MATEMATIČKI INSTITUT

Savremena računska tehnika i njena primena

Knjiga 8

Boško S. Jovanović

Numeričke metode rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina

Granični i mešoviti problemi za linearne jednačine eliptičkog, paraboličkog i hiperboličkog tipa

BEOGRAD

1989

MATEMATIČKI INSTITUT

Savremena računska tehnika i njena primena

Knjiga 8

Boško S. Jovanović

Numeričke metode rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina

Granični i mešoviti problemi za linearne jednačine eliptičkog, paraboličkog i hiperboličkog tipa

BEOGRAD

1989

Predgovor

Granični problemi za parcijalne diferencijalne jednačine predstavljaju matematičke modele najraznovrsnijih pojava, kao na primer provođenja toplote, talasnih kretanja, pojava difuzije, elastičnosti, dinamike fluida, procesa atomske fizike itd. Samo u retkim slučajevima ovi zadaci se mogu tačno rešiti klasičnim metodama matematičke analize, dok se u svim ostalim mora pribegavati približnim metodama.

Među približnim metodama rešavanja graničnih problema za parcijalne diferencijalne jednačine naročito se ističe metoda mreža, zasnovana na diskretizaciji zadatka i zameni parcijalnih izvoda koji se javljaju u jednačini količnicima diferencija. Ovoj metodi posvećena je veoma obimna, pretežno časopisna, literatura.

Posle pionirskog rada Couranta, Friedrichsa i Lewyja [1928] metoda mreža doživljava intenzivan razvoj u 40-tim godinama. Ovaj razvoj je s jedne strane podstaknut potrebama razvitka nuklearne tehnike i tehnologije, dok je s druge strane omogućen pojavom savremene elektronske računske tehnike. U ovom periodu kontruišu se, ispituju i koriste u praktične svrhe različite diferencijske sheme za stacionarne i nestacionarne jednačine (npr. shema Crank-Nicolsona [1947] i dr.). Pojavljuju se i prvi radovi o varijaciono-diferencijskim shemama (Courant [1943]).

U prvoj polovine 50-tih godina velika pažnja se posvećuje konstrukciji ekonomičnih diferencijskih shema. Predlažu se metode gornje ralaksacije (Young [1954a]) i promenljivih pravaca (Peacemann, Rachford [1955], Douglas [1955]).

U sledećoj deceniji pomenute metode se dalje razvijaju i uopštavaju. Dobijeno je tačno rešenje zadatka izbora optimalnih iteracionih parametara u metodi promenljivih pravaca (Wachspress [1963]). Velika pažnja se poklanja mnogodimenzonim problemima. Razrađuju se faktorizovane i aditivne sheme (Samarski [1966]), metode dekompozicije itd. Pojavljuju se prve monografije iz ove oblasti: Forsythe, Wasow [1960], Godunov, Rjabenjki [1962], Wachspress [1966], Babuška, Prager, Vitasek [1966], Richtmyer, Morton [1967], Samarski [1971], [1977], Marčuk [1973] itd.

Poslednjih 10–15 godina intenzivno se razvijaju varijaciono-diferencijske metode (metoda konačnih elemenata). One s jedne strane predstavljaju specijalne slučajeve opštih varijacionih metoda (Ritza, Galerkina i dr.) dok se s druge mogu interpretirati kao dalji razvoj metode mreža (videti npr. monografije Aubina [1972], Oganesjana, Rivkinda i Ruhovca [1973], Kornjejeva [1977] itd.)

U univerzitetskim programima u svetu metoda mreža nalazi svoje mesto pre svega u okviru brojnih specijalnih kurseva, a takođe u kursevima numeričke matematike. U našoj zemlji se međutim još uvek mali broj matematičara bavi ovom problematikom a i literatura na našem jeziku je dosta oskudna.

Ova knjiga predstavlja prerađenu i proširenu verziju ciklusa predavanja koji je autor održao 1975/76 godine u okviru Seminara iz primenjene matematike Matematičkog instituta u Beogradu. U njoj je autor pokušao da da sintezu glavnih rezultata ove veoma razvijene oblasti savremene numeričke matematike, da ukaže na osnovne probleme koji se tu postavljaju, i prikaže glavne metode njihovog rešavanja. Osnovna pažnje je posvećena ispitivanju stabilnosti i korektnosti diferencijskih shema i njihovoj konvergenciji, s jedne, i konstrukciji ekonomičnih diferencijskih shema, s druge strane. Takođe su prikazani neki originalni rezultati autora.

Knjiga je namenjena pre svega studentima matematike, poslediplomcima i diplomiranim matematičarima koji se bave numeričkom matematikom, a takođe inženjerima koji se u svom radu susreću s potrebom praktičnog rešavanja graničnih problema za parcijalne diferencijalne jednačine. Za njeno čitanje potrebna su osnovna znanja iz teorije diferencijalnih jednačina i funkcionalne analize, u obimu uobičajenih univerzitetskih kurseva.

Knjiga je podeljena na četiri glave. Prva glava je uvodna. U njoj se definišu osnovni funkcionalni prostori koji će kasnije biti korišćeni, neki pojmovi iz funkcionalne analize i osnovni granični, odnosno mešoviti, problemi za linearne parcijalne diferencijalne jednačine eliptičkog, paraboličkog i hiperboličkog tipa. Ovi granični problemi se interpretiraju kao linearne jednačine, odnosno kao Cauchyjevi problemi za linearne diferencijalne jednačine prvog i drugog reda u Hilbertovom prostoru. Zatim se izvode osnovne nejednakosti iz kojih sledi stabilnost posmatranih graničnih problema. Nejednakosti za parabolički i hiperbolički slučaj izvedene su u apstraktnom obliku, iz kojeg se specifikaciom Hilbertovog prostora i linearnog operatora A dobijaju ocene za konkretni slučaj. Takođe je uveden pojam diferencijske sheme i prikazani osnovni problemi koji se s njim u vezi javljaju.

Druga glava je posvećena eliptičkim jednačinama. U njenom prvom delu se konstruišu diferencijske sheme za rešavanje različitih graničnih problema i ispituje njihova stabilnost, korektnost i konvergencija. Radi pojednostavljenja izvođenja koriste se uglavnom najjednostavnije aproksimacije. Drugi deo glave posvećen je rešavanju sistema diferencijskih jednačina, specijalno iterativnim metodama. Ovde se najveća pažnja posvećuje ekonomičnosti metoda, i s tim u vezi optimalnom izboru iteracionim parametara koji obezbeđuje makismalnu brzinu konvergencije.

U trećoj glavi se konstruišu i ispituju diferencijske sheme za rešavanje paraboličkih jednačina. Ispituje se stabilnost i konvergencija eksplicitne, implicitne, sheme s težinom i shema promenljivih pravaca. Pokazano je da su sheme promenljivih pravaca apsolutno stabilne i ekonomične.

U četvrtoj glavi se kontruišu i ispituju diferencijske sheme za rešavanje hiperboličkih jednačina. Ispituje se stabilnost i konvergenicja eksplicitne sheme, sheme s težinama, sheme promenljivih pravaca i aditivne sheme za jednu jednačinu četvrtog reda. Kao i u prethodnim glavama, i ovde se velika pažnja poklanja ekonomičnosti sheme.

Spisak literature ne pretenduje na kompletnost, što je s obzirom na brojnost publikacija iz ove oblasti gotovo i nemoguće postići, i određen je pre svega izborom materijala prikazanog u knjizi i krugom interesovanja autora.

Paragrafi, teoreme, leme i formule numerisani su u svakoj glavi posebno. Pri pozivanju na paragraf, teoremu ili formulu iz iste glave navodi se samo njihov redni broj. Pri pozivanju na paragraf, teoremu ili formulu iz druge glave ispred njihovog rednog broja dodaje se broj glave, npr.: teorema 1.3, formula (2.15) i sl. Literatura je citirana imenom autora i godinom publikovanja.

Beograd, januara 1979. Boško S. Jovanović

*

* *

Sticajem različitih nepovoljnih okolnosti, pre svega finansijskih, od završetka ovog rukopisa do njegovog publikovanja proteklo je skoro deset godina. U međuvremenu se, što je i prirodno, razmatrana problematika dalje razvijala i produbljivala.

Došlo je do daljeg razvoja metode konačnih elemenata i njoj srodnih metoda (v. Ciarlet [1978]). Razvijaju se metode rešavanja varijacionih nejednakosti i graničnih problema sa slobodnom granicom (v. Glowinski, Lions, Trémolières [1976], Friedman [1982], Brezzi [1986]). Sve veća pažnja se posvećuje nelinearnim zadacima (v. npr. Temam [1979]).

Razrađena je nova metoda numeričkog rešavanja graničnih problema — tzv. metoda graničnih elemenata (v. Brebbia, Walker [1980]). Kod nje se korišćenjem fundamentalnih rešenja odgovarajućih diferencijalnih operatora problem „prebacuje" na granicu oblasti, blagodareći čemu se broj dimenzija smanjuje za jedan (Pomenimo takođe pionirski rad u ovoj oblasti N. Hajdina [1958]).

Brzo se razvijaju „multi-grid" metode zasnovane na korišćenju više mreža s različitim koracima (videti Hackbusch [1985]; uporediti takođe odeljak 2.5.e). Bliska po ideji je i Richardsonova ekstrapolacija (v. Marčuk, Šajdurov [1979], Jovanović [1980]).

Došlo je do napretka u aproksimaciji generalisanih rešenja pomoću metode konačnih razlika (videti Dodatak). Tom problematikom se i autor bavio u proteklom periodu. Pomoću nove tehnike ispitivanja konvergencije, zasnovane na lemi Bramble-Hilberta, pokazano je da diferencijske sheme s usrednjenom desnom stranom konvergiraju i u slučajevima kada je rešenje polaznog graničnog problema dovoljno slabo (neregularno). Ocene koje se pri tome dobijaju su vrlo bliske onima za metodu konačnih elemenata, što predstavlja još jedan dokaz srodstva dveju metoda.

Beograd, decembra 1988. B.S. Jovanović

I Uvod

1. Prostori C^k, L_p i W_p^k

Pri teorijskim istraživanjima rešenja graničnih problema za parcijalne diferencijalne jednačine obično se predstavljaju kao elementi pojedinih funkcionalnih prostora. Zato ćemo na početku definisati neke od ovih prostora koji se najčešće koriste (videti Soboljev [1962], Ladyženskaja, Uraljceva [1964], Schwartz [1950–51]). Sa Ω ćemo dalje označavati ograničenu, konveksnu, jednostruko povezanu oblast iz $\mathbf{R}^n$, a sa Γ njenu granicu.

Prostor $C^k(\Omega)$ sastoji se od funkcija definisanih na Ω, koje imaju neprekidne parcijalne izvode zaključno s redom k. U $C^k(\Omega)$ se uvodi norma na sledeći način:

$$\|u\|_{C^k} = \max_{\substack{0\le i\le k\\ i_1+\cdots+i_n=i}} \sup_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\Omega} \left|\frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\ldots\partial x_n^{i_n}}\right|. \tag{1}$$

Specijalno, sa $C(\Omega)$ označavamo prostor neprekidnih funkcija, a sa $C^\infty(\Omega)$ prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija.

Skup tačaka u kojima je funkcija različita od nule nazivamo njenim nosačem. Sa $\dot{C}^\infty(\Omega)$ označavamo skup beskonačno diferencijabilnih funkcija s kompaktnim nosačem u Ω, tj. takvih koje su jednake nuli u nekom prigraničnom pojasu.

Prostor $L_p(\Omega)$, $p \ge 1$, sastoji se iz funkcija definisanih na Ω, čiji je p-ti stepen apsolutno integrabilna funkcija u smislu Lebesguea. U $L_p(\Omega)$ se uvodi norma na sledeći način:

$$\|u\|_{L_p} = \left(\int_\Omega |u|^p d\Omega\right)^{1/p}. \tag{2}$$

Specijalno, prostor $L_2(\Omega)$ je Hilbertov, sa skalarnim proizvodom

$$(u,v) = \int_\Omega u\cdot v\, d\Omega.$$

Za funkcije $u \in C^\infty(\Omega)$ i $v \in \dot{C}^\infty(\Omega)$ važi sledeća formula parcijalne integracije:

$$\int_\Omega \left[u\frac{\partial^k v}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}} + (-1)^{k+1} v\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right] d\Omega = 0,$$
$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k.$$

To je jedna od osnovnih relacija u teoriji graničnih problema za parcijalne diferencijalne jednačine i zato je zadržavamo i za tzv. generalisane izvode. Neka su u i $w_{k_1k_2\ldots k_n}$ funkcije sumabilne u svakoj strogo unutrašnjoj podoblasti oblasti Ω. Reći ćemo da je $w_{k_1k_2\ldots k_n}$ generalisan izvod oblika $\dfrac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}$ funkcije u ako za svaku funkciju $v\in\dot{C}^\infty(\Omega)$ važi jednakost

$$\int_\Omega\left[u\frac{\partial^k v}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}+(-1)^{k+1}vw_{k_1k_2\ldots k_n}\right]d\Omega=0.$$

Za ovako uveden generalisani izvod zadržavamo običnu oznaku, $w_{k_1k_2\ldots k_n}=\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}$, što ne treba da dovodi u zabunu. Generalisani izvodi predstavljaju uopštenje običnih i zadržavaju mnoga njihova svojstva.

U skup $C^k(\Omega)$ uvodimo normu:

$$\|u\|_{W_p^k}=\left(\int_\Omega\sum_{i=0}^{k}\sum_{i_1+\cdots+i_n=i}\left|\frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\ldots\partial x_n^{i_n}}\right|^p d\Omega\right)^{1/p},\quad p\geq 1. \tag{3}$$

Zatvorenje skupa $C^k(\Omega)$ u normi (3) nazivamo prostorom $\widetilde{W}_p^k(\Omega)$. Može se pokazati da je $\widetilde{W}_p^k(\Omega)$ kompletan, separabilan Banachov prostor. Specijalno, prostor $\widetilde{W}_2^k(\Omega)$ je Hilbertov, sa skalarnim proizvodom:

$$(u,v)=\int_\Omega\sum_{i=0}^{k}\sum_{i_1+\cdots+i_n=i}\frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\ldots\partial x_n^{i_n}}\cdot\frac{\partial^i v}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\ldots\partial x_n^{i_n}}\,d\Omega. \tag{4}$$

Prostor Soboljeva $W_p^k(\Omega)$ sastoji se iz svih elemenata iz $L_p(\Omega)$ koji imaju generalisane izvode do reda k zaključno, takođe iz $L_p(\Omega)$. Norma u $W_p^k(\Omega)$ uvodi se sa (3). Prostor $W_p^k(\Omega)$ je takođe kompletan, separabilan Banachov prostor. U opštem slučaju je širi od $\widetilde{W}_p^k(\Omega)$, ali se za oblasti „s dovoljno pravilnom" granicom (npr. zvezdaste oblasti) poklapa s $\widetilde{W}_p^k(\Omega)$. Prostor $W_2^k(\Omega)$ je Hilbertov sa skalarnim proizvodom (4).

Uvedimo na kraju potprostor $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)$ prostora $W_p^k(\Omega)$ koji igra važnu ulogu u teoriji graničnih problema za parcijalne definicijalne jednačine. Ovaj potprostor se dobija zatvorenjem skupa $\dot{C}^\infty(\Omega)$ u normi (3).

2. Neki pojmovi iz funkcionalne analize

Teorije graničnih problema za linearne parcijalne diferencijalne jednačine i diferencijskih metoda njihovog rešavanja bitno se oslanjaju na funkcionalnu analizu, specijalno na teoriju linearnih operatora u Hilbertovom prostoru. Definisaćemo neke njene osnovne pojmove i navesti (bez dokaza) rezultate koji će nam biti potrebni u daljem radu. Detaljno izlaganje ovog materijala čitalac može naći u monografijama Riesz, Nagy [1952], Ahiezer, Glazman [1966], Kantorovič, Akilov [1977] i dr.

Neka je H realan Hilbertov prostor, D njegov potprostor i A operator koji preslikava D u H. Skup $\mathcal{D}(A) = D$ nazivamo oblašću definisanosti, a skup $\mathcal{R}(A) = \{y = Ax \mid x \in D\}$ — oblašću vrednosti operatora A. Operator A je linearan ako je $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$ za svaka dva vektora $x_1, x_2 \in D$ i svaka dva skalara $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Ako postoji konstanta $M > 0$ takva da je

$$\|Ax\| \leq M\|x\|, \quad \text{za svako } x \in D, \tag{5}$$

kažemo da je operator A ograničen. Najmanju konstantu za koju važi uslov (5) nazivamo normom operatora A i obeležavamo sa $\|A\|$, tj.

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \|Ax\|/\|x\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

U skup operatora koji preslikavaju H u H možemo uvesti operacije sabiranja, množenja skalarom i množenja stavljajući

$$(A + B)x = Ax + Bx, \quad (\lambda A)x = \lambda(Ax), \quad (AB)x = A(Bx).$$

Ako je $AB = BA$ kažemo da su operatori A i B komutativni.

Ako iz $x_1 \neq x_2$ sledi $Ax_1 \neq Ax_2$, tada možemo definisati inverzni operator $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{D}(A)$ stavljajući $A^{-1}y = x$ ako i samo ako je $y = Ax$. Lako se pokazuje da iz linearnosti operatora A sledi linearnost operatora A^{-1}.

Jediničnim operatorom $I : H \to H$ nazivamo operator $Ix = x$, za svako $x \in H$. Ako je $A : H \to H$ proizvoljan operator tada važi $AI = IA = A$ i $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Neka je $A : H \to H$ proizvoljan linearan operator. Veličinu (Ax, x) nazivamo njegovom energijom. Operator A ćemo nazivati nenegativnim ako je

$$(Ax, x) \geq 0, \tag{6}$$

pozitivnim ako je

$$(Ax, x) > 0 \quad \text{za } x \neq 0 \tag{7}$$

i pozitivno definisanim ako je

$$(Ax, x) \geq \delta\|x\|^2, \quad \delta = \text{const} > 0. \tag{8}$$

Umesto (6), (7) i (8) pisaćemo $A \geq 0$, $A > 0$, odnosno $A \geq \delta I$. Ako je $A - B \geq 0$ pisaćemo $A \geq B$.

Ovako uvedena relacija poretka ima sledeće osobine:

iz $A \geq B$ i $B \geq C$ sledi $A \geq C$;

iz $A \geq B$ i $C \geq D$ sledi $A + C \geq B + D$;

iz $A \geq 0$ i $\alpha \geq 0$ sledi $\alpha A \geq 0$;
ako je $A > 0$ i A^{-1} postoji, onda je i $A^{-1} > 0$.

Ako su A i A^* linearni operatori koji preslikavaju H u H takvi da je $(Ax, y) = (x, A^*y)$ za svako $x, y \in H$, kažemo da je operator A^* konjugovan k operatoru A. Važe sledeće jednakosti:

$$(A^*)^* = A, \quad (A+B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^*A^* \quad \text{i} \quad (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Iz ograničenosti operatora A sledi ograničenost operatora A^* i pri tome važi $\|A^*\| = \|A\|$. Ako je $A^* = A$ kažemo da je operator A samokonjugovan. Lako se pokazuje da su za proizvoljan linearan operator A operatori A^*A i AA^* samokonjugovani i nenegativni. Proizvod dva komutativna nenegativna samokonjugovana operatora je takođe nenegativan samokonjugovan operator. Ako je operator A samokonjugovan tada je:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax, x)|}{\|x\|^2}.$$

Indukcijom se pokazuje da je $\|A^n\| = \|A\|^n$.

Operator B nazivamo kvadratnim korenom iz operatora A ako je $B^2 = A$ i to obeležavamo $B = A^{1/2}$. Može se pokazati da ako je operator A nenegativan i samokonjugovan tada postoji jedinstven kvadratni koren $A^{1/2}$ koji je takođe nenegativan, samokonjugovan i komutativan sa svakim operatorom komutativnim sa A.

Ako je $A : H \to H$ pozitivan samokonjugovan operator lako se proverava da veličina $(x, y)_A = (Ax, y)$ zadovoljava aksiome skalarnog proizvoda, a veličina $\|x\|_A = (Ax, x)^{1/2}$ aksiome norme. Specijalno, važi Cauchy-Schwartzova nejednakost

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \text{odnosno} \quad |(Ax, y)| \leq \|x\|_A \cdot \|y\|_A.$$

Ovu nejednakost ćemo u daljem radu često kombinovati s tzv. ε-nejednakošću:

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + b^2/(4\varepsilon), \qquad a, b \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon > 0. \tag{9}$$

Ako je $A = A^* > 0$ i A^{-1} postoji, tada je $A^{-1} = (A^{-1})^* > 0$ pa možemo definisati tzv. „negativnu“ normu:

$$\|x\|_{A^{-1}} = (A^{-1}x, x)^{1/2}.$$

Može se pokazati da je:

$$\|x\|_{A^{-1}} = \sup_{y \neq 0} \frac{|(x, y)|}{\|y\|_A}.$$

Navodimo tri stava koji garantuju postojanje inverznog operatora.

TEOREMA 1. *Da bi linearan operator A imao inverzni operator $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{D}(A)$ potrebno je i dovoljno da je $Ax = 0$ samo za $x = 0$.*

TEOREMA 2. *Neka je* $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{R}(A)$ *linearan operator. Da bi inverzni operator* A^{-1} *postojao i bio ograničen potrebno je i dovoljno da postoji konstanta* $\delta > 0$ *takva da je za svako* $x \in \mathcal{D}(A)$: $\|Ax\| \geq \delta\|x\|$. *Pri tome je* $\|A^{-1}\| \leq 1/\delta$.

TEOREMA 3. *Neka je* A *linearan operator i* $\mathcal{D}(A) = H$. *Da bi operator* A *imao inverzni* A^{-1} *s oblašću definisanosti* $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$ *potrebno je i dovoljno da postoji konstanta* $\delta > 0$ *takva da za svako* $x \in H$ *važi* $\|Ax\| \geq \delta\|x\|$ *i* $\|A^* x\| \geq \delta\|A\|$. *Pri tome je* $\|A^{-1}\| \leq 1/\delta$.

POSLEDICA. *Ako je* A *pozitivno definisan linearan ograničen operator, s oblašću definisanosti* $\mathcal{D}(A) = H$, *tada postoji inverzni operator* A^{-1}, *s oblašću definisanosti* $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$.

Ako postoje skalar λ i vektor $x \neq 0$ takvi da je $Ax = \lambda x$, tada kažemo da je λ sopstvena vrednost, a x sopstveni vektor operatora A. Ako je $A = A^* \geq 0$ tada su sve sopstvene vrednosti nenegativne, a sopstveni vektori koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima — uzajamno ortogonalni.

U konačnodimenzionom slučaju, $H = \mathbf{R}^n$, linearnom operatoru odgovara kvadratna matrica reda n i obrnuto. Matrica samokonjugovanog operatora u svakoj ortonormiranoj bazi je simetrična. Važe sledeće osobine:

1. Samokonjugovani operator ima n uzajamno normalnih sopstvenih vektora x_i. Možemo smatrati da su ovi vektori ortonormirani, tj.

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

a da su odgovarajuće sopstvene vrednosti uređene po veličini modula — $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_n|$. Važi i obrnuto.

2. Proizvoljan vektor $x \in \mathbf{R}^n$ može se razložiti po sistemu sopstvenih vektora x_i:

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \quad \text{gde je } c_i = (x, x_i) \text{ i važi} \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)^{1/2}.$$

Ako je $A = A^* \geq 0$ tada je $\|A\| = \lambda_n$ i važe nejednakosti:

$$\lambda_1(x,x) \leq (Ax,x) \leq \lambda_n(x,x), \tag{10}$$

$$\lambda_1\|x\| \leq \|Ax\| \leq \lambda_n\|x\|. \tag{11}$$

4. Ako su samokonjugovani operatori A i B međusobno komutativni tada imaju zajednički sistem sopstvenih vektora, i važe jednakosti:

$$\lambda_i(AB) = \lambda_i(A) \cdot \lambda_i(B), \quad \lambda_i(A+B) = \lambda_i(A) + \lambda_i(B), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gde su $\lambda_i(A)$, $\lambda_i(B)$, $\lambda_i(AB)$ i $\lambda_i(A+B)$ sopstvene vrednosti operatora A, B, AB odnosno $A + B$.

3. Osnovni granični problemi za linearne parcijalne diferencijalne jednačine eliptičkog, paraboličkog i hiperboličkog tipa

a. Eliptičke jednačine. Neka je $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ograničena, konveksna, jednostruko povezana oblast i Γ njena granica. Neka funkcija $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ unutar Ω zadovoljava jednačinu

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \tag{12}$$

a na Γ jedan od sledećih graničnih uslova:

$$lu|_\Gamma \equiv u|_\Gamma = \varphi \tag{13}$$

ili

$$lu|_\Gamma \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u\right)\Big|_\Gamma \equiv \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) + \sigma u\right)\Big|_\Gamma = \varphi. \tag{14}$$

(Sa ν je obeležena spoljna normala na Γ). Zadatak (12)–(13) nazivamo prvim ili Dirichletovim, a zadatak (12)–(14) trećim graničnim problemom. Specijalno, ako je u (14) $\sigma = 0$ dobijamo drugi ili Neumannov granični problem. Koeficijenti a_{ij}, b_i, c, f, φ i σ su funkcije od $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Jednačinu (12) nazivamo eliptičkom ako je ispunjen uslov eliptičnosti:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \ge c_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \qquad c_0 = \text{const.} > 0. \tag{15}$$

Možemo smatrati da je $a_{ij} = a_{ji}$. U suprotnom slučaju sumu

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

možemo svesti na simetričan oblik jednostavnom transformacijom:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},\end{aligned}$$

gde je $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/2 = \tilde{a}_{ji}$.

Uvodeći smenu $u = U + v$, gde je U nova nepoznata funkcija a v proizvoljna funkcija koja zadovoljava granični uslov (13), odnosno (14), dobijamo analogan zadatak s homogenim graničnim uslovom:

$$LU = F, \quad F \equiv f - Lv, \quad lU|_\Gamma = 0$$

(lU definisano sa (13) ili (14)). U daljem radu ćemo razmatrati samo homogene granične uslove. Napomenimo da je ova transformacija netrivijalna: u opštem slučaju nalaženje funkcije v može biti dovoljno složen zadatak.

Ako su funkcije a_{ij} diferencijabilne tada se Lu može predstaviti u obliku

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu, \quad \text{gde je} \quad d_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}. \tag{16}$$

Ako su svi koeficijenti d_i jednaki nuli kažemo da je operator L samokonjugovan. U daljem radu ćemo najčešće smatrati da je i ovaj uslov ispunjen, tj. posmatraćemo granične probleme

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu = f, \tag{17}$$

$$lu|_\Gamma \equiv u|_\Gamma = 0, \tag{18}$$

odnosno

$$lu|_\Gamma \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u\right)\Bigg|_\Gamma \equiv \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i) + \sigma u\right)\Bigg|_\Gamma = 0. \tag{19}$$

U klasičnoj formulaciji problema se traži rešenje $u \in C^2(\Omega)$ zadatka (12)–(13) odnosno (12)–(14) pod pretpostavkom da ulazni podaci pripadaju prostoru $C(\Omega)$. Egzistencija i jedinost klasičnih rešenja za različite granične probleme slede iz rezultata Schaudera [1934] i Mirande [1955]. Ovakva formulacija ne može međutim da zadovolji sve zahteve prakse; na primer u mnogim fizičkim i tehničkim zadacima ovog oblika ulazni podaci nisu neprekidne funkcije. Uslove možemo oslabiti zamenjujući izvode koji se javljaju generalisanim izvodima, i pretpostavljajući da su koeficijenti i slobodni članovi jednačine sumabilne funkcije. U tom slučaju možemo tražiti rešenje graničnog problema koje pripada prostoru $W_2^2(\Omega)$.

Dalje uopštenje možemo dobiti na sledeći način. Pomnožimo jednačinu (17) proizvoljnom funkcijom $-v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ i izvršimo parcijalnu integraciju. Tako dobijamo:

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j} - cuv\right) d\Omega = -\int_\Omega fv\, d\Omega. \tag{20}$$

Dobijena jednakost ima smisla pod slabijim pretpostavkama nego (17), tj. dovoljno je da $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Na taj način možemo uvesti generalisano rešenje zadatka (17)–(18) kao funkciju $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ koja zadovoljava jednakost (20) za proizvoljno $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Na sličan način možemo definisati generalisano rešenje trećeg graničnog problema. Pretpostavljajući da funkcija v pripada prostoru $W_2^1(\Omega)$ i ponavljajući prethodni postupak zaključujemo da generalisano rešenje zadatka (17)–(19) možemo definisati kao funkciju $u \in W_2^1(\Omega)$ takvu da je:

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - cuv \Big)\, d\Omega - \int_\Gamma \sigma uv\, d\Gamma = - \int_\Omega fv\, d\Omega$$

za svako $v \in W_2^1(\Omega)$.

Poslednja dva zadatka se mogu predstaviti u ekvivalentnoj varijacionoj formi na sledeći način: *odrediti funkciju* $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *za koju se dostiže minimum funkcionala*

$$J_1(u) = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - cu^2 + 2uf \Big)\, d\Omega,$$

za prvi, odnosno: *odrediti funkciju* $u \in W_2^1(\Omega)$ *za koju se dostiže minimum funkcionala*

$$J_3(u) = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - cu^2 + 2uf \Big)\, d\Omega - \int_\Gamma \sigma u^2\, d\Gamma,$$

za treći granični problem.

Slično se definišu granični problemi za eliptičke jednačine višeg reda.

b. **Paraboličke jednačine.** Za jednačine paraboličkog tipa posmatraćemo u oblasti $\bar{\Omega} \times [0,T]$ zadatak sa početnim i graničnim uslovima (mešoviti problem):

$$\begin{aligned} &\partial u/\partial t = Lu + f \quad \text{u} \quad \Omega \times (0,T] \\ &lu|_{\Gamma \times (0,T)} = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \end{aligned} \tag{21}$$

gde je Lu definisano sa (12), (16) ili (17), lu sa (18) ili (19), a u, a_{ij}, d_i, c, f i σ su funkcije od $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \bar{\Omega}$ i $t \in [0,T]$. Takođe smatramo da operator L zadovoljava uslov (15). Kao i u slučaju eliptičkih jednačina, rešenje zadatka (21) može pripadati različitim funkcionalnim prostorima u zavisnosti od glatkosti ulaznih podataka.

Pod određenim uslovima rešenje paraboličkog zadatka (21) kad $t \to \infty$ konvergira ka rešenju odgovarajućeg eliptičkog zadatka.

c. **Hiperboličke jednačine.** Za jednačine hiperboličkog tipa posmatraćemo takođe mešoviti problem u oblasti $\bar{\Omega} \times [0,T]$:

$$\begin{aligned} &\partial^2 u/\partial t^2 = Lu + f \quad \text{u} \quad \Omega \times (0,T], \\ &lu|_{\Gamma \times (0,T)} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \partial u/\partial t|_{t=0} = u_1(x). \end{aligned} \tag{22}$$

Operatori L i l se definišu na isti način kao kod paraboličkog problema (21).

U različitim primenama (npr. u matematičkoj fizici) promenljive $x_1, x_2, \dots, x_n$ se interpretiraju kao koordinate prostora, a promenljiva t — kao vreme. Zbog toga se često jednačine eliptičkog tipa nazivaju stacionarnim, a jednačine paraboličkog i hiperboličkog tipa — nestacionarnim jednačinama.

4. Osnovne apriorne ocene za jednačine eliptičkog tipa

Neka je dat granični problem

$$Lu = f, \quad x \in \Omega, \qquad u|_\Gamma = 0, \tag{23}$$

gde je Lu definisano sa (16). Pretpostavimo, za početak, da je $d_i = 0$ i $c \le 0$.

Izvedimo prvo dve pomoćne nejednakosti. Neka je $y(x)$ funkcija definisana na intervalu $[0, l]$ i $y(0) = y(l) = 0$. Tada je

$$\int_0^l y^2(x)\,dx = \int_0^l \left[\int_0^x y'(t)\,dt\right]^2 dx \le \int_0^l \left[\int_0^x dt \int_0^x [y'(t)]^2\,dt\right] dx$$
$$= \int_0^l x \int_0^x [y'(t)]^2\,dt dx \le \int_0^l x \int_0^l [y'(t)]^2\,dt dx = \frac{l^2}{2} \int_0^l [y'(t)]^2\,dt$$

tj.

$$\int_0^l y^2(x)\,dx \le \frac{l^2}{2} \int_0^l [y'(x)]^2 dx. \tag{24}$$

Slično dobijamo:

$$ly^2(x) = (l-x)y^2(x) + xy^2(x) = (l-x)\left(\int_0^x y'(t)\,dt\right)^2 + x\left(\int_x^l y'(t)\,dt\right)^2$$
$$\le (l-x)\int_0^x dt \int_0^x [y'(t)]^2\,dt + x\int_x^l dt \int_x^l [y'(t)]^2\,dt$$
$$= x(l-x)\int_0^l [y'(t)]^2\,dt \le \max_{[0,l]} x(l-x) \int_0^l [y'(t)]^2\,dt = \frac{l^2}{4}\int_0^l [y'(t)]^2\,dt,$$

odakle sledi:

$$\max_{x\in[0,l]} |y(x)| \le \frac{\sqrt{l}}{2}\left\{\int_0^l [y'(x)]^2 dx\right\}^{1/2}. \tag{25}$$

a. Prva osnovna nejednakost (energetska). Pomnožimo $-Lu$ sa u i integrirajmo po oblasti Ω. Posle parcijalne integracije, koristeći granični uslov $u|_\Gamma = 0$ dobijamo:

$$(-Lu, u) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} - cu^2\right) d\Omega.$$

Odatle zbog $c \le 0$ i uslova (15) sledi:

$$(-Lu, u) \ge c_0 \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega.$$

S druge strane, iz nejednakosti (24) sledi:

$$\int_{\Omega} |u|^2 d\Omega \leq \frac{d^2}{2n} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega,$$

gde je d dijametar oblasti Ω. Iz poslednje dve nejednakosti dobijamo

$$(-Lu, u) \geq c_0 \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega \geq c_1 \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega, \quad c_1 = 2nc_0 d^{-2}. \tag{26}$$

Iz nejednakosti (26) dobijamo:

$$\|u\|_{L_2}^2 \leq c_1^{-1}(-Lu, u) = c_1^{-1}(-f, u) \leq c_1^{-1} \|f\|_{L_2} \|u\|_{L_2}$$

ili, posle skraćivanja sa $\|u\|_{L_2}$:

$$\|u\|_{L_2} \leq c_1^{-1} \|f\|_{L_2}. \tag{27}$$

Iz (26) i (27) dalje sledi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \|\partial u / \partial x_i\|_{L_2}^2 &\leq c_0^{-1}(-Lu, u) = c_0^{-1}(-f, u) \leq c_0^{-1} \|f\|_{L_2} \cdot \|u\|_{L_2} \\ &\leq c_0^{-1} \|f\|_{L_2} \cdot c_1^{-1} \|f\|_{L_2} = c_2 \|f\|_{L_2}^2. \end{aligned} \tag{28}$$

Najzad, iz (27) i (28) dobijamo tzv. prvu osnovnu nejednakost:

$$\|u\|_{W_2^1} \leq c_3 \|f\|_{L_2}, \quad c_3 = \left(c_0^{-1} c_1^{-1} + c_1^{-2}\right)^{1/2}. \tag{29}$$

b. Druga osnovna nejednakost. Ako su funkcije a_{ij}, c i f i granica Γ dovoljno glatke može se pokazati da generalisano rešenje zadatka (23) pripada prostoru $W_2^2(\Omega)$. Polazeći od integrala $\int_{\Omega}(Lu)^2 d\Omega$ posle dve parcijalne integracije i transformacije integrala po granici Γ koji se pri tome dobijaju, korišćenjem graničnog uslova, dobija se sledeća nejednakost (videti Ladyženskaja, Uraljceva [1964], Ladyženskaja [1973])

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2}^2 \leq c_4 \|Lu\|_{L_2}^2 = c_4 \|f\|_{L_2}^2. \tag{30}$$

Iz (29) i (30) dalje dobijamo

$$\|u\|_{W_2^2} \leq c_5 \|f\|_{L_2}. \tag{31}$$

Nejednakosti (27), (29) i (31) izražavaju stabilnost rešenja zadatka (23) (u različitim normama) u zavisnosti od f. Iz njih sledi jedinstvenost rešenja. Naime, pretpostavljajući da zadatak (23) ima dva rešenja u_1 i u_2 zaključujemo da njihova razlika $z = u_1 - u_2$ zadovoljava uslove

$$Lz = 0, \qquad z|_\Gamma = 0.$$

To je zadatak istog tipa kao (23), pa primenjujući na njega ocene (27), (29) i (31) dobijamo $\|z\|_{L_2}$, $\|z\|_{W_2^1}$, odnosno $\|z\|_{W_2^2} = 0$. Odatle sledi $z = 0$, tj. $u_1 = u_2$.

Analogne nejednakosti važe i za treći granični problem. Pretpostavke $d_i = 0$ i $c \leq 0$ mogu se oslabiti (npr. stavljajući $|d_i| \leq \varepsilon$ i $c \leq \varepsilon$ gde je ε dovoljno mali pozitivan broj) ili sasvim izostaviti u pojedinim slučajevima (videti Ladyženskaja, Uraljcevá [1964], Ladyženskaja [1973]).

Iz nejednakosti (26) sledi da je operator $-L$ pozitivno definisan. U slučaju kada su a_{ij} i c ograničeni norma $\|u\|_{(-L)}$ je ekvivalentna s normom $\|u\|_{W_2^1}$ a norma $\|u\|_{(-L)^2} = \|-Lu\|$ s normom $\|u\|_{W_2^2}$.

Iz napred izloženog sledi da graničnom problemu (23) odgovara apstraktni analog

$$Au = f \tag{32}$$

gde je A samokonjugovan, pozitivno definisan linearan operator koji preslikava potprostor D Hilbertovog prostora H u H. Slično, paraboličkom i hiperboličkom zadatku (21) i (22) odgovaraju sledeći apstraktni analozi:

$$du/dt + A(t)u = f, \qquad u(0) = u_0 \tag{33}$$

odnosno

$$d^2u/dt^2 + A(t)u = f, \qquad u(0) = u_0, \quad du(0)/dt = u_1. \tag{34}$$

Ovde je $t \in [0, T]$ realna promenljiva, $u = u(t) \in D$, $f = f(t) \in H$ fiksirani elementi iz H i $A(t)$ linearan, samokonjugovan, pozitivno definisan operator koji preslikava D u H.

5. Osnovne apriorne ocene za jednačine paraboličkog i hiperboličkog tipa

Ocene stabilnosti rešenja paraboličkih i hiperboličkih problema izvešćemo za jednačine (33) i (34). Dobijene ocene se mogu konkretizovati odgovarajućim izborom Hilbertovog prostora H i operatora $A(t)$.

Množeći jednačinu (33) skalarno sa u dobijamo

$$(du/dt, u) = (A(t)u, u) = (f, u)$$

odnosno

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[(u,u)] + \|u\|^2_{A(t)} = (f,u) \leq \|u\|_{A(t)}\|f\|_{A(t)^{-1}} \leq \|u\|^2_{A(t)} + \frac{1}{4}\|f\|^2_{A(t)^{-1}}$$

tj.

$$\frac{d}{dt}(\|u(t)\|^2) \le \frac{1}{2}\|f(t)\|^2_{A(t)^{-1}}.$$

Integrirajući poslednju nejednakost od 0 do t dobijamo

$$\|u(t)\|^2 \le \|u_0\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|f(s)\|^2_{A(s)^{-1}}\,ds \le \|u_0\|^2 + \frac{T}{2}\max_{0\le s\le T}\|f(s)\|^2_{A(s)^{-1}}. \quad (35)$$

Dobijena nejednakost izražava stabilnost rešenja paraboličkog zadatka (33) u zavisnosti od početnog uslova i desne strane jednačine. Iz (35) sledi jedinstvenost rešenja zadatka (33), slično kao u eliptičkom slučaju.

Ako operator $dA(t)/dt$ zadovoljava uslov

$$\left(\frac{dA(t)}{dt}u, u\right) \le c\big(A(t)u, u\big), \quad c = \text{const} \ge 0 \quad (36)$$

može se izvesti analogna ocena i u normi $\|\cdot\|_{A(t)}$. U slučaju zadatka (21) uslov (36) je ispunjen ako su $\partial a_{ij}/\partial t$ ograničene funkcije. Ako je operator $A(t) = A$ konstantan tada je $dA/dt = 0$ pa je (36) ispunjeno sa $c = 0$.

Pomnožimo jednačinu (33) skalarno sa du/dt:

$$\left(\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}\right) + \left(A(t)u, \frac{du}{dt}\right) = \left(f, \frac{du}{dt}\right).$$

Odatle dobijamo:

$$\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}(A(t)u, u) - \left(\frac{dA}{dt}u, u\right)\right] = \left(f, \frac{du}{dt}\right) \le \|f\|\cdot\left\|\frac{du}{dt}\right\| \le \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 + \frac{1}{4}\|f\|^2$$

i uzimajući u obzir (36):

$$\frac{d}{dt}(\|u\|^2_{A(t)}) \le c\|u\|^2_{A(t)} + \frac{1}{2}\|f\|^2.$$

Integrirajući poslednju nejednakost konačno dobijamo:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2_{A(t)} &\le e^{ct}\left\{\|u_0\|^2_{A(0)} + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-cs}\|f(s)\|^2 ds\right\} \\
&\le e^{cT}\|u_0\|^2_{A(0)} + \frac{e^{cT}-1}{2c}\max_{s\in[0,T]}\|f(s)\|^2 \qquad (37)\\
&\le e^{cT}\left\{\|u_0\|^2_{A(0)} + \frac{T}{2}\max_{s\in[0,T]}\|f(s)\|^2\right\}.
\end{aligned}$$

Nejednakost (37) takođe izražava stabilnost rešenja paraboličkog zadatka (33), ali u normi $\|\cdot\|_{A(t)}$. Kao što smo već napomenuli, normama $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_{A(t)}$ u slučaju realnog paraboličkog zadatka (21) odgovaraju norme $\|\cdot\|_{L_2}$ i $\|\cdot\|_{W_2^1}$.

Preciznija ocena se može dobiti ako je poznata ocena sopstvenih vrednosti operatora $A(t)$. Neka je

$$(A(t)u, u) \geq m(u, u), \qquad m = \text{const} > 0.$$

Pretpostavimo još da je u jednačini (33) $f = 0$. Tada je

$$(du/dt, u) + (A(t)u, u) = 0,$$

odakle sledi

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u(t)\|^2) = -(A(t)u, u) \leq -m\|u(t)\|^2.$$

Integracijom poslednje nejednakosti dobijamo

$$\|u(t)\| \leq e^{-mt}\|u_0\|. \tag{38}$$

Iz (38) sledi da kad $t \to \infty$ $u(t)$ teži nuli (tj. rešenju odgovarajućeg stacionarnog zadatka $\left[\lim_{t\to\infty} A(t)\right]u = 0$).

Ocenu rešenja hiperboličkog zadatka (34) izvešćemo takođe pod pretpostavkom (36). Pomnožimo jednačinu (34) skalarno sa du/dt:

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}, \frac{du}{dt}\right) + \left(A(t)u, \frac{du}{dt}\right) = \left(f, \frac{du}{dt}\right).$$

Sledi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 + \|u\|^2_{A(t)}\right] &= \frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dt}u, u\right) + \left(f, \frac{du}{dt}\right)\\ &\leq \frac{c}{2}\|u\|^2_{A(t)} + \frac{c}{2}\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 + \frac{1}{2c}\|f\|^2,\end{aligned}$$

tj.

$$\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 + \|u\|^2_{A(t)}\right] \leq c\left[\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 + \|u\|^2_{A(t)}\right] + \frac{1}{c}\|f\|^2.$$

Integrirajući poslednju nejednakost dobijamo:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{du}{dt}\right\|^2 + \|u(t)\|^2_{A(t)} &\leq e^{ct}\left\{\|u_1\|^2 + \|u_0\|^2_{A(0)} + \frac{1}{c}\int_0^t e^{-cs}\|f(s)\|^2\, ds\right\}\\ &\leq e^{cT}(\|u_1\|^2 + \|u_0\|^2_{A(0)}) + (e^{cT} - 1)c^{-2}\max_{s\in[0,T]}\|f(s)\|^2\\ &\leq e^{cT}\left\{\|u_1\|^2 + \|u_0\|^2_{A(0)} + Tc^{-1}\max_{s\in[0,T]}\|f(s)\|^2\right\}.\end{aligned} \tag{39}$$

Nejednakost (39) izražava stabilnost rešenja hiperboličkog zadatka (34) u zavisnosti od početnih uslova i desne strane jednačine. Iz nje sledi i jedinstvenost rešenja.

Ocena (39) je nepogodna ako je c jednako nuli ili blisko nuli. Međutim, ako je uslov (36) ispunjen s konstantom c sledi da je on ispunjen i s proizvoljnom drugom konstantom $\varepsilon \geq c$. Prema tome, u oceni (39) možemo pisati proizvoljnu konstantu $\varepsilon \geq c$ umesto c:

$$\begin{aligned} \|du/dt\|^2 + \|u(t)\|^2_{A(t)} &\leq e^{\varepsilon T}\left(\|u_1\|^2 + \|u_0\|^2_{A(0)}\right) + \left(e^{\varepsilon T} - 1\right)\varepsilon^{-2} \max_{s\in[0,T]} \|f(s)\|^2 \\ &\leq e^{\varepsilon T}\left\{\|u_1\|^2 + \|u_0\|^2_{A(0)} + T\varepsilon^{-1} \max_{s\in[0,T]} \|f(s)\|^2\right\}. \end{aligned} \tag{40}$$

Izvedene nejednakosti često se nazivaju energetskim. Ovakav način izvođenja ocena stabilnosti rešenja graničnih problema za parcijalne diferencijalne jednačine se često koristi jer je dovoljno opšti i efektivan.

Za granični problem kažemo da je korektno postavljen ako ima jedinstveno rešenje pri proizvoljnom sistemu ulaznih podataka (početni i granični uslovi i desna strana jednačine) i ako ono neprekidno zavisi od ulaznih podataka (tj. stabilno je). Iz ocena izvedenih u ovom i prethodnom paragrafu sledi da zadaci (32), (33) i (34), odnosno (17)–(18), (21) i (22), ne mogu imati više od jednog rešenja, i da su stabilni. Dokaze egzistencije rešenja ovih problema čitalac može naći npr. u knjizi Ladyženske [1973].

6. Pojam diferencijske sheme

U ovom paragrafu ćemo uvesti pojam diferencijske sheme i definisati osnovne probleme u vezi s njim.

Neka se u oblasti Ω promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ traži rešenje u linearne parcijalne diferencijalne jednačine:

$$\mathcal{L}u(x) = f(x), \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega \tag{41}$$

koje na granici Γ oblasti Ω zadovoljava izvesne dodatne (granične, početne) uslove:

$$lu(x) = g(x), \qquad x \in \Gamma \tag{42}$$

(l i g mogu biti vektori).

Da bismo ga lakše rešili, zadatak (42)–(42) diskretizujemo. Pre svega, oblast $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ zamenjujemo skupom diskretnih tačaka (čvorova) $\overline{\Omega}_h$, koji nazivamo mrežom. Mrežu $\overline{\Omega}_h$ razbijamo na skup unutrašnjih čvorova Ω_h i skup graničnih čvorova $\Gamma_h = \overline{\Omega}_h \setminus \Omega_h$. Gustinu rasporeda čvorova karakterišemo parametrom h, koji može biti i vektor: $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$. Ukoliko je $|h|$ (norma vektora h) manja utoliko je mreža gušća. Zamenjujući izvode koji se javljaju u (41)–(42) količnicima razlika funkcije u čvorovima dobijamo diskretni zadatak:

$$\mathcal{L}_h v_h(x) = f_h(x), \quad x \in \Omega_h, \tag{43}$$

$$l_h v_h(x) = g_h(x), \quad x \in \Gamma_h, \tag{44}$$

koji aproksimira (41)–(42). Obično se trudimo da operatori $\mathcal{L}_h$ i l_h zadrže karakteristične osobine $\mathcal{L}$ i l — linearnost, samokonjugovanost itd. Zadatak (43)–(44) predstavlja sistem algebarskih diferencijskih jednačina. Njegovo rešenje v_h zavisi od parametra h, odnosno od izbora mreža $\overline{\Omega}_h$. Familiju zadataka (43)–(44), koji zavise od h, nazivamo diferencijskom shemom zadatka (41)–(42).

Pri ovakvom postupku diskretizacije pojavljuju se različiti problemi koje uglavnom možemo svrstati u dve grupe:

1. Da li (i u kom smislu) diferencijska shema aproksimira polazni zadatak, i da li njeno rešenje konvergira ka njegovom pri beskonačnom usitnjavanju mreže (odnosno pri $|h| \to 0$)?

2. Efektivno rešavanje diferencijskog zadatka.

Razmotrimo prvo probleme povezane s aproksimacijom. U skupove funkcija definisanih na $\overline{\Omega}_h$, Ω_h i Γ_h uvedimo redom norme $\|\cdot\|_{1,h}$, $\|\cdot\|_{2,h}$ i $\|\cdot\|_{3,h}$. Sa u_h označimo projekciju rešenja $u = u(x)$ zadatka (41)–(42) na prostor funkcija definisanih na $\overline{\Omega}_h$ (npr. ako je $u(x)$ neprekidna možemo uzeti $u_h(x) = u(x)$, $x \in \overline{\Omega}_h$). Označimo sa $z_h = v_h - u_h$ grešku sheme. Ako su operatori $\mathcal{L}_h$ i l_h linearni tada z_h zadovoljava uslove:

$$\mathcal{L}_h z_h(x) = \varphi_h(x), \quad x \in \Omega_h, \tag{45}$$

$$l_h z_h(x) = \psi_h(x), \quad x \in \Gamma_h, \tag{46}$$

gde su φ_h i ψ_h greške aproksimacije (na funkciji $u(x)$) diferencijalne jednačine (41) i dodatnog uslova (42). Lako se vidi da je (45)–(46) zadatak istog tipa kao (43)–(44).

Za diferencijsku shemu (43)–(44) kažemo da aproksimira zadatak (41)–(42) ako $\|\varphi_h\|_{2,h} \to 0$ i $\|\psi_h\|_{3,h} \to 0$ kad $|h| \to 0$. Ako je $\|\varphi_h\|_{2,h}, \|\psi_h\|_{3,h} = O(|h|^k)$ kažemo da shema ima k-ti red aproksimacije. Slično, kažemo da diferencijska shema konvergira, odnosno konvergira brzinom $O(|h|^k)$, ako $\|v_h - u_h\|_{1,h} \to 0$ kad $|h| \to 0$, odnosno ako je $\|v_h - u_h\|_{1,h} = O(|h|^k)$.

Za diferencijske sheme se takođe uvode pojmovi stabilnosti i korektnosti. Za shemu (43)–(44) kažemo da je stabilna ako za dovoljno malo $|h| \le h_0$ njeno rešenje v_h neprekidno zavisi od ulaznih podataka f_h i g_h, pri čemu je ta zavisnost ravnomerna po h. Ako su operatori $\mathcal{L}_h$ i l_h linearni tada stabilnost znači da postoje konstante M_1 i M_2, koje ne zavise od h, f_h i g_h, takve da je za $|h| \le h_0$:

$$\|v_h\|_{1,h} \le M_1\|f_h\|_{2,h} + M_2\|g_h\|_{3,h}. \tag{47}$$

Ako je shema stabilna i aproksimira polazni zadatak tada ona konvergira. Zaista, primenjujući ocenu (47) na zadatak (45)–(46) dobijamo:

$$\|v_h - u_h\|_{1,h} = \|z_h\|_{1,h} \le M_1\|\varphi_h\|_{2,h} + M_2\|\psi_h\|_{3,h} \to 0, \quad |h| \to 0.$$

Nejednakosti tipa (47) nazivaju se apriornim ocenama za shemu (43)–(44). Dobijanje ovakvih ocena je jedan od važnih zadataka teorije diferencijskih shema.

Ako je diferencijska shema (43)–(44) stabilna i za $|h| \leq h_0$ jednoznačno rešiva pri proizvoljnim ulaznim podacima f_h i g_h kažemo da je ona korektna. Korektne sheme imaju najvažniju ulogu i u teoriji i u praksi.

Prilikom rešavanja diferencijskog zadatka (43)–(44) takođe se javljaju određeni problemi. Diferencijska shema se obično svodi na sistem linearnih jednačina s velikim brojem nepoznatih i nije svejedno koliko će se vremena, odnosno aritmetičkih operacija, utrošiti na njegovo rešavanje. Ovde se prirodno nameću optimizacioni zadaci sledećeg oblika:

— odrediti algoritam pomoću kojeg se rešenje zadatka (43)–(44) (s datom tačnošću) dobija korišćenjem minimalnog broja aritmetičkih operacija

— konstruisati diferencijsku shemu koja aproksimira zadatak (41)–(42) s datom tačnošću, a čije se rešenje dobija minimalnim brojem aritmetičkih operacija.

Diferencijsku shemu nazivamo ekonomičnom ako zadovoljava neki od ovih, ili sličnih, uslova optimalnosti, Konstruisanje ekonomičnih diferencijskih shema predstavlja jedan od važnih zadataka teorije diferencijskih shema.

7. Osnovne diferencijske formule

a. Mreža i osnovni diferencijski operatori. U daljem radu ćemo se uglavnom služiti tzv. ravnomernim mrežama. Neka je $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ i $h_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Sa R_h^n označimo skup tačaka (čvorova) $\mathrm{R}_h^n = \{(i_1 h_1, i_2 h_2, \ldots, i_n h_n) \mid i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, koji ćemo nazivati mrežom. Kod eliptičkih problema najčešće ćemo koristiti mreže s istim korakom u svim pravcima: $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = h$. Kod paraboličkih i hiperboličkih problema obično se u pravcu „prostornih promenljivih" $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ koristi jedan korak $h_1 = h_2 = \cdots = h_{n-1} = h$, a u pravcu „vremenske promenljive" $x_n = t$ drugi $h_n = \tau$. Neka je $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ ograničena, konveksna, jednostruko povezana oblast i Γ njena granica. Sa Ω_h označimo skup tačaka $x \in \mathrm{R}_h^n$ koje pripadaju Ω_h zajedno sa svojom okolinom $O(x) = \{(x_1 + i_1 h_1, \ldots, x_n + i_n h_n) \mid i_1, \ldots, i_n = 0, \pm 1\}$, sa Γ_h skup tačaka iz R_h^n koje pripadaju Ω_h ali ne pripadaju Ω_h i sa $\overline{\Omega}_h$ skup $\Omega_h \cup \Gamma_h$. Ω_h nazivamo skupom unutrašnjih tačaka (čvorova), a Γ_h — granicom mrežne oblasti ili skupom graničnih čvorova. U slučaju diferencijalnih jednačina reda višeg od dva za definisanje unutrašnjih i graničnih čvorova koriste se šire okoline $(i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, \pm 1, \ldots, \pm k)$. Mrežu Ω_h nazivamo povezanom ako proizvoljna dva njena čvora možemo spojiti izlomljenom linijom čiji su odsečci paralelni koordinatnim osama, a vrhovi pripadaju Ω_h. U daljem radu služićemo se samo povezanim mrežama. Pri našim pretpostavkama o oblasti Ω mreža Ω_h će biti povezana ako su koraci $h_1, h_2, \ldots, h_n$ dovoljno mali.

Neka je v funkcija definisana na mreži R_h^n (ili na $\overline{\Omega}_h$). Označimo $v_{i_1 i_2 \ldots i_n} = v(i_1 h_1, i_2 h_2, \ldots, i_n h_n)$. Operatore količnika razlika definišemo na sledeći način:

$$
\begin{gathered}
(v_{x_k})_{i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n} = (v_{i_1,\ldots,i_k+1,\ldots,i_n} - v_{i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n})/h_k = (v_{\bar{x}_k})_{i_1,\ldots,i_k+1,\ldots,i_n} \\
v_{\overset{\circ}{x}_k} = (v_{x_k} + v_{\bar{x}_k})/2
\end{gathered}
\tag{48}
$$

v_{x_k} nazivamo razlikom unapred, $v_{\bar{x}_k}$ razlikom unazad, a $v_{\overset{\circ}{x}_k}$ centralnom razlikom.

b. Neke diferencijske formule. Posmatrajmo jednodimenzioni slučaj. Sa $\bar{\omega}_h$ označimo mrežu na odsečku $[0,l]$: $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih \mid i = 0,1,\ldots,N;\, Nh = l\}$. Uvedimo takođe sledeće oznake:

$$
\begin{aligned}
(u,v) &= h\sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i, \qquad (u,v] = h\sum_{i=1}^{N} u_i v_i, \qquad [u,v) = h\sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i,\\
\|u\| &= (u,u)^{1/2}, \qquad \|u]| = (u,u]^{1/2}, \qquad |[u\| = [u,u)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Formuli diferenciranja proizvoda $(uv)' = u'v + uv'$ odgovaraju sledeće formule s količnicima razlika:

$$
\begin{aligned}
(uv)_{x,i} &= u_{x,i}v_i + u_{i+1}v_{x,i} = u_{x,i}v_{i+1} + u_i v_{x,i}\\
(uv)_{\bar{x},i} &= u_{\bar{x},i}v_i + u_{i-1}v_{\bar{x},i} = u_{\bar{x},i}v_{i-1} + u_i v_{\bar{x},i}.
\end{aligned}
$$

Formuli parcijalne integracije

$$\int_0^l uv'\,dx = uv\big|_0^l - \int_0^l u'v\,dx$$

kao u prethodnom slučaju, odgovaraju dve formule

$$(u,v_x) = u_N v_N - u_0 v_1 - (u_{\bar{x}}, v], \quad (u,v_{\bar{x}}] = u_N v_{N-1} - u_0 v_0 - [u_x, v). \tag{50}$$

Analog prve Greenove formule

$$\int_0^l u(kv')'\,dx = -\int_0^l ku'v'\,dx + kuv'\big|_0^l$$

dobijamo iz prve jednakosti u (50), pišući $kv_{\bar{x}}$ umesto v:

$$(u,(kv_{\bar{x}})_x) = -(kv_{\bar{x}}, u_{\bar{x}}] + k_N u_N v_{\bar{x},N} - k_1 u_0 v_{x,0}.$$

Specijalno, ako je $u = v$ i $u_0 = u_N = 0$ dobijamo:

$$(u,(ku_{\bar{x}})_x) = -(ku_{\bar{x}}, u_{\bar{x}}] = -(k,(u_{\bar{x}})^2]. \tag{51}$$

Slično dobijamo analog druge Greenove formule

$$
\begin{aligned}
\int_0^l u(kv')'\,dx - \int_0^l v(ku')'\,dx &= k\,(uv' - vu')\big|_0^l\\
(u,(kv_{\bar{x}})_x) - (v,(ku_{\bar{x}})_x) &= k_N(uv_{\bar{x}} - u_{\bar{x}}v)_N - k_1(uv_x - u_x v)_0.
\end{aligned}
$$

Ako su u i v jednaki nuli za $x = 0$ i $x = l$ odavde dobijamo

$$(u,(kv_{\bar{x}})_x) = (v,(ku_{\bar{x}})_x)$$

što znači da je operator $(ku_{\bar{x}})_x$ samokonjugovan. Ako je $k < 0$ iz (51) sledi da je on i pozitivan.

c. Diferencijski analozi teorema potapanja. Dokazaćemo nekoliko nejednakosti koje odgovaraju nejednakostima (24) i (25), odnosno najjednostavnijim teoremama potapanja S.L. Soboljeva (videti Soboljev [1962]).

LEMA 1. *Za svaku funkciju v definisanu na mreži $\bar{\omega}_h$ i jednaku nuli za $x = 0$ i $x = l$ važi nejednakost*

$$\|v\|_{C,h} = \max_{0 \le i \le N} |v_i| \le \sqrt{l}\|v_{\bar{x}}]|/2. \tag{52}$$

Dokaz je analogan dokazu nejednakosti (25). Polazeći od identiteta

$$lv_i^2 = (l - ih)v_i^2 + ihv_i^2 = (l - ih)\Big(h\sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j}\Big)^2 + ih\Big(h\sum_{j=i+1}^{N} v_{\bar{x},j}\Big)^2$$

i koristeći nejednakost Cauchy-Schwartza dobijamo:

$$\begin{aligned} lv_i^2 &\le (l - ih)h\sum_{j=1}^{i} 1^2 \cdot h\sum_{j=1}^{i} v_{\bar{x},j}^2 + ih \cdot h\sum_{j=i+1}^{N} 1^2 \cdot h\sum_{j=i+1}^{N} v_{\bar{x},j}^2 \\ &= ih(l - ih) \cdot h\sum_{j=1}^{N} v_{\bar{x},j}^2 \le (l^2/4)\|v_{\bar{x}}]|^2, \end{aligned}$$

odakle sledi (52).

Ako je v jednako nuli samo na jednom kraju intervala umesto (52) važi slabija nejednakost $\|v\|_{C,h} \le \sqrt{l}\|v_{\bar{x}}]|$. Za proizvoljnu funkciju v definisanu na $\bar{\omega}_h$ važi:

$$\|v\|_{C,h}^2 \le 2\big(l\|v_{\bar{x}}]|^2 + v_0^2\big), \quad \|v\|_{C,h}^2 \le 2\big(l\|v_{\bar{x}}]|^2 + v_N^2\big). \tag{53}$$

LEMA 2. *Za proizvoljnu funkciju v definisanu na mreži $\bar{\omega}_h$ i jednaku nuli za $x = 0$ i $x = l$ važe nejednakosti*

$$h\|v_{\bar{x}}]| \le 2\|v\| \le l\|v_{\bar{x}}]|. \tag{54}$$

Dokaz. Leva nejednakost sledi iz

$$\|v_{\bar{x}}]| = h\sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{v_i - v_{i-1}}{h}\Big)^2 \le h\sum_{i=1}^{N}\frac{2}{h^2}(v_i^2 + v_{i-1}^2) = \frac{4}{h^2}h\sum_{i=1}^{N-1} v_i^2 = \frac{4}{h^2}\|v\|^2,$$

a desna iz

$$\|v\|^2 = h\sum_{i=1}^{N-1} v_i^2 \le h(N-1)\max_{1\le i\le N-1} v_i^2 < l\|v\|_{C,h}^2$$

i nejednakosti (52).

Kasnije ćemo pokazati u 2.2.c, koristeći izraze za sopstvene vrednosti operatora $v_{\bar{x}x}$, da se desna nejednakost u (54) može pojačati pišući $l/\sqrt{2}$ umesto l.

d. Princip maksimuma. Razmotrimo u oblasti $\overline{\Omega}_h$ sledeći zadatak:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}[v] \equiv a(x)v(x) - \sum_{\xi\in O'(x)} b(x,\xi)v(\xi) = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega_h, \\ v(x) = g(x), \quad x \in \Gamma_h,\end{gathered} \tag{55}$$

gde je $O'(x) = O(x) \setminus \{x\}$, a koeficijenti $a(x)$ i $b(x,\xi)$ zadovoljavaju uslove

$$\begin{aligned}&a(x) > 0, \quad b(x,\xi) \geq 0 \text{ pri čemu je } b(x,\xi) > 0 \\ &\text{ako je } \xi_i = x_i,\ i \neq j,\ \xi_j = x_j \pm h_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \\ &d(x) = a(x) - \sum_{\xi\in O'(x)} b(x,\xi) \geq 0\end{aligned} \tag{56}$$

za svako $x \in \Omega_h$. Diferencijski analozi eliptičkih graničnih problema obično zadovoljavaju ove uslove. Za mrežu Ω_h pretpostavimo da je povezana.

TEOREMA 4 (princip maksimuma). *Neka je funkcija $v = v(x)$ definisana na mreži $\overline{\Omega}_h$ i različita od konstante. Ako je $\mathcal{L}[v] \leq 0$ ($\mathcal{L}[v] \geq 0$) tada $v(x)$ ne može dostizati najveću pozitivnu (najmanju negativnu) vrednost u unutrašnjoj tački mreže Ω_h.*

Dokaz. Označimo $\mathcal{L}[v] = f(x)$ i neka je $f(x) \leq 0$ za svako $x \in \Omega_h$. Pretpostavimo da $v(x)$ uzima najveću pozitivnu vrednost u nekom unutrašnjem čvoru. Pošto je $v(x) \not\equiv 0$ i mreža povezana postojaće dva susedna čvora $x^0, x^1 \in \Omega_h$ takva da je $v(x^0) = \max_{\overline{\Omega}_h} v(x) = M > 0$ i $v(x^1) < M$. Jednačinu (55) u čvoru x^0 napišimo u obliku

$$\left[a(x^0) - \sum_{\xi\in O'(x^0)} b(x^0,\xi)\right] v(x^0) + \sum_{\xi\in O'(x^0)} b(x^0,\xi)[v(x^0) - v(\xi)] = f(x^0).$$

Pošto je

$$\sum_{\xi\in O'(x^0)} b(x^0,\xi)[v(x^0) - v(\xi)] \geq b(x^0,x^1)[v(x^0) - v(x^1)] > 0$$

odatle dobijamo

$$f(x^0) > \left[a(x^0) - \sum_{\xi\in O'(x^0)} b(x^0,\xi)\right] v(x^0) = d(x^0)v(x^0) \geq 0$$

tj. $f(x^0) > 0$ što je suprotno pretpostavci da je $f(x) \leq 0$.

Drugo tvrđenje se dokazuje analogno.

TEOREMA 5. *Neka je funkcija $v(x)$ definisana na $\overline{\Omega}_h$ i nenegativna na Γ_h i neka je ispunjen uslov $\mathcal{L}[v] \geq 0$ na Ω_h. Tada je $v(x)$ nenegativna za svako $x \in \overline{\Omega}_h$.*

Važi i obrnuto: ako je $v(x) \le 0$ na Γ_h i $\mathcal{L}[v] \le 0$ na Ω_h, tada je $v(x) \le 0$ za svako $x \in \overline{\Omega}_h$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{L}[v] \ge 0$ na Ω_h i $v(x) \ge 0$ na Γ_h. Pretpostavimo da je bar u jednoj tački $x^0 \in \Omega_h$, $v(x^0) < 0$. Tada $v(x)$ mora uzimati najmanju negativnu vrednost unutar Ω_h, što je nemoguće prema teoremi 4.

Drugo tvrđenje se analogno dokazuje.

POSLEDICA. *Zadatak* (55) *ima jedinstveno rešenje.*

Dovoljno je dokazati da homogeni zadatak (55) sa $f(x) = 0$ ima samo trivijalno rešenje. Neposredno se proverava da $v(x) \equiv 0$ jeste rešenje ovog zadatka. Iz teoreme 5 sledi da proizvoljno njegovo rešenje istovremeno zadovoljava uslove $v(x) \ge 0$ i $v(x) \le 0$ tj. $v(x) \equiv 0$ je jedinstveno rešenje homogenog zadatka. Odatle sledi postojanje i jedinstvenost rešenja zadatka (55).

TEOREMA 6 (teorema poređenja). *Neka je $v(x)$ rešenje zadatka* (55), *a $\bar{v}(x)$ rešenje zadatka koji se dobija iz* (55) *zamenom $f(x)$ sa $\bar{f}(x)$ i $g(x)$ sa $\bar{g}(x)$. Ako je $|f(x)| \le \bar{f}(x)$ i $|g(x)| \le \bar{g}(x)$ tada je $|v(x)| \le \bar{v}(x)$, $x \in \overline{\Omega}_h$.*

Dokaz. Iz teoreme 5 sledi da je $\bar{v}(x) \ge 0$ na Ω_h. Funkcije $u = \bar{v} + v$ i $w = \bar{v} - v$ zadovoljavaju uslove oblika (55) s desnim stranama $f_u = \bar{f} + f$ i $g_u = \bar{g} + g$ odnosno $f_w = \bar{f} - f$ i $g_w = \bar{g} - g$. Pošto je $f_u \ge 0$, $g_u \ge 0$ i $f_w \ge 0$, $g_w \ge 0$ biće prema teoremi 5 $u \ge 0$ tj. $v \ge -\bar{v}$ i $w \ge 0$ tj. $v \le \bar{v}$. Odatle sledi $-\bar{v} \le v \le \bar{v}$ odnosno $|v| \le \bar{v}$ na $\overline{\Omega}_h$. ∎

POSLEDICA. *Za rešenje zadatka*

$$\mathcal{L}[v] = 0, \quad x \in \Omega_h; \qquad v(x) = g(x), \quad x \in \Gamma_h$$

važi ocena $\max_{\overline{\Omega}_h} |v(x)| \le \max_{\Gamma_h} |v(x)| = \max_{\Gamma_h} |g(x)|$.

Dokaz sledi iz teoreme 6 stavljajući $f = \bar{f} = 0$ i $\bar{g} = |g|$.

II Eliptičke jednačine

1. Aproksimacija najjednostavnijih diferencijalnih izraza

Neka funkcija $u(x)$ ima na intervalu $[x, x+h]$ neprekidan i ograničen drugi izvod. Polazeći od Taylorovog razvoja

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + h^2u''(\xi)/2, \quad \xi \in (x, x+h)$$

dobijamo:

$$u_x = \big(u(x+h) - u(x)\big)/h = u'(x) + (h/2)u''(\xi), \quad \text{tj.} \quad u' = u_x + O(h).$$

Analogno dobijamo $u' = u_{\bar{x}} + O(h)$. Pod pretpostavkom da $u(x)$ ima na intervalu $[x-h, x+h]$ neprekidan i ograničen treći izvod možemo $u'(x)$ aproksimirati s tačnošću $O(h^2)$. Tada je

$$u(x \pm h) = u(x) \pm hu'(x) + (h^2/2)u''(x) \pm (h^3/6)u'''(\xi^{\pm})$$

odakle sledi:

$$u_{\mathring{x}} \equiv \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \equiv u'(x) + \frac{h^2}{12}\big[u'''(\xi^+) + u'''(\xi^-)\big], \quad \text{tj.} \quad u' = u_{\mathring{x}} + O(h^2).$$

Slično, pod pretpostavkom da $u(x)$ ima ograničene izvode još višeg reda, možemo izvesti formule

$$u'(x) = (1/(12h))\big[-u(x+2h) + 8u(x+h) - 8u(x-h) + u(x-2h)\big] + O(h^4),$$
$$u'(x) = (1/(60h))\big[u(x+3h) - 9u(x+2h) + 45u(x+h) - 45u(x-h)$$
$$+9u(x-2h) - u(x-3h)\big] + O(h^6)$$

itd.

U slučaju drugog izvoda $u''(x)$ važe formule

$$u_{\bar{x}x} \equiv \big(u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\big)/h^2 = u''(x) + O(h^2),$$
$$u_{\bar{x}x} - h^2 u_{\bar{x}x\bar{x}x}/12 = u'' + O(h^4), \quad \text{itd.}$$

Navedimo još primer aproksimacije mešovitog drugog izvoda za funkciju dve promenljive $u(x_1, x_2)$

$$\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2 = u_{\mathring{x}_1 \mathring{x}_2} + O(h^2).$$

Isti red aproksimacije se dobija i na sledeći način

$$\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2 = \big(u_{x_1 x_2} + u_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\big)/2 + O(h^2),$$

ili takođe

$$\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2 = \big(u_{x_1 \bar{x}_2} + u_{\bar{x}_1 x_2}\big)/2 + O(h^2).$$

2. Primeri diferencijskih shema. Aproksimacija i konvergencija.

a. Jednodimenzioni slučaj. Na intervalu $[0, l]$ posmatrajmo prvi granični problem za linearnu običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda:

$$Lu \equiv \big(a(x)u'\big)' - d(x)u = f(x), \quad x \in (0, l), \quad u(0) = u(l) = 0. \tag{1}$$

Neka je

$$a(x) \geq c_0 > 0, \quad d(x) \geq 0 \quad \text{i} \quad a(x) \in C^1[0, l], \quad d(x) \in C[0, l], \quad f(x) \in C[0, l].$$

Zadatak (1) tada ima jedinstveno rešenje $u \in C^2[0, l]$. Operator L je samokonjugovan i negativno definisan, u smislu skalarnog proizvoda iz $L_2[0, l]$, na skupu funkcija iz $C^2[0, l]$ koje zadovoljavaju granične uslove $u(0) = u(l) = 0$.

Uvedimo mrežu $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih \mid i = 0, 1, \ldots, N; h = l/N\}$. Zadatak (1) aproksimirajmo na sledeći način:

$$\begin{aligned} L_h v \equiv \big[(a v_{\bar{x}})_x + (a v_x)_{\bar{x}}\big]/2 - dv = f, \quad & x = x_i \in \omega_h = \overline{\omega}_h \setminus \gamma_h, \\ v = 0, \quad & x \in \gamma_h = \{0, l\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Označimo $v_i = v(x_i)$, $f_i = f(x_i)$ itd. Sa $\mathring{\mathcal{L}}_h$ označimo skup funkcija definisanih na $\overline{\omega}_h$ i jednakih nuli za $x = 0$ i $x = l$. U $\mathring{\mathcal{L}}_h$ uvedimo skalarni proizvod i normu:

$$(v, w) = h \sum_{i=1}^{N-1} v_i w_i, \qquad \|v\| = (v, v)^{1/2}.$$

Operator

$$\Lambda_h v = \begin{cases} L_h v, & x \in \omega_h \\ 0, & x \in \gamma_h \end{cases}$$

preslikava $\mathring{\mathcal{L}}_h$ u $\mathring{\mathcal{L}}_h$. Zadatak (2) možemo tako predstaviti u obliku $\Lambda_h v = f$, $v, f \in \mathring{\mathcal{L}}_h$. Dalje je:

$$(\Lambda_h v, w) = (L_h v, w) = -h \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i + a_{i-1}}{2} v_{\bar{x},i} w_{\bar{x},i} - h \sum_{i=1}^{N-1} d_i v_i w_i,$$

što znači da je operator Λ_h samokonjugovan. Koristeći (1.54) dobijamo:

$$(\Lambda_h v, v) = -h \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i + a_{i-1}}{2} v_{\bar{x},i}^2 - h \sum_{i=1}^{N-1} d_i v_i^2 \le -c_0 h \sum_{i=1}^{N} v_{\bar{x},i}^2 \le -4c_0 l^{-2} \|v\|^2, \quad (3)$$

što znači da je Λ_h negativno definisan. Prema tome, zadatak (2) ima jedinstveno rešenje. Iz (3) dalje sledi:

$$4c_0 l^{-2} \|v\|^2 \le c_0 \|v_{\bar{x}}]|^2 \le (-L_h v, v) = (-f, v) \le \|f\| \cdot \|v\|$$

ili, posle skraćivanja sa $\|v\|$:

$$\|v\| \le (l^2/(4c_0))\|f\| \quad \text{i} \quad \|v_{\bar{x}}]| \le (l/(2c_0))\|f\|. \quad (4)$$

Iz poslednje dve nejednakosti sledi:

$$\|v\|_{W_2^1,h} \equiv \left(\|v\|^2 + \|v_{\bar{x}}]|\right)^{1/2} \le (l/(4c_0))\sqrt{l^2+4}\|f\|, \quad (5)$$

a iz (1.52):

$$\|v\|_{C,h} \equiv \max_{0 \le i \le N} |v_i| \le (l\sqrt{l}/(4c_0))\|f\|. \quad (6)$$

Ocene (4), (5) i (6) označavaju stabilnost rešenja zadatka (2) u normama $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{W_2^1,h}$ i $\|\cdot\|_{C,h}$. Prema tome, diferencijski zadatak (2) je korektan. Napomenimo da ocene (4) i (5) predstavljaju diferencijske analoge ocena (1.27) i (1.29) u jednodimenzionom slučaju.

Zadržimo se na aproksimaciji diferencijske sheme (2). Neka je $u = u(x)$ rešenje zadatka (1) i $u_i = u(x_i)$. Ako $u \in C^4[0,1]$ i $a \in C^3[0,1]$, tada razvijanjem $u_{i\pm1}$ i $a_{i\pm1}$ u Taylorov red oko tačke x_i dobijamo: $(L_h u)_i = (Lu)_i + \psi_i$, gde je $\psi_i = O(h^2)$. Označimo $z = u - v$, gde je u rešenje zadatka (1) a v rešenje zadatka (2). Funkcija z definisana je na mreži $\overline{\omega}_h$ i zadovoljava uslove:

$$L_h z = \psi, \quad x \in \omega_h, \qquad z_0 = z_N = 0.$$

Ovo je zadatak istog tipa kao (2), pa se na njega mogu primeniti ocene (4), (5) i (6). Pošto je $\|\psi\| = O(h^2)$ odatle sledi:

$$\|z\|, \ \|z\|_{W_2^1,h}, \ \|z\|_{C,h} = O(h^2).$$

Drugim rečima, diferencijska shema (2) konvergira brzinom $O(h^2)$ u normama $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{W_2^1,h}$ i $\|\cdot\|_{C,h}$.

Pređimo sada na treći granični problem:

$$\begin{gathered} Lu \equiv \big(a(x)u'\big)' - d(x)u = f(x), \quad x \in (0,l) \\ -a(0)u'(0) + \sigma_1 u(0) = 0, \quad \sigma_1 > 0; \qquad a(l)u'(l) + \sigma_2 u(l) = 0, \quad \sigma_2 > 0 \end{gathered} \tag{7}$$

Za funkcije $a(x)$, $d(x)$ i $f(x)$ pretpostavljamo da zadovoljavaju iste uslove kao ranije. Zadatak (7) takođe ima jedinstveno rešenje $u \in C^2[0,l]$. Operator L je samokonjugovan i pozitivno definisan.

U unutrašnjim tačkama mreže $\bar{\omega}_h$ Lu aproksimiramo kao u formuli (2). Iz razvoja:

$$\frac{a_i + a_{i+1}}{2} u_{x,i} = a_i u_i' + \frac{h}{2}(au')_i' + O(h^2)$$

sledi da granični uslov u tački $x = 0$ možemo s tačnošću $O(h^2)$ aproksimirati na sledeći način:

$$-\frac{a_0 + a_1}{2} v_{x,0} + \left(\sigma_1 + \frac{h}{2} d_0\right) v_0 = -\frac{h}{2} f_0.$$

Slično, granični uslov u tački $x = l$ aproksimiramo sa

$$\frac{a_n + a_{N-1}}{2} v_{\bar{x},N} + \left(\sigma_2 + \frac{h}{2} d_N\right) v_N = -\frac{h}{2} f_N.$$

Uzimajući sve ovo u obzir, diferencijsku shemu za zadatak (7) možemo predstaviti u obliku:

$$\bar{\Lambda}_h v = f, \quad x \in \bar{\omega}_h \tag{8}$$

gde je:

$$\left(\bar{\Lambda}_h v\right)_i = \begin{cases} h^{-1}\big((a_0 + a_1) v_{x,0} - 2\sigma_1 v_0\big) - d_0 v_0, & i = 0 \\ (L_h v)_i = \big((a v_{\bar{x}})_{x,i} + (a v_x)_{\bar{x},i}\big)/2 - d_i v_i, & i = 1, 2, \ldots, N-1 \\ h^{-1}\big(-(a_N + a_{N-1}) v_{\bar{x},N} - 2\sigma_2 v_N\big) - d_N v_N, & i = N. \end{cases}$$

Sa $\mathcal{L}_h$ označimo skup funkcija definisanih na mreži $\bar{\omega}_h$. U $\mathcal{L}_h$ uvedimo skalarni proizvod i normu:

$$[v, w] = (v, w) + h(v_0 w_0 + v_N w_N)/2, \qquad \|[v]\| = [v, v]^{1/2}.$$

Operator $\bar{\Lambda}_h$ preslikava $\mathcal{L}_h$ u $\mathcal{L}_h$. Dalje je:

$$\begin{aligned} \left[\bar{\Lambda}_h v, w\right] &= -h \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i + a_{i-1}}{2} v_{\bar{x},i} w_{\bar{x},i} - \sigma_1 v_0 w_0 - \sigma_2 v_N w_N \\ &\quad - h \sum_{i=1}^{N-1} d_i v_i w_i - \frac{h}{2}(d_0 v_0 w_0 + d_N v_N w_N) = \left[v, \bar{\Lambda}_h w\right], \end{aligned}$$

što znači da je $\bar{\Lambda}_h$ samokonjugovan. Koristeći nejednakosti (1.53) dalje dobijamo:

$$
\begin{aligned}
[\bar{\Lambda}_h v, v] &\le -h \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i + a_{i-1}}{2} v_{\bar{x},i}^2 - \sigma_1 v_0^2 - \sigma_2 v_N^2 \\
&\le -c\big(2l\|v_{\bar{x}}]|^2 + v_0^2 + v_N^2\big) \le -c\|v\|_{C,h}^2 \le -cl^{-1}\|[v]|^2,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

gde je $c = \min\{c_0/(2l), \sigma_1, \sigma_2\} > 0$. Prema tome, operator $\bar{\Lambda}_h$ je negativno definisan i zadatak (8) ima jedinstveno rešenje. Iz (9), slično kao u slučaju prvog graničnog problema, dobijamo ocene:

$$\|[v]| \le c_1 \|[f]|, \tag{10}$$

$$\|[v]|_{W_2^1,h} \equiv \big\{\|[v]|^2 + \|v_{\bar{x}}]|^2 + v_0^2 + v_N^2\big\}^{1/2} \le c_2 \|[f]|, \tag{11}$$

$$\|v\|_{C,h} \le c_3 \|[f]|, \qquad c_1, c_2, c_3 = \text{const} > 0. \tag{12}$$

Prema tome, diferencijska shema (8) je stabilna i korektna.

Neka je $u = u(x)$ rešenje zadatka (7), v rešenje zadatka (8) i $z = u - v$. Funkcija z definisana je na mreži $\bar{\omega}_h$ i kad $u \in C^4[0,1]$, $a \in C^3[0,1]$ zadovoljava uslov:

$$
\bar{\Lambda}_h z = \psi = \begin{cases} O(h^2), & x \in \omega_h \\ O(h), & x \in \gamma_h. \end{cases}
\tag{13}
$$

Zato iz ocena (10), (11) i (12) sledi da diferencijska shema (8) konvergira u normama $\|[\cdot]|$, $\|[\cdot]|_{W_2^1,h}$ i $\|\cdot\|_{C,h}$ brzinom $O(h^{3/2})$.

Tačniju ocenu možemo dobiti ocenjujući skalarni proizvod $[-\bar{\Lambda}_h v, v]$ na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
[-\bar{\Lambda}_h v, v] = [-f, v] &= -\frac{h}{2} f_0 v_0 - \frac{h}{2} f_N v_N + (-f, v) \\
&\le \varepsilon\big\{v_0^2 + v_N^2 + (v,v)\big\} + \frac{1}{4\varepsilon}\left\{\frac{h^2}{4} f_0^2 + \frac{h^2}{4} f_N^2 + (f,f)\right\}.
\end{aligned}
$$

Dalje je:

$$
\begin{aligned}
(v,v) &\le \|[v]|^2 \le lc^{-1}[-\bar{\Lambda}_h v, v] \\
v_0^2 + v_N^2 &\le c_1^{-1}(\sigma_1 v_0^2 + \sigma_2 v_N^2) \le c_1^{-1}[-\bar{\Lambda}_h v, v],
\end{aligned}
$$

gde je $c_1 = \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Tako dobijamo ocenu:

$$
[-\bar{\Lambda}_h v, v] \le \varepsilon\left(\frac{l}{c} + \frac{1}{c_1}\right)[-\bar{\Lambda}_h v, v] + \frac{1}{4\varepsilon}\left(\frac{h^2}{4} f_0^2 + \frac{h^2}{4} f_N^2 + \|f\|^2\right)
$$

odnosno, za $0 < \varepsilon(l/c + 1/c_1) < 1$:

$$
[-\bar{\Lambda}_h v, v] \le \frac{1}{4\varepsilon[1 - \varepsilon(l/c + 1/c_1)]}\left(\frac{h^2}{4} f_0^2 + \frac{h^2}{4} f_N^2 + \|f\|^2\right).
$$

Birajući ε iz uslova minimuma veličine $\{4\varepsilon[1-\varepsilon(l/c+1/c_1)]\}^{-1}$ dobijamo $\varepsilon = \frac{1}{2}(l/c+1/c_1)^{-1}$, i zamenjujući u (9):

$$cl^{-1}\|[v]\|^2 \le c\|v\|^2_{C,h} \le c\big(2l\|v_{\bar{x}}]|^2 + v_0^2 + v_N^2\big) \le [-\bar{\Lambda}_h v, v]$$
$$\le \left(\frac{l}{c}+\frac{1}{c_1}\right)\cdot\left(\frac{h^2}{4}f_0^2 + \frac{h^2}{4}f_N^2 + \|f\|^2\right)$$

Primenjujući dobijene nejednakosti na zadatak (13) dobijamo sledeće ocene brzine konvergencije sheme (8):

$$\|[v]|,\ \|[v]\|_{W_2^1,h},\ \|v\|_{C,h} = O(h^2).$$

Primedba: Analogni rezultati mogu se dobiti i pod slabijim pretpostavkama, kad ulazni podaci nisu neprekidne funkcije. U tom slučaju se za koeficijente diferencijske sheme moraju uzeti neke usrednjene vrednosti, npr.

$$f_i = \frac{1}{h}\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} f(x)\,dx$$

i sl. (videti Samarski [1971]).

b. Poissonova jednačina. Neka je u oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ zadat Dirichletov problem za Poissonovu jednačinu:

$$\Delta u \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f, \qquad u|_\Gamma = 0. \tag{14}$$

Neka je Ω ograničena, konveksna, jednostruko povezana oblast s glatkom granicom Γ i $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C(\Omega)$. Zadatak (14) ima jedinstveno rešenje. Operator Δ je samokonjugovan i negativno definisan na skupu funkcija iz $C^2(\Omega)$ koje su jednake nuli na Γ, u smislu skalarnog proizvoda iz $L_2(\Omega)$.

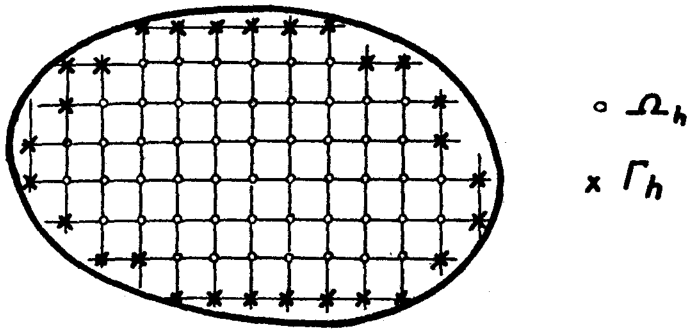
Uzmimo korak $h > 0$ i uvedimo mrežu $\mathbf{R}_h^n$, gde je $\mathbf{R}_h = \{ih \mid i = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$. Neka je dalje $\overline{\Omega}_h = \mathbf{R}_h^n \cap \overline{\Omega}$, Ω_h skup svih tačaka $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ iz $\overline{\Omega}_h$ koje pripadaju $\overline{\Omega}_h$ zajedno sa svojom okolinom $O(x) = \{(x_1, \ldots, x_i \pm h, \ldots, x_n) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ (dvodimenzioni slučaj $n = 2$, prikazan je na slici 1). Ω_h nazivamo skupom unutrašnjih, a Γ_h skupom graničnih tačaka mreže $\overline{\Omega}_h$.

Zadatak (14) aproksimiramo na sledeći način:

$$\Delta_h v \equiv \sum_{i=1}^{n} v_{\bar{x}_i x_i} = f, \quad x \in \Omega_h; \qquad v = 0, \quad x \in \Gamma_h. \tag{15}$$

Sa $\mathring{\mathcal{L}}_h$ označimo skup funkcija definisanih na $\overline{\Omega}_h$ i jednakih nuli na Γ_h. U $\mathring{\mathcal{L}}_h$ uvedimo skalarni proizvod i normu:

$$(v, w) = h^n \sum_{x \in \Omega_h} v(x) w(x), \qquad \|v\| = (v, v)^{1/2}.$$



Sl. 1

Ako je $L_{h,i}$ diferencijski operator definisan na skupu $M_{h,i}$ $(i = 1,2)$ tada označavamo:

$$(L_{h,1}v, L_{h,2}w) = h^n \sum_{x \in M_{h,1} \cap M_{h,2}} L_{h,1}v(x) L_{h,2}w(x).$$

Operator

$$\Lambda_h v = \begin{cases} \Delta_h v, & x \in \Omega_h \\ 0, & x \in \Gamma_h \end{cases}$$

preslikava $\mathring{\mathcal{L}}_h$ u $\mathring{\mathcal{L}}_h$. Zadatak (15) tako možemo predstaviti u obliku $\Lambda_h v = f$. Dalje je:

$$(\Lambda_h v, w) = (\Delta_h v, w) = -\sum_{i=1}^{n} (v_{\bar{x}_i}, w_{\bar{x}_i}),$$

što znači da je operator Λ_h samokonjugovan. Koristeći (1.54) dobijamo:

$$(\Lambda_h v, v) = -\sum_{i=1}^{n} \|v_{\bar{x}_i}\|^2 \le -4nd^{-2}\|v\|^2, \tag{16}$$

gde je d dijametar oblasti $\overline{\Omega}$. Znači, operator Λ_h je negativno definisan, pa zadatak (15) ima jedinstveno rešenje. Iz (16) sledi:

$$4nd^{-2}\|v\|^2 \le \sum_{i=1}^{n} \|v_{\bar{x}_i}\|^2 = (-\Lambda_h v, v) = (-f, v) \le \|f\| \cdot \|v\|,$$

odakle dobijamo:

$$\|v\| \le \frac{d^2}{4n}\|f\|, \quad \sum_{i=1}^{n} \|v_{\bar{x}_i}\|^2 \le \frac{d^2}{4n}\|f\|^2. \tag{17}$$

Iz poslednje dve nejednakosti sledi:

$$\|v\|_{W_2^1,h} \equiv \left(\|v\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|v_{\bar{x}_i}\|^2\right)^{1/2} \le \frac{d}{4n}\sqrt{d^2+4n}\|f\|. \tag{18}$$

Nejednakosti (17) i (18) označavaju stabilnost zadatka (15) u normama $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_{W_2^1,h}$.

Ispitajmo konvergenciju diferencijske sheme (15). Neka je $u \in C^4(\Omega)$ rešenje zadatka (14). Tada je $\Delta_h u = \Delta u + \psi$ kad $x \in \Omega_h$, gde je $\psi = O(h^2)$, i $u(x) = \chi = O(h)$ kad $x \in \Gamma_h$. Sa z označimo razliku $u - v$, gde je v rešenje zadatka (15). Funkcija z definisana je na mreži $\overline{\Omega}_h$ i zadovoljava uslove:

$$\Delta_h z = \psi, \quad x \in \Omega_h, \qquad z|_{\Gamma_h} = \chi.$$

Funkcija z ne pripada prostoru $\mathring{\mathcal{L}}_h$. Zato označimo $z = \zeta + \eta$ gde je

$$\zeta = \begin{cases} z, & x \in \Omega_h \\ 0, & x \in \Gamma_h \end{cases} \quad \text{i} \quad \eta = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_h \\ z = \chi, & x \in \Gamma_h \end{cases}.$$

Funkcija ζ pripada prostoru $\mathring{\mathcal{L}}_h$ i zadovoljava uslove:

$$\Delta_h \zeta = \psi - \Delta_h \eta, \quad x \in \Omega_h, \qquad \zeta|_{\Gamma_h} = 0. \tag{19}$$

Ovo je zadatak istog tipa kao (15), međutim primena ocena (17) i (18) ne daje zadovoljavajući rezultat jer je u prigraničnim čvorovima desna strana suviše velika: $\psi - \Delta_h \eta = O(1/h)$. Zato ćemo postupiti na drugi način. Množeći (19) skalarno s ζ dobijamo:

$$(\Delta_h \zeta, \zeta) = (\psi, \zeta) - (\Delta_h \eta, \zeta).$$

Odavde je dalje:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \|\zeta_{\bar{x}_i}\|^2 &= -(\psi,\zeta) - \sum_{i=1}^{n} (\eta_{\bar{x}_i}, \zeta_{\bar{x}_i}) \\
&\le \varepsilon\|\zeta\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|\psi\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\varepsilon_1\|\zeta_{\bar{x}_i}\| + \frac{1}{4\varepsilon_1}\|\eta_{\bar{x}_i}\|\right) \\
&\le \left(\frac{\varepsilon d^2}{4n} + \varepsilon_1\right)\sum_{i=1}^{n}\|\zeta_{\bar{x}_i}\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|\psi\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}\sum_{i=1}^{n}\|\eta_{\bar{x}_i}\|^2
\end{aligned}$$

Birajući ε i ε_1 tako da bude $\varepsilon d^2/(4n) + \varepsilon_1 < 1$ (npr. $\varepsilon = n/d^2$ i $\varepsilon_1 = 1/4$) dobijamo:

$$\sum_{i=1}^{n} \|\zeta_{\bar{x}_i}\|^2 \le c_1\|\psi\|^2 + c_2 \sum_{i=1}^{n} \|\eta_{\bar{x}_i}\|; \quad c_1, c_2 = \text{const} > 0 \tag{20}$$

Prvi sabirak na desnoj strani se lako ocenjuje: $\|\psi\|^2 = O(h^4)$. Što se tiče drugog, primetimo da je $\eta_{\bar{x}_i} = O(1)$ u nekim graničnim, odnosno prigraničnim, čvorovima mreže $\overline{\Omega}_h$, dok je u ostalim $\eta_{\bar{x}_i} = 0$. Ukupan broj čvorova u $\overline{\Omega}_h$ je veličina reda $O(h^{-n})$, dok je broj čvorova u Γ_h veličina reda $O(h^{-n+1})$. Odatle sledi da je $\|\eta_{\bar{x}_i}\|^2 = h^n\, O(h^{-n+1}) = O(h)$ što zajedno s ocenom $\|\psi\|$ daje:

$$\sum_{i=1}^{n} \|\zeta_{\bar{x}_i}\|^2 = O(h).$$

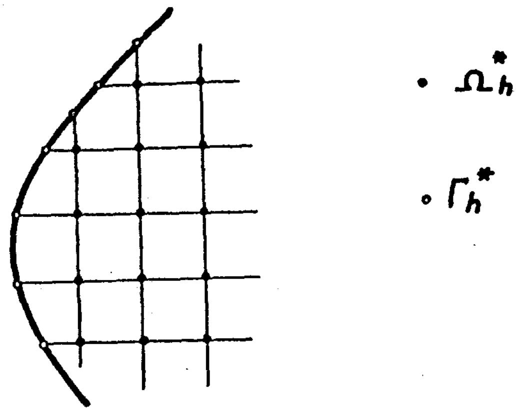
Uzimajući u obzir (16), odavde dobijamo sledeće ocene brzine konvergencije diferencijske sheme (15):

$$\|\zeta\|,\ \|\zeta\|_{W_2^1,h} = O(\sqrt{h}) \tag{21}$$

Na brzinu kovergencije očigledno najviše utiče drugi sabirak s desne strane nejednakosti (20), odnosno aproksimacija graničnog uslova. Ako je oblast n-dimeniona kocka, $\overline{\Omega} = [0,l]^n$, tada se korak h može tako izabrati ($h = l/N$) da bude $\Gamma_h \subset \Gamma$. U tom slučaju je $\eta \equiv 0$ pa umesto (21) dobijamo:

$$\|z\|,\ \|z\|_{W_2^1,h} = O(h^2).$$

Sličan rezultat se može dobiti i u opštem slučaju, koristeći umesto $\overline{\Omega}_h$ mrežu neravnomernu u okolini granice Γ (videti Samarski, Frjazinov [1971]). Skup unutrašnjih čvorova u ovom slučaju se definiše sa $\Omega_h^* = \Omega \cap \mathbf{R}_h^n$, a granica Γ_h^* kao skup prodora pravih $x_j = c_j h$, $c_j \in D$, $j \neq i$, ($i = 1, 2, \ldots, n$) kroz Γ (sl. 2).



Sl. 2

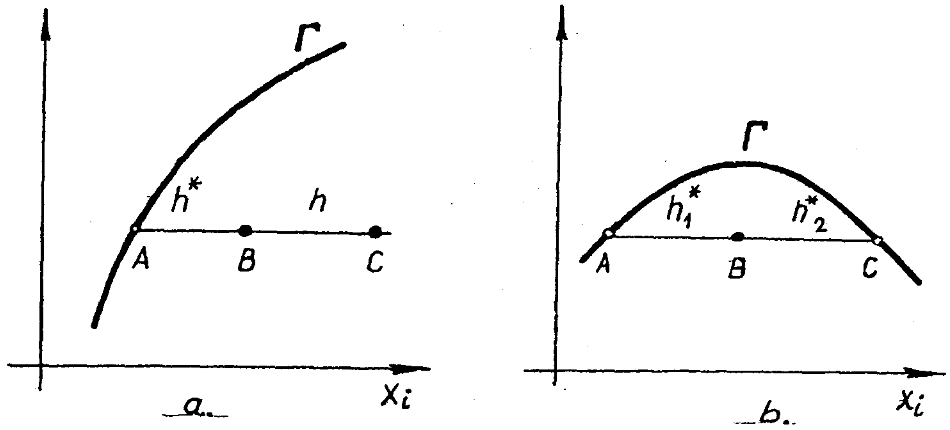
Laplace-ov operator u čvorovima udaljenim od granice aproksimiramo kao i ranije. U prigraničnim čvorovima tipa a i b (videti sl. 3) parcijalni izvod $\partial^2 u/\partial x_i^2$

aproksimiramo sa

$$\frac{2}{h+h^*}\left(\frac{v(C)-v(B)}{h}-\frac{v(B)-v(A)}{h^*}\right) \quad \text{odnosno sa}$$

$$\frac{2}{h_1^*+h_2^*}\left(\frac{v(C)-v(B)}{h_2^*}-\frac{v(B)-v(A)}{h_1^*}\right).$$

Napomenimo da u slučaju ovakve aproksimacije dolazi do teškoća druge vrste: gubi se samokonjugovanost operatora itd.



Sl. 3

Druga ocena može se dobiti korišćenjem principa maksimuma. Označimo $z = z_1 + z_2$ gde z_1 i z_2 zadovoljavaju uslove:

$$\Delta_h z_1 = \psi, \quad x \in \Omega_h, \qquad z_1|_{\Gamma_h} = 0. \tag{22}$$

odnosno:

$$\Delta_h z_2 = 0, \quad x \in \Omega_h, \qquad z_2|_{\Gamma_h} = \chi.$$

Iz teoreme 1.6 sledi da je:

$$\|z_2\|_{C,h} = \max_{\overline{\Omega}_h} |z_2(x)| \leq \max_{\Gamma_h} |-\chi(x)| = O(h). \tag{23}$$

Da bismo ocenili $\|z_1\|_{C,h}$ takođe koristimo teoremu 1.6. Pretpostavimo da se koordinatni početak nalazi unutar oblasti Ω (u suprotnom slučaju možemo izvršiti translaciju koordinatnog sistema) i konstruišimo majorantnu funkciju:

$$y(x) = \frac{\|\psi\|_{C,h}}{2n}(R^2 - r^2), \quad r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Sa R je označen poluprečnik n-dimenzione lopte, s centrom u koordinatnom početku, koja sadrži oblast Ω. Očigledno je $R \leq d$. Lako se proverava da je $\Delta_h r^2 = 2n$, odakle sledi da je:

$$-\Delta_h y(x) = \|\psi\|_{C,h}, \quad x \in \Omega_h. \tag{24}$$

Na granici Γ_h je $y(x) \geq 0$ jer je $R^2 \geq r^2$. Upoređujući (22) i (24) vidimo da je $|-\psi| \leq \|\psi\|_{C,h}$ i $0 = z_1\big|_{\Gamma_h} \leq y\big|_{\Gamma_h}$, pa je prema teoremi 1.6: $\|z_1\|_{C,h} \leq \|y\|_{C,h}$. Pošto je

$$y(x) \leq \frac{\|\psi\|_{C,h}}{2n} R^2 \leq \frac{d^2}{2n}\|\psi\|_{C,h},$$

odatle konačno dobijamo:

$$\|z_1\|_{C,h} \leq \frac{d^2}{2n}\|\psi\|_{C,h} = O(h^2). \tag{25}$$

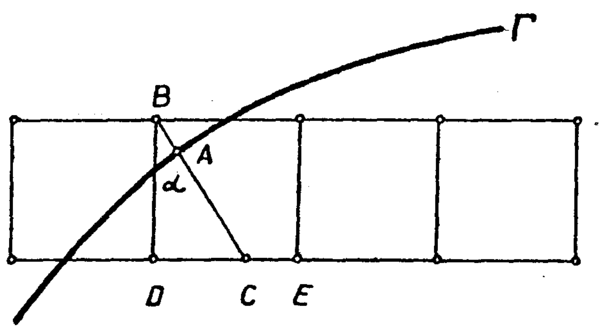
Iz (23) i (25) sledi $\|z\|_{C,h} = O(h)$.

Na osnovu dobijene ocene možemo zaključiti da je ranije izvedena ocena $\|\zeta\| = O(\sqrt{h})$ (v. (21)) suviše gruba.

U slučaju trećeg graničnog problema za Poissonovu jednačinu:

$$\Delta u = f, \quad x \in \Omega$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = 0, \quad x \in \Gamma; \qquad \sigma = \sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$$

dobijaju se analogni rezultati. Ovde je pogodno uzeti mrežu $\overline{\Omega}_h$ širu od oblasti $\overline{\Omega}$ (videti Oganesjan, Rivkind, Ruhovec [1973]): $\Omega_h = \Omega \cap \mathbf{R}_h^n$, $\overline{\Omega}_h = \bigcup_{x\in\Omega_h} O(x)$, $\Gamma_h = \overline{\Omega}_h \setminus \Omega_h$. U unutrašnjim čvorovima jednačina se aproksimira kao i ranije sa $\Delta_h v = f$, $x \in \Omega_h$. Problemi nastaju kod aproksimacije graničnog uslova. Za to se obično koristi interpolacija (videti Forsythe, Wasow [1960]). Na primer, u situaciji kao na slici 4



Sl. 4

prvo vršimo prenos graničnog uslova iz tačke A u tačku B. Zatim $\partial v/\partial\nu|_B$ zamenjujemo sa $(v(C)-v(B))/(h/\cos\alpha)$. Najzad, vrednost $v(C)$ zamenjujemo sa $v(D)(1-\operatorname{tg}\alpha)+v(E)\operatorname{tg}\alpha$, tako da konačno aproksimacija graničnog uslova u tački B glasi:

$$\left[v(D)(\cos\alpha-\sin\alpha)+v(E)\sin\alpha-v(B)\cos\alpha\right]/h+\sigma(A)v(B)=0.$$

Napomenimo da se dobri rezultati dobijaju primenom diferencijsko-varijacionih metoda (vedeti Aubin [1972]; Oganesjan, Rivkind, Ruhovec [1973]).

U slučaju kada je oblast $\overline{\Omega}$ n-dimenziona kocka $\overline{\Omega}=[0,l]^n$ može se izabrati korak ($h=l/N$) tako da bude $\Gamma_h\subset\Gamma$. Slično kao u jednodimenzionom slučaju tada možemo tačnije aproksimirati granični uslov stavljajući:

$$\bar{\Lambda}_h v(x)=f(x),\quad x\in\overline{\Omega}_h$$

$$\bar{\Lambda}_h=\bar{\Lambda}_{h,1}+\bar{\Lambda}_{h,2}+\cdots+\bar{\Lambda}_{h,n}$$

$$\bar{\Lambda}_{h,i}v=\begin{cases}2h^{-1}(v_{x_i}-\sigma v), & x_i=0\\ v_{\bar{x}_i x_i}, & x_i\neq 0,l\\ 2h^{-1}(-v_{\bar{x}_i}-\sigma v), & x_i=l.\end{cases}$$

c. Problem sopstvenih vrednosti za najjednostavnije diferencijske operatore. Na intervalu $[0,l]$ posmatrajmo najjednostavniji zadatak Sturm-Liouvillea

$$u''(x)=\lambda u(x),\quad x\in(0,l);\qquad u(0)=u(l)=0.\tag{26}$$

Njegovo rešenje je dobro poznato: sopstvene vrednosti su $\lambda=\lambda_k=(k\pi/l)^2$, a odgovarajuće sopstvene funkcije — $u(x)=u_k(x)=\sin(k\pi x/l)$, $k=1,2,\ldots$.

Uvedimo mrežu $\bar{\omega}_h=\{x_i=ih\mid i=0,1,\ldots,N;\ h=l/N\}$ i aproksimirajmo (26) na sledeći način:

$$v_{\bar{x}x}=\lambda_h v,\quad x\in\omega_h;\qquad v(0)=v(l)=0.\tag{27}$$

Pišući (27) u razvijenom obliku za $x=h,2h,\ldots,(N-1)h$ vidimo da se zadatak svodi na određivanje sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora matrice reda $N-1$:

$$A=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Ovaj zadatak ima tačno $N-1$ rešenje. Neposredno se proverava da su sopstvene funkcije iste kao u slučaju zadatka (26), preciznije $v_k=\sin(k\pi x/l)$, $k=1,2,\ldots,N-1$. Odatle, uzimajući u obzir da je:

$$\left(\sin\frac{k\pi x}{l}\right)_{\bar{x}x}=\frac{1}{h^2}\left[\sin\frac{k\pi(x+h)}{l}-2\sin\frac{k\pi x}{l}+\sin\frac{k\pi(x-h)}{l}\right]$$
$$=\frac{2}{h^2}\left(\cos\frac{k\pi h}{l}-1\right)\sin\frac{k\pi x}{l}=-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2l}\sin\frac{k\pi x}{l},$$

i zamenjujući u (27), dobijamo:

$$\lambda_h = \lambda_{h,k} = -4h^{-2}\sin^2\frac{k\pi h}{2l}, \quad k = 1,2,\ldots,N-1. \tag{28}$$

Iz (28) dobijamo:

$$-4h^{-2}\sin^2\frac{\pi h}{2l} = \lambda_{h,1} > \lambda_{h,2} > \cdots > \lambda_{h,N-1} = -4h^{-2}\cos^2\frac{\pi h}{2l}. \tag{29}$$

Dalje je $\cos^2(\pi h/(2l)) < 1$, a za $h \le l/2$ (tj. $N \ge 2$)

$$\sin\frac{\pi h}{2l} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{l}h \quad \text{i} \quad \sin^2\frac{\pi h}{2l} \ge \frac{2h^2}{l^2}.$$

Odatle i iz (29) dobijamo:

$$-8/(l^2) \ge \lambda_{h,1} > \lambda_{h,2} > \cdots > \lambda_{h,N-1} > -4/(h^2).$$

Sopstvene funkcije v_k ($k = 1,2,\ldots,N-1$) su ortogonalne u smislu skalarnog proizvoda $(v,w) = h\sum_{i=1}^{N-1} v(x_i)w(x_i)$:

$$(v_k, v_m) = \begin{cases} 0, & k \ne m \\ 1/2, & k = m \end{cases}.$$

One čine bazu prostora $\mathring{\mathcal{L}}_h$ funkcija definisanih na mreži $\overline{\omega}_h$ i jednakih nuli za $x = 0$ i $x = l$. Iz (1.10) sledi:

$$8l^{-2}\|v\|^2 \le -(v_{\bar{x}x}, v) = \|v_{\bar{x}}]|^2 \le 4h^{-2}\|v\|^2, \tag{30}$$

što predstavlja poboljšanje ocene (1.54).

Upoređujući $\lambda_{h,k}$ i λ_k dobijamo:

$$\frac{\lambda_{h,k}}{\lambda_k} = \left(\frac{\sin(k\pi h/(2l))}{k\pi h/(2l)}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi k h}{2l}\right)^2 + o(k^2h^2)$$

za $kh \to 0$ tj. $k \ll N$. Za vrednosti k bliske $N-1$ konvergencija ne važi, npr.

$$\lambda_{h,N-1}/\lambda_{N-1} = 4\pi^2(1 + 2hl^{-1} + O(h^2)) \approx 0.4, \quad h \to 0.$$

Pređimo sada na višedimenzioni slučaj. U oblasti $\Omega_h = [0,l]^n$ posmatrajmo problem sopstvenih vrednosti:

$$\Delta u \equiv \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \lambda u, \quad x \in \Omega; \qquad u|_\Gamma = 0. \tag{31}$$

Smenom $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u_1(x_1) \cdot u_2(x_2) \cdot u_n(x_n)$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$, on se svodi na n zadataka oblika (26). Odatle sledi da su sopstvene vrednosti (31):

$$\lambda = \lambda_{i_1 i_2 \dots i_n} = -\pi^2 l^{-2}(i_1^2 + i_2^2 + \dots + i_n^2)$$

a sopstvene funkcije:

$$u = u_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sin\frac{i_1 \pi x_1}{l} \cdot \sin\frac{i_2 \pi x_2}{l} \dots \sin\frac{i_n \pi x_n}{l}$$
$$(i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, 3, \dots).$$

Diferencijsku aproksimaciju (31) na mreži $\overline{\Omega}_h = (\overline{\omega}_h)^n$ možemo predstaviti u obliku:

$$\Delta_h v \equiv \sum_{i=1}^{n} v_{\bar{x}_i x_i} = \lambda_h v, \quad x \in \Omega_h; \qquad v|_{\Gamma_h}. \tag{32}$$

Iz prethodnog sledi da su sopstvene vrednosti zadatka (32):

$$\lambda_h = \lambda_{h, i_1 i_2 \dots i_n} = -\frac{4}{h^2}\left(\sin^2\frac{i_1 \pi h}{2l} + \sin^2\frac{i_2 \pi h}{2l} + \dots + \sin^2\frac{i_n \pi h}{2l}\right) \tag{33}$$

a sopstvene funkcije:

$$v = v_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sin\frac{i_1 \pi x_1}{l} \sin\frac{i_2 \pi x_2}{l} \dots \sin\frac{i_n \pi h}{l}$$
$$(i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, \dots, N-1).$$

Sopstvene funkcije su ortogonalne:

$$(v_{i_1 i_2 \dots i_n}, v_{j_1 j_2 \dots j_n}) = h^n \sum_{x \in \Omega_h} v_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) v_{j_1 j_2 \dots j_n}(x) = \begin{cases} 2^{-n}, & i_k = j_k \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

i čine bazu prostora $\overset{\circ}{\mathcal{L}}{}_h^n$. Važe nejednakosti:

$$\frac{8n}{l^2}\|v\|^2 \le (-\Delta_h v, v) = \sum_{i=1}^{n} \|v_{\bar{x}_i}\|^2 \le \frac{4n}{h^2}\|v\|^2.$$

Slične ocene kao za Laplaceov operator važe i u opštem slučaju.

d. Opšta eliptička jednačina. Granični problemi za opštu eliptičku jednačinu

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \quad x \in \Omega$$

diskretizuju se slično kao u slučaju Poissonove jednačine. Ako su koeficijenti neprekidni možemo, na primer, staviti:

$$L_h v \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(v_{\bar{x}_i x_j} + v_{x_i \bar{x}_j}) + \sum_{i=1}^{n} b_i v_{\overset{\circ}{x}_i} + cv = f, \quad x \in \Omega_h.$$

U slučaju da koeficijenti nisu neprekidni umesto a_{ij}, b_i c i f morali bismo uzeti neke usrednjene vrednosti. Red aproksimacije i brzina konvergencije u ovom slučaju zavise i od stepena glatkosti koeficijenata jednačine. Pored toga, trudimo se da diferencijski operator zadrži karakteristične osobine diferencijalnog, npr. samokonjugovanost, pozitivnu definisanost i sl. Tako na primer, diferencijski analog graničnog problema (1.17)–(1.18) možemo definisati na sledeći način:

$$L_h v \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left[\left(a_{ij} v_{\bar{x}_j}\right)_{x_i} + \left(a_{ij} v_{x_j}\right)_{\bar{x}_i} \right] + cv = f, \quad x \in \Omega_h; \qquad v|_{\Gamma_h} = 0, \tag{34}$$

gde je mreža Ω_h definisana kao skup svih tačaka $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ iz $\mathbf{R}_h^n$ koje pripadaju $\overline{\Omega}$ zajedno sa svojom okolinom $O(x) = \{(x_1 + i_1 h, \ldots, x_n + i_n h) \mid i_1, \ldots, i_n = 0, \pm 1\}$, a njena granica $\Gamma_h = \overline{\Omega}_h \setminus \Omega_h = (\mathbf{R}_h^n \cap \overline{\Omega}) \setminus \Omega_h$. Lako se proverava da je

$$(L_h v, w) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left[(a_{ij} v_{\bar{x}_j}, w_{\bar{x}_i}) + (a_{ij} v_{x_j}, w_{x_i}) \right] + (cv, w),$$

što znači da je samokonjugovanost očuvana.

e. Shema povišene tačnosti za Poissonovu jednačinu u kvadratu. Neka je u oblasti $\overline{\Omega} = [0, l]^2$ zadat prvi granični problem za Poissonovu jednačinu:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2), \quad u|_\Gamma = 0. \tag{35}$$

Uzmimo korak $h = l/N$ i konstruišimo mrežu $\overline{\Omega}_h = \{(ih, jh) \mid i, j = 0, 1, \ldots, N\}$. Označimo $\Omega_h = \Omega \cap \overline{\Omega}_h$ i $\Gamma_h = \Gamma \cap \overline{\Omega}_h = \overline{\Omega}_h \setminus \Omega_h$.

Pretpostavimo da rešenje zadatka (35) u i desna strana jednačine f imaju neprekidne parcijalne izvode koji se pojavljuju u daljem radu. Koristeći se Taylorovim razvojem lako se pokazuje da je:

$$u_{\bar{x}_1 x_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{h^4}{360} \cdot \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^6} + O(h^6).$$

Analogna formula važi i za $u_{\bar{x}_2 x_2}$. Odatle sledi:

$$\begin{aligned}
\Delta_h u &= u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}\right) + \frac{h^4}{360}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x_1^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial x_2^6}\right) + O(h^6) \\
&= \Delta u + \frac{h^2}{12}\left(\Delta^2 u - \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\right) + \frac{h^4}{360}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x_1^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial x_2^6}\right) + O(h^6).
\end{aligned}$$

Pošto u zadovoljava (35), dalje imamo:

$$\Delta_h u = f + \frac{h^2}{12}\Delta f - \frac{h^2}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{h^4}{360}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x_1^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial x_2^6}\right) + O(h^6). \tag{36}$$

Izraz $\partial^4 u/\partial^2 x_1^2 \partial^2 x_2^2$ aproksimiramo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} &= u_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\Delta u + O(h^4) \\ &= u_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + O(h^4). \end{aligned} \tag{37}$$

Najzad, $\partial^6 u/\partial x_1^6 + \partial^6 u/\partial x_2^6$ možemo predstaviti kao:

$$\frac{\partial^6 u}{\partial x_1^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial x_2^6} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right)\Delta u = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4}. \tag{38}$$

Iz (36), (37) i (38) sledi:

$$\Delta_h u + \frac{h^2}{6}u_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = f + \frac{h^2}{12}\Delta f + \frac{h^4}{360}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4}\right) + O(h^6).$$

Izraz $\Delta_h u + (h^2/6)u_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}$ sadrži vrednosti funkcije u u devet tačaka:

$$\begin{aligned} \Delta_h u + \frac{h^2}{6}u_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} \frac{1}{6h^2}\big[&u(x_1 - h, x_2 - h) + u(x_1 - h, x_2 + h) \\ &+ u(x_1 + h, x_2 - h) + u(x_1 + h, x_2 + h) + 4u(x_1, x_2 - h) + 4u(x_1, x_2 + h) \\ &+ 4u(x_1 - h, x_2) + 4u(x_1 + h, x_2) - 20u(x_1, x_2)\big]. \end{aligned}$$

Lako se vidi da ako $(x_1, x_2) \in \Omega_h$ onda preostalih osam tačaka pripadaju $\overline{\Omega}_h$.

Uvedimo diferencijsku shemu (Samarski, Andrejev [1963], [1976])

$$\Delta'_h v \equiv \Delta_h v + (h^2/6)v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = \varphi, \quad x \in \Omega_h; \qquad v|_{\Gamma_h} = 0. \tag{39}$$

Operator $-\Delta'_h$ zadovoljava uslove za primenu principa maksimuma. Da bismo ocenili $v = v(x_1, x_2)$ konstruišemo majorantnu funkciju $y = y(x_1, x_2) = k(2l^2 - x_1^2 - x_2^2)$. Lako se proverava da je:

$$\begin{gathered} \|y\|_{C,h} = \max_{\overline{\Omega}_h} |y(x_1, x_2)| = 2l^2 K, \\ -\Delta'_h y = 4K, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_h; \qquad y|_{\Gamma_h} \geq 0. \end{gathered}$$

Birajući $k = (1/4)\|\varphi\|_{C,h}$ i koristeći se teoremom 1.6 dobijamo:

$$\|v\|_{C,h} \leq (l^2/2)\|\varphi\|_{C,h}$$

Prema tome zadatak (39) je stabilan u normi $\|\cdot\|_{C,h}$ i korektno postavljen.

Analogne ocene mogu se dobiti i u normama $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_{W_2^1,h}$. Množeći skalarno $-\Delta_h' v$ sa v i koristeći formule (1.51) i (30) dobijamo:

$$
\begin{aligned}
(-\Delta_h' v, v) &= \|v_{\bar{x}_1}\|^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|^2 - \frac{h^2}{6}\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|^2 \\
&\geq \|v_{\bar{x}_1}\|^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|^2 - \frac{h^2}{6}\cdot\frac{2}{h^2}\left(\|v_{\bar{x}_1}\|^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|^2\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(\|v_{\bar{x}_1}\|^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|^2\right) \geq \frac{32}{3l^2}\|v\|^2
\end{aligned}
$$

Pošto je $\Delta_h' v = \varphi$ odavde dobijamo:

$$
\frac{32}{3l^2}\|v\|^2 \leq \frac{2}{3}\left(\|v_{\bar{x}_1}\|^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|^2\right) \leq (-\varphi, v) \leq \|\varphi\|\cdot\|v\|,
$$

odakle sledi:

$$
\|v\| \leq \frac{3l^2}{32}\|\varphi\|, \qquad \|v_{\bar{x}_1}\|^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|^2 \leq \frac{9l^2}{64}\|\varphi\|^2,
$$
$$
\|v\|_{W_2^1,h} = \left(\|v\|^2 + \|v_{\bar{x}_1}\|^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|^2\right)^{1/2} \leq (3l/32)\sqrt{l^2+16}\,\|\varphi\|.
$$

Stavljajući u (39):

$$
\varphi = f + (h^2/12)\Delta f \tag{40}
$$

dobijamo diferencijsku shemu koja aproksimira zadatak (35) na rešenju s tačnošću $O(h^4)$. Ponekad je teško izračunati parcijalne izvode funkcije f, međutim uzimajući u obzir da je $\Delta f = \Delta_h f + O(h^2)$ njih možemo zameniti količnicima diferencija, pa stavljajući:

$$
\varphi = f + (h^2/12)\Delta_h f \tag{41}
$$

takođe dobijamo diferencijsku shemu koja aproksimira (35) s tačnošću $O(h^4)$. Slično, stavljajući:

$$
\varphi = f + \frac{h^2}{12}\Delta f + \frac{h^4}{360}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4}\right) \tag{42}
$$

dobijamo diferencijsku shemu s redom aproksimacije $O(h^6)$. Zamenjujući u (42) izraze:

$$
\Delta f = \Delta_h f - \frac{h^2}{12}\left(f_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} + f_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2}\right) + O(h^4), \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} = f_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} + O(h^2),
$$
$$
\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = f_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + O(h^2), \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4} = f_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} + O(h^2).
$$

i zadržavajući samo članove reda $O(h^4)$ dobijamo diferencijsku shemu s desnom stranom:

$$\varphi = f + \frac{h^2}{12}\Delta_h f - \frac{h^4}{240}\left(f_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} + f_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2}\right) + \frac{h^4}{360} f_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} \tag{43}$$

koja ne sadrži parcijalne izvode funkcije f, a red aproksimacije joj je takođe $O(h^6)$. Iz napred izloženog sledi da diferencijska shema (39) konvergira u normama $\|\cdot\|_{C,h}$, $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_{W_2^1,h}$ brzinom $O(h^4)$ — u slučaju da je φ definisano sa (40) ili (41), odnosno $O(h^6)$ — u slučaju da je φ definisano sa (42) ili (43).

f. Poissonova jednačina u polarnom koordinatnom sistemu. U slučaju kada je oblast $\overline{\Omega}$ krug $x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$ pogodnije je koristiti polarne koordinate od Descartesovih. Prvi granični problem za Poissonovu jednačinu se tada predstavlja na sledeći način:

$$Lu \equiv (L_r + L_\varphi)u \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = f, \quad 0 < r < R, \quad u|_{r=R} = 0. \tag{44}$$

Za $r = 0$ koeficijenti jednačine imaju singularitet, i da bi rešenje bilo ograničeno potrebno je da zadovoljava uslov:

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

Po promenljivoj φ uvedimo ravnomernu mrežu $\omega_\varphi = \{\varphi_j = jh_\varphi \mid j = 0,1,\ldots,M-1;\ h_\varphi = 2\pi/M\}$. Po promenljivoj r uvedimo mrežu pomerenu za pola koraka, da bismo izbegli aproksimaciju jednačine za $r = 0$: $\overline{\omega}_r = \{r_i = (i+1/2)h_r \mid i = 0,1,\ldots,N;\ h_r = R/(N+1/2)\}$. Označimo $\overline{\Omega}_h = \overline{\omega}_r \times \omega_\varphi$, $\Gamma_h = \overline{\Omega}_h \cap \Gamma$, $\Omega_h = \overline{\Omega}_h \cap \Omega$, $h = (h_r, h_\varphi)$ i $|h| = (h_r^2 + h_\varphi^2)^{1/2}$. Operator L_φ aproksimiramo na očigledan način sa:

$$L_{\varphi,h} v = r^{-2} v_{\bar{\varphi}\varphi}, \quad (r,\varphi) \in \Omega_h.$$

Operator L_r aproksimiramo sa:

$$(L_{r,h}v)_i = \begin{cases} r_i^{-1}(\bar{r} v_{\bar{r}})_{r,i}, & 0 < i < N, \\ r_0^{-1} v_{\bar{r},1}, & i = 0, \end{cases}$$

gde je $\bar{r}_i = r_{i-1/2} = ih_r$. Tako dobijamo diferencijsku shemu (videti Frjazinov [1971], a takođe Makarov [1970], Bakirova, Frjazinov [1973]):

$$L_h v \equiv (L_{r,h} + L_{\varphi,h})v = f, \quad (r,\varphi) \in \Omega_h, \qquad v|_{\Gamma_h} = 0 \tag{45}$$

Sa $\mathcal{L}_h$ označimo skup funkcija definisanih na Ω_h i jednakih nuli na Γ_h. U $\mathcal{L}_h$ uvedimo skalarni proizvod:

$$(v, w) = h_r h_\varphi \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} r_i v_{ij} w_{ij}.$$

Pre nego što izvedemo apriorne ocene za shemu (45) odredimo sopstvene vrednosti operatora $L_{r,h}$. Iz

$$(L_{r,h}v)_i \equiv (i+1/2)^{-1}h_r^{-2}\left[(i+1)v_{i+1} - (2i+1)v_i + iv_{i-1}\right] = \lambda v_i$$

sledi

$$(i+1)v_{i+1} - (2i+1)xv_i + v_{i-1} = 0; \quad i = 1,2,\ldots,N-1,$$

gde je $x = 1 + h_r^2\lambda/2$. Dobijena je rekurentna relacija za Legendreove polinome (videti Bateman, Erdélyi [1953]) pa je znači $v_i = P_i(x)$. Iz $v_N = P_N(x) = 0$ sledi da je $\lambda = \lambda_k = 2h_r^{-2}(x_k - 1)$ $(k = 1,2,\ldots,N)$ gde su x_k nule Legendreovog polinoma $P_N(x)$. Neka su x_k numerisani po veličini: $1 > x_1 > x_2 > \cdots > x_N > -1$. Poznata je ocena (Bateman, Erdélyi [1953]): $x_k = \cos\theta_k\pi$, $(2k-1)/(2N+1) \le \theta_k \le 2k/(2N+1)$, iz koje sledi:

$$-\frac{2}{h_r^2}\left(\cos\frac{\pi}{2N+1} + 1\right) \le \lambda_k = \frac{2}{h_r^2}(x_k - 1) \le \frac{2}{h_r^2}\left(\cos\frac{\pi}{2N+1} - 1\right).$$

Dalje je

$$-\frac{2}{h_r^2}\left(\cos\frac{\pi}{2N+1} + 1\right) > -\frac{4}{h_r^2} \quad \text{i}$$
$$\frac{2}{h_r^2}\left(\cos\frac{\pi}{2N+1} - 1\right) = -\frac{4}{h_r^2}\sin^2\frac{\pi h_r}{4R} \le -\frac{9}{4R^2} \quad \text{za } h_r \le \frac{2R}{3}$$

tj. $N \ge 1$. Tako konačno dobijamo ocenu:

$$-\frac{4}{h_r^2} \le \lambda_k \le -\frac{9}{4R^2}. \tag{46}$$

Sopstvene funkcije operatora $L_{r,h}$ su $v_i^{(k)} = v^{(k)}(ih_r) = P_i(x_k)$.

Vratimo se sada na zadatak (45). Množeći skalarno $L_h v$ sa $w \in \mathcal{L}_h$ dobijamo :

$$(L_h v, w) = -h_r h_\varphi \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1} \bar{r}_i v_{\bar{r},ij} w_{\bar{r},ij} - h_r h_\varphi \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} \frac{1}{r_i} v_{\bar{\varphi},ij} w_{\bar{\varphi},ij}, \tag{47}$$

odakle se vidi da je operator L_h samokonjugovan. Iz (47) i (46) sledi:

$$(-L_h v, v) \ge h_r h_\varphi \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1} \bar{r}_i v_{\bar{r},ij}^2 = (-L_{r,h}v, v) \ge \frac{9}{4R^2}\|v\|^2, \tag{48}$$

što znači da je operator $-L_h$ pozitivno definisan. Prema tome, diferencijska shema (45) je korektna.

Pređimo sada na ocenjivanje skalarnog proizvoda

$$(-f, v) = -h_r h_\varphi \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} r_i v_{ij} f_{ij}.$$

Zbir $-\sum_{i=0}^{N-1} r_i v_{ij} f_{ij}$ predstavimo na sledeći način:

$$-\sum_{i=0}^{N-1} r_i v_{ij} f_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \bar{r}_i v_{\bar{r},ij} F_{ij},$$

gde F_{ij} treba odrediti. Koristeći formulu (1.50) i granični uslov dobijamo:

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=0}^{N-1} r_i v_{ij} f_{ij} &= -\sum_{i=1}^{N-1} r_i v_{ij} \frac{(\bar{r}F)_{r,ij}}{r_i} - v_{0j} F_{1j} \\
&= -r_0 v_{0j} \frac{F_{1j}}{r_0} - \sum_{i=1}^{N-1} r_i v_{ij} \frac{(i+1)F_{i+1,j} - iF_{ij}}{r_i}.
\end{aligned}$$

Sledi: $F_{1j}/r_0 = f_{0j}$, $\left[(i+1)F_{i+1,j} - iF_{ij}\right]/r_i = f_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$, odakle dobijamo: $F_{ij} = i^{-1} \sum_{k=0}^{i-1} r_k f_{kj}$. Prema tome je:

$$\begin{aligned}
(-L_h v, v) = (-f, v) &= -h_r h_\varphi \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} r_i v_{ij} f_{ij} \\
&= h_r h_\varphi \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{M-1} \bar{r}_i v_{\bar{r},ij} \left(\frac{1}{i} \sum_{k=0}^{i-1} r_k f_{kj} \right) \\
&\le \varepsilon h_r h_\varphi \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{M-1} \bar{r}_i v_{\bar{r},ij}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} h_r h_\varphi \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{M-1} \bar{r}_i \left(\frac{1}{i} \sum_{k=0}^{i-1} r_k f_{kj} \right)^2 \\
&\le \varepsilon(-L_h v, v) + \frac{1}{4\varepsilon} h_r h_\varphi \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{M-1} \bar{r}_i \left(\frac{1}{i} \sum_{k=0}^{i-1} r_k f_{kj} \right)^2.
\end{aligned}$$

Stavljajući $\varepsilon = 1/2$ konačno dobijamo:

$$\|v\|_{(-L_h)} = (-L_h v, v)^{1/2} \le \|f\|_{(-1)} \equiv \left(h_r h_\varphi \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{M-1} \bar{r}_i \left(\frac{1}{i} \sum_{k=0}^{i-1} r_k f_{kj} \right)^2 \right)^{1/2}. \tag{49}$$

Iz (48) sledi :

$$\|v\| \le (2R/3)\|f\|_{(-1)}. \tag{50}$$

Nejednakosti (49) i (50) označavaju stabilnost diferencijske sheme (45) u normama $\|\cdot\|_{(-L_h)}$ i $\|\cdot\|$.

Pozabavimo se sada konvergencijom naše sheme. Neka je $u = u(r,\varphi)$ rešenje zadatka (44). Koristeći Taylorovu formulu lako nalazimo:

$$L_{\varphi,h}u \equiv \frac{1}{r^2}u_{\bar{\varphi}\varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{h_\varphi^2}{12r^2}\widetilde{\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}}$$

gde je

$$\widetilde{\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}} = \frac{\partial^4 u(r,\tilde{\varphi})}{\partial \varphi^4}, \quad \tilde{\varphi} \in [\varphi - h_\varphi, \varphi + h_\varphi];$$

$$L_{r,h}u \equiv \frac{1}{r}(\bar{r}u_{\bar{r}})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$
$$+\frac{h_r^2}{6r}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{r+0,5\,h_r}{4}\cdot\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}} + \frac{r-0,5\,h_r}{4}\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}}\right),$$
$$r = r_i, \quad i > 0$$

gde je

$$\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}} = \frac{\partial^4 u(\bar{r},\varphi)}{\partial r^4}, \quad \bar{r} \in [r, r+h_r]; \qquad \overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}} = \frac{\partial^4 u(\bar{\bar{r}},\varphi)}{\partial r^4}, \quad \bar{\bar{r}} \in [r-h_r, r]$$
$$\text{i} \quad L_{r,h}u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{h_r^2}{6r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{h_r^3}{24r}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}, \quad r = r_0.$$

Odatle sledi da je greška aproksimacije jednaka :

$$\psi = L_h u - f = \frac{h_r^2}{6r}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{r+0,5h_r}{4}\cdot\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}} + \frac{r-0,5h_r}{4}\cdot\overline{\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}}}\right)$$
$$+\frac{h_\varphi^2}{12r^2}\widetilde{\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}}, \quad \text{za} \quad r = r_i, \quad i > 0, \qquad (51)$$

odnosno:

$$\psi = L_h u - f = \frac{h_r^2}{6r}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{h_r^3}{24r}\cdot\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}} + \frac{h_\varphi^2}{12r^2}\widetilde{\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}}, \quad \text{za } r = r_0. \qquad (52)$$

Pretpostavimo da $u(r,\varphi)$ ima ograničene četvrte parcijalne izvode po Descartes-ovim koordinatama x_1 i x_2. Uzimajuči u obzir da je $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $\partial x_1/\partial r = \cos\varphi$, $\partial x_2/\partial r = \sin\varphi$, $\partial x_1/\partial\varphi = -r\sin\varphi = -x_2$ i $\partial x_2/\partial\varphi = r\cos\varphi = x_1$ nalazimo:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial x_2}\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\cos^2\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\sin 2\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\sin^2\varphi,$$

itd. Izvodi $\partial^3 u/\partial r^3$ i $\partial^4 u/\partial r^4$ se očigledno izražavaju kao linearne kombinacije parcijalnih izvoda trećeg odnosno četvrtog reda po x_1 i x_2 s ograničenim koeficijentima. Odatle sledi:

$$|\partial^3 u/\partial r^3|,\ |\partial^4 u/\partial r^4| \le C, \quad C = \text{const} > 0. \tag{53}$$

Slično nalazimo:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = x_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - 2x_1 x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + x_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2},$$

itd. Sledi :

$$|\partial^3 u/\partial \varphi^3|,\ |\partial^4 u/\partial \varphi^4| \le Cr, \quad C = \text{const} > 0. \tag{54}$$

Stavljajući ocene (53) i (54) u (51) i (52) dobijamo:

$$\psi = \psi(r,\varphi) = O\big((h_r^2 + h_\varphi^2)/r\big) = O\big(|h|^2/r\big).$$

Razlika rešenja zadataka (44) i (45), $z = u - v$, je funkcija definisana na mreži $\overline{\Omega}_h$ i zadovoljava uslove:

$$L_h z = \psi, \quad (r,\varphi) \in \Omega_h, \qquad z|_{\Gamma_h} = 0.$$

Pošto je $\|\psi\|_{(-1)} = O(|h|)^2$ iz (49) i (50) dobijamo sledeće ocene brzine konvergencije:

$$\|z\| = O(|h|^2), \quad \text{i} \quad \|z\|_{(-L_h)} = O(|h|^2).$$

g. Biharmonijska jednačina. Na kraju ćemo razmotriti jedan eliptički problem četvrtog reda. Neka se u oblasti $\overline{\Omega}_h = [0,l]^2$ traži rešenje jednačine

$$\Delta^2 u \equiv \Delta(\Delta u) \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = f(x_1, x_2) \tag{55}$$

koje na granici Γ zadovoljava sledeće granične uslove:

$$u|_\Gamma = 0 \quad \text{i} \quad \partial u/\partial \nu|_\Gamma = 0 \tag{56}$$

(sa ν je kao i ranije označena spoljašnja normala na Γ).

Uzmimo korak $h = l/N$ i konstruišimo mreže $\mathbf{R}_h^2 = \{(ih, jh) \mid i,j = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$ i $\overline{\Omega}_h = \mathbf{R}_h^2 \cap \overline{\Omega}$. Označimo $\Gamma_h = \overline{\Omega}_h \cap \Gamma$ i $\Omega_h = \overline{\Omega}_h \setminus \Gamma_h$. Zadatak (55)–(56) diskretizujmo na sledeći način:

$$\Delta_h^2 v \equiv \Delta_h(\Delta_h v) \equiv v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} + 2v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + v_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} = f, \quad x \in \Omega_h, \tag{57}$$

$$v|_{\Gamma_h} = 0, \quad v_{-1,j} = v_{1,j}, \quad v_{N+1,j} = v_{N-1,j}, \quad v_{i,-1} = v_{i,1}, \quad v_{i,N+1} v_{i,N-1}. \tag{58}$$

Sa $\mathcal{L}_h$ označimo skup funkcija definisanih na $\overline{\Omega}_h$, jednakih nuli na Γ_h i produženih van $\overline{\Omega}_h$ parno u odnosu na granicu (tj. takvih za koje važi (58)). Skalarni proizvod u $\mathcal{L}_h$ definišimo kao ranije sa :

$$(v,w) = h^2 \sum_{(x_1,x_2)\in\Omega_h} v(x_1,x_2)w(x_1,x_2) = h^2 \sum_{i,j=1}^{N-1} v_{ij}w_{ij}. \tag{59}$$

Neposredno se proverava da je operator Δ_h^2 samokonjugovan i pozitivno definisan:

$$(\Delta_h^2 v,v) = (\Delta_h v,\Delta_h v) + \frac{2}{h^2}\sum_{j=1}^{N-1}\left(v_{1j}^2 + v_{N-1.j}^2 + v_{j.1}^2 + v_{j.N-1}^2\right) \geq \|\Delta_h v\|^2.$$

Iz (33) dalje dobijamo:

$$(\Delta_h^2 v,v) \geq \|\Delta_h v\|^2 \geq 16l^{-2}\left(\|v_{\bar{x}_1}\|^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|^2\right) \geq 16^2 l^{-4}\|v\|^2. \tag{60}$$

S druge strane je:

$$(\Delta_h^2 v,v) = (f,v) \leq \|f\|\cdot\|v\| \leq (l^2/16)\|f\|(\Delta_h^2 v,v)^{1/2},$$

odakle sledi:

$$(\Delta_h^2 v,v) \leq (l^4/256)\|f\|^2. \tag{61}$$

Koristeći (1.51) dobijamo:

$$\|\Delta_h v\|^2 = \|v_{\bar{x}_1 x_1}\|^2 + 2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|^2 + \|v_{\bar{x}_2 x_2}\|^2. \tag{62}$$

Najzad, iz (60), (61) i (62) sledi :

$$\begin{aligned}\|v\|_{W_2^2,h} &\equiv \left(\|v\|^2 + \|v_{\bar{x}_1}\|^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|^2 + \|v_{\bar{x}_1 x_1}\|^2 + \|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|^2 + \|\bar{x}_2 x_2\|^2\right)^{1/2} \\ &\leq l^4\left(1 + (16/l) + (256/l^2)\right)^{1/2}\|f\|.\end{aligned} \tag{63}$$

Prema tome, diferencijska shema (57)–(58) je stabilna u normi $\|\cdot\|_{W_2^2,h}$ i korektna.

Pređimo sada na ispitivanje konvergencije sheme. Neposredno se proverava da Δ_h^2 aproksimira Δ^2 s tačnošću $O(h^2)$ tj. ako $u \in C^6(\Omega)$,tada je:

$$\Delta_h^2 u = \Delta^2 u + \psi, \quad \psi = O(h^2).$$

Neka je u rešenje zadatka (55)–(56), v rešenje zadatka (57)–(58) i $z = u - v$.Funkcija z ne pripada prostoru $\mathcal{L}_h$ jer ne zadovoljava sve uslove (58). Zato označimo $z = \zeta + \eta$ gde je $\zeta = z$ u $\overline{\Omega}_h$, $\zeta \in \mathcal{L}_h$, $\eta = 0$ u $\overline{\Omega}_h$ i

$$\begin{aligned}\eta_{-1.j} &= z_{-1.j} - z_{1.j} = u_{-1.j} - u_{1.j} = O(h^3),\\ \eta_{N+1.j} &= z_{N+1.j} - z_{N-1.j} = u_{N+1.j} - u_{N-1.j} = O(h^3),\\ \eta_{i.-1} &= z_{i.-1} - z_{i.1} = u_{i.-1} - u_{i.1} = O(h^3),\\ \eta_{i.N+1} &= z_{i.N+1} - z_{i.N-1} = u_{i.N+1} - u_{i.N-1} = O(h^3).\end{aligned}$$

Funkcija ζ zadovoljava uslove (58) i

$$\Delta_h^2\zeta = \psi - \Delta_h^2\eta, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_h.$$

Zapažamo da je $\Delta_h^2\eta = 0$ u svim tačkama mreže Ω_h osim u onim koje su udaljene od granice Γ_h za h, gde je $\Delta_h^2\eta = O(1/h)$. Zato se ocena (63) ne može direktno primeniti. Označimo $\zeta = \zeta^{(1)} + \zeta^{(2)}$ gde $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)} \in \mathcal{L}_h$ i važi

$$\Delta_h^2\zeta^{(1)} = \psi, \quad \Delta_h^2\zeta^{(2)} = -\Delta_h^2\eta,$$

kad $(x_1, x_2) \in \Omega_h$. Funkciju $\zeta^{(1)}$ ocenjujemo pomoću (63):

$$\|\zeta^{(1)}\|_{W_2^2,h} = O(h^2). \tag{64}$$

Funkciju $\zeta^{(2)}$ ocenjujemo na sledeći način:

$$\begin{aligned}
(\Delta_h^2\zeta^{(2)}, \zeta^{(2)}) &= -(\Delta_h^2\zeta^{(2)}, \eta) \\
&= -h^2 \sum_{j=1}^{N-1} \left(\eta_{-1.j}\zeta_{1.j}^{(2)} + \eta_{N+1.j}\zeta_{N-1.j}^{(2)} + \eta_{j.-1}\zeta_{j.1}^{(2)} + \eta_{j.N+1}\zeta_{j.N-1}^{(2)}\right)h^{-4} \\
&\le \left\{\frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{N-1}\left(\eta_{-1.j}^2 + \eta_{N+1.j}^2 + \eta_{j.-1}^2 + \eta_{j.N+1}^2\right)\right\}^{1/2} \times \\
&\times \left\{\frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{N-1}\left[\left(\zeta_{1.j}^{(2)}\right)^2 + \left(\zeta_{N-1.j}^{(2)}\right)^2 + \left(\zeta_{j.1}^{(2)}\right)^2 + \left(\zeta_{j.N-1}^{(2)}\right)^2\right]\right\}^{1/2} \\
&\le O(h^{3/2}) \cdot (\Delta_h^2\zeta^{(2)}, \zeta^{(2)})^{1/2}.
\end{aligned}$$

Odatle sledi:

$$\|\zeta^{(2)}\|_{W_2^2,h} = O(h^{3/2}). \tag{65}$$

Najzad, iz (64) i (65) dobijamo: $\|\zeta\|_{W_2^2,h} = O(h^{3/2})$.

Ocenu brzine konvergencije reda $O(h^2)$ možemo dobiti koristeći umesto η funkciju veće glatkosti (videti D'jakonov [1972]). Označimo $z = \overline{\zeta} + \overline{\eta}$ gde je $\overline{\eta} = \overline{\eta}^{(1)} + \overline{\eta}^{(2)}$ i

$$\overline{\eta}_{ij}^{(1)} = \frac{ih(l-ih)}{l(l^2+2h^2)}\left\{\alpha_j\left[(l-ih)^2 - h^2\right] - \beta_j\left[(ih)^2 - h^2\right]\right\}, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$\overline{\eta}_{i0}^{(1)} = \overline{\eta}_{iN}^{(1)} = 0, \quad \overline{\eta}_{i.-1}^{(1)} = \overline{\eta}_{i.1}^{(1)}, \quad \overline{\eta}_{i.N+1}^{(1)} = \overline{\eta}_{i.N-1}^{(1)},$$

$$\alpha_j = (z_{1j} - z_{-1.j})/(2h), \quad \beta_j = (z_{N+1.j} - z_{N-1.j})/(2h);$$

$$\overline{\eta}_{ij}^{(2)} = \frac{jh(l-jh)}{l(l^2+2h^2)}\left\{\gamma_i\left[(l-jh)^2 - h^2\right] - \delta_i\left[(jh)^2 - h^2\right]\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$\overline{\eta}_{0j}^{(2)} = \overline{\eta}_{Nj}^{(2)} = 0, \quad \overline{\eta}_{-1.j}^{(2)} = \overline{\eta}_{1j}^{(2)}, \quad \overline{\eta}_{N+1.j}^{(2)} = \overline{\eta}_{N-1.j}^{(2)},$$

$$\gamma_i = (z_{i1} - z_{i.-1})/(2h), \quad \delta_i = (z_{i.N+1} - z_{i.N-1})/(2h).$$

Neposredno se proverava da je u oblasti Ω_h: $\overline{\eta} = O(h^2)$, $\overline{\eta}_{x_k} = O(h^2)$, $\overline{\eta}_{x_k x_k} = O(h^2)$ $(k = 1,2)$ i da $\overline{\zeta}$ zadovoljava granične uslove (58). Označimo kao u prethodnom slučaju $\overline{\zeta} = \overline{\zeta}^{(1)} + \overline{\zeta}^{(2)}$ gde $\overline{\zeta}^{(1)}, \overline{\zeta}^{(2)} \in \mathcal{L}_h$ i

$$\Delta_h^2 \overline{\zeta}^{(1)} = \psi, \quad \Delta_h^2 \overline{\zeta}^{(2)} = -\Delta_h^2 = -\Delta_h^2 \eta,$$

kad $(x_1, x_2) \in \Omega_h$. Za funkciju $\overline{\zeta}^{(1)}$ važi ocena (64), dok $\overline{\zeta}^{(2)}$ ocenjujemo na isti način kao $\zeta^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
(\Delta_h^2 \overline{\zeta}^{(2)}, \overline{\zeta}^{(2)}) &= -(\Delta_h^2 \overline{\eta}, \overline{\zeta}^{(2)}) = -(\Delta_h \overline{\eta}, \Delta_h \overline{\zeta}^{(2)}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{N-1} \left(\Delta_h \overline{\eta}_{0j} \overline{\zeta}_{1j}^{(2)} + \Delta_h \overline{\eta}_{Nj} \overline{\zeta}_{N-1,j}^{(2)} + \Delta_h \overline{\eta}_{j0} \overline{\zeta}_{j1}^{(2)} + \Delta_h \overline{\eta}_{jN} \overline{\zeta}_{j,N-1}^{(2)} \right) \\
&\le \left\{ \|\Delta_h \overline{\eta}\|^2 + h^2 \sum_{j=1}^{N-1} \left[(\Delta_h \overline{\eta}_{0j})^2 + (\Delta_h \overline{\eta}_{Nj})^2 + (\Delta_h \overline{\eta}_{j0})^2 + (\Delta_h \overline{\eta}_{jN})^2 \right] \right\}^{1/2} \\
&\qquad \cdot (\Delta_h^2 \overline{\zeta}^{(2)}, \overline{\zeta}^{(2)})^{1/2} = O(h^2) \cdot (\Delta_h^2 \overline{\zeta}^{(2)}, \overline{\zeta}^{(2)})^{1/2}.
\end{aligned}$$

Odatle sledi $\|\overline{\zeta}^{(2)}\|_{W_2^2,h} = O(h^2)$, što zajedno s ocenom (64) za $\overline{\zeta}^{(1)}$ daje $\|\overline{\zeta}\|_{W_2^2,h} = O(h^2)$.

3. Rešavanje diferencijskog zadatka u jednodimenzionom slučaju

U prethodnom paragrafu smo pokazali da se diferencijski analozi prvog i trećeg graničnog problema za običnu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda (u slučaju aproksimacije reda $O(h^2)$) svode na sistem linearnih jednačina oblika:

$$\begin{aligned}
v_0 + p v_1 &= g_0, \\
a_i v_{i-1} + b_i v_i + c_i v_{i+1} &= g_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \\
q v_{N-1} + v_N &= g_N.
\end{aligned} \tag{66}$$

Matrica ovog sistema je trodijagonalna, tj. svi njeni elementi, osim onih koji leže na glavnoj dijagonali i dvema njoj susednim, su jednaki nuli.

Pokazaćemo da se sistem (66) može rešiti pomoću $O(N)$ aritmetičkih operacija. Primenimo na (66) Gaussov algoritam. Prvu jednačinu pomnožimo s $-a_1$ i dodajmo drugoj. Time se druga jednačina svodi na oblik:

$$b_1' v_1 + c_1 v_2 = g_1'; \quad b_1' = b_1 - p a_1; \quad g_1' = g_1 - a_1 g_0.$$

Na isti način, množeći ovako transformisanu drugu jednačinu s $-a_2/b_1'$ i dodajući trećoj poništićemo u ovoj član s v_1 , itd. Posle N ovakvih transformacija sistem (66) se svodi na oblik:

$$\begin{aligned}
v_0 + p v_1 &= g_0, \\
b_i' v_i + c_i v_{i+1} &= g_i', \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \\
b_N' v_N &= g_N'.
\end{aligned} \tag{67}$$

Množeći poslednju jednačinu sistema (67) s c_{N-1}/b'_N i dodajući pretposlednjoj svodimo ovu na oblik:

$$b'_{N-1}v_{N-1} = g''_{N-1}; \quad g''_{N-1} = g'_{N-1} - c_{N-1}g'_N/b'_N.$$

Posle N ovakvih transformacija sistem se svodi na dijagonalni oblik:

$$b'_i v_i = g''_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N,$$

odakle neposredno nalazimo $v_i = g''_i/b'_i$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$. Ukupan broj izvršenih aritmetičkih operacija je:

$$Q = 4 + 5(N-1) + 3N + 1 = 8N = O(N).$$

Algoritam rešavanja sistema (66) možemo predstaviti i na sledeći način (Samarski [1971]). Označimo:

$$v_i = \alpha_{i+1}v_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{68}$$

gde su α_{i+1} i β_{i+1} koeficijenti koje treba odrediti. Zamenjujući v_i i $v_{i-1} = \alpha_i v_i + \beta_i = \alpha_i\alpha_{i+1}v_{i+1} + \alpha_i\beta_{i+1} + \beta_i$ u (66) dobijamo:

$$(a_i\alpha_i\alpha_{i+1} + b_i\alpha_{i+1} + c_i)v_{i+1} + a_i\alpha_i\beta_{i+1} + a_i\beta_i + b_i\beta_{i+1} = g_i;$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N-1).$$

Poslednja jednakost će biti sigurno ispunjena ako je

$$a_i\alpha_i\alpha_{i+1} + b_i\alpha_{i+1} + c_i = 0 \quad \text{i} \quad a_i\alpha_i\beta_{i+1} + a_i\beta_i + b_i\beta_{i+1} = g_i.$$

Odatle dobijamo:

$$\alpha_{i+1} = -\frac{c_i}{a_i\alpha_i + b_i}, \quad b_{i+1} = \frac{g_i - a_i\beta_i}{a_i\alpha_i + b_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{69}$$

Iz prve jednačine sistema (66) nalazimo:

$$\alpha_1 = -p, \quad \beta_1 = g_0, \tag{70}$$

a iz poslednje:

$$qv_{N-1} + v_N = q(\alpha_N v_N + \beta_N) + v_N = g_N,$$

odnosno:

$$v_N = (g_N - q\beta_N)/(q\alpha_N + 1). \tag{71}$$

Prema tome, polazeći od α_1 i β_1 datih jednakostima (70) izračunavamo po formulama (69) α_{i+1} i β_{i+1} za $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Zatim, polazeći od vrednosti v_N date sa (71), određujemo v_i za $i = N-1, \ldots, 1, 0$ po formuli (68).

Formule (68)–(71) su stabilne ako je $|\alpha_i| < 1$. U tom slučaju greška zaokrugljivanja koja se javlja pri izračunavanju v_i po rekurentnoj formuli (68) ne raste. Uslovi:

$$a_i > 0, \quad c_i > 0, \quad a_i + b_i + c_i \leq 0, \quad -1 < p \leq 0, \quad -1 < q \leq 0 \tag{72}$$

obezbeđuju stabilnost. Zaista, iz $\alpha_1 = -p$ sledi $0 \leq \alpha_1 < 1$, a iz $0 \leq \alpha_i < 1$ sledi

$$0 < \alpha_{i+1} = -\frac{c_i}{a_i\alpha_i + b_i} = \frac{c_i}{(1-\alpha_i)a_i + c_i - (a_i + b_i + c_i)} < 1.$$

Neposredno se proverava da su u slučaju zadataka (2) i (8) uslovi (72) zadovoljeni.

Napred rečeno važi i za sisteme linearnih jednačina s petodijagonalnom i uopšte $(2m+1)$-dijagonalnom matricom (m =const). Za njihovo rešavanje je takođe dovoljno $O(N)$ aritmetičkih operacija, gde je N red matrice.

4. Specifičnost diferencijskih sistema

Sistemi jednačina dobijeni diferencijskom aproksimacijom graničnih problema za linearne parcijalne diferencijalne jednačine eliptičkog tipa izdvajaju se iz opštih sistema linearnih jednačina sledećim osobinama: a) velikim brojem nepoznatih; b) retkošću matrica; c) specifičnošću mesta na kojima se nalaze nenulti elementi u matrici; d) velikom razbacanošću spektra matrice.

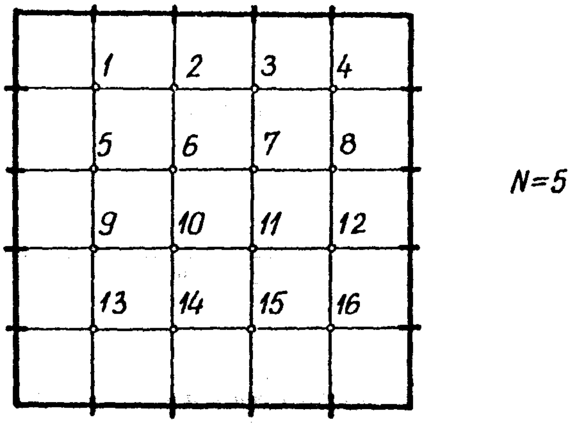
Zbog prvog iz nabrojanih svojstava pri izučavanju različitih metoda rešavanja diferencijskih sistema naročita pažnja se mora posvetiti njihovim asimptotskim osobinama kad $N \to \infty$, gde je N red matrice. Specijalno, veliku važnost dobija efikasnost metode, tj. broj aritmetičkih operacija potrebnih za rešavanje diferencijskog sistema.

Pre nego što pređemo na izučavanje osobina b) i c) navedimo jedan primer. Neka je u kvadratu $[0,l]^2$ dat diferencijski analog Dirichletovog problema za Poissonovu jednačinu:

$$\Delta_h v \equiv v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2} = f; \quad h = l/N; \quad v|_{\Gamma_h} = 0. \tag{73}$$

Ako čvorove numerišemo po horizontalnim redovima s leva na desno i odozgo nadole (na slici 5) tada će matrica sistema linearnih jednačina koji odgovara zadatku (73) imati oblik:

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1.N-1} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2.N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N-1.1} & A_{N-1.2} & A_{N-1.3} & \dots & A_{N-1.N-1} \end{pmatrix}$$



Sl. 5

gde su A_{ij} kvadratne matrice reda $N-1$, A_{ij} za $|i-j| \geq 2$ su nula matrice, $A_{i,i+1}$ i $A_{i,i-1}$ su jedinične matrice, a A_{ii} su trodijagonalne matrice oblika:

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -4 \end{pmatrix}$$

Za izučavanje osobina b) i c) uvedimo nekoliko definicija (videti D'jakonov [1971]). Neka je $A = (a_{ij})$ kvadratna matrica N-tog reda u čijoj se svakoj vrsti i svakoj koloni nalaze nenulti elementi. Sa $\omega(A)$ označimo skup indeksa (i,j) koji odgovaraju nenultim elementima matrice A, a sa $|\omega(A)|$ njihov ukupan broj. Tada će nam $p(A) = |\omega(A)|/N$ davati informaciju o retkosti naše matrice .

Prelaz od jednog indeksa $(i,j) \in \omega(A)$ do drugog $(i_1, j_1) \in \omega(A)$ kod kojeg je ili $i_1 = i$ ili $j_1 = j$ nazivaćemo skokom. Matricu A ćemo zvati nesvodljivom ako za svaki par $(i,j), (i_1, j_1) \in \omega(A)$ postoji niz skokova koji ih spaja. Lako se vidi da se nesvodljiva matrica ne može permutacijom vrsta i kolona svesti na oblik

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Za karakteristiku složenosti strukture nesvodljive matrice A uzećemo veličinu:

$$\rho(A) = \max_{(i,j),(i_1,j_1)\in\omega(A)} \rho(i,j;i_1,j_1)$$

gde je $\rho(i,j;i_1,j_1)$ minimalan broj skokova koji spaja indekse (i,j) i (i_1,j_1). Lako se vidi da $\rho(i,j;i_1,j_1)$ i $\rho(A)$ ne zavise od permutacije vrsta i kolona matrice

A. Takođe se može koristiti veličina $r(A) = \ln N/(\ln \rho(A))$ kao mera „relativne" složenosti strukture matrice A.

Lako se proverava da je u slučaju matrice koja odgovara operatoru L_h iz zadatka (34) i oblasti $\Omega = [0,l]^n$: $\psi(A) \sim n^2 + n + 1$, $\rho(A) \sim N^{1/n}$, $r(A) \sim n$, gde $a \sim b$ znači $\lim_{N\to\infty}(a/b) = 1$. Vidimo da se karakteristike matrice kvare pri povećanju broja dimenzija n. Na osnovu ovih asimptotskih jednakosti može se dokazati sledeća lema.

LEMA 1. *Za $n \geq 2$ matrica A se ne može permutacijom vrsta i kolona svesti na $(2m+1)$-dijagonalnu matricu, gde je $m = \text{const}$.*

Dokaz: Neka je B $(2m+1)$-dijagonalna matrica, tj. $\omega(B) \subseteq \omega_1 \equiv \{(i,j) \mid |i-j| \leq m\}$. Neka je C matrica takva da je $\omega(C) = \omega_1$. Tada je $\rho(B) \geq \rho(C)$. Veličina $\rho(C)$ se lako ocenjuje: $\rho(C) \sim N/m$, $N \to \infty$. Znači $\rho(B) \geq kN$, $k > 0$. Međutim $\rho(A) \sim N^{1/n}$ i $\rho(A)$ ne zavisi od permutacije vrsta i kolona, pa se znači A ne može tramnsformisati u $(2m+1)$-dijagonalnu matricu.

U slučaju $n = 1$ matrica A je trodijagonalna. Kao što smo videli u prethodnom paragrafu, primenom Gaussove metode sistem s ovakvom matricom se može rešiti pomoću $O(N)$ aritmetičkih operacija. Iz dokazane leme sledi da se za $n \geq 2$ Gaussova metoda ne može primeniti s istom efikasnošću. Zato moramo obratiti posebnu pažnju metodama rešavanja višedimenzionih diferencijskih zadataka.

Poslednja iz nabrojanih osobina označava da sopstvene vrednosti diferencijskog operatora neograničeno rastu kad $h \to 0$. Za operator (34) je $(\max|\lambda|)/(\min|\lambda|) = O(h^{-2})$, dok je za diferencijske operatore reda višeg od dva ova zavisnost $(\max|\lambda|)\cdot(\min|\lambda|)^{-1}$ od h još jača. Posledica velike razbacanosti spektra matrice A je spora konvergencija klasičnih iterativnih metoda.

5. Iterativne metode za rešavanje eliptičkih diferencijskih zadataka

U prethodnom paragrafu smo videli da primena direktih metoda linearne algebre za rešavanje eliptičkih diferencijskih zadataka nije celishodna zbog velikog broja potrebnih aritmetičkih operacija. Zato se za njihovo rešavanje obično koriste iterativne metode. Pri tome se, zbog ukazanog uticaja razbacanosti spektra na brzinu konvergencije, biraju takve metode kod kojih je konvergencija što je moguće brža. Iterativne metode ćemo upoređivati na osnovu njihove ekonomičnosti, tj. broja aritmetičkih operacija potrebnih da se norma greške (ili ostatka) smanji $1/\varepsilon$ puta.

Zadržimo se prvo na opštim karakteristikama pojma iterativne metode. Neka je potrebno rešiti diferencijski zadatak:

$$Av = f. \tag{74}$$

Razmatraćemo A kao linearni operator u Hilbertovom prostoru H, a v i f kao elemente iz H.

Kod iterativne metode polazeći od neke približne vrednosti $v^0 \in H$ rešenja jednačine (74) redom određujemo sledeće približne vrednosti $v^1, v^2, \ldots, v^j, v^{j+1}, \ldots$. Pri tome se v^{j+1} izražava preko prethodnih: $v^{j+1} = F_j(v^j, \ldots, v^1, v^0)$. Ako se za određivanje v^{j+1} koristi samo v^j: $v^{j+1} = F_j(v^j)$, kažemo da je iterativna metoda prvog reda. Dalje ćemo razmatrati samo iterativne metode prvog reda kod kojih je F_j linearna funkcija, tj.

$$B_j v^{j+1} = C_j v^j + \tau_{j+1} f, \tag{75}$$

gde su B_j i C_j linearni operatori na H, a τ_{j+1} skalarni parametri . Prirodno je zahtevati da rešenje v jednačine (74) zadovoljava (75) tj. $B_j v = C_j v + \tau_{j+1} f$. Ova jednakost je ispunjena ako je $B_j - C_j = \tau_{j+1} A$. Izražavajući odatle C_j (75) se svodi na:

$$B_j v^{j+1} = B_j v^j - \tau_{j+1}(Av^j - f). \tag{76}$$

Kao što smo rekli, operatore B_j i parametre τ_{j+1} biramo iz uslova da broj aritmetičkih operacija potrebnih sa određivanje v^k takvog da važi:

$$\|v^k - v\| \leq \varepsilon \|v^0 - v\| \quad (\text{ili} \quad \|Av^k - f\| \leq \varepsilon \|Av^0 - f\|) \quad \text{za } k \geq k(\varepsilon) \tag{77}$$

bude što manji. Ukupan broj operacija je $Q(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{k(\varepsilon)} q_j$ gde je q_j broj operacija potrebnih za određivanje j-te iteracije. Ako q_j zadovoljava uslov ekonomičnosti $q_j = O(N)$ gde je N ukupan broj nepoznatih (odnosno čvorova mreže Ω_h) tada se zadatak o minimumu $Q(\varepsilon)$ svodi na zadatak o minimumu broja iteracija $k(\varepsilon)$. Iz (76) je jasno da q_{j+1} zavisi samo od B_j. Uslov ekonomičnosti je zadovoljen npr. ako operatoru B_j odgovara dijagonalna, $(2m+1)$-dijagonalna ili trougaona matrica ili proizvod od konačno mnogo ovakvih matrica.

Napomenimo na kraju da u (77) nema smisla zahtevati tačnost veću od tačnosti aproksimacije. Obično se uzima da su greška aproksimacije, greška zaokrugljivanja i ε veličine istog reda, tj. $h^2 \sim \varepsilon_1/h^2 \sim \varepsilon$ (u slučaju diferencijacijskog zadatka drugog reda i obične aproksimacije reda $O(h^2)$). Iz prve relacije se dobija optimalna veličina koraka: $h \sim \varepsilon_1^{1/4}$ gde je ε_1 određeno brojem decimalnih mesta za v.

a. Prosta iteracija. Metodu proste iteracije dobijamo iz (76) stavljajući $B_j = I$ =jedinični operator i $\tau_{j+1} = \tau$ =const. Za operator A pretpostavimo da je samokonjugovan i pozitivno definisan i da njegove sopstvene vrednosti zadovoljavaju uslov $0 < \delta \leq \lambda(A) \leq \Delta$. (Ove uslove ispunjava npr. operator (34): za njega je $\delta = c_1$ i $\Delta = c_2 h^{-2}$. Tada se (76) svodi na

$$v^{j+1} = v^j - \tau(Av^j - f).$$

Odatle dobijamo:

$$v^{j+1} - v = v^j - v - \tau A(v^j - v) = (I - \tau A)(v^j - v). \tag{78}$$

Sledi:

$$v^k - v = (I - \tau A)^k (v^0 - v) \quad \text{i} \quad \|v^k - v\| \le \|(I - \tau A)^k\| \cdot \|v^0 - v\|.$$

Operetor $I - \tau A$ je samokonjugovan pa je zato $\|(I - \tau A)^k\| = \|I - \tau A\|^k$ i:

$$\|I - \tau A\| = \max_{\lambda_i} |1 - \tau\lambda_i| \le \max_{\lambda \in [\delta, \Delta]} |1 - \tau\lambda|.$$

Na taj način dobijamo:

$$\|v^k - v\| \le \Big(\max_{\lambda \in [\delta, \Delta]} |1 - \tau\lambda|\Big)^k \|v^0 - v\|. \tag{79}$$

Slično, množeći (78) sa A, dobijamo:

$$\|Av^k - f\| \le \Big(\max_{\lambda \in [\delta, \Delta]} |1 - \tau\lambda|\Big)^k \|Av^0 - f\|. \tag{80}$$

Parametar τ određujemo iz uslova minimalnosti norme operatora $I - \tau A$ odnosno iz uslova:

$$\min_{\tau} \max_{\lambda \in [\delta, \Delta]} |1 - \tau\lambda|.$$

LEMA 2. *Ako je $0 < \delta < \Delta$ tada je*

$$\min_{\tau} \max_{\lambda \in [\delta, \Delta]} |1 - \tau\lambda| = \frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta}$$

i dostiže se za $\tau = \tau_0 = 2/(\Delta + \delta)$.

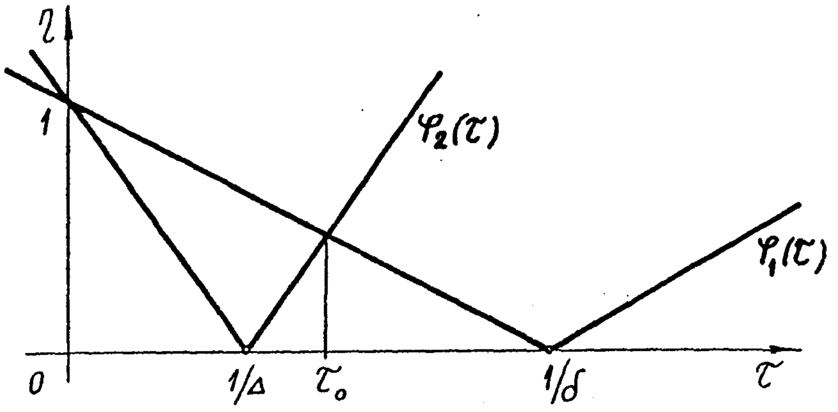
Dokaz: Funkcija $f(\lambda) = |1 - \tau\lambda|$ dostiže na intervalu $[\delta, \Delta]$ maksimum očevidno ili za $\lambda = \delta$ ili za $\lambda = \Delta$ pa je znači $\max_{\lambda \in [\delta, \Delta]} = \max\{|1 - \tau\delta|, |1 - \tau\Delta|\}$. Posmatrajmo sada funkcije $\varphi_1(\tau) = |1 - \tau\delta|$ i $\varphi_2(\tau) = |1 - \tau\Delta|$. Prva od njih opada za $\tau < 1/\delta$ i raste za $\tau > 1/\delta$ a druga opada za $\tau < 1/\Delta$ i raste za $\tau > 1/\Delta$. Pošto je $0 < \delta < \Delta$ krive $\eta = \varphi_1(\tau)$ i $\eta = \varphi_2(\tau)$ se seku u tački $\tau = \tau_0 \in (1/\Delta, 1/\delta)$ pri čemu je $1 - \tau_0\delta = \varphi_1(\tau_0) = \varphi_2(\tau_0) = \tau_0\Delta - 1$ (na slici 6). Odatle dobijamo $\tau_0 = 2/(\Delta + \delta)$ i $\varphi_1(\tau_0) = \varphi_2(\tau_0) = (\Delta - \delta)/(\Delta + \delta)$. U tački τ_0 dostiže se minimum funkcije $\varphi(\tau) = \max\{|1 - \tau\delta|, |1 - \tau\Delta|\}$ a samim tim i $\min_\tau \max_{\lambda \in [\delta, \Delta]} |1 - \tau\lambda|$.∎

Pri ovakvom optimalnom izboru τ ocene (79) i (80) glase:

$$\|v^k - v\| \le ((\Delta - \delta)/(\Delta - \delta))^k \|v^0 - v\|,$$

odnosno:

$$\|Av^k - f\| \le ((\Delta - \delta)/(\Delta - \delta))^k \|Av^0 - f\|.$$



Sl. 6

Da bi bila ispunjena nejednakost (77) dovoljno je da bude $\left((\Delta-\delta)/(\Delta+\delta)\right)^k \leq \varepsilon$ odakle dobijamo:

$$k \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln((\Delta+\delta)/(\Delta-\delta))} = k(\varepsilon).$$

U slučaju kada je $\delta = c_1$ i $\Delta = c_2/h^2$, koji je tipičan za diferencijske operatore drugog reda, dobijamo $k(\varepsilon) = O(h^{-2}\ln\varepsilon^{-1})$. Ukupan broj aritmetičkih operacija jednak je $Q(\varepsilon) = O(h^{-4}\ln\varepsilon^{-1})$ — u slučaju dvodimenzione oblasti, odnosno $Q(\varepsilon) = O(h^{-n-2}\ln\varepsilon^{-1})$ — u slučaju n-dimenzione oblasti.

b. Richardsonova metoda. Richardsonovu metodu (Richardson [1910]) dobijamo iz (76) stavljajući $B_j = I$. Kao u prethodnom slučaju, pretpostavimo da je operator A samokonjugovan i pozitivno definisan i da njegove sopstvene vrednosti zadovoljavaju uslov $0 < \delta \leq \lambda(A) \leq \Delta$. Jednakost (76) se svodi na

$$v^{j+1} = v^j - \tau_{j+1}(Av^j - f),$$

odakle dobijamo:

$$v^{j+1} - v = (I - \tau_{j+1}A)(v^j - v). \tag{81}$$

Sledi:

$$\|v^k - v\| \leq \left\|\prod_{j=1}^{k}(I - \tau_j A)\right\| \cdot \|v^0 - v\|. \tag{82}$$

Slično, množeći (81) sa A, dobijamo:

$$\|Av^k - f\| \leq \left\|\prod_{j=1}^{k}(I - \tau_j A)\right\| \cdot \|Av^0 - f\|. \tag{83}$$

Operator $\prod_{j=1}^{k}(I - \tau_j A)$ je samokonjugovan pa je zato njegova norma jednaka maksimumu modula njegovih sopstvenih vrednosti. Sledi:

$$\left\|\prod_{j=1}^{k}(I - \tau_j A)\right\| = \max_{\lambda_i}\left|\prod_{j=1}^{k}(1 - \tau_j \lambda_i)\right| \leq \max_{\lambda\in[\delta,\Delta]}\left|\prod_{j=1}^{k}(1 - \tau_j \lambda)\right|.$$

Parametre τ_j određujemo iz uslova minimalnosti ove norme. Tako dolazimo do sledećeg zadatka minimax-a: odrediti niz parametara $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ za koji se dostiže

$$\min_{\{\tau_j\}}\max_{\lambda\in[\delta,\Delta]}\left|\prod_{j=1}^{k}(1 - \tau_j \lambda)\right|.$$

Iz teorije Čebiševljevih polinoma sledi da je $P(\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(1 - \tau_j\lambda)$ Čebiševljev polinom normiran uslovom $P(0) = 1$, i da se τ_j izračunavaju po formuli:

$$\tau_j = \tau_j^0 = 2\left(\Delta + \delta + (\Delta - \delta)\cos\frac{(2j-1)}{2k}\pi\right)^{-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}\left\|\prod_{j=1}^{k}(I - \tau_j A)\right\| &\leq \min_{\{\tau_j\}}\max_{\lambda\in[\delta,\Delta]}\left|\prod_{j=1}^{k}(1 - \tau_j \lambda)\right| \\ &= 2\left[\left(\frac{\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}}\right)^k + \left(\frac{\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta}}\right)^k\right]^{-1} < 2\left(\frac{\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta}}\right)^k\end{aligned}$$

pa se ocene (82) i (83) svode na:

$$\|v^k - v\| \leq 2\left(\frac{\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta}}\right)^k \|v^0 - v\|,$$

odnosno:

$$\|Av^k - f\| \leq 2\left(\frac{\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta}}\right)^k \|Av^0 - f\|.$$

Da bi bila ispunjena nejednakost (77) dovoljno je da bude $2((\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta})/(\sqrt{\Delta} + \sqrt{\delta}))^k \leq \varepsilon$, odakle dobijamo:

$$k \geq \frac{\ln(2/\varepsilon)}{\ln((\sqrt{\Delta}+\sqrt{\delta})/(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}))} = k(\varepsilon).$$

U slučaju kada je $\delta = c_1$, $\Delta = c_2 h^{-2}$ odavde se dobija $k(\varepsilon) = O(h^{-1}\ln\varepsilon^{-1})$. Ukupan broj aritmetičkih operacija potrebnih da se norma greške (odnosno ostatka) smanji $1/\varepsilon$ puta iznosi $O(h^{-3}\ln\varepsilon^{-1})$ u slučaju dvodimenzione oblasti, odnosno $O(h^{-n-1}\ln\varepsilon^{-1})$ u slučaju n-dimenzione oblasti.

Pri ovakvom redosledu parametara τ_j Richardsonova metoda je nestabilna u odnosu na greške zaokrugljivanja (videti Young [1954]). Do toga dolazi zato što je norma operatora prelaza $S_j = I - \tau_j A$ za dovoljno veliko j veća od 1:

$$\|S_j\| = \|I - \tau_j A\| = \max_{\lambda_i} |1 - \tau_j\lambda_i| = \frac{(\Delta-\delta)(1+\cos((2j-1)\pi/(2k)))}{\Delta+\delta+(\Delta-\delta)\cos((2j-1)\pi)/(2k)}.$$

Iz uslova $\|S_j\| \lesseqgtr 1$ dobijamo

$$\frac{1}{2}\left(\left|\cos\frac{2j-1}{2k}\pi\right| - \cos\frac{2j-1}{2k}\pi\right) \lesseqgtr \frac{\delta}{\Delta-\delta}.$$

Za $j \leq k/2$ je ispunjen prvi uslov, tj. $\|S_j\| < 1$. Za $j > k/2$ $\|S_j\|$ raste. Za $j = k$ je

$$\frac{1}{2}\left(\left|\cos\frac{2k-1}{2k}\pi\right| - \cos\frac{2k-1}{2k}\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2k},$$

a ovo je, u slučaju $\delta = c_1$, $\Delta = c_2h^{-2}$, veće od $\delta/(\Delta-\delta)$ praktično za svako $k \geq 2$. Znači, postoji indeks $j_0 > k/2$ takav da je za svako j između j_0 i k ispunjena nejednakost $\|S_j\| > 1$. Prema tome, u iteracijama posle j_0-te greška nastala usled zaokrugljivanja se povećava.

Kao rezultat grešaka zaokrugljivanja mi umesto zadatka:

$$v^{j+1} = S_{j+1}v^j + \tau_{j+1}f, \quad S_j = I - \tau_{j+1}A,$$

u stvari rešavamo zadatak:

$$\tilde{v}^{j+1} = S_{j+1}\tilde{v}^j + \tau_{j+1}\tilde{f}^j + \zeta^j.$$

Da bismo ocenili grešku $z^j = \tilde{v}^j - v^j$ treba da ocenimo rešenje zadatka:

$$z^{j+1} = S_{j+1}z^j + \tau_{j+1}\psi^j + \zeta^i$$

pomoću $z^0 = \tilde{v}^0 - v^0$, $\psi^j = \tilde{f}^j - f$ i ζ^j. Sledi:

$$z^k = \prod_{i=1}^{k} S_i z^0 + \left(\sum_{j=1}^{k-1}\tau_j \prod_{i=j+1}^{k} S_i\psi^{j-1} + \tau_k\psi^{k-1}\right) + \left(\sum_{j=1}^{k-1}\prod_{i=j+1}^{k} S_i\zeta^{j-1} + \zeta^{k-1}\right),$$

$$\|z^k\| \leq \left\|\prod_{i=1}^{k} S_i\right\| \cdot \|z^0\| + \left(\sum_{j=1}^{k-1}\tau_j \left\|\prod_{i=j+1}^{k} S_i\right\| + \tau_k\right)\|\psi\|$$
$$+ \left(\sum_{j=1}^{k-1}\left\|\prod_{i=j+1}^{k} S_i\right\| + 1\right)\|\zeta\|,$$

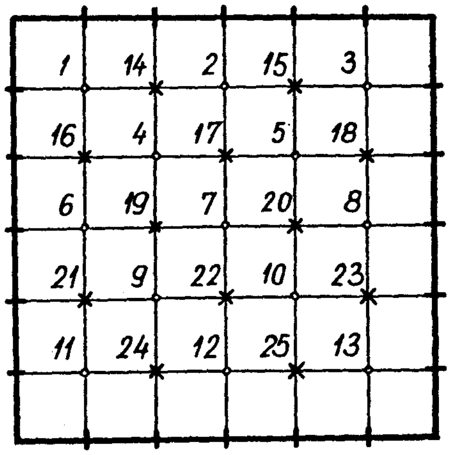
gde je $\|\psi\| = \max_j \|\psi^j\|$ i $\|\zeta\| = \max_j \|\zeta^i\|$. Znači pored $\left\|\prod_{i=1}^k S_i\right\|$ moraju se oceniti i $\sum_{j=1}^k \tau_j \left\|\prod_{i=j+1}^k S_i\right\|$ i $\sum_{j=1}^k \left\|\prod_{i=j+1}^k S_i\right\|$.

Parametri τ_j mogu se urediti na drugi način tako da metoda bude stabilna u odnosu na greške zaokrugljivanja (Nikolajev, Samarski [1972], a takođe Lebedev, Finogenov [1971]). Pokazaćemo kako se taj raspored dobija za $k = 2^p$. Za $p = 1$ parametri se uzimaju u redosledu (τ_1, τ_2). Ako je poznat redosled za $k = 2^p$: $(\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \ldots, \tau_{i_{2^p}})$, tada se redosled za $k = 2^{p+1}$ dobija iz prethodnog zamenom svakog člana τ_{i_j} parom $(\tau_{i_j}, \tau_{2^{p+1}+1-i_j})$. Tako naprimer za $k = 4$ dobijamo $(\tau_1, \tau_4, \tau_2, \tau_3)$, za $k = 8$: $(\tau_1, \tau_8, \tau_4, \tau_5, \tau_2, \tau_7, \tau_3, \tau_6)$, itd.

c. Metoda gornje relaksacije. Metodu gornje relaksacije predložio je Young [1954a]. Ona spada u tzv. metode dekompozicije i da bi se mogla primeniti potrebno je da se sistem (74) može predstaviti u obliku:

$$\begin{pmatrix} E_1 & A_{12} \\ A_{21} & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

gde su E_1 i E_2 lako obrative matrice, na primer dijagonalne. U slučaju zadatka (73) ovakva reprezentacija se postiže tako što se prvi indeksi dodele onim čvorovima kod kojih je $i + j$ neparno (na slici 7)



$N = 6$

Sl. 7

Iteracioni proces ima oblik:

$$\begin{aligned} v_1^{j+1} &= (1-\omega)v_1^j + \omega E_1^{-1}(f_1 - A_{12}v_2^j), \\ v_2^{j+1} &= (1-\omega)v_2^j + \omega E_2^{-1}(f_2 - A_{21}v_1^{j+1}), \end{aligned}$$

koji se svodi na (74) stavljajući

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \tau_{j+1} = \omega, \quad B_j = B = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ \omega A_{21} & E_2 \end{pmatrix}.$$

Odatle slično kao u prethodnim slučajevima, dobijamo:

$$Av^k - f = (I - \omega AB^{-1})^k (Av^0 - f).$$

Sopstvene vrednosti matrice $C = I - \omega AB^{-1}$ su rešenja jednačine:

$$\det(I - \omega AB^{-1} - \lambda I) = 0$$

Pošto je $\det B = \det E_1 \cdot \det E_2 \neq 0$ odatle dobijamo:

$$\det\left[(1-\lambda)B - \omega A\right] = 0$$

odnosno:

$$\det \begin{pmatrix} (1-\lambda-\omega)E_1 & -\omega A_{12} \\ -\lambda\omega A_{21} & (1-\lambda-\omega)E_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Posle još jedne jednostavne transformacije konačno dobijamo:

$$\det \begin{pmatrix} \omega^{-1}(\sqrt{\lambda} - (1-\omega)/\sqrt{\lambda})E_1 & A_{12} \\ A_{21} & \omega^{-1}(\sqrt{\lambda} - (1-\omega)/\sqrt{\lambda})E_2 \end{pmatrix} = 0$$

Ako sa μ označimo korene jednačine:

$$\det \begin{pmatrix} \mu E_1 & A_{12} \\ A_{21} & \mu E_2 \end{pmatrix} = 0$$

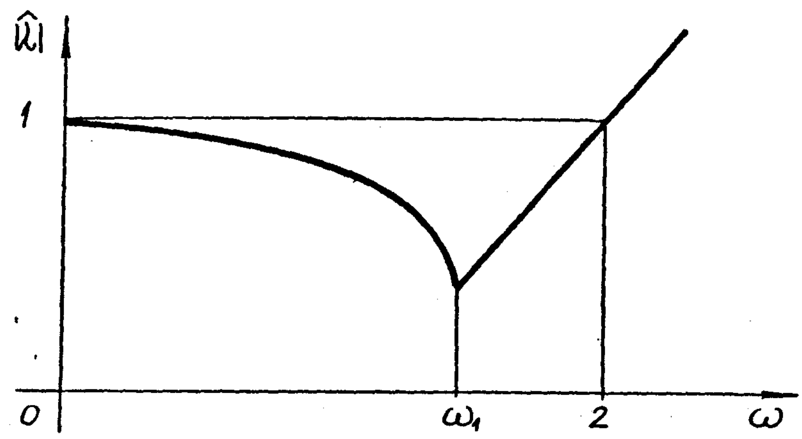
dobićemo vezu:

$$\omega^{-1}(\sqrt{\lambda} - (1-\omega)/\sqrt{\lambda}) = \mu. \tag{84}$$

Vidimo da λ zavisi od ω. Pošto brzina konvergencije iterativnog procesa zavisi od veličine sopstvenih vrednosti matrice C prirodno dolazimo do minimax zadatka oblika $\min_\omega \max_\lambda |\lambda(\omega)|$. U radu Younga [1954] dato je rešenje ovog zadatka za slučaj problema (73). Tada je $E_1 = -4h^{-2}I$ i $E_2 = -4h^{-2}I$. Sopstvene vrednosti matrice A su $-4h^{-2}\left(\sin^2(i\pi h/(2l)) + \sin^2(j\pi h/(2l))\right)$ odakle dobijamo $\mu = \mu_{ij} = \frac{1}{2}\left(\cos(i\pi h/l) + \cos(j\pi h/l)\right)$. Neposredno se proverava nejednakost $-\cos(\pi h/l) \leq \mu_{ij} \leq \cos(\pi h/l)$. Iz (84) sledi:

$$\sqrt{\lambda} = \left[\omega\lambda \pm \sqrt{\omega^2\mu^2 + 4(1-\omega)}\right]/2. \tag{85}$$

Možemo se ograničiti samo na znak „+“ zbog $\mu_{N-i,N-j} = -\mu_{ij}$. Iz (85) sledi da se $\max_\lambda |\lambda(\omega)|$ dostiže za $\mu = \hat{\mu} = \cos(\pi h/l)$. Da bismo odredili $\min_\omega \max_\lambda |\lambda(\omega)|$



Sl. 8

ispitajmo funkciju $\hat{\lambda} = \left[\left(\omega\hat{\mu} + \sqrt{\omega^2\hat{\mu}^2 + 4(1-\omega)}\right)/2\right]^2$. Veličina $\hat{\lambda}$ je realna kada je $\omega\hat{\mu}^2 + 4(1-\omega) \geq 0$ odnosno

$$\omega \leq \omega_1 = 2\left(1 + \sqrt{1-\hat{\mu}^2}\right)^{-1} = 2\left(1 + \sin(\pi h/l)\right)^{-1} \quad \text{i}$$
$$\omega \geq \omega_2 = 2\left(1 - \sqrt{1-\hat{\mu}^2}\right)^{-1} = 2\left(1 - \sin(\pi h/l)\right)^{-1}.$$

Lako se proverava da je $\hat{\lambda} = 1$ za $\omega = 0$, da $\hat{\lambda}$ opada kad ω raste od 0 do ω_1 i da je levi izvod $d\hat{\lambda}/d\omega$ u tački ω_1 beskonačan. Za $\omega_1 < \omega < \omega_2$ veličina $\hat{\lambda}$ je kompleksna, i $|\hat{\lambda}| = \omega - 1$. Iz rečenog sledi da je $|\hat{\lambda}| < 1$ za $0 < \omega < 2$ i da se $\min_\omega |\hat{\lambda}|$ dostiže za $\omega = \omega_1$ i iznosi $\omega_1 - 1 = (1 - \sin(\pi h/l))/(1 + \sin(\pi h/l))$ (videti sliku 8).
Zamenjujući u (85) $\omega = \omega_1$ dobijamo:

$$\sqrt{\lambda} = \left(1 + \sin\frac{\pi h}{l}\right)^{-1}\left(\mu + i\sqrt{\cos^2\frac{\pi h}{l} - \mu^2}\right).$$

Prema tome, pri optimalnom izboru $\omega = \omega_1$ sopstvene vrednosti matrice $C = I - \omega AB^{-1}$ su kompleksne i leže na krugu:

$$|\lambda| = \frac{\cos^2(\pi h/l)}{\left(1 + \sin(\pi h/l)\right)^2} = \frac{1 - \sin(\pi h/l)}{1 + \sin(\pi h/l)}.$$

Dalje je:

$$\begin{aligned}\|Av^k - f\| &\leq \|(I - \omega AB^{-1})^k\| \cdot \|Av^0 - f\| \\ &\sim \text{const} \cdot \binom{k}{p-1}\left(\max|\lambda|\right)^{k-p+1} \cdot \|Av^0 - f\|, \quad k \to \infty,\end{aligned}$$

gde je p dimenzija najvećeg bloka u Jordanovoj normalnoj formi matrice $C = I - \omega AB^{-1}$ (videti Varga [1962]). Odatle sledi da su $k(\varepsilon)$ i broj potrebnih aritmetičkih operacija istog reda veličine kao kod Richardsonove metode. Metoda gornje relaksacije je stabilna u odnosu na greške zaokrugljivanja, ali je njena oblast primenjivost uža nego za Richardsonovu metodu.

d. Metoda promenljivih pravaca. Metodu promenljivih pravaca predložili su Peacemann, Rachford [1955] i Douglas [1955]. Zbog svojih dobrih osobina — ekonomičnosti, numeričke stabilnosti i relativno široke primenljivosti — metoda je vrlo brzo stekla široku primenu.

Metoda promenljivih pravaca, kao i metoda gornje relaksacije, spada u metode dekompozicije. Neka je $A = A_1 + A_2$, gde su A_1 i A_2 samokonjugovani, pozitivno definisani i međusobno komutativni operatori čije sopstvene vrednosti zadovoljavaju uslove $0 < \delta_1 \leq \lambda(A_1) \leq \Delta_1$ i $0 < \delta_2 \leq \lambda(A_2) \leq \Delta_2$. Ove uslove zadovoljavaju na primer diferencijski operatori:

$$A_1 v = -(a v_{\bar{x}_1})_{x_1}, \quad A_2 v = -(b v_{\bar{x}_2})_{x_2}, \tag{86}$$

u slučaju kada je oblast Ω pravougaonik, funkcija a zavisi samo od x_1, b zavisi samo od x_2 i $a \geq a_0 > 0$, $b \geq b_0 > 0$.

Za rešavanje jednačine (74) primenimo sledeću iterativnu metodu:

$$\begin{aligned} v^{j+1/2} - v^j + \tau_1\big(A_1 v^{j+1/2} + A_2 v^j - f\big) &= 0, \\ v^{j+1} - v^{j+1/2} + \tau_2\big(A_1 v^{j+1/2} + A_2 v^{j+1} - f\big) &= 0. \end{aligned} \tag{87}$$

Ako su A_1 i A_2 definisani sa (86) tada se u prvoj jednačini u (87) član s najvećim indeksom, $v^{j+1/2}$, pojavljuje u trima tačkama koje se nalaze na jednoj pravoj paralelnoj osi Ox_1. Slično, u drugoj jednačini u (87) član s najvećim indeksom, v^{j+1}, pojavljuje se u trima tačkama koje se nalaze na jednoj pravoj paralelnoj osi Ox_2. Otuda potiče i naziv metode.

Eliminisanjem $v^{j+1/2}$ metoda se svodi na oblik (76) sa $B_j = B = (1+\tau_1 A_1)(1+\tau_2 A_2)$ i $\tau_{j+1} = \tau = \tau_1 + \tau_2$:

$$(I + \tau_1 A_1)(I + \tau_2 A_2)v^{j+1} = (I + \tau_1 A_1)(I + \tau_2 A_2)v^j - (\tau_1 + \tau_2)(Av^j - f). \tag{88}$$

Operator B je samokonjugovan i pozitivno definisan. Metoda (87)–(88) je implicitna, tj. za dobijanje v^{j+1} treba rešavati linearnu jednačinu (odnosno sistem). Ako su operatori A_1 i A_2 definisani sa (86) tada je operator B ekonomičan. Zaista, operatorima $I + \tau_1 A_1$ i $I + \tau_2 A_2$ odgovaraju matrice koje se permutacijom vrsta i kolona mogu svesti na trodijagonalni oblik. U tom slučaju, kao što je pokazano u paragrafu 3, za određivanje v^{j+1} iz (88) potrebno je $O(N)$ aritmetičkih operacija, gde je N ukupan broj čvorova mreže Ω_h.

Iz (88) dobijamo:

$$v^{j+1} = v^j - (\tau_1 + \tau_2)B^{-1}(Av^j - f),$$
$$Av^{j+1} - f = [I - (\tau_1 + \tau_2)B^{-1}A](Av^j - f) = S(Av^j - f),$$

gde je

$$S = I - (\tau_1 + \tau_2)B^{-1}A = (1 + tau_1 A_1)^{-1}(1 - \tau_2 A_1)(1 + \tau_2 A_2)^{-1}(1 - \tau_1 A_2).$$

Odavde dalje dobijamo:

$$Av^k - f = S^k(Av^0 - f),$$
$$\|Av^k - f\| \le \|S\|^k \|Av^0 - f\|. \tag{89}$$

Iz osobina operatora A_1 i A_2 sledi da je operator S samokonjugovan, pa je zato:

$$\|S\| = \max |\lambda(s)| = \max_{\lambda_i \in [\delta_i, \Delta_i]} \left| \frac{1 - \tau_2\lambda_1}{1 + \tau_1\lambda_1} \cdot \frac{1 - \tau_1\lambda_2}{1 + \tau_2\lambda_2} \right|. \tag{90}$$

Parametre τ_1 i τ_2 biramo iz uslova minimalnosti ove norme. Tako dobijamo sledeći minimax zadatak:

$$\min_{\tau_1, \tau_2} \max_{\lambda_i \in [\delta_i, \Delta_i]} \left| \frac{1 - \tau_2\lambda_1}{1 + \tau_1\lambda_1} \cdot \frac{1 - \tau_1\lambda_2}{1 + \tau_2\lambda_2} \right|. \tag{91}$$

Pre nego što pristupimo rešavanju ovog zadatka transformišimo funkciju

$$F = F(\tau_1, \tau_2, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1 - \tau_2\lambda_1}{1 + \tau_1\lambda_1} \cdot \frac{1 - \tau_1\lambda_2}{1 + \tau_2\lambda_2}.$$

Umesto λ_1 i λ_2 uvedimo nove promenljive α i β koje se menjaju na istom intervalu $[\eta, 1]$, gde je $0 < \eta < 1$. Stavimo $\lambda_1 = (\alpha - p)/(q - r\alpha)$ i $\lambda_2 = (\beta + p)/(q + r\beta)$. Iz uslova $\alpha = \beta = \eta$ za $\lambda_1 = \delta_1$, $\lambda_2 = \delta_2$ i $\alpha = \beta = 1$ za $\lambda_1 = \Delta_1$, $\lambda_2 = \Delta_2$, dobijamo četiri jednačine za određivanje p, q, r i η:

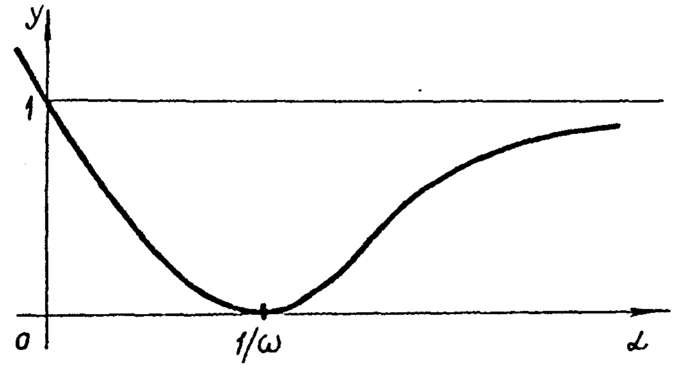
$$\delta_1(q - \eta r) = \eta - p, \quad \delta_2(q + \eta r) = \eta + p, \quad \Delta_1(q - r) = 1 - p, \quad \Delta_2(q + r) = 1 + p.$$

Odatle dobijamo:

$$\eta = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad p = \frac{\kappa - \xi}{\kappa + \xi}, \quad r = \frac{\Delta_1\kappa - \Delta_2\xi}{\Delta_1\Delta_2(\kappa + \xi)}, \quad q = \frac{\Delta_1\kappa + \Delta_2\xi}{\Delta_1\Delta_2(\kappa + \xi)},$$

gde je

$$\xi = \sqrt{\frac{(\Delta_1 - \delta_1)(\Delta_2 - \delta_2)}{(\Delta_1 + \delta_2)(\Delta_2 + \delta_1)}} \quad \text{i} \quad \kappa = \frac{(\Delta_1 - \delta_1)\Delta_2}{(\Delta_2 + \delta_1)\Delta_1}.$$



Sl. 9

Lako se vidi da je $0 < \eta < 1$, $\kappa \geq \xi$ i $p \geq 0$. Na taj način se F transformiše u:

$$F = \frac{1-\omega_2\alpha}{1+\omega_1\alpha} \cdot \frac{1-\omega_1\beta}{1+\omega_2\beta}; \quad \eta \leq \alpha, \beta \leq 1, \tag{92}$$

gde je $\omega_1 = (r_1 - r)/(q - r_1 p)$ i $\omega_2 = (r_2 + r)/(q + r_2 p)$. Pošto ω_1 i ω_2 ulaze u (92) simetrično, a α i β se menjaju na istom intervalu možemo staviti $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ i $\alpha = \beta$. Tako umesto (91) dobijamo sledeći minimax zadatak:

$$\min_{\omega} \max_{\alpha\in[\eta,1]} \left(\frac{1-\omega\alpha}{1+\omega\alpha}\right)^2.$$

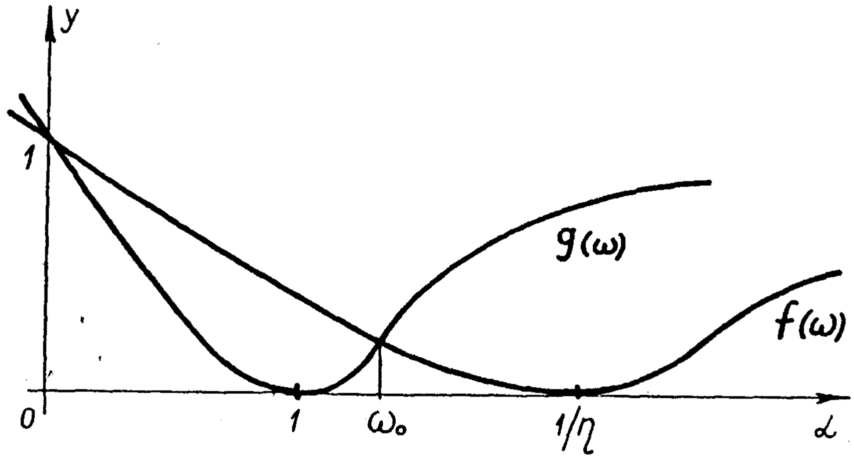
Funkcija $y(\alpha) = \left(\dfrac{1-\omega\alpha}{1+\omega\alpha}\right)^2$, za fiksirano ω, je definisana i neprekidna za $\alpha \geq 0$, pri čemu je opadajuća za $0 < \alpha < 1/\omega$ i rastuća za $\alpha > 1/\omega$ (videti sliku 9). Prema tome $\max_{\alpha\in[\eta,1]} y(\alpha)$ se dostiže ili za $\alpha = \eta$ ili za $\alpha = 1$:

$$\max_{\alpha\in[\eta,1]} \left(\frac{1-\omega\alpha}{1+\omega\alpha}\right)^2 = \max\left\{\left(\frac{1-\omega\eta}{1+\omega\eta}\right)^2, \left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^2\right\}.$$

Dalje su $f(\omega) = \left(\dfrac{1-\omega\eta}{1+\omega\eta}\right)^2$ i $g(\omega) = \left(\dfrac{1-\omega}{1+\omega}\right)^2$ dve funkcije od ω, sličnog ponašanja kao $y(\alpha)$ (videti sliku 10). Krive $y = f(\omega)$ i $y = g(\omega)$ seku se u tački $\omega_0 \in (1, 1/\eta)$. Za $0 < \omega < \omega_0$ je $f(\omega) > g(\omega)$ a za $\omega > \omega_0$ je $f(\omega) < g(\omega)$. Prema tome je

$$\max\{f(\omega), g(\omega)\} = \begin{cases} f(\omega), & 0 < \omega < \omega_0 \\ g(\omega), & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

$$\min_{\omega} \max\{f(\omega), g(\omega)\} = f(\omega_0) = g(\omega_0).$$



Sl. 10

Odatle dobijamo

$$\left(\frac{1-\omega_0\eta}{1+\omega_0\eta}\right)^2 = \left(\frac{1-\omega_0}{1+\omega_0}\right)^2 \quad \text{i} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\eta}}.$$

Prema tome

$$\min_{\omega} \max_{\alpha\in[\eta,1]} \left(\frac{1-\omega\alpha}{1+\omega\alpha}\right)^2$$

dostiže se za $\omega = \omega_0 = \eta^{-1/2}$ i jednak je:

$$\min_{\omega} \max_{\alpha\in[\eta,1]} \left(\frac{1-\omega\alpha}{1+\omega\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1-\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}}\right)^2. \tag{93}$$

Iz (93), (90) i (89) dobijamo:

$$\|Av^k - f\| \le \left(\frac{1-\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}}\right)^{2k} \|Av^0 - f\|.$$

Da bi bila ispunjena nejednakost (77) dovoljno je da bude $\left((1-\sqrt{\eta})/(1+\sqrt{\eta})\right)^{2k} \le \varepsilon$ odakle dobijamo:

$$k \ge \frac{1}{2}\frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln((1+\sqrt{\eta})/(1-\sqrt{\eta}))} = k(\varepsilon).$$

U slučaju kada su operatori A_1 i A_2 definisani sa (86) je $\eta = O(h^2)$ pa dobijamo $k(\varepsilon) = O(h^{-1}\ln\varepsilon^{-1})$. Ukupan broj aritmetičkih operacija, u slučaju dvodimenzione oblasti, jednak je $Q(\varepsilon) = O(h^{-3}\ln\varepsilon^{-1})$. Specijalno za $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ i $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ je $\eta = \delta/\Delta$.

Dalje ubrzanje konvergencije može se postići variranjem parametara τ_1 i τ_2, na sličan način kao što se Richardsonova metoda dobija iz metode proste iteracije. Pod istim pretpostavkama o operatorima A_1 i A_2 posmatrajmo iterativnu metodu:

$$\begin{aligned} v^{j+1/2} - v^j + \tau_{1.j+1}(A_1 v^{j+1/2} + A_2 v^j - f) &= 0, \\ v^{j+1} - v^{j+1/2} + \tau_{2.j+1}(A_1 v^{j+1/2} + A_2 v^{j+1} - f) &= 0. \end{aligned} \tag{94}$$

Eliminisanjem $v^{j+1/2}$ (94) se svodi na oblik (76) sa

$$B_j = (I + \tau_{1.j+1}A_1)(I + \tau_{2.j+1}A_2) \quad \text{i} \quad \tau_{j+1} = \tau_{1.j+1} + \tau_{2.j+1}.$$

Postupajući kao u prethodnom slučaju umesto (89) dobijamo:

$$\|Av^k - f\| \le \left\| \prod_{j=1}^{k} S_j \right\| \cdot \|Av^0 - f\|;$$

gde je:

$$S_j = (1 + \tau_{1.j}A_1)^{-1}(1 - \tau_{2.j}A_1)(1 + \tau_{2.j}A_2)^{-1}(1 - \tau_{1.j}A_2).$$

Dalje je:

$$\left\| \prod_{j=1}^{k} S_j \right\| = \max_{\lambda_i \in [\delta_i, \Delta_i]} \left| \prod_{j=1}^{k} \frac{1 - \tau_{2.j}\lambda_1}{1 + \tau_{1.j}\lambda_1} \cdot \frac{1 - \tau_{1.j}\lambda_2}{1 + \tau_{2.j}\lambda_2} \right|$$

pa tako umesto (91) dobijamo sledeći minimax zadatak:

$$\min_{\{\tau_{1.j}\},\{\tau_{2.j}\}} \max_{\lambda_i \in [\delta_i, \Delta_i]} \left| \prod_{j=1}^{k} \frac{1 - \tau_{2.j}\lambda_1}{1 + \tau_{1.j}\lambda_1} \cdot \frac{1 - \tau_{1.j}\lambda_2}{1 + \tau_{2.j}\lambda_2} \right|.$$

Ovaj zadatak se, isto kao u prethodnom slučaju, svodi na:

$$\min_{\{\omega_j\}} \max_{\alpha \in [\eta, 1]} \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{1 - \omega_j \alpha}{1 + \omega_j \alpha} \right)^2. \tag{95}$$

Zadatak (95) približno je rešen u radu Peacemanna i Rachforda [1955], dok je tačno rešenje dato u radu Wachspressa [1963]. Za $k = 2^p$ ono je znatno jednostavnije nego u opštem slučaju. Uslov $k = 2^p$ ne predstavlja bitno ograničenje, pa ćemo se zato ograničiti na ovaj slučaj.

LEMA 3. *Izbor* $\{\omega_j\}$ *za koji se realizuje minimax* (95) *je jedinstven.*

LEMA 4. *Neka je* $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_k$ *optimalni izbor. Tada je* $1/(\eta\omega_1)$, $1/(\eta\omega_2), \ldots, 1/(\eta\omega_k)$ *takođe optimalni izbor (i to taj isti ali u obratnom redosledu).*

Dokaz sledi iz identiteta:

$$\left(\frac{1 - \omega\alpha}{1 + \omega\alpha} \right)^2 = \left(\frac{\dfrac{1}{\eta\omega} \cdot \dfrac{\eta}{\alpha} - 1}{\dfrac{1}{\eta\omega} \cdot \dfrac{\eta}{\alpha} + 1} \right)^2 = \left(\frac{1 - \omega'\alpha'}{1 + \omega'\alpha'} \right)^2$$

(gde je $\omega' = 1/(\eta\omega)$, $\alpha' = \eta/\alpha$; $\alpha' \in [\eta, 1]$ ako $\alpha \in [\eta, 1]$) i iz jedinstvenosti izbora $\{\omega_j\}$.

Transformišimo proizvod $\prod_{j=1}^{2^p} \left(\frac{1-\omega_j\alpha}{1+\omega_j\alpha}\right)^2$ koristeći činjenicu da je $\omega_{2^p+1-j} = 1/(\eta\omega_j)$:

$$\prod_{j=1}^{2^p} = \prod_{j=1}^{2^{p-1}} \left(\frac{1-\omega_{2^p+1-j}\alpha}{1+\omega_{2^p+1-j}\alpha} \cdot \frac{1-\omega_j\alpha}{1+\omega_j\alpha}\right)^2 = \prod_{j=1}^{2^{p-1}} \left(\frac{1-\alpha/(\eta\omega_j)}{1+\alpha/(\eta\omega_j)} \cdot \frac{1-\omega_j\alpha}{1+\omega_j\alpha}\right)^2.$$

Dalje je:

$$\frac{1-\alpha/(\eta\omega_j)}{1+\alpha/(\eta\omega_j)} \cdot \frac{1-\omega_j\alpha}{1+\omega_j\alpha} \equiv \frac{\omega_j'\alpha'-1}{\omega_j'\alpha'+1},$$

gde je $\omega_j' = (1+\eta)\omega_j(1+\eta\omega_j^2)^{-1}$ i $\alpha' = (1+\eta)^{-1}(\alpha+\eta/\alpha)$. Lako se vidi da $\alpha' \in [\eta', 1]$ gde je $\eta' = 2\sqrt{\eta}/(1+\eta)$. Odatle sledi:

$$\max_{\alpha\in[\eta,1]} \prod_{j=1}^{2^p} \left(\frac{1-\omega_j\alpha}{1+\omega_j\alpha}\right)^2 = \max_{\alpha'\in[\eta',1]} \prod_{j=1}^{2^{p-1}} \left(\frac{1-\omega_j'\alpha'}{1+\omega_j'\alpha'}\right)^2.$$

Na taj način su dokazane sledeće dve leme:

LEMA 5. *Ako je $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2^p}\}$ optimalni izbor reda 2^p na intervalu $[\eta, 1]$, tada je $\omega_j' = (1+\eta)\omega_j(1+\eta\omega_j^2)^{-1}$ $(j = 1, 2, \ldots, 2^{p-1})$ optimalni izbor reda 2^{p-1} na intervalu $[\eta', 1]$ gde je $\eta' = 2\sqrt{\eta}/(1+\eta)$.*

LEMA 6. *Ako je $\{\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_{2^{p-1}}'\}$ optimalni izbor reda 2^{p-1} na intervalu $[\eta', 1]$, tada je*

$$\omega_j = \frac{1+\eta-\sqrt{(1+\eta)^2-4\eta\omega'^2}}{2\eta\omega'}, \quad \omega_{2^p+1-j} = \frac{1+\eta+\sqrt{(1+\eta)^2-4\eta\omega'^2}}{2\eta\omega'}$$

$(j = 1, 2, \ldots, 2^{p-1})$ optimalni izbor reda 2^p na intervalu $[\eta, 1]$ gde je

$$\eta = \frac{(1-\sqrt{1-\eta'^2})^2}{\eta'^2} = \frac{1-\sqrt{1-\eta'^2}}{1+\sqrt{1-\eta'^2}}.$$

Prema tome, zadatak (95) za $k = 2^p$ svodi se na isti zadatak za $k = 2^{p-1}$, zatim za $k = 2^{p-2}$ itd. do $k = 2^0 = 1$. Rešenje poslednjeg zadatka je dato sa (93). Na taj način je pokazano:

$$\min_{\omega_j} \max_{\alpha\in[\eta_p,1]} \prod_{j=1}^{2^p} \left(\frac{1-\omega_j\alpha}{1+\omega_j\alpha}\right)^2 = \min_{\omega_j} \max_{\alpha\in[\eta_{p-1},1]} \prod_{j=1}^{2^{p-1}} \left(\frac{1-\omega_j\alpha}{1+\omega_j\alpha}\right)^2 = \cdots$$

$$\cdots = \min_{\omega} \max_{\alpha\in[\eta_0,1]} \left(\frac{1-\omega\alpha}{1+\omega\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1-\sqrt{\eta_0}}{1+\sqrt{\eta_0}}\right)^2.$$

gde je $\eta_p = \eta$ i $\eta_j = 2\sqrt{\eta_{j+1}}/(1+\eta_{j+1})$ $(j = 1,2,\dots,p-1)$. Veličina $\left(\frac{1-\sqrt{\eta_0}}{1+\sqrt{\eta_0}}\right)^2$ ocenjena je u radu Wachspressa [1963] sa:

$$\left(\frac{1-\sqrt{\eta_0}}{1+\sqrt{\eta_0}}\right)^2 \le 4\exp\frac{\pi^2 k}{\ln(\eta/4)}; \quad k = 2^p.$$

Prema tome, pri optimalnom izboru parametara ω_j (odnosno $\tau_{1.j}$ i $\tau_{2.j}$) važi ocena:

$$\|Av^k - f\| \le 4\exp\frac{\pi^2 k}{\ln(\eta/4)}\|Av^0 - f\|.$$

Da bi bila ispunjena nejednakost (77) potrebno je da bude $4\exp(\pi^2 k/(\ln(\eta/4)))$ odakle dobijamo:

$$k \ge \frac{1}{\pi^2}\ln\frac{4}{\eta}\ln\frac{4}{\varepsilon} = k(\varepsilon).$$

Ako su operatori A_1 i A_2 definisani sa (86) odavde dalje dobijamo:

$$k(\varepsilon) = O(\ln h^{-1}\ln\varepsilon^{-1}).$$

Ukupan broj aritmetičkih operacija, u slučaju dvodimenzione oblasti, jednak je $Q(\varepsilon) = O(h^{-2}\ln h^{-1}\ln\varepsilon^{-1})$.

Druga varijanta metode promenljivih pravaca predložene je u radu Douglasa i Rachforda [1956]. Njena konvergencija je nešto sporija nego u prethodnom slučaju (takođe je $k(\varepsilon) = O(\ln h^{-1}\ln\varepsilon^{-1})$) ali je koeficijent proporcionalnosti veći). Prednost joj je međutim u tome što se lako uopštava na više dimenzioni slučaj. Izložićemo je za $n = 3$. Neka je $A = A_1 + A_2 + A_3$ gde su A_1, A_2 i A_3 samokonjugovani, pozitivno definisani i međusobno komutativni operatori, čije sopstvene vrednosti zadovoljavaju nejednakosti $0 < \delta \le \lambda(A_i) \le \Delta$ $(i = 1,2,3)$. Ovi uslovi su ispunjeni na primer ako je $\overline{\Omega} = [0,l_1]\times[0,l_2]\times[0,l_3]$, $A_i v = -(a_i v_{\bar{x}_i})_{x_i}$, $a_i = a(x_i) \ge a_0 =\text{const}> 0$, $i = 1,2,3$.

Iterativna metoda ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} v^{j+1/3} - v^j + \tau_{j+1}(A_1 v^{j+1/3} + A_2 v^j + A_3 v^j - f) &= 0,\\ v^{j+2/3} - v^{j+1/3} + \tau_{j+1}(A_2 v^{j+2/3} - A_2 v^j) &= 0,\\ v^{j+1} - v^{j+2/3} + \tau_{j+1}(A_3 v^{j+1} - A_3 v^j) &= 0. \end{aligned}$$

Posle eliminisanja $v^{j+1/3}$ i $v^{j+2/3}$ metoda se svodi na oblik (76) sa $B_j = (I + \tau_{j+1}A_1)(I+\tau_{j+1}A_2)(I+\tau_{j+1}A_3)$. Odatle dobijamo:

$$\|Av^k - f\| \le \left\|\prod_{j=1}^{k} S_j\right\| \cdot \|Av^0 - f\|, \tag{96}$$

gde je $S_j = I - \tau_j(I + \tau_j A_1)^{-1}(I + \tau_j A_2)^{-1}(I + \tau_j A_3)^{-1}A$. Operator $\prod_{j=1}^{k} S_j$ je samokonjugovan pa je njegova norma jednaka maksimumu modula sopstvenih vrednosti. Ocena (96) će biti najbolja ako je ova norma minimalna, što posle izvesnih transformacija dovodi do sledećeg minimax zadatka:

$$\min_{\{\tau_j\}} \max_{\lambda\in[\delta,\Delta]} \prod_{j=1}^{k} \left| 1 - \frac{3\tau_j\lambda}{(1+\tau_j\lambda)^3} \right|.$$

Rešenje ovog zadatka može se oceniti sa:

$$\min_{\{\tau_j\}} \max_{\lambda\in[\delta,\Delta]} \prod_{j=1}^{k} \left| 1 - \frac{3\tau_j\lambda}{(1+\tau_j\lambda)^3} \right| \le \exp\left(-\frac{0,8k}{\ln(\Delta/\delta)} \right),$$

odakle za $\delta = c_1$ i $\Delta = c_2 h^{-2}$ dobijamo $k(\varepsilon) = O(\ln h^{-1} \ln \varepsilon^{-1})$.

e. Pojam o relaksacionoj metodi Fedorenko-Bahvalova. U radovima Fedorenka [1961], [1964] i Bahvalova [1966] zasnovana je iterativna metoda za koju je broj aritmetičkih operacija potrebnih za određivanje približne vrednosti v^k rešenja jednačine (74) takve da važi (77) jednak $O(h^{-n} \ln \varepsilon^{-1})$ — u slučaju n-dimenzione oblasti (videti takođe radove Astrahanceva [1977], Kornjejeva [1977] i autora [1975], [1976] i [1977]). Metoda se sastoji u naizmeničnom primenjivanju proste iteracije i rešavanja analogne jednačine na krupnijoj mreži. Preciznije:

Neka se prostoru H_h traži rešenje jednačine $A_h v_h = f_h$ gde je A_h linearan samokonjugovan, pozitivno definisan diferencijski operator čije sopstvene vrednosti zadovoljavaju uslove $0 < c_1 \le \lambda(A_h) \le c_2 h^{-2}$. Neka su takođe dati operatori $P_h : H_h \to H_{2h}$ i $\Pi_h : H_{2h} \to H_h$. Korak iterativnog procesa sastoji se iz dve etape:

1. Polazeći od nekog $v_h^0 \in H_h$ određujemo m prostih iteracija po formuli:

$$v_{h,i+1} = v_{h,i} - \tau(A_h v_{h,i} - f_h), \quad v_{h,0} = v_h^0, \quad \tau = h^2/c_2.$$

2. U H_{2h} rešavamo s tačnošću ε_0, jednačinu:

$$A_{2h} w_{2h} = P_h(A_h v_{h,m} - f_h).$$

Posle toga popravljamo $v_{h,m}$ stavljajući $v_h^1 = v_{h,m} - \Pi_h w_{2h}$.

Na prvoj etapi se zahvaljujući pogodnom izboru parametra τ, bitno smanjuje „oscilujući“ deo ostatka $A_h v_h^0 - f_h$ (tj. onaj koji se sastoji iz sopstvenih funkcija operatora A_h koje odgovaraju većim sopstvenim vrednostima). Na drugoj etapi se zahvaljujući bliskosti sopstvenih funkcija operatora A_h i A_{2h} koje odgovaraju manjim sopstvenim vrednostima, bitno smanjuje preostali („glatki“) deo ostatka.

III Parabolične jednačine

1. Uvod

U ovoj glavi razmatraćemo diferencijske sheme za rešavanje mešovitog problema za parabolične jednačine (1.21). Kod paraboličkih jednačina promenljiva t („vreme") ima drukčiju ulogu od ostalih promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ („prostorne promenljive"). Ovo se odražava i kod diskretizacije zadatka (1.21). Kao što smo već napomenuli u paragrafu 1.7.a, obično se u pravcu osa $Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_n$ uzima jedan korak h, dok se u pravcu ose Ot uzima drugi korak τ. Oblast $\overline{\Omega}$ zamenjuje se skupom diskretnih tačaka $\overline{\Omega}_h$, kao u slučaju eliptičkih problema, dok se interval $[0,T]$ zamenjuje skupom $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau \mid j = 0, 1, \ldots, M;\ \tau = T/M\}$. Tako dobijamo diskretnu oblast (mrežu) $\overline{\Omega}_{h,\tau} = \overline{\Omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$. Funkcije definisane na mreži $\overline{\Omega}_{h,\tau}$ označavaćemo sa $v^j_{i_1 i_2 \ldots i_n} = v(i_1 h, i_2 h, \ldots, i_n h; j\tau)$. Ako to ne dovodi do dvosmislenosti, indekse ćemo često izostavljati. Skup čvorova mreže za koje je $\tau_j = \text{const}$ nazivaćemo („vremenski") sloj.

Eliptički član, Lu, jednačine (1.21) diskretizuje se kao u slučaju eliptičkih jednačina (videti glavu II). Da bi se aproksimirao izvod po vremenu $\partial u/\partial t$ potrebne su vrednosti funkcije u bar sa dva vremenska sloja, npr.

$$\partial u/\partial t|_{t=t_j} = \big(u(t_j + \tau) - u(t_j)\big)/\tau + O(\tau) = (u_t)^j + O(\tau).$$

Odatle sledi da diferencijski analog paraboličke jednačine takođe sadrži vrednosti tražene funkcije bar sa dva vremenska sloja. Ovakve diferencijske sheme nazivamo dvoslojnim. Slično se definišu troslojne, četvoroslojne i uopšte k-slojne sheme.

Od diferencijskih shema za rešavanje paraboličkih problema takođe zahtevamo da budu korektne i da konvergiraju. Kod dokazivanja korektnosti osnovnu ulogu ima dokaz stabilnosti sheme, dok je njena jednoznačna rešivost obično očigledna ili se lako dokazuje. Stabilnost sheme se obično dokazuje izvođenjem diferencijskih analoga nejednakosti (1.35) i (1.37). Stabilnost može biti apsolutna i uslovna u zavisnosti od toga da li su koraci h i τ međusobno nezavisni ili su zavisni. Usled postojanja dva koraka, h i τ, brzina konvergencije može biti različita po svakom od njih.

Pojam ekonomičnosti diferencijske sheme je nešto drukčiji nego u eliptičkom slučaju. Naime, sama priroda problema (1.21) nameće sledeći put rešavanja diferencijskog zadatka: polazeći od poznatih vrednosti $u_h^0 = u_h|_{t=0}$ izračunavamo vrednosti u_h^1 na vremenskom sloju $t = t_1$, zatim u_h^2 itd. Smatraćemo da je diferencijska shema ekonomična ako je za prelazak sa sloja t_j na sloj t_{j+1} (tj. za izračunavanje svih vrednosti $u_h^{j+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \overline{\Omega}_h$) potrebno $O(N)$ aritmetičkih operacija, gde je N ukupan broj čvorova mreže $\overline{\Omega}_h$.

Kao što smo napomenuli u paragrafu 1.3.b, rešenje paraboličkog zadatka (1.21) pod određenim uslovima konvergira, kad $t \to \infty$, ka rešenju odgovarajućeg eliptičkog zadatka. Usled toga se izvesne iterativne metode rešavanja eliptičkih diferencijskih zadataka mogu interpretirati kao diferencijske sheme za paraboličke probleme i obrnuto.

2. Primeri diferencijskih shema

a. Eksplicitna shema. Razmotrimo prvo zadatak s jednom prostornom promenljivom. Neka se u oblasti $[0,l] \times [0,T]$ traži rešenje problema:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f; \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T]\\ Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) - du, \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x),\end{gathered} \tag{1}$$

gde je a diferencijabilna, a d i f neprekidne funkcije u oblasti $[0,l] \times [0,T]$, $a = a(x,t) \geq c_0 > 0$ i $d = d(x,t) \geq 0$.

Uvedimo mrežu $\overline{\omega}_{h,\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ gde je

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_h &= \{x_i = ih \mid i = 0,1,\ldots,N;\ h = l/N\} \quad \text{i}\\ \overline{\omega}_\tau &= \{t_j = j\tau \mid j = 0,1,\ldots,M;\ \tau = T/M\}.\end{aligned}$$

Zadatak (1) aproksimirajmo na sledeći način:

$$\begin{gathered}v_t = L_h v + f, \quad \begin{cases} x = x_i, & i = 1,2,\ldots,N-1,\\ t = t_j, & j = 0,1,\ldots,M-1,\end{cases}\\ v_0^j = v_N^j = 0, \quad v_i^0 = u_0(x_i),\end{gathered} \tag{2}$$

gde je $L_h v \equiv \left[(av_{\bar{x}})_x + (av_x)_{\bar{x}}\right]/2 - dv$. Operator L_h zavisi od t. Zato ćemo, gde je to potrebno, sa L_h^j označavati $L_h|_{t=t_j}$. Jednačinu (2) možemo napisati u razvijenom obliku na sledeći način:

$$(v^{j+1} - v^j)/\tau = (L_h v)^j + f^j, \tag{3}$$

odakle je

$$v^{j+1} = v^j + \tau(L_h^j v^j + f^j). \tag{4}$$

Prema tome, ako su poznate vrednosti $v = v^j$ na sloju $t = t_j$ tada se vrednosti $v = v^{j+1}$ na sloju $t = t_{j+1}$ neposredno izračunavaju (otuda i naziv „eksplicitna shema"), pa je naša shema ekonomična.

Ispitajmo stabilnost diferencijske sheme (2). Kao u paragrafu 2.2.a sa $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_h$ označimo prostor funkcija definisanih na mreži $\overline{\omega}_h$ i jednakih nuli za $x = 0$ i $x = l$, u kome su skalarni proizvod i norma definisani na sledeći način:

$$(v, w) = h \sum_{i=1}^{N-1} v_i w_i, \qquad \|v\| = (v, v)^{1/2}.$$

Na isti način kao u §2.2.a pokazuje se da je operator L_h samokonjugovan, i da važe nejednakosti:

$$-c_1 h^{-2} \|v\|^2 \leq (L_h v, v) \leq -4 c_0 l^{-2} \|v\|^2, \tag{5}$$

gde je $c_1 = 4 \max_{x,t} a(x,t) + l^2 \max_{x,t} d(x,t)$. (Ovde podrazumevamo da je operator L_h dodefinisan u graničnim tačkama na prirodan način: $L_h v|_{x=0} = L_h v|_{x=l} = 0$, tako da preslikava $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_h$ u $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_h$. Slično ćemo postupati i u daljem radu.)

Jednakost (3) možemo transformisati na sledeći način:

$$v^{j+1} - v^j + (\tau/2) L_h^j (v^{j+1} - v^j) - (\tau/2) L_h^j (v^{j+1} - v^j) = \tau f^j,$$

ili

$$(I + (\tau/2) L_h^j)(v^{j+1} - v^j) - (\tau/2) L_h^j (v^{j+1} + v^j) = \tau f^j.$$

Pretpostavimo da je operator $I + (\tau/2) L_h^j$ pozitivno definisan i skalarno pomnožimo poslednju jednakost sa $2\tau^{-1}(-L_h^j)^{-1}(v^{j+1} - v^j)$. Tako dobijamo:

$$\begin{aligned}
2\tau^{-1} \|v^{j+1} - v^j\|^2_{(-L_h^j)^{-1}(I+(\tau/2)L_h^j)} &+ \|v^{j+1}\|^2 - \|v^j\|^2 \\
&= 2((-L_h^j)^{-1} f^j, v^{j+1} - v^j) \leq 2\tau^{-1} \|v^{j+1} - v^j\|^2_{(-L_h^j)^{-1}(I+(\tau/2)L_h^j)} \\
&\qquad + (\tau/2) \|(-L_h^j)^{-1} f^j\|^2_{(-L_h^j)(I+(\tau/2)L_h^j)^{-1}}
\end{aligned} \tag{6}$$

odnosno, posle sređivanja:

$$\|v^{j+1}\|^2 \leq \|v^j\|^2 + (\tau/2) \|f^j\|^2_{[-L_h^j(I+(\tau/2)L_h^j)]^{-1}}.$$

Sumiranjem poslednje nejednakosti po j dobijamo:

$$\begin{aligned}
\|v^k\|^2 &\leq \|v^0\|^2 + \frac{\tau}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \|f^j\|^2_{[-L_h^j(I+(\tau/2)L_h^j)]^{-1}} \\
&\leq \|v^0\|^2 + \frac{T}{2} \max_j \|f^j\|^2_{[-L_h^j(I+(\tau/2)L_h^j)]^{-1}},
\end{aligned} \tag{7}$$

što predstavlja diskretni analog nejednakosti (1.35). Nejednakost (7) je izvedena pod pretpostavkom pozitivne definisanosti operatora $I + (\tau/2)L_h^j$. Iz nejednakosti (5) dobijamo:

$$\left(\left(I + \frac{\tau}{2}L_h^j\right)v, v\right) \geq \left(I - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{c_1}{h^2}\right)\|v\|^2,$$

odakle sledi da je operator $I + (\tau/2)L_h^j$ pozitivno definisan za:

$$\tau < h^2/c_1. \tag{8}$$

Prema tome, diferencijska shema (2) je uslovno stabilna ako τ zadovoljava uslov (8). Primetimo da uslov (8) predstavlja jako ograničenje: usled njega mreža mora biti znatno gušća po t nego po x.

Izvedimo analog ocene (1.38). Stavljajući u (4) $f = 0$ dobijamo:

$$v^{j+1} = v^j + \tau L_h^j v^j = (I + \tau L_h^j)v^j$$

odakle, uzimajući u obzir nejednakost (5), sledi:

$$\|v^{j+1}\| = \|(I + \tau L_h^j)v^j\| \leq q\|v^j\|, \tag{9}$$

gde je $q = \max\left\{1 - 4c_0l^{-2}\tau, c_1h^{-2}\tau - 1\right\}$. Ako τ zadovoljava uslov (8) tada je $0 < q < 1$. Veličina q jednaka je $1 - 4c_0l^{-2}\tau$ ako je $c_1\tau h^{-2} - 1 \leq 1 - 4c_0l^{-2}\tau$, tj.

$$\tau \leq \frac{2h^2}{c_1 + 4c_0l^{-2}h^2}.$$

U tom slučaju iz nejednakosti (9) sledi:

$$\|v^k\| \leq (1 - 4c_0l^{-2}\tau)^k\|v^0\| \leq \exp(-4c_0l^{-2}k\tau)\|v^0\|, \tag{10}$$

što predstavlja analog nejednakosti (1.38).

Ispitajmo konvergenciju naše diferencijske sheme. Neka je u rešenje zadatka (1), v rešenje zadatka (2) i $z = u - v$. Funkcija z definisana je na mreži $\overline{\omega}_{h,\tau}$ i zadovoljava uslove:

$$z_t = L_h z + \psi, \quad z_0^j = z_N^j = 0, \quad z_i^0 = 0, \tag{11}$$

gde je $\psi = (u_t - \partial u/\partial t) + (Lu - L_h u)$, $(x,t) \in \omega_{h,\tau}$. Dalje je $u_t - \partial u/\partial t = O(\tau)$, dok se drugi sabirak ocenjuje kao u paragrafu 2.2.a sa $O(h^2)$ (sve pod pretpostavkom ograničenosti parcijalnih izvoda $\partial^2 u/\partial t^2$, $\partial^4 u/\partial x^4$ i $\partial^3 a/\partial x^3$). Prema tome je $\psi = O(h^2 + \tau)$. Zadatak (11) je istog tipa kao zadatak (2), pa primenjujući ocenu (7) dobijamo:

$$\|z^k\|^2 \leq \frac{T}{2}\max_j \|\psi^j\|^2_{[-L_h^j(I+(\tau/2)L_h^j)]^{-1}} = O(h^2 + \tau)^2.$$

Dobijena ocena pokazuje da kada je ispunjen uslov (8) rešenje zadatka (2) konvergira k rešenju zadatka (1) u diferencijskoj normi $\|\cdot\|$ brzinom $O(h^2+\tau)$.

Pređimo sada na opšti slučaj kad imamo n prostornih promenljivih. Neka je Ω ograničena, konveksna, jednostruko povezana oblast promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$ s granicom Γ, i neka se u oblasti $\overline{\Omega} \times [0,T]$ traži rešenje zadatka:

$$\partial u/\partial t = Lu + f,\ (x_1, x_2, \dots, x_n, t) \in \Omega \times (0,T],\ u\big|_{\Gamma \times [0,T]} = 0,\ u\big|_{t=0} = u_0. \quad (12)$$

Operator L definisan je sa:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - du, \tag{13}$$

gde su a_{ij} diferencijabilne i d neprekidna funkcija od $x_1, x_2, \dots, x_n$ i t koje zadovoljavaju uslove $a_{ij} = a_{ji}$, $d \geq 0$ i

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \qquad c_0 = \text{const} > 0.$$

Uvedimo mrežu $\overline{\Omega}_{h,\tau} = \overline{\Omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ gde je $\overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$ definisana kao u paragrafu 2.2.d, a $\overline{\omega}_\tau$ je ista kao u prethodnom slučaju. Zadatak (12) aproksimiramo sa:

$$v_t = L_h v + f, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n, t) \in \Omega_{h,\tau}, \quad v^j\big|_{\Gamma_h} = 0, \quad v^0 = u_0, \tag{14}$$

gde je:

$$L_h v = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left[(a_{ij}v_{\bar{x}_j})_{x_i} + (a_{ij}v_{x_j})_{\bar{x}_i}\right] - dv. \tag{15}$$

Očigledno, jednakosti (3) i (4) opet važe, pa je shema (14) takođe ekonomična.

Sa $\mathring{\mathcal{L}}_h$ označimo skup funkcija definisanih na mreži $\overline{\Omega}_h$ i jednakih nuli na Γ_h. Skalarni proizvod i normu u $\mathring{\mathcal{L}}_h$ definišimo na običan način:

$$(v,w) = h^n \sum_{x\in\Omega_h} v(x)w(x), \qquad \|v\| = (v,v)^{1/2}.$$

Kao u paragrafu 2.2.d pokazuje se da je operator $L_h = L_h(t)$ samokonjugovan. Važi nejednakost analogna nejednakosti (5):

$$-c_1 h^{-2}\|v\|^2 \leq (L_h v, v) \leq -4nc_0 r^{-2}\|v\|^2, \tag{16}$$

gde je $r = \operatorname{diam}(\Omega)$ i $c_1 = 4n^2 \max_{i,j;x,t} a_{ij} + r^2 \max_{x,t} d$.

Dalja izvođenja su ista kao u slučaju $n=1$. Specijalno, važi ocena (7), i shema je uslovno stabilna ako τ zadovoljava nejednakost (8). Primetimo da c_1

raste s brojem dimenzija n, pa se prema tome i ograničenje koraka τ pooštrava sa povećanjem n.

Kod ispitivanja konvergencije diferencijske sheme (14) najveći problemi (odnosno usporenje konvergencije) nastaju usled aproksimacije graničnog uslova. Neka je u rešenje zadatka (12), v rešenje zadatka (14) i $z = u - v$. Pošto $z^j \notin \mathring{\mathcal{L}}_h$, označimo $z = \zeta + \eta$ gde je

$$\zeta = \begin{cases} z, & \Omega_h \times \overline{\omega}_\tau \\ 0, & \Gamma_h \times \overline{\omega}_\tau \end{cases} \quad \text{i} \quad \eta = \begin{cases} 0, & \Omega_h \times \overline{\omega}_\tau \\ z = O(h), & \Gamma_h \times \overline{\omega}_\tau \end{cases}.$$

Funkcija ζ zadovoljava uslove:

$$\zeta_t = L_h\zeta + \psi, \quad \zeta^j\big|_{\Gamma_h} = 0, \quad \zeta^0 = 0,$$

gde je $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4$, $\psi_1 = u_t - \partial u/\partial t = O(\tau)$, $\psi_2 = Lu - L_h u = O(h^2)$, $\psi_3 = L_h\eta$ i $\psi_4 = -\eta_t$. Funkcija ψ_4^j jednaka je nuli u Ω_h, a na Γ_h je $\psi_4^j = -\eta_t^j = -u_t^j$, tj.

$$\psi_4^j = -(u^{j+1} - u^j)/\tau = -\partial u/\partial t\big|_{t=(j+\theta)\tau} = O(h) \quad (0 < \theta < 1).$$

Dalje je

$$\|\psi_1^j\|_{[-L_h^j(I+(\tau/2)L_h^j)]^{-1}} = O(\tau), \quad \|\psi_2^j\|_{[-L_h^j(I+(\tau/2)L_h^j)]^{-1}} = O(h^2),$$
$$\|\psi_4^j\|_{[-L_h^j(I+(\tau/2)L_h^j)]^{-1}} = O(h).$$

Član sa ψ_3 ocenjujemo na sledeći način (označeno je $(-L_h^j)^{-1}(\zeta^{j+1} - \zeta^j) \equiv \xi^j$):

$$\begin{aligned} |2(\psi_3^j, \xi^j)| &= |2(L_h^j\eta^j, \xi^j)| \\ &= \left| -\sum_{i,l=1}^{n} [(a_{il}^j\eta_{\bar{x}_l}^j, \xi_{\bar{x}_i}^j) + (a_{il}^j\eta_{x_l}^j, \xi_{x_i}^j)] - (d^j\eta^j, \xi^j) \right| \\ &\le \|\xi^j\|_{(-L_h^j)} \cdot O(\sqrt{h}) \end{aligned}$$

— jer su podeljene razlike η_{x_l}, koje figurišu u skalarnim proizvodima, jednake $O(1)$ samo u $O(h^{-n+1})$ prigraničnih tačaka oblasti Ω_h, a inače su jednake nuli. Pri zadovoljenom uslovu (8) je dalje:

$$\|\xi^j\|_{(-L_h^j)} \le \text{const}\|\zeta^{j+1} - \zeta^j\|_{(-L_h^j)^{-1}(I+(\tau/2)L_h^j)}.$$

Zamenjujući dobijene ocene u (6) odnosno (7) dobijamo:

$$\|\zeta^k\| = O(\sqrt{h} + \tau). \tag{17}$$

U slučaju paralelepipedne oblasti Ω granični uslov se može tačno aproksimirati i tada se brzina konvergencije može oceniti sa $O(h^2 + \tau)$. U slučaju proizvoljne oblasti konvergencija se može ubrzati, kao kod eliptičkih jednačina, korišćenjem mreže Ω_h^* neravnomerne u blizini granice Γ. Analogni rezultati se dobijaju u slučaju zadatka s trećim graničnim uslovom.

b. Implicitna shema. Opet ćemo posebno posmatrati slučajeve kad zadatak zavisi od jedne ili više prostornih promenljivih.

Zadatak (1) aproksimiramo sledećom diferencijskom shemom:

$$v_{\bar{t}} = L_h v + f, \quad v_0^j = v_N^j = 0, \quad v_i^0 = u_0(x_i). \tag{18}$$

Mreža $\bar{\omega}_{h,\tau}$, prostor $\mathring{\mathcal{L}}_h$ i operator L_h definišu se na isti način kao kod eksplicitne sheme. Pišući jednačinu (18) u razvijenom obliku dobijamo:

$$(v^j - v^{j-1})/\tau = L_h^j v^j + f^j \tag{19}$$

$$v^j - \tau L_h^j v^j = v^{j-1} + \tau f^j. \tag{20}$$

Vidimo da je za određivanje v^j potrebno rešiti sistem linearnih jednačina (20) (otuda i naziv „implicitna shema"). Matrica sistema odgovara operatoru $I - \tau L_h^j$ i može se svesti na trodijagonalni oblik. Prema tome, diferencijska shema (18) je ekonomična.

Ispitajmo stabilnost sheme (18). Jednakost (19) možemo napisati u obliku:

$$(I - (\tau/2)L_h^j)(v^j - v^{j-1}) - (\tau/2)L_h^j(v^j + v^{j-1}) = \tau f^j.$$

Odatle, posle skalarnog množenja sa $2\tau^{-1}(-L_h^j)^{-1}(v^j - v^{j-1})$ dobijamo:

$$\begin{aligned}
2\tau^{-1}\|v^j - v^{j-1}\|^2_{(-L_h^j)^{-1}(I-(\tau/2)L_h^j)} &+ \|v^j\|^2 - \|v^{j-1}\|^2 \\
= 2\big((-L_h^j)^{-1}f^j, v^j - v^{j-1}\big) &\le 2\tau^{-1}\|v^j - v^{j-1}\|^2_{(-L_h^j)^{-1}(I-(\tau/2)L_h^j)} \\
&\quad + (\tau/2)\|(-L_h^j)^{-1}f^j\|^2_{(-L_h^j)(I-(\tau/2)L_h^j)^{-1}}
\end{aligned}$$

odnosno, posle sređivanja:

$$\|v^j\|^2 - \|v^{j-1}\|^2 \le (\tau/2)\|f^j\|^2_{[-L_h^j(I-(\tau/2)L_h^j)]^{-1}} \le (\tau/2)\|f^j\|^2_{(-L_h^j)^{-1}}.$$

Sumiranjem dobijene nejednakosti po j dobijamo:

$$\begin{aligned}
\|v^k\|^2 &\le \|v^0\|^2 + \frac{\tau}{2}\sum_{j=1}^{k}\|f^j\|^2_{(-L_h^j)^{-1}} \\
&\le \|v^0\|^2 + \frac{T}{2}\max_j \|f^j\|^2_{(-L_h^j)^{-1}},
\end{aligned}$$

što predstavlja diskretni analog nejednakosti (1.35). Vidimo da je, za razliku od eksplicitne, implicitna shema apsolutno stabilna. Naime, umesto operatora $I + (\tau/2)L_h^j$ ovde figuriše operator $I - (\tau/2)L_h^j$ koji je pozitivno definisan za svako τ.

Izvedimo analog ocene (1.38). Stavljajući u (19) $f = 0$ dobijamo:

$$v^j = (1 - \tau L_h^j)^{-1} v^{j-1},$$

odakle je:

$$\|v^j\| \le (1 + 4c_0 l^{-2}\tau)^{-1} \|v^{j-1}\|.$$

Sledi:

$$\|v^k\| \le (1 + 4c_0 l^{-2}\tau)^{-k} \|v^0\| \le \exp\big(-4c_0 l^{-2} k\tau(1 - 2c_0 l^{-2}\tau)\big) \|v^0\|,$$

što i predstavlja traženu ocenu.

Implicitna shema konvergira istom brzinom kao i eksplicitna.

Implicitna shema za opšti slučaj (12)–(13) piše se u obliku:

$$v_{\bar{t}} = L_h v + f, \quad v^j\big|_{\Gamma_h} = 0, \quad v^0 = u_0, \tag{21}$$

gde je operator $L_h = L_h^j$ definisan sa (15). Ona je takođe apsolutno stabilna i konvergira brzinom $O(\sqrt{h} + \tau)$. Međutim, za razliku od slučaja $n = 1$, shema (21) nije ekonomična. Ona se takođe može predstaviti u obliku (20), ali se matrica koja odgovara operatoru $I - \tau L_h^j$ ne može svesti na $(2m + 1)$-dijagonalni oblik s $m = \text{const}$ (videti §2.4).

c. Shema s težinom. Ubrzanje konvergencije može se postići ako se za aproksimaciju desne strane jednačine (12) koriste vrednosti s dva susedna vremenska sloja. Radi pojednostavljenja izvođenja pretpostavimo da operator L ne zavisi od t. Uzmimo neku vrednost σ između 0 i 1 i konstruišimo diferencijsku shemu:

$$(v_t)^j = \sigma(L_h v + f)^{j+1} + (1 - \sigma)(L_h v + f)^j, \quad v^j\big|_{\Gamma_h} = 0, \quad v^0 = u_0. \tag{22}$$

Za $\sigma = 0$ odavde dobijamo eksplicitnu, a za $\sigma = 1$ implicitnu shemu. Pišući jednačinu (22) u obliku:

$$(v^{j+1} - v^j)/\tau = \sigma L_h v^{j+1} + (1 - \sigma) L_h v^j + \sigma f^{j+1} + (1 - \sigma) f^j$$

vidimo da je ona za $\sigma \ne 0$ ekonomična samo u slučaju kada je $n = 1$. Jednačinu (22) dalje možemo transformisati na sledeći način:

$$\big[I - \tau(\sigma - 1/2)L_h\big](v^{j+1} - v^j) - (\tau/2)L_h(v^{j+1} + v^j) = \tau\sigma f^{j+1} + \tau(1 - \sigma) f^j.$$

Pretpostavimo da je operator $I-\tau(\sigma-1/2)L_h$ pozitivno definisan i pomnožimo skalarno poslednju jednačinu sa $2\tau^{-1}(-L_h^j)^{-1}(v^{j+1}-v^j)$. Tako dobijamo:

$$\begin{aligned}2\tau^{-1}\|v^{j+1}-v^j\|^2_{[I-\tau(\sigma-1/2)L_h](-L_h)^{-1}}+\|v^{j+1}\|^2-\|v^j\|^2\\ =2\sigma\big((-L_h)^{-1}f^{j+1},v^{j+1}-v^j\big)+2(1-\sigma)\big((-L_h)^{-1}f^j,v^{j+1}-v^j\big).\end{aligned}$$

Ocenjujući skalarne proizvode na desnoj strani na sledeći način:

$$\begin{aligned}2\big((-L_h)^{-1}f,v^{j+1}-v^j\big)\le 2\tau^{-1}\|v^{j+1}-v^j\|^2_{(-L_h)^{-1}[I-\tau(\sigma-1/2)L_h]}\\ +(\tau/2)\|(-L_h)^{-1}f\|^2_{(-L_h)[I-\tau(\sigma-1/2)L_h]^{-1}}\end{aligned}$$

dobijamo:

$$\begin{aligned}\|v^{j+1}\|^2-\|v^j\|^2\le(\tau/2)\Big\{\sigma\|f^{j+1}\|^2_{(-L_h)^{-1}[I-\tau(\sigma-1/2)L_h]^{-1}}\\ +(1-\sigma)\|f^j\|^2_{(-L_h)^{-1}[I-\tau(\sigma-1/2)L_h]^{-1}}\Big\}.\end{aligned}$$

Sumirajući ovu nejednakost po j od 0 do $k-1$ dobijamo diskretni analog nejednakosti (1.35):

$$\begin{aligned}\|v^k\|^2\le\|v^0\|^2+(\tau/2)\Big\{\sigma\|f^k\|^2_{(-L_h)^{-1}[I-\tau(\sigma-1/2)L_h]^{-1}}\\ +\sum_{j=1}^{k-1}\|f^j\|^2_{(-L_h)^{-1}[I-\tau(\sigma-1/2)L_h]^{-1}}+(1-\sigma)\|f^0\|^2_{(-L_h)^{-1}[I-\tau(\sigma-1/2)L_h]^{-1}}\Big\}\\ \le\|v^0\|^2+\frac{T}{2}\max_j\|f^j\|^2_{(-L_h)^{-1}[I-\tau(\sigma-1/2)L_h]^{-1}}.\end{aligned}$$

Ova ocena izvedena je pod pretpostavkom pozitivne definisanosti operatora $I-\tau(\sigma-1/2)L_h$. Za $\sigma\ge 1/2$ ovaj operator je pozitivno definisan nezavisno od veličine τ, što znači da je shema (22) apsolutno stabilna. Ako je $0\le\sigma<1/2$ koristeći nejednakost (16) zaključujemo da je operator $I-\tau(\sigma-1/2)L_h$ pozitivno definisan kada je

$$1+(\sigma-1/2)\tau c_1h^{-2}>0,\quad \text{tj.}\quad \tau<\frac{h^2}{c_1(1/2-\sigma)}.$$

Tada je shema uslovno stabilna.

Shema (22) aproksimira jednačinu (12) s tačnošću $O(\tau+h^2)$ za $\sigma\ne 1/2$, odnosno $O(\tau^2+h^2)$ za $\sigma=1/2$. Odatle sledi da ona konvergira brzinom $O(\tau+h^2)$ za $\sigma\ne1/2$, odnosno $O(\tau^2+h^2)$ za $\sigma=1/2$ (tzv. shema Crank-Nicolsona [1947]) u slučaju $n=1$ (i paralelepipedne oblasti za $n>1$). U slučaju proizvoljne oblasti pri $n>1$ shema (22) konvergira brzinom $O(\tau+\sqrt{h})$ za $\sigma\ne1/2$, odnosno $O(\tau^2+\sqrt{h})$ za $\sigma=1/2$. (Sve pod pretpostavkom dovoljne glatkosti rešenja u i koeficijenata polazne jednačine).

d. Sheme promenljivih pravaca. Prirodno se nameće problem konstrukcije diferencijske sheme koja bi spajala u sebi dobre osobine prethodnih shema, tj. bila ekonomočna i apsolutno stabilna. Kada diferencijalna jednačina ne sadrži druge mešovite izvode po prostornim promenljivim rešenje postavljenog zadatka daju različite varijante shema promenljivih pravaca (Peacemann, Rachford [1955], Douglas, Rachford [1956], Douglas, Gunn [1964]; uporediti takođe 2.5.d).

Neka se na primer u oblasti $\overline{\Omega} \times [0,T]$, gde je $\overline{\Omega} = [0,l] \times [0,l]$ traži rešenje sledećeg zadatka:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad L = L_1 + L_2, \quad L_i u = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \qquad u\big|_{\Gamma \times [0,T]} = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_0. \tag{23}$$

Neka je dalje $f = f(x_1, x_2, t)$ neprekidna, a $a_i = a_i(x_i, t)$ diferencijabilne funkcije takve da je $a_i \geq c_0 > 0$.

Kao u prethodnim slučajevima uvedimo mreže $\overline{\Omega}_h = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$, $\overline{\omega}_\tau$ i $\overline{\Omega}_{h,\tau} = \overline{\Omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, i prostor $\mathring{\mathcal{L}}_h$ funkcija definisanih na $\overline{\Omega}_h$ i jednakih nuli na Γ_h. Operatore L_i aproksimiramo sa:

$$L_{i,h} v = (1/2)\left[(a_i v_{\bar{x}_i})_{x_i} + (a_i v_{x_i})_{\bar{x}_i}\right]; \quad L_h = L_{1,h} + L_{2,h}.$$

Operatori $L_{i,h}$ su međusobno komutativni, samokonjugovani i negativno definisani. Važe nejednakosti:

$$-c_1 h^{-2}\|v\|^2 \leq (L_{i,h} v, v) \leq -4c_0 l^{-2}\|v\|^2,$$

gde je $c_1 = \max_i \max_{x_i,t} a_i$. Sa $t_{j+1/2} = t_j + \tau/2$ označimo pomoćne vremenske slojeve. Prva shema promenljivih pravaca za rešavanje zadatka (23) glasi:

$$\begin{aligned} \frac{v^{j+1} - v^{j+1/2}}{\tau/2} &= (L_{1,h} v)^{j+1} + (L_{2,h} v)^{j+1/2} + f^{j+1}, \\ \frac{v^{j+1/2} - v^j}{\tau/2} &= (L_{1,h} v)^j + (L_{2,h} v)^{j+1/2} + f^{j+1/2}, \\ v^j\big|_{\Gamma_h} &= v^{j+1/2}\big|_{\Gamma_h} = 0, \quad v^0 = u_0. \end{aligned} \tag{24}$$

Obe ove jednačine (24) su na gornjem sloju ($j+1$, odnosno $j+1/2$) jednodimenzione, pa je zato shema ekonomična. Radi pojednostavljenja izvođenja u daljem radu ćemo smatrati da operatori $L_{i,h}$ (odnosno funkcije a_i) ne zavise od t. Eliminisanjem $v^{j+1/2}$ dobijamo:

$$\begin{aligned} &(v^{j+1} - v^j)/\tau + (\tau/4) L_{1h} L_{2h} (v^{j+1} - v^j) - (1/2) L_h (v^{j+1} + v^j) \\ &= (1/2)(f^{j+1} + f^{j+1/2}) - (\tau/4) L_{2h} (f^{j+1} - f^{j+1/2}). \end{aligned} \tag{25}$$

Dobijenu jednakost pomnožimo skalarno sa $-2L_h^{-1}(v^{j+1}-v^j)$:

$$2\tau^{-1}\big((-L_h)^{-1}(I+(\tau^2/4)L_{1h}L_{2h})(v^{j+1}-v^j),(v^{j+1}-v^j)\big)$$
$$+\|v^{j+1}\|^2-\|v^j\|^2=\big(-L_h^{-1}(f^{j+1}+f^{j+1/2}),v^{j+1}-v^j\big)$$
$$+(\tau/2)\big(-L_h^{-1}(-L_{2,h})(f^{j+1}-f^{j+1/2}),v^{j+1}-v^j\big).$$

Operator $I+(\tau^2/4)L_{1h}L_{2h}$ je pozitivno definisan, pa zato desnu stranu jednakosti možemo oceniti sa:

$$\tau^{-1}\|v^{j+1}-v^j\|^2_{(-L_h)^{-1}(I+(\tau^2/4)L_{1h}L_{2h})}$$
$$+(\tau/4)\|-L_h^{-1}(f^{j+1}+f^{j+1/2})\|^2_{(-L_h)(I+(\tau^2/4)L_{1h}L_{2h})^{-1}}$$
$$+\tau^{-1}\|v^{j+1}-v^j\|^2_{(-L_h)^{-1}(I+(\tau^2/4)L_{1h}L_{2h})}$$
$$+(\tau^3/16)\|-L_h^{-1}(-L_{2h})(f^{j+1}-f^{j+1/2})\|^2_{(-L_h)(I+(\tau^2/4)L_{1h}L_{2h})^{-1}}$$
$$\le 2\tau^{-1}\|v^{j+1}-v^j\|^2_{(-L_h)^{-1}(I+(\tau^2/4)L_{1h}L_{2h})}$$
$$+(\tau/4)\|f^{j+1}+f^{j+1/2}\|^2_{(-L_h)^{-1}}+(\tau^3/16)\|f^{j+1}-f^{j+1/2}\|^2_{(-L_h)}.$$

Tako dobijamo nejednakost:

$$\|v^{j+1}\|^2-\|v^j\|^2\le(\tau/4)\|f^{j+1}+f^{j+1/2}\|^2_{(-L_h)^{-1}}+(\tau^3/16)\|f^{j+1}-f^{j+1/2}\|^2_{(-L_h)}$$

iz koje, sumiranjem po j, sledi:

$$\|v^k\|^2\le\|v^0\|^2+\frac{\tau}{4}\sum_{j=0}^{k-1}\|f^{j+1}+f^{j+1/2}\|^2_{(-L_h)^{-1}}+\frac{\tau^3}{16}\sum_{j=0}^{k-1}\|f^{j+1}-f^{j+1/2}\|^2_{(-L_h)}$$
$$\le\|v^0\|^2+\frac{T}{4}\max_j\|f^{j+1}+f^{j+1/2}\|^2_{(-L_h)^{-1}}+\frac{\tau^2T}{16}\max_j\|f^{j+1}-f^{j+1/2}\|^2_{(-L_h)}.$$

Prema tome, diferencijska shema (24) je apsolutno stabilna.

U slučaju kada je $f=0$ iz (25) dobijamo:

$$(I-(\tau/2)L_h+(\tau^2/4)L_{1h}L_{2h})v^{j+1}=(I+(\tau/2)L_h+(\tau^2/4)L_{1h}L_{2h})v^j,$$

odnosno:

$$v^{j+1}=(I-(\tau/2)L_{1h})^{-1}(I+(\tau/2)L_{1h})(I-(\tau/2)L_{2h})^{-1}(I+(\tau/2)L_{2h})v^j.$$

Odatle sledi:

$$\|v^{j+1}\|\le q\|v^j\|, \tag{26}$$

gde je

$$q=\max\left\{\left(\frac{1-4c_0l^{-2}\cdot\tau/2}{1+4c_0l^{-2}\cdot\tau/2}\right)^2,\left(\frac{1-c_1h^{-2}\cdot\tau/2}{1+c_1h^{-2}\cdot\tau/2}\right)^2\right\}.$$

Ako je ispunjen uslov:

$$\frac{1-4c_0 l^{-2}\cdot\tau/2}{1+4c_0 l^{-2}\cdot\tau/2} \geq \frac{c_1 h^{-2}\cdot\tau/2-1}{c_1 h^{-2}\cdot\tau/2-1},$$

odnosno $\tau \leq lh/\sqrt{c_0 c_1}$, tada iz (26) sledi:

$$\|v^k\| \leq \left(\frac{1-2c_0 l^{-2}\tau}{1+2c_0 l^{-2}\tau}\right)^{2k}\|v^0\| \leq \exp(-8c_0 l^{-2}k\tau)\|v^0\|,$$

što predstavlja analog nejednakosti (1.38).

Ispitajmo konvergenciju sheme (24). Označimo kao u ranijim slučajevima $z = u - v$, gde je u rešenje zadatka (23), a v rešenje zadatka (24). Funkcija z definisana je na mreži $\overline{\Omega}_{h,\tau}$ i zadovoljava uslove:

$$\begin{aligned}
\frac{z^{j+1}-z^{j+1/2}}{\tau/2} &= L_{1h}z^{j+1} + L_{2h}z^{j+1/2} + \psi^{j+1},\\
\frac{z^{j+1/2}-z^{j}}{\tau/2} &= L_{1h}z^{j} + L_{2h}z^{j+1/2} + \psi^{j+1/2},\\
z^j\big|_{\Gamma_h} &= z^{j+1/2}\big|_{\Gamma_h}, \quad z^0 = 0,
\end{aligned} \tag{27}$$

gde je

$$\begin{aligned}
\psi^{j+1} &= \frac{u^{j+1}-u^{j+1/2}}{\tau/2} - \frac{\partial u}{\partial t}^{j+1} + L_1 u^{j+1} - L_{1h}u^{j+1}\\
&\quad + L_2 u^{j+1} - L_{2h}u^{j+1/2} = O(h^2+\tau),\\
\psi^{j+1/2} &= \frac{u^{j+1/2}-u^{j}}{\tau/2} - \frac{\partial u}{\partial t}^{j+1/2} + L_1 u^{j+1/2} - L_{1h}u^{j}\\
&\quad + L_2 u^{j+1/2} - L_{2h}u^{j+1/2} = O(h^2+\tau)
\end{aligned}$$

(ako su rešenje u i funkcije a_i dovoljno glatki). Primenjujući na rešenje zadatka (27) ocenu (25) dobijamo: $\|z^k\| = O(h^2+\tau)$ Prema tome, diferencijska shema (24) je ekonomična, apsolutno stabilna i konvergira brzinom $O(h^2+\tau)$.

Zadržimo se na još jednoj varijanti sheme promenljivih pravaca, koja se za razliku od prethodne može neposredno generalisati na slučaj proizvoljnog broja prostornih promenljivih (Samarski [1962]). Zadatak (23) aproksimiramo na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\frac{v^{j+1}-v^{j+1/2}}{\tau/2} &= 2L_{1h}^{j+1}v^{j+1} + f_1^{j+1},\\
\frac{v^{j+1/2}-v^{j}}{\tau/2} &= 2L_{2h}^{j+1/2}v^{j+1/2} + f_2^{j+1/2},\\
v^j\big|_{\Gamma_h} &= v^{j+1/2}\big|_{\Gamma_h} = 0, \quad v^0 = u_0,
\end{aligned} \tag{28}$$

gde su f_1 i f_2 neprekidne funkcije koje zadovoljavaju uslov $f_1 + f_2 = f$. Za razliku od sheme (24), kod sheme (28) ni jedna od jednačina ne aproksimira diferencijalnu jednačinu iz zadatka (23), ali je njihov zbir aproksimira. Ovakva aproksimacija se naziva sumarnom, dok se sheme sličnog tipa nazivaju aditivnim shemama (videti Samarski [1966]). Shema (28) je takođe ekonomična, jer su obe jednačine jednodimenzione na gornjem sloju.

Eliminisanjem $v^{j+1/2}$ iz (28) dobijamo:

$$\begin{aligned}
&[I + (\tau/2)(-L_{1h}^{j+1} - L_{2h}^{j+1/2} + \tau L_{1h}^{j+1} L_{2h}^{j+1/2})](v^{j+1} - v^j)\tau^{-1} \\
&\qquad + (1/2)(-L_{1h}^{j+1} - L_{2h}^{j+1/2} + \tau L_{1h}^{j+1} L_{2h}^{j+1/2})(v^{j+1} + v^j) \\
&\qquad\qquad = (1/2)(f_1^{j+1} f_2^{j+1/2}) - (\tau/2) L_{2h}^{j+1/2} f_1^{j+1}
\end{aligned}$$

ili, označavajući $L_{1h}^{j+1} + L_{2h}^{j+1/2} - \tau L_{1h}^{j+1} L_{2h}^{j+1/2} = \tilde{L}_h^{j+1}$:

$$\begin{aligned}
&(I - (\tau/2)\tilde{L}_h^{j+1})(v^{j+1} - v^j)\tau^{-1} - (1/2)\tilde{L}_h^{j+1}(v^{j+1} + v^j) \\
&\qquad = (1/2)(f_1^{j+1} + f_2^{j+1/2}) - (\tau/2) L_{2h}^{j+1/2} f_1^{j+1}. \qquad (29)
\end{aligned}$$

Operator $\tilde{L}_h^{j+1}$ je samokonjugovan i negativno definisan. Množeći skalarno poslednju jednakost sa $2(-\tilde{L}_h^{j+1})^{-1}(v^{j+1} - v^j)$ dobijamo:

$$\begin{aligned}
&2\tau^{-1}\|v^{j+1} - v^j\|^2_{(-\tilde{L}_h^{j+1})^{-1}(I-(\tau/2)\tilde{L}_h^{j+1})} + \|v^{j+1}\|^2 - \|v^j\|^2 \\
&\quad = ((-\tilde{L}_h^{j+1})^{-1}(f_1^{j+1} + f_2^{j+1/2}), v^{j+1} - v^j) \\
&\quad + \tau((-\tilde{L}_h^{j+1})^{-1}(-L_{2h}^{j+1/2}) f_1^{j+1/2}, v^{j+1} - v^j) \\
&\quad \le \tau^{-1}\|v^{j+1} - v^j\|^2_{(-\tilde{L}_h^{j+1})^{-1}(I-(\tau/2)\tilde{L}_h^{j+1})} \\
&\quad + (\tau/4)\|(-\tilde{L}_h^{j+1})^{-1}(f_1^{j+1} + f_2^{j+1/2})\|^2_{(-\tilde{L}_h^{j+1})(I-(\tau/2)\tilde{L}_h^{j+1})^{-1}} \\
&\quad + \tau^{-1}\|v^{j+1} - v^j\|^2_{(-\tilde{L}_h^{j+1})^{-1}(I-(\tau/2)\tilde{L}_h^{j+1})} \\
&\quad + (\tau^3/4)\|(-\tilde{L}_h^{j+1})^{-1}(-L_{2h}^{j+1/2}) f_1^{j+1}\|^2_{(-\tilde{L}_h^{j+1})(I-(\tau/2)\tilde{L}_h^{j+1})^{-1}}.
\end{aligned}$$

Posle sređivanja dobijamo:

$$\begin{aligned}
\|v^{j+1}\|^2 - \|v^j\|^2 &\le (\tau/4)\|f_1^{j+1} + f_2^{j+1/2}\|^2_{(-\tilde{L}_h^{j+1})^{-1}(I-(\tau/2)\tilde{L}_h^{j+1})^{-1}} \\
&+ (\tau^3/4)\|f_1^{j+1}\|^2_{(-\tilde{L}_h^{j+1})^{-1}(-L_{2h}^{j+1/2})^2(I-(\tau/2)\tilde{L}_h^{j+1})^{-1}} \\
&\le (\tau/4)\|f_1^{j+1} + f_2^{j+1/2}\|^2_{(-\tilde{L}_h^{j+1})^{-1}} + (\tau^3/4)\|f_1^{j+1}\|^2_{(-\tilde{L}_h^{j+1})},
\end{aligned}$$

a posle sumiranje po j:

$$\begin{aligned}
\|v^k\|^2 &\le \|v^0\|^2 + \frac{\tau}{4}\sum_{j=1}^{k}\|f_1^j + f_2^{j-1/2}\|^2_{(-\tilde{L}_h^j)^{-1}} + \frac{\tau^3}{4}\sum_{j=1}^{k}\|f_1^j\|^2_{(-\tilde{L}_h^j)} \\
&\le \|v^0\|^2 + \frac{T}{4}\max_j \|f_1^j + f_2^{j-1/2}\|^2_{(-\tilde{L}_h^j)^{-1}} + \frac{\tau^2 T}{4}\max_j \|f_1^j\|^2_{(-\tilde{L}_h^j)}. \qquad (30)
\end{aligned}$$

Prema tome shema (28) je apsolutno stabilna.

U slučaju kada je $f_1 = f_2 = 0$ iz (29) dobijamo:

$$(I - \tau \tilde{L}_h^{j+1})v^{j+1} - v^j = 0,$$

odakle je:

$$\|v^{j+1}\| = \|(I - \tau(L_{1h}^{j+1} + L_{2h}^{j+1/2} - \tau L_{1h}^{j+1} L_{2h}^{j+1/2}))^{-1} v^j\| \le (1 + 4c_0 l^{-2}\tau)^{-2}\|v^j\|.$$

Sledi:

$$\|v^k\| \le (1 + 4c_0 l^{-2}\tau)^{-2k}\|v^0\| \le \exp\big(-8c_0 l^{-2} k\tau(1 - 2c_0 l^{-2}\tau)\big)\|v^0\|$$

što predstavlja analog ocene (1.38).

Ispitajmo na kraju konvergenciju sheme (28). Zamenjujući $z = u - v$ u (28) dobijamo:

$$\begin{aligned}
\frac{z^{j+1} - z^{j+1/2}}{\tau/2} &= 2L_{1h}^{j+1} z^{j+1} + \psi_1^{j+1} \\
\frac{z^{j+1/2} - z^j}{\tau/2} &= 2L_{2h}^{j+1/2} z^{j+1/2} + \psi_2^{j+1/2}, \\
z^j\big|_{\Gamma_h} &= z^{j+1/2}\big|_{\Gamma_h} = 0, \quad z^0 = 0,
\end{aligned} \tag{31}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
\psi_1^{j+1} &= \left(\frac{u^{j+1} - u^{j+1/2}}{\tau/2} - \frac{\partial u}{\partial t}^{j+1}\right) - 2\big[L_{1h}^{j+1} u^{j+1} - (Lu)^{j+1}\big] \\
&\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial t} - 2L_1 u - f_1\right)^{j+1} = O(\tau + h^2 + 1); \\
\psi_2^{j+1/2} &= \left(\frac{u^{j+1/2} - u^j}{\tau/2} - \frac{\partial u}{\partial t}^{j+1/2}\right) - 2\big[L_{2h}^{j+1/2} u^{j+1/2} - (L_2 u)^{j+1/2}\big] \\
&\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial t} - 2L_2 u - f_2\right)^{j+1/2} = O(\tau + h^2 + 1)
\end{aligned}$$

i $\psi_1^{j+1} + \psi_2^{j+1/2} = O(\tau + h^2)$. Primenjujući na rešenje zadatka (31) ocenu (30) dobijamo $\|z^k\| = O(h^2 + \tau)$. Prema tome, diferencijska shema (28) je takođe ekonomična, apsolutno stabilna i konvergira brzinom $O(h^2 + \tau)$.

3. Elementi opšte teorije stabilnosti dvoslojnih diferencijskih shema

Slično kao što smo u paragrafu 1.4 definisali apstraktan parabolički zadatak u Hilbertovom prostoru, možemo definisati i apstraktnu dvoslojnu diferencijsku shemu (videti Samarski, Gulin [1973]). Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor (u primenama obično konačno dimenzioni) i $t \in [0,T]$ realna promenljiva. Neka su $v = v(t)$, $f = f(t), \ldots$ elementi iz $\mathcal{H}$ i $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(t), \ldots$ linearni operatori koji preslikavaju $\mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$. Na intervalu $[0,T]$ definišimo mrežu $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau \mid j = 0,1,\ldots,M;\ \tau = T/M\}$. Slično kao ranije, umesto $v(t_j), f(t_j), \ldots, \mathcal{A}(t_j), \mathcal{B}(t_j), \ldots$ pisaćemo $v^j, f^j, \ldots, \mathcal{A}^j, \mathcal{B}^j, \ldots$. Indekse ćemo izostavljati kada to ne može izazvati zabunu. Uvedimo diferencijski operator:

$$v_t = \tau^{-1}[v(t+\tau) - v(t)],$$

Dvoslojnu diferencijsku shemu u prostoru $\mathcal{H}$ definišemo na sledeći način:

$$\mathcal{C}^j v^{j+1} + \mathcal{D}^j v^j = f^j.$$

Pri tome za početnu vrednost v^0 smatramo da je data. Označavajući $\mathcal{B} = \tau\mathcal{C}$, $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{C}$ naša shema se svodi na kanonski oblik:

$$\mathcal{B}v_t + \mathcal{A}v = f. \tag{32}$$

U daljem radu smatraćemo da su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{A}$ samokonjugovani i pozitivno definisani operatori. U slučajevima kada je (32) aproksimacija apstraktnog paraboličkog zadatka (1.33) operator $\mathcal{A}$ aproksimira operator A, dok je operator $\mathcal{B}$ blizak jediničnom. Na primer, eksplicitna shema (14) svodi se na (32) stavljajući $\mathcal{A} = -L_h$, $\mathcal{B} = I$; kod implicitne sheme (21) je $\mathcal{A}^j = -L_h^{j+1}$, $\mathcal{B}^j = I + \tau\mathcal{A}^j = I - \tau L_h^{j+1}$; kod sheme promenljivih pravaca (24)–(25) je

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = -L_{1h} - L_{2h} = -L_h, \\ \mathcal{B} &= I + (\tau/2)\mathcal{A} + (\tau^2/4)\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 = I - (\tau/2)L_h + (\tau^2/4)L_{1h}L_{2h} \end{aligned}$$

itd.

Pre nego što pređemo na ispitivanje stabilnosti diferencijske sheme (32) transformišimo je na sledeći način:

$$\mathcal{B}^j(v^{j+1} - v^j)/\tau + (1/2)\mathcal{A}^j(v^{j+1} + v^j) - (1/2)\mathcal{A}^j(v^{j+1} - v^j) = f^j,$$

odnosno:

$$2\tau^{-1}(\mathcal{B}^j - (\tau/2)\mathcal{A}^j)(v^{j+1} - v^j) + \mathcal{A}^j(v^{j+1} + v^j) = 2f^j. \tag{33}$$

Dokazaćemo dve teoreme o stabilnosti sheme (32) odnosno (33).

TEOREMA 1. *Ako su operatori $\mathcal{A}^j$ i $\mathcal{B}^j$ komutativni, a operator $\mathcal{B}^j - (\tau/2)\mathcal{A}^j$ pozitivno definisan ($j = 0, 1, \ldots, N$) tada je diferencijska shema* (32) *stabilna u normi Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ i važi ocena:*

$$
\begin{aligned}
\|v^k\|^2 &\le \|v^0\|^2 + \frac{\tau}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\|f^j\|^2_{[\mathcal{A}^j(\mathcal{B}^j-(\tau/2)\mathcal{A}^j)]^{-1}} \\
&\le \|v^0\|^2 + \frac{T}{2}\max_j \|f^j\|^2_{[\mathcal{A}^j(\mathcal{B}^j-(\tau/2)\mathcal{A}^j)]^{-1}}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

koja predstavlja analog ocene (1.35).

Dokaz. Množeći skalarno jednakost (33) sa $(\mathcal{A}^j)^{-1}(v^{j+1} - v^j)$ dobijamo:

$$
\begin{aligned}
&2\tau^{-1}\|v^{j+1} - v^j\|^2_{(\mathcal{A}^j)^{-1}(\mathcal{B}^j-(\tau/2)\mathcal{A}^j)} + \|v^{j+1}\|^2 - \|v^j\|^2 \\
&\quad = 2\big((\mathcal{A}^j)^{-1}f^j, v^{j+1} - v^j\big) \le 2\tau^{-1}\|v^{j+1} - v^j\|^2_{(\mathcal{A}^j)^{-1}(\mathcal{B}^j-(\tau/2)\mathcal{A}^j)} \\
&\qquad + (\tau/2)\|(\mathcal{A}^j)^{-1}f^j\|^2_{\mathcal{A}^j(\mathcal{B}^j-(\tau/2)\mathcal{A}^j)^{-1}},
\end{aligned}
$$

odakle posle sređivanja i sumiranja po j sledi (34).■

Ako je $\mathcal{B}^j - (\tau/2)\mathcal{A}^j \ge \varepsilon I$, ($\varepsilon > 0$), tada iz (34) sledi:

$$
\|v^k\|^2 \le \|v^0\|^2 + \frac{T}{2\varepsilon}\max_j \|f^j\|^2_{(\mathcal{A}^j)^{-1}}.
$$

Primedba. U slučaju diferencijskih shema za realne paraboličke zadatke uslov komutativnosti $\mathcal{A}^j$ i $\mathcal{B}^j$ često se svodi na komutativnost operatora L_h^j i L_h^{j+1}. Poslednji uslov je u slučaju operatora (13) ispunjen na primer ako su prostorne i vremenska promenljiva razdvojeni, tj. $a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \alpha_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\beta_{ij}(t)$.

TEOREMA 2. *Ako je operator $\mathcal{B} - (\tau/2)\mathcal{A}$ pozitivno definisan za $t = t_0, t_1, \ldots, t_M$, a operator $\mathcal{A}$ zadovoljava Lipschitzov uslov:*

$$
\big|([\mathcal{A}(t+\tau) - \mathcal{A}(t)]v, v)\big| \le c\tau(\mathcal{A}(t)v, v), \quad c = \text{const} > 0, \tag{35}
$$

tada je diferencijska shema (32) *stabilna u normi $\|v\|_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}v, v)^{1/2}$ i važi ocena:*

$$
\|v^k\|^2_{\mathcal{A}^k} \le e^{cT}\|v^0\|^2_{\mathcal{A}^0} + \frac{e^{cT} - 1}{2c}\max_j \|f^j\|^2_{(\mathcal{B}^j-(\tau/2)\mathcal{A}^j)^{-1}}. \tag{36}
$$

Dokaz. Iz (35) sledi:

$$
\begin{aligned}
(1 - c\tau)(\mathcal{A}(t)v, v) &\le (\mathcal{A}(t+\tau)v, v) \le (1 + c\tau)(\mathcal{A}(t)v, v), \\
(1 - c\tau)\|v\|^2_{\mathcal{A}^j} &\le \|v\|^2_{\mathcal{A}^{j+1}} \le (1 + c\tau)\|v\|^2_{\mathcal{A}^j}.
\end{aligned}
$$

Množeći skalarno jednakost (33) sa $v^{j+1} - v^j$ dobijamo:

$$\begin{aligned} 2\tau^{-1}\|v^{j+1} - v^j\|^2_{B^j-(\tau/2)A^j} + \|v^{j+1}\|^2_{A^j} - \|v^j\|^2_{A^j} &= 2(f^j, v^{j+1} - v^j) \\ &\le 2\tau^{-1}\|v^{j+1} - v^j\|^2_{B^j-(\tau/2)A^j} + (\tau/2)\|f^j\|^2_{(B^j-(\tau/2)A^j)^{-1}}. \end{aligned}$$

Posle sređivanja i korišćenja nejednakosti izvedene iz (35) dobijamo:

$$(1 + c\tau)^{-1}\|v^{j+1}\|^2_{A^{j+1}} \le \|v^{j+1}\|^2_{A^j} \le \|v^j\|^2_{A^j} + (\tau/2)\|f^j\|^2_{(B^j-(\tau/2)A^j)^{-1}}$$

odnosno:

$$\|v^{j+1}\|^2_{A^{j+1}} \le (1 + c\tau)\Big(\|v^j\|^2_{A^j} + (\tau/2)\|f^j\|^2_{(B^j-(\tau/2)A^j)^{-1}}\Big).$$

Primenjujući k puta izvedenu nejednakost dobijamo ocenu:

$$\|v^k\|^2_{A^k} \le (1 + c\tau)^k\|v^0\|^2_{A^0} + \frac{\tau}{2}\sum_{j=0}^{k-1}(1 + c\tau)^{k-j}\|f^j\|^2_{(B^j-(\tau/2)A^j)^{-1}}$$

iz koje sledi (36).

Ako je $B^j - (\tau/2)A^j \ge \varepsilon I$ tada iz (36) sledi:

$$\|v^k\|^2_{A^k} \le e^{cT}\|v^0\|^2_{A^0} + (e^{cT} - 1)/(2c\varepsilon)\max_j \|f^j\|^2.$$

Nejednakost (36) predstavlja analog nejednakosti (1.37), dok Lipschitzov uslov (35) predstavlja analog uslova (1.36) — ograničenosti operatora dA/dt.

4. Ocene u normi $\|\cdot\|_{C,h,\tau}$

Na neke dvoslojne diferencijske sheme može se primeniti princip maksimuma. Na taj način se za njih dobijaju ravnomerne ocene stabilnosti i konvergencije (u normi $\|v\|_{C,h,\tau} = \max_{\overline{\Omega}_{h,\tau}} |v|$).

Kao primer rezmotrićemo shemu s težinom (22) za rešavanje zadatka (12), u slučaju kad operator L ne sadrži mešovite parcijalne izvode:

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \tag{37}$$

a a_i su neprekidne funkcije takve da je $a_i = a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \ge c_0 > 0$.

Mreža $\overline{\Omega}_{h,\tau}$ se uvodi isto kao i ranije (npr. u §2), dok se Lu aproksimira sa:

$$L_h v = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big[(a_i v_{\bar{x}_i})_{x_i} + (a_i v_{x_i})_{\bar{x}_i}\big]. \tag{38}$$

Iz (22) dobijamo:

$$v^{j+1} - \sigma\tau L_h^{j+1} v^{j+1} = F^{j+1}, \tag{39}$$

gde je:

$$F^{j+1} = v^j + \tau(1-\sigma)L_h^j v^j + \tau\left[\sigma f^{j+1} + (1-\sigma)f^j\right]. \tag{40}$$

Jednakost (29) možemo napisati u razvijenom obliku na sledeći način:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{j+1}[v^{j+1}] \equiv &\left\{1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma\tau}{2h^2}\left[(a_i)_{i+}^{j+1} + 2a_i^{j+1} + (a_i)_{i-}^{j+1}\right]\right\} v^{j+1} \\ &- \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma\tau}{2h^2}\left[(a_i)_{i+}^{j+1} + a_i^{j+1}\right] v_{i+}^{j+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma\tau}{2h^2}\left[(a_i)_{i-}^{j+1} + a_i^{j+1}\right] v_{i-}^{j+1} \\ &= F^{j+1}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega_h,\end{aligned}$$

gde je označeno $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, $v_{i\pm} = v(x_1, \ldots, x_i \pm h, \ldots, x_n, t)$ i analogno $(a_i)_{i\pm}$. Koeficijenti operatora $\mathcal{L}^{j+1}[\cdot]$ zadovoljavaju uslove (1.56). Konstruišimo funkciju $V = V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ takvu da je:

$$\mathcal{L}^{j+1}[V] = |F^{j+1}|, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega_h, \quad V\big|_{\Gamma_h} = 0. \tag{41}$$

Prema teoremi 1.5 je $V \geq 0$, a prema teoremi 1.6:

$$|v^{j+1}| \leq V, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega_h. \tag{42}$$

Neka je $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ tačka iz Ω_h u kojoj se dostiže $\max_{\Omega_h} V$. Jednačinu (41) u tački $x = \bar{x}$ možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned}V &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma\tau}{2h^2}\left[(a_i)_{i+}^{j+1} + a_i^{j+1}\right](V - V_{i+}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma\tau}{2h^2}\left[a_i^{j+1} + (a_i)_{i-}^{j+1}\right](V - V_{i-}) = |F^{j+1}|.\end{aligned}$$

Pošto su razlike $V - V_{i+}$ i $V - V_{i-}$ nenegativne, odatle dobijamo:

$$\max_{\overline{\Omega}_h} V = V(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \leq |F^{j+1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)| \leq \max_{\overline{\Omega}_h} |F^{j+1}|.$$

Uzimajući u obzir nejednakost (42) dobijamo ocenu:

$$\|v^{j+1}\|_{C,h} = \max_{\overline{\Omega}_h} |v^{j+1}| \leq \max_{\overline{\Omega}_h} |F^{j+1}|. \tag{43}$$

Da bi iz nejednakosti (43) sledila stabilsnost sheme (22) potrebno je oceniti $|F^{j+1}|$. Iz (40) sledi:

$$|F^{j+1}| \leq |v^j + \tau(1-\sigma)L_h^j v^j| + \tau\sigma|f^{j+1}| + \tau(1-\sigma)|f^j|. \tag{44}$$

Pišući $L_h^j v^j$ u razvijenom obliku, dobijamo:

$$v^j + \tau(1-\sigma)L_h^j v^j = \left\{1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau(1-\sigma)}{2h^2}\left[(a_i)_{i+}^j + 2a_i^j + (a_i)_{i-}^j\right]\right\} v^j$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau(1-\sigma)}{2h^2}\left[(a_i)_{i+}^j + a_i^j\right] v_{i+}^j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau(1-\sigma)}{2h^2}\left[a_i^j + (a_i)_{i-}^j\right] v_{i-}^j .$$

Ako je ispunjen uslov:

$$\tau \le 2h^2/((1-\sigma)c_1), \quad c_1 = 4n \max_i \max_{x,t} a_i, \tag{45}$$

tada je

$$1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau(1-\sigma)}{2h^2}\left[(a_i)_{i+}^j + 2a_i^j + (a_i)_{i-}^j\right] \ge 0,$$

pa dobijamo:

$$|v^j + \tau(1-\sigma)L_h^j v^j| \le \left\{1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau(1-\sigma)}{2h^2}\left[(a_i)_{i+}^j + 2a_i^j + (a_i)_{i-}^j\right]\right\} \|v^j\|_{C,h}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau(1-\sigma)}{2h^2}\left[(a_i)_{i+}^j + a_i^j\right] \|v^j\|_{C,h} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau(1-\sigma)}{2h^2}\left[a_i^j + (a_i)_{i-}^j\right] \|v^j\|_{C,h} = \|v^j\|_{C,h}.$$

Iz izvedene nejednakosti i (44) sledi:

$$\max_{\overline{\Omega}_h} |F^{j+1}| \le \|v^j\|_{C,h} + \tau\sigma \max_{\Omega_h} |f^{j+1}| + \tau(1-\sigma) \max_{\Omega_h} |f^j|$$

ili, posle zamene u (43):

$$\|v^{j+1}\|_{C,h} \le \|v^j\|_{C,h} + \tau\sigma \max_{\Omega_h} |f^{j+1}| + \tau(1-\sigma) \max_{\Omega_h} |f^j|.$$

Sumirajući poslednju nejednakost po j od 0 do $k-1$ dobijamo:

$$\begin{aligned} \|v^k\|_{C,h} &\le \|v^0\|_{C,h} + \tau \sum_{j=1}^{k-1} \max_{\Omega_h} |f^j| \\ &\quad + \tau(1-\sigma) \max_{\Omega_h} |f^0| + \tau\sigma \max_{\Omega_h} |f^k| \\ &\le \|v^0\|_{C,h} + T \max_{\Omega_h \times \overline{\omega}_\tau} |f|. \end{aligned} \tag{46}$$

Iz (46), uzimajući maksimum po k, dobijamo:

$$\|v\|_{C,h,\tau} \le \|v^0\|_{C,h} + T \cdot \max_{\Omega_h \times \overline{\omega}_\tau} |f|. \tag{47}$$

Prema tome, ako korak po vremenu τ zadovoljava uslov (45), shema s težinom je stabilna u normi $\|\cdot\|_{C,h,\tau}$ i važi nejednakost (47). Za $\sigma = 1$ uslov (45) se svodi na $\tau \leq +\infty$ i ispunjen je za svako τ. Drugim rečima, implicitna shema je apsolutno stabilna u normi $\|\cdot\|_{C,h,\tau}$.

Ispitajmo konvergenciju sheme (22)–(38). Označimo $z = u - v$ gde je u rešenje zadatka (12)–(37), a v rešenje zadatka (22)–(38). Funkcija z definisana je na mreži $\overline{\Omega}_{h,\tau}$ i zadovoljava uslove:

$$(z_t)^j = \sigma L_h^{j+1} z^{j+1} + (1-\sigma) L_h^j z^j + \psi^j,$$
$$z^j\big|_{\Gamma_h} = u^j\big|_{\Gamma_h} = O(h), \quad z^0 = 0,$$

gde je

$$\psi = O(h^2 + \tau^{m(\sigma)}), \quad m(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \neq 1/2 \\ 2, & \sigma = 1/2, \end{cases}$$

ako su u i a_i dovoljno glatke funkcije. Funkciju z rastavimo na dva sabirka, $z = z_1 + z_2$, koji zadovoljavaju uslove:

$$\begin{aligned} (z_1)_t^j &= \sigma L_h^{j+1} z_1^{j+1} + (1-\sigma) L_h^j z_1^j + \psi^j, \\ z_1^j\big|_{\Gamma_h} &= 0, \quad z_1^0 = 0, \end{aligned} \tag{48}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} (z_2)_t^j &= \sigma L_h^{j+1} z_2^{j+1} + (1-\sigma) L_h^j z_2^j, \\ z_2^j\big|_{\Gamma_h} &= z^j\big|_{\Gamma_h} = O(h), \quad z_2^0 = 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Zadatak (48) je istog tipa kao (22), pa na njegovo rešenje možemo primeniti ocenu (47):

$$\|z_1\|_{C,h,\tau} \leq \|z_1^0\|_{C,h} + T \max_{\Omega_h \times \overline{\omega}_\tau} |\psi| = O(h^2 + \tau^{m(\sigma)}). \tag{50}$$

Jednačinu (48) možemo napisati u obliku:

$$\mathcal{L}^{j+1}[z_2^{j+1}] \equiv z_2^{j+1} - \sigma\tau L_h^{j+1} z_2^{j+1} = \Gamma^{j+1} \equiv z_2^j + \tau(1-\sigma) L_h^j z_2^j.$$

Prema teoremi 1.6 je $|z_2^{j+1}| \leq Z$ gde je Z rešenje zadatka:

$$\mathcal{L}^{j+1}[Z] = |G^{j+1}|, \quad Z\big|_{\Gamma_h} = |z_2^{j+1}|\,\big|_{\Gamma_h}.$$

Slično kao ranije zaključujemo da je pri ispunjenom uslovu (45):

$$\max_{\overline{\Omega}_h} Z \leq \max_{\Omega_h} |G^{j+1}| \leq \|z_2^j\|_{C,h}$$

u slučaju da se $\max_{\overline{\Omega}_h} Z$ dostiže u unutrašnjem čvoru mreže $\overline{\Omega}_h$ odnosno:

$$\max_{\overline{\Omega}_h} Z = O(h),$$

ukoliko se on dostiže na Γ_h. Sledi:

$$\|z_2^{j+1}\|_{C,h} \leq \max\left\{\|z_2^j\|_{C,h}, O(h)\right\},$$

odakle dobijamo $\|z_2^k\|_{C,h} = O(h)$, i dalje:

$$\|z_2\|_{C,h,\tau} = O(h). \tag{51}$$

Najzad, iz ocena (50) i (51) dobijamo:

$$\|z\|_{C,h,\tau} = O(h + \tau^{m(\sigma)}).$$

Prema tome, naša shema pri ispunjenom uslovu (45), konvergira u normi $\|\cdot\|_{C,h,\tau}$ brzinom $O(h+\tau^2)$ za $\sigma = 1/2$, odnosno $O(h+\tau)$ — za $\sigma \neq 1/2$. Na osnovu dobijenog rezultata ujedno možemo zaključiti da se neke ranije izvedene ocene, u kojima umesto h figuriše $\sqrt{h}$, mogu poboljšati.

IV Hiperboličke jednačine

1. Uvod

U ovoj glavi razmatraćemo diferencijske sheme za rešavanje mešovitog problema za hiperboličke jednačine (1.22). Kao i u slučaju paraboličkih jednačina, i ovde promenljiva t ima drukčiju ulogu od ostalih promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mrežu $\overline{\Omega}_{h,\tau}$ definišemo na isti način kao u paraboličkom slučaju (videti §3.1). Eliptički član, Lu, jednačine (1.22) diskretizuje se kao u slučaju eliptičkih jednačina (videti glavu II). Da bi se aproksimirao drugi izvod po t, $\partial^2 u/\partial t^2$, potrebne su vrednosti funkcije u bar sa tri vremenska sloja, npr.

$$\partial^2 u/\partial t^2\big|_{t=t_j} = (u^{j+1} - 2u^j + u^{j-1})/(\tau^2) + O(\tau^2) = u^j_{\bar{t}t} + O(\tau^2).$$

U daljem radu ćemo koristiti ovu najjednostavniju aproksimaciju $\partial^2 u/\partial t^2$, tj. sve razmatrane diferencijske sheme biće troslojne.

Stabilnost diferencijskih shema za rešavanje hiperboličkih zadataka dokazivaćemo izvođenjem diferencijskih analoga nejednakosti (1.39). Kao i u slučaju diferencijskih shema za paraboličke zadatke i ovde stabilnost može biti apsolutna i uslovna. Princip maksimuma, dokazan u paragrafu 1.7.d, ovde se ne može primeniti.

Kao i u paraboličkom slučaju, smatraćemo da je shema ekonomična ako je za prelazak sa sloja t_j na sloj t_{j+1} potrebno $O(N)$ aritmetičkih operacija, gde je N ukupan broj čvorova mreže Ω_h.

2. Primeri diferencijskih shema

a. Eksplicitna shema. Razmotrićemo prvo zadatak s jednom prostornom promenljivom. Neka se u oblasti $[0,l] \times [0,T]$ traži rešenje mešovitog problema:

$$\begin{gathered}\partial^2 u/\partial t^2 = Lu + f; \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T], \\ Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) - du, \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = u_0, \quad \partial u/\partial t\big|_{t=0} = u_1.\end{gathered} \tag{1}$$

Radi pojednostavljenja izvođenja smatraćemo da a i d ne zavise od t, i da su d i f neprekidne, a a diferencijabilna funkcija. Neka su takođe ispunjeni uslovi $a = a(x) \geq c_0 > 0$ i $d = d(x) \geq 0$.

Uvedimo mrežu $\bar{\omega}_{h,\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ gde je $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih \mid i = 0, 1, \ldots, N;\ h = l/N\}$ i $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau \mid j = 0, 1, \ldots, M;\ \tau = T/M\}$. Našu jednačinu aproksimiramo sa:

$$v_{\bar{t}t} = L_h v + f, \qquad \begin{array}{ll} x = x_i, & i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ t = t_j, & j = 1, 2, \ldots, M-1, \end{array} \tag{2}$$

gde je:

$$L_h v = (1/2)\left[(a v_{\bar{x}})_x + (a v_x)_{\bar{x}}\right] - dv. \tag{3}$$

Granične uslove možemo tačno zadovoljiti stavljajući:

$$v_0^j = v_N^j = 0, \tag{4}$$

a takođe i prvi početni uslov:

$$v_i^0 = u_0(x_i). \tag{5}$$

Drugi početni uslov možemo aproksimirati s tačnošću $O(\tau)$ stavljajući:

$$(v^1 - v^0)/\tau = u_1.$$

Tačnost aproksimacije se može poboljšati korišćenjem date diferencijalne jednačine, na sledeći način. Pod pretpostavkom dovoljne glatkosti funkcije u iz Taylorove formule dobijamo:

$$\begin{aligned} u\big|_{t=\tau} &= u\big|_{t=0} + \tau(\partial u/\partial t)\big|_{t=0} + (\tau^2/2)(\partial^2 u/\partial t^2)\big|_{t=0} + O(\tau^3) \\ &= u_0 + \tau u_1 + (\tau^2/2)(Lu + f)\big|_{t=0} + O(\tau^3) \\ &= u_0 + \tau u_1 + (\tau^2/2)(L_h u + f)\big|_{t=0} + O(\tau^3 + \tau^2 h^2). \end{aligned}$$

Prema tome, možemo staviti:

$$v^1 = u_0 + \tau u_1 + (\tau^2/2)(Lu_0 + f^0), \tag{6}$$

ili, ako postoje teškoće kod izračunavanja Lu_0:

$$v^1 = u_0 + \tau u_1 + (\tau^2/2)(L_h u_0 + f^0). \tag{7}$$

Na taj način dobijamo diferencijsku shemu (2–6) odnosno (2–5)–(7). Jednačinu (2) možemo napisati u razvijenom obliku na sledeći način:

$$(v^{j+1} - 2v^j + v^{j-1})/\tau^2 = L_h v^j + f^j,$$

odakle vidimo da se vrednosti v^{j+1} mogu neposredno izračunati ako su poznate vrednosti v^j i v^{j-1} (otuda potiče i naziv „eksplicitna shema“).

Ispitajmo sada stabilnost naše diferencijske sheme. Kao u paragrafu 2.2.a sa $\mathring{\mathcal{L}}_h$ označimo prostor funkcija definisanih na mreži $\overline{\omega}_h$ i jednakih nuli za $x = 0$ i $x = l$, u kome su skalarni proizvod i norma uvedeni na raniji način:

$$(v, w) = h \sum_{i=1}^{N-1} v_i w_i, \quad \|v\| = (v, v)^{1/2}.$$

Operator L_h je samokonjiugovan, negativno definisan i zadovoljava (3.5).

Jednačinu (2) možemo transformisati na sledeći način:

$$(v^{j+1} - 2v^j + v^{j-1})/\tau^2 = L_h(v^{j+1} + 2v^j + v^{j-1})/4 - L_h(v^{j+1} - 2v^j + v^{j-1})/4 + f^j,$$

odnosno:

$$(I + (\tau^2/4)L_h)(v^{j+1} - 2v^j + v^{j-1})/\tau^2 = L_h(v^{j+1} + 2v^j + v^{j-1})/4 + f^j.$$

Množeći skalarno poslednju jednakost sa $v^{j+1} - v^{j-1}$, i uzimajući u obzir da je $v^{j+1} - v^{j-1} = (v^{j+1} + v^j) - (v^j + v^{j-1}) = (v^{j+1} - v^j) + (v^j - v^{j-1})$, $v^{j+1} - 2v^j + v^{j-1} = (v^{j+1} - v^j) - (v^j - v^{j-1})$ i $v^{j+1} + 2v^j + v^{j-1} = (v^{j+1} + v^j) + (v^j + v^{j-1})$ dobijamo:

$$\begin{aligned}((I + (\tau^2/4)L_h)&(v^{j+1} - v^j)/\tau, (v^{j+1} - v^j)/\tau) \\ &- ((I + (\tau^2/4)L_h)(v^j - v^{j-1})/\tau, (v^j - v^{j-1})/\tau) \\ &= -\|(v^{j+1} + v^j)/2\|^2_{(-L_h)} + \|(v^j + v^{j-1})/2\|^2_{(-L_h)} + (f^j, v^{j+1} - v^{j-1}).\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je operator $I + (\tau^2/4)L_h$ pozitivno definisan. U tom slučaju se poslednja jednakost može napisati na sledeći način:

$$\mathcal{N}^2(v^j) = \mathcal{N}^2(v^{j-1}) + (f^j, v^{j+1} - v^{j-1}), \tag{8}$$

gde je:

$$\mathcal{N}^2(v^j) = \|(v^{j+1} - v^j)/\tau\|^2_{(I+(\tau^2/4)L_h)} + \|(v^{j+1} + v^j)/2\|^2_{(-L_h)}.$$

Veličina $\mathcal{N}^2(v^j)$ je nenegativna, i predstavlja kvadrat norme u prostoru uređenih parova (v^j, v^{j+1}). Skalarni proizvod $(f^j, v^{j+1} - v^{j-1})$ koji se javlja u jednakosti (8) možemo oceniti na sledeći način:

$$\begin{aligned}(f^j, v^{j+1} - v^{j-1}) &= \tau(f^j, (v^{j+1} - v^j)/\tau) + \tau(f^j, (v^j - v^{j-1})/\tau) \\ &\le \tau\varepsilon\|(v^{j+1} - v^j)/\tau\|^2_{(I+(\tau^2/4)L_h)} \\ &+ \tau\varepsilon\|(v^j - v^{j-1})/\tau\|^2_{(I+(\tau^2/4)L_h)} + (2\tau)/(4\varepsilon)\|f^j\|^2_{(I+(\tau^2/4)L_h)^{-1}} \\ &\le \tau\varepsilon\mathcal{N}^2(v^j) + \tau\varepsilon\mathcal{N}^2(v^{j-1}) + \tau(2\varepsilon)^{-1}\|f^j\|^2_{(I+(\tau^2/4)L_h)^{-1}},\end{aligned}$$

gde ε biramo tako da bude $\tau\varepsilon < 1$. Iz dobijene nejednakosti i (8) sledi:

$$\mathcal{N}^2(v^j) \le \frac{1+\tau\varepsilon}{1-\tau\varepsilon}\mathcal{N}^2(v^{j-1}) + \frac{\tau}{2\varepsilon(1-\tau\varepsilon)}\|f^j\|^2_{(I+(\tau^2/4)L_h)^{-1}}.$$

Sumiranjem po j od 1 do k dobijamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^2(v^k) &\le \left(\frac{1+\tau\varepsilon}{1-\tau\varepsilon}\right)^k \mathcal{N}^2(v^0) + \frac{\tau}{2\varepsilon(1-\tau\varepsilon)}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1+\tau\varepsilon}{1-\tau\varepsilon}\right)^{k-j}\|f^j\|^2_{(I+(\tau^2/4)L_h)^{-1}} \\
&\le \left(\frac{1+\tau\varepsilon}{1-\tau\varepsilon}\right)^k \mathcal{N}^2(v^0) + \frac{1}{4\varepsilon^2}\left[\left(\frac{1+\tau\varepsilon}{1-\tau\varepsilon}\right)^k - 1\right]\max_j \|f^j\|^2_{(I+(\tau^2/4)L_h)^{-1}} \\
&\le e^{2\varepsilon T/(1-\tau\varepsilon)}\mathcal{N}^2(v^0) + \frac{1}{4\varepsilon^2}\left(e^{2\varepsilon T/(1-\tau\varepsilon)} - 1\right)\max_j \|f^j\|^2_{(I+(\tau^2/4)L_h)^{-1}}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Nejednakost (9) predstavlja analog nejednakosti (1.40) i izražava stabilnost rešenja naše diferencijske sheme (2–6). Ona je izvedena pod pretpostavkom pozitivne definisanosti operatora $I + (\tau^2/4)L_h$. Iz nejednakosti (3.5) dobijamo:

$$((I + (\tau^2/4)L_h)v, v) \ge \left(1 - \frac{\tau^2}{4}\cdot\frac{c_1}{h^2}\right)\|v\|^2,$$

odakle sledi da je operator $I + (\tau^2/4)L_h$ pozitivno definisan za:

$$\tau < 2h/\sqrt{c_1}. \tag{10}$$

Prema tome, eksplicitna shema je uslovno stabilna ako τ zadovoljava uslov (10).

Ispitajmo konvergenciju naše diferencijske sheme (2–6). Neka je u rešenje zadatka (1), v rešenje zadatka (2–6) i $z = u - v$. Funkcija z definisana je na mreži $\overline{\omega}_{h,\tau}$ i zadovoljava uslove:

$$\begin{aligned}
z_{\bar{t}t} &= L_h z + \psi, \quad z_0^j = z_N^j = 0, \\
z_i^0 &= 0, \quad z^1 = u\big|_{t=\tau} - v^1 = O(\tau^3),
\end{aligned} \tag{11}$$

gde je

$$\psi = (u_{\bar{t}t} - \partial^2 u/\partial t^2) + (Lu - L_h u) = O(h^2 + \tau^2),$$

ako $u \in C^4$ i $a \in C^3$. Zadatak (11) je istog tipa kao zadatak (2–6), pa se na njega može primeniti ocena (9):

$$\begin{aligned}
&\|z_t^k\|^2_{(I+(\tau^2/4)L_h)} + \|(z^{k+1} + z^k)/2\|^2_{(-L_h)} \\
&\quad\le e^{2\varepsilon T/(1-\tau\varepsilon)}\left(\|(z^1 - z^0)/\tau\|^2_{(I+(\tau^2/4)L_h)} + \|(z^1 + z^0)/2\|^2_{(-L_h)}\right) \\
&\qquad + 1/(4\varepsilon^2)\left(e^{2\varepsilon T/(1-\tau\varepsilon)} - 1\right)\max_j \|\psi^j\|^2_{(I+(\tau^2/4)L_h)^{-1}} = O(\tau^4 + h^4).
\end{aligned}$$

Prema tome, kada je ispunjen uslov (10), rešenje zadatka (2–6) konvergira k rešenju zadatka (1) brzinom $O(h^2+\tau^2)$ u normi

$$\mathcal{N}(z^k) = \left\{\|z_t^k\|^2_{I+(\tau^2/4)L_h} + \|(z^{k+1}+z^k)/2\|^2_{(-L_h)}\right\}^{1/2}.$$

Isti rezultat se dobija i ako se umesto početnog uslova (6) uzme početni uslov (7).

Pređimo sada na opšti slučaj kad zadatak zavisi od n prostornih promenljivih. Neka je Ω ograničena, konveksna, jednostruko povezana oblast promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Neka je Γ granica oblasti Ω i neka se u oblasti $\Omega\times[0,T]$ traži rešenje mešovitog problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f, \quad u\big|_{\Gamma\times[0,T]} = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1. \tag{12}$$

Operator L definisan je sa:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - du,$$

gde su a_{ij} i d funkcije od $x_1, x_2, \ldots, x_n$, f funkcija od $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i t, $a_{ij} = a_{ji}$, $d \geq 0$ i

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Uvedimo mrežu $\overline{\Omega}_{h,\tau} = \overline{\Omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, gde je $\overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$ definisana kao u §2.2.d, a $\overline{\omega}_\tau$ je ista kao ranije (za $n=1$). Zadatak (12) aproksimiramo sa:

$$\begin{gathered} v_{\bar{t}t} = L_h v + f, \quad v\big|_{\Gamma_h\times\overline{\omega}_\tau} = 0, \\ v^0 = u_0, \quad v^1 = u_0 + \tau u_1 + (\tau^2/2)(Lu_0 - f^0), \end{gathered} \tag{13}$$

(ili $v^1 = u_0 + \tau u_1 + (\tau^2/2)(L_h u_0 - f^0)$), gde je:

$$L_h v = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left[(a_{ij}v_{\bar{x}_j})_{x_i} + (a_{ij}v_{x_j})_{\bar{x}_i}\right] - dv.$$

Shema (13) je takođe ekonomična, jer se vrednosti v^{j+1} iz nje neposredno izračunavaju kada su poznate v^j i v^{j-1}.

Sa $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_h$ označimo skup funkcija definisanih na mreži $\overline{\Omega}_h$ i jednakih nuli na Γ_h. Skalarni proizvod i normu u $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_h$ uvodimo na običan način:

$$(v,w) = h^n \sum_{x\in\Omega_h} v(x)w(x), \quad \|v\| = (v,v)^{1/2}.$$

Operator L_h je samokonjugovan, negativno definisan i zadovoljava (3.16). Dalja izvođenja su ista kao u slučaju $n = 1$. Specijalno, pri zadovoljenom uslovu (10), shema (13) je uslovno stabilna i važi ocena (9). Pošto ς_1 raste s brojem dimenzija n, sledi da se ograničenje koraka τ pooštrava s povećanjem n.

Pre nego što pređemo na ispitivanje konvergencije diferencijske sheme (13) dokažimo sledeću lemu:

Lema 1. *Neka je $g_j \geq 0$ i $f_j \geq 0$ $(j = 0, 1, \ldots)$. Tada iz nejednakosti:*

$$g_n \leq c\tau \sum_{j=0}^{n-1} g_j + f_n, \quad g_0 \leq f_0, \quad c = \text{const} > 0,$$

sledi ocena:

$$g_n \leq f_n + c\tau e^{cn\tau} \sum_{j=0}^{n-1} f_j. \tag{14}$$

Dokaz. Uvedimo niz γ_n na sledeći način:

$$\gamma_0 = g_0, \quad \gamma_n = c\tau \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j + f_n.$$

Indukcijom se lako pokazuje da je $g_n \leq \gamma_n$. Dalje je:

$$\gamma_n - \gamma_{n-1} = c\tau \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j + f_n - c\tau \sum_{j=0}^{n-2} \gamma_j - f_{n-1} = c\tau\gamma_{n-1} + f_n - f_{n-1},$$

odakle je $\gamma_n = (1 + c\tau)\gamma_{n-1} + (f_n - f_{n-1})$. Sledi:

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= (1 + c\tau)\gamma_{n-1} + (f_n - f_{n-1}) \\
&= (1 + c\tau)^2\gamma_{n-2} + (1 + c\tau)(f_{n-1} - f_{n-2}) + (f_n - f_{n-1}) = \cdots \\
\cdots &= (1 + c\tau)^n\gamma_0 + \sum_{j=1}^{n}(1 + c\tau)^{n-j}(f_j - f_{j-1}) \\
&= (1 + c\tau)^n g_0 + f_n - (1 + c\tau)^{n-1} f_0 + \sum_{j=1}^{n-1}(1 + c\tau)^{n-1-j}(1 + c\tau - 1) f_j \\
&\leq (1 + c\tau)^n f_0 - (1 + c\tau)^{n-1} f_0 + c\tau \sum_{j=1}^{n-1}(1 + c\tau)^{n-1-j} f_j + f_n \\
&= f_n + c\tau(1 + c\tau)^n \sum_{j=0}^{n-1}(1 + c\tau)^{-1-j} f_j \leq f_n + c\tau e^{nc\tau} \sum_{j=0}^{n-1} f_i,
\end{aligned}$$

odakle, zbog $g_n \leq \gamma_n$, dobijamo (14). ∎

Pređimo sada na ispitivanje konvergencije sheme (13). Kao i ranije sa z označimo grešku $z = u - v$. Pošto granica Γ_h u opštem slučaju ne leži na Γ, funkcija z^j nije jednaka nuli na njoj, tj. $z^j \notin \overset{\circ}{\mathcal{L}}_h$. Uvedimo zato popravku $z = \zeta + \eta$ gde je

$$\zeta = \begin{cases} z, & \Omega_h \times \overline{\omega}_\tau \\ 0, & \Gamma_h \times \overline{\omega}_\tau \end{cases} \quad \text{i} \quad \eta = \begin{cases} 0, & \Omega_h \times \overline{\omega}_\tau \\ z = O(h), & \Gamma_h \times \overline{\omega}_\tau . \end{cases}$$

Funkcija ζ zadovoljava uslove:

$$\zeta_{\bar{t}t} = L_h\zeta + \psi, \quad \zeta^j|_{\Gamma_h} = 0,$$
$$\zeta^0 = 0, \quad \zeta^1 = u^1 - v^1,$$

gde je $\psi = \psi_1 + \psi_2$, $\psi_1 = (u_{\bar{t}t} - \partial^2 u/\partial t^2) + (Lu - L_h u)$ i $\psi_2 = L_h\eta - \eta_{\bar{t}t}$. Označimo dalje $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$, gde je ζ_1 rešenje zadatka:

$$\begin{aligned} (\zeta_1)_{\bar{t}t} &= L_h\zeta_1 + \psi_1, \\ \zeta_1^j|_{\Gamma_h} = 0, \quad \zeta_1^0 &= 0, \quad \zeta_1^1 = \zeta^1, \end{aligned} \tag{15}$$

a ζ_2 rešenje zadatka:

$$\begin{aligned} (\zeta_2)_{\bar{t}t} &= L_h\zeta_2 + \psi_2, \\ \zeta_2^j|_{\Gamma_h} = 0, \quad \zeta_2^0 &= 0, \quad \zeta_2^1 = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Ako $u \in C^4$ i $a_{ij} \in C^3$ tada je:

$$\zeta_1^1 = \zeta^1 = O(\tau^3) \quad \text{i} \quad \psi^1 = O(h^2 + \tau^2),$$

pa primenom ocene (9) na zadatak (15) dobijamo:

$$\mathcal{N}(\zeta_1^k) = O(h^2 + \tau^2). \tag{17}$$

Funkciju ζ_2 ocenimo na drugi način. Iz (8) sledi:

$$\mathcal{N}^2(\zeta_2^j) = \mathcal{N}^2(\zeta_2^{j-1}) + (\psi_2^j, \zeta_2^{j+1} - \zeta_2^{j-1})$$

i posle sumiranja po j od 1 do k:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2(\zeta_2^k) &= \mathcal{N}^2(\zeta_2^0) + \sum_{j=1}^{k}(\psi_2^j, \zeta_2^{j+1} - \zeta_2^{j-1}) \\ &= \mathcal{N}^2(\zeta_2^0) + \sum_{j=1}^{k}(\psi_2^j, \zeta_2^{j+1} + \zeta_2^j) - \sum_{j=1}^{k}(\psi_2^j, \zeta_2^j + \zeta_2^{j-1}) \\ &= \mathcal{N}^2(\zeta_2^0) + 2(\psi_2^k, (\zeta_2^{k+1} + \zeta_2^k)/2) - 2\tau\sum_{j=1}^{k-1}((\psi_2^{j+1} - \psi_2^j)/\tau, (\zeta_2^{j+1} + \zeta_2^j)/2) \\ &= 2(L_h\eta^k, (\zeta_2^{k+1} + \zeta_2^k)/2) - 2\tau\sum_{j=1}^{k-1}(L_h(\eta^{j+1} - \eta^j)/\tau, (\zeta_2^{j+1} + \zeta_2^j)/2). \end{aligned}$$

U poslednjem izrazu se pojavljuju skalarni proizvodi oblika $(L_h\eta^k, w)$ i $(L_h\eta^j_t, w)$. Prvi od njih ocenjujemo na sledeći način:

$$|(L_h\eta^k, w)| = \frac{1}{2}\left|\sum_{i,j=1}^{n}\left[((a_{ij}\eta^k_{\bar{x}_j})_{x_i}, w) + ((a_{ij}\eta^k_{x_j})_{\bar{x}_i}, w)\right]\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|-\sum_{i,j=1}^{n}\left[(a_{ij}\eta^k_{\bar{x}_j}, w_{\bar{x}_i}) + (a_{ij}\eta^k_{x_j}, w_{x_i})\right]\right|$$

$$\leq \text{const}\cdot\|w\|_{(-L_h)}\left\{\sum_{i=1}^{n}\|\eta^k_{x_i}\|^2\right\}^{1/2} \leq \frac{1}{4\varepsilon}\|w\|^2_{(-L_h)} + \varepsilon\,\text{const}\cdot\sum_{i=1}^{n}\|\eta^k_{x_i}\|^2.$$

Pošto je $\eta^k = \begin{cases} 0, & \Omega_h \\ O(h), & \Gamma_h \end{cases}$ biće $\eta^k_{x_i}$ jednako nuli svuda, osim u $O(h^{-n+1})$ prigraničnih čvorova, gde je $\eta^k_{x_i} = O(1)$. Sledi $\|\eta^k_{x_i}\|^2 = O(h^n \cdot h^{-n+1}\cdot 1^2) = O(h)$. Skalarni proizvodi drugog tipa ocenjuju se na isti način, jer je i $\eta^j_t = \begin{cases} 0, & \Omega_h \\ O(h), & \Gamma_h \end{cases}$. Na taj način dobijamo ocenu (stavljajući $\varepsilon = 1$):

$$\mathcal{N}^2(\zeta^k_2) \leq (1/2)\|(\zeta^{k+1}_2 + \zeta^k_2)/2\|^2_{(-L_h)} + (1/2)\tau\sum_{j=1}^{k-1}\|(\zeta^{j+1}_2 + \zeta^j_2)/2\|^2_{(-L_h)}$$
$$+ O(h) + k\tau O(h)$$
$$\leq (1/2)\mathcal{N}^2(\zeta^k_2) + (1/2)\tau\sum_{j=1}^{k-1}\mathcal{N}^2(\zeta^j_2) + O(h),$$

odnosno:

$$\mathcal{N}^2(\zeta^k_2) \leq \tau\sum_{j=1}^{k}\mathcal{N}^2(\zeta^j_2) + O(h).$$

Odavde, primenom leme 1, dobijamo:

$$\mathcal{N}^2(\zeta^k_2) \leq O(h) + ck\tau e^{ck\tau}O(h) = O(h). \tag{18}$$

Najzad, iz (17) i (18) dobijamo:

$$\mathcal{N}(\zeta^k) \leq \mathcal{N}(\zeta^k_1) + \mathcal{N}(\zeta^k_2) = O(\tau^2 + \sqrt{h}).$$

Prema tome, diferencijska shema (13) konvergira u normi $\mathcal{N}(\zeta)$ brzinom $O(\tau^2 + \sqrt{h})$, ako su rešenje u i koeficijenti polazne jednačine dovoljno glatki. U slučaju kada je oblast Ω n-dimenzionalna kocka, korak h može se tako izabrati da bude $\Gamma_h \subset \Gamma$. Tada je $\eta \equiv 0$ pa je brzina konvergencije jednaka $O(\tau^2 + h^2)$. Do istog rezultata se može doći i u opštem slučaju, korišćenjem specijalne mreže Ω^*_h, neravnomerne u blizini granice.

Analogni rezultati se dobijaju i u slučaju kada je na granici zadat treći granični uslov.

b. Shema s težinama. Za razliku od eksplicitne sheme, kod sheme s težinama na desnoj strani jednačine se pojavljuju vrednosti s tri susedna vremenska sloja:

$$(v_{\bar{t}t})^j = \sigma_1 L_h v^{j+1} + (1-\sigma_1-\sigma_2) L_h v^j + \sigma_2 L_h v^{j-1} + f^j. \qquad (19)$$

Granični i početni uslovi se zadaju na isti način kao kod eksplicitne sheme. Iz (19) dobijamo:

$$(I - \tau^2\sigma_1 L_h) v^{j+1} = F^j \equiv 2v^j - v^{j-1} + \tau^2(1-\sigma_1-\sigma_2) L_h v^j + \tau^2\sigma_2 L_h v^{j-1} + \tau^2 f^j,$$

odakle vidimo da je za određivanje v^{j+1} potrebno rešiti sistem linearnih jednačina s matricom koja odgovara operatoru $I - \tau^2\sigma_1 L_h$. Kao što je pokazano u paragrafu 2.4 ovakva matrica se može svesti na $(2m+1)$-dijagonalni oblik samo ako je $n = 1$. Prema tome, shema s težinama je ekonomična samo u slučaju $n = 1$.

Pređimo sada na ispitivanje stabilnosti sheme (19). Jednačinu (19) možemo transformisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}(v^{j+1} - 2v^j + v^{j-1})/\tau^2 &= (\sigma_1/4) L_h \big[(v^{j+1} + 2v^j + v^{j-1}) \\ &\quad + (v^{j+1} - 2v^j + v^{j-1}) + 2(v^{j+1} - v^{j-1})\big] \\ &\quad + (\sigma_2/4) L_h \big[(v^{j+1} + 2v^j + v^{j-1}) + (v^{j+1} - 2v^j + v^{j-1}) - 2(v^{j+1} - v^{j-1})\big] \\ &\quad + ((1-\sigma_1-\sigma_2)/4) L_h \big[(v^{j+1} + 2v^j + v^{j-1}) - (v^{j+1} - 2v^j + v^{j-1})\big] + f^j,\end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned}&(I - (\tau^2/2)(\sigma_1 + \sigma_2 - 1/2) L_h)(v^{j+1} - 2v^j + v^{j-1})/\tau^2 \\ &\quad - L_h(v^{j+1} + 2v^j + v^{j-1})/4 - ((\sigma_1 - \sigma_2)/2) L_h (v^{j+1} - v^{j-1}) = f^j.\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je operator $I - (\tau^2/2)(\sigma_1 + \sigma_2 - 1/2) L_h$ pozitivno definisan i skalarno pomnožimo dobijenu jednakost sa $v^{j+1} - v^{j-1}$. Tako dobijamo:

$$\mathcal{N}^2(v^j) - \mathcal{N}^2(v^{j-1}) + ((\sigma_1 - \sigma_2)/2) \|v^{j+1} - v^{j-1}\|^2_{(-L_h)} = (f^j, v^{j+1} - v^{j-1}),$$

gde je

$$\mathcal{N}^2(v^j) = \|v_t^j\|^2_{(I - (\tau^2/2)(\sigma_1+\sigma_2-1/2)L_h)} + \|(v^{j+1} + v^j)/2\|^2_{(-L_h)}.$$

Ako je $\sigma_1 \geq \sigma_2$ dalje dobijamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^2(v^j) - \mathcal{N}^2(v^{j-1}) &\leq (f^j, v^{j+1} - v^{j-1}) \\ &= \tau(f^j, (v^{j+1} - v^j)/\tau) + \tau(f^j, (v^j - v^{j-1})/\tau) \\ &\leq \varepsilon\tau \|(v^{j+1} - v^j)/\tau\|^2_{(I - (\tau^2/2)(\sigma_1+\sigma_2-1/2)L_h)} \\ &\quad + \varepsilon\tau \|(v^j - v^{j-1})/\tau\|^2_{(I - (\tau^2/2)(\sigma_1+\sigma_2-1/2)L_h)} \\ &\quad + (2\tau/(4\varepsilon)) \|f^j\|^2_{(I - (\tau^2/2)(\sigma_1+\sigma_2-1/2)L_h)^{-1}} \\ &\leq \varepsilon\tau\mathcal{N}^2(v^j) + \varepsilon\tau\mathcal{N}^2(v^{j-1}) + (\tau/(2\varepsilon)) \|f^j\|^2_{(I - (\tau^2/2)(\sigma_1+\sigma_2-1/2)L_h)^{-1}}.\end{aligned}$$

Parametar ε biramo tako da bude $\tau\varepsilon < 1$. Sređivanjem dobijamo:

$$\mathcal{N}^2(v^j) \le \frac{1+\varepsilon\tau}{1-\varepsilon\tau}\mathcal{N}^2(v^{j-1}) + \frac{\tau}{2\varepsilon(1-\varepsilon\tau)}\|f^j\|^2_{(I-(\tau^2/2)(\sigma_1+\sigma_2-1/2)L_h)^{-1}}$$

i posle sumiranja po j:

$$\mathcal{N}^2(v^k) \le \left(\frac{1+\varepsilon\tau}{1-\varepsilon\tau}\right)^k \mathcal{N}^2(v^0) + \frac{\tau}{2\varepsilon(1-\varepsilon\tau)}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1+\varepsilon\tau}{1-\varepsilon\tau}\right)^{k-j} \times$$

$$\times \|f^j\|^2_{(I-(\tau^2/2)(\sigma_1+\sigma_2-1/2)L_h)^{-1}} \le e^{2\varepsilon T/(1-\varepsilon\tau)}\mathcal{N}^2(v^0)$$

$$+ (4\varepsilon^2)^{-1}\left(e^{2\varepsilon T/(1-\varepsilon\tau)} - 1\right)\max_j \|f^j\|^2_{(I-(\tau^2/2)(\sigma_1+\sigma_2-1/2)L_h)^{-1}}. \tag{20}$$

Dobijena nejednakost izvedena je pod pretpostavkom pozitivne definisanosti operatora $I - (\tau^2/2)(\sigma_1 + \sigma_2 - 1/2)L_h$. U slučaju kada je $\sigma_1 + \sigma_2 - 1/2 \ge 0$ ovaj operator je pozitivno definisan bez obzira kakvo je τ. U ovom slučaju je:

$$\|f^j\|_{(I-(\tau^2/2)(\sigma_1+\sigma_2-1/2)L_h)^{-1}} \le \|f^j\|,$$

pa iz (20) dalje dobijamo:

$$\mathcal{N}^2(v^k) \le e^{2\varepsilon T/(1-\varepsilon\tau)}\mathcal{N}^2(v^0) + (1/(4\varepsilon^2))\left(e^{2\varepsilon T/(1-\varepsilon\tau)} - 1\right)\max_j \|f^j\|. \tag{21}$$

U slučaju kada je $\sigma_1 + \sigma_2 - 1/2 < 0$ iz (3.16) dobijamo:

$$((I - (\tau^2/2)(\sigma_1 + \sigma_2 - 1/2)L_h)v, v) \ge [1 + (\tau^2/2)(\sigma_1 + \sigma_2 - 1/2)c_1 h^{-2}]\|v\|^2,$$

odakle sledi da je operator $I - (\tau^2/2)(\sigma_1 + \sigma_2 - 1/2)L_h$ pozitivno definisan za:

$$\tau < [2c_1^{-1}(1/2 - \sigma_1 - \sigma_2)^{-1}]^{1/2}h. \tag{22}$$

Rezimirajući izloženo možemo zaključiti da je za $\sigma_1 \ge \sigma_2$ i $\sigma_1 + \sigma_2 \ge 1/2$ shema (19) apsolutno stabilna i važi ocena (21), dok je za $\sigma_1 \ge \sigma_2$ i $\sigma_1 + \sigma_2 < 1/2$ shema (19) uslovno stabilna pri ispunjenom uslovu (22) i važi ocena (20).

Brzina konvergencije sheme (19) je za $\sigma_1 = \sigma_2$ ista kao kod eksplicitne sheme, dok je za $\sigma_1 \ne \sigma_2$ sporija (u formulama se javlja τ umesto τ^2).

c. Shema promenljivih pravaca. Slično kao u paraboličkom slučaju i za neke hiperboličke probleme se mogu konstruisati diferencijske sheme promenljivih pravaca koje su ekonomične i apsolutno stabilne (videti Samarski [1964], Douglas, Gunn [1964]).

Neka se na primer u oblasti $\overline{\Omega} \times [0,T]$, gde je $\overline{\Omega} = [0,l] \times [0,l]$, traži rešenje sledećeg mešovitog problema:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f, \quad L = L_1 + L_2, \quad L_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \\ u\big|_{\Gamma\times[0,T]} = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_0, \quad \partial u/\partial t\big|_{t=0} = u_1.\end{gathered} \tag{23}$$

Neka je dalje $f = f(x_1, x_2, t)$, $a_i = a_i(x_i) \geq c_0 > 0$. Smatraćemo da je funkcija f neprekidna, a da su a_i diferencijabilne.

Kao i obično, uvedimo mreže $\overline{\Omega}_h = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_h$, $\overline{\omega}_\tau$ i $\overline{\Omega}_{h,\tau} = \overline{\Omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ i prostor $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_h$ funkcija definisanih na $\overline{\Omega}_h$ i jednakih nuli na Γ_h. Sa $t_{j+1/2} = t_j + (\tau/2)$ označimo pomoćne vremenske slojeve. Aditivna shema promenljivih pravaca za zadatak (23) glasi:

$$\begin{aligned} \frac{v^{j+1/2} - 2v^j + v^{j-1/2}}{(\tau/2)^2} &= L_{1h}(v^{j+1/2} + v^{j-1/2}) + f_1^j, \\ \frac{v^{j+1} - 2v^{j+1/2} + v^j}{(\tau/2)^2} &= L_{2h}(v^{j+1} + v^j) + f_2^{j+1/2}, \end{aligned} \tag{24}$$

gde su operatori $L_{i,h}$ definisani sa:

$$L_{i,h} = (1/2)\big[(a_i v_{\bar{x}_i})_{x_i} + (a_i v_{x_i})_{\bar{x}_i}\big], \quad i = 1, 2,$$

a f_1 i f_2 su proizvoljne neprekidne funkcije takve da je $f_1 + f_2 = 2f$. Granične i početne uslove aproksimiramo kao u prethodnim slučajevima sa:

$$\begin{aligned} v^j\big|_{\Gamma_h} &= v^{j+1/2}\big|_{\Gamma_h} = 0, \quad v^0 = u_0, \\ v^{1/2} &= u_0 + (\tau/2)u_1 + (\tau^2/8)(Lu_0 + f^0) \end{aligned} \tag{25}$$

(ili $v^{1/2} = u_0 + (\tau/2)u_1 + (\tau^2/8)(L_h u_0 + f^0)$). Operatori $L_{i,h}$ su međusobno komutativni, samokonjugovani, negativno definisani i zadovoljvaju nejednakosti:

$$-c_1 h^{-2}\|v\|^2 \leq (L_{ih} v, v) \leq -4c_0 l^{-2}\|v\|^2.$$

Obe jednačine u (24) su jednodimenzione na gornjem sloju pa je znači shema ekonomična.

Ispitajmo stabilnost sheme (24). Prvu jednačinu u (24) pomnožimo skalarno sa $v^{j+1/2} - v^{j-1/2}$, a drugu sa $v^{j+1} - v^j$, dobijene rezultate sumirajmo po j i sve saberimo. Tako dobijamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2(v^k) \equiv \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{v^{k+1} - v^{k+1/2}}{\tau/2}\right\|^2 + \left\|\frac{v^{k+1/2} - v^k}{\tau/2}\right\|^2\right) + \|v^{k+1/2}\|^2_{(-L_{1,h})} \\ + \frac{1}{2}\left(\|v^{k+1}\|^2_{(-L_{2,h})} + \|v^k\|^2_{(-L_{2,h})}\right) = \left\|\frac{v^{1/2} - v^0}{\tau/2}\right\|^2 \\ + \|v^{1/2}\|^2_{(-L_{1h})} + \|v^0\|^2_{(-L_{2h})} + \sum_{j=1}^{k}(f_1^j, v^{j+1/2} - v^{j-1/2}) \\ + \sum_{j=0}^{k-1}(f_2^{j+1/2}, v^{j+1} - v^j) + \frac{1}{2}(f_2^{k+1/2}, v^{k+1} - v^k). \end{aligned}$$

Neposredno se proverava da veličina $\mathcal{N}(v^k) = [\mathcal{N}^2(v^k)]^{1/2}$ predstavlja normu u prostoru uređenih trojki $(v^k, v^{k+1/2}, v^{k+1})$. Posle sređivanja, poslednju jednakost možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^2(v^k) &= \left\|\frac{v^{1/2}-v^0}{\tau/2}\right\|^2 + \|v^{1/2}\|^2_{(-L_{1h})} + \|v^0\|^2_{(-L_{2h})}\\ &+ \frac{\tau}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\left[\left(f_1^{j+1} + f_2^{j+1/2}, \frac{v^{j+1}-v^{j+1/2}}{\tau/2}\right) + \left(f_1^j + f_2^{j+1/2}, \frac{v^{j+1/2}-v^j}{\tau/2}\right)\right]\\ &+ \frac{\tau}{2}\left[\left(f_1^k + \frac{1}{2}f_2^{k+1/2}, \frac{v^{k+1/2}-v^k}{\tau/2}\right) + \left(\frac{1}{2}f_2^{k+1/2}, \frac{v^{k+1}-v^{k+1/2}}{\tau/2}\right)\right]\\ &\qquad - \frac{\tau}{2}\left(f_1^0, \frac{v^{1/2}-v^0}{\tau/2}\right).\end{aligned}$$

Ocenjujući skalarne proizvode pomoću ε-nejednakosti (1.9) dalje dobijamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^2(v^k) &\le (\varepsilon/2)\tau\sum_{j=0}^{k-1}\mathcal{N}^2(v^j) + 1/(2\varepsilon)(\tau/2)\sum_{j=0}^{k-1}(\|f_1^{j+1} + f_2^{j+1/2}\|^2\\ &+ \|f_1^j + f_2^{j+1/2}\|^2) + (\varepsilon_1/2)\tau\mathcal{N}^2(v^k) + 1/(2\varepsilon_1)(\tau/2)(\|f_1^k + (1/2)f_2^{k+1/2}\|^2\\ &+ \|(1/2)f_2^{k+1/2}\|^2) + (\varepsilon_2/2)(\tau/2)\|(v^{1/2}-v^0)/(\tau/2)\|^2 + 1/(2\varepsilon_2)(\tau/2)\|f_1^0\|^2\\ &\qquad + \|(v^{1/2}-v^0)/(\tau/2)\|^2 + \|v^{1/2}\|^2_{(-L_{1h})} + \|v^0\|^2_{(-L_{2h})}.\end{aligned}$$

Stavljajući $\varepsilon_1 = 1/\tau$, $\varepsilon_2 = 4/\tau$ i sređujući, dobijamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(v^k) &\le \varepsilon\tau\sum_{j=0}^{k-1}\mathcal{N}^2(v^j) + \frac{\tau}{2\varepsilon}\sum_{j=0}^{k-1}(\|f_1^{j+1} + f_2^{j+1/2}\|^2\\ &+ \|f_1^j + f_2^{j+1/2}\|^2) + (\tau^2/2)(\|f_1^k + (1/2)f_2^{k+1/2}\|^2 + \|(1/2)f_2^{k+1/2}\|^2)\\ &+ (\tau^2/8)\|f_1^0\|^2 + 4\|(v^{1/2}-v^0)/(\tau/2)\|^2 + 2\|v^{1/2}\|^2_{(-L_{1h})} + 2\|v^0\|^2_{(-L_{2h})}\\ &\le \varepsilon\tau\sum_{j=0}^{k-1}\mathcal{N}^2(v^j) + F,\end{aligned}$$

gde je:

$$\begin{aligned}F &= (T/(2\varepsilon))(\max_j \|f_1^{j+1} + f_2^{j+1/2}\|^2 + \max_j \|f_1^j + f_2^{j+1/2}\|^2)\\ &+ (\tau^2/4)(\max_j \|f_1^j + (1/2)f_2^{j+1/2}\|^2 + \max_j \|(1/2)f_2^{j+1/2}\|^2) + (\tau^2/8)\|f_1^0\|^2\\ &\qquad + 4\|(v^{1/2}-v^0)/(\tau/2)\|^2 + 2\|v^{1/2}\|^2_{(-L_{1h})} + 2\|v^0\|^2_{(-L_{2h})}.\end{aligned}$$

Primenom leme 1 iz poslednje nejednakosti dobijamo:

$$\mathcal{N}^2(v^k) \leq F + \varepsilon k\tau e^{\varepsilon k\tau} F \leq \left(1 + \varepsilon T e^{\varepsilon T}\right) F. \tag{26}$$

Nejednakost (26) označava stabilnost diferencijske sheme (24) u normi $\mathcal{N}(v^k)$.

Ispitajmo konvergenciju naše sheme. Označavajući sa $z = u - v$ razliku rešenja zadataka (23) i (24)–(25) dobijamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{z^{j+1/2} - 2z^j + z^{j-1/2}}{(\tau/2)^2} = L_{1h}(z^{j+1/2} + z^{j-1/2}) + \psi_1^j,\\
&\frac{z^{j+1} - 2z^{j+1/2} + z^j}{(\tau/2)^2} = L_{2h}(z^{j+1} + z^j) + \psi_2^{j+1/2},\\
&z^j\big|_{\Gamma_h} = z^{j+1/2}\big|_{\Gamma_h} = 0, \quad z^0 = 0, \quad z^{1/2} = u^{1/2} - v^{1/2} = O(\tau^3),
\end{aligned} \tag{27}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
\psi_1^j = \psi_{1,0}^j + \psi_{1,1}^j &= (\partial^2 u/\partial t^2 - 2L_1 u - f_1)^j\\
&+ \left[(u^{j+1/2} - 2u^j + u^{j-1/2})/(\tau/2)^2 - (\partial^2 u/\partial t^2)^j\right.\\
&\left.+ 2L_1 u^j - L_{1h}(u^{j+1/2} + u^{j-1/2})\right]\\
&= O(1) + O(\tau^2 + h^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2^{j+1/2} = \psi_{2,0}^{j+1/2} + \psi_{2,1}^{j+1/2} &= (\partial^2 u/\partial t^2 - 2L_2 u - f_2)^{j+1/2}\\
&+ \left[(u^{j+1} - 2u^{j+1/2} + u^j)/(\tau/2)^2 - (\partial^2 u/\partial t^2)^{j+1/2}\right.\\
&\left.+ 2L_2 u^{j+1/2} - L_{2h}(u^{j+1} + u^j)\right]\\
&= O(1) + O(\tau^2 + h^2) = -\psi_{1,0}^{j+1/2} + O(\tau^2 + h^2),
\end{aligned}$$

ako su rešenje u i koeficijenti a_i dovoljno glatke funkcije. Zadatak (27) je istog tipa kao (24)–(25). Lako izračunavamo da je u ovom slučaju $F = O(\tau^2 + h^4)$, pa primenjujući ocenu (26) dobijamo:

$$\mathcal{N}(z^k) = O(\tau + h^2),$$

što predstavlja traženu ocenu brzine konvergencije.

Primedba: Ako iz druge jednačine u (24) izrazimo $v^{j+1/2}$ i zamenimo u prvoj, dobićemo shemu u tzv. faktorizovanom obliku:

$$\begin{aligned}
(I - (\tau^2/4)L_{1h})(I - (\tau^2/4)L_{2h})v_{\bar{t}t}^j &= (L_h + (\tau^2/4)L_{1h}L_{2h})v^j\\
&+ (1/4)(2f_1^j + f_2^{j+1/2} + f_2^{j-1/2}) - (\tau^2/16)L_{1h}(f_2^{j+1/2} + f_2^{j-1/2})
\end{aligned}$$

kod koje je operator uz $v_{\bar{t}t}$ jednak proizvodu dva jednodimenziona operatora. Slične je strukture i shema:

$$(I-\sigma\tau^2 L_{1h})(I-\sigma\tau^2 L_{2h})v^j_{\bar{t}t} = L_h v^j + f^j. \tag{28}$$

Lako se pokazuje da je shema (28) apsolutno stabilna za $\sigma \geq 1/4$. Ona je takođe i ekonomična. Za izračunavanje v^{j+1} iz (28) treba rešiti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{aligned}(I-\sigma\tau^2 L_{1h})(I-\sigma\tau^2 L_{2h})v^{j+1} &= F^j \equiv \\ &\equiv (I-\sigma\tau^2 L_{1h})(I-\sigma\tau^2 L_{2h})(2v^j - v^{j-1}) + \tau^2(L_h v^j + f^j).\end{aligned}$$

Ovaj zadatak možemo rastaviti na dva na sledeći način:

$$\begin{aligned}(I-\sigma\tau^2 L_{1h})w^j &= F^j, \\ (I-\sigma\tau^2 L_{2h})v^{j+1} &= w^j.\end{aligned}$$

Odavde je ekonomičnost očigledna, jer operatorima $I-\sigma\tau^2 L_{1h}$ i $I-\sigma\tau^2 L_{2h}$ odgovaraju matrice koje se mogu dovesti na trodijagonalni oblik.

d. Aditivna shema za jednačinu četvrtog reda. Neka se u oblasti $\bar{\Omega}\times[0,T]$, gde je $\bar{\Omega}=[0,l]\times[0,l]$, traži rešenje zadatka:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u = f, \quad \Delta^2 = \Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}, \\ u\big|_{\Gamma\times[0,T]} = \partial u/\partial\nu\big|_{\Gamma\times[0,T]} = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_0, \quad \partial u/\partial t\big|_{t=0} = u_1.\end{gathered} \tag{29}$$

Sa ν je obeležena spoljna normala na $\Gamma\times[0,T]$. Za funkciju $f = f(x_1,x_2,t)$ smatraćemo da je neprekidna, kao i $u_0 = u_0(x_1,x_2)$ i $u_1 = u_1(x_1,x_2)$.

U radu autora [1977a] konstruisana je aditivna shema promenljivih pravaca za rešavanje ovog zadatka. Uvedimo mrežu $\bar{\Omega}_{h,\tau} = \bar{\Omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, gde je $\bar{\Omega}_h$ definisana kao u §2.2.g, a $\bar{\omega}_\tau$ je obična ravnomerna mreža na intervalu $[0,T]$ s korakom $\tau = T/M$. Sa $\mathcal{L}_h$ označimo skup funkcija v definisanih na $\bar{\Omega}_h$ i parno produženih preko granice Γ_h za koje je:

$$\begin{gathered}v = 0, \quad (x_1,x_2)\in\Gamma_h \quad \text{i} \\ v_{-1,m} = v_{1,m}, \quad v_{N+1,m} = v_{N-1,m}, \quad v_{i,-1} = v_{i,1}, \quad v_{i,N+1} = v_{i,N-1}.\end{gathered} \tag{30}$$

Skalarni proizvod i normu uvodimo u $\mathcal{L}_h$ na uobičajen način sa (2.59). Operator Δ_h^2 definisan sa:

$$\Delta_h^2 v = v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} + 2v_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} + v_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2}$$

je samokonjugovan i pozitivno definisan na $\mathcal{L}_h$. Lako se proverava da je:

$$(\Delta_h^2 v, v) = \|\Delta_h v\|^2 + 2h^{-2}\sum_{i=1}^{N-1}(v_{1i}^2 + v_{N-1,i}^2 + v_{i1}^2 + v_{i,N-1}^2),$$

odakle sledi:

$$16^2 l^{-4}\|v\|^2 \leq (\Delta_h^2 v, v) \leq 68h^{-4}\|v\|^2.$$

Usled toga će eksplicitna shema s operatorom Δ_h^2 biti stabilna u slučaju kada je $1-(\tau^2/4)68h^{-4} > 0$ tj. za:

$$\tau < h^2/\sqrt{17}.$$

Ovo je veoma jako ograničenje na korak po vremenu τ. Zato se postavlja problem konstruisanja diferencijske sheme za rešavanje zadatka (29) koja bi bila apsolutno stabilna i ekonomična.

Rešenje postavljenog zadatka daje diferencijska shema:

$$\begin{aligned} &\frac{v^{j+1/2}-2v^j+v^{j-1/2}}{(\tau/2)^2} + (v^{j+1/2}+v^{j-1/2})_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_1x_1} + 2v^j_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2} = f_1^j, \\ &\frac{v^{j+1}-2v^{j+1/2}+v^j}{(\tau/2)^2} + (v^{j+1}+v^j)_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2} + 2v^{j+1/2}_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2} = f_2^{j+1/2}, \end{aligned} \tag{31}$$

gde su f_1 i f_2 proizvoljne neprekidne funkcije takve da je $f_1+f_2=2f$. Granični uslovi se zadaju sa (30), a početni sa:

$$v^0 = u_0, \quad v^{1/2} = u_0 + (\tau/2)u_1 - (\tau^2/8)(\Delta^2 u_0 - f^0).$$

Obe jednačine u (31) su jednodimenzione na gornjem sloju i odgovaraju im matrice koje se mogu dovesti na petodijagonalni oblik. Prema tome, naša shema je ekonomična.

Da bismo ispitali stabilnost sheme (31) pomnožimo skalarno prvu jednačinu sa $v^{j+1/2}-v^{j-1/2}$, drugu sa $v^{j+1}-v^j$ sumirajmo po $\supset$ i saberimo rezultate. Tako dobijamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2(v^k) &\equiv (1/2)\left(\|(v^{k+1}-v^{k+1/2})/(\tau/2)\|^2 + \|(v^{k+1/2}-v^k)/(\tau/2)\|^2\right) + \|v^{k+1/2}_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2 \\ &\quad + 2\left(v^{k+1/2}_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}, (v^k+v^{k+1})/2\right) + (1/2)\left(\|v^k_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2 + \|v^{k+1}_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2\right) \\ &= \|(v^{1/2}-v^0)/(\tau/2)\|^2 + \|v^{1/2}_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2 + 2(v^{1/2}_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}, v^0) + \|v^0_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k}(f_1^j, v^{j+1/2}-v^{j-1/2}) + \sum_{j=0}^{k-1}(f_2^{j+1/2}, v^{j+1}-v^j) + (1/2)(f_2^{k+1/2}, v^{k+1}-v^k), \end{aligned} \tag{32}$$

gde je $\|w\|_0^2 = \|w^2\| + (h^2/2)\sum_{x\in\Gamma_h} w^2(x)$. Dalje je

$$\|v_{\bar{x}_1x_1}\|_0^2 + 2(v_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}, w) + \|w_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2 = \|v_{\bar{x}_1x_1} + w_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2 \quad \text{i}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2(v^k) = (1/2)\Big(&\|(v^{k+1}-v^{k+1/2})/(\tau/2)\|^2 + \|(v^{k+1/2}-v^k)/(\tau/2)\|^2 \\ &+ \|v^{k+1/2}_{\bar{x}_1x_1} + v^{k+1}_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2 + \|v^{k+1/2}_{\bar{x}_1x_1} + v^k_{\bar{x}_2x_2}\|_0^2\Big). \end{aligned}$$

Odatle sledi da je $\mathcal{N}(v^k) = \sqrt{\mathcal{N}^2(v^k)}$ norma u prostoru uređenih trojki $(v^k, v^{k+1/2}, v^{k+1})$. Jednakost (32) možemo transformisati na sledeći način:

$$\mathcal{N}^2(v^k) = \left\| \frac{v^{1/2} - v^0}{\tau/2} \right\|^2 + \|v^{1/2}_{\bar{x}_1 x_1} + v^0_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2$$
$$+ \frac{\tau}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\left\{\left(f_1^{j+1} + f_2^{j+1/2}, \frac{v^{j+1} - v^{j+1/2}}{\tau/2}\right) + \left(f_1^j + f_2^{j+1/2}, \frac{v^{j+1/2} - v^j}{\tau/2}\right)\right\}$$
$$+ \frac{\tau}{2}\left\{\left(f_1^k + \frac{1}{2}f_2^{k+1}, \frac{v^{k+1/2} - v^k}{\tau/2}\right) + \left(\frac{1}{2}f_2^{k+1/2}, \frac{v^{k+1} - v^{k+1/2}}{\tau/2}\right)\right\}$$
$$- \frac{\tau}{2}\left(f_1^0, \frac{v^{1/2} - v^0}{\tau/2}\right).$$

Odatle, na isti način kao u slučaju sheme (24), dobijamo ocene:

$$\mathcal{N}^2(v^k) \le \varepsilon\tau\sum_{j=0}^{k-1}\mathcal{N}^2(v^j) + F,$$

gde je

$$F = (T/(2\varepsilon))\Big(\max_j \|f_1^{j+1} + f_2^{j+1/2}\|^2 + \max_j \|f_1^j + f_2^{j+1/2}\|^2\Big)$$
$$+ (\tau^2/2)\Big(\max_j \|f_1^j + (1/2)f_2^{j+1/2}\|^2 + \max_j \|(1/2)f_2^{j+1/2}\|^2\Big)$$
$$+ (\tau^2/2)\|f_1^0\|^2 + 4\|(v^{1/2} - v^0)/(\tau/2)\|^2 + 2\|v^{1/2}_{\bar{x}_1 x_1} + v^0_{\bar{x}_2 x_2}\|_0^2$$

i:

$$\mathcal{N}^2(v^k) \le F + \varepsilon k\tau e^{\varepsilon k\tau}F \le \big(1 + \varepsilon T e^{\varepsilon T}\big)F. \tag{33}$$

Prema tome, diferencijska shema (31) je apsolutno stabilna u normi $\mathcal{N}(v^k)$.

Pređimo sada na ispitivanje konvergencije naše sheme. Greška $z^j = u^j - v^j$ ne pripada prostoru $\mathcal{L}_h$ jer ne zadovoljava granične uslove (30): $z^j|_{\Gamma_h} = 0$, ali je

$$z^j_{-1.i} - z^j_{1.i},\ z^j_{N+1.i} - z^j_{N-1.i},\ z^j_{i.-1} - z^j_{i.1},\ z^j_{i.N+1} - z^j_{i.N-1} = O(h^3).$$

Zato uvedimo popravku, kao u paragrafu 2.2.g:

$$z = \zeta + \eta \quad \text{gde je} \quad \eta = \eta_1 + \eta_2,$$

$$(\eta_1)_{im} = \frac{ih(l - ih)}{l(l^2 + 2h^2)}\{\alpha_m[(l - ih)^2 - h^2] - \beta_m[(ih)^2 - h^2]\}, \quad m = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$\alpha_m = (z_{1m} - z_{-1.m})/(2h), \quad \beta_m = (z_{N+1.m} - z_{N-1.m})/(2h),$$
$$\eta_1^j|_{\Gamma_h} = 0, \quad (\eta_1)_{i.-1} = (\eta_1)_{i.1}, \quad (\eta_1)_{i.N+1} = (\eta_1)_{i.N-1},$$

$$(\eta_2)_{im} = \frac{mh(l-mh)}{l(l^2+2h^2)}\{\gamma_i[(l-mh)^2-h^2]-\delta_i[(mh)^2-h^2]\}, \quad i=1,2,\dots,N-1,$$
$$\gamma_i = (z_{i1}-z_{i,-1})/(2h), \quad \delta_i = (z_{i,N+1}-z_{i,N-1})/(2h),$$
$$\eta_2^j\big|_{\Gamma_h} = 0, \quad (\eta_2)_{-1,m} = (\eta_2)_{1,m}, \quad (\eta_2)_{N+1,m} = (\eta_2)_{N-1,m}.$$

Funkcija ζ^j pripada prostoru $\mathcal{L}_h$, a η zadovoljava uslove: η, $\eta_{\bar{x}_ix_i}$, $\eta_{t\bar{x}_ix_i}$, $\eta_{\bar{t}t} = O(h^2)$ (pod pretpostavkom dovoljne glatkosti u) . Dalje je:

$$\begin{aligned}&\frac{\zeta^{j+1/2}-2\zeta^j+\zeta^{j-1/2}}{(\tau/2)^2}+(\zeta^{j+1/2}+\zeta^{j-1/2})_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_1x_1}+2\zeta^j_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}=\psi_1^j,\\&\frac{\zeta^{j+1}-2\zeta^{j+1/2}+\zeta^j}{(\tau/2)^2}+(\zeta^{j+1}+\zeta^j)_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}+2\zeta^{j+1/2}_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}=\psi_2^{j+1/2},\end{aligned} \tag{34}$$

gde je:

$$\begin{aligned}\psi_1^j &= \psi_{1,0}^j+\psi_{1,1}^j+\psi_{1,2}^j = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}-f_1\right)^j\\&+\Bigg[\frac{u^{j+1/2}-2u^j+u^{j-1/2}}{(\tau/2)^2}-\frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2}+(u^{j+1/2}+u^{j-1/2})_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_1x_1}\\&-2\frac{\partial^4 u^j}{\partial x_1^4}+2u^j_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}-2\frac{\partial^4 u^j}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\Bigg]\\&+\left[-\frac{\eta^{j+1/2}-2\eta^j+\eta^{j-1/2}}{(\tau/2)^2}-(\eta^{j+1/2}+\eta^{j-1/2})_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_1x_1}-2\eta^j_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_2^{j+1/2} &= \psi_{2,0}^{j+1/2}+\psi_{2,1}^{j+1/2}+\psi_{2,2}^{j+1/2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}-f_2\right)^{j+1/2}\\&+\Bigg[\frac{u^{j+1}-2u^{j+1/2}+u^j}{(\tau/2)^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}^{j+1/2}+(u^{j+1}+u^j)_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}\\&-2\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}^{j+1/2}+2u^{j+1/2}_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}-2\frac{\partial^4 u^{j+1/2}}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\Bigg]\\&+\left[-\frac{\eta^{j+1}-2\eta^{j+1/2}+\eta^j}{(\tau/2)^2}-(\eta^{j+1}+\eta^j)_{\bar{x}_2x_2\bar{x}_2x_2}-2\eta^{j+1/2}_{\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2}\right].\end{aligned}$$

Vidimo da je $\psi_{1,0} = O(1)$, $\psi_{2,0} = O(1)$ i $\psi_{1,0}+\psi_{2,0} = 0$ (tj. shema (31) ima sumarnu aproksimaciju), dok je $\psi_{1,1}, \psi_{2,1} = O(\tau^2+h^2)$. Početni uslovi su:

$$\zeta^0 = 0, \quad \zeta^{1/2} = u^{1/2}-v^{1/2} = O(\tau^3).$$

Označimo $\zeta = \zeta_1+\zeta_2$, gde je ζ_1 rešenje zadatka (34) sa $\psi_i = \psi_{i,0}+\psi_{i,1}$ i $\zeta_1^{1/2} = \zeta^{1/2}$, ζ_2 rešenje zadatka (34) sa $\psi_i = \psi_{i,2}$ i $\zeta_2^{1/2} = 0$. Primenjujući ocenu (33) na ζ_1 dobijamo:

$$\mathcal{N}(\zeta_1^k) = O(\tau+h^2). \tag{35}$$

Funkciju ζ_2 ocenjujemo na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}^2(\zeta_2^k) &= \sum_{j=1}^{k}(\psi_{1,2}^j, \zeta_2^{j+1/2}-\zeta_2^{j-1/2}) + \sum_{j=0}^{k-1}(\psi_{2,2}^{j+1/2}, \zeta_2^{j+1}-\zeta_2^j) + \tfrac{1}{2}(\psi_{2,2}^{k+1/2}, \zeta_2^{k+1}-\zeta_2^k)\\
&= -\frac{\tau}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\Bigg[\left(\frac{\eta^{j+3/2}-\eta^{j+1}-\eta^{j+1/2}+\eta^j}{(\tau/2)^2}, \frac{\zeta_2^j-\zeta_2^{j+1/2}}{\tau/2}\right)\\
&\qquad\left(\frac{\eta^{j+1}-\eta^{j+1/2}-\eta^j+\eta^{j-1/2}}{(\tau/2)^2}\right)\Bigg]\\
&\quad -\frac{\tau}{4}\left(\frac{\eta^{k+1}-2\eta^{k+1/2}+\eta^k}{(\tau/2)^2}, \frac{\zeta_2^{k+1}-\zeta_2^{k+1/2}}{\tau/2}\right)\\
&\quad -\frac{\tau}{4}\left(\frac{\eta^{k+1}-3\eta^k+2\eta^{k-1/2}}{(\tau/2)^2}, \frac{\zeta_2^{k+1/2}-\zeta_2^k}{\tau/2}\right)\\
&+\tau\sum_{j=0}^{k-1}\Bigg[\left(\zeta_{2,\bar x_1x_1}^{j+1/2}+\zeta_{2,\bar x_2x_2}^{j+1}, \left(\frac{\eta^{j+3/2}-\eta^{j+1/2}}{\tau}\right)_{\bar x_1x_1}+\left(\frac{\eta^{j+1}-\eta^j}{\tau}\right)_{\bar x_2x_2}\right)_0\\
&+\left(\zeta_{2,\bar x_1x_1}^{j+1/2}+\zeta_{2,\bar x_2x_2}^{j}, \left(\frac{\eta^{j+1/2}-\eta^{j-1/2}}{\tau}\right)_{\bar x_1x_1}+\left(\frac{\eta^{j+1}-\eta^j}{\tau}\right)_{\bar x_2x_2}\right)_0\Bigg]\\
&\quad -\left(\zeta_{2,\bar x_1x_1}^{k+1/2}+\zeta_{2,\bar x_2x_2}^{k+1}, \eta_{\bar x_1x_1}^{k+1/2}+\left(\frac{\eta^{k+1}+\eta^k}{2}\right)_{\bar x_2x_2}\right)_0\\
&\quad -\left(\zeta_{2,\bar x_1x_1}^{k+1/2}+\zeta_{2,\bar x_2x_2}^{k}, \eta_{\bar x_1x_1}^{k-1/2}+\left(\frac{-\eta^{k+1}+3\eta^k}{2}\right)_{\bar x_2x_2}\right)_0\\
&\quad \le \varepsilon_1\frac{\tau}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\left\|\frac{\zeta_2^{j+1}-\zeta_2^{j+1/2}}{(\tau/2)}\right\|^2+\left\|\frac{\zeta_2^{j+1/2}-\zeta_2^j}{(\tau/2)}\right\|^2\right)\\
&\quad +\varepsilon_2\left(\|(\zeta_2^{k+1}-\zeta_2^{k+1/2})/(\tau/2)\|^2+\|(\zeta_2^{k+1/2}-\zeta_2^k)/(\tau/2)\|^2\right)\\
&\quad +\varepsilon_3\tau\sum_{j=0}^{k-1}\left(\|\zeta_{2,\bar x_1x_1}^{j+1/2}+\zeta_{2,\bar x_2x_2}^{j+1}\|_0^2+\|\zeta_{2,\bar x_1x_1}^{j+1/2}+\zeta_{2,\bar x_2x_2}^{j}\|_0^2\right)\\
&\quad +\varepsilon_4\left(\|\zeta_{2,\bar x_1x_1}^{k+1/2}+\zeta_{2,\bar x_2x_2}^{k+1}\|_0^2+\|\zeta_{2,\bar x_1x_1}^{k+1/2}+\zeta_{2,\bar x_2x_2}^{k}\|_0^2\right)\\
&\qquad\qquad +\left((k\tau/\varepsilon_1+\tau^2/\varepsilon_2+k\tau/\varepsilon_3+1/\varepsilon)\right)\cdot O(h^4).
\end{aligned}
$$

Birajući $\varepsilon_2=\varepsilon_4=1/4$ i $\varepsilon_1=2\varepsilon_3=\varepsilon/2$ dobijamo:

$$\mathcal{N}^2(\zeta_2^k)\le(1/2)\mathcal{N}^2(\zeta_2^k)+(\varepsilon/2)\tau\sum_{j=0}^{k-1}\mathcal{N}^2(\zeta_2^j)+O(h^4)\quad \text{i}$$

$$\mathcal{N}^2(\zeta_2^k)\le\varepsilon\tau\sum_{j=0}^{k-1}\mathcal{N}^2(\zeta_2^j)+O(h^4).$$

Primenom leme 1 odavde dalje dobijamo:

$$\mathcal{N}(\zeta_2^k) = O(h^2). \tag{36}$$

Najzad, iz nejednakosti (35) i (36) dobijamo sledeću ocenu brzine konvergencije diferencijske sheme (31):

$$\mathcal{N}(\zeta^k) = O(h^2 + \tau). \tag{37}$$

U slučaju proizvoljne konveksne oblasti Ω u ravni Ox_1x_2 kada se koristi ravnomerna mreža i granični uslov „prenosi" u čvorove mreže $\overline{\Omega}_{h\tau}$ najbliže bočnom omotaču $\Gamma \times [0,T]$, umesto (37) dobija se ocena:

$$\mathcal{N}(\zeta^k) = O(\sqrt{h} + \tau).$$

3. Elementi opšte teorije stabilnosti troslojnih diferencijskih shema

Slično kao dvoslojne, i troslojne diferencijske sheme se mogu uvesti apstraktno (videti Samarski, Gulin [1973]). Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $t \in [0,T]$ realna promenljiva. Neka su $v = v(t)$, $f = f(t)$, $\ldots$ elementi iz $\mathcal{H}$ i $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(t)$, $\ldots$ linearni operatori koji preslikavaju $\mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$. Na intervalu $[0,T]$ definišimo mrežu $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau \mid j = 0,1,\ldots,M;\ \tau = T/M\}$. Slično kao ranije, umesto $v(t_j), f(t_j), \ldots, \mathcal{A}(t_j), \mathcal{B}(t_j), \ldots$ pisaćemo $v^j, f^j, \ldots, \mathcal{A}^j, \mathcal{B}^j, \ldots$. Troslojnu diferencijsku shemu u prostoru $\mathcal{H}$ definišemo sa:

$$\mathcal{D}^j v^{j-1} + \mathcal{E} v^j + \mathcal{F} v^{j+1} = f^j. \tag{38}$$

Jednakost (38) možemo svesti na kanonski oblik:

$$\mathcal{B}^j v^j_{\overset{\circ}{t}} + \mathcal{C}^j v^j_{\bar{t}t} + \mathcal{A}^j v^j = f^j, \tag{39}$$

stavljajući $\mathcal{A}^j = \mathcal{D}^j + \mathcal{E}^j + \mathcal{F}^j$, $\mathcal{B}^j = \tau(\mathcal{F}^j - \mathcal{D}^j)$ i $\mathcal{C}^j = (\tau^2/2)(\mathcal{D}^j + \mathcal{F}^j)$. Sa $v^j_{\overset{\circ}{t}}$ i $v^j_{\bar{t}t}$ obeleženi su količnici razlika na uobičajen način: $1/(2\tau)(v^{j+1} - v^{j-1})$ i $v^j_{\bar{t}t} = \tau^{-2}(v^{j+1} - 2v^j + v^{j-1})$. U slučaju kada je (39) aproksimacija odgovarajućeg hiperboličkog zadatka (1.34) operator $\mathcal{A}$ aproksimira operator A, operator $\mathcal{C}$ je blizak jediničnom, a operator $\mathcal{B}$ — nultom operatoru. Na primer, eksplicitna shema (13) svodi se na (39) stavljajući $\mathcal{A} = -L_h$, $\mathcal{C} = I$, $\mathcal{B} = 0$. Shema s težinama (19) svodi se na (39) stavljajući $\mathcal{A} = -L_h$, $\mathcal{C} = I - (\tau^2/2)(\sigma_1 + \sigma_2)L_h$, $\mathcal{B} = -\tau(\sigma_1 - \sigma_2)L_h$ itd.

Pre nego što pređemo na ispitivanje stabilnosti diferencijske sheme (39) transformišimo je na sledeći način:

$$\mathcal{B}^j v^j_{\overset{\circ}{t}} + (\mathcal{C}^j - (\tau^2/4)\mathcal{A}^j) v^j_{\bar{t}t} + \mathcal{A}^j (v^{j+1} + 2v^j + v^{j-1})/4 = f^j. \tag{40}$$

Pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ pozitivan operator za $t = t_0, t_1, \ldots, t_M$ da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$ konstatni, samokonjugovani operatori i da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C} - (\tau^2/4)\mathcal{A}$ pozitivno definisani operatori. Množeći skalarno jednakost (40) sa $v^{j+1} - v^{j-1}$ dobijamo:

$$\begin{aligned} 2\tau(\mathcal{B}^j v^j_{\mathring{t}}, v^j_{\mathring{t}}) &+ \|v^j_t\|^2_{\mathcal{C}-(\tau^2/4)\mathcal{A}} - \|v^j_{\bar{t}}\|^2_{\mathcal{C}-(\tau^2/4)\mathcal{A}} \\ &+ \|(v^{j+1} + v^j)/2\|^2_{\mathcal{A}} - \|(v^j + v^{j-1})/2\|^2_{\mathcal{A}} = (f^j, v^{j+1} - v^{j-1}). \end{aligned} \tag{41}$$

Označavajući:

$$\mathcal{N}^2(v^j) = \|v^j_t\|^2_{\mathcal{C}-(\tau^2/4)\mathcal{A}} + \|(v^{j+1} + v^j)/2\|^2_{\mathcal{A}},$$

dobijenu jednakost možemo napisati na sledeći način:

$$2\tau(\mathcal{B}^j v^j_{\mathring{t}}, v^j_{\mathring{t}}) + \mathcal{N}^2(v^j) = \mathcal{N}^2(v^{j-1}) + (f^j, v^{j+1} - v^{j-1}). \tag{42}$$

Pri daljim izvođenjima osnovnu ulogu igra ocena skalarnog proizvoda $(f^j, v^{j+1} - v^{j-1})$. Pretpostavimo da su operatori $\mathcal{B}^j$ samokonjugovani i pozitivno definisani. Tada je:

$$(f^j, v^{j+1} - v^{j-1}) = 2\tau(f^j, v^j_{\mathring{t}}) \le 2\tau\|v^j_{\mathring{t}}\|^2_{\mathcal{B}^j} + (2\tau/4)\|f^j\|^2_{(\mathcal{B}^j)^{-1}}.$$

Zamenjujući u (42) dobijamo:

$$\mathcal{N}^2(v^j) \le \mathcal{N}^2(v^{j-1}) + (\tau/2)\|f^j\|^2_{(\mathcal{B}^j)^{-1}}$$

i, posle sumiranja po j:

$$\mathcal{N}^2(v^k) \le \mathcal{N}^2(v^0) + \frac{\tau}{2}\sum_{j=1}^{k}\|f^j\|^2_{(\mathcal{B}^j)^{-1}} \le \mathcal{N}^2(v^0) + (T/2)\max_j \|f^j\|^2_{(\mathcal{B}^j)^{-1}}.$$

Ako postoji konstanta $\varepsilon > 0$ takva da je za svako j operator $\mathcal{B}^j - \varepsilon I$ nenegativan, možemo izvesti drugu ocenu. Tada je

$$\begin{aligned} (f^j, v^{j+1} - v^{j-1}) &= 2\tau(f^j, v^j_{\mathring{t}}) \\ &\le 2\tau\varepsilon\|v^j_{\mathring{t}}\|^2 + (\tau/(2\varepsilon))\|f^j\|^2 \le 2\tau(\mathcal{B}^j v^j_{\mathring{t}}, v^j_{\mathring{t}}) + (\tau/(2\varepsilon))\|f^j\|^2 \end{aligned}$$

Zamenjujuči u (42) dobijamo

$$\mathcal{N}^2(v^j) \le \mathcal{N}^2(v^{j-1}) + (\tau/2\varepsilon)\|f^j\|^2$$

i posle sumiranja po j:

$$\mathcal{N}^2(v^k) \le \mathcal{N}^2(v^0) + \frac{\tau}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{k}\|f^j\|^2 \le \mathcal{N}^2(v^0) + \frac{T}{2\varepsilon}\max_j \|v^j\|^2.$$

Ako za $\mathcal{B}^j$ pretpostavimo samo da su nenegativni, ocena se izvodi na drugi način:

$$(f^j, v^{j+1} - v^{j-1}) = \tau(f^j, v_t^j) + \tau(f^j, v_{\bar{t}}^j)$$
$$\leq \varepsilon\tau\|v_t^j\|^2_{\mathcal{C}-(\tau^2/4)\mathcal{A}} + \varepsilon\tau\|v_t^{j-1}\|^2_{\mathcal{C}-(\tau^2/4)\mathcal{A}} + (2\tau/(4\varepsilon))\|f^j\|^2_{(\mathcal{C}-(\tau^2/4)\mathcal{A})^{-1}}$$
$$\leq \varepsilon\tau\mathcal{N}^2(v^j) + \varepsilon\tau\mathcal{N}^2(v^{j-1}) + (\tau/2\varepsilon)\|f^j\|^2_{(\mathcal{C}-(\tau^2/4)\mathcal{A})^{-1}},$$

gde je $\varepsilon = \text{const} > 0$. Iz dobijene nejednakosti i iz (42) dobijamo, uzimajući u obzir da je $(\mathcal{B}^j v_{\mathring{t}}^j, v_{\mathring{t}}^j) \geq 0$:

$$\mathcal{N}^2(v^j) \leq (1 + \varepsilon\tau)(1 - \varepsilon\tau)^{-1}\mathcal{N}^2(v^{j-1}) + \tau/(2\varepsilon(1 - \varepsilon\tau))\|f^j\|^2_{(\mathcal{C}-(\tau^2/4)\mathcal{A})^{-1}}$$

i posle sumiranja po j:

$$\mathcal{N}^2(v^k) \leq e^{2\varepsilon T/(1-\varepsilon\tau)}\mathcal{N}^2(v^0) + (1/(4\varepsilon^2))\big(e^{2\varepsilon T/(1-\varepsilon\tau)} - 1\big)\max_j \|f^j\|^2_{(\mathcal{C}-(\tau^2/4)\mathcal{A})^{-1}}.$$

Izvešćemo još jednu ocenu pod istom pretpostavkom. Skalarni proizvod $(f^j, v^{j+1} - v^{j-1})$ možemo transformisati na sledeći način:

$$(f^j, v^{j+1} - v^{j-1}) = 2(f^j, (v^{j+1} + v^j)/2) - 2(f^{j-1}, (v^j + v^{j-1})/2)$$
$$- 2\tau((f^j - f^{j-1})/\tau, (v^j + v^{j-1})/2).$$

Zamenjujući dobijeni izraz u (42) i sumirajući po j dobijamo:

$$\mathcal{N}^2(v^k) \leq \mathcal{N}^2(v^0) + 2(f^k, (v^{k+1} + v^k)/2) - 2(f^0, (v^1 + v^0)/2)$$
$$- 2\tau\sum_{j=0}^{k-1}(f_t^j, (v^{j+1} + v^j)/2)$$
$$\leq \mathcal{N}^2(v^0) + \varepsilon_1\|(v^{k+1} + v^k)/2\|^2_{\mathcal{A}} + (1/\varepsilon_1)\|f^k\|^2_{\mathcal{A}^{-1}}$$
$$+ \varepsilon_2\|(v^1 + v^0)/2\|^2_{\mathcal{A}} + (1/\varepsilon_2)\|f^0\|^2_{\mathcal{A}^{-1}}$$
$$+ \varepsilon_3\tau\sum_{j=0}^{k-1}\|(v^{j+1} + v^j)/2\|^2_{\mathcal{A}} + (\tau/\varepsilon_3)\sum_{j=0}^{k-1}\|f_t^j\|^2_{\mathcal{A}^{-1}}$$
$$\leq \varepsilon_1\mathcal{N}^2(v^k) + (1 + \varepsilon_2)\mathcal{N}^2(v^0) + (1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2)\max_j \|f^j\|^2_{\mathcal{A}^{-1}}$$
$$+ (T/\varepsilon_3)\max_j \|f_t^j\|^2_{\mathcal{A}^{-1}} + \varepsilon_3\tau\sum_{j=0}^{k-1}\mathcal{N}^2(v^j).$$

Birajući na primer $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1/2$ odatle sledi:

$$\mathcal{N}^2(v^k) \leq 3\mathcal{N}^2(v^0) + 8\max_j \|f^j\|^2_{\mathcal{A}^{-1}} + 4T\max_j \|f_t^j\|^2_{\mathcal{A}^{-1}} + \tau\sum_{j=0}^{k-1}\mathcal{N}^2(v^j).$$

Primenjujući lemu 1 dobijamo ocenu:

$$\mathcal{N}^2(v^k) \le M_1\mathcal{N}^2(v^0) + M_2 \max_j \|f^j\|^2_{\mathcal{A}^{-1}} + M_3 \max_j \|f^j_t\|^2_{\mathcal{A}^{-1}},$$

gde je $M_1 = 3(1+Te^T)$, $M_2 = 8(1+Te^T)$ i $M_3 = 4T(1+Te^T)$.

U slučaju kada operatori $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$ zavise od t ocene se usložnjavaju. Pretpostavimo da operator $\mathcal{A}$ zadovoljava Lipschitzov uslov:

$$\big|([\mathcal{A}(t+\tau) - \mathcal{A}(t)]v, v)\big| \le c\tau(\mathcal{A}(t)v, v), \quad c = \text{const} > 0, \tag{43}$$

što je analog uslova (1.36) ograničenosti operatora $dA(t)/dt$. Iz (43) sledi:

$$(1 - c\tau)\|v\|^2_{\mathcal{A}^j} \le \|v\|^2_{\mathcal{A}^{j+1}} \le (1 + c\tau)\|v\|^2_{\mathcal{A}^j}.$$

Umesto (41) dobijamo:

$$\begin{aligned}2\tau(\mathcal{B}^j v^j_{\mathring{t}}, v^j_{\mathring{t}}) &+ \|v^j_t\|^2_{\mathcal{C}^j-(\tau^2/4)\mathcal{A}^j} - \|v^j_{\bar{t}}\|^2_{\mathcal{C}^j-(\tau^2/4)\mathcal{A}^j} \\ &+ \|(v^{j+1}+v^j)/2\|^2_{\mathcal{A}^j} - \|(v^j+v^{j-1})/2\|^2_{\mathcal{A}^j} = (f^j, v^{j+1} - v^{j-1})\end{aligned}$$

ili:

$$\begin{aligned}2\tau(\mathcal{B}^j v^j_{\mathring{t}}, v^j_{\mathring{t}}) + \overline{\mathcal{N}}^2(v^j) &= \|v^j_{\bar{t}}\|^2_{\mathcal{C}^j-(\tau^2/4)\mathcal{A}^j} \\ &+ \|(v^j+v^{j-1})/2\|^2_{\mathcal{A}^j} + (f^j, v^{j+1} - v^{j-1}),\end{aligned} \tag{44}$$

gde je označeno:

$$\overline{\mathcal{N}}^2(v^j) = \|v^j_t\|^2_{\mathcal{C}^j-(\tau^2/4)\mathcal{A}^j} + \|(v^{j+1}+v^j)/2\|^2_{\mathcal{A}^j}.$$

Tako se pored ocene skalarnog prouzvoda $(f^j, v^{j+1} - v^{j-1})$ nameće zadatak ocene izraza $\|v^j_{\bar{t}}\|^2_{\mathcal{C}^j-(\tau^2/4)\mathcal{A}^j} + \|(v^j+v^{j-1})/2\|^2_{\mathcal{A}^j}$.

Ako pretpostavimo da i operator $\mathcal{C} - (\tau^2/4)\mathcal{A}$ zadovoljava Lipschitzov uslov (43) tada je

$$\begin{aligned}\|v^j_{\bar{t}}\|^2_{\mathcal{C}^j-(\tau^2/4)\mathcal{A}^j} &+ \|(v^j+v^{j-1})/2\|^2_{\mathcal{A}^j} \\ &\le (1+c\tau)\Big(\|v^{j-1}_t\|^2_{\mathcal{C}^{j-1}-(\tau^2/4)\mathcal{A}^{j-1}} + \|(v^j+v^{j-1})/2\|^2_{\mathcal{A}^{j-1}}\Big) \\ &= (1+c\tau)\overline{\mathcal{N}}^2(v^{j-1}).\end{aligned} \tag{45}$$

Zamenjujući u (44) dobijamo:

$$2\tau(\mathcal{B}^j v^j_{\mathring{t}}, v^j_{\mathring{t}}) + \overline{\mathcal{N}}^2(v^j) \le (1+c\tau)\overline{\mathcal{N}}^2(v^{j-1}) + (f^j, v^{j+1} - v^{j-1}).$$

Odavde, slično kao u prethodnom slučaju, dobijamo ocene:

$$\overline{\mathcal{N}}^2(v^k) \le e^{cT}\overline{\mathcal{N}}^2(v^0) + (e^{cT}-1)/(2c)\max_j \|f^j\|^2_{(\mathcal{B}^j)^{-1}} \tag{46}$$

— ako su operatori $\mathcal{B}^j$ samokonjugovani i pozitivno definisani;

$$\overline{\mathcal{N}}^2(v^k) \le e^{cT}\overline{\mathcal{N}}^2(v^0) + (e^{cT}-1)/(2c\varepsilon)\max_j \|f^j\|^2 \tag{47}$$

— ako postoji konstanta $\varepsilon > 0$ takva da je za svako j operator $\mathcal{B}^j - \varepsilon I$ pozitivan;

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{N}}^2(v^k) &\le e^{(2\varepsilon/(1-\varepsilon\tau)+c)T}\,\overline{\mathcal{N}}^2(v^0)\\ &\quad + \left[e^{(2\varepsilon/(1-\varepsilon\tau)+c)T} - 1\right]/(2\varepsilon(2\varepsilon+c))\max_j \|f^j\|^2_{(\mathcal{C}^j-(\tau^2/4)\mathcal{A}^j)^{-1}}\end{aligned} \tag{48}$$

i

$$\overline{\mathcal{N}}^2(v^k) \le \overline{M}_1\overline{\mathcal{N}}^2(v^0) + \overline{M}_2\max_j \|f^j\|^2_{(\mathcal{A}^j)^{-1}} + \overline{M}_3\max_j \|f^j_{\bar t}\|^2_{(\mathcal{A}^j)^{-1}} \tag{49}$$

— ako se pretpostavi samo nenegativnost operatora $\mathcal{B}^j$.

Ako pretpostavimo da operatori $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$ zadovoljavaju Lipschitzov uslov (43) tada umesto (45) dobijamo:

$$\begin{aligned}&\|v^j_{\bar t}\|^2_{\mathcal{C}^j-(\tau^2/4)\mathcal{A}^j} + \|(v^j+v^{j-1})/2\|^2_{\mathcal{A}^j}\\ &\le (1+c\tau)\|v^{j-1}_{\bar t}\|^2_{\mathcal{C}^{j-1}} - (\tau^2/4)(1-c\tau)\|v^{j-1}_{\bar t}\|^2_{\mathcal{A}^{j-1}} + (1+c\tau)\|(v^j+v^{j-1})/2\|^2_{\mathcal{A}^{j-1}}\\ &\qquad = (1+c\tau)\overline{\mathcal{N}}^2(v^{j-1}) + (\tau^2/2)c\tau\|v^{j-1}_{\bar t}\|^2_{\mathcal{A}^{j-1}}.\end{aligned}$$

Da bismo dobijeni izraz mogli da ocenimo pomoću $\overline{\mathcal{N}}^2(v^{j-1})$ pretpostavimo još da je operator $\mathcal{C}^j - (\tau^2/4)(1+\varepsilon)\mathcal{A}^j$, $\varepsilon > 0$, nenegativan za $j = 0, 1, \ldots, M$. Tada je:

$$(c\tau^3/2)\|v^{j-1}_{\bar t}\|^2_{\mathcal{A}^{j-1}} \le (2c\tau/\varepsilon)\|v^{j-1}_{\bar t}\|^2_{\mathcal{C}^{j-1}-(\tau^2/4)\mathcal{A}^{j-1}} \le (2c\tau/\varepsilon)\overline{\mathcal{N}}^2(v^{j-1}),$$

što zajedno s prethodnim daje:

$$\|v^j_{\bar t}\|^2_{\mathcal{C}^j-(\tau^2/4)\mathcal{A}^j} + \|(v^j+v^{j-1})/2\|^2_{\mathcal{A}^j} \le \left[1 + (1+2/\varepsilon)c\tau\right]\overline{\mathcal{N}}^2(v^{j-1}).$$

Polazeći od dobijene ocene možemo izvesti analoge ocena (46–49) u kojima umesto konstante c figuriše konstanta $(1+2/\varepsilon)c$.

Dodatak:
Aproksimacija generalisanih rešenja

Rezultati izloženi u ovoj knjizi, specijalno ocene brzine konvergencije diferencijskih shema, dobijeni su pod pretpostavkom da rešenja razmatranih graničnih problema imaju neprekidne parcijalne izvode dovoljno visokog reda. Metoda konačnih razlika se međutim koristi i za numeričko rešavanje zadataka sa slabim (generalisanim) rešenjima. Pri tome se pojavljuju dve grupe problema. Jedni su povezani s konstrukcijom diferencijske sheme u slučaju prekidnih koeficijenata i rešavaju se njihovim usrednjavanjem. Drugi se pojavljuju pri analizi konvergencije takvih shema: generalisano rešenje nema, u opštem slučaju, neprekidne parcijalne izvode pa se ne može koristiti standardna tehnika zasnovana na Taylorovom razvoju. U poslednje vreme je u radovima Weinelta, Lazarova, Makarova, Jovanovića, Ivanovića, Sülija i drugih razvijena alternativna tehnika za ispitivanje brzine konvergencije, zasnovana na lemi Bramble-Hilberta i njenim generalizacijama. U ovom odeljku ćemo ukratko prikazati tu tehniku na primeru prvog graničnog problema za eliptičku jednačinu drugog reda s promenljivim koeficijentima.

Definišimo prvo prostore Soboljeva s razlomljenim indeksom (v. Triebel [1978]). Neka je s pozitivan realan broj, $[s]$ najveći ceo broj $\leq s$ i $[s]^-$ najveći ceo broj $< s$. Neka je dalje $1 \leq p < \infty$ i Ω oblast u $\mathbf{R}^n$. Prostor $W_p^s(\Omega)$ čine sve funkcije $f \in W_p^{[s]}(\Omega)$ za koje je konačna norma:

$$\|f\|_{W_p^s}^p = \|f\|_{W_p^{[s]^-}}^p + |f|_{W_p^s}^p$$

gde je

$$|f|_{W_p^s}^p = \begin{cases} \sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f\|_{L_p}^p, & s \text{ ceo} \\ \sum_{|\alpha|=[s]} \int_\Omega \int_\Omega \dfrac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{n+p(s-[s])}}\, dx dy, & s \text{ razlomljen.} \end{cases}$$

Ovde je $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ uređena n-torka nenegativnih celih brojeva, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, $D^\alpha f = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1}(\partial/\partial x_2)^{\alpha_2}\cdots(\partial/\partial x_n)^{\alpha_n} f$ i $|x-y| = [(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2]^{1/2}$. Za $s = 0$ stavljamo $W_p^0 = L_p$. Za $s < 0$ W_p^s se definiše kao dualni prostor od W_q^{-s}, gde je $1/p+1/q=1$. Njegovi elementi su generalisane funkcije (distribucije). Teorija eliptičkih graničnih problema u prostorima Soboljeva je dobro razvijena (v. Lions, Magenes [1972]).

U daljem radu fundamentalnu ulogu igraju sledeće dve leme.

LEMA 1. *Neka je Ω oblast u $\mathbf{R}^n$ s Lipschitz-neprekidnom granicom i $\eta(u)$ ograničen linearan funkcional na $W_p^s(\Omega)$, $s>0$, koji se anulira ako je u polinom stepena $\le [s]^-$. Tada postoji konstanta $C=C(\Omega,s,p)$ takva da za svako $u \in W_p^s(\Omega)$ važi nejednakost:*

$$|\eta(u)| \le C|u|_{W_p^s}.$$

Lemu su dokazali Bramble i Hilbert [1971] za slučaj celih s. Opšti slučaj je dokazan u radu Duponta i Scotta [1980]. Tu je dat i postupak za efektivno određivanje konstante C. Generalizaciju za slučaj anizotropnih prostora Soboljeva dao je Dražić [1986].

LEMA 2 (v. Ciarlet [1978], Jovanović [1987]). *Neka je $\zeta(u,v)$ ograničen bilinearan funkcional na $W_p^s(\Omega)\times W_q^r(\Omega)$, $s,r>0$, koji se anulira ako je u polinom stepena $\le [s]^-$, a takođe ako je v polinom stepena $\le [r]^-$. Tada postoji konstanta $C = C(\Omega,s,p,r,q)$ takva da za svako $u\in W_p^s(\Omega)$ i svako $v\in W_q^r(\Omega)$ važi najednakost:*

$$|\zeta(u,v)| \le C|u|_{W_p^s}|v|_{W_q^r}.$$

Definišimo još Steklovljeve operatore usrednjenja. Neka je $f(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, realna funkcija, h — pozitivna konstanta i r_i — jedinični vektor koordinatne ose Ox_i. Označimo

$$T_i^+ f(x) = \int_0^1 f(x+htr_i)\,dt = T_i^- f(x+hr_i) = T_i f(x+0.5hr_i), \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Ovi operatori preslikavaju parcijalne izvode u količnike razlika:

$$T_i^+(\partial f/\partial x_i) = f_{x_i}, \quad T_i^-(\partial f/\partial x_i) = f_{\bar{x}_i}.$$

Primetimo takođe da je

$$T_i^+T_i^- f(x) = T_i^2 f(x) = \int_{-1}^1 (1-|t|)f(x+htr_i)\,dt.$$

Razmotrimo najzad Dirichletov granični problem u jediničnom kvadratu $\Omega = (0,1)^2$ za eliptičku jednačinu s promenljivim koeficijentima:

$$\sum_{i,j=0}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f, \quad x\in\Omega; \qquad u=0, \quad x\in\Gamma=\partial\Omega. \tag{1}$$

Pretpostavljaćemo da generalisano rešenje zadatka (1) pripada prostoru Soboljeva $W_2^s(\Omega)$, $1 < s \leq 3$, a da desna strana $f(x)$ pripada $W_2^{s-2}(\Omega)$. U tom slučaju, koeficijenti a_{ij} moraju pripadati prostoru tzv. multiplikatora $M(W_2^{s-1}(\Omega))$ (v. Maz'ya, Shaposhnikova [1985]). Dovoljni uslovi su:

$$a_{ij} \in W_p^{s-1}(\Omega) \text{ gde je } p = 2 \text{ za } s > 2 \text{ i } p > 2/(s-1) \text{ za } 1 < s \leq 2.$$

Ovi uslovi izražavaju minimalnu dopustivu glatkost koeficijenata u terminima pripadnosti soboljevskim klasama. Primetimo da su prema teoremi potapanja (Triebel [1978]) u i a_{ij} neprekidne funkcije, dok je f prekidna, a pri $s < 2$ — čak generalisana funkcija. Neka su, osim toga, zadovoljeni uobičajeni uslovi simetrije i eliptičnosti:

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} y_i y_j \geq c_o \sum_{i=1}^{2} y_i^2, \qquad c_0 = \text{const} > 0.$$

Neka je $\overline{\Omega}_h$ ravnomerna mreža u oblasti $\overline{\Omega}$ s korakom h, $\Omega_h = \overline{\Omega}_h \cap \Omega$ i $\Gamma_h = \overline{\Omega}_h \cap \Gamma$. Na uobičajeni način definišimo diferencijske operatore v_{x_i} i $v_{\bar{x}_i}$ i diskretne norme $L_{2,h}$ i $W_{2,h}^1$.

Granični problem (1) aproksimirajmo diferencijskom shemom s usrednjenom desnom stranom:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \left[(a_{ij} v_{x_j})_{\bar{x}_i} + (a_{ij} v_{\bar{x}_j})_{x_i}\right] = T_1^2 T_2^2 f, \quad x \in \Omega_h; \quad v = 0, \quad x \in \Gamma_h. \tag{2}$$

Greška $z = u - v$ zadovoljava uslove:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \left[(a_{ij} z_{x_j})_{\bar{x}_i} + (a_{ij} z_{\bar{x}_j})_{x_i}\right] = \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij,\bar{x}_i}, \quad x \in \Omega_h; \quad z = 0, \quad x \in \Gamma_h,$$

gde je $\eta_{ij} = 0.5(a_{ij} u_{x_j} - a_{ij}^{+i} u_{\bar{x}_j}^{+i}) - T_i^+ T_{3-i}^2 (a_{ij}(\partial u/\partial x_j))$ i $u^{+i} = u(x + hr_i)$.

Energetskom metodom se lako dobija apriorna ocena:

$$\|z\|_{W_{2,h}^1} \leq C \sum_{i,j=1}^{2} \|\eta_{ij}\|. \tag{3}$$

Da bismo dobili ocenu brzine konvergencije diferencijske sheme (2) dovoljno je oceniti $\|\eta_{ij}\|$. Predstavimo prethodno η_{ij} u obliku

$$\eta_{ij} = \eta_{ij,1} + \eta_{ij,2} + \eta_{ij,3} + \eta_{ij,4}$$

gde je

$$\eta_{ij,1} = (T_i^+ T_{3-i}^2 a_{ij})(T_i^+ T_{3-i}^2 \partial u/\partial x_j) - T_i^+ T_{3-i}^2 (a_{ij} \partial u/\partial x_j),$$
$$\eta_{ij,2} = \left[0.5(a_{ij} + a_{ij}^{+i}) - T_i^+ T_{3-i}^2 a_{ij}\right](T_i^+ T_{3-i}^2 \partial u/\partial x_j),$$
$$\eta_{ij,3} = 0.5(a_{ij} + a_{ij}^{+i})\left[0.5(u_{x_j} + u_{x_j}^{+i}) - T_i^+ T_{3-i}^2 \partial u/\partial x_j\right],$$
$$\eta_{ij,4} = 0.25(a_{ij} - a_{ij}^{+i})(u_{x_j} - u_{x_j}^{+i}).$$

Linearnom transformacijom $y = x + th$ preslikajmo oblast $e_i = e_i(x) = \{y = (y_1, y_2) \mid x_i < y_i < x_i + h,\ x_{3-i} - h < y_{3-i} < x_{3-i} + h\}$ na pravougaonik $E_i = \{t = (t_1, t_2) \mid 0 < t_i < 1,\ -1 < t_{3-i} < 1\}$. Označimo $u^*(t) = u(y)$. Tada $\eta_{ij,1}(x)$ možemo predstaviti u obliku:

$$\eta_{ij,1} = h^{-1}\left\{ \iint_{E_i} (1 - |t_{3-i}|)\partial u^*/\partial t_j \, dt_1 dt_2 \iint_{E_i} (1 - |t_{3-i}|) a_{ij}^*(t) \, dt_1 dt_2 \right.$$
$$\left. - \iint_{E_i} (1 - |t_{3-i}|) a_{ij}^*(t) \partial u^*/\partial t_j \, dt_1 dt_2 \right\}.$$

Odatle zaključujemo da je

$$|\eta_{ij,1}(x)| \le C_1 h^{-1} \|a_{ij}^*\|_{W_q^\lambda(E_i)} \|u^*\|_{W_{2q/(q-2)}^\mu(E_i)}$$

za $\lambda \ge 0$, $\mu \ge 1$ i $q > 2$. Osim toga, $\eta_{ij,1} = 0$ ako je a_{ij}^* konstanta ili ako je u^* polinom prvog stepena. Primenom leme 2 dobijamo:

$$|\eta_{ij,1}(x)| \le C h^{-1} |a_{ij}^*|_{W_q^\lambda(E_i)} |u^*|_{W_{2q/(q-2)}^\mu(E_i)}, \quad 0 \le \lambda \le 1, \quad 1 \le \mu \le 2.$$

Vraćanjem na stare promenljive dobijamo:

$$|\eta_{ij,1}(x)| \le C h^{\lambda+\mu-2} |a_{ij}|_{W_q^\lambda(e_i)} |u|_{W_{2q/(q-2)}^\mu(e_i)}.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže uz primenu Hölderove nejednakosti dobijamo:

$$\|\eta_{ij,1}(x)\| \le C h^{\lambda+\mu-1} |a_{ij}|_{W_q^\lambda(\Omega)} |u|_{W_{2q/(q-2)}^\mu(\Omega)}. \tag{4}$$

gde je $0 \le \lambda \le 1$, $1 \le \mu \le 2$.

Izaberimo $\lambda = s - 1$, $\mu = 1$ i $q = p$. Tada je $W_p^{s-1} = W_q^\lambda$, i prema teoremi potapanja (Triebel [1978])

$$W_2^s \subset W_{2p/(p-2)}^1 = W_{2q/(q-2)}^\mu \quad \text{za } 1 < s \le 2.$$

Sledi:

$$\|\eta_{ij,1}\| \le C h^{s-1} \|a_{ij}\|_{W_p^{s-1}(\Omega)} \|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 1 < s \le 2, \quad p > 2/(s-1). \tag{5}$$

Neka je sada $q > 2$ konstanta. Važe sledeća potapanja:

$$W_2^{\lambda+\mu-1} \subset W_q^\lambda \quad \text{za} \quad \mu > 2 - 2/q \quad \text{i}$$
$$W_2^{\lambda+\mu} \subset W_{2q/(q-2)}^\mu \quad \text{za} \quad \lambda > 2/q.$$

Stavljajući $\lambda + \mu = s$ iz (4) dobijamo:

$$\|\eta_{ij,1}\| \leq Ch^{s-1}\|a_{ij}\|_{W_p^{s-1}(\Omega)}\|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 2 < s \leq 3, \quad p = 2. \tag{6}$$

Na sličan način se ocenjuju i ostali sabirci $\eta_{ij,k}$ ($k = 2, 3, 4$). Za njih takođe važe ocene oblika (5) i (6).

Iz (3), (5) i (6) dobijamo traženu ocenu brzine konvergencije diferencijske sheme (2):

$$\|u - v\|_{W_{2,h}^1} = \|z\|_{W_{2,h}^1} \leq Ch^{s-1} \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{W_p^{s-1}(\Omega)}\|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 1 < s \leq 3.$$

Dobijena ocena je saglasna s glatkošću podataka. Slične ocene mogu se dobiti i u drugim diskretnim normama.

Ocene ovakvog tipa u slučaju jednačina s konstantnim keoficijentima dobili su Weinelt [1978] i Lazarov [1981] — za celobrojne s, i Lazarov, Makarov, Weinelt [1984] i Jovanović [1984] — za realne s. Ocene u diskretnim W_p^k-normama za $p \neq 2$ dobili su Süli, Jovanović, Ivanović [1985]. Jednačine višeg reda razmatrali su Ivanović, Jovanović, Süli [1986]. Jednačine s promenljivim koeficijentima eliptičkog tipa razmatrali su Jovanović [1987a, 1988a] i Jovanović, Ivanović, Süli [1987a]. Slične ocene za paraboličke zadatke dobili su Jovanović [1982, 1988, 1988a b], Ivanović, Jovanović, Süli [1984] i Weinelt, Lazarov, Streit [1984]. Hiperboličke zadatke razmatrali su Jovanović, Ivanović, Süli [1986, 1987].

Numerical methods for solving partial differential equations

(Boundary value problems and mixed problems for linear elliptic, parabolic and hyperbolic equations)

Summary

Boundary value problems for partial differential equations are mathematical models for various phenomena as: heat conduction, diffusion processes, wave motion, fluid dynamics, elasticity, nuclear physics processes, etc. Only in some rare occasions these problems can be solved with classical mathematical methods and in all other cases approximate methods are necessary.

Finite difference method has a very important position among approximate methods for solving partial differential equations. The book is devoted to this method.

The book is made of the revised and extended material from the series of lectures held by the author in 1975/76 within the Seminar for Applied Mathematics in the Belgrade Mathematical Institute. In the book the author tried to synthesize some important results from the theory of difference schemes, to point to the basic problems in the theory and to expose the leading methods for solving such problems. Primary attention is put on investigation of stability and correctness of difference schemes and their convergence, as well as on construction of economic difference schemes. Some original results by the author are presented as well.

The book is intended primarily for the students of mathematics, postgraduate students and for mathematicians who work with numerical methods, as well as for engineers who need practical numerical methods for solving boundary value problems in their work. In reading the book, basic knowledge of theory of differntial equations and functional analysis is required, in the scope of usual university courses.

The book contains four chapters and an appendix. The first chapter is introductory. In it basic function spaces are defined for further use, some notions from functional analysis are presented as well as basic boundary value problems of elliptic, parabolic and hyperbolic type. These boundary value problems can be treated

as linear equations of Cauchy problems for linear differential equations in Hilbert space. Afterwards, basic a priori estimates are derived, from which the stability of discussed boundary value problems follows. The estimates for the parabolic and hyperbolic case are derived in an abstract form, from which, specifying the Hilbert space and the linear operator, the estimates are obtained for the particular boundary value problem. Also, the concept of difference scheme is introduced.

The second chapter is devoted to elliptic equations. In its first part difference schemes are constructed for solving various boundary value problems and their stability, correctness and convergence are investigated. For the sake of simplicity of derivation, the most simple difference approximations are mainly used. The second part of the chapter is devoted to solving the system of difference equations, especially using iterativa methods. The main attention is paid to the economy of the method and, in connection with it, to the optimal choice of iterative parameters.

In the third chapter difference schems are constructed for solving parabolic equations. Stability and convergence are investigated for the explicit, implicit, weighted scheme and the alternative direction scheme. It is proved that the alternative direction schemes are absolutely stable and economic.

In the fourth chapter difference schemes are constructed for solving parabolic equations. Stability and convergence are investigated for the explicit scheme, weighted scheme, alternative direction scheme and for the the additive scheme for one fourth order equation. As in the previous chapters, great attention is also paid to the economy of the schemes.

The appendix is devoted to the approximation of generalized solutions of boundary value problems. Since generalized solutions, in general, do not have continuous partial derivatives, standard technique based on Taylor expansion can not be applied for convergence analysis of corresponding difference schemes. In the recent time, an alternative technique based on the Bramble-Hilbert Lemma is developed in the work of many mathematicians, inicluding the author. This technique is presented here in the case of the first boundary value problem for elliptic equation with variable coefficients.

Literatura

Ahiezer N.I., Glazman I.M. (Ахиезер Н.И., Глазман И.М.),
[1966], *Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве*, Наука, Москва.

Astrahancev G.P. (Астраханцев Г.П.),
[1971], *Об одном итерационном методе решения сеточных эллиптических задач*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **11**, No. 2, 439–448.

Aubin J.P.,
[1972], *Approximation of elliptic boundary-value problems*, Wiley-Interscience, New York – London – Sydney – Toronto.

Babuška I., Prager M., Vitasek E.,
[1966], *Numerical processes in differential equations*, SNTL, Interscience Publ., Prague – London.

Bahvalov N.S. (Бахвалов Н.С.),
[1966], *О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **6**, No. 5, 861–883.

Bakirova M.I., Frjazinov I.V. (Бакирова М.И., Фрязинов И.В.),
[1973], *Об итерационном методе переменных направлений для разностного уравнения Пуассона в криволинейных ортогональных координатах*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **13**, No. 4, 907–922.

Bateman H., Erdélyi A.,
[1953], *Higher transcendental functions, v.2*, Mc Graw-Hill, New York – Toronto – London.

Courant R.,
[1943], *Variational methods for the solutions of problems of equilibrium and vibrations*, Bull. Amer. Math. Soc., **49**, 1–23.

Courant R., Friedrichs K., Lewy H.,
[1928], *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik*, Math. Ann., **100**, 32–74.

Crank J., Nicolson P.,

[1947], *A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **43**, 50–67.

D'jakonov E.G. (Дьяконов Е.Г.),

[1971], *Разностные методы решения краевых задач, в. 1*, изд. МГУ, Москва.

[1972], *Разностные методы решения краевых задач, в. 2*, изд. МГУ, Москва.

Douglas J.,

[1955], *On the numerical integration of $u_{xx} + u_{yy} = u_t$ by implicit methods*, J. Soc. Industr. Appl. Math., **3**, No 1, 42–65.

Douglas J., Gunn J.,

[1964], *A general formulation of alternating direction methods, Part I*, Numer. Math., 6, 428–453.

Douglas J., Rachford H.,

[1956], *On the numerical solution of heat conduction problem in two and three space variables*, Trans. Amer. Math. Soc., **82:2**, 421–439.

Fedorenko R.P. (Федоренко Р.П.),

[1961], *Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **1**, No. 5, 922–927.

[1964], *О скорости сходимости одного итерационного процесса*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **4**, No. 3, 559–564.

[1973], *Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений*, УМН, **28**, No. 2, 121–182.

Forsythe G.E., Wasow W.R.,

[1960], *Finite-difference methods for partial differential equations*, Wiley, New York - London.

Frjazinov I.V. (Фрязинов И.В.),

[1971], *О разностных схемах для уравнения Пуассона в полярной, цилиндрической и сферической системах координат*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **11**, No. 5, 1219–1228.

Godunov S.K., Rjabenjkij V.S. (Годунов С.К., Рябенький В.С.),

[1977], *Разностные схемы*, Наука, Москва, (I изд. 1962).

Jovanović B. (Йованович Б.),

[1975], *Об одном итерационном методе решения разностных эллиптических уравнений*, Mat. vesnik, **12** (**27**), 347–356.

[1976], *О методе Федоренко-Бахвалова для решения разностного уравнения Пуассона в цилиндрической системе координат*, Publ. de l'Inst. Math., **20** (**34**), 145–160.

[1977], *Об одном экономичном методе для решения эллиптических разностных задач*, Math. balkanica, **7**, 157–160.

[1977a], *Аддитивная разностная схема для нестационарного уравнения четвертого порядка в произвольной области*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **17**, No. 2, 377–383.

Kantorovič L.V., Akilov G.P. (Канторович Л.В., Акилов Г.П.),
[1977], *Функциональный анализ*, Наука, Москва.

Kornjejev V.G. (Корнеев В.Г.),
[1977], *Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности*, изд. ЛГУ, Ленинград.

Ladyženskaja O.A. (Ладыженская О.А.),
[1973], *Краевые задачи математической физики*, Наука, Москва.

Ladyženskaja O.A., Uraljceva N.N. (Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.),
[1964], *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, Москва.

Lebedev V.I., Finogenov S.A. (Лебедев В.И., Финогенов С.А.),
[1971], *О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом итерационном методе*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **11**, No. 2, 425–438.

Makarov V.L. (Макаров В.Л.),
[1970], *Про формули сумарних зображень осесиметричного потенціалу для однієї схеми підвищеного порядку точності*, Доп. АН УРСР, серия А, No. 5, 403–408.

Marčuk G.I. (Марчук Г.И.),
[1973], *Методы вычислительной математики*, Наука, Новосибирск.

Miranda C.,
[1955], *Sul problema misto per le equazioni lineari ellittiche*, Ann. di mat. pura ed appl., XXXIX, 279–303.

Nikolajev E.S., Samarski A.A. (Николаев Е.С., Самарский А.А.),
[1972], *Выбор итерационных параметров в методе Ричардсона*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **12**, No. 4, 960–973.

Oganesjan L.A., Rivkind V.Ja., Ruhovec L.A. (Оганесян Л.А., Ривкинд В.Я., Руховец Л.А.),
[1973], *Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, т. I, Дифференциальные уравнения и их применение*. Труды семинара, в. 5, Вильнюс.

Peacemann D.W., Rachford H.H.,
[1955], *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations*, J. Soc. Industr. Appl. Mat., **3**, No. 1, 28–42.

Richardson L.F.,

[1910], *The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam*, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, vol. **210**, 307–357, and Proc. Roy. Soc., London, Ser.A, vol. **83**, 335–336.

Richtmyer R.D., Morton K.W.,

[1967], *Difference methods for initial-value problems*, Wiley-Interscience, New York – London – Sydney.

Riesz F., Sz.-Nagy B.,

[1952], *Leçons d'analyse fonctionelle*, Akademiai kiado, Budapest.

Samarski A.A. (Самарский А.А.),

[1962], *Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **2**, No. 5, 787–811.

[1964], *Локально-одномерные разностные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа в произвольной области*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **4**, No. 4, 638–648.

[1966], *Аддитивные схемы*, Межд. съезд матем. в Москве, Тезисы докл., секция 14, вычисл.мат., 46–47.

[1971], *Введение в теорию разностных схем*, Наука, Москва.

[1977], *Теория разностных схем*, Наука, Москва.

Samarski A.A., Andrejev V.B. (Самарский А.А., Андреев В.Б.),

[1963], *Об одной разностной схеме повышеного порядка точности для уравнения эллиптического типа с несколькими пространственными переменными*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **3**, No. 6, 1006–1013.

[1976], *Разностные методы для эллиптических уравнений*, Наука, Москва.

Samarski A.A., Frjazinov I.V. (Самарский А.А., Фрязинов И.В.),

[1971], *О разностных схемах решения задачи Дирихле в произвольной области для эллиптического уравнения с переменными коэфициентами*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **11**, No. 2, 385–410.

Samarski A.A., Gulin A.V. (Самарский А.А., Гулин А.В.),

[1973], *Устойчивость разностных схем*, Наука, Москва.

Schauder J.,

[1923], *Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Math.Z., **38**, 257–282.

Schwartz L.,

[1950/51], *Théorie des distributions I, II*; Paris.

Soboljev S.L. (Соболев С.Л.),

[1962], *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Изд. СО АН СССР, Новосибирск.

Varga R.S.,

[1962], *Matrix iterative analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Wachspress E.L.,

[1963], *Extended application of alternating-direction-implicit iteration model problem theory*, J. Soc. Industr. Appl. Math., **11**, No. 4, 994–1016.

[1966], *Iterative solution of elliptic systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Young D.,

[1954], *On Richardson's methods for solving linear systems with positive definite matrices*, J. Math. and Phys., **32**, No. 4, 243–255.

[1954a], *Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type*, Trans. Amer. Math. Soc., **76**, 92–111.

Dopuna spiska literature

Bramble J.H., Hilbert S.R.,

[1971], *Bounds for a class of linear functions with applications to Hermite interpolation*, Numer. Math. **16**, 362–369.

Brebbia C.A., Walker S.,

[1980], *Boundary element techniques in engineering*, Newnes-Butterworths, London etc.

Brezzi F.,

[1986], *Recent results in the approximation of free boundaries*, In: Equadiff 6 Proceedings (J. Vosmansky, M. Zlamal eds.), Purkyne University, Brno, 285–289.

Ciarlet P.,

[1978], *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam etc.

Dražić M.,

[1986], *Convergence rates of difference approximations to weak solutions of the heat transfer equation*, Oxford University Computing Laboratory, Numerical Analysis Group, Report No. 86/22.

Dupont T., Scott R.,

[1980], *Polynomial approximations of functions in Sobolev spaces*, Math. Comput. **34**, 441–463.

Friedman A.,

[1982], *Variational principles and free boundary problems*, Wiley, New York.

Glowinski R., Lions J.L., Trémolières R.,

[1976], *Analyse numérique des inéquations variationnelles*, Dunod, Paris.

Hackbusch W.,

[1985], *Multi-grid methods and applications*, Springer-Verlag, Berlin etc.

Hajdin N.,

[1958], *A method for numerical solutions of boundary value problems and its applications to certain problems in the theory of elasticity*, Belgrade University Publ.

Ivanović L.D., Jovanović B.S., Süli E.E.,

[1984], *On the rate of convergence of difference schemes for the heat transfer equation on the solutions from* $W_2^{s,s/2}$, Mat. vesnik 36, 206–212.

[1986], *О сходимости разностных схем для бигармонического уравнения*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 26, 776–780.

Jovanović B.S.,

[1980], *Primena Richardsonove ekstrapolacije pri numeričkom rešavanju jednačine* $u_{tt} = u_{xx} + f$, Mat. vesnik 4 (17)(32), 465–474.

[1982], *О сходимости проекционно-разностных схем для уравнения теплопроводности*, Mat. vesnik 6 (19)(34), 279–292.

[1984], *О сходимости дискретных решений к обобщенным решениям краевых задач*, В: Вариационно-разностные методы в математической физике (Н.С. Бахвалов, Ю.А. Кузнецов изд.), ОВМ АН СССР, Москва, 120–129.

[1987], *Jedno uopštenje leme Bramble-Hilberta*, Zbornik radova PMF u Kragujevcu 8, 81–87.

[1987a], *Аппроксимация обобщенных решений с помощью конечных разностей*, Arch. Math. (Brno) 23, 9–14.

[1988], *О сходимости дискретных методов для нестационарных задач*, Вычисл. процессы. и сист. 6, 145–151.

[1988a], *Аппроксимация обобщенных решений краевых задач с помощью конечных разностей*, Banach Center Publ. 24.

[1988b], *On the convergence of finite-difference schemes for parabolic equations with variable coefficients*, Numer. Math. 54.

Jovanović B.S., Ivanović L.D., Süli E.E.,

[1986], *Sur la convergence des schémas aux différences finies pour l'équation des ondes*, Z. angew. Math. Mech. 66, 308–309.

[1987], *Convergence of a finite-difference scheme for second-order hyperbolic equations with variable coefficients*, IMA J. Numer. Anal. 7, 39–45.

[1987a], *Convergence of finite-difference schemes for elliptic equations with variable coefficients*, IMA J. Numer. Anal. 7, 301–305.

Lazarov R.D. (Лазаров Р.Д.)

[1981], *К вопросу о сходимости разностных схем для обобщенных решений уравнения Пуассона*, Дифференциальные уравнения 17, 1285–1294.

Lazarov R.D., Makarov V.L., Weinelt W.,
[1984], *On the convergence of difference schemes for the approximation of solutions $u \in W_2^m$ $(m > 0.5)$ of elliptic equations with mixed derivatives*, Numer. Math. 44, 223–232.

Lions J.L., Magenes E.,
[1972], *Non homogeneous boundary value problems and applications*, Springer-Verlag, Berlin etc.

Marčuk G.I., Šajdurov V.V. (Марчук Г.И., Шайдуров В.В.)
[1979], *Повышение точности решений разностных схем*, Наука, Москва.

Maz'ya V.G., Shaposhnikova T.O.,
[1985], *Theory of multipliers in spaces of differentiable functions*, Monographs and Studies in Mathematics 23, Pitman, Boston.

Temam R.,
[1979], *Navier-Stokes equations*, North-Holland, Amsterdam etc.

Triebel H.,
[1978], *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (DDR).

Weinelt W.,
[1978], *Untersuchungen zur Konvergenzgeschwindigkeit bei Differenzenverfahren*, Wiss. Z. Techn. Hochsch. Karl-Marx-Stadt 20(6), 763–769.

Weinelt W., Lazarov R.D., Streit U. (Вайнельт В., Лазаров Р.Д., Штрайт У.)
[1984], *О порядке сходимости разностных схем для слабых решений уравнения теплопроводности в анизотропной неоднородной среде*, Дифференциальные уравнения 20, 1144–1151.

O autoru

1946. Rođen u Beogradu.

1969. Diplomirao matematiku na Prirodno-matematičkom fakultetu (PMF) u Beogradu.

1971. Magistrirao na PMF u Beogradu.

1972/73. Bio na specijalizaciji na fakultetu za numeričku matematiku i kibernetiku Moskovskog državnog univerziteta.

1976. Doktorirao na PMF u Beogradu.

Trenutno je vanredni profesor na PMF u Beogradu.

Bavi se numeričkom analizom, posebno numeričkim metodama rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Sadržaj

Recenzenti: dr Milorad Bertolino, profesor PMF u Beogradu
dr Borivoje Rašajski, profesor PMF u Beogradu

Tehnički urednik: Dragan Blagojević

Tekst obradio u TEX-u: Mirko Janc

Štampa: „Studio plus", Bulevar AVNOJ-a 179, 11070 Novi Beograd

Štampanje završeno ferbuara 1989.

Klasifikacija američkog matematičkog društva
(AMS Mathematics Subject Classification 1985): 65-02, 65 Nxx, 65 Fxx, 65 Jxx

Univerzalna decimalna klasifikacija: 517.95, 519.63

CIP — Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

519.63

ЈОВАНОВИЋ, Бошко С.

Numeričke metode rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina: granični i mešoviti problemi za linearne jednačine eliptičkog, paraboličkog i hiperboličkog tipa / Boško S. Jovanović. — Beograd: Matematički institut, 1989. — 130 str.; 25 cm. — (Savremena računska tehnika i njena primena; knj. 8)

Библиографија: стр. 121–127.

ISBN 86-80593-01-X
517.956 519.988.8
ПК: а. Диференцијалне једначине, парцијалне — Нумерички методи б. Нумеричка анализа

Prema mišljenju Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije ova publikacija je oslobođena poreza na promet.

SAVREMENA RAČUNSKA TEHNIKA I NJENA PRIMENA

U ovoj seriji Matematičkog instituta do sada su publikovane sledeće knjige:

1. *Nedeljko Parezanović*
   Algoritimi i programski jezik FORTRAN IV
   1972., str. 272

2. *Pavle Pejović i Nedeljko Parezanović*
   Analogni elektronski računari i njihova primena
   1972., str. 321

3. *Dragiša Stojanović*
   Ekonomsko-matematički modeli linearnog programiranja
   1973,. str. 84

4. *Jurij Stepanenko*
   Dinamika prostornih mehanizama
   1974., str. 282

5. *Koriolan Gilezan i Boško Latinović*
   Bulova algebra i primene
   1977., str. 213

6. *Radovan Krtolica*
   Analiza matematičkih modela stohastičkih sistema sa raspodeljenim parametrima
   1979., str. 107

7. *Vera Vujčić, Miroslav Ašić i Nada Miličić*
   Matematičko programiranje
   1980., str. 162