Teorija izračunljivosti

Seminarski rad
Teorija složenosti izračunavanja

Profesor: Zoran Ognjanović
Student: Tanja Kovačević
br. indeksa 202/07

Klase složenosti

Pozicioniranje složenosti problema

Pri određivanju kojoj klasi složenosti pripada neki problem, obično se određuju gornja i donja granica složenosti.

Gornja granica složenosti nekog odlučivog problema se određuje konstrukcijom algoritma za njegovo rešavanje i analizom koliko vremena i/ili memorije taj algoritam koristi.

Primer

```
function Euklid(m,l)
begin
   while m > 0 do
   t := l mod m
   l := m
   m := t
   return l
end
```

Ako je $l \geq m$,

i neka k predstavlja ukupan broj prolazaka funkcije kroz petlju za ulazne podatke m i l, i neka su za $i \leq k$, m_i i l_i vrednosti od m i l na kraju i-te petlje.

Uslov za izlazak iz petlje u koraku k je da je $m_k = 0$ i $m_i \geq 1$, za $i < k$. Vrednosti m_i i l_i su definisane na sledeći način: $l_i = m_{i-1}$ i $m_i = l_{i-1} \bmod m_{i-1}$, za $1 \leq i \leq k$.

Očigledno je da je za svaki $i \geq 1$, $l_i > m_i$

$m_i = l_{i-1} \bmod m_{i-1} < l_{i-1}/2 = m_{i-2}/2$
za svaki $i \geq 2$

Ako je $k = 2d + 1$ imamo
$m_{k-1} < m_{k-3}/2 < m_{k-5}/4 < \ldots < m_0 / 2^d$

Pošto je $m_{k-1} \geq 1$ važi $m_0 \geq 2^d$
Odatle sledi $k = 2d + 1 \leq 1 + 2\log_2 m_0$
Slično se analizira i slučaj za $k = 2d$,
imajući u vidu da je $m_1 = l_0 \bmod m_0 < m_0$

Broj prolazaka kroz petlju je reda $\log_2 m$
Kako je dužina binarnog zapisa broja m upravo reda $\log_2 m$, broj prolazaka kroz petlju je u O(n), gde je n =|m| veličina binarne reprezentacije ulaznog podatka. Potrebno vreme za operaciju deljenja koje se vrši u petlji prilikom izračunavanja modula je u $O(\log^2_2 m)$, pa je složenost celog postupka u O(n3), za n = |m|.

Donja granica složenosti nekog odlučivog problema se određuje tako što se pokaže da su izvesno vreme i/ili memorijski prostor neophodni za rešavanje tog problema bilo kojim algoritmom. Određivanje donje granice složenosti je često teško i nije poznat neki univerzalni postupak za to. Jedna od metoda koja se primenjuje je metoda brojanja u kojoj se definiše neka karakteristika ponašanja mašine, pa se analizira koliko puta se ta karakteristika mora ispuniti prilikom prihvatanja ulaza veličine n

Redukcija problema

Druga vrsta pozicioniranja u hijerarhiji složenosti je relativna i izvodi se poređenjem odnosa složenosti problema u čemu postupak redukcije ima značajnu ulogu.

Definicija

Problem A se redukuje na problem B, u oznaci $A \leq B$, ako postoji izračunljiva funkcija f takva da je A(x) tačno ako i samo ako je tačno I B(f(x)). Funkcija f se tada naziva funkcija redukcije.

Redukovanje ima smisla samo ako je složenost izračunavanja funkcije redukcije zanemarljiva u odnosu na složenost problema B.
Složenost izračunavanja funkcije redukcije se ograničava tako da pripada klasi L.
Prema opisanoj hijerarhiji, funkcije redukcije pripadaju i klasi P, što je pogodnije za analizu problema u klasama sa vremenskim granicama složenosti. Uz to, ova klasa složenosti obezbeđuje da je veličina rezultata f(x) takođe polinomijalno ograničena u odnosu na |x|.

Definicija Funkcija redukcije f problema A na problem B je efikasna, a problem A je efikasno reducibalan na problem B, u oznaci $A \leq_{ef} B$, ako je složenost funkcije f u klasi L.

Definicija Klasa problema C je zatvorena za $\leq_{ef}$ ako za svaki problem $B \in C$ i svaki problem A važi da ako je $A \leq_{ef} B$, onda je i $A \in C$.

Može se pokazati da su klase složenosti L,NL, P, NP, co-NP, PSPACE I EXP zatvorene za redukciju.

Kompletni problemi

Definicija Neka je B problem i C klasa složenosti. Tada kažemo:

- problem B je C-težak, u oznaci $C \leq_{ef} B$, ako je za svaki problem $A \in C$ ispunjeno $A \leq_{ef} B$ i
- problem B je C-kompletan ako je $C \leq_{ef} B$ i $B \in C$.

Pojam kompletnog problema je značajan pošto svaki takav problem predstavlja klasu u onosu na koju je kompletan. Tako, na primer, NP-kompletan problem pripada klasi P ako I samo ako P = NP. Ovo je posledica tvrđnja sledeće teoreme i činjenice da je klasa P zatvorena za $\leq_{ef}$.

Teorema Neka su C i D klase složenosti, takve da je $D \subset C$ i D zatvorena za $\leq_{ef}$ i neka je B jedan C-kompletan problem. Tada važi $B \in D$ ako i samo ako C = D.

Postojanje prirodnih problema koji su kompletni za neku klasu složenosti daje klasi odgovarajući značaj, iako on možda nije jasan samo na osnovu njene definicije. Takav slučaj je, na primer, sa raznim nedeterminističkim klasama.

Videćemo da su kompletni problemi proistekli iz stvarnih istraživanja, odakle proističe i značaj odgovarajućih klasa složenosti.

Klasa složenosti L

U klasi složenosti L se nalazi problem opisan u primeru koji sadrži sve reči koje su palindromi, kao i svi problemi za grafove koji se mogu formulisati u klasičnom jeziku prvog reda. Problem kompletnosti u ovoj klasi složenosti nije značajan pošto redukcija ima smisla samo u klasi koja je složenija od same redukcije.

L je najmanja prirodna klasa složenosti jer je veličina binarne reprezentacije pokazivača na ulazni podatak x reda $\log_2 |x|$.

Problem GAP i NL-kompletnost

Problem GAP se odnosi na utvrđivanje da li postoji put između dva zadata čvora grafa. Graf sa n čvorova se opisuje kvadratnom matricom u kojoj 1 znači da postoji put, a 0 da put između odgovarajućih čvorova ne postoji, dok se matrica reprezentuje kao binarna reč dužine n^2.

Sada se GAP može definisati kao skup grafova u kojima postoji put od čvora 1 do čvora n.

Teorema GAP $\in$ SPACE($O(\log^2_2 n)$).

Dokaz Pitanje da li su čvorovi x i y grafa G povezani, putem ne dužim od 2^i zapišemo u formi Put(x, y, i).
To se može rešiti rekurzivno, postavljanjem pitanja da li postoji čvor z takav da je Put(x, z, i−1) i Put(z, y, i−1).
Kako je maksimalna dužina puta u grafu sa n čvorova n − 1, čvorovi x i y su povezani ako i samo ako važi Put(x, y, log2 n).

Jedna implementacija ovog postupka podrazumeva da jedna radna traka Tjuringove mašine simulira izgled steka pri izvršavanju opisanog rekurzivnog postupka. Stek će sadrati najviše $\log_2 n$ trojki oblika (t_1, t_2, k).

Svaki član ove trojke nije veći od n, pa je svaka trojka dugačka najviše $3 \log_2 n$, što je dužina binarne reprezentacije broja n.

Odatle, GAP $\in$ SPACE($O(\log^2{}_2 n)$).

Problem GAP karakteriše klasu NL.