BORIVOJ N. RACHAJSKY

SUR LES SYSTÈMES EN INVOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE ET D'ORDRE SUPÉRIEUR. L'APPLICATION DES SYSTÈMES DE CHARPIT

BEOGRAD
1971.

BORIVOJ N. RACHAJSKY

SUR LES SYSTÈMES EN INVOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE ET D'ORDRE SUPÉRIEUR. L'APPLICATION DES SYSTÈMES DE CHARPIT

BEOGRAD
1971.

POSEBNA IZDANJE MATEMATIČKOG INSTITUTA

KNJIGA 10

BORIVOJ N. RACHAJSKY

SUR LES SYSTÈMES EN INVOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE ET D'ORDRE SUPÉRIEUR. L'APPLICATION DES SYSTÈMES DE CHARPIT

I Chapitre

SUR LA THÉORIE NOUVELLE DES CARACTÉRISTIQUES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

Il s'agit dans ce chapitre de considérer la théorie nouvelle de *R. Courant* des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du premier ordre, [1] et de faire la généralisation correspondante sur les systèmes en involution des équations aux dérivées partielles du premier ordre [2]. Nous allons nous servir du système correspondant de *Charpit*, établi dans les recherches de *N. Saltykov*, [3], pour faire la généralisation mentionnée.

1. Sur la théorie des caractéristiques

Considérons l'équation aux dérivées partielles du premier ordre dépendante explicitement de la fonction inconnue z des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0. \tag{1}$$

Il est bien connue le théorème d'existence et d'unicité de la solution de *Cauchy*, [4]:

Théorème. *Soit* $f(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$ *de la classe* C^2 *sur un certain ouvert* E_{2n+1} *de l'espace à* $2n+1$ *dimensions, dont les coordonnées du point sont les variables*: $x(x_1, \ldots, x_n)$, z, $p(p_1, \ldots, p_n)$. *Soit* $(x^0, z^0, p^0) \in E_{2n+1}$. *Soit*

$$x = a(t), \quad t = (t_1, \ldots, t_{n-1}) \tag{2}$$

une pièce de la hypersurface de la classe C^2 *définie pour* t *voisin de*

$$t^0 \left(t_1^0, \ldots, t_{n-1}^0\right) \text{ et } a(t^0) = x^0.$$

Soit $b(t)$ *une fonction de la variable* t *de la classe* C^2 *voisine de* t^0 *et* $b(t^0) = z^0$. *Aussi, les conditions suivantes*

$$F(x^0, z^0, p^0) = 0, \tag{3}$$

$$p^0 \cdot \frac{\partial a(t^0)}{\partial t_i} = \frac{\partial b(t^0)}{\partial t_i}, \quad (i = 1, \ldots, n-1), \tag{4}$$

$$\det\left[\frac{\partial a(t^0)}{\partial t_i},\ F_p(x^0, z^0, p^0)\right]\neq 0 \tag{5}$$

soient satisfaites. Cela étant, dans le voisinage E_n de $x=x^0$ il existe une solution unique: $z=z(x)$ *de la classe C^2 du problème de Cauchy* (1—2) *et* $z[a(t)]=b(t)$.

C'est la méthode de *Cauchy* des caractéristiques que réduit ce problème à la théorie des équations différentielles ordinaires, [1], [4].

R. Courant, [1], a utilisé la théorie des systèmes de *Charpit* pour établir une méthode nouvelle des caractéristiques pour l'équation (1).

Pour cela il a associé à l'équation (1) le système suivant de *Charpit*

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_s}\frac{\partial p_i}{\partial x_s}+\frac{\partial F}{\partial z}p_i+\frac{\partial F}{\partial x_i}=0, \quad (i=1,\ldots,n)\\ &\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_s}\frac{\partial z}{\partial x_s}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_s}p_s=0\end{aligned} \tag{6}$$

et de même aussi, grâce au système (6), le système équivalent des caractéristiques

$$\frac{dx_i}{d\tau}=\frac{\partial F}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{d\tau}=-\frac{\partial F}{\partial x_i}-p_i\frac{\partial F}{\partial z},\quad \frac{dz}{d\tau}=\sum_{s=1}^{n}p_s\frac{\partial F}{\partial p_s} \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{7}$$

et il a fait la conclusion suivante:

Un problème initial convenablement choisi pour le système de *Charpit* (6) est équivalent au problème correspondant de *Cauchy* de l'équation (1). Cette conclusion offre une base nouvelle pour résoudre le problème de *Cauchy* relatif à l'équation (1) à l'aide des équations des caractéristiques (7).

Posons alors pour le système (6) le problème suivant:

Déterminer les fonctions z, p_i pour que les conditions suivantes

$$F=0, \quad dz=\sum_{s=1}^{n}p_s\,dx_s \tag{8}$$

soient toujours satisfaites sur une multiplicité non caractéristique M_{n-1} donnée, ou:

Déterminer la surface

$$z=z(x) \tag{9}$$

que contient la multiplicité M_{n-1} donnée et vérifié sur M_{n-1} les conditions (8).

Notre but est de démontrer que la surface (9) est aussi de même une intégrale correspondante de *Cauchy* de l'équation (1).

Il ne s'agit donc à présent que de vérifier sur la surface (9) les identités suivantes

$$F(x_1,\ldots,x_n,\ z,\ p_1,\ldots,p_n)\equiv f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0 \tag{10}$$

$$p(x_1,\ldots,x_n)-\frac{\partial z(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}\equiv P_i(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0, \quad (i=1,\ldots,n). \tag{11}$$

On a immédiatement, grâce à la dernière des équations (6) les relations suivantes

$$(6') \qquad \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_s} P_s = 0.$$

et

$$(6'') \qquad \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_s} \frac{\partial P_s}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{n} A_{si} P_s = 0,$$

où nous avons désigné par A_{si} les dérivées suivantes: $A_{si} \equiv \partial^2 F / \partial p_s \partial x_i$.

Il est aisé de mettre la dérivée de la fonction f

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_i},$$

en vertu des équations (6) et des relations suivantes

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_s} - \frac{\partial p_s}{\partial x_i} = \frac{\partial P_i}{\partial x_s} - \frac{\partial P_s}{\partial x_i},$$

sous la forme suivante

$$(12) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_s} \left(\frac{\partial P_s}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_s} \right) - \frac{\partial F}{\partial z} P_i.$$

Multipliant les deux membres des égalités écrites respectivement par les dérivées $\partial F / \partial p_i$, sommons les résultats obtenus; il en résulte

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0$$

et en y substituant les valeurs des dérivées $\partial F / \partial p_i$ tirées des équations des caractéristiques (7), on a $df / d\tau = 0$. Grâce à la proposition que la première condition de (8) est satisfaite sur la multiplicité donnée M_{n-1}, on peut conclure qu'il y a lieu la condition (10), c'est-à-dire $f \equiv 0$.

Quant à la vérification des conditions (11), on peut d'abord partir des relations (12) écrites sous la forme nouvelles

$$(12') \qquad \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_s} \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_s} - \frac{\partial P_s}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial z} P_i = 0,$$

ou, en vertu des équations (6″) et (7), sous la forme évidente

$$(14) \qquad \frac{dP_i}{d\tau} + \sum_{s=1}^{n} A_{si}^{*} P_s = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

A_{si}^{*} désignant les coefficients connus. Grâce au système linéaire et homogène (14) et à la deuxième des conditions (8) sur M_{n-1} on a définitivement $P_i \equiv 0$.

2. Sur une variante dans la théorie des caractéristiques du système des équations aux dérivées partielles du premier ordre en involution

Considérons un système des m équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction z inconnue, contenant explicitement cette dernière:

$$F_k(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, m < n) \tag{15}$$

en involution

$$[F_k, F_j] \equiv \sum_i \left(\frac{\partial F_k}{\partial p_i} \frac{dF_j}{dx_i} - \frac{\partial F_j}{\partial p_i} \frac{dF_k}{dx_i} \right) = 0, \qquad (j, k = 1, \ldots, m) \tag{16}$$

et le déterminant fonctionnel

$$\Delta \equiv \mathcal{D}\left(\frac{F_1, \ldots, F_m}{p_1, \ldots, p_m}\right) \neq 0 \tag{17}$$

ne s'annulant pas.

Il y a plusieurs des méthodes différentes de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de *Cauchy* du système (15).

E. Goursat, [5], avait donné sa démonstration en utilisant les transformations connues de *Mayer*. Sur la méthode employée, dans un cas spécial, était fait un exemple contraire par *L. Bieberbach*, [6]. Une autre démonstration de *Goursat*, [5], est fondée à la conclusion de $(m-1)$ à m équations. Suivant une opinion de *E. Kamke*, [7], la démonstration dernière est plus compliquée et aussi n'est pas convenable à estimer le domain d'existence de la solution.

C. Carathéodory, [8], avait donné la démonstration de son théorème en employant pour le système normal en involution

$$p_k = f_k(x_1, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, \ldots, p_n), \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{15'}$$

les idées et les définitions antérieures de la théorie des caractéristiques de *Cauchy* et le système correspondant d'équations aux différentielles totales des caractéristiques.

Dans l'article mentionné *E. Kamke*: 1) avait donné — dans une forme explicite — le domain d'existence de la solution, 2) avait proposé que les fonctions données f_k possédaient les dérivées des ordres supérieurs, 3) avait établi la dépendance de la solution considérée aux paramètres donnés, et 4) il avait donné sa démonstration en utilisant la méthode de la réduction à une (single) équation correspondante.

P. Hartman, [4], en exposant la méthode de *Cauchy* des caractéristiques (dans le cas $m = 1$ d'après la méthode citée le problème de *Cauchy* pour l'équation (1) est réduit à la théorie des équations différentielles ordinaires) avait noté qu'il n'y a analogie aucune de cette méthode pour le cas du système (15).

N. Saltykow avait étudié plus antérieurement la théorie des caractéristiques en utilisant les systèmes correspondants de *Charpit*, [3], [9]. Il avait démontré que par le système linéaire

$$[F_k, f] = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

étaient définies les équations aux dérivées partielles des caractéristiques sous la forme d'un système suivant de *Charpit*

$$\text{(CH)} \qquad \begin{aligned} &\sum_{r=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_r} \frac{\partial x_{m+j}}{\partial x_r} = \frac{\partial F_k}{\partial p_{m+j}}, \qquad (j=1, \ldots, n-m) \\ &\sum_{r=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_r} \frac{\partial p_s}{\partial x_r} = -\frac{dF_k}{dx_s}, \qquad (s=1, \ldots, n) \\ &\sum_{r=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_r} \frac{\partial z}{\partial x_r} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial F_k}{\partial p_i}, \qquad (k=1, \ldots, m). \end{aligned}$$

Notre but dans ce paragraphe est d'utiliser une méthode que réduit le problème de *Cauchy* du système (15) au problème initial correspondant du système de *Charpit* (CH), [2].

Considérons le système (15) en involution des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction réelle $z=z(x)$ des n variables réelles indépendantes $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $F_k(x, z, p)$, $p=(p_1 \equiv \partial z/\partial x_1, \ldots, p_n \equiv \partial z/\partial x_n)$ désignant m fonctions réelles des $n+1+n$ variables de la classe C^2, $F_k \in C^2(E_{2n+1})$ sur un ensemble ouvert E_{2n+1}. Soit $(x^0, z^0, p^0) \in E_{2n+1}$ et $x^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $p^0=(p_1^0, \ldots, p_n^0)$. Une solution de (15) est une fonction $z=z(x)$ de la classe C^1 sur un x-ensemble E_n tel que $[x, z(x), z_x(x)] \in E_{2n+1}$ pour $x \in E_n$ et (15) devient les identités par rapport à x, c'est-à-dire: $F_k[x, z(x), z_x(x)] \equiv 0$, $x \in E_n$.

Une solution de *Cauchy* est une fonction $z(x)$ que devient une fonction donnée

$$z=\zeta(x_{m+1}, \ldots, x_n) \text{ pour } x_i=x_i^0, \qquad (i=1, \ldots, m)$$

ζ étant de la classe C^2 sur un ensemble ouvert E_{n-m} dans un voisinage des $x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0$, ou dans la forme paramétrique correspondante

$$(18) \qquad \begin{cases} x_i=x_i^0, \quad (i=1, \ldots, m), \; x_{m+j}=t_j, \; (j=1, \ldots, n-m), \\ z=\zeta(t), \quad t=(t_1, \ldots, t_{n-m}) \end{cases}$$

où $\zeta(t)$ est de la classe C^2 dans un voisinage de $t=t^0$, $t^0=(t_1^0, \ldots, t_{n-m}^0)$ et $\zeta(t^0)=z^0$.

La solution du problème (15)—(18) ne peut exister qu'il y a une fonction $p(t)$ dans un voisinage de $t=t^0$ et $p^0=p(t^0)$.

Notons que la relation suivante

$$z(\xi^0, t)=\zeta(t),$$

où l'on a posé $\xi=(x_1, \ldots, x_m)$, $\xi^0=(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, définit les composantes suivantes

$$p_{m+s}(t)=\frac{\partial \zeta(t)}{\partial t_s}, \qquad (s=1, \ldots, n-m)$$

que sont de la classe C^1 dans un voisinage de t^0.

Si la condition (17) est remplie dans un voisinage de $(x^0, z^0, p^0) \in E_{2n+1}$, les relations

$$F_k\left(\xi^0, t, \zeta(t), p_1, \ldots, p_m, \frac{\partial \zeta}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \zeta}{\partial t_{n-m}}\right) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

déterminent les autres composantes $p_i(t)$, $(i = 1, \ldots, m)$ comme les fonctions uniformes dans un voisinage de $t = t^0$.

De cette manière nous avons les fonctions initiales

$$(19) \qquad \xi = \xi^0, \ x_{m+j} = t_j, \ (j = 1, \ldots, n-m), \ z = \zeta(t), \ p = p(t)$$

où $\zeta(t)$ est de la classe C^2 et $p(t)$ est de la classe C^1 dans un voisinage de $t = t^0$.

Supposons que l'intégrale de *Cauchy* du système de *Charpit* (CH)

$$(20) \qquad \begin{aligned} x_{m+j} &= \varphi_j(\xi, t), \qquad (j = 1, \ldots, n-m) \\ z &= \psi(\xi, t) \\ p_i &= \pi_i(\xi, t), \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

vérifie les conditions initiales (19), c'est-à-dire

$$(21) \qquad \begin{aligned} x_{m+j} &= \varphi_j(\xi^0, t) \equiv t_j, \qquad (j = 1, \ldots, n-m) \\ z &= \psi(\xi^0, t) \equiv \zeta(t) \\ p_i &= \pi_i(\xi^0, t) \equiv p_i(t), \qquad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Grâce à la proposition faite que F_k soient de la classe C^2 dans un voisinage de (x^0, z^0, p^0), l'intégrale de *Cauchy* (20) est unique et les fonctions φ_j, ψ, π_i sont de la classe C^1 et les dérivées du seconde ordre existent avec les propriétés

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}\right) = \frac{\partial}{\partial t_i}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t_i}\right) = \frac{\partial}{\partial t_i}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_k}\right)$$

dans un voisinage de (ξ^0, t^0).

Grâce aux propriétés d'intégrale générale du système (CH), [2], on a les relations suivantes

$$(1') \qquad F_k[\xi, \varphi(\xi, t), \psi(\xi, t), \pi(\xi, t)] = 0$$

remplies pour (ξ, t) voisin à (ξ^0, t^0), avec $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-m})$, $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$.

Les équations différentielles des caractéristiques (CH) sont identiquement satisfaites par les valeurs (20), et les identités provenant des équations de deux premières lignes (20) nous donnent les identités suivantes

$$(22) \qquad \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial p_r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_r} - \pi_r - \sum_{j=1}^{n-m} \pi_{m+j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r}\right) = 0.$$

Le déterminant (17) étant distinct de zéro, les égalités (22) nous donnent

$$\frac{\partial \psi(\xi, t)}{\partial x_r} \equiv \pi_r(\xi, t) + \sum_{j=1}^{n-m} \pi_{m+j}(\xi, t) \frac{\partial \varphi_j(\xi, t)}{\partial x_r}, \qquad (r=1, \ldots, m). \tag{23}$$

En vertu des équations de la première ligne de (21) on a

$$\left. \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-m})}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-m})} \right|_{\xi=\xi^0} \neq 0$$

et grâce à la continuité il s'ensuit

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-m})}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-m})} \neq 0 \tag{24}$$

pour (x, t) voisine à (x^0, t^0). De cette manière on a une transformation unique

$$t_s = \tau_s(x_1, \ldots, x_n), \quad (s=1, \ldots, n-m)$$

ou

$$t = \tau(x), \quad \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{n-m}). \tag{25}$$

$\tau(x)$ étant de la classe C^1 dans un voisinage de $x^0 \in E_n$. Donc, dans ce voisinage on a aussi

$$x_{m+j} \equiv \varphi_j(\xi, \tau), \quad (j=1, \ldots, n-m) \tag{25_1}$$

et

$$t_s \equiv \tau_s(\xi^0, t), \quad (s=1, \ldots, n-m). \tag{26}$$

Supposons que l'élimination des variables t_s de (20) donne les relations nouvelles

$$z = a(x) \tag{27}$$

$$p = b(x), \quad (b_1, \ldots, b_n) = b \tag{28}$$

pour x voisine à x^0, où l'on a posé

$$a(x) = \psi[\xi, \tau(x)], \tag{29}$$

$$b(x) = \pi[\xi, \tau(x)]. \tag{30}$$

Les fonctions $a(x)$ et $b(x)$ sont de la classe C^1 dans un voisinage de x^0.

Il est facile de vérifier

$$A \equiv a(\xi, \varphi) = \psi(\xi, t), \tag{29_1}$$

$$B_i \equiv b_i(\xi, \varphi) \equiv \pi_i(\xi, t). \tag{30_1}$$

Il faut maintenant démontrer dans des voisinages de x^0 et t^0 l'existence des relations suivantes

(31) a) $F_k[x, a(x), b(x)] = 0$,

(32) b) $a(\xi^0, t) = \zeta(t)$,

(33) c) $\partial a / \partial x_i = b_i(x)$, $(i=1, \ldots, n)$.

Démonstration. ad a) Les formules (1') ont lieu pour chaque (ξ, t) voisine à (ξ^0, t^0), on a donc pour $t=\tau(x)$, c'est-à-dire

$$F_k[\xi, \varphi(\xi, \tau), \psi(\xi, \tau), \pi(\xi, \tau)]=0$$

et les dernières relations, grâce aux (25_1), (29) et (30), nous donnent (31) dans un voisinage de x^0.

ad b) Considérons (29) pour $\xi=\xi^0$ et $x_{m+j}=t_j$, les relations (29), (26), (21) nous donnent les relations requises (32)

$$a(\xi^0, t)=\psi[\xi^0, \tau(\xi^0, t)]=\psi(\xi^0, t)=\zeta(t)$$

qui sont satisfaites dans un voisinage de t^0.

ad c) Il est facile de voire que l'existence des relations (33) peut être réduite à l'existence des relations suivantes

$$U_s(\xi, t)\equiv\frac{\partial \psi}{\partial t_s}-\sum_{j=1}^{n-m}\pi_{m+j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_s}=0, \quad (s=1, \ldots, n-m) \tag{34}$$

dans un voisinage de (ξ^0, t^0).

c_1) Montrons que si l'on a

$$b_{m+j}=\frac{\partial a}{\partial x_{m+j}} \quad (j=1, \ldots, n-m) \tag{33_1}$$

pour x voisin à x^0, alors

$$b_r=\frac{\partial a}{\partial x_r}, \quad (r, \ldots, m). \tag{33_2}$$

Calculons, en effet, les dérivées partielles des relations (29_1) par rapport à x_r

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_r}=\frac{\partial A}{\partial x_r}+\sum_{j=1}^{n-m}\frac{\partial A}{\partial x_{m+j}}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r}.$$

et grâce aux (23) on a

$$\pi_r-\frac{\partial A}{\partial x_r}+\sum_{j=1}^{n-m}\left(\pi_{m+j}-\frac{\partial A}{\partial x_{m+r}}\right)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r}=0$$

ou, pour $t=\tau(x)$

$$b_r-\frac{\partial a}{\partial x_r}+\sum_{j=1}^{n-m}\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r}\right]\left(b_{m+j}-\frac{\partial a}{\partial x_{m+j}}\right)=0, \quad (r=1, \ldots, m). \tag{35}$$

Donc, si l'on a (33_1), les dernières identités nous donnent (33_2). Il ne s'agit donc que d'être satisfaites les relations (33_1).

c_2) Montrons à présent si les relations suivantes

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_s}-\sum_{j=1}^{n-m}\pi_{m+j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_s}=0 \tag{36}$$

sont satisfaites, alors (33_1) ont lieu.

Grâce aux dérivées partielles des relations (29_1) par rapport à t_s

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_s}-\sum_{j=1}^{n-m}\frac{\partial A}{\partial x_{m+j}}\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_s}=0$$

et aux (36), on a

$$\sum_{j=1}^{n-m}\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_s}\left(\pi_{m+j}-\frac{\partial A}{\partial x_{m+j}}\right)=0, \quad (s=1,\dots,n-m)$$

ou, pour $t=\tau(x)$

$$\sum_{j=1}^{n-m}\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_s}\right]\left(b_{m+j}-\frac{\partial a}{\partial x_{m+j}}\right)=0.$$

Donc, en utilisant (24) on a (33_1). Il suffit, donc, à présent de satisfaire: $U_s(\xi, t)=0$ pour (ξ, t) dans un voisinage de (ξ^0, t^0).

c_3) Il nous reste de démontrer à présent qu'il est toujours possible de satisfaire aux conditions (36).

Calculons les dérivées partielles des fonctions U_s par rapport à x_r

$$\frac{\partial U_s}{\partial x_r}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial t_s \partial x_r}-\sum_{j=1}^{n-m}\left(\frac{\partial \pi_{m+j}}{\partial x_r}\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_s}+\pi_{m+j}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t_s \partial x_r}\right)$$

et les dérivées des relations (23) par rapport à t_s

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_r \partial t_s}=\frac{\partial \pi_r}{\partial t_s}+\sum_{j=1}^{n-m}\left(\frac{\partial \pi_{m+j}}{\partial t_s}\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r}+\pi_{m+j}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_r \partial t_s}\right),$$

on a

$$\frac{\partial U_s}{\partial x_r}=\frac{\partial \pi_r}{\partial t_s}+\sum_{j=1}^{n-m}\left(\frac{\partial \pi_{m+j}}{\partial t_s}\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r}-\frac{\partial \pi_{m+j}}{\partial x_r}\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_s}\right).$$

Grâce au système (CH) on a aussi les relations évidentes

$$\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial p_r}\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r}=\frac{\partial F_k}{\partial p_{m+j}}, \qquad (j=1,\dots,n-m)$$

$$\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial p_r}\,\frac{\partial \pi_i}{\partial x_r}=-\frac{dF_k}{dx_i}, \qquad (i=1,\dots,n)$$

et on peut former la somme suivante

$$\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial p_r}\,\frac{\partial U_s}{\partial x_r}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_k}{\partial p_i}\,\frac{\partial \pi_i}{\partial t_s}+\sum_{j=1}^{n-m}\frac{dF_k}{dx_{m+j}}\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_s}.$$

En utilisant la somme dernière et aussi les dérivées partielles par rapport aux t_s des relations (1') on obtient

$$(37) \qquad \sum_{r=1}^{m}\frac{\partial F_k}{\partial p_r}\,\frac{\partial U_s}{\partial x_r}+U_s\frac{\partial F_k}{\partial z}=0 \qquad \begin{array}{l}(k=1,\dots,m)\\(s=1,\dots,n-m).\end{array}$$

C'est un système linéaire et homogène des fonctions U_s. Les valeures initiales des ces dernières fonctions sont

$$U_s(\xi^0, t) \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial t_s} - \sum_{j=1}^{n-m} p_{m+j}(t) \frac{\partial t_j}{\partial t_s} = \frac{\partial \zeta}{\partial t_s} - p_{m+s}(t) \equiv 0$$

pour t voisin à t^0. Donc, les relations (36) ont lieu dans un voisinage de (ξ^0, t^0).

Par conséquent, l'idée de la démonstration, en utilisant le système (CH), était

$$U_s(\xi^0, t) = 0 \Rightarrow U_s(\xi, t) = 0 \Rightarrow b_{m+j} = \frac{\partial a}{\partial x_{m+j}} \Rightarrow b_i = \frac{\partial a}{\partial x_i} \quad \begin{matrix} (j = 1, \ldots, n-m) \\ i = 1, \ldots, n). \end{matrix}$$

Théorème d'existence et d'unicité. Soient $F_k(x, z, p)$ de la classe C^2 sur un domaine ouvert E_{2n+1}. Soit $(x^0, z^0, p^0) \in E_{2n+1}$ et $F_k(x^0, z^0, p^0) = 0$. Soit $\zeta(t)$, $t = (t_1 = x_{m+1}, \ldots, t_{n-m} = x_n)$ de la classe C^2 pour t voisin à t^0 et $z^0 = \zeta(t^0)$. Enfin, si les conditions (16) et (17) sont vérifiées, il existe dans un voisinage E_n de x^0 une solution unique $a(x)$ de la classe C^2 et vérifiant les conditions initiales

$$x_i = x_i^0, \quad (i = 1, \ldots, m), \qquad z = \zeta(x_{m+1}, \ldots, x_n),$$

et le système (15).

II Chapitre

SUR LE SYSTÈME EN INVOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

Les systèmes des équations aux dérivées partielles du second ordre *en involution de Darboux-Lie ou en involution de l'intégrabitité complète* admettent d'établir plusieurs propriétés qui sont analogues aux propriétés de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

1. Sur l'involution de Darboux-Lie

Considérons l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$A(x, y, z, p, q, r, s, t)=0 \tag{1}$$

d'une fonction réelle z des deux variables indépendantes en utilisant les désignations habituelles

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}, \quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Introduisons une équation auxiliaire en l'écrivant sous la forme

$$B(x, y, z, p, q, r, s, t)=0 \tag{2}$$

de sorte que l'on ait

$$\mathcal{D}\left(\frac{A, B}{r, t}\right) \neq 0. \tag{3}$$

Considérons les variables

$$z, p, q, r, s, t \tag{4}$$

comme les fonctions des deux variables indépendantes x et y, liées par les relations

$$\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy, \\ dp &= r\,dx + s\,dy, \\ dq &= s\,dx + t\,dy. \end{aligned} \tag{4'}$$

Formons les équations dérivées du premier ordre du système (1), (2) respectivement par rapport aux variables indépendantes x et y

$$
\begin{aligned}
&A_r\,\alpha + A_s\,\beta + A_t\,\gamma + D_x\,A = 0,\\
(5)\qquad &A_r\,\beta + A_s\,\gamma + A_t\,\delta + D_y\,A = 0,\\
&B_r\,\alpha + B_s\,\beta + B_t\,\gamma + D_x\,B = 0,\\
&B_t\,\beta + B_s\,\gamma + B_t\,\delta + D_y\,B = 0,
\end{aligned}
$$

α, β, γ, δ désignant les dérivées partielles du troisième ordre de la fonction z

$$\alpha = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \beta = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}, \quad \delta = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

et en posant

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + r\frac{\partial}{\partial p} + s\frac{\partial}{\partial q},$$

$$D_y = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + s\frac{\partial}{\partial p} + t\frac{\partial}{\partial q}.$$

Éliminant de la première et de la troisième équation (5) respectivement d'abord γ et ensuite α, on obtient les deux équations suivantes

$$(6)\qquad J_1\,\alpha + J_2\,\beta + J_4 = 0, \qquad J_3\,\beta - J_1\,\gamma + J_5 = 0.$$

On obtient les autres deux équations analogues, en éliminant de la seconde et de la quatrième équation (5) d'abord δ et ensuit β

$$(7)\qquad J_1\,\beta + J_2\,\gamma + J_6 = 0 \qquad J_3\,\gamma - J_1\,\delta + J_7 = 0,$$

$J_1, \ldots, J_7$ désignant les déterminants fonctionels suivants

$$J_1 \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{A,B}{r,t}\right), \quad J_2 \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{A,B}{s,t}\right), \quad J_3 \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{A,B}{s,r}\right), \quad J_4 \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{A,B}{x,t}\right),$$

$$J_5 \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{A,B}{x,r}\right), \quad J_6 \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{A,B}{y,t}\right), \quad J_7 \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{A,B}{y,r}\right),$$

où les dérivées par rapport aux variables x et y sont prises totalement.

En vertu de la définition bien connue de l'involution de *Darboux-Lie*, les équations (6) et (7) ne doivent point être résolubles par rapport aux dérivées du troisième ordre. Il s'ensuit que la seconde équation de (6) et la première équation de (7) se confondent.

On en tire les conditions d'involution de *Darboux-Lie* sous la forme suivante

$$(8)\qquad \frac{J_3}{J_1} = \frac{-J_1}{J_2} = \frac{J_5}{J_6}.$$

Les systèmes des quatre équations (6) et (7), par conséquent revient au système des trois équations suivantes

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
&J_1\frac{\partial r}{\partial x}+J_2\frac{\partial r}{\partial y}+J_4=0,\\
&J_1\frac{\partial s}{\partial x}+J_2\frac{\partial s}{\partial y}+J_6=0,\\
&J_1\frac{\partial t}{\partial x}+J_2\frac{\partial t}{\partial y}+J_6J_7:J_5=0.
\end{aligned}
$$

Complétons ces dernières équations par les égalités suivantes

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
&J_1\frac{\partial z}{\partial x}+J_2\frac{\partial z}{\partial y}-J_1p-J_2q=0,\\
&J_1\frac{\partial p}{\partial x}+J_2\frac{\partial p}{\partial y}-J_1r-J_2s=0,\\
&J_1\frac{\partial q}{\partial x}+J_2\frac{\partial q}{\partial y}-J_1s-J_2t=0.
\end{aligned}
$$

L'cnsemble obtenu d'équations (9) et (10) représente un système du type de *Charpit*.

A ce système de *Charpit* on pcut associer le système suivant d'équations différentielles ordinaires des caracté istiques

$$
(CH)\qquad \frac{dx}{J_1}=\frac{dy}{J_2}=\frac{dz}{J_1p+J_2q}=\frac{dp}{J_1r+J_2s}=\frac{dq}{J_1s+Jt_2}=\frac{dr}{-J_4}=\frac{ds}{-J_6}=\frac{dt}{-J_6J_7:J_5}.
$$

2. L'application des conditions d'involution de Darboux-Lie

On peut appliquer les conditions (8) d'involution de *Darboux-Lie* pour chercher une fonction $B(x, y, z, p, r, s, t)$ que soit en involution de *Darboux-Lie* avec la fonction donnée $A(x, y, z, p, q, r, s, t)$, [10].

Les conditions (8) peuvent être écrites de la manière suivante

$$(11)\qquad J_1^2+J_2J_3=0,$$

$$(12)\qquad J_1J_6+J_2J_5=0.$$

Grâce aux valeurs citées antéreurement pour J_i on peut la condition (11) mettre sous la forme

$$(11')\qquad (A_rB_t-A_tB_r)^2+(A_sB_t-A_sB_s)(A_sB_r-A_rB_s)=0.$$

En vertu de l'hypothèse $A_r\neq 0$ et des notations suivantes

$$A_s:A_r=m,\qquad A_t:A_r=n$$

on obtient

$$(B_t - B_r n)^2 + (m B_t - n B_s)(m B_r - B_s) = 0$$

ou

$$2 B_t = m B_s + (2n - m^2) B_r + R$$

où l'on a posé

$$R = \pm (m^2 - 4n)^{1/2} (B_s - m B_r).$$

En introduisant la désignation k_{12} pour la racine de l'équation algébrique du second ordre

$$A_r k^2 - A_s k + A_t = 0$$

on peut la condition (11) étudiée mettre sous la forme

(11″) $$B_t - k_{12} B_s + k_{12}^2 B_r = 0.$$

Quant à la condition (12), en nous servant des désignations pour les valeurs m et n et posant

$$\frac{D_x A}{A_r} \equiv \mu, \quad \frac{D_y A}{A_r} \equiv \nu$$

on mettra la condition mentionnée sous la forme cherchée (en vertu de B_s, tirée de (11″))

$$2 \nu B_t = N + n \nu B_r \pm (N - n \nu B_r), \quad N \equiv k_{12} D_x B + n D_y B - \mu k_{12} B_r.$$

On prendre de deux formules celle qui correspond au signe supérieur. Il en résulte la seconde condition cherchée

(12′) $$k_{12} D_x B + n D_y B - \mu k_{12} B_r - \nu B_t = 0.$$

De cette manière on vient d'obtenir deux équations (11″) (12′) qui sont linéaires par rapport aux dérivées partielles du premier ordre de la fonction B. Les formules obtenues, [10], seront utiles pour chercher une fonction B qui soit en involution de *Darboux-Lie* avec la fonction donnée: A.

3. Sur l'involution de l'intégrabilité complète et la méthode de N. Saltykow

Considérons à présent les équations aux dérivées partielles du second ordre que l'on écrira sous la forme

(13) $$r + a(x, y, z, p, q, s, t) = 0$$

Introduisant une équation auxiliaire en l'écrivant sous la forme

(14) $$t + b(x, y, z, p, q, s) = 0.$$

Différentiant les équations (13) et (14) respectivement par rapport aux variables x et y on obtient les équations suivantes

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x}+a_s\dfrac{\partial s}{\partial x}+a_t\dfrac{\partial t}{\partial x}+D_x a=0, \\ \dfrac{\partial r}{\partial y}+a_s\dfrac{\partial s}{\partial y}+a_t\dfrac{\partial t}{\partial y}+D_y a=0, \\ \dfrac{\partial t}{\partial x}+b_s\dfrac{\partial s}{\partial x}+D_x b=0, \\ \dfrac{\partial t}{\partial y}+b_s\dfrac{\partial s}{\partial y}+D_y b=0. \end{cases}$$

En utilisant que les valeurs des quantités

$$(16)\qquad z(x, y),\quad p(x, y),\quad q(x, y),\quad r(x, y),\quad s(x, y),\quad t(x, y)$$

vérifient les conditions

$$(17)\qquad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial s}{\partial x},\qquad \frac{\partial s}{\partial y}=\frac{\partial t}{\partial x}$$

on peut les relations (15) transformer et mettre sous la forme nouvelle

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x}+(a_s-a_t b_s)\dfrac{\partial r}{\partial y}-a_t D_x b+D_x a=0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial x}+(a_s-a_t b_s)\dfrac{\partial s}{\partial y}-a_t D_y b+D_y a=0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial y}+b_s\dfrac{\partial s}{\partial x}+D_x b=0, \\ \dfrac{\partial t}{\partial y}+b_s\dfrac{\partial t}{\partial x}+D_y b=0. \end{cases}$$

La seconde et la troisième équation (18) donnent les dérivées de la fonction s

$$(19)\qquad \frac{\partial s}{\partial x}=-\frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad \frac{\partial s}{\partial y}=-\frac{\Delta_2}{\Delta}$$

où l'on vient de poser

$$(20)\qquad \Delta\equiv\begin{vmatrix} b_s & 1 \\ 1 & a_s-a_t b_s \end{vmatrix}.$$

Δ_1 et Δ_2 représentent ce qui devient le déterminant Δ en y remplaçant respectivement les élements des colonnes par les termes des equations considérées indépendantes des dérivées de la fonction s.

La condition d'involution d'intégrabitité complète du système (13) et (14) est exprimée par la condition nécessaire de la compatibilité des équations (19) sous la forme suivante

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta_2}{\Delta}\right). \tag{21}$$

La condition (21) est, par rapport à la fonction inconnue b, linéaire aux dérivées partielles du second ordre par rapport aux variables x, y, z, p, q, s.

Dans le cas du système des équations (13) et (14) les conditions de l'involution de *Darboux-Lie* sont exprimées par les relations suivantes (voir les conditions générales (8)):

$$\begin{gathered} a_t b_s^2 - a_s b_s + 1 = 0, \quad \text{ou} \quad \Delta = 0, \\ D_x b + b_s (a_t D_y b - D_y a) = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Pour le système de deux équations de la forme suivante

$$\begin{gathered} r + H(x, y, z, p, q, s) = 0, \\ t + \Phi(x, y, z, p, q, s) = 0 \end{gathered} \tag{23}$$

les conditions d'involution de *Darboux-Lie* sont de la forme

$$\begin{gathered} H_s \Phi_s = 1, \\ D_x \Phi = \Phi_s D_y H \end{gathered} \tag{24}$$

et la condition de *l'intégrabilité complète* est de la forme

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{D_y H - H_s D_x \Phi}{H_s \Phi_s - 1}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{D_x \Phi - \Phi_s D_y H}{H_s \Phi_s - 1}\right). \tag{25}$$

Au cas du système (23) les relations (18) ont les formes suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial x} + H_s \frac{\partial r}{\partial y} + D_x H = 0, \\ &\frac{\partial s}{\partial x} + H_s \frac{\partial s}{\partial y} + D_y H = 0, \\ &\frac{\partial s}{\partial y} + \Phi_s \frac{\partial s}{\partial x} + D_x \Phi = 0, \\ &\frac{\partial t}{\partial y} + \Phi_s \frac{\partial t}{\partial x} + D_y \Phi = 0. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

En utilisant les raisonnements les plus élémentaires, analogues à la théorie de *Lagrange-Charpit* pour les équations partielles du première ordre, *N. Saltykow*, [11], démontrait les deux théorèmes suivants.

Théorème 1. Si les valeurs (16) de r, s, t vérifient les conditions (17), alors les fonctions (16) satisfont aux équations (26).

Théorème 2. Si les fonctions (16) vérifient les équations (23), (26), les conditions (17) en découlent comme conséquence immédiate.

Cela étant, l'intégration du système (23) dépend de l'existence de la solution du système des équations (23) et (26).

En effet, si la solution des équations (23) et (26) existe, elle donne, en vérifiant les conditions (17), le système des trois équations aux différentielles totales

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy \tag{27}$$

dont l'intégration définit la fonction cherchée.

Donc, la résolution du problème posé dépend de l'intégrabilité des équations (26).

Les valeurs de r et t sont déterminées par le système donné (23). Il ne reste qu'à trouver la fonction s qui doivent être compatible avec les deux fonctions connues r et t. Pour déterminer la fonction s on a les deux équations

$$\begin{aligned} &\frac{\partial s}{\partial x} + H_s \frac{\partial s}{\partial y} + D_y H = 0, \\ &\frac{\partial s}{\partial y} + \Phi_s \frac{\partial s}{\partial x} + D_x \Phi = 0. \end{aligned} \tag{26'}$$

Il est nécessaire de distinguer trois cas suivants, [11]:

1) Il existe la condition (25) de l'intégrabilité complète du système (23).

L'intégration du système (23) s'achève en intégrant le système des quatre équations aux différentielles totales, formé par (27) et l'équation équivalent au système jacobien (26') (en supposant que les valeurs de r et t soient données par (23)).

2) Ils existent les conditions (24) d'involution de *Darboux-Lie* et les équations (26') se confondent.

3) La condition (25) n'est pas vérifiée identiquement en vertu des relations (23) et (26'). Il en résulte une nouvelle relation entre les variables (16), ainsi que x et y. On a dans ce cas dernier de s'assurer si cette nouvelle relation est compatible ou non avec le système donné (23).

Citons quelques exemples des systèmes intégrables par la méthode *N. Saltykow*:

$$\left.\begin{aligned} r + xs &= 0, \\ t - a &= 0, \end{aligned}\right\} \quad z = 1/2\, ay^2 + C_1 x\, (y - x^6/6) + C_2 x + C_3 y + C_4;$$

$$\left.\begin{aligned} r + xs &= 0, \\ t + ys &= 0, \end{aligned}\right\} \quad z = C_1\, (xy - x^3/6 - y^3/6) + C_2 x + C_3 y + C_4,$$

où les C désignent dans les intégrales complètes correspondantes quatre constantes arbitraires.

4. Sur la notion et les propriétés de l'intégrale complète

Il s'agit à présent de poser le problème suivant: établir les conditions qui doivent être satisfaites par l'intégrale complète du système (23) aux cas de l'involution de *Darboux-Lie* et de l'involution de l'intégrabilité complète.

E. Goursat, [12], en partant de l'équation

$$r + 2\,sm + t\,m^2 + 2\,\psi\;(x, y, z, p, q, m) = 0$$

m étant un paramètre, et l'étudiant d'un point géométrique, établit les conditions dites dans un cas spécial, [13].

Le résultat récemment acquis sur le problème posé, [13], s'obtient d'une méthode purement analytique dans le cas général du système (23).

Considérons le système donné suivant

$$\text{(23)} \qquad \begin{aligned} r + H\,(x, y, z, p, q, s) &= 0,\\ t + \Phi\,(x, y, z, p, q, s) &= 0, \end{aligned}$$

qui est en involution de *Darboux-Lie*

$$\text{(24}_1\text{)} \qquad H_s\,\Phi_s = 1,$$

$$\text{(24}_2\text{)} \qquad D_y\,H = H_s\,D_x\,\Phi.$$

Nous partons de l'équation

$$\text{(28)} \qquad z = V\,(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4)$$

où C_i sont les constantes arbitraires distinctes et indépendantes des variables x et y. Supposons que $V \in C^3(D)$, D désignant un domaine de x, y, C_1, C_2, C_3, C_4. Formons les équations dérivées

$$\text{(29)} \qquad \begin{aligned} p &= V_x\;(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4),\\ q &= V_y\;(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4),\\ s &= V_{xy}\,(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4). \end{aligned}$$

$$\text{(30)} \qquad \begin{aligned} r &= V_{xx}\,(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4),\\ t &= V_{yy}\,(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4) \end{aligned}$$

sous la condition suivante dans le domaine D

$$\text{(31)} \qquad \Delta_{xy} \equiv \mathcal{D}\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xy}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right) \neq 0.$$

Si le résultat de l'élimination des paramètres C_i parmi les équations (28), (29) et (30) ne donne que les équations (23), nous dirons dans ce cas que *l'intégrale complète* du système (23) est définit par l'équation considérée (28).

Dans le cas quand le système (23) est en involution de *Darboux-Lie*, son intégrale complète (28) doit satisfaire aux conditions complémentaires.

En effet, les équations (28) et (29), grâce à (31), sont équivalentes dans D aux équations

$$F_k(x,y,z,p,q,s) = C_k, \quad (k=1,2,3,4). \tag{32}$$

En vertu des équations précédentes et (23) on a les égalités suivantes:

$$-H(x,y,z,p,q,s) = V_{xx}(x,y,F_1,F_2,F_3,F_4) \equiv \bar{V}_{xx}, \tag{33}$$

$$-\Phi(x,y,z,p,q,s) = V_{yy}(x,y,F_1,F_2,F_3,F_4) \equiv \bar{V}_{yy}. \tag{34}$$

En différentiant les relations évidentes

$$\bar{F}_k \equiv F_k(x,y,V,V_x,V_y,V_{xy}) = C_k, \quad (k=1,2,3,4) \tag{35}$$

par rapport aux C_i on obtient

$$\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial C_i} + \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial p}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_i} + \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial q}\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_i} + \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial s}\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial C_i} \equiv \frac{\partial C_k}{\partial C_i},$$

$$(i,k=1,2,3,4)$$

Grâce à (31), il en résulte

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial z} = \frac{1}{\Delta_{xy}}\,\mathcal{D}\left(\frac{C_k, V_x, V_y, V_{xy}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right), \quad \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial p} = \frac{1}{\Delta_{xy}}\,\mathcal{D}\left(\frac{V, C_k, V_y, V_{xy}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right), \\ &\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial q} = \frac{1}{\Delta_{xy}}\,\mathcal{D}\left(\frac{V, V_x, C_k, V_{xy}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right), \quad \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial s} = \frac{1}{\Delta_{xy}}\,\mathcal{D}\left(\frac{V, V_x, V_y, C_k}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right) \end{aligned}\right. \tag{36}$$

$$(k=1,2,3,4).$$

En différentiant l'égalité (33) par rapport à s on obtient

$$-H_s = \sum_{k=1}^{4} \bar{V}_{xx}\, C_k \frac{\partial F_k}{\partial s},$$

ou

$$-(H_s) = \sum_{k=1}^{4} V_{xx}\, C_k \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial s},$$

où la parenthèse signifit le résultat de la substitution de z, p, q, s respectivement par leurs valeurs V, V_x, V_y, V_{xy}. Grâce à l'égalité dernière de (36) on a

$$-(H_s) = \frac{\Delta_{xx}}{\Delta_{xy}}. \tag{37}$$

désignant par Δ_{xx} le déterminant fonctionnel

(31′) $$\Delta_{xx} \equiv \mathcal{D}\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xx}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right).$$

D'une manière analogue en utilisant les relations (34), (35) et (36) on peut aussi obtenir

$$-(\Phi_s) \equiv \frac{\Delta_{yy}}{\Delta_{xy}},$$

(38) $$(D_y H) \equiv -V_{xxy} + \frac{\Delta_{xx}}{\Delta_{xy}} V_{xyy}$$

$$(D_x \Phi) \equiv -V_{yyx} + \frac{\Delta_{yy}}{\Delta_{xy}} V_{xxy},$$

où l'on a posé

(31″) $$\Delta_{yy} \equiv \mathcal{D}\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{yy}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right)$$

et $V_{xxy} = \partial^3/\partial x \, \partial xy$, etc.

La condition (24_1) nous donne

$(24'_1)$ $$(H_s) \cdot (\Phi_s) = 1,$$

où les parenthèses ont les significations antérieurement établies. Grâce aux égalités (37), (38), $(24_1')$ on a

$$(H_s) \cdot (\Phi_s) \equiv (\Delta_{xx}/\Delta_{xy}) \; (\Delta_{yy}/\Delta_{xy}) = 1$$

ou

(39) $$\Delta_{xx} \; \Delta_{yy} - \Delta^2_{xy} = 0.$$

La relation (24_2) ou la relation suivante

$$(D_y H) = (H_s) \cdot (D_x \Phi)$$

est vérifiée identiquement en vertu de la condition (39), à savoir

$$(D_y H) - (H_s) \; (D_x \Phi) \equiv -V_{xxy} + \frac{\Delta_{xx}}{\Delta_{xy}} V_{xyy} + \frac{\Delta_{xx}}{\Delta_{xy}} \left(-V_{yyx} + \frac{\Delta_{yy}}{\Delta_{xy}} V_{xxy} \right) = 0.$$

Donc, la relation (24_2) n'impose pas des conditions nouvelles à la fonction V.

On peut démontrer que les conditions (31) et (39) sont aussi suffisantes.

Donc, l'équation (28) définit une intégrale complète du système (23) en involution de *Darboux-Lie* si la fonction V admet les conditions nécessaires et suffisantes

$$\Delta_{xy} \neq 0, \quad \Delta_{xx} \, \Delta_{yy} - \Delta^2_{xy} = 0$$

$\Delta_{xx}, \Delta_{yy}, \Delta_{xy}$ désignant les déterminants fonctionnels (31), (31′), (31″).

Étudions à présent le cas du système (23) en involution de l'intégrabilité complète:

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{D_1}{D}\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{D_2}{D}\right], \tag{25'}$$

où l'on a les désignations abrégées suivantes

$$D\equiv H_s\Phi_s-1,\quad D_1\equiv H_s D_x\Phi-D_y H,\quad D_2\equiv\Phi_s D_y H-D_x\Phi. \tag{41}$$

Grâce aux relations (38) et suivantes

$$(D)\equiv\Delta_{xx}\,\Delta_{yy}/\Delta^2_{xy}-1,\ (D_1)/(D)=-V_{xxy},\ (D_2)/(D)=-V_{xy}.$$

les parenthèses désignant le résultat de la substitution de z, p, q, s respectivement par les fonctions V, V_x, V_y, V_{xy}, la condition

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{(D_1)}{(D)}\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{(D_2)}{(D)}\right],\quad \Delta_{xx}\,\Delta_{yy}/\Delta^2_{xy}-1\neq 0 \tag{25''}$$

devient

$$\frac{\partial}{\partial y}(V_{xxy})=\frac{\partial}{\partial x}(V_{xyy}).$$

En partant de la condition

$$\Delta_{xx}\,\Delta_{yy}/\Delta^2_{xy}-1\neq 0$$

et en substituant les C_i dans (25″) par les fonctions (32) on a (25′).

Donc, en vertu des considérations précédentes on peut distinguer les intégrales complètes des systèmes d'équations en involution de *Darboux-Lie* et aussi, d'autre part, d'équations qui se trouvent en involution d'intégrabilité complète:

La formule $z=V(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4)$ sous l'hypothèse $\Delta_{xy}\neq 0$ est une intégrale complète du système (23) en involution de *Darboux-Lie* si l'expression

$$\Delta_{xx}\,\Delta_{yy}-\Delta^2_{xy}$$

est identiquement nulle, ou l'on a introduit les notations suivantes

$$\Delta_{xx}\equiv\mathfrak{D}\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xx}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right),\quad \Delta_{yy}\equiv\mathfrak{D}\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{yy}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right),\quad \Delta_{xy}\equiv\mathfrak{D}\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xy}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right).$$

Si par la formule $z=V$ est défini l'intégrale complète du système en involution d'intégrabilité complète, l'expression

$$\Delta_{xx}\,\Delta_{yy}-\Delta^2_{xy}$$

est distincte du zéro.

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} s=F(x, y, z, p, q, r),\\ t=\Phi(x, y, z, p, q, r),\end{cases} \tag{42}$$

et les expressions suivantes

$$\delta \equiv \Phi_r - F_r^2,$$

$$\delta_1 \equiv D_y F + F_r D_x F - D_x \Phi,$$

$$\delta_2 \equiv F_r D_y F + \Phi_r D_x F - F_r D_x \Phi.$$

Le système (42) est en involution de *Darboux-Lie* si on a lieu identiquement les conditions suivantes

$$\delta = 0, \quad \delta_1 = 0$$

et le système (42) est en involution d'intégrabilité complète au cas

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta_2}{\delta}\right).$$

D'une manière analogue comme au cas du système (23) on peut établir: Par la formule

$$z = V(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4)$$

sous l'hypothèse $\Delta_{xx} \neq 0$ est défini une intégrale complète du système (42) en involution de *Darboux-Lie* ou en involution d'intégrabilité complète selon que l'expression

$$\Delta_{xx} \Delta_{yy} - \Delta^2_{xy}$$

est égale identiquement ou distincte du zéro.

Ces propriétés caractéristiques de l'intégrale complète du système (23) ou (42) sont importantes pour l'étude des systèmes considérés que l'on étudiera en suite.

5. Le problème de Cauchy — au moyen de la méthode de la variation des constantes

La formation de l'intégrale de *Cauchy* des systèmes en involution de *Darboux-Lie* à l'aide de l'intégrale complète va traiter dans ce paragraphe.

Il est bien connu qu'on peut pour le système en involution de *Darboux-Lie*

$$\begin{cases} s = F(x, y, z, p, q, r), \\ t = \Phi(x, y, z, p, q, r) \end{cases} \tag{43}$$

établir le théorème suivant:

Soient $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0$ un système des valeurs des variables x, y, z, p, q, r dans les voisinages desquelles les fonctions F et Φ sont holomorphes; soit, de plus, $\Pi(x)$ une fonction holomorphe dans le voisinage du point x_0 telle que l'on ait $\Pi(x_0) = z_0$, $\Pi'(x_0) = p_0$, $\Pi''(x_0) = r_0$. Il existe une intégrale des équations (43), *régulière dans le voisinage des valeurs x_0, y_0, se réduisant à $\Pi(x)$ pour $y = y_0$, et pour laquelle la dérivée $\partial z/\partial y$ prend la valeur q_0, pour $x = x_0$, $y = y_0$.*

Ce théorème se démontre d'une manière comme dans le cas général de *Cauchy*, [14].

D'autre part, on peut déterminer l'intégrale de *Cauchy* à l'aide des multiplicités caractéristiques et la représenter comme une surface passant par une courbe arbitraire dont le plan tangent est donné arbitrairement en un point de la courbe mentionnée, [14]. Cette méthode des caractéristiques était complétée par la théorie des fonctions caractéristiques, [10].

Notre but est de former l'intégrale de *Cauchy* par la méthode de la variation des constantes dans l'intégrale complète. Pour résoudre ce problème nous allons utiliser les propriétés connues de l'intégrale complète, [13], [15].

Considérons, pour fixer les idées, le système en involution de *Darboux-Lie* (43), vérifiant les conditions d'existence de l'intégrale complète, [14], admettant l'intégrale dite sous la forme suivante

$$z=V(x, y, C_1, C_2. C_3, C_4). \tag{44}$$

Supposons que $V \in C^4(D'), D'$ désignant un domain de x, y, C_1, C_2, C_3, C_4, et que soit

$$\Delta_{xx} \equiv \mathcal{D}\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xx}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right) \neq 0 \tag{45}$$

dans le domain D'.

Rappelons d'abord le résultat connu, [15]:

Il existe la relation

$$\mathcal{D}\left(\frac{\alpha, \beta}{x, y}\right) \equiv V_i\,(\Delta_{xx}\, \Delta_{yy}-\Delta^2_{xy})/(i, j, k)^3=0 \tag{46}$$

où l'on a

$$V_i \equiv \frac{\partial V}{\partial C_i},\ (i, j, k) \equiv \mathcal{D}\left(\frac{V, V_x, V_y}{C_i, C_j, C_k}\right),\ \alpha \equiv \left(\frac{(i, k, l)}{(i, j, k)}\right),\ \beta \equiv \left(\frac{(i, j, l)}{(i, j, k)}\right). \tag{47}$$

En variant les constantes C_i, dans la formule (44), posons

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial V}{\partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial \xi_j}=0,\quad \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial \xi_j}=0,\quad \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial C_i} \frac{\partial C_i}{\partial \xi_j}=0 \tag{48}$$

avec $\xi_1 \equiv x$, $\xi_2 \equiv y$. L'intégrale générale, à une fonction arbitraire, du système (43) est défini par la formule (44) et les suivantes

$$C_{i+1}=\varphi_i(C_1), \quad (i=1, 2, 3) \tag{49}$$

$$\begin{gathered} V_1+\sum_{i=1}^{3} V_{i+1}\varphi_i'=0, \qquad V_{x1}+\sum_{i=1}^{3} V_{x, i+1}\varphi_i'=0, \\ V_{y1}+\sum_{i=1}^{3} V_{y, i+1}\varphi_i'=0, \end{gathered} \tag{50}$$

avec $V_{xi} \equiv \partial^2 V/\partial x\, \partial C_i$, $V_{yi} \equiv \partial^2 V/\partial y\, \partial C_i$.

Sous l'hypothèse $(2, 3, 4) \neq 0$ écrivons les équations (50) à la forme suivante

$$\varphi_1' = -\frac{(1, 3, 4)}{(2, 3, 4)}, \quad \varphi_2' = -\frac{(2, 1, 4)}{(2, 3, 4)}, \quad \varphi_3' = -\frac{(1, 2, 3)}{(2, 3, 4)}.$$

Grâce à la condition (46), on en tire

(51) $$\varphi_i' = F_i(C_1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3', \varphi_3), \quad (i = 1, 2).$$

Donc, il n'y a, entre les fonctions φ_i, qu'une fonction arbitraire.

On va chercher la solution particulière $z = \psi(x, y)$ du système (43) parmi les solutions que l'on obtient de l'intégrale complète par la variation des constantes (les fonctions $C_i(x, y)$ vérifient les conditions (48)).

Donc, on va appliquer les résultats précédents pour établir l'intégrale du système (43) satisfaisant aux conditions

(44') $$z = \Pi(x) \text{ pour } y = y_0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = a \text{ pour } x = x_0, \ y = y_0;$$

x_0, y_0, a étant les valeurs constantes.

Posons

(52) $$V(x, y_0, C_1, C_2, C_3, C_4) = \Pi(x)$$

et cherchons les fonctions C_i qui doivent satisfaire aux conditions (48). On a d'abord

(53) $$\sum_{i=1}^{4} V_i(x, y_0, C_1, C_2, C_3, C_4)\frac{\partial C_i}{\partial x} = 0, \quad \sum_{i=1}^{4} V_{xi}(.\,.)\frac{\partial C_i}{\partial x} = 0, \quad \sum_{i=1}^{4} V_{yi}(.\,.)\frac{\partial C_i}{\partial x} = 0.$$

En différentiant la relation (52) par rapport à x, on obtient

$$V_x(.\,.) + \sum_{i=1}^{4} V_i(.\,.)\frac{\partial C_i}{\partial x} = \Pi'(x)$$

ou, en vertu de la première condition (53), aussi

(54) $$V_x(x, y_0, C_1, C_2, C_3, C_4) = \Pi'(x).$$

Appliquant le même procédé à la relation (54) et en utilisant la seconde condition (53), on a

(55) $$V_{xx}(x, y_0, C_1, C_2, C_3, C_4) = \Pi''(x).$$

Supposant que les équations (52), (54), (55) soient résolubles, grâce à la condition (45), par rapport à trois des constantes C_i, on a

(56) $$\mathcal{D}\left(\frac{V, V_x, V_{xx}}{C_1, C_3, C_4}\right) \neq 0, \quad C_{i+1} = a_i(x, y_0, C_1). \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Pour déterminer C_1 on a, en vertu de la dernière condition (53) (et de la première de (56)), l'équation différentielle ordinaire

$$(57) \qquad V_{y1}[x, y_0, C_1, a_1, a_2, a_3]\frac{dC_1}{dx} + \sum_{i=1}^{3} V_{y,i+1}[..]\frac{\partial a_i}{\partial x} = 0,$$

parce que, grâce aux conditions (45) et (56), le coefficient de dC_1/dx est distincte du zéro. Soit l'inégrale générale de l'équation (57)

$$(58) \qquad C_1 = a_4(x, y_0, b)$$

b étant une constante arbitraire. Enfin, pour déterminer b on a la condition

$$V_y\{x_0, y_0, a_4(x_0, y_0, b), a_1[x_0, y_0, a_4(x_0, y_0, b)], a_2[..], a_3[..]\} = a.$$

Dans le cas général on peut mettre les équations (56) et (58) sous les formes suivantes

$$(59) \qquad C_{i+1} = \psi_i(C_1), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Pour déterminer les fonctions $C_i(x, y)$, on a, d'après (50), les conditions

$$V_1(x, y, C_1, \psi_1, \psi_2, \psi_3) + \sum_{i=1}^{3} V_{i+1}(..)\psi_i'(C_1) = 0,$$

$$V_{x1}'(x, y, C_1, \psi_1, \psi_2, \psi_3) + \sum_{i=1}^{3} V_{x,i+1}(..)\psi_i'(C_1) = 0.$$

$$V_{y1}(x, y, C_1, \psi_1, \psi_2, \psi_3) + \sum_{i=1}^{3} V_{y,i+1}(..)\psi_i'(C_1) = 0.$$

De ces trois équations il ne reste qu'une équation pour définir C_1 en fonction de x et y

$$(60) \qquad C_1 = C_1(x, y),$$

parce que les deux autres, d'après (51), sont équvalentes aux relations

$$\psi_i' = \overline{F}_i(C_1, \psi_1, \psi_2, \psi_3'), \quad (i = 1, 2)$$

qui, étant toujours identiquement vérifiées — grâce à la méthode même de la formation des fonctions ψ_i — ne produisent pas des conditions nouvelles pour C_1.

De cette manière les formules (44), (59) et (60) nous donnent l'intégrale de *Cauchy* vérifiant les conditions (44'). Cette intégrale est contenue dans l'intégrale générale du système (43).

Dans le cas où les équations (56) et (58) nous ne donnent que les valeurs constantes pour les quantités C_i, on a avec la formule (44) une intégrale de *Cauchy* vérifiant les conditions (44') et qui est contenue dans l'intégrale complète du système (43).

Exemples

1) Déterminer l'intégrale de *Cauchy* pour le système de *Goursat*

(61) $$r+s^3/3=0, \quad t-1/s=0$$

avec les conditions:

a) $z=4/3\ (y-1)^{3/2}$ pour $x=1$, et $z_x=1$ pour $x=y=1$;

b) $z=3/2\, y^{3/2}$ pour $x=1$, et $z_x=49/48$ pour $x=1$, $y=1/16$.

Une intégrale complète de ce système est

(61') $$z=4/3\,(y-C_1)^{3/2}\ x^{1/2}+C_2 x+C_3\,(y-C_1)+C_4.$$

ad a) Les équations (52), (54), (55) (en y changeant x par y) sont

$$4/3\,(y-C_1)^{3/2}+C_2+C_3\,(y-C_1)+C_4=4/3\,(y-1)^{3/2},$$

$$2\,(y-C_1)^{1/2}+C_3=2\,(y-1)^{1/2},$$

$$(y-C_1)^{-1/2}=(y-1)^{-1/2}.$$

On en tire $C_1=1$, $C_2+C_4=0$, $C_3=0$. L'intégrale correspondante (58) est $C_2=b$ et en vertu de la condition $z_x(1,\ 1)=1$, on a $b=1$. Donc, $C_2=1$ et $C_4=-1$. L'intégrale cherchée de *Cauchy* devient

(62) $$z=4/3\ x^{1/2}\,(y-1)^{3/2}+x-1.$$

ad b) Dans ce cas les équations (52), (54) et (55) nous donnent: $C_1=-3\,y$, $C_3=-3\,y^{1/2}$, $C_2+C_4=2\,y^{3/2}$. L'équation différentielle ordinaire pour déterminer C_2 est

$$6\,y^{1/2}+C'_{2},(y)=0,$$

et grâce à la condition $z_x(1,\ 1/16)=49/48$ on a $C_2=-4\,y^{3/2}+1$. Les équations (59) et (60) deviennent

$$C_2=-4\,(-C_1/3)^{3/2}+1,\quad C_3=-3\,(-C_1/3)^{1/2},$$

$$C_4=6\,(-C_1/3)^{3/2}-1,\quad C_1=3\,y:(3-4\,x).$$

L'intégrale cherchée de *Cauchy* devient

(63) $$z=2/3\,(4\,x-3)^{1/2}\ y^{3/2}+x-1$$

et elle est contenue dans l'intégrale générale.

6. Le problème de Cauchy — au moyen du système correspondant de Charpit

Dans le *Chapitre I* nous avons considéré la théorie nouvelle des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Dans ce paragraphe nous allons traiter, [34], un problème analogue concernant le système des équations aux dérivées partielles du second ordre en involution de *Darboux-Lie*:

$$\begin{cases} r+H(x, y, z, p, q, s)=0, \\ t+\Phi(x, y, z, p, q. s)=0 \end{cases} \tag{23}$$

sous les conditions

$$H_s\Phi_s=1, \quad D_y H=H_s D_x \Phi. \tag{24}$$

On peut associer au système (23) un système de *Charpit* de la forme suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}+H_s\dfrac{\partial z}{\partial y}=p+H_s q, \\ \dfrac{\partial p}{\partial x}+H_s\dfrac{\partial p}{\partial y}=r+H_s s \\ \dfrac{\partial q}{\partial x}+H_s\dfrac{\partial q}{\partial y}=s+H_s t \\ \dfrac{\partial r}{\partial x}+H_s\dfrac{\partial r}{\partial y}=-D_x H, \\ \dfrac{\partial s}{\partial x}+H_s\dfrac{\partial s}{\partial y}=-D_y H, \\ \dfrac{\partial t}{\partial x}+H_s\dfrac{\partial t}{\partial y}=-H_s D_y\Phi \end{cases} \tag{64}$$

des fonctions inconnues z, p, q, r, s, t de deux variables indépendantes x, y ou un système équivalent des caractéristiques

$$dx=\frac{dy}{H_s}=\frac{dz}{p+H_s q}=\frac{dp}{r+H_s s}=\frac{dq}{s+H_s t}=-\frac{dr}{D_x H}=\frac{ds}{-D_y H}=\frac{dt}{-H_s D_y\Phi} \tag{65}$$

en posant

$$D_x=\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial z}+r\frac{\partial}{\partial p}+s\frac{\partial}{\partial q}, \qquad H_s=\frac{\partial H}{\partial s},$$

$$D_y=\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z}+s\frac{\partial}{\partial p}+t\frac{\partial}{\partial q}, \qquad \Phi_s=\frac{\partial\Phi}{\partial s}.$$

Les valeurs initiales des variables z, p, q, r, s, t sont définies le long de la courbe donnée non caractéristique

$$x=x_0, \quad y=\tau, \quad z=z(\tau), \tag{C}$$

de telle manière qu'on a le long de la courbe (C) les conditions suivantes

$$(66)\qquad \begin{cases} r+H=0, \ t+\Phi=0 \\ dz=p\,dx+q\,dy, \ dp=r\,dx+s\,dy, \ dq=s\,dx+t\,dy, \end{cases}$$

$$(67)\qquad p=a, \ x=x_0, \ y=y_0.$$

Pour le système (64) nous posons:

Problème I. Déterminer telles intégrales des caractéristiques (65) *contenant la courbe (C), avec les valeurs correspondantes initiales pour les variables z, p, q, r, s, t. Ces intégrales forment une surface*

$$(68)\qquad z=z(x, y),$$

contenant la courbe (C) et définissent les fonctions: $z(x,y)$, $p(x,y)$, $q(x,y)$ $r(x,y)$, $s(x,y)$, $t(x,y)$ qui représentent la solution du problème initial du système de Charpit (64).

Nous n'insistons pas ici sur la formulation des propriétés précis des fonctions H, Φ, $z(\tau)$ admettant le procédé suivant employé pour résoudre le problème posé.

Nous supposons d'abord que les fonctions H, Φ soient telles qu'il existe les sept intégrales premières distinctes du système des caractéristiques (65)

$$f_i(x, y, z, p, q, s), \quad (i=1, \ldots, 5),$$

$$f_6 \equiv r+H(x, y, z, p, q, s),$$

$$f_7 \equiv t+\Phi(x, y, z, p, q, s)$$

et grâce à ces intégrales on peut écrire l'intégrale générale du système de *Charpit* (64) sous la forme

$$(69)\qquad f_{i+1}=\Pi_i(f_1), \ (i=1, \ldots, 6)$$

Π_i étant des fonctions arbitraires.

Ensuite, nous supposons encore que les fonctions: $p(\tau)$, $q(\tau)$, $r(\tau)$, $s(\tau)$, $t(\tau)$ soient bien déterminées, grâce aux conditions (66) et (67), par les équations suivantes

$$r(\tau)+H[x_0, \tau, z(\tau), p(\tau), q(\tau), s(\tau)]=0, \ t(\tau)+\Phi[\ldots]=0,$$

$$z'(\tau)=q(\tau), p'(\tau)=s(\tau), q'(\tau)=t(\tau)$$

et par la condition $p=a$ pour $x=x_0$, $y=y_0=\tau$.

Introduisions, à présent, les notations suivantes

$$\lambda_i(\tau) \equiv f_i[x_0, \tau, z(\tau), p(\tau), q(\tau), r(\tau), s(\tau), t(\tau)]$$

et les paramètres auxiliaires u_i par les relations

$$(70)\qquad \lambda_i(\tau)=u_i \qquad (i=1, \ldots, 7)$$

En éliminant le paramètre τ entre des équations (70) on obtient les six relations entre des paramètres u_i

$$u_{i+1}=p_i(u_1), \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ 6) \tag{71}$$

Donc, les fonctions arbitraires Π_i doivent avoir les formes p_i dans le cas des propositions du problème I, et la solution cherchée du problème I, c'est-à--dire les fonctions

$$z(x,y),\quad p(x,y),\quad q(x,y),\quad r(x,y),\quad s(x,y)\quad t(x,y) \tag{72}$$

sont définies par les formules

$$f_{i+1}=p_i(f_1), \qquad (i=1,\ \ldots,\ 6). \tag{72'}$$

Posons, maintenant, pour le système (23):

Problème II. La solution (72) *du système de Charpit* (64) *représente l'intégrale de Cauchy du système* (23) *sous les conditions:* (C) *et* (67).

Il suffit de démontrer que les conditions suivantes

$$\begin{cases} r(x,y)+H[x,y,z(x,y),p(x,y),q(x,y),s(x,y)]\equiv v(x,y)\equiv 0, \\ t(x,y)+\Phi[x,y,z(x,y),p(x,y),q(x,y),s(x,y)]\equiv w(x,y)\equiv 0, \end{cases} \tag{73}$$

$$\begin{cases} p(x,y)-\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x}\equiv P(x,y)\equiv 0, \\[2ex] q(x,y)-\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial y}\equiv Q(x,y)\equiv 0, \end{cases} \tag{74}$$

$$\begin{cases} r(x,y)-\dfrac{\partial p(x,y)}{\partial x}\equiv R(x,y)\equiv 0, \\[2ex] s(x,y)-\dfrac{\partial p(x,y)}{\partial y}\equiv s(x,y)-\dfrac{\partial q(x,y)}{\partial x}\equiv S(x,y)\equiv 0, \\[2ex] t(x,y)-\dfrac{\partial q(x,y)}{\partial y}\equiv T(x,y)\equiv 0 \end{cases} \tag{75}$$

sont remplies sur la surface (68).

Démontrons, par exemple, qu'il existe (73) et (75).

Grâce à l'introduction des dernières fonctions P, Q, R, S, T les trois premières équations (64) vont s'exprimer de la manière suivante:

$$\begin{cases} R+H_s Q=0, \\ R+H_s S=0, \\ S+H_s T=0, \end{cases} \tag{76}$$

parce que les fonctions (72) sont les intégrales du système (64).

Formons les équations dérivées respectivement par rapport à x et y des équations (76):

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial x}+H_s\frac{\partial Q}{\partial x}+H_{s_1}\ Q=0,\\&\frac{\partial R}{\partial x}+H_s\frac{\partial S}{\partial x}+H_{s_1}\ S=0,\\&\frac{\partial S}{\partial x}+H_s\frac{\partial T}{\partial x}+H_{s_1}\ T=0,\end{aligned}\right.\tag{77}$$

et

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial y}+H_s\frac{\partial Q}{\partial y}+H_{s_2}\ Q=0,\\&\frac{\partial R}{\partial y}+H_s\frac{\partial S}{\partial y}+H_{s_2}\ S=0,\\&\frac{\partial S}{\partial y}+H_s\frac{\partial T}{\partial y}+H_{s_2}\ T=0,\end{aligned}\right.\tag{78}$$

en introduisant les désignations

$$H_{s_1}\equiv\frac{\partial H_s}{\partial x},\qquad H_{s_2}\equiv\frac{\partial H_s}{\partial y},$$

on obtient, en vertu des relations définissant les variables v et w, les relations évidentes

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}&=\frac{\partial r(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}+\\&\qquad+\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial s}\frac{\partial s(x,y)}{\partial x},\\\frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{\partial r(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}+\\&\qquad+\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial q(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial s}\frac{\partial s(x,y)}{\partial y},\\\frac{\partial w}{\partial x}&=\frac{\partial t(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}+\\&\qquad+\frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial s}\frac{\partial s(x,y)}{\partial x},\\\frac{\partial w}{\partial y}&=\frac{\partial t(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}+\\&\qquad+\frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial s}\frac{\partial s(x,y)}{\partial y}\end{aligned}\right.\tag{79}$$

et écrivons, en vertu des équations (64), les identités suivantes

$$\frac{\partial r(x,y)}{\partial x}+H_s\frac{\partial r(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial z}p(x,y)+\frac{\partial H}{\partial p}r(x,y)+\frac{\partial H}{\partial q}s(x,y)=0,$$

$$\frac{\partial s(x,y)}{\partial x}+H_s\frac{\partial s(x,y)}{\partial y}+H_s\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}p(x,y)+\frac{\partial \Phi}{\partial p}r(x,y)+\frac{\partial \Phi}{\partial q}s(x,y)\right]=0,$$

$$(80)\quad \frac{\partial t(x,y)}{\partial x}+H_s\frac{\partial t(x,y)}{\partial y}+H_s\left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}q(x,y)+\frac{\partial \Phi}{\partial p}s(x,y)+\frac{\partial \Phi}{\partial q}t(x,y)\right]=0,$$

$$\frac{\partial s(x,y)}{\partial x}+H_s\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}q(x,y)+\frac{\partial H}{\partial p}s(x,y)+\frac{\partial H}{\partial q}t(x,y=0$$

Éliminant les dérivées $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ respectivement entre les équations (79) et (80) et utilisant les relations évidentes

$$\frac{\partial s(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial r(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial t(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial s(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial S}{\partial y}$$

on obtient

$$(81)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}=H_s\left(\dfrac{\partial S}{\partial x}-\dfrac{\partial R}{\partial y}\right)-H_zP-H_pR-H_qS, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial S}{\partial x}-H_zQ-H_pS-H_qT; \end{cases}$$

$$(82)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial T}{\partial x}-\dfrac{\partial S}{\partial y}-\Phi_zP-\Phi_pR-\Phi_qS, \\ H_s\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial S}{\partial y}-\dfrac{\partial T}{\partial x}-H_s(\Phi_zQ+\Phi_pS+\Phi_qT). \end{cases}$$

Or, en vertu de l'équation $H_s=dy/dx$, (65), les équations (81) et (82) nous donnent

$$(81')\quad \frac{dv}{dx}=-H_z(P+H_sQ)-H_p(R+H_sS)-H_q(S+H_sT),$$

$$(82')\quad \frac{dw}{dx}=-\Phi_z(P+H_sQ)-\Phi_p(R+H_sS)-\Phi_q(S+H_sT),$$

ou, grâce aux relations (76), on aura

$$\frac{dv}{dx}=0,\quad \frac{dw}{dy}=0.$$

Dans le point initial de la courbe (C) on a

$$v=0, \quad w=0,$$

donc

$$v(x, y)\equiv 0, \quad w(x, y)\equiv 0$$

et les conditions (73) sont remplies.

Quant aux conditions (75), nous supposons que les conditions (73) et (74) (nous n'insistons pas ici sur la démonstration de l'existence des conditions (74)) soient remplies. Dans ce cas les relations (81) et (82) nous donnent

$$H_s\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)-H_p R-H_q S=0, \tag{83}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial S}{\partial x}-H_p S-H_q T=0, \tag{84}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial S}{\partial y}-\Phi_p R-\Phi_q S=0,\\ &\frac{\partial S}{\partial y}-\frac{\partial T}{\partial x}=H_s(\Phi_p T+\Phi_q S). \end{aligned}\right. \tag{85}$$

En utilisant les équations dérivées (77) et (78), les équations (83), (84) et (85) nous donnent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dR}{dx}+H_p R+(H_q+H_{s_1})S=0,\\ &\frac{dS}{dx}+(H_p+H_{s_2})\,S+H_q T=0,\\ &\frac{dT}{dx}-\Phi_p' R-\Phi_q S+H_{s_2} T=0. \end{aligned}\right. \tag{86}$$

Par conséquent, les fonctions R, S, T sont définies par un système linéaire et homogène des équations différentielles ordinaires. Le long de la courbe (C) on a

$$R=0, \quad S=0, \quad T=0$$

donc

$$R(x, y)\equiv 0, \quad S(x, y)\equiv 0, \quad T(x, y)\equiv 0$$

et les conditions (75) sont remplies.

Exemple. Résoudre le problème de *Cauchy* pour le système de *Goursat:*

$$r+s^3/3=0, \quad t-1/s=0 \tag{61}$$

avec les conditions

$$(C) \qquad x=1, \; y=\tau, \quad z=4(\tau-1)^{3/2}:3$$

et

$$(67) \qquad p=1 \quad \text{pour} \quad x=1, \; y=1.$$

Dans ce cas les valeurs initiales des variables p, q, r, s, t sont

$$p(\tau)\equiv 2/3\,(\tau-1)^{3/2}+1, \;\; q(\tau)\equiv 2\,(\tau-1)^{1/2},$$

$$r(\tau)\equiv -1/3\,(\tau-1)^{3/2}, \;\; s(\tau)\equiv(\tau-1)^{1/2}, \;\; t(\tau)\equiv(\tau-1)^{-1/2}$$

et les intégrales des caractéristiques s'obtiennent sous la forme suivante

$$f_1\equiv s, \; f_2\equiv y-s^2x, \; f_3\equiv p-2/3\,s^3x, \; f_4\equiv q-2\,sx,$$

$$f_5\equiv z-4/3\,s^3x^2-[s^2(q-2\,sx)+p-2/3\,s^3x]\,x,$$

$$f_6\equiv r+s^3/3, \; f_7\equiv t-1/s.$$

L'intégrale de *Cauchy* pour le système de *Charpit* (64) est définie d'après (72'), par les formules

$$y-s^2x=1, \; z-4/3\,s^3x^2-x=-1, \; p=2/3\,s^3x+1,$$

$$q=2\,sx, \; r=-1/3\,s^3, \; t=1/s$$

et l'on en tire les fonctions (72):

$$z(x,y)\equiv 4/3\,[x(x-y)^3]^{1/2}+x-1,$$

$$p(x,y)\equiv 2/3\left[\frac{(y-1)^3}{x}\right]^{1/2}+1, \quad q(x,y)\equiv 2\,[x(y-1)]^{1/2}$$

$$r(x,y)\equiv -1/3\left(\frac{y-1}{x}\right)^{3/2}, \; s(x,y)\equiv\left(\frac{y-1}{x}\right)^{1/2}, \; t(x,y)\equiv\left(\frac{x}{y-1}\right)^{1/2}.$$

Donc, la surface intégrale cherchée (68) est la suivante

$$z=4/3\,[x(y-1)^3]^{1/2}+x-1.$$

7. Théorème de Jacobi pour le système d'équations en involution de Darboux-Lie

Dans ce paragraphe nous allons traiter le problème suivant: *former l'intégrale générale des caractéristiques à l'aide de l'intégrale complète pour un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre en involution de Darboux-Lie.*

Jacobi, [16], a étudié ce problème concernant une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Les résultats de ces recherches sont généralisés par *N. Saltykow,* [17], [18], *Th. De-Donder,* etc.

Pour le cas d'un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre en involution de *Darboux-Lie* ce problème avait été traité par *E. Goursat*, [14], Cependant son procédé peut être simplifié et mis sous la forme analogue à celle de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. On y réussit, [15], grâce à la condition qui doit satisfaire l'intégrale complète du système considéré que nous venons d'exposer dans le paragraphe 4 de ce chapitre.

Considérons le système en involution de *Darboux-Lie*

$$(23)\qquad \begin{aligned} r+H(x, y, z, p, q, s)=0, \\ t+\Phi(x, y, z, p, q, s)=0 \end{aligned}$$

et le système correspondant des caractéristiques

$$(65)\qquad dx=\frac{dy}{H_s}=\frac{dz}{p+H_s q}=\frac{dp}{-H+sH_s}=\frac{dq}{s-\Phi H_s}=\frac{ds}{-D_y H}.$$

E. Goursat, [14], partant de l'intégrale complète

$$(87)\qquad F(x, y, z, C_1, C_2, C_3, C_4)=0$$

en tire, grâce aux considérations géométriques, une courbe caractéristique moyenant l'équation (87) et l'équation suivante

$$(88)\qquad \frac{\partial F}{\partial C_1}+\frac{\partial F}{\partial C_2}\frac{dC_2}{dC_1}+\frac{\partial F}{\partial C_3}\frac{dC_3}{dC_1}+\frac{\partial F}{\partial C_4}\frac{dC_4}{dC_1}=0.$$

L'équation (88) définit la fonction y de la variable x. Parce que les multiplicités correspondantes des caractéristiques des éléments du second ordre satisfont aux équations differentielles des caractéristiques, *E. Goursat* obtient deux relations

$$(89)\qquad \Phi_i\left(C_1, C_2, C_3, C_4, \frac{dC_2}{dC_1}, \frac{dC_3}{dC_1}, \frac{dC_4}{dC_1}\right)=0, \quad (i=1, 2)$$

entre le sept paramètres C_1, C_2, C_3, C_4, dC_2/dC_1, dC_3/dC_1, dC_4/dC_1 figurant dans l'équations (89). Éliminant, grâce aux relations (89), deux paramètres, la courbe caractéristique ne dépend que de cinq paramètres. En pratique la détermination des relations (89) et les éliminations correspondantes présentent souvent de très grandes difficultés.

Mettons l'intégrale complète du système (23) sous la forme

$$(28)\qquad z=V(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4)$$

en supposant

$$(31)\qquad \Delta_{xy}\equiv\mathfrak{D}\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xy}}{C_1, C_2, C_3, C_4}\right)\neq 0.$$

Il est aisé de démontrer que les formules

$$(29)\qquad z=V,\ p=V_x,\ q=V_y,\ s=V_{xy}$$

définissent les quatre premières intégrales du système (65). En effet, on a

$$\frac{dz}{dx}=V_x+V_y\frac{dy}{dx},\quad \frac{dp}{dx}=V_{xx}+V_{xy}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dq}{dx}=V_{xy}+V_{yy}\frac{dy}{dx},\quad \frac{ds}{dx}=V_{xxy}+V_{xyy}\frac{dy}{dx}$$

et en vertu des formules connues

$$(H_s)=-\frac{\Delta_{xx}}{\Delta_{xy}},\tag{37}$$

$$(D_y H)=-V_{xxy}+\frac{\Delta_{xx}}{\Delta_{xy}}V_{xyy}\tag{38}$$

et aussi

$$\frac{dy}{dx}=(H_s)$$

le symbole ( ) désignant le résultat de la substitution de z, p, q, s respectivement par V, V_x, V_y, V_{xy} et Δ_{xx}, Δ_{yy} les déterminants fonctionels (31′) et (31″), on obtient, en éliminant les constantes C_l définies par les formules (29), les équations suivantes

$$\frac{dz}{dx}=p+qH_s,\quad \frac{dp}{dx}=-H+sH_s$$

$$\frac{dq}{dx}=s-\Phi H_s,\quad \frac{ds}{dx}=-D_y H.$$

En différentiant les identités évidentes

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+H\left(x, y, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right)=0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\Phi\left(x, y, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right)=0,$$

par rapport à C_k on obtient

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x^2\partial C_k}+\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial C_k}+\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial C_k}+\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial C_k}+\left(\frac{\partial H}{\partial s}\right)\frac{\partial^3 V}{\partial x\partial y\partial C_k}=0,\tag{90}$$

$$\frac{\partial^3 V}{\partial y^2\partial C_k}+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial C_k}+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial C_k}+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial C_k}+\tag{91}$$

$$+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)\frac{\partial^3 V}{\partial x\partial y\partial C_k}=0,\quad (k=1, 2, 3, 4).$$

Grâce à l'involution du système (23) et aux équations des caractéristiques (5) on a les relations

$$\frac{dy}{dx}=(H_s)=\frac{1}{(\Phi_s)}. \tag{92}$$

Il est connu que l'intégrale (28) vérifie identiquement la condition suivante

$$\Delta_{xx}\,\Delta_{yy}-\Delta^2_{xy}=0. \tag{39}$$

En vertu de (31), on conclut de (39)

$$\Delta_{xx}\neq 0, \quad \Delta_{yy}\neq 0. \tag{93}$$

En éliminant $(\partial H/\partial z)$, $(\partial H/\partial p)$, $(\partial H/\partial q)$, $(\partial \Phi/\partial z)$, $(\partial \Phi/\partial p)$, $(\partial \Phi/\partial q)$ des équations (90) et (91) on obtient, en vertu des (31), (93), (92) deux relations pour définir la fonction y

$$\Delta_{xx}\,dx+\Delta_{xy}\,dy=0, \tag{94}$$

$$\Delta_{xy}\,dx+\Delta_{yy}\,dy=0. \tag{95}$$

Or, elle se confondent, grâce à la condition (39).

Introduisons les symboles suivants

$$(i,j,k)=\mathfrak{D}\left(\frac{V,\ V_x,\ V_y}{C_i,\ C_j,\ C_k}\right),\quad (i,j)=\mathfrak{D}\left(\frac{V_x,\ V_y}{C_i,\ C_j}\right),\quad \underline{(i,j)}=\mathfrak{D}\left(\frac{V,\ V_x}{C_i,\ C_j}\right),$$

$$\overline{(i,j)}=\mathfrak{D}\left(\frac{V,\ V_y}{C_i,\ C_j}\right)$$

et considérons les trois hypothèses suivantes:

a) Supposons, d'abord, que le système (23) n'admet pas d'intégrales intérmédiaires avec une constante arbitraire, c'est-à-dire que $(i,j,k)\neq 0$, $(i,j,k=$ $=1,2,3,4)$. Utilisons les identités évidentes

$$\underline{(i,l)}\,(i,j,k)_x-\underline{(i,k)}\,(i,j,l)_x+\underline{(i,j)}\,(i,k,l)_x=V_i\,\Delta_{xx}$$

$$\underline{(i,l)}\,(i,j,k)_y-\underline{(i,k)}\,(i,j,l)_y+\underline{(i,j)}\,(i,k,l)_y=V_i\,\Delta_{xy}$$

$$\overline{(i,l)}\,(i,j,k)_x-\overline{(i,k)}\,(i,j,l)_x+\overline{(i,j)}\,(i,k,l)_x=V_i\,\Delta_{xy}$$

$$\overline{(i,l)}\,(i,j,k)_y-\overline{(i,k)}\,(i,k,l)_y+\overline{(i,j)}\,(i,k,l)_y=V_i\,\Delta_{yy}$$

où $(\ )_x$ et $(\ )_y$ désignant les dérivées partielles correspondantes par rapport aux x et y. On a de plus identités

$$\underline{(i,l)}\ \overline{(i,k)}-\underline{(i,k)}\ \overline{(i,l)}=-V_i\ (i,k,l),$$

$$\underline{(i,j)}\ \overline{(i,k)}-\underline{(i,k)}\ \overline{(i,j)}=-V_i\ (i,j,k).$$

Formons, ensuite, les identités suivantes

$$\underline{(i, k)}\ \Delta_{xy} - \overline{(i, k)}\ \Delta_{xx} = (i, k, l)\ (i, j, k)_x - (i, j, k)\ (i, k, l)_x,$$

$$\underline{(i, k)}\ \Delta_{yy} - \overline{(i, k)}\ \Delta_{xy} = (i, k, l)\ (i, j, k)_y - (i, j, k)\ (i, k, l)_y$$

qui donnent, grâce à la condition (39)

$$\text{(39')} \qquad \frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{(i, k, l)}{(i, j, k)}\right]}{\Delta_{xx}} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{(i, k, l)}{(i, j, k)}\right]}{\Delta_{xy}}.$$

L'équation (94), introduisant la désignation

$$\alpha \equiv \frac{(i, k, l)}{(i, j, k)}$$

admet l'intégrale sous la forme suivante

$$\alpha = \text{const}, \quad \alpha_x \neq 0, \quad \alpha_y \neq 0.$$

En effet, grâce aux conditions (31), (39), (93), (39') on peut toujours choisir les index i, j, k, l de telle manière que la fonction α soit dépendue des variables x et y.

On a de même, d'une manière analogue, les intégrales de l'équation mentionnée (94):

$$\beta \equiv \frac{(i, j, l)}{(i, j, k)} = \text{const.}, \qquad \gamma \equiv \frac{(j, k, l)}{(i, j, k)} = \text{const.}$$

Or, α, β, γ ne sont pas distinctes par rapport aux variables x et y. Démontrons, par exemple, cela pour les fonctions α, β. Considérons le déterminant

$$A \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{\alpha, \beta}{x, y}\right).$$

Substituant y les expressions pour α et β, on obtient

$$\text{(97)} \qquad A \equiv \frac{1}{(i, j, k)^3} \begin{vmatrix} (i, j, k) & (i, j, k)_x & (i, j, k)_y \\ (i, j, l) & (i, j, l)_x & (i, j, l)_y \\ (i, k, l) & (i, k, l)_x & (i, k, l)_y \end{vmatrix}.$$

D'autre part, grâce aux identités (96), on obtient la relation suivante

$$V_i\left(\Delta_{xx}\Delta_{yy} - \Delta_{xy}^2\right) = \begin{vmatrix} (i, j, k) & (i, j, k)_x & (i, j, k)_y \\ (i, j, l) & (i, j, l)_x & (i, j, l)_y \\ (i, k, l) & (i, k, l)_x & (i, k, l)_y \end{vmatrix}$$

et l'on a en vertu de (97) et (32)

$$A \equiv \frac{V_i(\Delta_{xx}\Delta_{yy}-\Delta_{xy}^2)}{(i, k, l)^3}=0.$$

De cette manière on peut prendre

(98) $$\alpha = \text{const.}, \quad \alpha_x \alpha_y \neq 0$$

pour une intégrale cherchée des caractéristiques.

b) Passons, à présent, à la seconde hypothèse. Si la fonction inconnue ne figure pas dans le système (23) et C_k représente la constante arbitraire additive dans l'intégrale complète, alors, en vertu de (98), l'intégrale des caractéristiques admet la forme suivante

$$\frac{(i, l)}{(i, j)} = \text{const.}$$

c) Supposons, enfin, conservant l'hypothèse sous b), que le système (23) ait une intégrale intermédiaire ayant la constante C_i, c'est-à-dire que l'on ait $(j, k, l)=0$. Dans ce cas l'intégrale cherchée des caractéristiques, admet la forme

$$\frac{V_{xl}}{V_{xj}} = \text{const.} \quad \frac{V_{yl}}{V_{yj}} = \text{const.}$$

Conclusion. L'intégrale générale des caractéristiques est définie, en vertu de l'intégrale complète, par les formules suivantes

(99)
$$z=V,\ p=V_x,\ q=V_y,\ s=V_{xy},\ \alpha \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{V,\ V_x,\ V_y}{C_i,\ C_j,\ C_k}\right) : \mathfrak{D}\left(\frac{V,\ V_x,\ V_y}{C_i,\ C_l,\ C_k}\right) = C_5 \quad \alpha_x \alpha_y \neq 0.$$

8. L'intégrale générale mixte

Dans ses Leçons sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre, [19], était introduite par *N. Saltykow* la notion de l'intégrale générale mixte pour une équation ou pour un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre.

On démontre dans ce paragraphe que les systèmes

(23) $$\begin{aligned} r+H\,x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ s) &= 0, \\ t+\Phi(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ s) &= 0 \end{aligned}$$

admettant une intégrale générale mixte sont:

a) en involution de *Darboux-Lie*,

b) linéaires par rapport aux r, s, t,

c) possédent une intégrale intermédiaire.

Considérons une équation de la forme

$$z = V[x, y, C_1, C_2, f(\omega)] \tag{100}$$

où f étant une fonction arbitraire de $\omega(x, y, C_1, C_2)$, et ω une fonction donnée des variables indépendantes x et y et des constantes arbitraires C_1, C_2.

On dit que par l'équation (100) est définie une intégrale générale mixte de l'équation donnée aux variables du second ordre

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{101}$$

si le résultat de l'élimination des quantités C_1, C_2, f, f', f'' parmi l'équation (100) et les équations correspondantes dérivées par rapport aux x et y — du premier et second ordre — ne donne que l'équation (101).

D'une manière analogue on peut définir l'intégrale générale mixte pour le système (23).

Pour que l'équation

$$z = V[x, y, C, f(\omega)] \tag{102}$$

à une fonction f arbitraire de la fonction donnés $\omega(x, y, C)$ et une constante C arbitraire, soit l'intégrale générale mixte du système (23), ce dernier doit s'obtenir par l'éliminations des quantités arbitraires: C, f, f', f'' entre l'équation (102) et les équations dérivées suivantes

$$p = V_x + V_f \omega_x f' \equiv d_x V, \quad q = V_y + V_f \omega_y f' \equiv d_y V,$$

$$\begin{aligned} r &= V_{xx} + 2 V_{xf} \omega_x f' + V_{ff} \omega_x^{2'} f'^2 + V_f \omega_x^2 f'' + V_f \omega_{xx} f', \\ s &= V_{xy} + (V_{xf} \omega_y + V_{fy} \omega_x) f' + V_{ff} \omega_x \omega_y f'^2 + V_f \omega_x \omega_y f'' + V_f \omega_{xy} f', \\ t &= V_{yy} + 2 V_{yf} \omega_y f' + V_{ff} \omega_y^2 f'^2 + V_y \omega_y^2 f'' + V_f \omega_{yy} f'. \end{aligned} \tag{103}$$

Par l'élimination menntionée on obtient évidemment un système (23) qui est linéaire par rapport aux r, s, t.

Grâce à l'élimination de f' entre les équations $p = d_x V$ et $q = d_y V$ on a

$$\frac{p - V_x}{\omega_x} = \frac{q - V_y}{\omega_y}. \tag{104}$$

Ensuite, par l'élimination de f entre (104) et (102) on obtiendra une relation linéaire par rapport aux p et q:

$$A(x, y, z, p, q, C) \equiv a(x, y, z, C)\, p + b(x, y, z, C)\, q + c(x, y, z, C) = 0. \tag{105}$$

La relation obtenue (105) est une intégrale intermédiaire première à une constante arbitraire C du système (23).

Supposons maintenant que l'on ait dans un domain $D(x, y, z, C)$ bien déterminé la condition suivante: $\partial A / \partial C \neq 0$ et l'équation équivalente à (105)

$$C = m(x, y, z, p, q).$$

En vertu de l'identité évidente $A(x, y, z, p, q, m) \equiv 0$ on peut obtenir les relations suivantes

$$
(106)\qquad
\begin{aligned}
&A_{xm} + A_{mm}\, m_x = 0, \quad A_{ym} + A_{mm}\, m_y = 0,\\
&A_{zn} + A_{mm}\, m_z = 0, \quad A_{pm} + A_{mm}\, m_p = 0,\\
&A_{qm} + A_{mm}\, m_q = 0.
\end{aligned}
$$

On peut obtenir le système (23) aussi et à l'aide de l'intégrale intermédiaire (105):

$$
\begin{aligned}
&\Phi \equiv (A_x) + p\,(A_z) + r\,(A_p) + s\,(A_q) = 0,\\
&W \equiv (A_y) + q\,(A_z) + s\,(A_p) + t\,(A_q) = 0,
\end{aligned}
$$

les parenthèses désignant le résultat de la substitution de la valeur C avec la fonction $m(x, y, z, p, q)$.

Grâce aux identités (106) il est aisé de voir que les équations précédentes vérifient les conditions bien connues de l'involution de *Darboux-Lie* (8)

$$
\frac{X}{Y} = -\frac{Z}{X} = -\frac{R}{T}
$$

en utilisant les désignations suivantes

$$
X \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{\Phi, W}{r, t}\right), \qquad Y \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{\Phi, W}{s, t}\right), \qquad Z \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{\Phi, W}{s, r}\right),
$$

$$
R \equiv \begin{vmatrix} D_x \Phi & D_x W \\ \Phi_r & W_r \end{vmatrix}, \qquad T \equiv \begin{vmatrix} D_y \Phi & D_y W \\ \Phi_t & W_t \end{vmatrix}.
$$

Donc, le système admettant l'intégrale générale mixte (102) est linéaire par rapport aux r, s, t et en involution de *Darboux-Lie.*

Exemples.

a) Le système

$$
st + x\,(rt - s^2)^2 = 0, \qquad 2\,x\,(rt - s^2) = pt - qs
$$

admettant l'intégrale générale mixte

$$
z = 4/3\; Cx^{3/2} + f\,(y - C^2\,x)
$$

est équivalente au système linéaire suivant en involution de *Darboux-Lie*

$$
r = \frac{xp^2\,s - xp \pm R}{x\,(pq - 2\,x \pm 2\,R)}, \qquad t = \frac{pq - 2\,x \pm 2\,R}{p^2}\,s
$$

$$
R \equiv x^2 - xpq
$$

avec l'intégrale intermédiaire

$$
p^2 + C^2\,q = 2\,Cx^{1/2}.
$$

b) Le système linéaire en involution de *Darboux-Lie*

$$s=\frac{p-xr}{y}, \qquad [t=\left(\frac{x}{y}\right)^2 r-\frac{2}{y^2}(z-yq)$$

a l'intégrale mixte

$$z=Cy-x^2 f(y/x)$$

et l'intégrale première intermédiaire

$$xp+yq=2z-Cy.$$

On peut former l'intégrale générale mixte et aussi par la méthode de la variations des constantes dans l'intégrale complète

$$z=V(x, y, C_1, C_2, C_3, C_4) \tag{44}$$

du système (23) en involution de *Darboux-Lie*, [20].

En variant les contantes dans la foimule (44) on peut obtenir les conditions suivantes

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial V}{\partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial x}=0, \quad \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial x}=0, \quad \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial x}=0,\\ &\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial V}{\partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial y}=0, \quad \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial y}=0, \quad \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial y}=0. \end{aligned} \tag{48}$$

pour les fonctions inconnues $C_i(x, y)$.

Utilisons les désignations

$$(i, j, k)\equiv\mathfrak{D}\left(\frac{V, V_x, V_y}{C_i, C_j, C_k}\right)$$

pour les déterminants fonctionels correspondants.

En supposant qu'on ait: $(2, 3, 4)=0$, et que les autres déterminants de la forme (i, j, k) soient distincts du zéro, on peut les conditions (48) mettre sous une de la forme suivante

$$\frac{\partial C_1}{\partial \xi_j}=0, \quad \frac{\partial C_2}{\partial \xi_j}=-\frac{(1, 4, 3)}{(1, 2, 3)}\frac{\partial C_4}{\partial \xi_j}, \quad \frac{\partial C_3}{\partial \xi_j}=-\frac{(1, 2, 4)}{(1, 2, 3)}\frac{\partial C_4}{\partial \xi_j}, \tag{48$_1$}$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial \xi_j}=0, \quad \frac{\partial C_2}{\partial \xi_j}=-\frac{(1, 3, 4)}{(1, 2, 4)}\frac{\partial C_3}{\partial \xi_j}, \quad \frac{\partial C_4}{\partial \xi_j}=-\frac{(1, 2, 3)}{(1, 2, 4)}\frac{\partial C_3}{\partial \xi_j}, \tag{48$_2$}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial \xi_j}=0, \quad \frac{\partial C_3}{\partial \xi_j}=-\frac{(1, 2, 4)}{(1, 3, 4)}\frac{\partial C_2}{\partial \xi_j}, \quad \frac{\partial C_4}{\partial \xi_j}=-\frac{(1, 3, 2)}{(1, 3, 4)}\frac{\partial C_2}{\partial \xi_j}, \tag{48$_3$}$$

avec $\xi_1\equiv x$, $\xi_2\equiv y$.

En vertu des équations citées et de la condition (46) on peut obtenir le système correspondant de ***Charpit***

$$(107)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(1,\,2,\,4)}{(1,\,2,\,3)}\right]\frac{\partial C_{i+1}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(1,\,2,\,4)}{(1,\,2,\,3)}\right]\frac{\partial C_{i+1}}{\partial y}\qquad (i=1,\,2,\,3)$$

pour déterminer les fonctions $C_{i+1}(x,\,y)$ inconnues. L'intégrale générale de ce système est

$$C_{i+1}=f_i\left[\frac{(1,\,2,\,4)}{(1,\,2,\,3)}\right],\qquad (i=1,\,2,\,3),$$

f_i étant trois fonctions arbitraires. Grâce aux système (48), par exemple au système (48_1) on a

$$(108)\qquad f_1'(u)=a\,[C_1,\,u,\,f_i]\,f_3',\ f_2'(u)=-uf_3',\ u\equiv(1,\,2,\,4)/(1,\,2,\,3)$$

et une des fonctions f_i reste arbitraire.

Donc, par les équations

$$z=V\,[x,\,y,\,C_1,\,f_1(u),\,f_2(u),\,f_3(u)]$$

et (108) est défini l'intégrale générale mixte avec une constante et une fonction arbitraire.

a) Reprenons l'équation *d'Ampère*

$$st+x\,(rt-s^2)=0$$

que avec l'équation

$$2\,x\,(rt-s^2)=pt-qs$$

représente un système en involution de *Darboux-Lie*. On voit immédiatement que ce système admet l'intégrale complète

$$z=4/3\,C_1\,x^{3/2}+C_2\,(y-C_1^2\,x)^2+C_3\,(y-C_1^2\,x)+C_4$$

vérifiant la condition $(2,\,3,\,4)=0$. Le système correspondant de *Charpit*

$$\frac{\partial C_{i+1}}{\partial x}+C_1^2\,\frac{\partial C_{i+1}}{\partial y}=0,\quad (i=1,\,2,\,3),\quad C_1=\text{const.}$$

a l'intégrale générale

$$C_{i+1}=f_i(u),\quad (i=1,\,2,\,3),\quad u\equiv y-C_1^2\,x.$$

Les fonctions f_i, dans ce cas, vérifient les conditions suivantes

$$f_1'=-\frac{1}{2\,u}\,f_2',\qquad f_3'=-\frac{1}{2}\,uf_2'.$$

En prennant $f_2' = u\alpha'''$ (α désignant une fonction arbitraire de u) et en substituant les constantes C_{i+1} dans l'intégrale complète par les fonctions correspondantes f_i, on obtient l'intégrale générale mixte cherchée dans la forme

$$z = 4/3\, C_1 x^{3/2} - \alpha\,(y - C_1^2 x)$$

antérieurement citée.

b) Le second système suivant en involution de *Darboux-Lie*

$$s = \frac{p - xr}{y}, \qquad t = \left(\frac{x}{y}\right)^2 r - \frac{2}{y^2}\,(z - yq)$$

a l'intégrale complète

$$z = C_1\,(C_2 + C_3)\,y + C_4^2\, xy + C_3 x^2 + C_2 C_4 y^2$$

admettant les conditions $(i, j, k) \neq 0$. En suivant un procédé de *C. Orloff*, [21] on définit les constantes nouvelles a_i par les relations suivantes

$$a_1 = C_1\,(C_2 + C_3), \quad C_2 C_4 = a_2, \quad C_3 = a_3, \quad C_4^2 = a_4$$

et on peut mettre l'intégrale complète considérée sous la forme

$$z = a_1 y + a_4 xy + a_3 x^2 + a_2 y^2$$

vérifiant les conditions suivantes

$$(1, 2, 3) = -2xy^2, \quad (1, 2, 4) = -y^3, \quad (1, 3, 4) = x^2 y, \quad (2, 3, 4) = 0.$$

Le système correspondant de *Charpit*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial a_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial a_{i+1}}{\partial y} = 0,$$

admet l'intégrale générale

$$a_{i+i} = f_i(u), \quad u = y/x, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Les conditions suivantes

$$f_1' = -f_3'/2u, \quad f_2' = -uf_3'/2$$

donnent

$$f_1 = -\alpha''/2, \quad f_2 = -u^2\alpha''/2 + u\alpha' - \alpha, \quad f_3 = u\alpha'' - \alpha';$$

$\alpha(u)$ étant une fonction arbitraire, et l'intégrale générale mixte devient

$$z = a_1 y - x^2 \alpha\,(y/x)$$

avec la constante arbitraire: a_1 et la fonction arbitraire: α.

9. L'intégrale générale de Lagrange

Considérons le système en involution de *Darboux-Lie*

$$(23) \qquad \begin{cases} r + H\,(x, y, z, p, q, s) = 0, \\ t + \Phi\,(x, y, z, p, q, s) = 0 \end{cases}$$

et ajoutons au (23) le système correspondant de *Charpit*

$$
(64) \qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial z}{\partial x} + H_s \dfrac{\partial z}{\partial y} = p + H_s q, \\[2mm]
\dfrac{\partial p}{\partial x} + H_s \dfrac{\partial p}{\partial y} = r + H_s s, \\[2mm]
\dfrac{\partial q}{\partial x} + H_s \dfrac{\partial q}{\partial y} = s + H_s t, \\[2mm]
\dfrac{\partial r}{\partial x} + H_s \dfrac{\partial r}{\partial y} + D_x H = 0, \\[2mm]
\dfrac{\partial s}{\partial x} + H_s \dfrac{\partial s}{\partial y} + D_y H = 0, \\[2mm]
\dfrac{\partial t}{\partial x} + H_s \dfrac{\partial t}{\partial y} + H_s D_y \Phi = 0
\end{cases}
$$

que joue le rôle du système des caractéristiques.

Posons à présent le problème de la formation de l'intégrale générale, contenant des fonctions arbitraires, du système donné (23) à l'aide de l'intégrale générale du système de *Charpit*. Ce problème peut être résolu de la manière analogue à celle de *Lagrange* concernant les équations aux dérivées partielles du premier ordre, [22], [23].

Le système de *Charpit* (64), outre les premiers membres des équations (23), admet encore cinq intégrales distinctes que l'on va désigner: f, f_1, f_2, f_3, f_4 et que l'on va supposer indépendantes des variables r et t, en vertu des équations (23).

Par conséquant, l'intégrale générale du système de *Charpit*, vérifiant de plus les conditions (23), sera représentée par l'ensemble de ces dernières deux équations et des quatre équations suivantes

$$
(108) \qquad f_i = \prod\nolimits_i (f), \quad (i = 1, 2, 3, 4).
$$

On va chercher les solutions du système (23) vérifiant les conditions

$$
(109) \qquad dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy
$$

sous l'hypothèse que les valeurs de r et de t sont déterminées par le système (23).

Comme les fonctions $\prod_i$ sont arbitraires, il est impossible de résoudre les équations (108) par rapport aux variables qui y figurent. Pour éviter les difficultés mentionnées nous posons

$$
f = u, \quad f_i = u_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4).
$$

Grâce aux propriétés du système (64) les équations précédentes sont résoluble par rapport aux variables y, z, p, q de sort que l'on obtient

$$y = K_1(x, u, u_1, u_2, u_3, u_4),$$
$$z = K_2(x, u, u_1, u_2, u_3, u_4),$$
$$p = K_3(x, u, u_1, u_2, u_3, u_4),$$
$$q = K_4(x, u, u_1, u_2, u_3, u_4),$$
$$s = K_5(x, u, u_1, u_2, u_3, u_4),$$

Les variables r et t s'expriment de même comme fonctions de x, u, u_1, u_2, u_3, u_4 grâce aux équations (23).

Cela posé, les équations (109) deviennent en nouvelles variables

$$\sum_{i=0}^{4} A_{ik}\, du_i = 0, \quad (k = 1, 2, 3) \tag{109'}$$

en posant $u_0 = u$, le coefficient de dx s'annule identiquement grâce aux équations (64).

Or, les formules (108) imposent les relations nouvelles

$$u_i = \prod_i(u), \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Par conséquent, les équations (109') devient

$$\left(A_{0k} + \sum_{i=1}^{4} A_{ik} \prod_i'\right) du = 0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Comme la différentielle du ne peut pas s'annuler, on en tire trois relations liant les fonctions arbitraires $\prod_i'$, à savoir

$$A_{ok} + \sum_{i=1}^{4} A_{ik} \prod_i' = 0, \quad (k = 1, 2, 3). \tag{110}$$

Donc, la solution cherchée du système (23) est définie par l'ensemble des équations (108) contenant quatre fonctions arbitraires qui sont liées par trois relations (110) de sorte qu'il ne reste qu'une seule fonction arbitraire. Par conséquent le problème cité ci-dessus est résolu d'une manière analogue comme le problème posé par *Lagrange*, [22], dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

10. Sur les systèmes d'équations aux dérivés partielles du second ordre à trois variables indépendantes réductibles à ceux de Charpit

On étudie un tel système d'équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de trois variables indépendantes qui soit réductible à un système de *Charpit* dont l'intégration se ramène à celle d'un système des équations différentielles ordinaires. La détermination des conditions lesquelles doivent vérifier le système en question. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrale complète. La généralisation de la notion des fonctions des caractéristiques de *N. Saltykow*, [18] pour le système considéré et leur application à la formation de l'intégrale complète. L'intégrale générale du système correspondant de *Charpit* et la formation des solutions du système étudié en généralisant la méthode de *Lagrange*, [24].

A. Considérons le système de trois équations aux dérivées partielles du second ordre à trois variables indépendantes x_i

$$p_{ii}+f_i(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23})=0, \quad (i=1, 2, 3) \tag{111}$$

avec les notations usuelles

$$p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad p_{ij}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$$

et avec les conditions d'indépendance de l'ordre de la différentiation de la fonction z par rapport aux x_i.

Formons les équations dérivées

$$\frac{\partial p_{ii}}{\partial x_k}+\frac{\partial f_i}{\partial p_{12}}\frac{\partial p_{12}}{\partial x_k}+\frac{\partial f_i}{\partial p_{13}}\frac{\partial p_{13}}{\partial x_k}+\frac{\partial f_i}{\partial p_{23}}\frac{\partial p_{23}}{\partial x_k}+D_k f_i=0 \quad (i,k=1,2,3) \tag{112}$$

le symbol D_k désignant l'opérateur suivant

$$D_k \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial}{\partial z}+\sum_s p_{sk}\frac{\partial}{\partial p_s}.$$

Si l'on introduit les conditions suivantes:

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_{23}}=\frac{\partial f_2}{\partial p_{13}}=\frac{\partial f_3}{\partial f_{12}}=0 \tag{113}$$

$$\frac{1}{\frac{\partial f_2}{\partial p_{12}}}=\frac{\frac{\partial f_1}{\partial p_{12}}}{1}=\frac{\frac{\partial f_1}{\partial p_{13}}}{\frac{\partial f_2}{\partial p_{23}}}=\frac{D_2 f_1}{D_1 f_2}, \tag{114}$$

$$\frac{1}{\frac{\partial f_3}{\partial p_{13}}}=\frac{\frac{\partial f_1}{\partial p_{13}}}{1}=\frac{\frac{\partial f_1}{\partial p_{12}}}{\frac{\partial f_3}{\partial p_{23}}}=\frac{D_3 f_1}{D_1 f_3}, \tag{115}$$

$$\frac{1}{\frac{\partial f_3}{\partial p_{23}}}=\frac{\frac{\partial f_2}{\partial p_{23}}}{1}=\frac{\frac{\partial f_2}{\partial p_{12}}}{\frac{\partial f_3}{\partial p_{13}}}=\frac{D_3 f_2}{D_2 f_3} \tag{116}$$

des neuf équations ili ne reste que six équations distinctes suivantes

$$
(117)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial p_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial p_{12}}\frac{\partial p_{11}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_1}{\partial p_{13}}\frac{\partial p_{11}}{\partial x_3}+D_1 f_1=0,\\
&\frac{\partial p_{22}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial p_{12}}\frac{\partial p_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_1}{\partial p_{13}}\frac{\partial p_{22}}{\partial x_3}+\frac{1}{\dfrac{\partial f_2}{\partial p_{12}}}D_2 f_2=0,\\
&\frac{\partial p_{33}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial p_{12}}\frac{\partial p_{33}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_1}{\partial p_{13}}\frac{\partial p_{33}}{\partial x_3}+\frac{1}{\dfrac{\partial f_3}{\partial p_{13}}}D_3 f_3=0,\\
&\frac{\partial p_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial p_{12}}\frac{\partial p_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_1}{\partial p_{13}}\frac{\partial p_{12}}{\partial x_3}+D_2 f_1=0,\\
&\frac{\partial p_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial p_{12}}\frac{\partial p_{13}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_1}{\partial p_{13}}\frac{\partial p_{13}}{\partial x_3}+D_3 f_1=0,\\
&\frac{\partial p_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial p_{12}}\frac{\partial p_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_1}{\partial p_{13}}\frac{\partial p_{23}}{\partial x_3}+\frac{1}{\dfrac{\partial f_2}{\partial p_{12}}}D_3 f_2=0.
\end{aligned}
$$

Si l'on ajoute aux équations (117) les équations suivantes

$$
(118)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial z}{\partial x_1}+\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}}\dfrac{\partial z}{\partial x_2}+\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}}\dfrac{\partial z}{\partial x_3}-p_1-\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}}p_2-\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}}p_3=0\\
\dfrac{\partial p_i}{\partial x_1}+\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}}\dfrac{\partial p_i}{\partial x_2}+\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}}\dfrac{\partial p_i}{\partial x_3}-p_{i1}-\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}}p_{i2}-\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}}p_{i3}=0,\\
\qquad\qquad (i=1,2,3)
\end{cases}
$$

le système (117) et (118) est alors un système de *Charpit* des fonctions z p_i, p_{ii}, p_{ij}. Le système correspondant aux équations différentielles ordinaires devient:

$$
(119)\qquad
\begin{cases}
dx_1=\dfrac{dx_2}{\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}}}=\dfrac{dx_3}{\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}}}=\dfrac{dz}{p_1+\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}}p_2+\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}}p_3}=\dfrac{dp_i}{p_{i1}+\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}}p_{i2}+\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}}p_{i3}}=\\
=\dfrac{dp_{11}}{-D_1 f_1}=\dfrac{dp_{22}}{-D_2 f_2\Big/\dfrac{\partial f_2}{dp_{12}}}=\dfrac{dp_{33}}{-D_3 f_3\Big/\dfrac{\partial f_3}{\partial p_{13}}}=\dfrac{dp_{12}}{-D_2 f_1}=\\
=\dfrac{dp_{33}}{-D_3 f_2\Big/\dfrac{\partial f_2}{\partial p_{12}}}=\dfrac{dp_{13}}{-D_3 f_1}.
\end{cases}
$$

Ces dernières équations jouent, par rapport au système (111) avec les conditions (113)—(116), le même rôle que les équations des caractéristiques dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

B. Dans la théorie du système (111) nous utiliserons la notion de l'intégrale complète:

$$z = V(x_1, x_2, x_3, C_1, \ldots, C_7) \tag{120}$$

où l'on a la condition

$$\Delta \equiv D\left(\frac{V, V_1, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right) \neq 0 \tag{121}$$

introduisant les notations suivantes

$$V_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad V_{ij} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j},$$

C_i désignant les constantes arbitraires distinctes; de plus le résultat de l'élimination des équations: $z = V$, $p = V_i$, $p_{ii} = V$, $p_{ij} = V_{ij}$ de toutes les constantes arbitraires C_i ne donne que les équations (111).

Dans le cas où le système (111) est réductible à un système de *Charpit* (117)—(118), son intégrale complète (120) doit satisfaire à des conditions complémentaires qu'on va établir. En effet, les équations suivantes

$$\begin{aligned} z &= V(x_1, x_2, x_3, C_1, \ldots, C_7) \\ p_i &= V_i\,(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), \quad (i = 1, 2, 3) \\ p_{ij} &= V_{ij}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), \quad (j = 1, 2, 3, i \neq j) \end{aligned}$$

sont équivalentes, grâce à (121), aux équations

$$F_k(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}) = C_k, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, 7). \tag{122}$$

On a de plus les relations $p_{ii} = V_{ii}$, $(i = 1, 2, 3)$ que l'on peut remplacer aisément, en vertu des équations précédentes, par les égalités suivantes

$$-f_i(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}) = V_{ii}(x_1, x_2, x_3, F_1, \ldots, F_7) \equiv \overline{V}_{ii}, \tag{123}$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

Introduisons, enfin, les désignations

$$\overline{F}_k = F_k(x_1, x_2, x_3, V, V_1, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{23}) = C_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, 7). \tag{122'}$$

En différentiant ces dernières relations par rapport aux C_i on obtient

$$\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial C_i} + \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \overline{F}_k}{\partial p_s}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial C_i} + \frac{\partial \overline{F}_k}{\partial p_{12}}\frac{\partial^3 V}{\partial x_1 \partial x_2 \partial C_i} + \frac{\partial \overline{F}_k}{\partial p_{13}}\frac{\partial^3 V}{\partial x_1 \partial x_3 \partial C_i} + \tag{124}$$
$$+ \frac{\partial \overline{F}_k}{\partial p_{23}}\frac{\partial^3 V}{\partial x_2 \partial x_3 \partial C_i} = \frac{\partial C_k}{\partial C_i},$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, 7).$$

Il en résulte, grâce à (121):

$$
(125)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial \overline{F}_k}{\partial z}=\dfrac{1}{\Delta}D\left(\dfrac{C_k, V_1, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right), & \dfrac{\partial \overline{F}_k}{\partial p_{12}}=\dfrac{1}{\Delta}D\left(\dfrac{V, V_1, V_2, V_3, C_k, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right)\\[2ex]
\dfrac{\partial \overline{F}_k}{\partial p_1}=\dfrac{1}{\Delta}D\left(\dfrac{V, C_k, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2 \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right), & \dfrac{\partial \overline{F}_k}{\partial p_{13}}+\dfrac{1}{\Delta}D\left(\dfrac{V, V_1, V_2, V_3, V_{12}, C_k, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right)\\[2ex]
\dfrac{\partial \overline{F}_k}{\partial p_2}=\dfrac{1}{\Delta}D\left(\dfrac{V, V_1, C_k, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right), & \dfrac{\partial \overline{F}_k}{\partial p_{13}}=\dfrac{1}{\Delta}D\left(\dfrac{V, V_1, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, C_k}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right)\\[2ex]
\dfrac{\partial \overline{F}_k}{\partial p_3}=\dfrac{1}{\Delta}D\left(\dfrac{V, V_1, V_2, C_k, V_{12}, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right). &
\end{cases}
$$

D'autre part, différentiant les identités (123), on trouve:

$$
(126)\qquad -\frac{\partial f_i}{\partial \mu}=\sum_{k=1}^{5}\overline{V}_{iiC_k}\frac{\partial F_k}{\partial \mu},\quad (i=1, 2, 3)
$$

$$
(127)\qquad -\frac{\partial f_i}{\partial x_s}=\frac{\partial \overline{V}_{ii}}{\partial x_s}+\sum_{k=1}^{5}\overline{V}_{iiC_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_s},\qquad (i, s=1, 2, 3),
$$

où l'on remplace μ respectivement par p_{ij}, p_s, z. En désignant, par les paranthèses ( ), le résultat de la substitution z, p_i, p_{ij} respectivement par leur valeurs V, V_i, V_{ij} et par $\Delta_{12}^{(i)}$, les valeurs des déterminants fonctionnels

$$
\Delta_{12}^{(i)}\equiv D\left(\frac{V, V_1, V_2, V_3, V_{ii}, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots C_7}\right),\qquad (i=1, 2, 3)
$$

on met les équations (126) sous la forme suivante, par exemple, pour $\mu=p_{12}$

$$
-\frac{\partial f_i}{\partial p_{12}}=\sum_{k=1}^{5}V_{iiC_k}\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial p_{12}}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{5}V_{iiC_k}D\left(\frac{V, V_1, V_2, V_3, C_k, V_{13}, V_{23}}{C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7}\right),
$$

ou bien

$$
(128)\qquad -\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_{12}}\right)=\frac{\Delta_{12}^{(i)}}{\Delta},\quad (i=1, 2, 3)
$$

et de la même manière aussi

$$
-\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_{13}}\right)=\frac{\Delta_{13}^{(i)}}{\Delta},\qquad -\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_{23}}\right)=\frac{\Delta_{23}^{(i)}}{\Delta},\quad (i=1, 2, 3)
$$

$$
-\left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)=\frac{\Delta_z^{(i)}}{\Delta},\qquad -\left(\frac{\partial f_i}{\partial p_s}\right)=\frac{\Delta_s^{(i)}}{\Delta},\quad (i=1, 2, 3)
$$

où l'on vient de poser

$$\Delta_{13}^{(i)} \equiv D\begin{pmatrix} V, V_1, V_2, V_3, V_{12}, V_{ii}, V_{23} \\ C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{23}^{(i)} \equiv D\begin{pmatrix} V, V_1, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{ii} \\ C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_z^{(i)} \equiv D\begin{pmatrix} V_{ii}, V_1, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{23} \\ C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1^{(i)} \equiv D\begin{pmatrix} V, V_i, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{23} \\ C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_7 \end{pmatrix}, \ldots$$

D'autre part en différentiant les identités (122′) par rapport aux x_s on obtient

$$-\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial x_s} = \frac{\partial \overline{F}_k}{\partial z} V_s + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \overline{F}_k}{\partial p_i} V_{is} + \frac{\partial \overline{F}_k}{\partial p_{12}} V_{12s} + \frac{\partial \overline{F}_k}{\partial p_{13}} V_{13s} + \frac{\partial \overline{F}_k}{\partial p_{23}} V_{23s} = 0$$

et grâce aux formules (125) et (127) on a

$$-\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_s}\right) = V_{iis} - \frac{1}{\Delta}\left(V_s \Delta_z^{(i)} + \sum_{j=1}^{3} V_{js} \Delta_j^{(i)} + V_{12s} \Delta_{12}^{(i)} + V_{13s} \Delta_{13}^{(i)} + V_{23s} \Delta_{23}^{(i)}\right).$$

En vertu des formules établies on aura

$$D_s f_i = -V_{iis} + V_{12s} \frac{\Delta_{12}^{(i)}}{\Delta} + V_{13s} \frac{\Delta_{13}^{(i)}}{\Delta} + V_{23s} \frac{\Delta_{23}^{(i)}}{\Delta}. \tag{130}$$

$$(i, s = 1, 2, 3).$$

Écrivons les conditions (114)—(116) sous la forme suivante

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_{12}} \frac{\partial f_2}{\partial p_{12}} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial p_{12}} \frac{\partial f_2}{\partial p_{23}} = \frac{\partial f_1}{\partial p_{13}}, \quad D_2 f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial p_{12}} D_1 f_2, \tag{114′}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_{13}} \frac{\partial f_3}{\partial p_{13}} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial p_{13}} \frac{\partial f_3}{\partial p_{23}} = \frac{\partial f_1}{\partial p_{12}}, \quad D_3 f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial p_{13}} D_1 f_3, \tag{115′}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial p_{23}} \frac{\partial f_3}{\partial p_{23}} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial p_{23}} \frac{\partial f_3}{\partial p_{13}} = \frac{\partial f_2}{\partial p_{12}}, \quad D_3 f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial p_{23}} D_2 f_3, \tag{116′}$$

où les deux dernières de la deuxième colonne sont les conséquences des précédentes. Les conditions (113) et (114′)—(116′) sont satisfaites identiquement aussi dans le cas de la substitution de z, p_i, p_{ik} respectivement par V, V_i, V_{ik} de sorte que l'on obtient les conditions cherchées:

$$\Delta_{23}^{(1)} = \Delta_{13}^{(2)} = \Delta_{12}^{(3)} = 0 \tag{113$_1$}$$

$$\Delta_{12}^{(1)} \Delta_{12}^{(2)} - \Delta^2 = 0, \quad \Delta_{12}^{(1)} \Delta_{23}^{(2)} + \Delta \Delta_{13}^{(1)} = 0, \tag{114$_1$}$$

$$\Delta_{13}^{(1)} \Delta_{13}^{(3)} - \Delta^2 = 0, \quad \Delta_{13}^{(1)} \Delta_{23}^{(2)} + \Delta \Delta_{12}^{(1)} = 0, \tag{115$_1$}$$

$$\Delta_{23}^{(2)} \Delta_{23}^{(3)} - \Delta^2 = 0, \quad \Delta_{23}^{(2)} \Delta_{13}^{(1)} + \Delta \Delta_{12}^{(2)} = 0. \tag{116$_1$}$$

Les deux dernières conditions de la seconde colonne sont les conséquences de toutes les précédentes. Les relations de la troisième colonne (114′)—(116′) n'imposent pas des conditions nouvelles à la fonction V. En effet, en prennant, par exemple, la relation

$$(D_2 f_1)=\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_{12}}\right) D_1 f_2$$

il est aisé de démontrer que cette relation est vérifiée identiquement, grâce aux conditions précédentes, à savoir

$$-V_{112}\left(1-\frac{\Delta_{12}^{(1)}\Delta_{12}^{(2)}}{\Delta_2}\right)+V_{123}\left(\frac{\Delta_{13}^{(1)}}{\Delta}+\frac{\Delta_{12}^{(1)}\Delta_{23}^{(2)}}{\Delta^2}\right)+V_{223}\frac{\Delta_{23}^{(1)}}{\Delta}+V_{113}\frac{\Delta_{13}^{(2)}}{\Delta}\equiv 0.$$

On trouve de même que les conditions (113_1)—(116_1), sauf celles qui viennent d'être mentionnées, sont non seulement nécessaires mais aussi suffisantes pour que $z=V$ soit une intégrale du système (111) réductible à celui de *Charpit* (117)—(118).

Il est intéressant de poser la question: est ce qu'il est possible d'étendre sur le système (119) le théorème de Jacobi concernant les équations aux dérivées partielles du premier ordre et généralisé sur le système d'équations aux dérivées du second ordre, en involution de *Darboux-Lie*, [13], [15], [20]?

C. Posons maintenant le problème de la formation de l'intégrale complète du système (111) sous les conditions (113)—(116), à l'aide de l'intégrale générale du système des équations différentielles ordinaires (119). L'intégrale générale de ce système de 12 équations est composée de trois équations données (111) et de neuf nouvelles intégrales distinctes. La variable x_1 étant principale, cherchons l'intégrale générale sous la forme suivante:

$$(131)\qquad \begin{cases} x_2=m(x_1, C_1, \dots, C_9) \\ x_3=n(x_1, C_1, \dots, C_9) \\ z=Z(x_1, C_1, \dots, C_9) \end{cases} \qquad \begin{aligned} &p_i=P_i(x_1, C_1, \dots, C_9) \\ &p_{ii}=P_{ii}(x_1, C_1, \dots, C_9) \\ &p_{ik}=P_{ik}(x_1, C_1, \dots, C_9),\ P_{ik}=P_{ki} \end{aligned}$$

$$(i, k=1, 2, 3)$$

Supposons que l'on ait

$$(132)\qquad D\left(\frac{m, n}{C_8, C_9}\right)\neq 0,$$

alors les deux premières équations (131) se mettent sous la forme résoluble par rapport à C_8 et C_9:

$$(133)\qquad \begin{aligned} C_8&=a(x_1, x_2, x_3, C_1, \dots, C_7) \\ C_9&=b(x_1, x_2, x_3, C_1, \dots, C_7). \end{aligned}$$

En éliminant C_8 et C_9 des autres équations (131), à l'aide de (133), on obtient

$$(134)\qquad \begin{cases} z=\overline{Z}(x_1,x_2,x_3,C_1,\ \ldots,\ C_7) \\ p_i=\overline{P}_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ C_1,\ldots,\ C_7) \\ p_{ii}=\overline{P}_{ii}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ C_1,\ \ldots,\ C_7),\ (i=1,\ 2,\ 3) \\ p_{ik}=\overline{P}_{ik}(x_1,x_2,x_3,C_1,\ \ldots,C_7),\ (i=1,2,3:\ i\neq k). \end{cases}$$

Puisque les équations (131) sont les intégrales du système (119), les identités suivantes ont lieu

$$(135)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial m}{\partial x_1}=\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{12}},\quad \dfrac{\partial n}{\partial x_1}=\dfrac{\partial f_1}{\partial p_{13}}, \\ \dfrac{\partial Z}{\partial x_1}=P_1+\dfrac{\partial m}{\partial x_1}P_2+\dfrac{\partial n}{\partial x_1}P_3, \\ \dfrac{\partial P_i}{\partial x_1}=P_{i1}+\dfrac{\partial m}{\partial x_1}P_{i2}+\dfrac{\partial n}{\partial x_1}P_{i3},\ (i=1,\ 2,\ 3). \end{cases}$$

Considérons les identités évidentes résultant des formules (131) et (134),

$$(136)\qquad \begin{cases} Z(x_1,C_1,\ldots,\ C_9)=\overline{Z}(x,\ m,\ n,\ C_1,\ldots,\ C_7), \\ P_1(x_1,\ C_1,\ldots,\ C_9)=\overline{P}_i(x_1,\ m,\ n,\ C_1,\ldots,\ C_7),\quad (i=1,\ 2,\ 3) \end{cases}$$

et leurs formules dérivées

$$(137)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x_1}=\left(\dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial x_1}\right)+\left(\dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial x_2}\right)\dfrac{\partial m}{\partial x_1}+\left(\dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial x_3}\right)\dfrac{\partial n}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial P_i}{\partial x_1}=\left(\dfrac{\partial \overline{P}_i}{\partial x_1}\right)+\left(\dfrac{\partial \overline{P}_i}{\partial x_2}\right)\dfrac{\partial m}{\partial x_1}+\left(\dfrac{\partial \overline{P}_i}{\partial x_3}\right)\dfrac{\partial n}{\partial x_1},\quad (i=1,\ 2,\ 3) \end{cases}$$

les parenthèses désignant le résultat de la substitution de x_2 et x_3 respectivement par les fonctions m et n. En soustrayant (137) de (135) on a

$$\left(\frac{\partial \overline{Z}}{\partial x_1}\right)-P_1+\left[\left(\frac{\partial \overline{Z}}{\partial x_2}\right)-P_2\right]\frac{\partial m}{\partial x_1}+\left[\left(\frac{\partial \overline{Z}}{\partial x_3}\right)-P_3\right]\frac{\partial n}{\partial x_1}=0.$$

$$\left(\frac{\partial \overline{P}_i}{\partial x_1}\right)-P_{i1}+\left[\left(\frac{\partial \overline{P}_i}{\partial x_2}\right)-P_{i2}\right]\frac{\partial m}{\partial x_1}+\left[\left(\frac{\partial \overline{P}_i}{\partial x_3}\right)-P_{i3}\right]\frac{\partial n}{\partial x_1}=0,\qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

et l'on a tiré les relations nouvelles

$$(138)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial x_1}-\overline{P}_1+\left(\dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial x_2}-\overline{P}_2\right)\left(\dfrac{\partial m}{\partial x_1}\right)+\left(\dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial x_3}-\overline{P}_3\right)\left(\dfrac{\partial n}{\partial x_1}\right)=0, \\ \dfrac{\partial \overline{P}_i}{\partial x_1}-\overline{P}_{i1}+\left(\dfrac{\partial \overline{P}_i}{\partial x_2}-\overline{P}_{i2}\right)\left(\dfrac{\partial m}{\partial x_1}\right)+\left(\dfrac{\partial \overline{P}_i}{\partial x_3}-\overline{P}_{i3}\right)\left(\dfrac{\partial n}{\partial x_1}\right)=0.\quad (i=1,\ 2,\ 3) \end{cases}$$

En vertu de la première des équations (138) et des relations

(139) $$\bar{P}_2 = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_2} \qquad \bar{P}_3 = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_3}$$

on conclut

(140) $$\bar{P}_1 = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_1}.$$

Supposons que l'on tire de (139) et (140) les relations

$$\frac{\partial \bar{P}_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \bar{P}_3}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \bar{P}_3}{\partial x_2}.$$

Grâce aux conditions $\frac{\partial f_1}{\partial p_{12}} \neq 0$ et $\frac{\partial f_1}{\partial p_{13}} \neq 0$, aux équations (138) et les conditions

(141) $$\frac{\partial \bar{P}_1}{\partial x_2} = \bar{P}_{12}, \qquad \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial x_3} = \bar{P}_{13}, \qquad \frac{\partial \bar{P}_3}{\partial x_2} = \bar{P}_{23}$$

on obtient les conditions

(142) $$\frac{\partial \bar{P}_1}{\partial x_1} = \bar{P}_{11}, \qquad \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial x_2} = \bar{P}_{22}, \qquad \frac{\partial \bar{P}_3}{\partial x_3} = \bar{P}_{33}.$$

Donc, les conditions (139) et (141) produisent les conditions (140) et (142). Les dérivées des identités (136) donnent les nouvelles identités

(143) $$\frac{\partial Z}{\partial C_\mu} = \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial m}{\partial C_\mu} + \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_3}\right)\frac{\partial n}{\partial C_\mu} + \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial C_\mu}\right), \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 7),$$

(144) $$\frac{\partial Z}{\partial C_\nu} = \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial m}{\partial C_\nu} + \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_3}\right)\frac{\partial n}{\partial C_\nu}, \qquad (\nu = 8, 9),$$

(145) $$\frac{\partial P_i}{\partial C_\mu} = \left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_2}\right)\frac{\partial m}{\partial C_\mu} + \left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_3}\right)\frac{\partial n}{\partial C_\mu} + \left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial C_\mu}\right), \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 7),$$

(146) $$\frac{\partial P_i}{\partial C_\nu} = \left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_2}\right)\frac{\partial m}{\partial C_\nu} + \left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_3}\right)\frac{\partial n}{\partial C_\nu}, \qquad (\nu = 8, 9)$$

les parenthèses ayant la désignation antérieurement établie. En admettant que l'on ait

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial C_\mu} \neq 0, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 7)$$

on obtient, grâce aux (139), (143)—(144) les conditions suivantes

(147) $$U_{C_\mu} \neq 0, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, 7), \quad U_{C_\nu} = 0, \quad (\nu = 8, 9)$$

où nous introduisons des nouvelles notions U_C des fonctions que nous dirons „caractéristiques“ du système (111)

$$U_C \equiv \frac{\partial Z}{\partial C} - P_2 \frac{\partial m}{\partial C} - P_3 \frac{\partial n}{\partial C}.$$

D'autre part, sous l'hypothèse

$$\frac{\partial P_i}{\partial C_\mu} \neq 0 \quad (i=1, 2, 3;\ \mu=1, 2, \ldots, 7)$$

et en vertu de (141) et (145)—(146), on conclut

$$(148) \qquad W^i_{C_\mu} \neq 0, \quad (\mu=1, 2, \ldots, 7;\ i=1, 2, 3), \quad W^i_{C_\mu}=0, \quad (\mu=8, 9)$$

en appelant W^i_C les autres nouvelles fonctions caractéristiques qui signifient

$$W^i_C \equiv \frac{\partial P_i}{\partial C} - P_{i2} \frac{\partial m}{\partial C} - P_{i3} \frac{\partial n}{\partial C}.$$

Si les formules (134) définissent l'intégrale complète du système (111) sous l'hypothèse (113)—(116), alors les conditions (147) et (148) ont lieu. Donc les conditions citées sont nécessaires. Démontrons que ces conditions sont aussi suffisantes pour la formation de l'intégrale complète. Donc, en admettant que les conditions (147) et (148) existent, il est aisé de former les différences suivantes des formules (147) et ((143)—(144)

$$(149) \qquad \left[\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_2}\right) - P_2\right] \frac{\partial m}{\partial C_\nu} + \left[\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_3}\right) - P_3\right] \frac{\partial n}{\partial C_\nu} = 0, \quad (\nu=8, 9)$$

$$(150) \qquad \left[\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_2}\right) - P_2\right] \frac{\partial m}{\partial C_\mu} + \left[\left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial x_3}\right) - P_3\right] \frac{\partial n}{\partial C_\mu} + \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial C_\mu}\right) \neq 0, \quad (\mu=1, ., 7)$$

et celles des formules (148) et (145)—(146)

$$(151) \qquad \left[\left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_2}\right) - P_{i2}\right] \frac{\partial m}{\partial C_\nu} + \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_3}\right) - P_{i3}\right] \frac{\partial n}{\partial C_\nu} = 0, \quad (\nu=8, 9;\ i=1, 2, 3)$$

$$(152) \qquad \left[\left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_2}\right) - P_{i2}\right] \frac{\partial m}{\partial C_\mu} + \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_3}\right) - P_{i3}\right] \frac{\partial n}{\partial C_\mu} + \left(\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial C_\mu}\right) \neq 0,$$

$$(i=1, 2, 3;\ \mu=1, ., 7)$$

D'après (132) les équations (149) donnent les conditions (139) et par conséquent la condition (140). En vertu de l'équation (150) on obtient

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial C_\mu} \neq 0, \quad (\mu=1, 2, ., 7).$$

Il suffit de prendre les deux premières équations (151). Ces équations, d'après (132), donnent les conditions (141), et alors les conditions (142) ont lieu. Les équations (152) ne donnent que les relations

$$\frac{\partial \overline{P}_i}{\partial C_\mu} \neq 0, \quad i=1,\,2,\,3;\ \mu=1,\ldots 7)$$

qui ne sont cependant nécessaires.

Il résulte des considérations exposées que pour former l'intégrale complète du système (111) à l'aide de l'intégrale générale (131) du système (119) les conditions nécessaires et suffisantes, exprimées par les fonctions caractéristiques suivantes, doivent avoir lieu

$$(147')\qquad \begin{cases} U_{C_\mu} \neq 0, \quad (\mu=1,\ldots,7) \quad U_{C_\nu}=0, \quad (\nu=8,\,9), \\ W^i_{C_\nu}=0, \quad (\nu=8,\,9:\ i=1,\,2). \end{cases}$$

De cette manière il est démontré le rôle important que jouent les fonctions caractéristiques introduites dans la théorie du système étudié (111), sous l'hypothèse (113)—(116)

D. Citons quelques propriétés des fonctions caractéristiques. Les formules (131) s'obtient de neuf intégrales distinctes du système (119), c'est-à--dire ces équations sont résolubles par rapport aux neuf constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_9$ de sorte que l'on a la condition suivante.

$$D\left(\frac{Z,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_{12},\ P_{13},\ P_{23}}{C_1,\ C_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ C_7}\right) \neq 0.$$

On peut en former les déterminants dans lesquels les colonnes 3^e, 4^e, 5^e, 6^e sont remplacées respectivement par les U_C, W^i_C $(i=1,\,2,\,3)$. Ces déterminants sont distincts du zéro. Il en résulte qu'au moins l'une des fonctions caractéristiques dans chaque groupe: U_{C_i}, $W^1_{C_i}$, $W^2_{C_i}$, $W^3_{C_i}$, est distincte du zéro. Démontrons que les fonctions caractéristiques sont homogènes et linéaires de leurs valeurs initiales: U^0_C, $(W^i_C)^0$. En partant des identités (135) et des expressions qui définissent des fonctions caractéristiques on obtient l'équation

$$\frac{\partial U_C}{\partial x_1} = W^1_C + \frac{\partial m}{\partial x_1} W^2_C + \frac{\partial n}{\partial x_1} W^3_C.$$

Pour obtenir les expressions des dérivées par rapport à x_1 des autres fonctions caractéristiques nous procéderons de la manière suivante. Substituons dans les formules

$$\frac{\partial W^1_C}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial C}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} - P_{12}\frac{\partial m}{\partial x_1} - P_{13}\frac{\partial n}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial P_{12}}{\partial C}\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial P_{13}}{\partial C}\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial P_{12}}{\partial x_1}\frac{\partial m}{\partial C} - \frac{\partial P_{13}}{\partial x_1}\frac{\partial n}{\partial C}$$

les formules

$$\frac{\partial P_{12}}{\partial x_1} = -(D_2 f_1), \qquad \frac{\partial P_{13}}{\partial x_1} = -(D_3 f_1)$$

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial C} + (D_2 f_1)\frac{\partial m}{\partial C} + (D_3 f_1)\frac{\partial n}{\partial C} + \frac{\partial f_1}{\partial z} U_c + \frac{\partial f_1}{\partial p_1} V_C^1 + \frac{\partial f_1}{\partial p_2} V_C^2 +$$

$$+ \frac{\partial f_1}{\partial p_3} V_C^3 + \frac{\partial f_1}{\partial p_{12}} \frac{\partial P_{12}}{\partial C} + \frac{\partial f_1}{\partial p_{13}} \frac{\partial P_{13}}{\partial C} + \frac{\partial f_1}{\partial p_{23}} \frac{\partial P_{23}}{\partial C} = 0$$

ainsi que les relations (113), (116) et (135). On obtient de cette manière le résultat

$$(154) \qquad \frac{\partial W_C^1}{\partial x} = -\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) U_C + \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\right) V_C^1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_2}\right) V_C^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_3}\right) V_C^3\right].$$

D'une manière analogue on obtient encore les deux équations nouvelles

$$(155) \qquad \frac{\partial W_C^2}{\partial x_1} = -\frac{\partial m}{\partial x_1}\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right) U_C + \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right) V_C^1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_2}\right) V_C^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_3}\right) V_C^3\right],$$

$$(156) \qquad \frac{\partial W_C^3}{\partial x_1} = -\frac{\partial n}{\partial x_1}\left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right) U_C + \left(\frac{\partial f_3}{\partial p_1}\right) V_C^1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial p_2}\right) V_C^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial p_3}\right) V_C^3\right].$$

Les équations (153)—(156) représentent les équations différentielles linéaires et homogènes des fonctions U_C et W_C^i. Les solutions de telles équations s'expriment linéairement et homogènement par les valeurs initiales des fonctions considérées.

On peut utiliser les propriétés démontrées des fonctions caractéristiques pour vérifier les conditions (147'), pour former l'intégrale complète du système (111), sous l'hypothèse (113)—(116) à l'aide de l'intégrale générale du système (119).

E. Posons le problème de la formation de intégrale contenant des fonctions arbitraires du système donné (111) à l'aide de l'intégrale générale du système de *Charpit*. Outre de trois intégrales particulières définies par les équations données (111), le système (119) a encore neuf intégrales ψ_1, ψ_2, $F_1, \ldots, F_7$. L'intégrale générale du système de *Charpit* (117)—(118) qui vérifie les équations (111), sous l'hypothèse (113)—(116), est définie par les équations citées et les équations suivantes

$$(157) \qquad F_j = \varphi_j(\psi_1, \psi_2), \quad (j = 1, \ldots, 7)$$

φ_j désignant les fonctions arbitraires. On pose pour déterminer les valeurs de variables paramétriques x_{i+1}, p_i, p_{ik}

$$(158) \qquad f_i \equiv \alpha_i, \quad (i = 1, 2); \qquad F_j \equiv \beta_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, 7).$$

Alors les variables mentionnées sont définies par les équations

$$\begin{aligned}
&x_{i+1}=\Phi_i(x_1,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\ldots,\beta_7), && (i=1,2)\\
&Z=\Phi_3(x_1,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\ldots,\beta_7),\\
&p_j=\Phi_{j+3}(x_1,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\ldots,\beta_7), && (j=1,2,3)\\
&p_{12}=\Phi_7(x_1,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\ldots,\beta_7),\\
&p_{13}=\Phi_8(x_1,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\ldots,\beta_7),\\
&p_{23}=\Phi_9(x_1,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\ldots,\beta_7),
\end{aligned}$$

x_1 désignant la variable indépendante principale. On va chercher les solutions du système (111) en vérifiant de plus les conditions:

$$dz=\sum_{k=1}^{3}p_k\,dx_k,\quad dp_s=\sum_{k=1}^{3}p_{sk}\,dx_k,\quad (s=1,2,3)$$

p_{ii} étant déterminées par les équations (111). Grâce aux conditions introduites on a les conditions nouvelles

$$\sum_{i=1}^{2}A_{ki}d\alpha_i+\sum_{j=1}^{7}B_{kj}\,d\beta_j+K_k\,dx_1=0,\quad (k=1,\,.\,.\,,4)$$

avec

$$\begin{aligned}
A_{1i}&\equiv\frac{\partial\Phi_3}{\partial\alpha_i}-\Phi_5\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha_i}-\Phi_6\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_i}, & B_{1j}&\equiv\frac{\partial\Phi_3}{\partial\beta_j}-\Phi_5\frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta_j}-\Phi_6\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta_j},\\
A_{2i}&\equiv\frac{\partial\Phi_4}{\partial\alpha_i}-\Phi_7\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha_i}-\Phi_8\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_i}, & B_{2j}&\equiv\frac{\partial\Phi_4}{\partial\beta_j}-\Phi_7\frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta_j}-\Phi_8\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta_j},\\
A_{3i}&\equiv\frac{\partial\Phi_5}{\partial\alpha_i}-\bar{p}_{22}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha_i}-\Phi_9\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_i}, & B_{3j}&\equiv\frac{\partial\Phi_5}{\partial\beta_j}-\bar{p}_{22}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta_j}-\Phi_9\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta_j},\\
A_{4i}&\equiv\frac{\partial\Phi_6}{\partial\alpha_i}-\Phi_9\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha_i}-\bar{p}_{33}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_i}, & B_{4j}&\equiv\frac{\partial\Phi_6}{\partial\beta_j}-\Phi_9\frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta_j}-\bar{p}_{33}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta_j},\\
&(i=1,2) & &(j=1,2,\ldots,7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1&\equiv\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_1}-\Phi_5\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}-\Phi_6\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}-\Phi_4,\\
K_2&\equiv\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}-\Phi_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}-\Phi_8\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}-\bar{p}_{11},\\
K_3&\equiv\frac{\partial\Phi_5}{\partial x_1}-\bar{p}_{22}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}-\Phi_9\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}-\Phi_7\\
K_4&\equiv\frac{\partial\Phi_6}{\partial x_1}-\Phi_9\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}-\bar{p}_{33}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}-\Phi_8
\end{aligned}$$

$$p_{ii}\equiv-f_i(x_1,\Phi_1,\,.\,.\,,\Phi_7),\quad (i=1,2,3).$$

Grâce aux équations (119) ils existent les identités suivantes

$$K_k\equiv0\quad (k=1,2,3,4).$$

En vertu de (157) et (158) on a

$$\beta_j=\varphi_j(\alpha_1, \alpha_2), \qquad (j=1, \ldots, 7)$$

et les conditions (159) deviennent

$$\left(\sum_{i=1}^{2} A_{ki}+\sum_{i=1}^{7} B_{kj}\frac{\partial \Phi_j}{\partial \alpha_i}\right) d\alpha_i=0 \quad (k=1, 2, 3, 4).$$

Les différentiels $d\alpha_1$ étant distincts du zéro, on établit les relations

$$A_{ki}+\sum_{i=1}^{7} B_{kj}\frac{\partial \varphi_j}{\partial \alpha_i}=0, \quad (k=1, \ldots, 4; \ (i=1, 2)$$

lesquelles doivent satisfaire les fonctions φ_j pour que (157) détermine la solution du système (111). Par conséquent le problème cité ci-dessus est résolu d'une manière analogue comme le problème posé par Lagrange [22] dans la théorie des équations aux derivées partielles du premier ordre.

Les résultats obtenus dans cet article se généralisent aisément sur les systèmes des $n\,(n>3)$ équations aux dérivées partielles du second ordre à n variables indépendantes.

11. Sur une classe des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction inconnue avec trois variables indépendantes

En suivant les idées de *N. Saltykow*, [11], [24—27] on donne dans ce paragraphe une classe des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction inconnue avec trois variables indépendantes pour laquelle on peut faire la correspondance avec un système de *Charpit*, [28].

Considérons l'équation

$$f(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3, p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{23}, p_{33})=0 \tag{160}$$

avec les notations usuelles

$$p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}, \qquad p_{ij}=\frac{\partial z}{\partial x_i \partial x_j}$$

et avec les conditions d'indépendance de l'ordre de la différentiation de la fonction z par rapport aux x_i.

On peut les équations dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial p_{11}}\frac{\partial p_{11}}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial p_{12}}\frac{\partial p_{12}}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial p_{13}}\frac{\partial p_{13}}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial p_{22}}\frac{\partial p_{22}}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial p_{23}}\frac{\partial p_{23}}{\partial x_i}+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial p_{33}}\frac{\partial p_{33}}{\partial x_i}+D_i f=0, \quad (i=1, 2, 3),$$

les symboles D_i désignant l'opérateur suivant

$$D_i\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{s=1}^{3} p_{si}\frac{\partial}{\partial p_s}, \tag{161}$$

mettre sous la forme suivante

$$(162)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial p_{11}}\dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial f}{\partial p_{12}}\dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial f}{\partial p_{13}}\dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_3}+D_1 f+ \\ \qquad +\left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{22}}\dfrac{\partial p_{22}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial f}{\partial p_{23}}\dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial f}{\partial p_{33}}\dfrac{\partial p_{33}}{\partial x_1}\right)=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial p_{12}}\dfrac{\partial p_{22}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial f}{\partial p_{22}}\dfrac{\partial p_{22}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial f}{\partial p_{23}}\dfrac{\partial p_{22}}{\partial x_3}+D_2 f+ \\ \qquad +\left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{11}}\dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial f}{\partial p_{13}}\dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial f}{\partial p_{33}}\dfrac{\partial p_{33}}{\partial x_2}\right)=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial p_{13}}\dfrac{\partial p_{33}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial f}{\partial p_{23}}\dfrac{\partial p_{33}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial f}{\partial p_{33}}\dfrac{\partial p_{33}}{\partial x_3}+D_3 f+ \\ \qquad +\left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{11}}\dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_3}+\dfrac{\partial f}{\partial p_{12}}\dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_3}+\dfrac{\partial f}{\partial p_{22}}\dfrac{\partial p_{22}}{\partial x_3}\right)=0. \end{cases}$$

Ajoutons aux équations (162) les trois nouvelles

$$(163)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_1}-m\dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_2}-n\dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_3}=0, \\ \dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_1}-m\dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_2}-n\dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_3}=0, \\ \dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_1}-m\dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_2}-n\dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_3}=0. \end{cases}$$

Les fonctions $m(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3, p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{23}, p_{33})$, $n(\ldots)$, seront déterminées d'une manière convenable.

Faisons les éliminations suivantes:

a) Éliminons de la première équation (162) les dérivées $\dfrac{\partial p_{22}}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial p_{33}}{\partial x_1}$ en utilisant les relations évidentes

$$(163_1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_{22}}{\partial x_1}=\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_1}-n\dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_2}-\dfrac{n^2}{m}\dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_3}, \\ \dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_1}=m\dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_2}+n\dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_3}, \\ \dfrac{\partial p_{33}}{\partial x_1}=\dfrac{1}{n}\dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_1}-\dfrac{m^2}{n}\dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_2}-m\dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_3}, \end{cases}$$

b) Éliminons de la seconde équation (163) les dérivées $\frac{\partial p_{11}}{\partial x_2}$, $\frac{\partial p_{13}}{\partial x_2}$, $\frac{\partial p_{33}}{\partial x_2}$ en utilisant les relations évidentes

$$(163_2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_2}=m\dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_2}-\dfrac{n^2}{m}\dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_3}+\dfrac{n}{m}\dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_2}=\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_1}-\dfrac{n}{m}\dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_3}, \\ \dfrac{\partial p_{33}}{\partial x_2}=\dfrac{1}{mn}\dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_1}-\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_3}-\dfrac{m}{n}\dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_2}. \end{cases}$$

c) Éliminons de la troisième équation (163) les dérivées suivantes: $\frac{\partial p_{11}}{\partial x_3}$, $\frac{\partial p_{12}}{\partial x_3}$, $\frac{\partial p_{22}}{\partial x_3}$ en utilisant les relations suivantes

$$(163_3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_3}=\dfrac{m}{n}\dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_1}-\dfrac{m^2}{n}\dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_2}+n\dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_3}, \\ \dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_3}=\dfrac{1}{n}\dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_1}-\dfrac{m}{n}\dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_2}, \\ \dfrac{\partial p_{22}}{\partial x_3}=\dfrac{1}{mn}\dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_1}-\dfrac{n}{m}\dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_3}-\dfrac{1}{n}\dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_2}. \end{cases}$$

Après les éliminations indiquées le système (162) obtient la forme nouvelle

$$(164)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial p_{11}}\dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_1}+\left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{12}}+\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial f}{\partial p_{22}}\right)\dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_2}+\left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{13}}+\dfrac{1}{n}\dfrac{\partial f}{\partial p_{33}}\right)\dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_3}+ \\ \qquad +D_1 f+K_1\left(m\dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_2}+n\dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_3}\right)=0, \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{12}}+m\dfrac{\partial f}{\partial p_{11}}\right)\dfrac{\partial p_{22}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial f}{\partial p_{22}}\dfrac{\partial p_{22}}{\partial x_2}+\left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{23}}-\dfrac{m}{n}\dfrac{\partial f}{\partial p_{33}}\right)\dfrac{\partial p_{22}}{\partial x_3}+ \\ \qquad +D_2 f+\dfrac{1}{m}K_2\left(\dfrac{1}{n}\dfrac{\partial p_{13}}{\partial x_1}-\dfrac{\partial p_{23}}{\partial x_3}\right)=0, \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{13}}+n\dfrac{\partial f}{\partial p_{11}}\right)\dfrac{\partial p_{33}}{\partial x_1}+\left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{23}}-\dfrac{n}{m}\dfrac{\partial f}{\partial p_{22}}\right)\dfrac{\partial p_{33}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial f}{\partial p_{33}}\dfrac{\partial p_{33}}{\partial x_3}+ \\ \qquad +D_3 f+\dfrac{1}{n}K_3\left(\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial p_{22}}{\partial x_1}-\dfrac{\partial p_{12}}{\partial x_2}\right)=0 \end{cases}$$

en utilisant les désignations suivantes

$$(165)\qquad \begin{cases} K_1 \equiv \dfrac{\partial f}{\partial p_{23}} - \dfrac{n}{m}\,\dfrac{\partial f}{\partial p_{22}} - \dfrac{m}{n}\,\dfrac{\partial f}{\partial p_{33}}, \\ K_2 \equiv n^2\,\dfrac{\partial f}{\partial p_{11}} + n\,\dfrac{\partial f}{\partial p_{13}} + \dfrac{\partial f}{\partial p_{33}}, \\ K_3 \equiv m^2\,\dfrac{\partial f}{\partial p_{11}} + m\,\dfrac{\partial f}{\partial p_{12}} + \dfrac{\partial f}{\partial p_{22}}. \end{cases}$$

Il est aisé de s'en persuader que les équations (164) forment un système de *Charpit* si les conditions suivantes sont remplies

$$(166)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{12}} + \dfrac{1}{m}\,\dfrac{\partial f}{\partial p_{22}}\right) : \dfrac{\partial f}{\partial p_{12}} = \dfrac{\partial f}{\partial p_{22}} : \left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{12}} + m\,\dfrac{\partial f}{\partial p_{11}}\right) = \\ \qquad\qquad = \left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{23}} - \dfrac{n}{m}\,\dfrac{\partial f}{\partial p_{22}}\right) : \left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{13}} + n\,\dfrac{\partial f}{\partial p_{11}}\right) = -m, \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{13}} + \dfrac{1}{n}\,\dfrac{\partial f}{\partial p_{33}}\right) : \dfrac{\partial f}{\partial p_{11}} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{23}} - \dfrac{m}{n}\,\dfrac{\partial f}{\partial p_{33}}\right) : \left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{12}} + m\,\dfrac{\partial f}{\partial p_{11}}\right) = \\ \qquad\qquad = \dfrac{\partial f}{\partial p_{33}} : \left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{13}} + n\,\dfrac{\partial f}{\partial p_{11}}\right) = -n, \end{cases}$$

ou

$$(166_1)\qquad m^2\,\frac{\partial f}{\partial p_{11}} + m\,\frac{\partial f}{\partial p_{12}} + \frac{\partial f}{\partial p_{22}} = 0, \quad n^2\,\frac{\partial f}{\partial p_{11}} + n\,\frac{\partial f}{\partial p_{13}} + \frac{\partial f}{\partial p_{33}} = 0,$$

$$(162_2)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial p_{23}} - \frac{m}{n}\,\frac{\partial f}{\partial p_{33}} + n\,\frac{\partial f}{\partial p_{12}} + mn\,\frac{\partial f}{\partial p_{11}} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial p_{23}} - \frac{n}{m}\,\frac{\partial f}{\partial p_{22}} + m\,\frac{\partial f}{\partial p_{13}} + mn\,\frac{\partial f}{\partial p_{11}} = 0. \end{aligned}$$

Grâce aux équations (166_1) les équations (166_2) ne donnent qu'une condition qu'on peut mettre sous la forme suivante

$$\frac{\partial f}{\partial p_{23}} - \frac{n}{m}\,\frac{\partial f}{\partial p_{22}} - \frac{m}{n}\,\frac{\partial f}{\partial p_{33}} = 0$$

C'est ainsi que l'on parvient à mettre les conditions (166) sous la forme plus symétrique

$$(167)\qquad K_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Donc, en vertu des conditions (167) le système (164) devient

$$\tag{168}\begin{aligned}&\frac{\partial p_{11}}{\partial x_1}-m\frac{\partial p_{11}}{\partial x_2}-n\frac{\partial p_{11}}{\partial x_3}+D_1 f\Big/\frac{\partial f}{\partial p_{11}}=0,\\&\frac{\partial p_{22}}{\partial x_1}-m\frac{\partial p_{22}}{\partial x_2}-n\frac{\partial p_{22}}{\partial x_3}+D_2 f\Big/\left(\frac{\partial f}{\partial p_{12}}+\frac{\partial f}{\partial p_{11}}m\right)=0,\\&\frac{\partial p_{33}}{\partial x_1}-m\frac{\partial p_{33}}{\partial x_2}-n\frac{\partial p_{33}}{\partial x_3}+D_3 f\Big/\left(\frac{\partial f}{\partial p_{13}}+\frac{\partial f}{\partial p_{11}}n\right)=0.\end{aligned}$$

Ajoutons aux équations (163) et (168) les identités évidentes

$$\tag{169}\begin{cases}\dfrac{\partial p_i}{\partial x_1}-m\dfrac{\partial p_i}{\partial x_2}-n\dfrac{\partial p_i}{\partial x_3}=p_{i1}-mp_{i2}-np_{i3},\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial x_1}-m\dfrac{\partial z}{\partial x_2}-n\dfrac{\partial z}{\partial x_3}=p_1-mp_2-np_3.\end{cases}$$

Les équations (163), (168) et (169) forment un système du type de *Charpit* On peut associer au système dit un système équivalent des caractéristiques

$$\tag{170}\begin{cases}dx_1=\dfrac{dx_2}{-m}=\dfrac{dx_3}{-n}=\dfrac{dz}{p_1-mp_2-np_3}=\dfrac{dp_i}{p_{i1}-mp_{i2}-np_{i3}}=\\[2ex]=\dfrac{dp_{11}}{-D_1 f\Big/\dfrac{\partial f}{\partial p_{11}}}=\dfrac{dp_{22}}{-D_2 f\Big/\left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{12}}+m\dfrac{\partial f}{\partial p_{11}}\right)}=\\[2ex]=\dfrac{dp_{33}}{-D_3 f\Big/\left(\dfrac{\partial f}{\partial p_{13}}+n\dfrac{\partial f}{\partial p_{11}}\right)}=\dfrac{dp_{ik}}{0}.\end{cases}$$

Grâce aux conditions: $K_2=0$, $K_3=0$ on peut déterminer les fonctions inconnues: m et n et alors en vertu de la condition $K_1=0$ on obtient la condition cherchée pour la fonction f

$$\tag{171}\begin{aligned}&\left\{\frac{\partial f}{\partial p_{23}}\pm\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_{23}}\right)^2-4\frac{\partial f}{\partial p_{22}}\frac{\partial f}{\partial p_{33}}\right]^{1/2}\right\}:2\frac{\partial f}{\partial p_{33}}=\\&=\left\{\frac{\partial f}{\partial p_{12}}\mp\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_{12}}\right)^2-4\frac{\partial f}{\partial p_{11}}\frac{\partial f}{\partial p_{22}}\right]^{1/2}\right\}\cdot\left\{\frac{\partial f}{\partial p_{13}}\mp\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_{13}}\right)^2-4\frac{\partial f}{\partial p_{11}}\frac{\partial f}{\partial p_{33}}\right]^{1/2}\right\}\end{aligned}$$

Autrement dit si la fonction f admet la condition (171) alors on peut à l'équation donnée (160) associer le système de *Charpit* (163), (168), (169) ou le système des équations différentielles ordinaires des caractéristiques (170).

Pour former la solution correspondante de l'équation (160) (admettant la condition (171)) au moyen de l'intégrale générale du système de *Charpit* (163), (168), (169) on peut construire la théorie que serait analogue à la théorie concernant le système (23) en involution de *Darboux-Lie.*

Considérons une équation aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction z inconnue:

$$u=F(x_1, x_2, x_3, z, v) \tag{172}$$

F étant une fonction arbitraire et les quantités u et v sont définies par les relations données

$$\begin{aligned} u&=\varphi\left(x_1, x_2, x_3, z, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_3}\right), \\ v&=\psi\left(x_1, x_2, x_3, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \frac{\partial z}{\partial x_3}\right). \end{aligned} \tag{173}$$

Grâce aux (173) on peut mettre l'équation (172) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} f\equiv\varphi&\left[x_1, x_2, x_3, z, \psi(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3), \frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right]- \\ &-F[x_1', x_2, x_3, z, \psi(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3)]=0. \end{aligned}$$

La fonction considérée f admet la condition (171) et on peut appliquer la théorie exposée à l'équation considérée: $f=0$.

12. Sur les résultats de D. H. Parsons

Soit l'équation

$$f(x_1, \ldots, x_n, z, p_{11}, \ldots, p_{nn})=0 \tag{174}$$

dans laquelle z est la fonction des n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$

$$p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad p_{ij}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$$

et telle que f soit analytique pour toutes variables.

D. H. Parsons, [29], [30], [31], définissait le rang de l'équation donnée (174) comme le rang de la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} \partial f/\partial p_{11} & 1/2\ \partial f/\partial p_{12} & \ldots & 1/2\ \partial f/\partial p_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/2\ \partial f/p_{n1} & \ldots & \ldots & \partial f/\partial p_{nn} \end{bmatrix}.$$

Il démontrait aussi les propositions suivantes:

Si l'équation (174) est de rang 1, elle a une famille des caractéristiques du premier ordre;

Si l'équation (174) est du rang 2, elle a deux familles diverses et si l'équation donnée est du rang 3, elle n'a pas des caractéristiques de cette espèce;

Le rang de l'équation donnée est invariant sous la transformation de contact.

Dans son oeuvre, [29], *D. H. Parsons* appliquait la théorie classique des caractéristiques, la théorie des équations en involution et la mèthode de *Darboux*, [32], [14], à l'équation (174), $n=3$, quand elle est du rang 2 ou 1.

On ne peut pas généraliser la méthode de *Darboux* sans la condition suffisante et nécessaire: l'équation (174) est du rang 1 ou 2.

D. H. Parsons illustrait sa théorie avec l'exemple suivant

$$p_{11}+\frac{p_{12}\,p_{13}}{1-p_{23}}+\left(\frac{p_{12}}{1-p_{23}}\right)^2=0$$

ajoutant les conditions

$$\text{pour } x_1=0\colon\ z=1/2\,x_3^2,\ \ p_1=x_2^2+x_2x_3;\ \text{ ou}$$

$$\text{pour } x_1=0\colon\ z=0,\ \ p_1=x_2x_3.$$

La méthode exposés de *Parsons* peut être généralisé au cas $n\geq 3$ et aussi aux équations correspondantes aux dérivées partielles des ordres supérieurs.

III Chapitre

SUR LE SYSTÈME DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES EN INVOLUTION DE DARBOUX DU TROISIÈME ORDRE

Les équations aux dérivées partielles d'une fonction à deux variables indépendantes en involulion de *Darboux* du troisième ordre admettent d'établir plusieurs propriétés qui sont analogues aux propriétés de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre et des systèmes des équations aux dérivées partielles du second ordre en involution de *Darboux-Lie.*

On peut établir pour les équations en involution de *Darboux* du troisième ordre, par exemple, les propriétés suivantes:

1) on peut former le système des équations différentielles jouant le rôle d'un système des caractéristiques,

2) on peut étendre la notion de l'intégrale complète et préciser les conditions nécessaires et suffisantes concernant cette intégrale,

3) on peut résoudre deux problèmes de *Jacobi* et d'une manière bien déterminée faire la liaison intime entre l'intégrale générale du système des caractéristiques et l'intégrale complète du système des équations aux dérivées partielles,

4) on peut traiter la théorie de *Lagrange* des intégrales des systèmes considérés, et

5) on peut aussi poser le problème da la formation d'une intégrale de *Cauchy* à l'aide d'une intégrale complète donnée. ([10], [13], [15], [33]).

1. L'involution de Darboux du troisième ordre

Considérons une équation aux dérivées partielles du second ordre, utilisant les désignations habituelles, sous la forme suivante

$$(1) \qquad r+f(x, y, z, p, q, s, t)=0.$$

On supposera pour la fonction f que $f\in C^2(G)$, où G est un domaine déterminé des variables x, y, z, p, q, s, t. A l'équation (1) faisons correspondre une autre équation aux dérivées partielles du troisième ordre suivant une loi qui sera déterminée plus tard, et écrivons

$$(2) \qquad z_{xyy}+\Phi(x, y, z, p, q, s, t, z_{yyy})=0.$$

On supposera que $\Phi \in C^1(G_1)$, où G_1 est un domaine des variables x, y, z, p, q, s, t, z_{yyy} et $G \subset G_1$.

Formons les équations dérivées du second ordre de l'équation (1) et du premier ordre de l'équation (2) respectivement par rapport aux variables indépendantes x et y:

$$
\tag{3}
\begin{aligned}
&z_{xxxx} + f_s z_{xxxy} + f_t z_{xxyy} + D_{xx} f = 0,\\
&z_{xxxy} + f_s z_{xxyy} + f_t z_{xyyy} + D_{yx} f = 0,\\
&z_{xxyy} + f_s z_{xyyy} + f_t z_{yyyy} + D_{yy} f = 0,\\
&z_{xxyy} + \Phi_\delta z_{xyyy} + D_x \Phi = 0,\\
&z_{xyyy} + \Phi_\delta z_{yyyy} + D_y \Phi = 0,
\end{aligned}
$$

δ, Φ_δ, f_s, f_t, z_{xxxx}, ... désignant respectivement les dérivées partielles

$\partial^3 z/\partial y^3$, $\partial\Phi/\partial\delta$, $\partial f/\partial s$, $\partial f/\partial t$, $\partial^4 z/\partial x^4$, ... ; quant à D_x, D_y, D_{xx}, D_{xy}, D_{yy},

elles désignent les dérivées correspondantes prises par rapport à x et y. En vertu de la définition de l'involution de *Darboux* du troisième ordre, les équations (3) ne doivent point être résolubles par rapport aux dérivées du quatrième ordre. Il en résulte les deux conditions de l'involution sous les formes suivantes

$$
\tag{4}
\Phi_\delta^2 - f_s \Phi_\delta + f_t = 0,
$$

$$
\tag{5}
D_x \Phi + \frac{f_t}{\Phi_\delta} D_y \Phi - D_{yy} f = 0.
$$

2. Système des équations différentielles ordinaires des caractéristiques

Grâce aux équations (3) on peut former les équations suivantes

$$
\tag{3'}
\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{f_t}{\Phi_\delta} m + D_{xx} f = 0,\\
&\frac{\partial\beta}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial\beta}{\partial y} - m + D_{yx} f = 0,\\
&\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial\gamma}{\partial y} + D_x \Phi = 0,\\
&\frac{\partial\delta}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial\delta}{\partial y} + D_y \Phi = 0,
\end{aligned}
$$

où l'on a posé: $\alpha \equiv z_{xxx}$, $\beta \equiv z_{xxy}$, $\gamma \equiv z_{xyy}$, $m \equiv (f_t/\Phi_\delta)\, D_x \Phi - D_{yx} f$. Complétons ces dernières équations par les égalités évidentes

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial z}{\partial y} - p - \Phi_\delta q = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial p}{\partial y} - r - \Phi_\delta s = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial q}{\partial y} - s - \Phi_\delta t = 0,$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial r}{\partial y} - \alpha - \Phi_\delta \beta = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial s}{\partial y} - \beta - \Phi_\delta \gamma = 0, \tag{6'}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} + \Phi_\delta \frac{\partial t}{\partial y} - \gamma - \Phi_\delta \delta = 0.$$

L'ensemble d'équations (3'), (6), (6') représente un système de la forme de *Charpit*, [1], à dix fonctions inconnues: $z, p, q, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ des variables indépendantes x et y. Par conséquent, l'intégration du système (3'), (6), (6') revient à l'intégration du système d'équations différentielles ordinaires des caractéristiques

$$\begin{aligned} dx = \frac{dy}{\Phi_\delta} = \frac{dz}{p+\Phi_\delta q} = \frac{dp}{r+\Phi_\delta s} = \frac{dq}{s+\Phi_\delta t} = \frac{dr}{\alpha+\Phi_\delta \beta} = \frac{ds}{\beta+\Phi_\delta \gamma} = \frac{dt}{\gamma+\Phi_\delta \delta} = \\ = -\frac{d\alpha}{D_{xx}f + m f_t/\Phi_\delta} = -\frac{d\beta}{D_{yx}f - m} = -\frac{d\gamma}{D_x \Phi} = -\frac{d\delta}{D_y \Phi}. \end{aligned} \tag{7}$$

Pour nos équations (1) et (2) on peut utiliser aussi le système des caractéristiques de la forme

$$dx = \frac{dy}{\Phi_\delta} = \frac{dz}{p+\Phi_\delta q} = \frac{dp}{r+\Phi_\delta s} = \frac{dq}{s+\Phi_\delta t} = \frac{ds}{\beta+\Phi_\delta \gamma} = \frac{dt}{\gamma+\Phi_\delta \delta} = -\frac{d\delta}{D_y \Phi}, \tag{8}$$

où r, γ, β doivent être exprimés par les autres variables figurant aux équations (1) et (2).

3. L'intégrale complète

Nous partons de l'équation

$$z = V(x, y, C_1, \ldots, C_6), \tag{9}$$

où C_i sont les paramètres distincts et indépendantes des variables x et y. Supposons que $V \in C^4(D')$, D' désignant un domaine de $x, y, C_1, \ldots, C_6$. Formons les équations dérivées

$$p = V_x(x, y, C_1, \ldots, C_6), \quad q = V_y(x, y, C_1, \ldots, C_6), \tag{10}$$

$$r = V_{xx}(x, y, C_1, \ldots, C_6), \tag{11}$$

$$s = V_{xy}(x, y, C_1, \ldots, C_0), \quad t = V_{yy}(x, y, C_1, \ldots, C_6), \tag{12}$$

$$\gamma = V_{xyy}(x, y, C_1, \ldots, C_6), \tag{13}$$

$$\delta = V_{yyy}(x, y, C_1, \ldots, C_0), \tag{14}$$

sous la condition suivante dans le domaine D'

$$\Delta \equiv D\left(\frac{V,\ V_x,\ V_y,\ V_{xy},\ V_{yy},\ V_{yyy}}{C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6}\right) \neq 0. \tag{15}$$

Si le résultat de l'élimination des paramètres C_i des équations (11), (13) et (9) (10), (12), (14) ne donne que les équations (1) et (2), nous dirons dans ce cas que l'intégrale complète du système (1)—(2) est définie par l'équation (9).

On va maintenant démontrer que grâce aux conditions (4)—(5) la fonction V doit satisfaire aux conditions complémentaires.

En effet, on peut démontrer aisément qu'il y a lieu les égalités suivantes

$$(f_s) = -\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad (f_t) = -\frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (\Phi_\delta) = -\frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{16}$$

où les parenthèses signifient le résultat de la substitution de z, p, q, s, t, δ respectivement par leurs valeurs $V, V_x, V_y, V_{xy}, V_{yy}, V_{yyy}$ et $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ les déterminants fonctionnels suivants

$$\Delta_1 \equiv D\left(\frac{V,\ V_x,\ V_y,\ V_{xx},\ V_{yy},\ V_{yyy}}{C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_0}\right), \quad \Delta_2 \equiv D\left(\frac{V,\ V_x,\ V_y,\ V_{xy},\ V_{xx},\ V_{yyy}}{C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6}\right),$$

$$\Delta_3 \equiv D\left(\frac{V,\ V_x,\ V_y,\ V_{xy},\ V_{yy},\ V_{xyy}}{C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6}\right). \tag{17}$$

La condition (4) nous donne

$$(\Phi_\delta)^2 - (f_s)(\Phi_\delta) + (f_t) = 0 \tag{4'}$$

où les parenthèses ont les significations antérieurement établies. Grâce aux égalités (16) la condition (4') devient

$$\left(\frac{\Delta_3}{\Delta}\right)^2 - \frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{\Delta_3}{\Delta} - \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0,$$

ou

(18)
$$\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{\Delta_1}{\Delta}+\frac{\Delta_2}{\Delta_3}, \quad \Delta_3\neq 0.$$

On peut mettre la condition (18) sous une forme plus symétrique. En effet, en vertu des identités évidentes

$$V_{xx}+f(x, y, V, V_x, V_y, V_{xy}, V_{yyy})=0,$$
$$V_{xxy}+(D_y f)=0$$

et (16) on peut établir une rélation nouvelle

(18')
$$\Delta'=-(f_s)\,\Delta_3-(f_t)\,\Delta,$$

ou

(18'')
$$\frac{\Delta'}{\Delta_3}=\frac{\Delta_1}{\Delta}+\frac{\Delta_2}{\Delta_3},$$

désignant par Δ' le déterminant fonctionnel

(19)
$$\Delta'\equiv D\left(\frac{V,\, V_x,\, V_y,\, V_{xy},\, V_{yy},\, V_{xxy}}{C_1,\, C_2,\, C_3,\, C_4,\, C_5,\, C_6}\right).$$

Grâce à la relation obtenue (18''), on peut mettre la condition (18) sous la forme convenable, plus symétrique

(20)
$$\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{\Delta'}{\Delta_3}, \qquad \Delta_3\neq 0.$$

La relation (5) ou la relation suivante

(5')
$$(D_x\,\Phi)+(D_y\,\Phi)\,(f_t/\Phi_\delta)-(D_{yy}f)=0$$

est vérifiée indentiquement, grâce à la condition (18), à savoir

$$\left(\frac{\Delta_3}{\Delta}-\frac{\Delta_2}{\Delta_3}-\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)V_{xyyy}=0.$$

Donc, la relation (5) n'impose pas des conditions nouvelles à la fonction V.

Il est aisé à démontrer qu'il doit avoir lieu la condition nouvelle

(21)
$$\delta_1=0,$$

δ_1 désignant le déterminant fonctionnel

(22)
$$\delta_1\equiv D\left(\frac{V,\, V_x,\, V_y,\, V_{xx},\, V_{xy},\, V_{yy}}{C_1,\, C_2,\, C_3,\, C_4,\, C_5,\, C_6}\right),$$

car l'équation (1) ne dépend pas de la dérivée $\delta=z_{yyy}$.

On peut démontrer que les conditions (18) ou (20) et (21) sont aussi suffisantes.

Donc, l'équation (9) definit une intégrale complète du système (1)—(2) en involution de *Darboux* du troisième ordre si la fonction V admet les conditions nécessaires et suffisantes

$$\Delta \neq 0, \quad \delta_1 = 0, \quad \Delta_3/\Delta = \Delta'/\Delta_3, \tag{23}$$

Δ, Δ_3, Δ' et δ_1 désignant les déterminants fonctionnels (15), (17), (19) et (22).

4. L'intégrale générale des caractéristiques. Le théorème généralisé de Jacobi

Il est aisé à démontrer que les formules

$$z = V, \quad p = V_x, \quad q = V_y, \quad s = V_{xy}, \quad t = V_{yy}, \quad \delta = V_{yyy} \tag{24}$$

définissent les six premières intégrales distinctes du système

$$dx = \frac{dz}{p + \Phi_\delta q} = \frac{dp}{r + \Phi_\delta s} = \frac{dq}{s + \Phi_\delta t} = \frac{ds}{\beta + \Phi_\delta \gamma} = \frac{dt}{\gamma + \Phi_\delta \delta} = -\frac{d\delta}{D_y \Phi}. \tag{8'}$$

En effet, on a les équations dérivées

$$\begin{gathered} \frac{dz}{dx} = V_x + V_y \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = V_{xx} + V_{xy} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dq}{dx} = V_{xy} + V_{yy} \frac{dy}{dx}, \\ \frac{ds}{dx} = V_{xxy} + V_{xyy} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dt}{dx} = V_{xyy} + V_{yyy} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d\delta}{dx} = V_{xyyy} + V_{yyyy} \frac{dy}{dx} \end{gathered} \tag{25}$$

et en vertu des relations

$$(\Phi_\delta) = -\frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (D_y \Phi) = -V_{xyyy} + \frac{\Delta_3}{\Delta} V_{yyyy},$$

$$V_{xx} + f(x, y, V, V_x, V_y, V_{xy}, V_{yy}) = 0,$$

$$V_{xyy} + \Phi(x, y, V, V_x, V_y, V_{xy}, V_{yy}, V_{yyy}) = 0,$$

et de l'équation première du système (8)

$$\frac{dy}{dx} = (\Phi_\delta), \tag{26}$$

où les parenthèses ont les significations antérieurement établie, le résultat de l'élimination des constantes C_i, définies par les équations (24), entre les équations (25) ne donne que les équations (8').

Cherchons, encore, l'intégrale de l'équation (26) ou d'une des équations équivalentes

$$\Delta_3\, dx + \Delta\, dy = 0, \tag{27}$$

$$\Delta' dx + \Delta_3\, dy = 0. \tag{28}$$

Introduisons le symbole suivant

$$(i, j, k, l, m) \equiv D\left(\frac{V,\ V_x,\ V_y,\ V_{xy},\ V_{yy}}{C_i,\ C_j,\ C_k,\ C_l,\ C_m}\right), \tag{29}$$

i, j, k, l, m désignant les nombres entiers de 1 à 6. On peut former les identités suivantes

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(i,k,l,m,n)}{(i,j,k,l,m)}\right] = a_1\Delta' + a_2\Delta_3, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(i,j,l,m,n)}{(i,j,k,l,n)}\right] = b_1\Delta' + b_2\Delta_3,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(i,k,l,m,n)}{(i,j,k,l,m)}\right] = a_1\Delta_3 + a_2\Delta, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(i,j,l,m,n)}{(i,j,k,l,n)}\right] = b_1\Delta_3 + b_2\Delta,$$

a_i et b_i désignant les fonctions des variables $x, y, C_1, \ldots, C_6$ bien déterminées. Grâce à la condition (20) il en résulte

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(i,k,l,m,n)}{(i,j,k,l,m)}\right]}{\Delta_3} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(i,k,l,m,n)}{(i,j,k,l,m)}\right]}{\Delta} \tag{30}$$

et aussi

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(i,j,l,m,n)}{(i,j,k,l,n)}\right]}{\Delta'} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(i,j,l,m,n)}{(i,j,k,l,n)}\right]}{\Delta_3}. \tag{31}$$

Donc, les équations (27) ou (28) ont les intégrales suivantes

$$I_1 \equiv \frac{(i,k,l,m,n)}{(i,j,k,l,m)} = \text{const.}, \qquad I_2 \equiv \frac{(i,j,l,m,n)}{(i,j,k,l,n)} = \text{const.}$$

$$(I_\sigma)_x \neq 0, \qquad (I_\sigma)_y \neq 0, \qquad (\sigma = 1, 2).$$

Ces intégrales ne sont pas indépendantes par rapport aux variables x et y. En effet, en vertu des relations (30) et (31), on a

$$D\left(\frac{I_1,\ I_2}{x,\ y}\right) = 0.$$

On peut formuler le théorème suivant — *théorème de Jacobi:*

L'intégrale générale du système des équations différentielles des caractéristique (8) *est définie, en vertu de l'intégrale complète* (9) *et* (23), *par les formules suivantes*

$$z=V,\ p=V_x,\ q=V_y,\ s=V_{xy},\ t=V_{yy},\ \delta=V_{yyy},$$

$$I_1\equiv D\left(\frac{V,\ V_x,\ V_y,\ V_{xy},\ V_{yy}}{C_i,\ C_k,\ C_l,\ C_m,\ C_n}\right):D\left(\frac{V,\ V_x,\ V_y,\ V_{xy},\ V_{yy}}{C_i,\ C_j,\ C_k,\ C_l,\ C_m}\right)=C_7,$$

$$(I_1)_x\neq 0,\quad (I_1)_y\neq 0.$$

5. Sur une méthode de N. Saltykow dans la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre

N. Saltykow avait communiqué à une des séances de l'Institut mathématique en 1959 une méthode très intéressante pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. Notre but est maintenant de démontrer que la méthode exposée a des liaisons avec certaines notions et certains résultats de la théorie des équations aux dérivées partielles qui sont en involution de *Darboux* du troisième ordre, [33].

Considérons une équation aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction inconnue z de deux variables indépendantes x et y

$$f(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)=0,\qquad f_r f_t\neq 0, \tag{32}$$

où l'on a posé $p=\partial z/\partial x$, $q=\partial z/\partial y$, $r=\partial^2 z/\partial x^2$, $s=\partial^2 z/\partial x\,\partial y$, $t=\partial^2 r/\partial y^2$, $f_r=\partial f/\partial r$, $f_s=\partial f/\partial s$. On supposera que $f\in C^2(G)$, où G est un domaine déterminé des variables $x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t$.

Formons les équations dérivées de l'équation (32) respectivement par rapport à x et y, à savoir

$$\begin{cases} f_r\alpha+f_s\beta+f_t\gamma+D_xf=0,\\ f_r\beta+f_s\gamma+f_t\delta+D_yf=0,\end{cases} \tag{33}$$

en posant

$$\alpha=\partial^3 z/\partial x^3,\quad \beta=\partial^3 z/\partial x^2\,\partial y,\quad \gamma=\partial^3 z/\partial x\,\partial y^2,\quad \delta=\partial^3 z/\partial y^3,\quad f_s=\partial f/\partial s,$$

$$D_x=\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial z}+r\frac{\partial}{\partial p}+s\frac{\partial}{\partial q}$$

$$D_y=\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z}+s\frac{\partial}{\partial p}+t\frac{\partial}{\partial q}$$

et ajoutons y une équation auxiliaire

$$\beta-m(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)\,c=0. \tag{34}$$

La fonction m doit satisfaire aux conditions qui seront précisées plus tard.

Grâce à l'équation (34), on peut mettre les équations dérivées (33) sous la forme suivante

$$(33') \qquad \begin{aligned} &\alpha+(mf_s+f_t)/(mf_r)\,\beta+D_x f/f_r=0,\\ &\gamma+f_t/(mf_r+f_s)\,\delta+D_y f/(mf_r+f_s)=0. \end{aligned}$$

Supposons que les coefficients de b et d des équations ci-dessus satisfont aux conditions

$$(mf_s+f_t)/mf_r=-m, \quad f_t/(mf_r+f_s)=-m;$$

on aura alors une seule condition pour la fonction m:

$$(35) \qquad f_r m^2+f_s m+f_t=0.$$

Par conséquent les équations (33′) et (34) peuvent être écrites sous la forme

$$(36) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial x}-m\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{l}{f_r}D_x f=0,\\ &\frac{\partial s}{\partial x}-m\frac{\partial s}{\partial y}=0,\\ &\frac{\partial t}{\partial x}-m\frac{\partial t}{\partial y}-\frac{m}{f_t}D_y f=0. \end{aligned}$$

Les équations obtenues (36) et les identités évidentes de la forme suivante

$$(37) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial x}-m\frac{\partial z}{\partial y}=p-mq,\\ &\frac{\partial p}{\partial x}-m\frac{\partial p}{\partial y}=r-ms,\\ &\frac{\partial q}{\partial x}-m\frac{\partial q}{\partial y}=s-mt, \end{aligned}$$

représentent un système de la forme de *Charpit* à six fonctions inconnues: z, p, q, r, s, t de deux variables indépendantes x et y, [18]. (Dans le livre de *Hilbert et Courant* [1], pour le système de cette espèce on emploie la dénomination „système des équations qui ont *la même partie principale*").

Le système correspondant d'équations différentielles ordinaires „*caractéristiques*" devient

$$(38) \qquad dx=\frac{dy}{-m}=\frac{dz}{p-mq}=\frac{dp}{r-ms}=\frac{dq}{s-mt}=-\frac{dr}{D_x f/f_r}=\frac{ds}{0}=\frac{dt}{mD_y f/f_t}.$$

Il ne reste qu'à poser la question de l'intégration de l'équation donnée (32) à l'aide de l'intégration du système (38).

Posons maintenant le problème suivant: associons à l'équation (32) une autre équation de la forme (34) de telle manière que ces deux équations soient en involution de *Darboux* du troisième ordre.

Pour établir les conditions de la dite involution nous utiliserons, par exemple, un procédé antérieurement cité, [33].

Pour cela formons les équations dérivées des équations (32) et (34)

$$
(39)\qquad
\begin{aligned}
&f_r z_{xxxx} + f_s z_{xxxy} + f_t z_{xxyy} + D_{xx} f = 0,\\
&f_r z_{xxxy} + f_s z_{xxyy} + f_t z_{xyyy} + D_{xy} f = 0,\\
&f_r z_{xxyy} + f_s z_{xyyy} + f_t z_{yyyy} + D_{yy} f = 0,\\
&z_{xxxy} - m z_{xxyy} - \gamma D_x m = 0,\\
&z_{xxyy} - m z_{xyyy} - \gamma D_y m = 0.
\end{aligned}
$$

D_x, D_y, D_{xx}, D_{xy}, D_{yy} désignant respectivement les dérivées cerrespondantes des fonctions m et f prises une ou deux fois par rapport à x et y; quant à z_{xxxx}, z_{xxxy}, etc., elles désignent les dérivées partielles du quatrième ordre de la fonction z: $\partial^4 z/\partial x^4$, $\partial^4 z/\partial x^3 \partial y$, etc.

D'après les conditions de l'involution de *Darboux* du troisième ordre, les équations (39) sont insolubles par rapport aux dérivées du quatrième ordre: z_{xxxx}, z_{xxxy}, ..., z_{yyyy}. Il en résulte que tous les déterminants du cinquième ordre de la matrice des coefficients du système (39) sont égaux à zéro. On peut mettre le déterminant Δ du cinquième ordre formé des coefficients des dérivées du quatrième ordre de la fonction z — le déterminant du système (39) — sous la forme suivante

$$\Delta \equiv f_r f_t (f_r m^2 + f_s m + f_t).$$

En égalant ce déterminant à zéro et grâce à la condition $f_r f_t \neq 0$, on a

$$(35)\qquad f_r m^2 + f_s m + f_t = 0.$$

Ce n'est que la condition (35) qui a été obtenue par la méthode de *N. Saltykow*. En utilisant la condition (35) et $f_r f_t \neq 0$, tous les autres déterminants du cinquième ordre seront égaux à zéro sous la condition suivante

$$(40)\qquad \gamma f_t D_y m - m(\gamma f_r D_x m + D_{xy} f) = 0.$$

Donc, si les conditions (35) et (40) sont satisfaites, les équations (32) et (34) seront en involution de *Darboux* du troisième ordre.

Comme il est bien connu, [33], on peut associer aux équations (32) et (34), qui sont en involution de *Darboux* du troisième ordre, un système d'équations différentielles ordinaires, appelé *système des caractéristiques*.

Or, en ce qui concerne la formation du système mentionné d'équations différentielles ordinaires, on peut tirer d'abord du système (39), grâce aux conditions (34) et (40), les équations suivantes

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha}{\partial x}-m\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\gamma f_t D_x m-m D_{xx} f}{m f_r}=0,\\
&\frac{\partial\beta}{\partial x}-m\frac{\partial\beta}{\partial y}-\gamma D_x m=0,\\
(41)\qquad&\frac{\partial\gamma}{\partial x}-m\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\gamma D_y m=0,\\
&\frac{\partial\delta}{\partial x}-m\frac{\partial\delta}{\partial y}-\frac{m}{f_t}(\gamma f_r D_y m+D_{yy} f)=0.
\end{aligned}
$$

Enfin y ajoutons les équations évidentes

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x}-m\frac{\partial z}{\partial y}=p-mq,\\
&\frac{\partial p}{\partial x}-m\frac{\partial p}{\partial y}=r-ms,\\
(42)\qquad&\frac{\partial q}{\partial x}-m\frac{\partial q}{\partial y}=s-mt,\\
&\frac{\partial r}{\partial x}-m\frac{\partial r}{\partial y}=\alpha-m\beta=-\frac{D_x f}{f_r},\\
&\frac{\partial s}{\partial x}-m\frac{\partial s}{\partial y}=\beta-m\gamma=0,\\
&\frac{\partial t}{\partial x}-m\frac{\partial t}{\partial y}=\gamma-m\delta=\frac{m}{f_t}D_y f.
\end{aligned}
$$

Les systèmes (41) et (42) font un système de *Charpit* par rapport aux fonctions inconnues: z, p, q, r, s, t, α, β, γ, δ de deux variables indépendantes x et y. Ce système de *Charpit* est équivalent au système cherché des caractéristiques

$$
(43)\qquad
\begin{aligned}
dx&=\frac{dy}{-m}=\frac{dz}{p-mq}=\frac{dp}{r-ms}=\frac{dq}{s-mt}=\frac{dr}{D_x f/f_r}=\frac{ds}{0}=-\frac{dt}{mD_y f/f_t}=\\
&=\frac{d\alpha}{(\gamma f_t D_x m-mD_{xx}f)\,mf_r}=\frac{d\beta}{\gamma D_x m}=\frac{d\gamma}{\gamma D_y m}=\frac{d\delta}{m(\gamma f_r D_y m+D_{yy}f)f_t}.
\end{aligned}
$$

On peut utiliser les intégrales du système des caractéristiques pour former les solutions cherchées de l'équation donnée (32) (avec (34), (35) et (40)), [24].

3. D'après la théorie exposée ci-haut, on doit — si l'on associe à l'équation (32), avec la condition $f_r f_t \neq 0$, une autre équation (34) avec la condition $m \neq 0$—compléter la condition (35), obtenue par la méthode de *N. Saltykow* et aussi en égalant le déterminant Δ du système (39) à zéro, avec la condition (40), en s'assurant que tous les déterminants du cinquième ordre de la matrice du système (39) sont égaux à zéro, c'est-à-dire affirment que les équations (32) et (34) sont en involution de *Darboux* du troisième ordre. Dans ce cas, on doit compléter le système des équations différentielles (38) avec les équations nouvelles et utiliser le système des caractéristiques (43).

En ce qui concerne les équations (32) et (34), on peut résoudre deux problèmes de *Jacobi* et faire la liaison entre l'intégrale du système des caractéristiques et l'intégrale complète des équations aux dérivées partielles. On peut aussi poser le problème de la formation d'une intégrale de *Cauchy* à l'aide d'une intégrale complète donnée, [33].

6. Sur le problème de Cauchy des systèmes en involution de Darboux du troisième ordre

Dans la Note, [34], en suivant l'idée de *Courant*, [1], nous avons fait une application d'un système correspondant de *Charpit* pour obtenir l'intégrale de *Cauchy* des systèmes des équations aux dérivées partielles du second ordre en involution de *Darboux-Lie*. Maintenant, nous allons traiter d'une manière analogue le problème de *Cauchy* concernant un système en involution de *Darboux* du troisième ordre.

Le problème initial pour le système de Charpit. Considérons un système des équations aux dérivées partielles en involution de *Darboux* du troisième ordre d'une fonction inconnue z de deux variables indépendantes x et y

$$(44) \qquad r+f(x, y, z, p, q, s, t)=0, \quad z_{xyy}+\Phi(x, y, z, p, q, s, t, z_{yyy})=0,$$

sous les conditions

$$\Phi_\delta^2 - f_s \Phi_\delta + f_t = 0,$$
$$D_x \Phi + (f_t/\Phi_\delta) D_y \Phi - D_{yy} f = 0,$$

avec: $p=\partial z/\partial x$, $q=\partial z/\partial y$, $r=\partial^2 z/\partial x^2$, $s=\partial^2 z/\partial x\,\partial y$, $t=\partial^2 z/\partial y^2$, $z_{xyy}=\partial^3 z/\partial x\,\partial y^2$, $\delta=z_{yyy}=\partial^3 z/\partial y^3$, $f_s=\partial f/\partial s$, $f_t=\partial f/\partial t$, $\Phi_\delta=\partial\Phi/\partial\delta$, quant à D_x, D_y, D_{yy}, elles désignent les dérivées correspondantes prises par rapport à x et y.

On peut associer, [33], au système (44) un système de *Charpit* de la forme suivante

$$
(45)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x}+\Phi_\delta\frac{\partial z}{\partial y}=p+\Phi_\delta q, &\quad &\frac{\partial s}{\partial x}+\Phi_\delta\frac{\partial s}{\partial y}=\beta+\Phi_\delta\gamma,\\
&\frac{\partial p}{\partial x}+\Phi_\delta\frac{\partial p}{\partial y}=r+\Phi_\delta s, &\quad &\frac{\partial t}{\partial x}+\Phi_\delta\frac{\partial t}{\partial y}=\gamma+\Phi_\delta\delta,\\
&\frac{\partial q}{\partial x}+\Phi_\delta\frac{\partial q}{\partial y}=s+\Phi_\delta t, &\quad &\frac{\partial \gamma}{\partial x}+\Phi_\delta\frac{\partial \gamma}{\partial y}+D_x\Phi=0,\\
&\frac{\partial r}{\partial x}+\Phi_\delta\frac{\partial r}{\partial y}=\alpha+\Phi_\delta\beta, &\quad &\frac{\partial \delta}{\partial x}+\Phi_\delta\frac{\partial \delta}{\partial y}+D_y\Phi=0,
\end{aligned}
$$

où l'on a $\alpha=z_{xxx}$, $\beta=z_{xxy}$, $\gamma=z_{xyy}$, avec les fonctions inconnues z, p, q, r, s, t, γ, δ de deux variables indépendantes x et y.

Nous supposons d'abord que les fonctions f et Φ soient telles qu'ils existent les intégrales premières distinctes suivantes

$$
(46)\qquad
\begin{aligned}
&f_i(x, y, z, p, q, s, t, z_{yyy}), \qquad (i=1, 2, \ldots, 7)\\
&f_8\equiv r+f(x, y, z, p, q, s, t)\\
&f_9\equiv\gamma+\Phi(x, y, z, p, q, s, t, \delta)
\end{aligned}
$$

sous la condition

$$
(46')\qquad \mathfrak{D}\left(\frac{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7}{y,\ z,\ p,\ q,\ s,\ t,\ \delta}\right)\neq 0.
$$

On peut obtenir ces intégrales par l'intégration du système d'équations différentielles ordinaires suivantes

$$
dx=\frac{dy}{\Phi_\delta}=\frac{dz}{p+\Phi_\delta p}=\frac{dp}{r+\Phi_\delta s}=\frac{dq}{s+\Phi_\delta t}=\frac{dr}{\alpha+\Phi_\delta\beta}=
$$
$$
=\frac{ds}{\beta+\Phi_\delta\gamma}=\frac{dt}{\gamma+\Phi_\delta\delta}=-\frac{d\gamma}{D_x\Phi}=-\frac{d\delta}{D_y\Phi},
$$

où α et β doivent être exprimés par les autres variables figurant dans les équations (44).

Grâce aux intégrales (46) l'intégrale générale du système de *Charpit* (45) est déterminée par les relations suivantes

$$
(47)\qquad f_{i+1}=\prod\nolimits_i(f_1), \qquad (i=1, 2, \ldots, 8)
$$

$\prod_i$ étant des fonctions arbitraires.

Pour le système (45) on peut résoudre:

Problème A. Déterminer les solutions

$$(48) \qquad z(x, y),\ p(x, y),\ q(x, y),\ r(x, y),\ s(x, y),\ t(x, y),\ \gamma(x, y),\ \delta(x, y)$$

du système Charpit (45) *contenant la courbe donnée non caractéristique*

$$(C) \qquad x = x_0, \quad y = \tau, \quad z = z(\tau)$$

de telle manière que l'on ait le long de la courbe (*C*) *les conditions suivantes*

$$r + f = 0, \quad \gamma + \Phi = 0,$$

$$(49) \qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, & dp = r\,dx + s\,dy, & dq = s\,dx + t\,dy, \\ dr = \alpha\,dx + \beta\,dy, & ds = \beta\,dx + \gamma\,dy, & dt = \gamma\,dx + \delta\,dy, \end{cases}$$

et

$$(50) \qquad p = a, \quad s = b \quad \textit{pour} \quad x = x_0, \quad y = y_0$$

où a et b sont des constantes données, mais $(x_0, y_0) \in C$.

Grâce aux conditions (*C*), (49), (50), on peut d'abord déterminer les valeurs initiales des variables $p, q, r, s, t, \gamma, \delta$, c'est-à-dire les fonctions suivantes

$$(51) \qquad p(\tau),\ q(\tau),\ r(\tau),\ s(\tau),\ t(\tau)\ \gamma(\tau),\ \delta(\tau).$$

En vertu des conditions (49) on a pour $x = x_0$

$$z'(\tau) = q(\tau), \quad p'(\tau) = s(\tau), \quad q'(\tau) = t(\tau),$$

$$r'(\tau) = \beta(\tau), \quad s'(\tau) = \gamma(\tau), \quad t'(\tau) = \delta(\tau),$$

et aussi

$$(51') \qquad q(\tau) = z'(\tau), \quad t(\tau) = z''(\tau), \quad \delta(\tau) = z'''(\tau),$$

$$(51'') \qquad s(\tau) = p'(\tau), \quad \gamma(\tau) = p''(\tau).$$

Donc, la fonction $p(\tau)$ se détermine comme une solution de *Cauchy* de l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$(52) \qquad p''(\tau) + \Phi[x_0, \tau, z(\tau), p(\tau), z'(\tau), p'(\tau), z''(\tau), z'''(\tau)] = 0$$

satisfaisant aux conditions

$$(52') \qquad \tau = y_0, \ p(y_0) = a, \ s(y_0) = b,$$

où l'on suppose l'unicité de la solution du problème de *Cauchy* (52)—(52').

Grâce à la solution obtenue $p(\tau)$ du problème (52)—(52') on peut déterminer les fonctions $s(\tau)$ et $\gamma(\tau)$, (51'). Quant à la fonction $r(\tau)$, on a la relation suivante

$$r(\tau) + f[x_0, \tau, z(\tau), p(\tau), z'(\tau), p'(\tau), q'(\tau)] = 0.$$

En utilisant les fonctions déterminées (51), on peut définir les fonctions nouvelles $\lambda_i(\tau)$ et les paramètres auxiliaires u_i par les relations suivantes

$$\lambda_i(\tau) \equiv f_i[x_0, \tau, z(\tau), p(\tau), q(\tau), r(\tau), s(\tau), t(\tau), \gamma(\tau)],$$

(53) $$\lambda_i(\tau) = u_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 9).$$

En éliminant le paramètre τ entre les relations (53), on obtient les relations bien déterminées des paramètres u_i

$$u_{i+1} = \pi_i(u_1), \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8).$$

Les fonctions arbitaires $\prod_i$ dans l'intégrale générale (47) doivent avoir les formes π_i. Donc, sous les conditions (C), (49) et (50) les solutions (48) du problème initial pour le système de *Charpit* (2) sont déterminées par les formules

(49′) $$f_{i+1} = \pi_i(f_1), \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8).$$

Alors, le procédé indiqué résoud *le problème A*.

Le problème initial pour le système en involution. Pour le système (44) en involution de *Darboux* du troisième ordre on peut résoudre

Problème B. Les solutions (48) *du système de Charpit* (45) *déterminent l'intégrale de Cauchy du système en involution de Darboux* (44) *sous les conditions* (C) *et* (50).

Pour cela, il suffit de démontrer que les fonctions (48) remplissent identiquement sur la surface $z = z(x, y)$ les conditions suivantes

$$r(x, y) + f[x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y), s(x, y), t(x, y)] \equiv 0,$$

$$\gamma(x, y) + \Phi[x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y), s(x, y), t(x, y), \delta(x, y)] \equiv 0,$$

$$p(x, y) - \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \equiv 0, \qquad q(x, y) - \frac{\partial z(x, y)}{\partial v} \equiv 0,$$

$$r(x, y) - \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \equiv 0, \qquad s(x, y) - \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} \equiv s(x, y) - \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} \equiv 0,$$

$$t(x, y) - \frac{\partial q(x, y)}{\partial y} \equiv 0, \qquad \gamma(x, y) - \frac{\partial s(x, y)}{\partial y} \equiv \gamma(x, y) - \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} \equiv 0,$$

$$\delta(x, y) - \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} \equiv 0.$$

La démonstration du *problème B* se peut achever d'une manière analogue comme dans le cas du système en involution de *Darboux-Lie*, [34], mais cette fois à l'aide du système de *Charpit* (45).

Exemple. Considérons le système

$$
(44)\qquad
\begin{aligned}
& r-t-\frac{4}{x}p=0,\\
& \gamma+\delta+\frac{3}{x}s+\frac{1}{x}t+\frac{3}{x^2}p-\frac{1}{4}x^2(x+y)=0
\end{aligned}
$$

en involution du troisième ordre (pour obtenir la seconde équation du trosième ordre en sachant la première équation du second ordre, voir le procédé [35]) et cherchons l'intégrale de *Cauchy* sous les conditions

$$
(C)\qquad x=1,\quad y=\tau,\quad z=\frac{1}{3}\tau^3,
$$

$$
(44')\qquad p=0,\quad s=-\frac{7}{12},\quad \text{pour}\quad x_0=1,\quad y_0=0
$$

Dans ce cas les intégrales (48) sont

$$
\begin{aligned}
& f_1\equiv x-y,\\
& f_2\equiv r+2s+t-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{3}x^3y,\\
& f_3\equiv p+q-xr-2xs-xt+\frac{3}{20}x^5+\frac{1}{4}x^4y,\\
& f_4\equiv z-x(p+q)+\frac{1}{2}x^2(r+2s+t)-\frac{1}{15}x^6-\frac{1}{10}x^5y,\\
& f_5\equiv\frac{1}{x^2}t+\frac{3}{x^3}p-\frac{1}{4}xy,\\
& f_6\equiv\frac{1}{4}y-\frac{3}{x^4}p-\frac{1}{x^3}t-\frac{1}{x^2}\gamma,\\
& f_7\equiv\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{12}x^5+\frac{1}{4}x^4y-p-\frac{1}{2}x(r+2s+t)\right],\\
& f_8\equiv r-t-\frac{4}{x}p\\
& f_9\equiv\gamma+\delta+\frac{3}{x}s+\frac{1}{x}t+\frac{3}{x^2}p-\frac{1}{4}x^2(x+y)
\end{aligned}
$$

et les fonctions (51) sont déterminées par les formules

$$
p(\tau)=-\frac{7}{12}\tau,\quad q(\tau)=\tau^2,\quad r(\tau)=-\frac{1}{3}\tau,\quad s(\tau)=-\frac{7}{12},\quad t(\tau)=2\tau
$$

$$
\gamma(\tau)=0,\quad \delta(\tau)=2.
$$

Les solutions du *problème A* s'obtiennent sous la forme

$$r+2s+t-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{3}x^3y=-\frac{4}{3}(x-y),$$

$$p+q-x(r+2s+t)+\frac{3}{20}x^5+\frac{1}{4}x^4y=(x-y)^2+\frac{19}{20},$$

$$z-x(p+q)+\frac{1}{2}x^2(r+2s+t)-\frac{1}{15}x^6-\frac{1}{10}x^5y=-\frac{1}{3}(x-y)^3-\frac{19}{60}(x-y),$$

$$\frac{1}{4}y-\frac{3}{x^4}y-\frac{1}{x^3}t-\frac{1}{x^2}\gamma=0,$$

$$\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{12}x^5+\frac{1}{4}x^4y-p-\frac{1}{2}x(r+2s+t)\right]=\frac{2}{3},$$

$$r-t-\frac{4}{x}p=0,$$

$$\gamma+\delta+\frac{3}{x}s+\frac{1}{x}t+\frac{3}{x^2}p-\frac{1}{4}x^2(x+y)=0,$$

ou

$$z(x,y)=\frac{1}{60}x^5y-\frac{1}{3}x^2y+\frac{1}{3}y^3+\frac{19}{60}y,$$

$$p(x,y)=\frac{1}{12}x^4y-\frac{2}{3}xy,$$

$$q(x,y)=\frac{1}{60}x^5-\frac{1}{3}x^2+y^2+\frac{19}{60},$$

$$r(x,y)=\frac{1}{3}x^3y-\frac{2}{3}y, \qquad s(x,y)=\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x,$$

$$t(x,y)=2y, \qquad \gamma(x,y)=0, \quad \delta(x,y)=2$$

et la surface $z=z(x,y)$ est la solution du système (54), (*C*), (54′).

7. Sur les intégrales des systèmes en involution de Darboux du troisième ordre

Il s'agit, dans ce paragraphe, d'établir la théorie de *Lagrange* des intégrales dans le cas des systèmes en involution de *Darboux* du troisième ordre, [36].

En étudiant les propriétés nouvelles pour les systèmes en involution de *Darboux* du troisième ordre nous allons utiliser la méthode de *Lagrange* de la variation des constantes dans l'intégrale complète.

Considérons un système en involution de *Darboux*

(55) $$r+f(x,y,z,p,q,s,t)=0, \quad z_{xyy}+\Phi(x,y,z,p,q,s,t,z_{yyy})=0,$$

pour lequel on a à la fois identiquement

$$\Phi_\delta^2 - f_s\,\Phi_\delta + f_t = 0, \quad D_x\Phi + \frac{f_t}{\Phi_\delta} D_y\Phi - D_{yy} f = 0,$$

en désignant respectivement par $p, q, r, s, t, z_{xyy}, z_{yyy}, f_s, f_t, \Phi_\delta$ les dérivées partielles: $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$, $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial x\,\partial y$, $\partial^2 z/\partial y^2$, $\partial^3 z/\partial x\,\partial y^2$, $\delta = \partial^3 z/\partial y^3$, $\partial f/\partial s$, $\partial f/\partial t$, $\partial\Phi/\partial\delta$. Quant à D_x, D_y, D_{yy} elles désignent respectivement les dérivées correspondantes prises par rapport à x et y. On supposera que $f \in C^2(G)$ et $\Phi \in C^1(G_1)$, où le G et G_1, $G \subset G_1$, sont les domaines respectifs des variables x, y, z, p, q, s, t et des variables $x, y, z, p, q, s, z_{yyy}$.

Si l'on considère dans l'intégrale complète

$$z = V(x, y, C_1, \ldots, C_6) \tag{9}$$

avec les conditions (20), les C_i, selon la méthode de la variation des constantes, comme des fonctions $C_i(x, y)$ des variables x et y, l'équation (9) définit une intégrale du système (55) seulement sous les conditions suivantes

$$\begin{gathered} \nabla V \cdot C_{\xi_j} = 0, \quad \nabla V_x \cdot C_{\xi_j} = 0, \quad \nabla V_y \cdot C_{\xi_j} = 0 \\ \nabla V_{xy} \cdot C_{\xi_j} = 0, \quad \nabla V_{yy} \cdot C_{\xi_j} = 0, \quad (j = 1, 2), \end{gathered} \tag{56}$$

où l'on a

$$\nabla V = \left\{ \frac{\partial V}{\partial C_i}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial C_6} \right\}, \quad \nabla V_x = \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial C_1}, \ldots, \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial C_6} \right\}, \ldots,$$

$$C_{\xi_1} \equiv C_x, \quad \xi_{\xi_2} \equiv C_y', \quad C_x = \left\{ \frac{\partial C_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial C_6}{\partial x} \right\}, \quad C_y = \left\{ \frac{\partial C_1}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial C_6}{\partial y} \right\}.$$

Introduisons le symbole

$$(i, j, k, l, m) \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{V, V_x, V_y, V_{xy}, V_{yy}}{C_i, C_j, C_k, C_l, C_m} \right), \tag{57}$$

où i, j, k, l, m désignent les nombres entiers de 1 à 6. Grâce à la condition

$$\Delta \neq 0, \quad \delta = 0$$

on peut mettre les conditions (56) sous la forme plus commode

$$\left\{ \begin{aligned} &(1, 3, 4, 5, 6) \frac{\partial C_1}{\partial \xi_j} + (2, 3, 4, 5, 6) \frac{\partial C_2}{\partial \xi_j} = 0, \\ &\qquad\qquad (1, 2, 4, 5, 6) \frac{\partial C_1}{\partial \xi_j} - (2, 3, 4, 5, 6) \frac{\partial C_3}{\partial \xi_j} = 0, \\ &(1, 2, 3, 5, 6) \frac{\partial C_1}{\partial \xi_j} + (2, 3, 4, 5, 6) \frac{\partial C_4}{\partial \xi_j} = 0, \\ &\qquad\qquad (1, 2, 3, 4, 6) \frac{\partial C_1}{\partial \xi_j} - (2, 3, 4, 5, 6) \frac{\partial C_5}{\partial \xi_j} = 0, \\ &(1, 2, 3, 4, 5) \frac{\partial C_1}{\partial \xi_i} + (2, 3, 4, 5, 6) \frac{\partial C_5}{\partial \xi_j}, \qquad (\xi_1 \equiv x,\ \xi_2 = y,\ j = 1, 2). \end{aligned} \right. \tag{56'}$$

Si les conditions

$$(58) \qquad (C_1, C_{k+1}) \equiv \mathfrak{D}\left(\frac{C_1, C_{k+1}}{x, y}\right) = 0, \quad \text{où } C_{k+1} = \varphi_k(C_1) \quad (k = 1, 2, \ldots, 5)$$

sont satisfaites, φ_k étant les fonctions arbitraires, les équations (56') admettent un système des solutions non triviales par rapport à (i, j, k, l, m). Mais dans ce cas grâce à $\partial C_1/\partial \xi_j \neq 0$ les relations (56) nous donnent

$$(59) \qquad \begin{cases} \nabla V \cdot \varphi' = 0, & \nabla V_x \cdot \varphi' = 0, \quad \nabla V_y \cdot \varphi' = 0 \\ \nabla V_{xy} \cdot \varphi' = 0, & \nabla V_{yy} \cdot \varphi' = 0, \quad \varphi'\{1, \varphi_1, \ldots, \varphi_5\} \end{cases}$$

ou

$$(59') \qquad \begin{cases} \varphi_1' = -\dfrac{(1, 3, 4, 5, 6)}{(2, 3, 4, 5, 6)}, \quad \varphi_2' = \dfrac{(1, 2, 4, 5, 6)}{(2, 3, 4, 5, 6)}, \\ \varphi_3' = -\dfrac{(1, 2, 3, 5, 6)}{(2, 3, 4, 5, 6)}, \quad \varphi_4' = -\dfrac{(1, 2, 3, 4, 6)}{(2, 3, 4, 5, 6)}, \\ \qquad \varphi_5' = -\dfrac{(1, 2, 3, 4, 5)}{(2, 3, 4, 5, 6)}. \end{cases}$$

En vertu de la condition

$$(20) \qquad \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta'}{\Delta_1} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les quotients dans les relations (59') ne sont pas indépendants par rapport aux variables x et y, et il ne reste que quatre relations bien déterminées pour définir les fonctions φ_i

$$(60) \qquad \varphi_i'(C_1) = F_i(C_1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_5'), \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

A cause de ces quatre relations, il restera une fonction arbitraire. L'intégrale du système (55) avec une fonction arbitraire est déterminée par l'équation

$$z = V[x, y, C_1, \varphi_1(C_1), \ldots, \varphi_5(C_1)]$$

et par les équations (60) et $\nabla V \cdot \varphi' = 0$. Par analogie avec la terminologie de la théorie de *Lagrange* des intégrales dans le cas des équations aux dérivées partielles du premier ordre et des équations en involution de *Darboux-Lie*, [20], on l'appellera l'intégrale générale du système (55).

Si l'un des déterminants (C_1, C_{k+1}) est différent du zéro le système (59') n'a que les solutions triviales

$$(61) \qquad \begin{gathered} (1, 2, 3, 4, 5) = 0, \quad (2, 3, 4, 5, 6) = 0, \quad (1, 3, 4, 5, 6) = 0, \\ (1, 2, 4, 5, 6) = 0, \quad (1, 2, 3, 5, 6) = 0, \quad (1, 2, 3, 4, 6) = 0. \end{gathered}$$

Si l'on peut à l'aide des équations (61) déterminer les fonctions $C_i(x, y)$, alors les équations (9) et (61) nous donnent une intégrale du système (55). On l'appellera l'intégrale singulière de (55).

De cette manière, est établie la théorie de *Lagrange* des intégrales dans le cas des systèmes (55).

On peut donner la généralisation du théorème de *Jacobi* pour la théorie dite de *Lagrange* dans le cas des systèmes (55):

Chaque solution du système (55) dans un domaine bien déterminé peut être déduite de l'intégrale complète, ou de l'intégrale générale, ou bien elle est l'intégrale singulière.

On peut résoudre pour le système (55) le problème suivant de *Lagrange*, [14], [22]:

Former l'intégrale générale du système (55) à l'aide de l'intégrale générale du système correspondant des caractéristiques.

Il est bien connu qu'à chaque système en involution de *Darboux-Lie* correspond un système d'équations de *Monge* à quatre variables, [14]. Nous avons vu maintenant qu'à chaque système (55) correspond un système de la forme (60) d'équations de *Monge* à six variables. Cette remarque nous conduit à étudier comment on peut utiliser dans la théorie de l'intégration d'un système (55) les résultats jusqu'ici connus pour les équations de *Monge*

$$F_i(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, dx_2/dx_1, dx_3/dx_1, dx_4/dx_1, dx_5/dx_1, dx_6/dx_1) = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 4).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Courant, *Methods of Mathematical Physics, Partial Differential Equations* New York, 1962.

[2] B. Rachajsky, *On a variant in the theory of characteristics for systems of first order partial differential equations*, Matematički vesnik, 4 (19), 1967.

[3] N. Saltykow, Bull. de la Soc. math. de France, t. xxiv, 1901, p. 86.

[4] Ph. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, New York, 1964, p. 137.

[5] E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Paris 1921

[6] L. Bieberbach, *Theorie der Differentialgleichungen*, 3 Aufl., Berlin, 1930, S. 308.

[7] E. Kamke, Math. Zeit. Bd. 40, S. 256, 1943.

[8] C. Carathéodory, *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*, Leipzig, 1956.

[9] N. Saltykow, *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue*, Bruxelles, Acad. royale de Belgique, Mémoires, t. VI, f. 4, 1925.

[10] N. Saltykow, *Fonctions caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Bull. de l'Ac. serbe des Sc. t. X. Cll. des Sc. Math. et nat. Sc. math. № 2 1956.

[11] N. Saltykow, *Sur l'inégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Ac. royale de Belgique, Bull. de la cl. des Sc. 5^e s., t. XVIII, N° 10, 1932.

[12] E. Goursat, *Recherches sur les systèmes en involution d'équations du second ordre*, Journal de l'École Polytechnique, 2.3 (C. n. 3) 15—19: *Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre et sur la théorie des intégrales intérmédiaires*, Acta mathematica, t. 19, 22—31; *Sur les systèmes en involution d'équations du second ordre*, Comptes rendus, Paris t. 122, p. 1258.

[13] B. Rašajski, *Sistemi parcijalnih jednačina II reda*, Vesnik Društva Matematičara i fizičara NR Srbije, VII, 1955.

[14] E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, 1898, pp. 51, 59,, Paris

[15] B. Rachajsky, *Théorème de Jacobi pour le système d'équations en involution de Darboux-Lie*, Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije, VIII, 1956.

[16] Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, Gesammelte Werke, Berlin, 1884, S. 157.

[17] N. Saltykow, *Généralisation de la première méthode de Jacobi d'intégration d'une équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Com. de la Société Math. Kharkow, 1898; Journal de Mathématiques pures et appliques, 5 s. t. V. 1899, p. 435.

[18] N. Saltykow, *Méthodes de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Acad. serbe, t. CLXXXIX, Beograd, 1947 (en Serbe).

[19] N. Saltikov, *Teorija parcijalnih jednačina II reda*, Univerzitet u Beogradu, 1952.

[20] B. Rašajski, *O vezama između različitih vrsta integrala za sisteme parcijalnih jednačina u involuciji Darboux-Lie-a*, Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije, IX, 1957.

[21] C. Orloff, *Sur la formation de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre au moyen d'une intégrale complète*, Journal de Math. pures et appliques, T. XVIII, 1939.

[22] Lagrange, *Oeuvres Complètes*, t. X, Paris 1884, p. 354.

[23] N. Saltykow, *Méthodes d'intégrations des équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue*, Bull. de l'Academie serbe des Sc. T. V. Cll. sc. math. et nat. Sc. Math. 1952.

[24] B. Rachajsky, *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre à trois variables indépendantes réductible à ceux de Charpit*, Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije, IX, Beograd, 1957.

[25] N. Saltykow, *Équations aux dérivées partielles du second ordre intégrables par un système de Charpit*, Publications math. de l'Université de Belgrade, t. II, 1933.

[26] N. Saltykow *Équations aux dérivées partielles du second ordre à n variables indépendantes intégrables par un système de Charpit*, Publications de l'Université de Belgrade t. III, 1934.

[27] N. Saltikov, *Parcijalne jednačine višeg reda svodljive na parcijalne jednačine I reda*, Srpska akademija nauka, Glas CLXXXV prvi razred 92, 1941 Beograd.

[28] B. Rašajski, *O jednoj klasi parcijalnih diferencijalnih jednačina II reda jedne nepoznate funkcije sa tri promenljive*, Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije, Beograd, t. XI 1959.

[29] D. H Parsons, *The extensions of Darboux's method*, Mémorial des Sciences mathématiques, Fasc. CXLII, Paris 1960.

[30] D. H. Parsons, *Invariance of the rank of a partial differential équation of the second order under contact transformation*, Quart. J. Math. Oxford (2), 8 (1957).

[31] D. H. Parsons, *One dimensional characteristics of a partial differential equation of the second order with any number of independent variables*, Quart. J. Math. Oxford (2), 9, 1958.

[32] Darboux, C. R. Acad. Sc. t. 70. 1870, p. 675 et 746; Ann. sci. Éc. Norm. Sup. 1re série, t. 7, 1870, p. 163.

[33] B. Rachajsky, *Sur l'involution de Darboux du troisième ordre*, Publications de l'Institut math., n. s. t. 1 (15), 1961.

[34] B. Rachajsky, *Sur une méthode pour obtenir l'intégrale de Cauchy des systèmes en involution de Darboux-Lie*, C. R. Acad. Sc. Paris t. 257, p. 2792; J. Math. pures et appl. t. XLIV, f. 2, 1965.

[35] A. R. Forsyth, *Theory of Differential Equations*, part IV, vol. VI, p. 359 Dover Publ., 1959.

[36] B. Rachajsky, *Sur les intégrales du système en involution de Darboux du troisième ordre*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 259, 1964.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

SUR LA THÉORIE NOUVELLE DES CARACTÉRISTIQUES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

CHAPITRE II

SUR LE SYSTÈME EN INVOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

CHAPITRE III

SUR LE SYSTÈME DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES EN INVOLUTION DE DARBOUX DU TROISIÈME ORDRE