \pi}{8}.$$

Zadatak se može rešiti i primenom Stocesove formule, tako što krivu c zatvaramo krivom c_1: $y^2 + z^2 = a^2$ u ravni $x = 0$, po kojoj je rad $R = (-2/3)a^3$. Naime, nalazimo da je

$$R = 2 \iint_D \left(x + y + \frac{xy}{z}\right) dx\, dy = \frac{11a^3}{30} - \frac{a^3 \pi}{8}$$

gde je oblast D:

$$x^2 + y^2 = ay, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

2.2.5. Izračunati cirkulaciju vektorskog polja

$$\overrightarrow{a} = y \cos x\, \overrightarrow{i} + \left(x^2 + \sin x\right) \overrightarrow{j}$$

duž elipse

$$(1) \qquad 9x^2 + 4y^2 - 16y + 54x + 61 = 0.$$

Rešenje. Jednačina elipse (1) u kanoničnom obliku je

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

Cirkulacija vektora $\overrightarrow{a}$ duž krive (1) je

$$C = \oint_c \overrightarrow{a} \cdot d\overrightarrow{r} = 2 \iint_D x\,dx\,dy,$$

gde je D oblast ograničena elipsom (1). Prelaskom na polarne koordinate, nalazimo da je $C = -36\pi$.

2.2.6. Neka je dato vektorsko polje

$$\overrightarrow{a} = (x - y + az)\overrightarrow{i} + (-x + y + bz)\overrightarrow{j} + (cx + y + 2z)\overrightarrow{k}.$$

Naći skalare a, b i c, tako da vektorsko polje $\overrightarrow{a}$ bude poterncijalno a zatim naći njegov potencijal.

Rešenje. Polje $\overrightarrow{a}$ je potencijalno ako je $\operatorname{rot}\overrightarrow{a} = 0$. Tako nalazimo

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{a} = (1 - b)\overrightarrow{i} + (a - c)\overrightarrow{j}.$$

Iz uslova da je polje potencijalno, nalazimo $b = 1$, $a = c$. Neka je $u(x, y, z)$ njegov potencijal. Tada je $u(x, y, z) = C$ i

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} (x - y + az)\,dx + \int_{y_0}^{y} (-x_0 + y + z)\,dy + \int_{z_0}^{z} (ax_0 + y_0 + 2z)\,dz,$$

jer je $u(x, y, z) = \operatorname{grad}\overrightarrow{a}$. Tražena funkcija je

$$u(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 - xy + axz + zy + C.$$

2.2.7. Dato je vektorsko polje

$$\overrightarrow{a} = f(xy)\left(x^2y^2 + y\right)\overrightarrow{i} + f(xy)x\overrightarrow{j}.$$

Odrediti diferencijabilnu funkciju $f(xy)$ tako da dato polje bude potencijalno u oblasti $x > 0$, $y > 0$, a zatim naći potencijal datog polja.

Rešenje. Polje $\overrightarrow{a}$ je potencijalno ako je rot $\overrightarrow{a} = 0$, odakle nalazimo da je

$$f(xy) = C\left(x^2y^2\right)^{-1}.$$

Za $C = 1$ imamo

$$f(xy) = \left(x^2y^2\right)^{-1}$$

a polje je

$$\overrightarrow{a} = \frac{1}{x^2y^2}\left(\left(x^2y^2 + y\right)\overrightarrow{i} + \frac{1}{xy^2}\overrightarrow{j}\right).$$

Potencijal polja $\overrightarrow{a}$ je funkcija $u(x,y) = x - \dfrac{1}{xy}$, odnosno

$$u(x,y) = x - \frac{1}{xy} + C.$$

2.2.8. Dato je vektorsko polje

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}.$$

Odrediti fluks vektorskog polja $\overrightarrow{a}$ kroz spoljašnju stranu zatvorene površi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \qquad z = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Rešenje. Presek površi je kriva data sa:

$$x^2 + y^2 = 2, \qquad z = \sqrt{2}.$$

$$S = S_1 + S_2; \quad S_1 : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}; \quad dS_1 = \left(\frac{2}{z}\right) dx\,dy,$$

$$S_2 : z = \sqrt{x^2+y^2}; \quad dS_2 = \sqrt{2}\,dx\,dy.$$

Fluks vektorskog polja $\overrightarrow{a}$ je:

$$P = \iint_D \left(\frac{x^2+y^2}{z} + z\right) dx\,dy = 8\pi(2-\sqrt{2}),$$

gde je oblast D: $x^2 + y^2 = 2$.

2.2.9. Naći fluks vektorskog polja

$$\overrightarrow{a} = \frac{x}{3}\overrightarrow{i} + \frac{2}{3}y\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$$

kroz spoljašnu stranu površi S:

$$x^2 + y^2 = ax, \quad x \geq 0; \quad z = 0, \quad z = 1.$$

Rešenje.

$$P = \iint_S \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{r}\, dS = \iiint_V \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 2z\right) dx\, dy\, dz = \frac{a^2\pi}{2}.$$

2.2.10. Dato je vektorsko polje

$$\overrightarrow{a} = x^2 \overrightarrow{i} + xy^2 \overrightarrow{j} + \left(y^2 - x^2\right) \overrightarrow{k}.$$

Naći fluks vektora $\overrightarrow{b} = \operatorname{rot} \overrightarrow{a}$ kroz spoljašnu stranu paraboloida

$$x^2 + y^2 = z, \quad z = 0, \quad z = h\,(h > 0).$$

(a) Direktno. (b) Primenom formule Ostrogradskog.

Rešenje. (a) Vektor spoljašne normale površi S: $x^2 + y^2 = z$ je $\overrightarrow{n_0} = (2x, 2y, -1)$. Vektor $\overrightarrow{b}$ je

$$\overrightarrow{b} = \operatorname{rot} \overrightarrow{a} = 2y \overrightarrow{i} + 2x \overrightarrow{j} + y^2 \overrightarrow{k},$$

a fluks vektora $\overrightarrow{b}$ kroz površ S je

$$P = \iint_S \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{n_0}\, dS = -\frac{h^2\pi}{4}.$$

(b)Da bismo primenili formulu Ostrogradskog, zatvorimo površ S sa S_1: $z = h$, po kojoj je fluks vektora $\overrightarrow{b}$ jednak

$$P_1 = \iint_{S_1} = \frac{h^2\pi}{4}.$$

Primenom formule Ostrogradskog, imamo

$$P_2 = \iint_S \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iiint_V 0\, dx\, dy\, dz = 0$$

pa je fluks

$$P = 0 - \frac{h^2\pi}{4} = -\frac{h^2\pi}{4}.$$

2.2.11. Naći fluks vektora

$$\overrightarrow{a} = xy\overrightarrow{i} + y^3\overrightarrow{j} + \left(x^2 - zy\right)\overrightarrow{k}$$

kroz spoljnu stranu cilindra

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{i} \quad 0 \leq z \leq h.$$

Rešenje. Uvođenjem polarnih koordinata; $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, i zatvaranjem površi S sa S_1: $z = 0$ i S_2: $z = h$, nalazimo da je fluks vektora $\overrightarrow{a}$:

$$P = 3\iiint_V y^2\,dx\,dy\,dz + h\iint_{D_1} y\,dx\,dy = \frac{ab^3h}{16}(3\pi - 8)$$

gde je D_1:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

a oblast V je unutrašnjost tela ograničenog površima S, S_1 i S_2.

2.2.12. Neka je S unutrašnja strana tela

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad x^2 + y^2 + z = 2, \quad z \geq 0.$$

Naći fluks vektorskog polja

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j} - z\overrightarrow{k}$$

po površi S: (a) Direktno. (b) Formulom Ostrogradskog.

Rešenje. (a) $S = S_1 + S_2$, gde je S_1: $x^2 + y^2 = 2 - z$; $\overrightarrow{n_0} = -(2x\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$.

$$S_2 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \overrightarrow{n_0} = -(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} - z\overrightarrow{k}).$$

$$P_1 = \iint_{S_1} \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{n_0}\,dS_1 = 0,$$

$$P_2 = \iint_{S_2} \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{n_0}\,dS_2 = -\frac{5\pi}{3}.$$

(b) Primenom formule Ostrogradskog, imamo

$$P = -\iiint_V \operatorname{div}\overrightarrow{a}\,dx\,dy\,dz = -2\iiint_V dx\,dy\,dz = -\frac{5\pi}{3}.$$

2.2.13. Dato je telo V ograničeno površima:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad x^2 + y^2 = z.$$

Naći fluks vektorskog polja

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

po spoljnoj strani S tela V (a) Direktno, (b) Formulom Ostrogradskog.

Rešenje. (a)

$$P = P_1 + P_2 = 4\pi(\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(8\sqrt{2} - 7\right).$$

2.2.14. Dato je vektorsko polje $\overrightarrow{a} = r^3\left(\overrightarrow{c} \times \operatorname{grad} r\right)$ za $\overrightarrow{c} = (1, 1, -1)$. Naći fluks vektorskog polja $\overrightarrow{a}$ kroz spoljašnu stranu tela ograničenog površima:

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad x > 0, \quad 0 \leq z \leq h, \quad y \geq 0.$$

(a) Direktno. (b) Formulom Ostrogradskog.

Rešenje. (a) $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, pri čemu je:

$$S_1 : x^2 + y^2 = z^2, \quad \overrightarrow{n_0} = \frac{1}{z\sqrt{2}}(x, y, z), \quad dS_1 = \sqrt{2}\, dx\, dy.$$

$$S_2 : z = h, \quad \overrightarrow{n_0} = \overrightarrow{k}, \quad dS_2 = dx\, dy.$$

$$S_3 : x = 0, \quad \overrightarrow{n_0} = -\overrightarrow{i} \quad dS_3 = dy\, dz.$$

$$S_4 : y = 0, \quad \overrightarrow{n_0} = -\overrightarrow{j}, \quad dS_4 = dx\, dz.$$

Kako je $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ to je

$$\overrightarrow{a} = r^3 \cdot \left(\overrightarrow{c} \times \operatorname{grad} r\right) = r^2(z + y)\overrightarrow{i} - r^2(z + x)\overrightarrow{j} + r^2(y - x)\overrightarrow{k}.$$

Fluks vektora $\overrightarrow{a}$ je sada $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0$, jer je:

$$P_1 = \iint_{S_1} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n_0}\, dS_1 = 0,$$

$$P_2 = \iint_{S_2} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n_0}\, dS_2 = 0,$$

$$P_3 = \iint_{S_3} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n_0}\, dS_3 = -\frac{5h^5}{12},$$

$$P_4 = \iint_{S_4} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n_0}\, dS_4 = \frac{5h^5}{12}.$$

(b)

$$P = \iint_S \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n_0}\, dS = \iiint_V 0\, dx\, dy\, dz = 0.$$

IV GLAVA

LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

1. LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

1.1. Osnovni pojmovi

1° Kompleksna funkcija f realne promenljive t je original ako ispunjava sledeće uslove:

1° funkcija f je, zajedno sa svojim izvodima do n tog reda, neprekidna;

2° $f(t) = 0$ za $t < 0$;

3° postoje pozitivni brojevi M i s takvi da je

$$|f(t)| < M \cdot e^{st}\,(t > 0).$$

2° Laplaceova transformacija $L(f(t))$ (slika funkcije f) definisana je sa

$$L(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt, \quad p \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

3° Konvolucija neprekidnih funkcija f i g, u oznaci $f*g$, je integral

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\, du.$$

4° Neka je $t \mapsto f(t)$ original čia je slika $F(p)$. Tada je

$$L^{-1}(F(p)) = f(t)$$

inverzna Laplaceova transformacija .

Primedba. Problem određivanja inverzne Laplaceove transformacije rešava se metodama kompleksne analize, koje mi ne izučavamo. Ovde ćemo dati primere određivanja inverzne Laplaceove transformacije nekih racionalnih funkcija, koje se najčešće sreću u praksi.

1.2. Zadaci

1.2.1. Polazeći od definicije Laplaceove transformacije, odrediti slike sledećih originala:

$$
\begin{array}{llllll}
1^\circ & f(t) = e^{-at}, \quad a > 0; & 2^\circ & f(t) = e^{at}, \quad a > 0; & & \\
3^\circ & f(t) = t^\alpha, \quad \alpha > -1; & & & & \\
4^\circ & f(t) = t^n, \quad n \in \mathbb{N}; & 5^\circ & f(t) = \sin at; & 6^\circ & f(t) = \cos at.
\end{array}
$$

Rešenje. 1°

$$
\begin{aligned}
L(e^{-at}) = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-at}\, e^{pt}\, dt &= \int_0^{+\infty} e^{-t(a+p)}\, dt \\
&= \frac{1}{p+a}, \quad p > -a.
\end{aligned}
$$

2°

$$
L(e^{at}) = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t(p-a)}\, dt = \frac{1}{p-a}, \quad p > a.
$$

3°

$$
L(t^\alpha) = F(p) = \int_0^{+\infty} t^\alpha\, e^{-pt}\, dt.
$$

Smenom: $pt = u$ nalazimo $dt = \dfrac{du}{p}$ za $u \in [0, +\infty)$,

$$
\begin{aligned}
L(t^\alpha) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{p}\right)^\alpha e^{-u}\, \frac{du}{p} = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha\, e^{-u}\, du = \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}},
\end{aligned}
$$

gde je

$$
\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt
$$

gama funkcija.

4°

$$
L(t^n) = \int_0^{+\infty} t^n\, e^{-pt}\, dt = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}.
$$

Međutim, koristeći osobinu gama funkcije

$$
\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)
$$

dobijamo

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n!.$$

Sledi

$$L(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Za $n = 0$, imamo $L(1) = \dfrac{1}{p}$.

5°

$$L(\sin at) = \int_0^{+\infty} \sin at\, e^{-pt}\, dt.$$

Parcijalnom integracijom: $u = \sin at$, $du = a\cos at\, dt$, $v = -\frac{1}{p}e^{-pt}$, nalazimo

$$L(\sin at) = \frac{a}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos at\, dt,$$

odakle, metodom parcijalne integracije: $u = \cos at$ i $v = -\dfrac{1}{p}e^{-pt}$, nalazimo

$$L(\sin at) = \frac{a}{p^2+a^2}.$$

6°

$$L(\cos at) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos at\, dt,$$

odakle, kao u prethodnom primeru, nalazimo

$$L(\cos at) = \frac{p}{p^2+a^2}.$$

Primedba 1. Laplaceova transformacija originala $f(t) = e^{at}$, $f(t) = \sin at$ i $f(t) = \cos at$, mogu se odrediti i na drugi način (videti **Matematika II**).

1.2.2. Orediti Laplaceove transformacije sledećih funkcija:

1° $f(t) = \sin^2 t$; 2° $f(t) = \cos^2 t$; 3° $f(t) = \cos^4 t$;

4° $f(t) = \sin^4 t$; 5° $f(t) = \sin 3t\cos 2t$;

6° $f(t) = e^{-2t} + 3\sin 2t + 5\cos t - 6$; 7° $f(t) = \operatorname{sh} at$;

8° $f(t) = \operatorname{ch} at$.

Rešenje. 1° Koristeći Teoremu o linearnosti, imamo:

$$
\begin{aligned}
L(\sin^2 t) &= L\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(L(1) - L(\cos 2t)\right) = \frac{2}{p(p^2+4)}.
\end{aligned}
$$

2° Koristeći pomenutu Teoremu o linearnosti, nalazimo:

$$
L(\cos^2 t) = \frac{1}{2}L(1+\cos 2t) = \frac{p^2+2}{p(p^2+4)}.
$$

3°

$$
\begin{aligned}
L(\cos^4 t) &= L\left(\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2\right) = \\
&= \frac{1}{4}L(1+2\cos 2t+\cos^2 2t) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p}+\frac{2p}{p^2+4}\right)+\frac{1}{8}L(1+\cos 4t) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{3}{p}+\frac{4p}{p^2+4}+\frac{p}{p^2+16}\right).
\end{aligned}
$$

4°

$$
L(\sin^4 t) = L\left(\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{p}-\frac{4p}{p^2+4}+\frac{p}{p^2+16}\right).
$$

5°

$$
L(\sin 3t\cos 2t) = \frac{1}{2}L(\sin 5t+\sin t) = \frac{3p^2+13}{(p^2+25)(p^2+1)}.
$$

6°

$$
L(f(t)) = L(e^{-2t}+3\sin 2t+5\cos t-6) = \frac{1}{p+2}+\frac{6}{p^2+4}+\frac{5p}{p^2+1}-\frac{6}{p}.
$$

7°

$$
L(\operatorname{sh} at) = \frac{1}{2}L\left(e^{at}-e^{-at}\right) = \frac{a}{p^2-a^2}.
$$

8°

$$
L(\operatorname{ch} at) = \frac{1}{2}L(e^{at}+e^{-at}) = \frac{p}{p^2-a^2}.
$$

1.2.3. Odrediti Laplaceove transformacije sledećih funkcija:

1° $f(t) = e^{2t}\cos 3t$; 2° $f(t) = e^{-2t}\sin 3t$;

3° $f(t) = e^{at}\cos bt$; 4° $f(t) = e^{at}\sin bt$;

5° $f(t) = e^{-t}\cos 2t\cos 3t$.

Rešenje. 1° Na osnovu Teoreme 3 (videti **Matematika II**),

$$L(e^{at}f(t)) = F(p-a), \quad \text{ako je} \quad F(p) = L(f(t)), \quad a \in C,$$

sledi

$$L(e^{2t}\cos 3t) = \frac{p-2}{(p-2)^2+9},$$

jer je $L(\cos 3t) = \dfrac{p}{p^2+9}$.

2°

$$L(e^{-2t}\sin 3t) = \frac{3}{(p+2)^2+9}.$$

3°

$$L(e^{at}\cos bt) = \frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}.$$

4°

$$L(e^{at}\sin bt) = \frac{b}{(p-a)^2+b^2}.$$

5°

$$L(e^{-t}\cos 2t\cos 3t) = \frac{1}{2}\left(L(e^{-t}\cos 5t) + L(e^{-t}\cos t)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{(p+1)^2+25} + \frac{p+1}{(p+1)^2+1}\right).$$

1.2.4. Odrediti Laplaceove transformacije sledećih funkcija:

1° $f(t) = t^2 \sin at$; 2° $f(t) = t^2 \operatorname{sh} t$; 3° $f(t) = t^n e^{-t}$;
4° $f(t) = t\cos at$; 5° $f(t) = (t+2)^2 e^t$.

Rešenje. 1° Na osnovu teoreme o diferenciranju slike (**Matematika II**), sledi

$$L(t^2\sin at) = (-1)^2\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)'' = \left(\frac{-2ap}{(p^2+a^2)^2}\right)' =$$
$$= \frac{2a(3p^2-a^2)}{(p^2+a^2)^3}.$$

2°

$$L(t^2 \operatorname{sh} t) = (-1)^2\left(\frac{1}{p^2-1}\right)'' =$$
$$= \left(\frac{-2p}{(p^2-1)^2}\right)' = \frac{2(3p^2+1)}{(p^2-1)^3}.$$

3°

$$L(t^n e^{-t}) = (-1)^n\left(\frac{1}{p+1}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(p+1)^{n+1}}.$$

4°

$$L(t\cos at) = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}.$$

5°

$$L((t+2)^2 e^t) = L(t^2 e^t) + 4L(te^t) + 4L(e^t) = \frac{2}{(p-1)^3} - \frac{4}{(p-1)^2} + \frac{4}{p-1}.$$

1.2.5. Odrediti Laplaceovu transformaciju funkcije $f(t) = |\sin t|$.

Rešenje. Kako je

$$|\sin t| = \begin{cases} \sin t, & t \in [0, \pi] \\ -\sin t, & t \in [\pi, 2\pi], \end{cases}$$

to je

$$L(|\sin t|) = F(p) = \frac{1}{1 - e^{-\pi p}} \int_0^\pi e^{-pt} \sin t \, dt.$$

Primenom parcijalne integracije $u = \sin t$, $du = \cos t\, dt$, $v = -\frac{1}{p}e^{-pt}$, na integral

$$I = \int_0^\pi e^{-pt} \sin t \, dt$$

imamo

$$I = -\frac{1}{p}e^{-pt} \sin t|_0^\pi + \frac{1}{p}\int_0^\pi e^{-pt} \cos t \, dt,$$

odakle, primenom parcijalne integracije : $u = \cos t$, $du = -\sin t\, dt$, $v = -\frac{1}{p}e^{-pt}$, nalazimo

$$\left(1 + \frac{1}{p^2}\right) I = \frac{1}{p^2}e^{-\pi p} + \frac{1}{p^2},$$

odnosno

$$I = \frac{1 + e^{-\pi p}}{p^2 + 1}.$$

Sledi

$$L(|\sin t|) = \frac{1 + e^{-\pi p}}{1 - e^{-\pi p}} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}.$$

1.2.6. Odrediti Laplaceovu transformaciju funkcije $f(t) = \frac{1}{2}(\sin t + |\sin t|)$.

Rešenje. Po Teoremi 6 (**Matematika II**):

$$L(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-\omega p}} \int_0^\omega f(t) e^{-pt} \, dt$$

gde je $f(t)$ periodična funkcija sa osnovnom periodom ω, sledi

$$
\begin{aligned}
&L(\frac{1}{2}(\sin t + |\sin t|)) = \frac{1}{2}(L(\sin t) + L(|\sin t|)) + \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}\right) = \\
&= \frac{1}{(p^2+1)(1-e^{-p\pi})}.
\end{aligned}
$$

1.2.7. Odrediti Laplaceovu transformaciju sledećih funkcija:

$$1^\circ \quad f(t) = \frac{\sin t}{t}; \quad 2^\circ \quad f(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t}; \quad 3^\circ \quad f(t) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{t}.$$

Rešenje. Po Teoremi o integraciji slike (Teorema 8, **Matematika II**)

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_p^{+\infty} F(p)\,dp$$

gde je $L(f(t)) = F(p)$, sledi:

1°

$$L\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_p^{+\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

2°

$$L\left(\frac{\operatorname{sh} t}{t}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{p+1}{p-1}.$$

3°

$$L\left(\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}\right) = \int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-b}\right)dp = \ln\frac{p-b}{p-a}.$$

1.2.8. Odrediti Laplaceovu transformaciju funkcije $f(t) = \int_0^t (u^2 - \cos 2u)\,du$.

Rešenje. *Prvi način: Kako je*

$$f(t) = \int_0^t (u^2 - \cos 2u)\,du = \frac{t^3}{3} - \frac{1}{2}\sin 2t$$

to je

$$L(f(t)) = L\left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{2}{p^4} - \frac{1}{p^2+4}.$$

Drugi način: Po teoremi o integraciji originala, sledi

$$L(f(t)) = \frac{1}{p}\left(\frac{2}{p^3} - \frac{p}{p^2+4}\right) = \frac{2}{p^4} - \frac{1}{p^2+4}.$$

1.2.9. Odrediti Laplaceovu transormaciju funkcija:

$$1^\circ \quad f(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sh} u}{u}\, du; \quad 2^\circ \quad f(t) = \int_0^t \frac{e^{au} - e^{bu}}{u}\, du.$$

Rešenje. 1° U zadatku 3.1.7 našli smo

$$L\left(\frac{\operatorname{sh} t}{t}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{p+1}{p-1}.$$

Primenom teoreme o integraciji originala (**Matematika II**), sledi

$$L(f(t)) = \frac{1}{2p} \ln \frac{p+1}{p-1}.$$

2°

$$L(f(t) = \frac{1}{p} \ln \frac{p-b}{p-a}.$$

Laplaceova transformacija nekih elementarnih funkcija data je u Tablici 1.

Tablica 1

Redni broj	Original	Slika
1	$t^\alpha \, (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$\frac{t^n}{n!} e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^{n+1}}$
4	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
5	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
6	$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
7	$\operatorname{ch} at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
8	$\sin^2 at$	$\frac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$
9	$\cos^2 at$	$\frac{p^2+2a^2}{p(p^2+4a^2)}$
10	$\sin at \cos bt$	$\frac{a((p^2+a^2-b^2)}{(p^2+(a-b)^2)(p^2+(a+b)^2)}$

Redni broj	Original	Slika
11	$\cos at \cos bt$	$\dfrac{p(p^2+a^2+b^2)}{(p^2+(a-b)^2)(p^2+(a+b)^2)}$
12	$\sin at \sin bt$	$\dfrac{2abp}{(p^2+(a-b)^2)(p^2+(a+b)^2)}$
13	$e^{-at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(p+a)^2+b^2}$
14	$e^{-at}\cos bt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
15	$\dfrac{t^n}{n!}\sin at$	$\dfrac{(p+ai)^{n+1}-(p-ai)^{n+1}}{2i(p^2+a^2)^{n+1}}$
16	$\dfrac{t^n}{n!}\cos at$	$\dfrac{(p+ai)^{n+1}+(p-ai)^{n+1}}{2(p^2+a^2)^{n+1}}$
17	$e^{-at}\,\mathrm{sh}\, bt$	$\dfrac{b}{(p+a)^2-b^2}$
18	$e^{-at}\,\mathrm{ch}\, bt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$
19	$\dfrac{t^n}{n!}\,\mathrm{sh}\, at$	$\dfrac{(p+a)^{n+1}-(p-a)^{n+1}}{2(p^2-a^2)^{n+1}}$
20	$\dfrac{t^n}{n!}\,\mathrm{ch}\, at$	$\dfrac{(p+a)^{n+1}+(p-a)^{n+1}}{2(p^2-a^2)^{n+1}}$

INVERZNA LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

1.3. Zadaci

1.3.1. Odrediti funkciju $f(t)$ ako je:

$$1^\circ \quad F(p)=\frac{p}{(p+1)(p-2)(p^2-3p+2)};$$

$$2^\circ \quad F(p)=\frac{p^2+p}{(p^2+3p-4)(p^2+p-6)};$$

$$3^\circ \quad F(p)=\frac{p^2+p+1}{(p-3)(p^2+3p+2)};$$

$$4^\circ \quad F(p)=\frac{p^2-4}{p(p-1)(p^2+5p+4)};$$

$$5^\circ \quad F(p)=\frac{4}{p^2(p-3)(p^2-6p+9)};$$
$$6^\circ \quad F(p)=\frac{p^2-p-6}{p^2(p-3)^2(p^2-2p-3)};$$
$$7^\circ \quad F(p)=\frac{p^2-1}{(p^2+9)(p^2+1)}; \quad 8^\circ \quad F(p)=\frac{p+1}{(p-1)(p^2+4)};$$
$$9^\circ \quad F(p)=\frac{p^2+2}{(p+2)^2(p^2+4)}; \quad 10^\circ \quad F(p)=\frac{p^2+1}{(p+1)^2(p^2+4)};$$
$$11^\circ \quad F(p)=\frac{10}{(p^2+4)^2(p^2+1)^2}.$$

Rešenje.

1°

$$f(t)=L^{-1}(F(p))=\frac{1}{6}\left(e^{2t}+e^{-2t}-e^t-e^{-t}\right).$$

2°

$$F(p)=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p+4}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{p+3},$$

gde konstante A, B, C i D, zadovoljavaju uslov

$$\begin{aligned}p^2+p=&A(p+4)(p^2+p+6)+B(p-1)(p^2+p+6)\\&+C(p-1)(p+4)(p+3)+D(p-1)(p+4)(p-2).\end{aligned}$$

Naime, nalazimo da je: $A=-\frac{7}{55}$, $B=-\frac{38}{55}$, $C=\frac{3}{11}$, $D=\frac{6}{11}$. Tada je

$$f(t)=L^{-1}(F(p))=-\frac{7}{55}e^t-\frac{38}{55}e^{-4t}+\frac{3}{11}e^{2t}+\frac{6}{11}e^{-3t}.$$

3°

$$\begin{aligned}f(t)&=L^{-1}(F(p))=L^{-1}\left(\frac{13}{20}\cdot\frac{1}{p-3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{3}{5}\frac{1}{p+2}\right)=\\&=\frac{13}{20}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{5}e^{-2t}.\end{aligned}$$

4°

$$\begin{aligned}f(t)&=L^{-1}(F(p))=L^{-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{10}\frac{1}{p-1}-\frac{5}{6}\frac{1}{p+1}-\frac{1}{15}\frac{1}{p+4}\right)=\\&=1-\frac{1}{10}e^t-\frac{5}{6}e^{-t}-\frac{1}{15}e^{-4t}.\end{aligned}$$

5°

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}(F(p)) \\ &= L^{-1}\left(-\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-3} - \frac{2}{(p-3)^2} + \frac{3}{(p-3)^3}\right) = \\ &= -1 - t + e^{3t}\left(1 + 2t + \frac{3}{2}t^2\right). \end{aligned}$$

6°

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}(F(p)) \\ &= L^{-1}\left(\frac{p+2}{p^2(p-3)^2((p+1)}\right) = \\ &= L^{-1}\left(-\frac{22}{189}\frac{1}{p} - \frac{2}{27}\frac{1}{p^2} - \frac{10}{189}\frac{1}{p+1}\right) \\ &+ L^{-1}\left(\frac{22}{189}\frac{1}{p-3} - \frac{152}{189}\frac{1}{(p-3)^2}\right) = \\ &= -\frac{22}{189} - \frac{2}{27}t \\ &- \frac{10}{189}e^{-t} + \frac{22}{189}e^{3t} + \frac{152}{189}te^{3t}. \end{aligned}$$

7°

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}(F(p)) = L^{-1}\left(\frac{5}{4}\frac{1}{p^2+9} - \frac{1}{4}\frac{1}{p^2+1}\right) = \\ &= \frac{5}{12}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin t. \end{aligned}$$

8°

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}(F(p)) = L^{-1}\left(\frac{2}{5}\frac{1}{p-1} - \frac{1}{5}\frac{2p-3}{p^2+4}\right) = \\ &= \frac{2}{5}e^{t} - \frac{2}{5}\cos 2t + \frac{3}{10}\sin 2t. \end{aligned}$$

9°

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}(F(p)) = L^{-1}\left(-\frac{1}{8}\frac{1}{p+2} + \frac{3}{4}\frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{8}\frac{p}{(p^2+4)}\right) = \\ &= -\frac{1}{8}e^{-2t} + \frac{3}{4}te^{-2t} + \frac{1}{8}\cos 2t. \end{aligned}$$

10°

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}(F(p)) = \\ &= L^{-1}\left(-\frac{6}{25}\frac{1}{p+1} + \frac{2}{5}\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{25}\frac{6p+9}{p^2+4}\right) = \\ &= -\frac{6}{25}e^{-t} + \frac{2}{5}te^{-t} + \frac{6}{25}\cos 2t + \frac{9}{50}\sin 2t. \end{aligned}$$

11°

$$f(t) = L^{-1}(F(p)) = \frac{5}{72}(\sin 2t - 2t\cos 2t) +$$
$$+ \frac{40}{27}(\cos 2t - \cos t) + \frac{5}{9}(\sin t - t\cos t).$$

1.3.2. Odrediti funkciju $f(t)$ ako je njena Laplaceova transformacija:

$$1^\circ \quad F(p) = \frac{1}{(p-1)^2}; \quad 2^\circ \quad F(p) = \frac{4p}{(p^2+1)^2};$$
$$3^\circ \quad F(p) = \frac{p}{(p^2-4)^2}; \quad 4^\circ \quad F(p) = \frac{2p+3}{(p^2+4p+13)^2}.$$

Rešenje.

$$1^\circ \quad f(t) = te^t; \quad 2^\circ \quad f(t) = 2t\sin t;$$
$$3^\circ \quad f(t) = \frac{1}{4}t\operatorname{sh} t;$$
$$4^\circ \quad f(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}(t\cos 3t - \sin 3t).$$

1.3.3. Odrediti funkciju $f(t)$ ako je njena Laplaceova transformacija:

$$1^\circ \quad \frac{2}{p^2(p+1)}; \quad 2^\circ \quad \frac{2}{p^2(p^2+4)}; \quad 3^\circ \quad \frac{2}{p^3(p-2)}.$$

Rešenje. Na osnovu teoreme o konvoluciji, sledi

$$1^\circ \quad f(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{p^2(p+1)}\right) = g(t) * h(t),$$

pri čemu je

$$g(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) = t, \quad \text{i} \quad h(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) = e^{-t}.$$

Tako nalazimo da je

$$f(t) = g(t) * h(t) = \int_0^t g(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = \int_0^t (t-\tau)e^{-\tau}\,d\tau = t - 1 + e^{-t}.$$

$$2^\circ \quad f(t) = t * \sin 2t = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t.$$

$$3^\circ \quad f(t) = \frac{1}{2}t^2 * e^{2t}.$$

Inverzna Laplaceova transformacija nekih elementarnih funkcija data je u Tablici 2.

Tablica 2

Redni broj	Slika	Original
1	$\dfrac{1}{p-a}$	e^{at}
2	$\dfrac{1}{1+ap}$	$\dfrac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}$
3	$\dfrac{1}{p(p-a)}$	$\dfrac{1}{a}\left(e^{at}-1\right)$
4	$\dfrac{1}{(p-a)^2}$	te^{at}
5	$\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
6	$\dfrac{b+cp}{p(p-a)}$	$-\frac{b}{a}+\left(c+\frac{b}{a}\right)e^{at}$
7	$\dfrac{p}{(p-a)^2}$	$(1+at)e^{at}$
8	$\dfrac{p}{(p-a)(p-b)}$	$\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$
9	$\dfrac{b+cp}{p^2+a^2}$	$c\cdot\cos at+\frac{b}{a}\sin at$
10	$\dfrac{1}{p^2(p-a)}$	$\dfrac{1}{a^2}\left(e^{at}-1-at\right)$
11	$\dfrac{1}{(p-a)(p-b)^2}$	$\dfrac{e^{at}-(1+(a-b)t)e^{bt}}{(a-b)^2}$
12	$\dfrac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}$	$\dfrac{e^{at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{e^{bt}}{(a-b)(c-b)}+\dfrac{e^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
13	$\dfrac{1}{(p-a)^3}$	$\dfrac{1}{2}t^2e^{at}$
14	$\dfrac{p}{(p-a)(p-b)^2}$	$\dfrac{ae^{at}-(a+b(a-b)t)e^{bt}}{(a-b)^2}$
15	$\dfrac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$	$\dfrac{ae^{at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{be^{bt}}{(a-b)((c-b)}+\dfrac{ce^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
16	$\dfrac{p}{(p-a)^3}$	$\left(t+\frac{1}{2}at^2\right)e^{at}$
17	$\dfrac{1}{p(p^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2}(1-\cos at)$
18	$\dfrac{1}{(p+b)(p^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(e^{-bt}-\cos at+\frac{b}{a}\sin at\right)$
19	$\dfrac{(p+b)^2}{p(p^2+a^2)}$	$\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\cos at+2b\sin at$

Redni broj	Slika	Original
20	$\frac{p}{p^4+a^4}$	$\frac{1}{a^2}\sin\frac{at}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sh}\,\frac{at}{\sqrt{2}}$
21	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
22	$\frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{\sin bt}{b}-\frac{\sin at}{a}\right)$
23	$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin at$
24	$\frac{1}{p(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{a^4}\left(1-\cos at-\frac{at}{2}\sin at\right)$
25	$\frac{1}{(p^2+a^2)^3}$	$\frac{1}{8a^5}\left((3-a^2t^2)\sin at - 3at\cos at\right)$
26	$\frac{p}{(p^2+a^2)^3}$	$\frac{t}{8a^3}(\sin at - at\cos at)$

1.4 PRIMENA LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE NA REŠAVANJE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Ovde ćemo izložiti primenu Laplaceove transformacije na rešavanje linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima.

1.4.1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'+y=e^{2t}$ ako je $y(0)=0$.

Rešenje. Neka je $L(y(t))=Y$, tada je

$$L(y'+y)=L(e^{2t})$$

odnosno

$$pY+Y=\frac{1}{p-2},\quad \text{odakle je}\quad Y=\frac{1}{(p+1)(p-2)}.$$

Traženo rešenje polazne diferencijalne jednačine je

$$y(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{(p+1)(p-2)}\right)=\frac{1}{3}\left(e^{2t}-e^{-t}\right).$$

1.4.2. Odrediti ono rešenje diferencijalne jednačine $y''+y'-2y=te^{-t}$, koje zadovoljava uslove $y(0)=y'(0)=0$.

Rešenje. Neka je $L(y(t))=Y$. Kako je

$$L\left(y''+y'-2y\right)=L\left(te^{-t}\right),$$

to je

$$Y=\frac{1}{(p-1)(p+2)(p+1)^2}.$$

Traženo rešenje je

$$y(t) = L^{-1}(Y) = L^{-1}\left(\frac{1}{12}\frac{1}{p-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+2} + \frac{1}{4}\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{12}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t}.$$

1.4.3. Odrediti ono rešenje diferencijalne jednačine $y'' + y = -2\sin t$, koje zadovoljava uslove $y(\pi/2) = 0$ i $y'(\pi/2) = 1$.

Rešenje. Neka je $y(0) = A$, $y'(0) = B$, $L(y(t)) = Y$. Tada je

$$Y = -\frac{2}{(p^2+1)^2} + \frac{Ap}{p^2+1} + \frac{B}{p^2+1},$$

odakle sledi

$$y(t) = 1 * t\cos t + A\cos t + B\sin t.$$

Uzimajući u obzir polazne uslove $y(\pi/2) = 0$ i $y'(\pi/2) = 1$, nalazimo da je

$$y(t) = \left(t + 1 - \frac{\pi}{2}\right)\cos t.$$

1.4.4. Naći rešenje diferencijalne jednačine $y^{iv} + y'' = te^{-t}$, ako je $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

Rešenje.

$$Y = \frac{1}{p^2(p^2+1)(p+1)^2} + \frac{1}{p(p^2+1)},$$

odakle sledi

$$y(t) = t + \frac{1}{2}\sin t - \cos t - 1 + \frac{e^{-t}}{2}(3+t).$$

1.4.5. Odrediti rešenje diferencijalne jednačine $y''' - y' = \cos t$, ako je $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Rešenje.

$$Y = \frac{1}{(p^2+1)(p^2-1)},$$

odakle sledi

$$y(t) = L^{-1}(Y) = -\frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^t.$$

1.4.6. Odrediti ono rešenje diferencijalne jednačine $y''' - y' = 1 + t^2$, koje zadovoljava uslove $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

Rešenje.

$$Y = \frac{1}{p^2(p^2-1)} + \frac{2}{p^4(p^2-1)} + \frac{p}{p^2-1} + \frac{1}{p^2-1},$$

odakle sledi

$$y_1(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{p^2(p^2-1)}\right) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) - t,$$

$$y_2(t) = L^{-1}\left(\frac{2}{p^4(p^2-1)}\right) = -\frac{1}{3}t^3 - 2t + e^t - e^{-t},$$

$$y_3(t) = L^{-1}\left(\frac{p}{p^2-1} + \frac{1}{p^2-1}\right) = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t.$$

Traženo rešenje je

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = -3t + \frac{3}{2}(e^t - e^{-t}) - \frac{1}{3}t^3 + \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t.$$

V GLAVA

VEROVATNOĆA

1. VEROVATNOĆA

1.1. Uvodne napomene

Definicija 1. Neka Ω predstavlja skup svih mogućih ishoda ω jednog eksperimenta. Obično se Ω naziva *prostor elementarnih događaja*. Skup Ω može biti konačan, prebrojiv ili neprebrojiv. *Slučajni događaj* ili prosto *događaj* definiše se kao neki podskup od Ω. Događaj $A\,(\subset \Omega)$ se realizuje ako i samo ako se realizuje neki ishod ω koji pripada podskupu A. Skup svih događaja koji odgovaraju jednom eksperimentu nazivamo *polje događaja* i označavamo sa $\mathcal{F}$. Polje događaja uvek sadrži $\Omega\,(\in \mathcal{F})$ (*izvestan* ili *siguran događaj* i $\emptyset\,(\in \mathcal{F})$ (*nemoguć događaj*).

Ako je skup Ω konačan sa $N = N(\Omega)$ elemenata (broj različitih ishoda – elementarnih događaja), tada je polje događaja partitivni skup $P(\Omega)$ i sadrži 2^N elemenata.

Definicija 2. Ako realizacija događaja A povlači realizaciju događaja B kažemo da događaj A *implicira* događaj B, što sa stanovišta teorije skupova znači $A \subset B$.

Primetimo da $A \subset B$ i $B \subset C$ povlači $A \subset C$. Takođe, za svaki događaj A važi $\emptyset \subset A$ i $A \subset \Omega$.

Ako je $A \subset B$ i $B \subset A$ kažemo da su događaji *ekvivalentni* i pišemo $A = B$.

Proizvod dva događaja A i B, u oznaci AB, je događaj koji se realizuje ako i samo ako se realizuju oba događaja A i B. Dakle, proizvod događaja je presek skupova A i B, tj. $AB = A \cap B$. Ako su A i B disjunkni skupovi, tj. $A \cap B = \emptyset$ za događaje A i B kažemo da su *nesaglasni* ili da se *isključuju*.

Zbir dva događaja A i B, u oznaci $A \cup B$, predstavlja događaj koji se realizuje ako se realizuje bar jedan od događaja A i B. Ako su A i B nesaglasni događaji, umesto $A \cup B$ pišemo $A + B$.

Razlikom događaja A i B, u oznaci $A - B$ ili $A \setminus B$, naziva se događaj koji odgovara razlici skupova A i B.

Za događaj A postoji *suprotan* (*komplementaran*) događaj $\bar{A}$ koji se realizuje ako se događaj A ne realizuje, tj. $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

Definicije zbira i proizvoda događaja mogu se proširiti na konačno mnogo događaja $\vec{A}$ kao

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_1 A_2 \cdots A_n.$$

Ako je $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ umesto oznake $\cup$ koristimo oznaku Σ, tj. za zbir događaja imamo

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

Događaji $\vec{A}$ obrazuju *potpun sistem događaja* ako je

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega.$$

Posebno su interesantni oni potpuni sistemi događaja koji se međusobno isključuju $A_i A_j = \emptyset$, za koji je, dakle,

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega.$$

Definicija 3. Funkcija $P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ naziva se *verovatnoća* ako ispunjava uslove:

(1) Za svako $A \in \mathcal{F}$ imamo $P(A) \geq 0$ (*nenegativnost*);

(2) $P(\Omega) = 1$ (*normiranost*);

(3) Za disjunktne događaje $A_1, A_2, \ldots$ $(A_i A_j = \emptyset,\ i \neq j)$ važi

$$P\Big(\sum_k A_k\Big) = \sum_k P(A_k) \qquad (\textit{aditivnost}).$$

Na osnovu definicije verovatnoće imamo

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Ako je $A \cap B = \emptyset$, tada iz poslednje jednkosti sleduje

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \qquad \text{i} \qquad P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

U slučaju da je Ω konačan skup, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$, svakom elementarnom događaju ω_k dodeljuje se *"težina"* $P(\omega_k)$, tj. *verovatnoća ishoda* ω_k tako da je

$$0 \le P(\omega_k) \le 1 \qquad \text{i} \qquad P(\omega_1) + \cdots + P(\omega_N) = 1.$$

Tada, za svaki događaj $A \in \mathcal{F}$, imamo $P(A) = \sum_{\{k|\omega_k \in A\}} P(\omega_k)$.

Kod tzv. *jednako verovatnih* elementarnih događaja uzima se

$$P(\omega_1) = \cdots = P(\omega_N) = \frac{1}{N},$$

tako da je za svaki događaj $A \in \mathcal{F}$,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N},$$

gde je $N(A)$ broj elementarnih događaja koji čine događaj A. Poslednja formula definiše tzv. *klasični* način zadavanja verovatnoće.

Trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ određuje tzv. *prostor verovatnoća*.

Definicija 4. *Uslovna verovatnoća* događaja B pod uslovom koji dovodi do realizacije događaja A $(P(A) > 0)$ definiše se kao

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

U slučaju klasičnog načina zadavanja verovatnoće imamo

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}, \qquad P(AB) = \frac{N(AB)}{N(\Omega)},$$

pa je

$$P(B \mid A) = \frac{N(AB)}{N(A)}.$$

Iz definicije uslovne verovatnoće sleduje

$$P(A \mid A) = 1, \quad P(\emptyset \mid A) = 0, \quad P(B \mid A) = 1 \ (A \subset B),$$

kao i osobina aditivnosti $P(B_1 + B_2 \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A)$.

Pomoću uslovnih verovatnoća može se iskazati verovatnoća proizvoda dva događaja u obliku

$$P(AB) = P(B \mid A)P(A) = P(A \mid B)P(B).$$

Neka disjunktni događaji $\vec{A}$ čine tzv. razbijanje sigurnog događaja Ω, tj. neka je

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega.$$

Tada važi *formula potpune verovatnoće*

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \mid A_k)P(A_k),$$

kao i *Bayesova formula*

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(B \mid A_k)P(A_k)} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Događaji A i B su *nezavisni* ako je $P(AB) = P(A)P(B)$.

1.2. Zadaci

1.2.1. Opisati skup elementarnih događaja i polje događaja u eksperimentu bacanja novčića. Šta je skup svih elementarnih događaja pri bacanju n novčića istovremeno? Kolika je verovatnoća pojave *grba* tačno dva puta pri $n = 3$?

Rešenje. U eksperimentu bacanje novčića možemo da uočimo ishode posle prvog bacanja:

– pojava *grba* na gornjoj strani (G),

– pojava *pisma* na gornjoj strani (P),

tako da je $\Omega = \{G, P\}$. Oba ova ishoda, tj. događaji G i P, su slučajni jer se ne mogu predvideti unapred. Međutim, može se videti iz uslova eksperimenta da su ova dva slučajna događaja ravnopravna, tj. jednako verovatna, tako da je $P(G) = P(P) = 1/2$.

Svi događaji se mogu okarakterisati kao elementi partitivnog skupa od Ω. Dakle, polje događaja je

$$\mathcal{F} = P(\Omega) = \{\emptyset, G, P, \Omega\}.$$

Ovde možemo uočiti četiri događaja:
$\emptyset$ (ne pojavljivanje ni *grba*, niti *pisma* – nemoguć događaj),
G (pojava *grba*),
P (pojava *pisma*),
Ω (pojava *grba* ili *pisma* – siguran događaj).

Skup svih elementarnih događaja pri n-tostrukom bacanju novčića, ili bacanju n novčića istovremeno, je

$$\Omega = \{\omega \mid \omega = (a_1, \ldots, a_n), a_i = \mathrm{G} \text{ ili } a_i = \mathrm{P}\}.$$

Broj elemenata u skupu Ω je $N(\Omega) = 2^n$ (varijacije sa ponavljanjem n-te klase od dva elementa). Verovatnoća svakog od ovih elementarnih događaja je $P(\omega) = 2^{-n}$.

Na primer, za $n = 3$ imamo skup

$$\Omega = \{(G, G, G), (G, G, P), (G, P, G), (G, P, P), (P, G, G), (P, G, P), (P, P, G), \\ (P, P, P)\},$$

sa brojem elemenata $N(\Omega) = 2^3 = 8$. Tako događaj A koji predstavlja pojavu *grba* tačno dva puta, može se iskazati na sledeći način

$$A = \{(G, G, P), (G, P, G), (P, G, G)\}.$$

Njegova verovatnoća je

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}.$$

1.2.2. Opisati prostor elementarnih događaja u eksperimentu bacanja kocke, čije su stranice označene redom brojevima $1, 2, \ldots, 6$. Kolika je verovatnoća pojave parnog broja?

Rešenje. U ovom eksperimentu imamo šest elementarnih događaja $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$, gde ω_k označava elementarni događaj – *pojava broja k* na gornjoj strani kocke posle njenog bacanja. Ovde je

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}.$$

Uslovi eksperimenta mogu biti takvi da su svi elementarni događaji jednako verovatni, tj. $P(\omega_k) = 1/6$.

Događaj *pojava parnog broja* je dat sa $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ za koji je $P(B) = 3/6 = 1/2$.

1.2.3. Izvodi se eksperiment tako što se najpre baca novčić, i ako padne *grb* tada se baca kocka (sa stranicama označenim ciframa od 1 do 6), a ako padne *pismo* tada se ponovo baca novčić. Opisati prostor elementarnih događaja u ovom eksperimentu.

Rešenje. Prostor elementarnih događaja u ovom eksperimentu je

$$\Omega = \{(\mathrm{G}, \omega_1), (\mathrm{G}, \omega_2), (\mathrm{G}, \omega_3), (\mathrm{G}, \omega_4), (\mathrm{G}, \omega_5), (\mathrm{G}, \omega_6), (\mathrm{P}, \mathrm{G}), (\mathrm{P}, \mathrm{P})\},$$

gde su korišćene oznake iz prethodna dva zadatka.

1.2.4. Ako su A i B događaji, uprostititi izraze

(a) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$; (b) $(A+B)B + A(AB)$.

Rešenje. (a) Kako je

$$\begin{aligned}(A+B)(A+\overline{B}) &= (A+B)A + (A+B)\overline{B}\\ &= AA + BA + A\overline{B} + B\overline{B}\\ &= A + AB + A\overline{B} + \emptyset\\ &= A + A(B+\overline{B})\\ &= A + A\Omega\\ &= A + A\\ &= A,\end{aligned}$$

imamo

$$(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B) = A(\overline{A}+B) = A\overline{A} + AB = \emptyset + AB = AB.$$

(b) U ovom slučaju imamo

$$\begin{aligned}(A+B)B + A(AB) &= AB + BB + (AA)B\\ &= AB + B + AB\\ &= AB + \Omega B\\ &= (A+\Omega)B\\ &= \Omega B\\ &= B.\end{aligned}$$

1.2.5. Izvesti formulu potpune verovatnoće.

Rešenje. Neka disjunktni događaji $\vec{A}$ čine razbijanje sigurnog događaja Ω, tj. neka je

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega.$$

Tada za događaj B važi

$$B = B\Omega = BA_1 + BA_2 + \cdots + BA_n,$$

pa je

$$P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + \cdots + P(BA_n).$$

Kako je $P(BA_k) = P(B \mid A_k)P(A_k)$ dobijamo formulu potpune verovatnoće

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \mid A_k)P(A_k).$$

1.2.6. Posmatraju se porodice sa dva deteta i traži se verovatnoća da su oba deteta muška, pod uslovom da je: (a) starije dete muško; (b) bar jedno od deteta muško.

Rešenje. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{\text{MM}, \text{MŽ}, \text{ŽM}, \text{ŽŽ}\}$, gde MŽ označava da je starije dete muško, a mlađe žensko, itd. Pretpostavimo da su svi elementarni događaji jednako verovatni tako da je

$$P(\text{MM}) = P(\text{MŽ}) = P(\text{ŽM}) = P(\text{ŽŽ}) = \frac{1}{4}.$$

Sa A označimo događaj da je *starije dete muško*, a sa B da je *mlađe dete muško*, tj. $A = \{\text{MM}, \text{MŽ}\}$ i $B = \{\text{MM}, \text{ŽM}\}$.

Tada $A \cup B$ predstavlja događaj: *bar jedno dete je muško*, a AB da su *oba deteta muška*. Očigledno, ovde je $A \cup B = \{\text{MM}, \text{MŽ}, \text{ŽM}\}$ i $AB = \{\text{MM}\}$, sa verovatnoćama $P(A \cup B) = 3/4$ i $P(AB) = 1/4$.

Naš zadatak je da odredimo uslovne verovatnoće (a) $P(AB \mid A)$ i (b) $P(AB \mid A \cup B)$. Dakle, imamo

$$P(AB \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2},$$

$$P(AB \mid A \cup B) = \frac{P(AB)}{P(A \cup B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

1.2.7. Date su dve kutije. Prva kutija sadrži a_1 belih i b_1 crnih kuglica a druga kutija a_2 belih i b_2 crnih kuglica.

Iz prve kutije nasumice je izvučena jedna kuglica i prebačena u drugu kutiju. Zatim je iz druge kutije izvučena jedna kuglica. Ako je ta izvučena kuglica bele boje, kolika je verovatnoća da je kuglica koja je prebačena iz prve u drugu kutiju bila crna?

Rešenje. Neka je A događaj: prebačena kuglica je crna, B događaj: prebačena kuglica je bela, C je događaj: izvučena kuglica je bela.

Po Baysovoj formuli je

$$
P(A|C) = \frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)}. \tag{1}
$$

U prvoj kutiji imama ukupno $a_1 + b_2$ kuglica, od kojih je b_1 crnih. Zato je $P(A) = \dfrac{b_1}{a_1 + b_1}$. Slično je $P(B) = \dfrac{a_1}{a_1 + b_1}$.

$P(C|A)$ je verovatnoća da je iz druge kutije izvučena bela kuglica, pod uslovom da je prebačena kuglica bila crna. Kako u tom slučaju imama ukupno $a_1 + b_1 + 1$ kuglica, od kojih su a_2 bele, biće

$$
P(C|A) = \frac{a_2}{a_2 + b_2 + 1}.
$$

Sliňo je

$$
P(C|B) = \frac{a_2 + 1}{a_2 + b_2 + 1}.
$$

Otuda je, prema (1),

$$
\begin{aligned}
P(A|C) &= \frac{\frac{b_1}{a_1+b_1}\,\frac{a_2}{a_2+b_2+1}}{\frac{b_1 a_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2+1)} + \frac{a_1(a_2+1)}{(a_1+b_1)(a_2+b_2+1)}} \\
&= \frac{b_1 a_2}{b_1 a_2 + a_1 a_2 + a_1}.
\end{aligned}
$$

1.2.8. U tri kutije nalaze se bele i crne kuglice. U prvoj kutiji su 3 bele i 1 crna, u drugoj 6 belih i 4 crne i u trećoj 9 belih i 1 crna.

Iz slučajno izabrane kutije nasumice je izabrana kuglica. Naći verovatnoću da je ona bela.

Rešenje. Neka je B događaj da je izvučena bela kuglica i A_i $(i = 1, 2, 3)$ događaj da je izabrana i–ta kutija. Tada je

$$
P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10} = \frac{3}{4}.
$$

1.2.9. Baca se novčić. Šta je verovatnije: 1° da se u četiri bacanja tri puta pojavi grb ili da se u osam bacanja pet puta pojavi grb; 2°

da se u četiri bacanja grb pojavi ne manje od tri puta ili da se u osam bacanja grb pojavi ne manje od pet puta?

Rešenje. 1° Ako je $P_n(m)$ verovatnoca da se u n bacanja grb pojavi m puta imamo, po formuli za binomnu raspodelu,

$$P_4(3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad P_8(5) = \binom{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}.$$

Prema tome, $P_4(3) > P_8(5)$.

2° Ako sa $B_n(m)$ označimo verovatnoću da se u n bacanja grb pojavi ne manje od m puta, onda je

$$B_n(m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \cdots + P_n(n),$$

pa slično kao u 1° , nalazimo

$$B_4(3) = \frac{5}{16}, \quad B_8(5) = \frac{93}{256}.$$

Sledi $B_8(5) > B_4(3)$.

1.2.10. Novčić se baca n puta. Odrediti verovatnoću :

1° da se grb pojavi neparan broj puta;

2° da se grb pojavi ne manje od k i ne više od m puta.

Rešenje. 1° Rezultat: $\frac{1}{2}$; 2° $2^{-n}\sum_{i=k}^{m}\binom{n}{i}$.

1.2.11. Društvo od 8 osoba raspoređeno je nasumice u tri grupe. Kolika je verovatnoća da se u prvoj grupi nađe tačno 3 osobe?

Rešenje. Neka je A_k događaj da se k–ta osoba nalazi u prvoj grupi i A događaj da se u prvoj grupi nalazi tačno 3 osobe. Ako smatramo da su osobe raspoređivane jedna po jedna u grupe imamo Bernoullievu šemu. Dakle, za broj osoba u prvoj grupi važi binomni zakon raspodele pri čemu je $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$, pa je

$$P(A) = \binom{8}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^5.$$

2. SLUČAJNE VELIČINE

2.1. Uvodne napomene

Neka je α sluăjna veličina i x prizvoljan realan broj.

Definicija 1. Verovatnoća događaja da slučajna veličina α ima vrednosti manje od x, označava se sa $F(x)$, jeste funkcija rapodele verovatnoće slučajne veličine α, tj.

$$F(x) = P(\alpha < x).$$

Definicija 2. Slučajna veličina α je diskretna slučajna veličina ako uzima najviše prebrojivo mnogo vrednosti.

Definicija 3. Slučajna veličina α je neprekidna slučajna veličina ako, pod izvesnim uslovima, uzima neprebrojivo mnogo vrednosti.

Funkcija raspodele verovatnoće diskretne slučajne veličine α, koja uzima vrednosti x_i sa verovatnoćama p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, tj.

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

je

$$F(x) = \sum p_k = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x \leq x_1 \\ \sum_{k=1}^{n} p_k, & \text{za} \quad x_1 < x \leq x_n \\ 1, & \text{za} \quad x > x_n. \end{cases}$$

Funkcija raspodele verovatnoće neprekidne slučajne veličine α je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt,$$

gde je f nenegativna funkcija definisana za sve vrednosti $x \in (-\infty, \infty)$. Pomenuta funkcija f je gustina rapodele verovatnoće slučajne veličine α.

Definicija 4. Matematičko očekivanje $M[\alpha]$ diskretne slučajajne veličine α je

$$M[\alpha] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k,$$

pri čemu se pretpostavlja da poslednji red apsolutno konvergira.

Matematičko očekivanje neprekidne slučajne veličine α, čija je gustina raspodele verovatnoće f, je

$$M[\alpha] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx,$$

pod pretpostavkom da je poslednji integral konvergentan.

Definicija 5. Disperzija $D[\alpha]$ diskretne slučajne veličine α je

$$D[\alpha] = \sum_{k=1}^{+\infty} (x_k - M[\alpha])^2 p_k.$$

Disperzija $D[\alpha]$ neprekidne slučajne veličine α, čija je gustina raspodele verovatnoće f, definiše se sa:

$$D[\alpha] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[\alpha])^2\, f(x)\, dx.$$

Definicija 6. Broj $\sqrt{D[\alpha]}$, označava se sa σ_α, je srednje kvadratno odstupanje slučajne veličine α.

2.2. Zadaci

2.2.1. Ako je gustina raspodele verovatnoće slučajne veličine α data sa:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos x, & |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

odrediti disperziju i srednje kvadratno odstupanje slučajne veličine α.

Rešenje. Kako je

$$M[\alpha] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cos x\, dx = 0,$$

to je

$$D[\alpha] = M[\alpha^2] = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx = \frac{\pi^2 - 8}{4},$$

i

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 - 8}.$$

2.2.2. Verovatnoća da slučajna veličina α uzme vrednost k ($k = 1, 2, \dots$) je

$$p_k = pq^{k-1} \quad (p + q = 1) \quad \text{(Pascalova raspodela).}$$

Odrediti matematičko očekivanje i disperziju slučajne veličine α.

Rešenje.

$$M[\alpha] = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p_k = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} =$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = pS,$$

gde je

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}.$$

Polazimo od geometrijskog reda $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ čija je suma

(1) $$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k, \quad \text{konvergentan za} \quad |q| < 1.$$

Diferenciranjem (1) po q, imamo

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1},$$

odakle sledi

$$S = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}.$$

Tako nalazimo da je

$$M[\alpha] = p \cdot S = \frac{1}{p}.$$

$$D[\alpha] = M[\alpha^2] - M[\alpha]^2 = M[\alpha^2] - M[\alpha] + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}.$$

Kako je

$$M[\alpha^2] - M[\alpha] = M[\alpha(\alpha - 1)] = pq \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2},$$

i

$$\frac{2}{(1-q)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2},$$

to je

$$M[\alpha^2] - M[\alpha] = \frac{2q}{p^2},$$

a disperzija

$$D[\alpha] = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Srednje kvadratno odstupanje je

$$\sigma_\alpha = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

2.2.3. Odrediti matematičko očekivanje, disperziju i srednje kvadratno odstupanje, slučajne veličine α sa binomnom raspodelom.

Rešenje. Funkcija raspodele verovatnoće slučajne veličine α sa binomnom raspodelom je

$$F(x) = P(\alpha < x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sum_{k<x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, & 0 < x \le n \\ 1, & x > n. \end{cases}$$

Matematičko očekivanje je

$$\begin{aligned} M[\alpha] &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1} = np. \end{aligned}$$

$$D[\alpha] = M[\alpha^2] - M[\alpha]^2 = M[\alpha^2] - n^2p^2,$$

jer je

$$\begin{aligned} M[\alpha^2] &= M[\alpha^2] - M[\alpha] + M[\alpha] = M[\alpha(\alpha-1)] + np = \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + np = \\ &= p^2 n(n-1) + np. \end{aligned}$$

Sledi

$$D[\alpha] = (n^2 - n)p^2 - n^2p^2 + np = npq.$$

Srednje kvadratno odstupanje je

$$\sigma_\alpha = \sqrt{npq}.$$

2.2.4. Data je funkcija raspodele

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 2 \\ a + b \arcsin \frac{x}{2}, & -2 \leq x < 2 \\ 0, & x < -2. \end{cases}$$

Odrediti konstante a i b i gustinu raspodele.

Rešenje. Konstante a i b su rešenja sistema jednačina:

$$\lim_{x \to -2-0} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 2-0} F(x) = 1,$$

tj.

$$a - b\frac{\pi}{2} = 0, \qquad a + b\frac{\pi}{2} = 1.$$

Rešenja su $a = \dfrac{1}{2}$ i $b = \dfrac{1}{\pi}$. Sledi

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{2}, & -2 \leq x < 2 \\ 0, & x < -2. \end{cases}$$

Gustina raspodele je

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 2 \\ \frac{1}{\pi\sqrt{2 - x^2}}, & -2 \leq x < 2 \\ 0, & x < -2. \end{cases}$$

2.2.5. Slučajna veličina α uzima vrednosti iz skupa nenegativnih celih brojeva sa verovatnoćama

$$P(\alpha = k) = p_k = \frac{M}{(a+k)(a+k+1)(a+k+2)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Odrediti a ako je $M[\alpha] = A$.

Rešenje. Primetimo da je

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(a+k)(a+k+1)(a+k+2)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{A_1}{a+k} + \frac{A_2}{a+k+1} + \frac{A_3}{a+k+2} \right) \\
&= -\frac{a}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}\right) + (a+1)\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+n+1}\right) \\
&- \frac{a+2}{2}\left(\frac{1}{a+n+1} + \frac{1}{a+n+2}\right).
\end{aligned}$$

Sledi

$$M[\alpha] = M \lim_{n\to\infty} S_n = M\frac{1}{2(a+1)}.$$

$$A = M\frac{1}{2(a+1)}, \quad \text{odakle je} \quad a = \frac{M-2A}{2A}.$$

2.2.6. Data je funkcija raspodele slučajne veličine α

$$F(x) = a + b \arctan \frac{x}{2} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{(Cauchyeva raspodela).}$$

Odrediti: 1° konstante a i b; 2° gustinu raspodele.

Rešenje. 1° Iz uslova

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,$$

nalazimo da je $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{1}{\pi}$.

2° Gustina raspodele je

$$f(x) = F'(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4+x^2}.$$

2.2.7. Neprekidna slučajna veličina α ima funkciju raspodele F definisanu sa:

$$F(x) = \frac{2ax}{a^2+x^2} \quad (0 \le x \le a; \quad a > 0).$$

Odrediti matematičko očekivanje i disperziju slučajne veličine α.

Rešenje. Gustina raspodele je

$$f(x) = F'(x) = \frac{2a(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^2},$$

pa je

$$M[\alpha] = \int_0^a xf(x)dx = a(1-\ln 2), \quad D[\alpha] = a^2((\pi-3)-(1-\ln 2)^2).$$

2.2.8. Data je funkcija gustine raspodele verovatnoće (za Maxwell–Boltzmannovu raspodelu)

$$f(x) = \frac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \quad (x > 0), \quad f(x) = 0 \quad (x \le 0),$$

pri čemu je $\alpha > 0$. Odrediti matematičko očekivanje i disperziju.

Rešenje.

$$M[\alpha] = \int_0^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}\,dx = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}.$$

$$D[\alpha]^2 = \frac{\alpha^2}{\pi}\frac{3\pi-8}{2}.$$

2.2.9. Odrediti matematičko očekivanje i disperziju za slučajnu veličinu α sa Poissonovom raspodelom.

Rešenje.

$$M[\alpha] = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$$

$$D[\alpha] = M[\alpha^2] - M^2[\alpha] = \lambda.$$

2.2.10. Odrediti matematičko očekivanje i disperziju neprekidne slučajne veličine α, koja ima Gaussovu raspodelu.

Rešenje.

$$M[\alpha] = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}}\,dx = a.$$

$$D[\alpha] = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}}\,dx = \delta^2.$$

2.2.11. Gustina raspodele slučajne veličine α jednaka je:

$$f(x) = ax^2e^{-kx}, \quad k > 0, \quad 0 \le x < +\infty.$$

(a) Naći koeficijent a.
(b) Naći funkciju raspodele slučajne veličine α.
(c) Naći $P\left(0 < \alpha < \frac{1}{k}\right)$.

Rešenje.

(a) Koeficijent a nalazimo iz uslova:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1,$$

odnosno

$$a\int_0^{+\infty} x^2 e^{-kx}\,dx = 1. \tag{1}$$

Naime, prema (1), nalazimo $a = \dfrac{k^3}{2}$.

(b) Funkcija raspodele slučajne veličine α je:

$$F(x) = \frac{k^3}{2}\int_0^x t^2 e^{-kt}\,dt,$$

odakle, primenom parcijalne integracije $u = t^2$ i $v = \frac{1}{k}e^{-kt}$, nalazimo

$$F(x) = \frac{k^3}{2}\left(-\frac{1}{k}x^2 e^{-kx} + \frac{2}{k}\int_0^x te^{-kt}\,dt\right)$$

(primenom parcijalne integracije $u = t$ i $v = -\dfrac{1}{k}e^{-kt}$)

$$= 1 - \frac{e^{-kx}}{2}(k^2x^2 + 2kx + 2).$$

(c)

$$P\left(0 < \alpha < \frac{1}{k}\right) = F(1/k) - F(0) = 1 - \frac{5}{2}e^{-1}.$$