



Одељење за механику Математичког института САНУ

Семинар Математичке методе механике у примени

*Matematičke metode mehanike u primeni (MMMP)*

*Mathematical Methods of Mechanics and Applications (3MA)*



*Projekat OI 174001 Dinamika hibridnih sistema slozenih struktura (2011-2014)*

*Serija predavanja za istraživače pripravnike i doktorante iz oblasti Kinetike, Elastodinamike, Analitičke mehanike, Primene tenzorskog računa u mehanici, Teorije oscilacija i Nelinearne dinamike*

*29-ti blok predavanja*

*(od 12 h do 17h)*

*Programski sistem VERSPACE  
i primene u analizi dinamike structure robota*

*(The spatial movement of the vertical elastic links)*

*(Projekat TR-35003 'Institut "Mihailo Pupin")*

*Predavač*

*Mirjana Filipović,  
Institut "Mihailo Pupin"*

*Sreda, 11 januar 2011 u 12 časova*

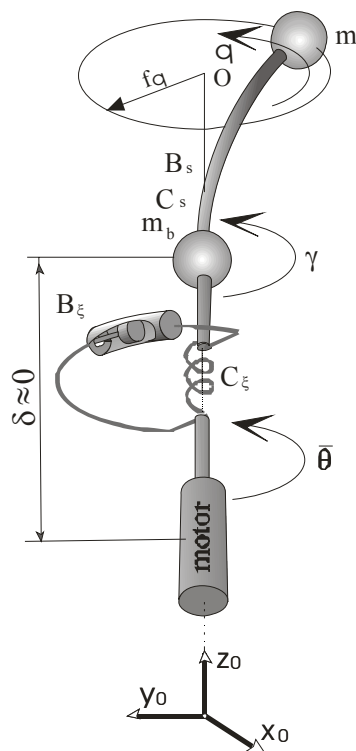
\* \* \* \* \*

*Predavanja se održavaju svake srede od 11 do 17 časova u Biblioteci Matematičkog instituta SANU, ul. Knez Muhalova 36, treći sprat*

*Prijava potencijalnog slušaoca se dostavlja Upravniku Odeljenja za mehaniku na adresu [khedrih@eunet.rs](mailto:khedrih@eunet.rs) sa naznakom oblasti interesovanja.*

*Dr Srđan Jović  
Sekretar Odeljenja za mehaniku*

*Prof. dr Katica (Stevanović) Hedrih  
Upravnik Odeljenja za mehaniku*



Slika 1. Mehanizam robota.

## Sušтина tehničkog rešenja

Upravo je robotika oblast koja može da ponudi rešenje i predstavlja temelj daljih istraživanja u mnogim drugim oblastima. To je iz jednostavnog razloga: jer je robotika u poslednjih 40. godina značajno uznapredovala. Posebno treba naglasiti važnost daljih istraživanja ali sada na novim principima koje smo zacrtali u ovom programskom sistemu **VERSPACE**, kao i na nizu do sada objavljenih publikacija.

Elastična deformacija je dinamička veličina, koja zavisi od ukupne dinamike kretanja robotskog sistema. To znači da se amplituda elastične deformacije i njena učestanost menjaju u zavisnosti od sila (inercijalnih, Koriolisovih, centrifugalnih, gravitacionih kao i sila kuplovanja između prisutnih modova, dejstva dinamike sile okoline) naravno da zavisi i od konfiguracije mehaničima, dužine segmenata, izbora referentne trajektorije kao i dinamičkih karakteristika kretanja motora i td.

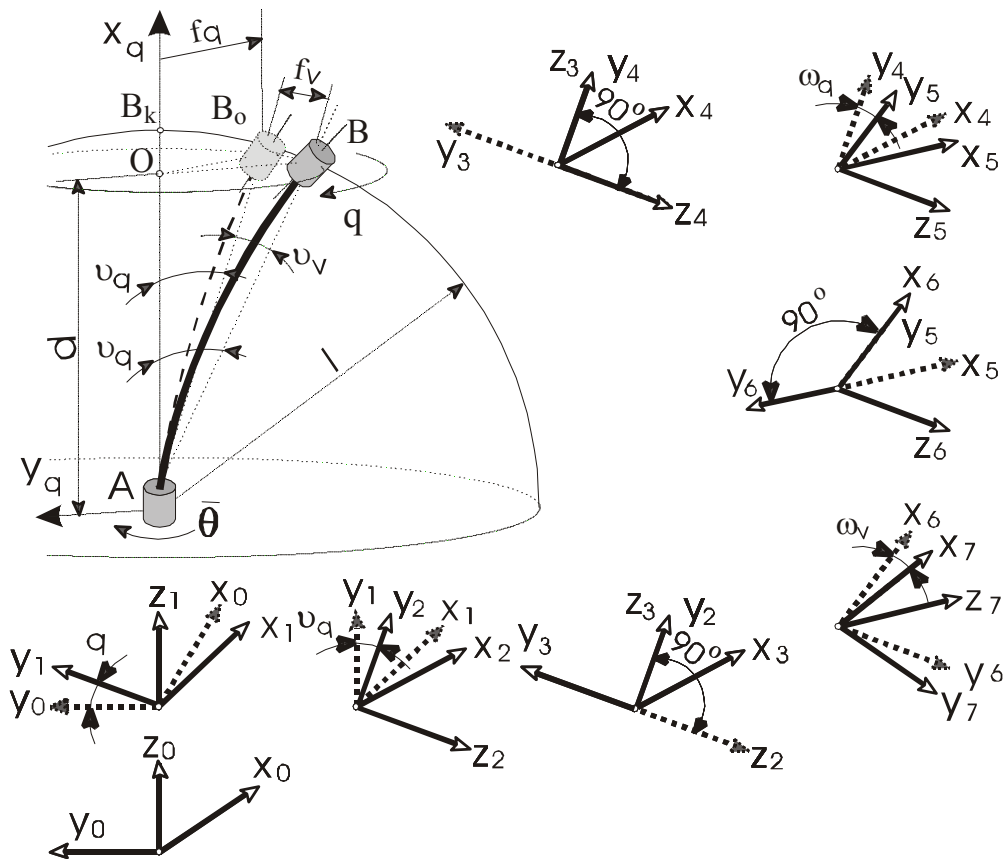
Elastična deformacija egzistira i u stanju mirovanja a tada zavisi od sila gravitacije, odnosno konfiguracije mehanizma. To znači da elastična deformacija zavisi od svih karakteristika robotskog sistema i može se izračunati u svakom trenutku odabiranja. Kada provodimo mehanizam kroz referentnu trajektoriju elastična deformacija takođe egzistira ali sada na referentnom nivou bez uticaja poremećaja.

Euler-Bernoulli jednačina je napisana 1750. godine. Napisali su je Bernoulli, fizičar i Euler, matematičar, njegov dugogodišnji prijatelj i saradnik. Tada oni nisu ni sanjali o Robotici i znanjima kojima mi danas raspolažemo. Ali, iako je nastala pre više od 260. godina, Euler-Bernoulli jednačina, je i danas aktuelna i u ovom radu je logično povezana sa današnjim znanjima iz robotike .

## Detaljan opis karakteristika

Posebna pažnja je posvećena dinamici i kinematici kretanja robotske konfiguracije sa elastičnim linkom u vertikalnoj ravni, koji se realno kreće u prostoru zbog svoje elastičnosti. Kinematički model sistema prikazanog na Slici 1. (direktni i inverzni model) je kreiran uvodeći novu definiciju Denavit-Hartenberg-ovih

parametara. Vidi Sliku 2. Definisana je geometrija robota između prostora unutrašnjih koordinata i prostora Kartesijanskih koordinata (spoljašnjih koordinata) kao “direktna kinematika”.



Slika 2. Pozicija vrha robota.

Pokazano je da jednačina ravnoteže svih prisutnih sila u bilo kojoj tački (pa i tački vrha moda na toj elastičnoj liniji) direktno sledi iz nove forme Euler-Bernoulli jednačine. Ako se za tačku vrha moda, kao najinteresantniju tačku te elastične linije, definišu granični uslovi dobija se jednačina ravnoteže u posmatranoj tački, odnosno dobija se *klasični oblik* matematičkog modela. Generisan je izbor referentne trajektorije, koji zavisi od nivoa poznavanja karakteristika elastičnosti. Estimirane karakteristike elastičnosti mogu da se uključe u referentnu trajektoriju a time i u zakon upravljanja.

Euler-Bernoulli jednačina je proširena sa nekoliko aspekata,

Kod elastičnih robotskih sistema, momentu motora suprotstavlja se moment savijanja prvog elastičnog moda, koji se nalazi iza motora, a delimično i momenti savijanja ostalih elastičnih modova koji su redosledno vezani iza posmatranog motora. Svi modovi, iza motora, uslovljeno svojom pozicijom, imaju uticaj na dinamiku kretanja motora. U programskom sistemu **VERSPACE** matematički model motora je povezan sa ostatkom mehanizma preko ekvivalentnog momenta elastičnosti.

Primenjena je analogija između rešenja Euler-Bernoulli jednačine koju je definisao Daniel Bernoulli u izvornom obliku (odnosno rešenja proširenog oblika Euler-Bernoulli jednačine) i „direktnog kinematičkog rešenja“ u Robotici.

U ovom programskom sistemu **VERSPACE** uspostavljena je veza između izvornog oblika Euler-Bernoulli jednačine i njenog rešenja i savremenih znanja iz Robotike. Vidi [1].

Ovim pristupom su otvoreni novi vidici za dalja istraživanja.

Posebno se naglašava značaj ovog rezultata u oblasti robotike, koja se vrlo intenzivno razvija i u ovom istraživanju postaje inspiracija za razvoj oblasti kao što je elastodinamika robotskih struktura i nelinearni fenomeni dinamike i stabilnost robotskih struktura.

## Reference

[1] **Mirjana Filipović**, “The Procedure for the Application of a New Form of Euler-Bernoulli Equation and Its Solutions”, 9th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics - SISY 2011, Subotica, Serbia, ISBN 978-1-4577-1974-5, 8-10 September 2011. pp. 85-90. <http://conf.uni-obuda.hu/sisy2011/>