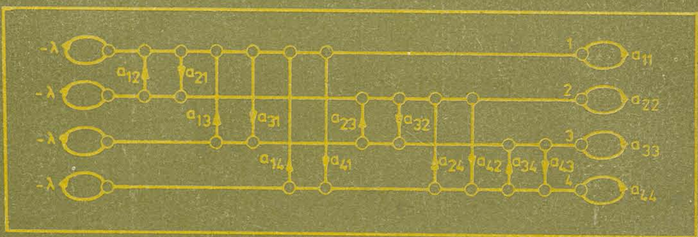
Dr Dragoš Cvetković

KOMBINATORNA TEORIJA MATRICA

SA PRIMENAMA U ELEKTROTEHNICI, HEMIJI I FIZICI



Naučna Knjiga • BEOGRAD

DR DRAGOŠ CVETKOVIĆ

KOMBINATORNA TEORIJA MATRICA

SA PRIMENAMA U ELEKTROTEHNICI, HEMIJI I FIZICI

Naučna knjiga

BEOGRAD, 1987.

Dr Dragoš Cvetković
KOMBINATORNA TEORIJA MATRICA

Izdavač
IRO „Naučna knjiga"
Beograd, Uzun-Mirkova 5

Recenzenti
Dr Petar Vasić
Dr Dobrilo Tošić

Za izdavača
Dr Blažo Perović

Urednik
Nikola Dončev

Tehnički urednik
Branislav Đerić

Rešenje korica
Branko Veljović

Tiraž: 500 primeraka

Štampa: Štamparija „Bakar" – Bor

S A D R Ž A J

str.

PREDGOVOR

U ovoj knjizi teorija matrica se fundira i razvija kombinatornim sredstvima, tj. sredstvima teorije grafova, što predstavlja sasvim novi pristup. Neki od osnovnih pojmova (na primer, determinanta kvadratne matrice i množenje matrica) definišu se ili neposredno interpretiraju pomoću grafova.

Po mišljenju autora, ovakav pristup teoriji matrica veoma je prirodan i on, uz neke prednosti, omogućava da se teorija matrica izgradi isto tako dobro kao i na klasičan način.

Knjiga, iako matematičkog karaktera, inspirisana je specifičnim grafovskim metodima koje su razvili elektroinženjeri za rešavanje problema linearne algebre koji se pojavljuju u teoriji električnih kola, automatici i drugim granama elektrotehnike. Tu se, pre svega, misli na tehniku grafova protoka i tehniku grafova protoka signala.

Poslednja tri poglavlja posvećena su primenama teorije matrica u elektrotehnici, hemiji i fizici, pri čemu naglasak nije na detaljnom opisu primena već na objašnjavanju specifičnog matematičkog aparata koji se pojavljuje u primenama. Osim toga, tekst je ilustrovan velikim brojem primera i zadataka od kojih se neki odnose na odredjene primene u raznim oblastima elektrotehnike. Izvesna pažnja je posvećena i numeričkim metodima u linearnoj algebri.

Pošto teorija matrica ima raznovrsne primene u velikom broju naučnih disciplina, knjiga je namenjena širokom krugu čitalaca (inženjerima, a posebno elektroinženjerima, matematičarima, hemičarima, fizičarima itd.). S obzirom da knjiga sadrži obilje raznorodnog materijala, ona će služiti kao koristan priručnik stručnjacima navedenih specijalnosti, doktorandima, postdiplomcima i studentima. Ona može da posluži kao udžbenik na postdiplomskim studijama, a neki njeni delovi i kao udžbenik za studente diplomske nastave.

U izradi knjige učestvovalo je više saradnika čiji su tekstovi,radi povezivanja u celinu, modifikovani u neophodnoj meri. U knjigu su uključeni tekstovi koje su napisali dr I. Gutman, M.Merkle, dr D.Mikičić, dr S.Simić i dr D.Tošić, što je na odgovarajućim mestima naznačeno u fusnotama. U priloge su ušli tekstovi koje su izradili dr S.Stanković, D.Ćalović i Lj.Cvetković a koji se odnose na primene teorije matrica u elektrotehnici. Recenzenti, dr Petar Vasić i dr Dobrilo Tošić, profesori Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, dali su veliki broj predloga za poboljšanje prvobitnog teksta i na taj način doprineli da materijal bude bolje izložen. Dr Slobodan Simić, asistent Elektrotehničkog fakulteta, pročitao je veći deo rukopisa i svojim sugestijama takodje doprineo poboljšanju teksta. Pojedine delove rukopisa pročitali su takodje dr I. Gutman, Ž.Spasojević, dr S.Stanković i M.Živković. Tekst je korektno otkucala B.Radosavljević. Autor svima najlepše zahvaljuje na pruženoj pomoći.

Beograd, 1.VI.1979. Autor

PREDGOVOR II IZDANJU

Izmedju prvog i drugog izdanja ove knjige pojavio se u literaturi (videti [108], [109] na str. 355) novi dokaz Cayley-Hamiltonove teoreme (str. 144-145). Taj dokaz ima kombinatorni karakter i uključen je u ovo izdanje umesto standardnog dokaza, čime se dalje afirmiše kombinatorni pristup teoriji matrica prihvaćen u ovoj knjizi. Autor članka [109] ističe da "za sve veći broj matematičkih disidenata zvanih "kombinatoričari"" matrica mnogo više predstavlja svojevrsnu "fotografiju" odgovarajućeg digrafa a manje ima veze sa linearnim transformacijama.

U ovom izdanju ispravljene su primećene tehničke greške a jedan od priloga je zamenjen novim prilogom "Matrični metodi u algebarskoj teoriji upravljanja linearnim dinamičkim sistemima" koji je napisao dr T.Petrović, docent Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu. Ovaj prilog će poslužiti studentima elektrotehnike a takodje inženjerima koji se bave regulacijom i simulacijom sistema modeliranih u prostoru stanja.

Beograd, april 1987. Autor

O Z N A K E

$\{a,b,c,\ldots\}$ skup čiji su elementi $a,b,c,\ldots$

$\{x \mid P(x)\}$ skup čiji su elementi objekti x sa osobinom $P(x)$

$\in$ pripada

$\notin$ ne pripada

$\subset$ inkluzija

$\cup$ unija

$\cap$ presek

$\setminus$ diferencija

$|X|$ broj elemenata skupa X

(a,b) uredjen par objekata a i b

$A \times B$ Descartesov proizvod skupova A i B

$f:X \to Y$; $f:x \mapsto f(x)$, $x \in X$ funkcija (ili preslikavanje) iz skupa X u skup Y

$\wedge$ i (konjunkcija)

$\vee$ ili (disjunkcija)

$\veebar$ ekskluzivna disjunkcija

$\Rightarrow$ implikacija

$\Leftrightarrow$ ekvivalencija

$\forall$ svaki (univerzalni kvantifikator)

$\exists$ postoji (egzistencijalni kvantifikator)

$\emptyset$ prazan skup

N skup prirodnih brojeva

Z skup celih brojeva

Q skup racionalnih brojeva

R skup realnih brojeva

C skup kompleksnih brojeva

R^n n-dimenzionalni euklidski prostor

mod x, $|x|$ modul kompleksnog ili realnog broja x

$\bar{z}$ konjugovani broj kompleksnog broja z

$$\min\{m,n\} = \begin{cases} m, & m \leqslant n \\ n, & m \geqslant n \end{cases}$$

$[a]$ najveći ceo broj koji nije veći od realnog broja a

$\{a\}$ najmanji ceo broj koji nije manji od realnog broja a

$k! = 1\cdot 2\cdots k$ faktorijel broja k

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ binomni koeficijent "n nad k"

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \ldots a_n$$

$m|n$ n je deljivo sa m

$m \equiv n \pmod p$ m je kongruentno sa n po modulu p

$\stackrel{\text{def}}{=}$ definiciona jednakost

$f'(x) = \frac{df}{dx}$ izvod funkcije f(x)

$f'(a)$ izvod funkcije f(x) u tački x = a

$f(x) \sim g(x)\ (x \to +\infty)$ asimptotska jednakost funkcija

$\frac{\partial z}{\partial x}$ parcijalni izvod funkcije z po promenljivoj x

lim granična vrednost

$\oint$ krivolinijski integral po zatvorenoj orijentisanoj krivi

Primedba: Pojmovi koje označavaju navedeni simboli ne definišu se u daljem tekstu. Simboli, uvedeni u knjizi, navedeni su na kraju knjige.

1. UVOD

Teorija matrica je kompleksna matematička oblast u kojoj se prepliću kombinatorika (spomenimo, na primer, grafove i permutacije konačnih skupova), algebra (brojna polja, vektorski prostori, polinomi) i matematička analiza (sistemi linearnih diferencijalnih jednačina, matrične funkcije matričnog argumenta itd.). Po pravilu,knjige o matricama zanemaruju ili površno prelaze preko kombinatornih sadržaja ove teorije. Doduše,u poslednje vreme veliki broj istraživača uvidja značaj teorije grafova u linearnoj algebri, što se ogleda u znatnom broju naučnih radova koji koriste grafovske tehnike za rešavanje problema linearne algebre. Takodje, elektroinženjeri primenjuju ove metode pri praktičnom radu. No, u svim slučajevima se graf, po pravilu, smatra samo kao pomoćno (mada vrlo korisno) sredstvo za rešavanje ovih problema.

Ova knjiga se razlikuje od mnogobrojnih ostalih knjiga koje raspravljaju o matricama po tome što se kombinatorna sredstva (a naročito sredstva teorije grafova) ne tretiraju kao pomoćna, već se stavljaju u osnove same teorije. Jedan deo pojmova iz teorije matrica se definiše ili neposredno interpretira pomoću grafova. Ovakav naglašeni kombinatorni pristup ne "smeta" postojećoj teoriji; ona ostaje kakva je bila - samo je, po mišljenju autora, bolje interpretirana. Ovakav pristup omogućava bolje razumevanje problema u jednom delu teorije matrica i doprinosi lakšem uočavanju novih činjenica. Pošto je ovakav pristup posebno interesantan za elektroinženjere i neke druge stručnjake knjiga je orijentisana na primene u elektrotehnici, hemiji i fizici.

U knjizi se posebno ističu, kao što je već rečeno, kombinatorni sadržaji dok su drugi aspekti teorije matrica (algebarski, analitički) opisani samo u neophodnoj meri da bi knjiga predstavljala celinu. Imajući ovo u vidu, dokazi nekih teorema su izostavljeni; oni se mogu naći u standardnim knjigama o matricama.

U knjigu su uključeni i neki materijali koji se redje sreću u knjigama ove vrste; na primer, Kroneckerov i Hadamardov proizvod matrica, permanent, pfafijan, itd. U dodatku je bez dokaza naveden niz drugih rezultata teorije matrica koji mogu biti od interesa u primenama.

U knjizi se, medjutim, samo delimično opisuju primene matrica u kombinatorici.

U ovom uvodnom poglavlju[1] sažeto su dati neophodni pojmovi iz kombinatorike (uključujući teoriju grafova) i algebre (polja, vektorski prostori). Sredstva matematičke analize, kao i elementi teorije polinoma, koji se tu i tamo u knjizi koriste nisu posebno isticani, odnosno definisani. Pretpostavlja se da čitalac neće imati teškoća u savladjivanju takvih mesta.

U skladu sa ciljevima knjige vektorski prostori su obradjeni samo u najneophodnijoj meri. Zbog toga je u naslovu knjige i dat naglasak na matrice a ne na linearnu algebru uopšte.

Imajući u vidu izloženo, može se reći da je ova knjiga kombinacija naučne monografije, udžbenika i priručnika o teoriji matrica sa posebnim osvrtom na primene u elektrotehnici, hemiji i fizici. Takodje je izvesna pažnja posvećena numeričkim metodima u linearnoj algebri.

1.1. Grafovi

U ovoj knjizi je teorija matrica interpretirana i jednim delom fundirana pomoću teorije grafova. U ovom odeljku opisuju se osnovni pojmovi teorije grafova u obimu koji je potreban za praćenje daljeg teksta. Neki drugi pojmovi i teoreme iz teorije grafova biće, prema potrebi, navedeni u drugim poglavljima.

Izlaganje osnova teorije grafova u ovoj knjizi nije u potpunosti formalizovano iako je dovoljno strogo. Prednost je data intuitivnoj strani teorije grafova (što, naravno, ne zna-

---

1) Prilikom prvog čitanja ove knjige može se uvodno poglavlje samo letimično preći a kasnije se, prema potrebi, vraćati na njega.

či da su dopuštene proizvoljnosti ili netačnosti). Formalizovaniji pristup teoriji grafova može se naći, na primer, u knjizi [25].

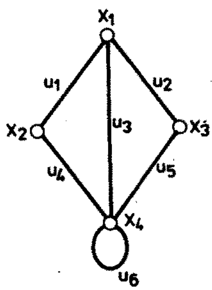
Neorijentisani graf (ili, kratko, graf) se sastoji od dva skupa, označimo ih sa X i U, raznorodnih objekata pri čemu su, prema zadatom zakonu korespondencije f, svakom elementu skupa U pridružena dva elementa skupa X, (tj. dvoelementni podskup skupa X). Elementi skupa X nazivaju se čvorovi grafa, a elementi skupa U predstavljaju grane grafa.

Uobičajeno je da se graf zamišlja kao geometrijska figura u ravni ili trodimenzionalnom prostoru koja je sastavljena od tačaka i linija. Elemente skupa X, tj. čvorove grafa, predstavljamo medjusobno različitim tačkama u ravni ili prostoru. Grane, tj. elemente skupa U, predstavljamo linijama, pri čemu linija koja predstavlja odredjenu granu spaja tačke koje predstavljaju čvorove što su po zakonu korespondencije f pridruženi toj grani.

Jedan isti graf možemo nacrtati na više načina jer je izbor tačaka koje predstavljaju čvorove proizvoljan a proizvoljan je i oblik linija koje predstavljaju grane. U svim mogućnim reprezentacijama jednog grafa zajednička je apstraktna kombinatorna struktura grafa.

Primer 1. Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ i $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$. Dalje, neka je f takvo da grani u_1 pridružuje čvorove x_1 i x_2, grani u_2 čvorove x_1 i x_3, i, redom, granama u_3, u_4, u_5, u_6 čvorove x_1 i x_4, x_2 i x_4, x_3 i x_4, x_4 i x_4. Ovim je definisan jedan graf koji je prikazan na sl. 1.

Ako su grani u pridruženi čvorovi x i y, kaže se da ona povezuje čvorove x i y. Čvorovi x i y su krajnje tačke grane u. Grana čije se obe krajnje tačke nalaze u istom čvoru naziva se petlja (grana u_6 na sl. 1). Ako su dva čvora spojena granom, kaže se da su ti čvorovi susedni. Takodje se kaže da su čvor i grana susedni (ili incidentni) ako je čvor krajnja tačka grane. U ovom slučaju se još kaže da se grana stiče u posmatranom čvoru. U grafu bez

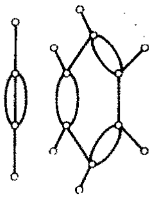


sl. 1

petlji za svaki čvor se definiše stepen čvora. Stepen čvora je broj grana koje se stiču u tom čvoru.

Primer 2. Ako u grafu na sl. 1 zanemarimo petlju u_6 stepeni čvorova x_1, x_2, x_3, x_4 su redom 3, 2, 2, 3.

Grafovi se, kao celine, obeležavaju obično velikim latinskim slovima (na primer G, H, itd.). Kao što je navedeno, graf G je odredjen skupom čvorova X, skupom grana U i zakonom korespondencije f (tj. funkcijom f), pri čemu f dodeljuje granama (neuredjene) parove čvorova. Da bi se ova činjenica kratko izrazila piše se $G = (X,U,f)$.

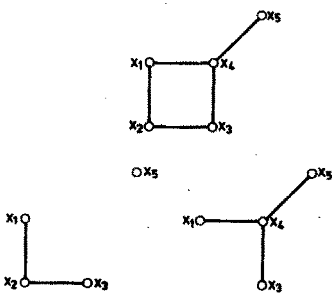


sl. 2

U specijalnim slučajevima može da se dogodi da funkcija f pridružuje različitim granama isti par čvonova. Tada su ti čvorovi povezani sa više grana. Kaže se da u grafu tada postoje višestruke grane, a takvi grafovi se nazivaju multigrafovi. Na sl. 2 prikazana su dva multigrafa.

Ako su skupovi X i U konačni, graf (odnosno multigraf) je konačan. U suprotnom slučaju radi se o beskonačnim grafovima (multigrafovima). Mi ćemo u daljem tekstu posmatrati samo konačne grafove i multigrafove bez petlji kod kojih je skup čvorova neprazan.

Podgraf datog grafa (ili digrafa, što će biti definisane kasnije) dobija se na taj način što se uoči neki neprazan podskup Y skupa čvorova i izostave iz grafa svi ostali čvorovi zajedno sa granama koje su susedne izostavljenim čvorovima. U podgrafu ostaju samo grane koje povezuju čvorove iz Y. Kaže se da je opisani podgraf indukovan skupom Y.

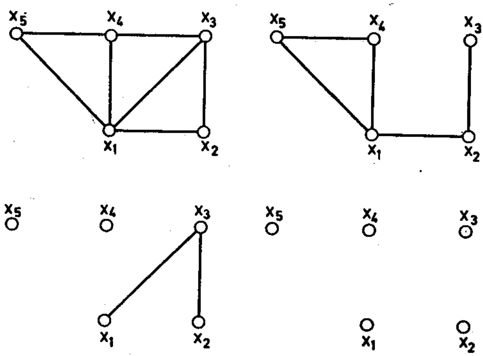


sl. 3

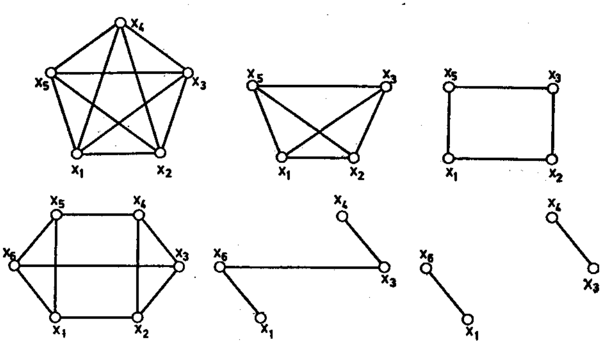
Na sl. 3 dat je jedan graf sa dva svoja podgrafa.

Delimičnim ili parcijalnim grafom grafa G naziva se svaki graf H koji je dobijen od G izostavljanjem nekih njegovih grana pri čemu svi čvorovi ostaju u grafu.

Na sl. 4 je dato nekoliko delimičnih grafova jednog grafa.



sl. 4



sl. 5

Delimični graf podgrafa naziva se <u>delimični podgraf</u> datog grafa. Na sl. 5 se nalaze dva grafa sa po jednim svojim podgrafom i delimičnim podgrafom.

Na sasvim sličan način definišu se analogni pojmovi za multigrafove, digrafove i multidigrafove (što će biti kasnije definisano).

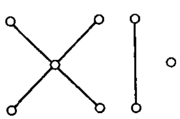
Napomenimo da su binarne relacije "biti podgraf", "biti delimični graf" i "biti delimični podgraf", definisane u skupu svih grafova, relacije parcijalnog uredjenja u tom skupu.

Neka su $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ skup čvorova i skup grana nekog grafa G. Naizmenični niz čvorova i grana $x_{i_1}, u_{j_1}, x_{i_2}, u_{j_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_k}, u_{j_k}, x_{i_{k+1}}$ naziva se <u>put dužine k</u> u grafu G ako su za svako $s = 1,2,\ldots,k$ čvorovi x_{i_s} i $x_{i_{s+1}}$ medjusobno različiti i predstavljaju krajnje tačke grane u_{j_s}. Kaže se da ovaj put povezuje čvor x_{i_1} sa čvorom x_{i_k}. Za put koji počinje i završava se u istom čvoru kaže se da je <u>zatvoren</u> ili <u>kružni</u> put.

<u>Primer 3</u>. U grafu na sl. 1 niz $x_2, u_1, x_1, u_3, x_4, u_5, x_3$ predstavlja put dužine 3 i povezuje x_2 sa čvorom x_3.

Graf je <u>povezan</u> ako se svaka dva njegova čvora mogu povezati putem. Ako postoje čvorovi koji se ne mogu povezati putem, graf je <u>nepovezan</u>. Graf na sl. 1 je povezan, dok je graf na sl. 6 nepovezan.

Nepovezan graf se sastoji od dva ili više odvojenih delova. Ovi odvojeni delovi nazivaju se <u>komponente povezanosti</u> grafa ili, kratko, <u>komponente</u>. Svaki čvor grafa pripada jednoj komponenti. Komponentu kojoj pripada odredjeni čvor x obrazuju čvor x i svi oni čvorovi koji se mogu povezati putem sa čvorom x. Graf na sl. 6 ima tri komponente povezanosti.



sl. 6

U povezanom grafu se definiše <u>rastojanje</u> dva čvora kao dužina najkraćeg puta izmedju ta dva čvora. Smatra se da je svaki čvor na rastojanju 0 od samog sebe. Najveće rastojanje dva čvora u povezanom grafu naziva se <u>dijametar</u> grafa. Pri ovome se, naravno, dužina puta ne shvata geometrijski već u gore definisanom kombinatornom smislu.

Veza izmedju stepena čvora i broja grana u grafu uspostavlja se na sledeći način.

Neka su $d_1, d_2, \ldots, d_n$ stepeni čvorova $x_1, x_2, \ldots, x_n$ u grafu bez petlji koji ima m grana. Ako saberemo sve stepene čvorova, dobijamo dvostruki broj grana, jer svaka grana ima kao krajnje tačke dva čvora. Dakle, važi relacija

(1) $$d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2m .$$

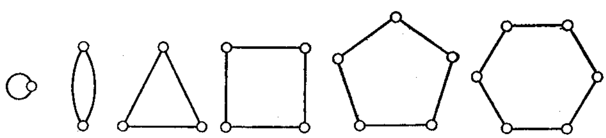
Iz ove relacije neposredno sleduje

Teorema 1. Broj čvorova neparnog stepena u konačnom grafu bez petlji je paran.

Graf je regularan stepena r, ako je $d_1 = d_2 = \dots = d_n = r$. Iz (1) sleduje da regularan graf stepena r ima $m = \frac{1}{2} nr$ grana.

Iz ove jednakosti sleduje da ne postoje za svako n i r regularni grafovi stepena r sa n čvorova. Potrebno je, naime, da bar jedan od brojeva n i r bude paran. Lako se može dokazati da je ovo i dovoljan uslov za egzistenciju grafova iz pomenute klase.

Posebno su interesantni regularni grafovi stepena dva. Povezan regularan graf stepena dva zove se kontura. Ako kontura ima n čvorova, oni se mogu označiti sa $x_1, x_2, \dots, x_n$ tako da je x_1 susedan sa x_2, x_2 sa x_3, ... , x_{n-1} sa x_n i x_n susedan sa x_1. Izuzetno ćemo konturom nazivati i jedan multigraf i jedan graf sa petljom (sl. 7). Broj n naziva se dužina konture. Kontura dužine n obeležava se sa C_n. Kontura je parna (neparna) ako je njena dužina parna (neparna).



sl. 7

Na sl. 7 date su konture sa 1,2,3,4,5 i 6 čvorova.

Komponente povezanosti konačnog regularnog grafa stepena dva su očigledno konture.

Graf u kome su svaka dva čvora spojena granom naziva se potpuni graf. Potpuni graf sa n čvorova obeležava se sa K_n. Graf K_n je regularan stepena n-1.

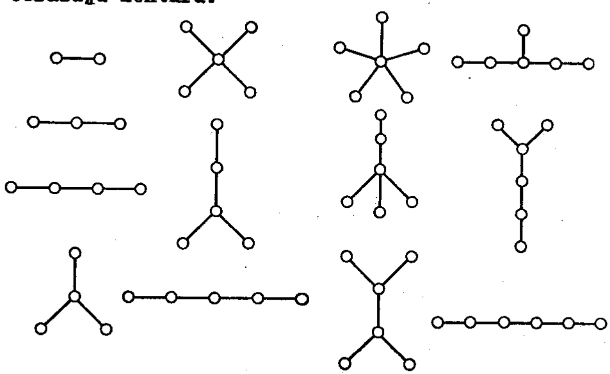
k-kompletan graf $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ je graf čiji se skup čvorova može podeliti na k medjusobno disjunktnih podskupova koji sadrže redom $n_1, n_2, \ldots, n_k$ čvorova, tako da su svaka dva čvora iz različitih podskupova povezana granom a da ni jedna grana ne povezuje čvorove iz istog podskupa. Za $k=2$ dobijamo tzv. bikompletne grafove K_{n_1,n_2}.

Prelazimo na opis jedne važne klase grafova koji se nazivaju stabla. Povezan graf sa najmanje dva čvora koji ne sadrži konture naziva se stablo ili drvo. Na sl. 8 prikazana su sva stabla sa najviše 6 čvorova.

Mnoge osobine stabla su lako uočljive. Navodimo neke od njih uz kratko obrazloženje, ili bez obrazloženja, ostavljajući čitaocu da proveri njihovu tačnost.

Izostavljanjem bilo koje grane iz stabla dobija se nepovezan graf. Neka je, na primer, izostavljena grana koja povezuje čvorove x_1 i x_2 jednog stabla. Ako bi se posle izostavljanja ove grane dobio povezan graf, morao bi u stablu postojati put koji ne sadrži udaljenu granu a koji povezuje x_1 sa x_2. Ovaj put bi zajedno sa pomenutom granom obrazovao konturu u stablu, što je, po definiciji stabla, nemoguće.

Ako se u stablo uključi proizvoljna nova grana, dobija se graf koji ima tačno jednu konturu. Ovo je očigledno s obzirom na činjenicu da su čvorovi izmedju kojih je uključena nova grana povezani u stablu jednim putem. Grane ovog puta sa novom granom obrazuju konturu.



sl. 8

Svako stablo sadrži bar dva čvora stepena 1. Na primer, čvorovi čije je rastojanje jednako dijametru stabla imaju stepen 1.

Koristeći se ovom činjenicom i metodom matematičke indukcije, može se dokazati da za broj n čvorova i broj m grana u stablu važi jednakost $m=n-1$.

Svaka dva čvora u stablu su spojena samo jednim putem ako isključimo mogućnost višestrukog prolaženja puta kroz jedan isti čvor. Putevi koji kroz svaki čvor grafa prolaze najviše jedanput nazivaju se elementarni putevi.

Osobine stabla su pregledno izložene u sledećoj teoremi.

Teorema 2. Neka je G graf sa $n(n>1)$ čvorova. Sledeći iskazi o G su ekvivalentni:

(1) G je povezan i ne sadrži konture;

(2) G ne sadrži konture i ima $n-1$ grana;

(3) G je povezan i ima $n-1$ grana;

(4) G ne sadrži konture, ali dodavanjem nove grane izmedju proizvoljna dva čvora obrazuje se bar jedna kontura;

(5) G je povezan ali gubi to svojstvo ako se udalji njegova proizvoljna grana;

(6) Svaka dva čvora su u G spojena tačno jednim elementarnim putem.

Ekvivalencija nekih od ovih iskaza je već dokazana.

Svaki od navedenih šest iskaza može se uzeti za definiciju stabla. Ostalih pet iskaza postaju tada teoreme koje se dokazuju.

U mnogim razmatranjima tzv. bojenje grafova se pokazuje kao veoma korisno.

Graf se boji na taj način što se svakom čvoru pridružuje neka boja, tj. svaki čvor se boji nekom bojom. Graf je pravilno obojen ako su svaka dva susedna čvora obojena različitim bojama. Ako se graf može pravilno obojiti a da se pri tom upotrebi k boja, graf je k-obojiv. Hromatski broj grafa je jednak k ako je graf k-obojiv, a nije $(k-1)$-obojiv.

Ako graf ne sadrži nijednu granu, tj. ako se sastoji samo od izolovanih čvorova, sve čvorove možemo obojiti istom bojom. Stoga je hromatski broj jednak 1. Nasuprot tome, za potpuni graf sa n čvorova hromatski broj je n. Hromatski broj ostalih grafova veći je od 1, a manji od n.

Grafovi čiji je hromatski broj jednak 2, nazivaju se <u>bihromatski</u> grafovi. Kontura parne dužine je bihromatski graf jer je sa dve boje mogućno pravilno bojenje. Medjutim, kontura neparne dužine je <u>trihromatski</u> graf. Nijedan bihromatski graf ne može da sadrži konturu neparne dužine, jer bi u protivnom za bojenje grafa bilo potrebno bar tri boje. Interesantno je, medjutim, da važi i obrnut iskaz, tj. graf bez konture neparne dužine je bihromatski. Navedene činjenice sadržane su u sledećoj teoremi.

<u>Teorema 3</u> (Königova teorema). Graf je bihromatski ako i samo ako ne sadrži (kao delimični podgraf) nijednu konturu sa neparnim brojem čvorova.

<u>Dokaz</u>. Kontura sa neparnim brojem čvorova je trihromatski graf. Stoga je jasno da bihromatski graf ne može da sadrži kao delimični podgraf konturu sa neparnim brojem čvorova.

Pretpostavimo sada da graf ne sadrži nijednu konturu sa neparnim brojem čvorova i dokažimo da je graf bihromatski. Izvršićemo efektivno bojenje grafa sa dve boje. Proizvoljan čvor obojimo, na primer, belom bojom; sve njemu susedne čvorove obojimo plavom, a susedne čvorove od ovih opet belom (ukoliko već nisu obojeni belom bojom) itd. Kada završimo sa jednom komponentom povezanosti prelazimo na drugu. Ako na ovaj način obojimo sve čvorove grafa, graf je bihromatski. U suprotnom slučaju naići ćemo u procesu bojenja na čvor koji treba obojiti, na primer, plavom bojom a da je jedan od njemu susednih čvorova već obojen plavom bojom.

Medjutim, tada od početnog čvora vode u ovaj čvor dva različita puta, od kojih jedan ima paran, a drugi neparan broj grana. Ako objedinimo ova dva puta dobijamo kružni put neparne dužine. Ovaj kružni put može da postoji samo ako u grafu postoji kontura sa neparnim brojem čvorova, a to je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom.

Ovim je dokaz teoreme završen.

Važni predstavnici bihromatskih grafova su stabla i konture sa parnim brojem čvorova.

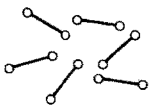
Bihromatski grafovi se često predstavljaju na sledeći način. Neka je bihromatski graf G obojen sa dve boje. Neka je X_1 skup čvorova grafa G obojenih jednom od boja a X_2 skup čvorova obojenih drugom bojom. Neka je U skup grana grafa G. Tada se piše $G = (X_1, X_2, U)$ a graf se zamišlja, odnosno na crtežu predstavlja, kao graf sa dve grupe čvorova X_1 i X_2 pri čemu grane povezuju samo čvorove iz različitih grupa.

Ako skup U sadrži sve moguće grane, tj. ako je svaki čvor iz X_1 spojen granom sa svakim od čvorova iz X_2, G je potpuni bihromatski ili bikompletan graf, kao što je istaknuto ranije. Ako je tada $|X_1| = n_1$ i $|X_2| = n_2$, piše se $G = K_{n_1,n_2}$.

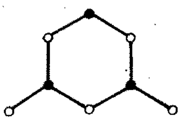
Na sl. 9 prikazan je jedan regularan graf stepena 1. Lako se uvidja da svaki regularan graf stepena 1 sadrži paran broj čvorova, da su čvorovi grupisani u parove i da su čvorovi iz istog para spojeni granom. Dakle, sve komponente grafa su istog oblika.

U teoriji grafova i u primenama od interesa su delovi grafa koji imaju oblik sa sl. 9. Regularan delimični graf stepena 1 nekog grafa naziva se <u>1-faktor</u> toga grafa. Dakle, postojanje 1-faktora u grafu znači da se čvorovi grafa mogu svrstati u parove tako da se u svakom paru nadju susedni čvorovi. Potreban uslov za egzistenciju 1-faktora je da graf ima paran broj čvorova. Ovaj uslov, medjutim, nije i dovoljan.

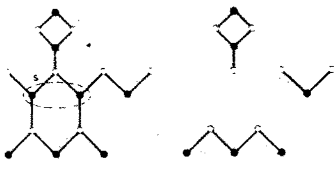
Ako je graf bihromatski, potrebno je još da svakom bojom može da se oboji isti broj čvorova. U grafu na sl. 10 broj čvorova koji su obojeni belom i broj čvorova obojenih crnom bojom nisu isti. Stoga je grupisanje u parove nemogućno, pa 1-faktor ne postoji.



sl. 9



sl. 10



sl. 11

Graf na sl. 11 ima osobinu da je svakom bojom obojen isti broj čvorova, ali graf uprkos tome nema 1-faktor. U ovo se možemo uveriti na razne načine neposrednim posmatranjem. Jedan od načina je da se uoči skup S označen na sl. 11. Udaljavanjem dva čvora skupa S (zajedno sa svim susednim granama) iz grafa dobijamo nepovezani graf sa četiri komponente, kao što je prikazano na istoj slici desno. Bitna činjenica je da te komponente imaju neparan broj čvorova. Ako bi u početnom grafu postojao 1-faktor, onda bi iz svake od pomenutih komponenata bar po jedan čvor morao biti sparen sa nekim od čvorova iz S. Medjutim, to je nemogućno, jer S ima samo dva čvora. Skup S čija egzistencija onemogućuje egzistenciju 1-faktora naziva se <u>antifaktorski skup</u>.

Uopšte, <u>antifaktorski skup</u> u nekom grafu je svaki skup čvorova S čijim se udaljavanjem dobija graf u kome je broj komponenti sa neparnim brojem čvorova veći od broja elemenata skupa S.

Za egzistenciju 1-faktora u grafu potrebno je, dakle, da broj čvorova bude paran i da ne postoji antifaktorski skup. Interesantno je da su ovi uslovi i dovoljni, tj. važi i obrnuto tvrdjenje: Ako graf ima paran broj čvorova i ne sadrži antifaktorski skup. tada postoji 1-faktor u grafu. Ovo je sadržina teoreme W.T.Tuttea u čiji se dokaz nećemo upuštati.

Do sada smo proučavali neorijentisane grafove ili, kraće, grafove. Termin neorijentisan je usvojen zbog toga što su grane grafa neorijentisane.

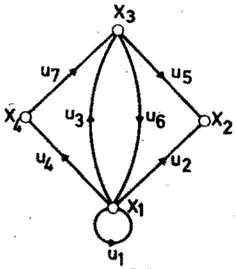
Pored grafova proučavaju se i <u>digrafovi</u>, kod kojih su grane orijentisane.

<u>Digraf</u> G se sastoji od <u>skupa čvorova X</u> i <u>skupa orijentisanih grana U</u>, pri čemu je prema zadatom zakonu korespondencije f svakoj orijentisanoj grani iz U pridružen jedan uredjen par čvorova iz skupa X.

<u>Primer 4</u>. Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ i $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ Neka f granama iz U korespondira redom sledeće uredjene parove čvorova:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
(x_1,x_1)	(x_1,x_2)	(x_1,x_3)	(x_1,x_4)	(x_3,x_2)	(x_3,x_1)	(x_4,x_3)

Digraf odredjen sa X, U i f je prikazan na sl. 12. Dakle, uopšte, ako funkcija f pridružuje grani u_i uredjen par čvorova (x_j, x_k), na crtežu se čvorovi x_j i x_k povezuju linijom koja je orijentisana od x_j ka x_k. Ako postoje dva čvora koja su povezana sa više grana iste orijentacije, digraf se naziva <u>multidigraf</u>.



sl. 12

Kaže se da grana u_i <u>izlazi</u> iz čvora x_j a <u>ulazi</u> u čvor x_k, tj. grana u_i <u>povezuje</u> čvor x_j sa čvorom x_k.

Granu (x_i, x_j) ponekad ćemo označavati kratko sa $x_i x_j$.

U digrafu se <u>put</u> može definisati kao niz (orijentisanih) grana koje se nadovezuju jedna na drugu. Put povezuje početni čvor prve svoje grane sa završnim čvorom poslednje grane. Put je elementaran ako kroz svaki čvor digrafa prolazi najviše jedanput.

<u>Lanac dužine k</u> u multidigrafu G je naizmenični niz čvorova i grana $x_1, u_1, x_2, u_2, \ldots, x_k, u_k, x_{k+1}$ takav da su za svako $i = 1,2,\ldots,k$ čvorovi x_i i x_{i+1} medjusobno različiti i predstavljaju krajnje tačke grane u_i (pri ovom nije bitno koji je od njih početni a koji je krajnji čvor). Kazaćemo takodje da ovaj lanac polazi iz x_1 i povezuje ovaj čvor sa čvorom x_{k+1} u kome se lanac završava.

Ako je x_i početni a x_{i+1} krajnji čvor grane u_i, kaže se da lanac prolazi granom u_i, u skladu sa njenom orijentacijom, tj. u smeru strelice. Ako je x_{i+1} početni a x_i krajnji čvor, kaže se da lanac prolazi granom u_i nasuprot strelice.

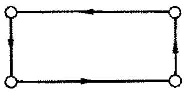
<u>Ciklus dužine k</u> je lanac dužine k koji se završava u čvoru u kojem i počinje.

U digrafu se za svaki čvor x_i definiše <u>izlazni stepen</u> d_i^+ i <u>ulazni stepen</u> d_i^-. Izlazni stepen je jednak broju grana koje izlaze iz posmatranog čvora a ulazni stepen je jednak broju grana koje ulaze u taj čvor. Petlja se uračunava i u ulazni i u izlazni stepen. Čvor u koji ne ulazi nijedna grana a bar jedna izlazi (tj. $d_i^- = 0$, $d_i^+ > 0$) naziva se <u>izvor</u>. Slično tome, <u>ponor</u> je čvor za koji važi $d_i^+ = 0$, $d_i^- > 0$.

Digraf je <u>jako povezan</u> ako je svaki uredjen par čvorova x_i, x_j spojen putem koji vodi iz x_i u x_j.

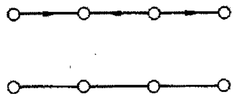
Iz definicije sleduje da, pored egzistencije puta iz x_i u x_j, mora postojati put koji vodi iz x_j u x_i.

Na sl. 13 dat je primer jako povezanog digrafa.



sl. 13

sl. 14



sl. 15

Povezanost je <u>jednostrana</u> ako je svaki neuredjen par čvorova x_i, x_j povezan putem bar u jednom smeru (sl. 14).

Digraf je <u>slabo povezan</u> ako je povezan neorijentisan graf, dobijen od datog digrafa zamenom orijentisanih grana odgovarajućim neorijentisanim granama (sl. 15).

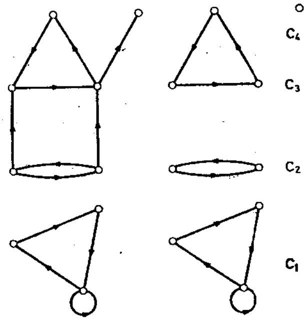
Jako povezan digraf ima i osobine jednostrane i slabe povezanosti. Jednostrano povezan digraf je i slabo povezan. Slabo povezan digraf ne mora, medjutim, biti jednostrano povezan, a jednostrano povezan digraf ne mora biti i jako povezan.

Pitanje komponenata povezanosti se komplikuje kada se posmatraju grafovi koji nisu neorijentisani.

Opisaćemo detaljnije <u>komponente jake povezanosti</u>.

U skup X čvorova digrafa G uvedimo binarnu relaciju $\mathcal{R}$ pomoću sledeće definicije. Čvorovi x i y su u relaciji $\mathcal{R}$ ako i samo ako je $x=y$ ili se x i y nalaze na nekom zatvorenom putu digrafa G. Lako se proverava da je relacija $\mathcal{R}$ refleksivna, simetrična i tranzitivna, tj. ona predstavlja relaciju ekvivalencije. Podgrafovi digrafa G, indukovani klasama ekvivalencije ove relacije, predstavljaju komponente jake povezanosti grafa G. Na sl. 16 predstavljen je jedan digraf pri čemu su naznačene njegove komponente povezanosti C_1, C_2, C_3, C_4.

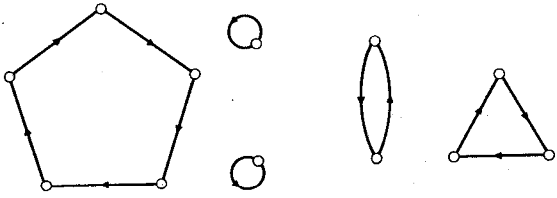
Svaka komponenta jake povezanosti je jako povezan digraf. Ovo potiče otuda što se svaka dva (različita) čvora iz iste klase ekvivalencije nalaze na nekom zatvorenom putu (tj. postoji put od jednog do drugog i obrnuto).



sl. 16

Lako se uvidja da se iz komponente u komponentu jake povezanosti može prelaziti uvek samo u jednom pravcu. (Ovde se podrazumeva da se kretanje vrši po granama grafa u smeru orijentacije grana.) Ako se iz jedne komponente izadje u nju se više ne može vratiti. Grana koja povezuje čvorove iz različitih komponenata ne leži ni na jednom zatvorenom putu. Stoga je ponekad zgodno da se komponente jake povezanosti konstruišu na taj način što se udalje iz grafa sve grane koje ne leže na zatvorenim putevima. Tada se graf raspada na odvojene delove koji upravo i predstavljaju komponente jake povezanosti.

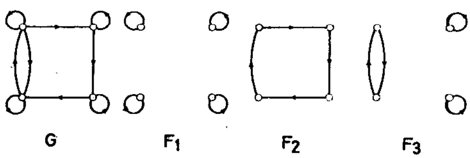
Digraf G sa m čvorova naziva se <u>orijentisana kontura</u> (ili, kratko, <u>kontura</u> ako ne postoji opasnost da se ovaj pojam pomeša sa neorijentisanim povezanim regularnim grafom stepena 2) ako se njegovi čvorovi mogu numerisati brojevima 1,2,...,m tako da budu ispunjeni sledeći uslovi: 1° Za svako i = = 1,2,...,m-1 postoji u G orijentisana grana koja ide iz čvora i u čvor i+1; 2° Postoji orijentisana grana koja ide iz čvora m u čvor 1; 3° Osim navedenih graf ne poseduje druge grane.



sl. 17

Digraf se naziva linearan ako iz svakog čvora izlazi i u svaki čvor ulazi tačno jedna grana. Linearni digraf se sastoji od jednog ili više odvojenih delova (komponenata) od kojih svaki predstavlja konturu (sl. 17). Konturu može da obrazuje i samo jedna petlja.

Kao što smo to već spomenuli kod grafova, ako se iz nekog digrafa udalji izvestan broj grana, pri čemu broj čvorova digrafa ostaje nepromenjen, dobija se digraf koji se naziva delimični digraf početnog digrafa. Linearni delimični digraf digrafa G naziva se faktor grafa G. Na sl. 18 prikazani su svi faktori jednog digrafa.



sl. 18

Pojam faktora u digrafu ne treba mešati sa pojmom 1-faktora u grafu.

Uvešćemo sada još jedan važan pojam - pojam izomorfizma grafova (digrafova, multigrafova ili multidigrafova, tj. digrafova sa višestrukim orijentisanim granama).

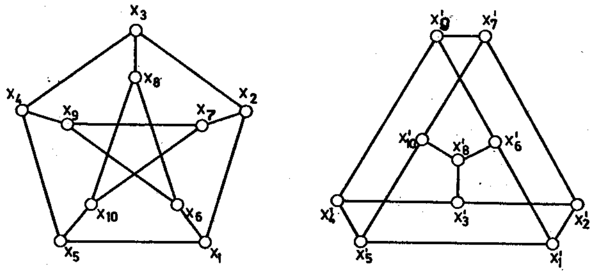
Neka za zadata dva grafa (ili, najopštije, multidigrafa) G_1 i G_2 postoji funkcija φ koja svakom čvoru iz G_1 pridružuje jedan čvor iz G_2, tako da je svaki čvor iz G_2 pridružen tačno jednom čvoru iz G_1. Neka je, dalje, funkcija φ takva da svakom paru x,y čvorova iz G_1 pridružuje čvorove $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ u G_2 koji su medjusobno povezani sa istim brojem grana kao i čvorovi x,y.

Funkcija φ sa navedenim osobinama naziva se izomorfizam grafova G_1 i G_2, a za grafove G_1 i G_2 se kaže da su izomorfni.

Primer 5. Grafovi[1] na sl. 19 su izomorfni a izomorfizam je

1) Graf čije su dve reprezentacije prikazane na sl. 19 naziva se Petersenov graf.

funkcija φ definisana pomoću $\varphi(x_i) = x_i'$, $i = 1,2,\ldots,10$. Na sl. 20 data su dva izomorfna multidigrafa pri čemu je izomorfizam naznačen na sličan način.

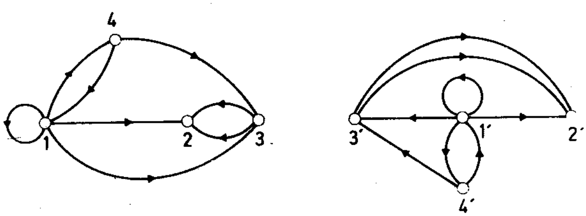


sl. 19

Izomorfizam grafa na samog sebe naziva se <u>automorfizam</u>. Za prvi graf sa sl. 19 automorfizam je, na primer, preslikavanje φ definisano pomoću sledeće tablice:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
$\varphi(x_i)$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_6

Geometrijska simetrija crteža grafa uvek definiše jedan automorfizam grafa.



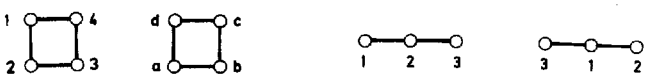
sl. 20

Ako se graf prikazuje pomoću tačaka i linija u trodimenzionalnom prostoru, dve grane se uvek mogu predstaviti tako da se medjusobno ne seku i ne dodiruju (izuzev u čvoru koji je zajednički za te dve grane).

Deformacija geometrijskog reprezenta grafa u trodimenzionalnom prostoru, pri kojoj se čvorovi, eventualno, pomeraju ali se medjusobno ne preklapaju, a grane izdužuju, skraćuju i savijaju ali se ne prekidaju i ne slepljuju sa drugim granama, naziva se neprekidna deformacija. Izomorfni grafovi mogu se pomoću neprekidne deformacije dovesti do geometrijske podudarnosti, ako se još dopusti proces pri kojem se grana otkida od jednog svog čvora ali se na kraju opet vezuje za taj čvor[1].

Kao što se vidi, izomorfni grafovi su, u stvari, isti grafovi ali su različito predstavljeni odnosno nacrtani. Razlika izmedju dva izomorfna grafa može da bude u tome što su oni predstavljeni različitim geometrijskim figurama (videti primer 5). No, može da se desi da oni budu predstavljeni i istim geometrijskim figurama a da se razlikuju samo po tome kako su im čvorovi označeni. Dalje može da se desi da su i oznake čvorova iste, samo su grafovi različito označeni.

Primer 6. Na sl. 21 data su dva para izomorfnih grafova.



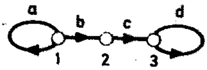
sl. 21

U daljim poglavljima ove knjige pojavljivaće se grafovi (ili digrafovi) kod kojih je svakoj grani (ili petlji) pridružen neki broj. Broj pridružen grani nazivaćemo prenos grane. Ako su u jednom grafu definisani prenosi grana kazaćemo da je to graf sa označenim granama ili označeni graf. Napomenimo da se uvek podrazumeva da čvorovi grafa imaju neke oznake.

1) Da je ova poslednja operacija potrebna uvidja se na primeru regularnog grafa stepena 2 sa dve komponente povezanosti. Pri geometrijskoj reprezentaciji dve konture ovog grafa mogu da se obuhvataju kao karike na lancu a mogu da budu i sasvim odvojene.

Primer 7. Na sl. 22 prikazan je jedan digraf sa označenim granama.

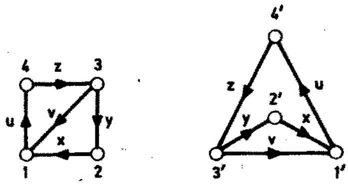
Dva multidigrafa G_1 i G_2 sa označenim granama su izomorfna ako postoji uzajamno jednoznačno preslikavanje φ iz skupa čvorova multidigrafa G_1 na skup čvorova G_2 takvo da za svaki par čvorova x,y iz G_1 prenosi grana koje u G_2 vode iz čvora $\varphi(x)$ u čvor $\varphi(y)$ budu jednaki prenosima grana koje u G_1 vode iz x u y.



sl. 22

Primer 8. Na sl. 23 prikazana su dva izomorfna digrafa sa označenim granama.

U grafu sa označenim granama definiše se prenos svakog njegovog delimičnog podgrafa kao proizvod prenosa grana koje pripadaju tom podgrafu. Specijalno će u daljem tekstu biti interesantni prenosi puteva i kontura. Dakle, prenos puta je jednak proizvodu prenosa njegovih grana i prenos konture je proizvod prenosa grana koje obrazuju konturu.



sl. 23

Na kraju napomenimo da se, radi kratkoće u izražavanju, termin graf često upotrebljava i kada se misli na multigrafove, digrafove ili multidigrafove. U takvim slučajevima se radi o opštim diskusijama ili je iz ranijih izlaganja jasno o kojim objektima je reč.

1.2. Elementi klasične kombinatorike

U osnovne pojmove klasične kombinatorike spadaju varijacije, permutacije i kombinacije.

Jedan od glavnih problema u kombinatorici je odredjivanje broja raznih kombinatornih objekata. Prilikom rešavanja zadataka prebrojavanja vrlo često se koriste sledeća dva elementarna principa.

Neka su A i B disjunktni skupovi, gde je $|A| = n$ i $|B| = m$.

Princip 1. Broj načina da se izabere jedan element iz skupa A ili iz skupa B je m+n.

Princip 2. Broj načina da se izabere jedan element iz skupa A i jedan element iz skupa B je mn.

U prvom slučaju biramo, u stvari, jedan element iz skupa $A \cup B$. Očigledno je $|A \cup B| = m+n$.

U drugom slučaju biramo jedan element iz skupa $A \times B$, jer izbor jednog elementa iz skupa A i jednog elementa iz skupa B odredjuje jedan uredjen par iz $A \times B$. Kako svaki element iz A može da se kombinuje sa svakim elementom iz B, da bi se dobio jedan uredjen par, dobija se $|A \times B| = mn$.

Neka je dat skup $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Definicija 1. Varijacija klase k (bez ponavljanja) skupa A_n je svaka uredjena k-torka različitih elemenata skupa A_n.

Varijacija se može definisati i pomoću pojma preslikavanja.

Definicija 2. Varijacija klase k (bez ponavljanja) skupa A_n je svako obostrano jednoznačno preslikavanje skupa $\{1, 2, \ldots, k\}$ u skup A_n.

Definicije 1 i 2 su ekvivalentne.

Broj varijacija klase k (bez ponavljanja) skupa od n elemenata označićemo sa V_n^k. Dokazaćemo formulu

$$V_n^k = n(n-1) \ldots (n-k+1). \tag{1}$$

U proizvodu na desnoj strani jednakosti nalazi se k faktora.

Može se zamisliti da se k-torka koja predstavlja varijaciju "popunjava" svojim koordinatama redom, počevši od prve koordinate. Izbor prve koordinate može se izvršiti na n načina. Ako smo se odlučili, na primer, za a_1, za drugu koordinatu možemo uzeti bilo koji od n-1 preostalih elemenata $a_2, a_3, \ldots, a_n$. Prelaskom na popunjavanje prve sledeće koordinate, uvek se broj mogućnosti za izbor te koordinate smanjuje za 1. k-tu koordinatu, kada su sve prethodne koordinate već izabrane, možemo izabrati na n-k+1 načina. Kako svaki od n izbora za prvu koordinatu možemo da kombinujemo sa n-1 izbora druge koordinate, broj izbora prve dve koordinate na osnovu principa

2 je $n(n-1)$. Produženjem ovakvog rezonovanja neposredno dolazimo do formule (1).

Definicija 3. Permutacija skupa A_n je svaka uredjena n-torka različitih elemenata skupa A_n.

Pošto su elementi n-torke različiti, svi elementi skupa A_n se pojavljuju (tačno po jedanput) u n-torci. Opisno rečeno, permutacija skupa je svaki uredjen raspored njegovih elemenata. Pod pojmom uredjeni raspored, podrazumevamo raspored u kome se zna koji je prvi element po redu, koji je drugi, itd.

Primetimo da je permutacija skupa od n elemenata, u stvari, varijacija n-te klase (bez ponavljanja) toga skupa. Stoga je broj permutacija P_n dat pomoću

$$P_n = V_n^n = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 = n!$$

U skladu sa definicijom 2 permutacija skupa A_n je svako obostrano jednoznačno preslikavanje skupa $\{1,2,\dots,n\}$ u skup $A_n=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$. Pošto ova dva skupa imaju isti broj elemenata, ovo preslikavanje je bijekcija. Očigledno, permutacija se može shvatiti i kao bijekcija skupa u samog sebe.

Definicija 4. Kombinacija k-te klase (bez ponavljanja) skupa A_n, je njegov podskup koji sadrži k elemenata.

Napominjemo da je kombinacija neuredjen skup, tj. nije važno koji je redosled elemenata u kombinaciji. Broj kombinacija k-te klase skupa od n elemenata obeležavaćemo sa C_n^k.

U cilju odredjivanja broja C_n^k zamislimo da se izdvajanje k elemenata iz skupa od n elemenata vrši na sledeći način. Odabere se jedna permutacija skupa od n elemenata i uzme se prvih k elemenata iz permutacije. Očigledno je da će više permutacija da dovede do iste kombinacije. Naime, permutovanje prvih k elemenata u jednoj permutaciji skupa od n elemenata ne dovodi do promene kombinacije. Isto se može reći i za permutovanje poslednjih n-k elemenata. Iz ovoga sleduje da za svaku kombinaciju postoji $k!(n-k)!$ permutacija koje dovode do te kombinacije. Kako je broj svih permutacija skupa od n elemenata jednak $n!$, broj kombinacija iznosi

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

U kombinatorici se pojavljuju takodje varijacije, permutacije i kombinacije sa ponavljanjem, od kojih navodimo samo varijacije.

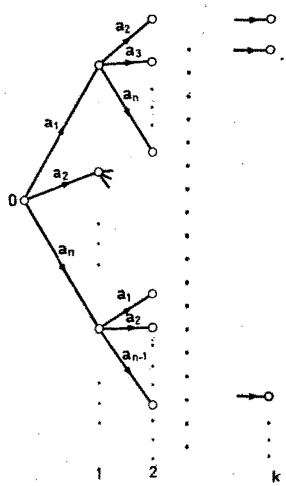
Definicija 5. Varijacija klase k sa ponavljanjem skupa A_n je svaka uredjena k-torka elemenata skupa A_n.

Broj varijacija sa ponavljanjem klase k skupa od n elemenata označavaćemo sa $\overline{V}_n^k$.

Prilikom "popunjavanja" k-torke elemenata skupa A_n za svaku koordinatu imamo izbor od svih n elemenata skupa A_n. Stoga je (uporediti sa (1))

$$\overline{V}_n^k = \overbrace{n \cdot n \ldots n}^{k \text{ puta}} = n^k.$$

Proces gradjenja varijacija konačnog skupa može se pregledno prikazati jednim digrafom. Po definiciji varijacija klase k skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je uredjena k-torka različitih elemenata iz A. Može se zamisliti da se k-torka "popunjava" svojim koordinatama redom počevši od prve koordinate.



sl. 1

Izbor prve koordinate se može izvršiti na n načina što je na grafu sa sl. 1 prikazano sa n grana koje izlaze iz čvora 0. Ako smo se odlučili, na primer, za a_1, za drugu koordinatu možemo uzeti bilo koji od n-1 preostalih elemenata $a_2, a_3, \ldots, a_n$. Vidi se da se izbor prve dve koordinate u varijaciji može prikazati izborom puta dužine dva koji vodi iz čvora 0 do jednog od čvorova iz drugog sloja čvorova grafa sa sl. 1. Dalje se zaključuje da svaki put dužine k iz čvora 0 do jednog od čvorova iz k-tog sloja odredjuje jednu varijaciju klase k, i obrnuto. Uzimajući u obzir broj mogućnosti za grananje puta u svakom od čvorova u ovom ili onom sloju čvorova, za broj puteva dužine k koji polaze iz čvora 0 dobijamo izraz

$$n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1),$$

a to je već poznati izraz za broj varijacija klase k skupa od n elemenata.

Varijacije skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ mogu se na drugi način, sličan prethodnom, interpretirati pomoću grafova. Posmatrajmo digraf G sa n čvorova koji su označeni sa $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i u kome postoje sve mogućne (orijentisane) grane i petlje. Put dužine k-1 može se interpretirati kao uredjena k-torka $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$ čvorova kroz koje put prolazi. Stoga je broj <u>varijacija sa ponavljanjem</u> klase k skupa od n elemenata jednak broju puteva dužine k-1 u digrafu G. Put dužine k-1 može da počne u proizvoljnom od n čvorova. Posle izbora prvog, drugog,..., (k-1)-vog čvora put može dalje da se nastavi na n načina. Stoga je broj puteva dužine k-1 jednak $n \cdot n^{k-1} = n^k$, a to je broj varijacija sa ponavljanjem klase k skupa od n elemenata.

Ako se umesto puteva potpunog digrafa posmatraju putevi proizvoljnog digrafa, dobijaju se varijacije sa ponavljanjem u kojima je za svaki element a_i propisano koji elementi mogu da se pojave neposredno posle njega u varijaciji. Ovo su <u>varijacije sa ograničenjima</u> (videti poglavlje 3).

Neka je $j_1, j_2, \ldots, j_n$ jedna permutacija skupa $\{1,2,\ldots,n\}$. Ako je $j_i > j_k$ za $i < k$ kaže se da elementi j_i i j_k obrazuju <u>inverziju</u>. Pomoću ukupnog broja inverzija u permutaciji definiše se <u>parnost</u> permutacije. Permutacija je <u>parna</u>, odnosno <u>neparna</u>, ako je broj inverzija u permutaciji paran, odnosno neparan.

<u>Primer 1</u>. Permutacija 1,2,...,n ne sadrži nijednu inverziju te je stoga to parna permutacija. Ova permutacija se naziva osnovnom. Najveći broj inverzija ima permutacija n, n-1,..., 1. Element n obrazuje sa ostalim elementima n-1 inverziju. Element n-1 obrazuje sa elementima desno od sebe n-2 novih inverzija, itd. Broj inverzija je, dakle,

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{1}{2}\, n(n-1) = \binom{n}{2} .$$

Do ovog rezultata dolazimo i neposrednom primenom obrasca za C_n^2 jer svaka dva elementa u ovoj permutaciji obrazuju inverziju.

1.3. Polja

Algebarska struktura je neprazan skup u kome su definisane izvesne operacije. Operacija koja se vrši nad dva elementa jednog skupa i čiji je rezultat element iz istog skupa naziva se binarna operacija. Algebarske strukture sa jednom binarnom operacijom nazivamo grupoidima. Grupoid je skup snabdeven binarnom operacijom. Ako skup označimo sa X a binarnu operaciju u tom skupu sa $\cdot$ odgovarajući grupoid G se označava kao uredjen par $G = (X,\cdot)$. Umesto $a\cdot b$ ponekad ćemo pisati ab.

Definicija 1. Grupoid $G = (X,\cdot)$ naziva se grupa ako su ispunjeni sledeći uslovi[1]:

1° $(\forall a,b,c \in X)(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$,

2° $(\exists e \in X)(\forall a \in X)e\cdot a = a\cdot e = a$,

3° $(\forall a \in X)(\exists a^{-1} \in X)a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = e$.

Uslov 1° označava asocijativnost grupoida. Element e, čija se egzistencija utvrdjuje u 2°, naziva se jedinični ili neutralni element grupoida, odnosno grupe. Element a^{-1} iz uslova 3° naziva se inverzni element elementa a.

Ako u nekom grupoidu element a ima inverzni element onda se za a kaže da je invertibilan.

Definicija 2. Grupa $G = (X,\cdot)$ u kojoj je operacija $\cdot$ komutativna naziva se komutativna grupa ili Abelova grupa.

Primer 1. Skup racionalnih brojeva različitih od 0, snabdeven operacijom množenja (brojeva), predstavlja grupu. Takodje su grupe i grupoidi $(R\setminus\{0\},\cdot)$, $(C\setminus\{0\},\cdot)$, $(\{1,-1\},\cdot)$.

---

1) Sa aspekta kvantifikatorskog računa u definiciji 1 postoji izvesna nepreciznost. Naime, u 2° je e promenljiva a u 3° konstanta koja obeležava element čija se egzistencija utvrdjuje u 2°. Ispravno bi bilo uslove 2° i 3° predstaviti jedinstvenom formulom na sledeći način

$$(\exists e)(\forall a)(\exists a^{-1})(a\cdot e = e\cdot a = a \wedge a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = e).$$

Mnogi grupoidi sa operacijom sabiranja brojeva su grupe (videti primer 2), pa se često i u opštem slučaju grupe za oznaku operacije koristi simbol +. Ako je operacija grupe označena sa $\cdot$ grupa se naziva <u>multiplikativna</u> a ako je upotrebljen znak + grupa se naziva <u>aditivna</u>. Razlika izmedju multiplikativne i aditivne grupe nije suštinska već se ogleda samo u različitoj notaciji. Definicija 1 je u multiplikativnoj notaciji. U aditivnoj notaciji neutralni element se obeležava sa 0 a inverzni element elementa a sa -a. Tako dobijamo i sledeću definiciju grupe ekvivalentnu ranije navedenom definicijom.

<u>Definicija 3</u>. Grupoid $G = (X,+)$ naziva se grupa ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1° $(\forall a,b,c \in X)(a+b) + c = a + (b+c)$,

2° $(\exists 0 \in X)(\forall a \in X)a + 0 = 0 + a = a$,

3° $(\forall a \in X)(\exists (-a) \in X)a + (-a) = (-a) + a = 0$.

<u>Primer 2</u>. Poznati primeri aditivnih grupa su grupoidi $(Z,+)$, $(Q,+)$, $(R,+)$ i $(C,+)$.

<u>Primer 3</u>. Dokazati da skup $S = \{1,2,\dots,p-1\}$, gde je p prost broj, obrazuje grupu u odnosu na množenje po modulu p. (Dva cela broja a i b se množe po modulu m na taj način što se najpre pomnože na uobičajeni način pa se dobijeni rezultat ab podeli sa m; ostatak pri deljenju se zove proizvod po modulu m brojeva a i b).

Obeležićemo sa $\odot$ množenje po modulu p. Skup S je očigledno zatvoren u odnosu na $\odot$.

Da bismo dokazali asocijativnost operacije $\odot$, tj. $(a\odot b)\odot c = a\odot(b\odot c)$, dokazaćemo da je

(1) $\quad (a\odot b)\odot c \equiv abc(\bmod p)$; $\quad a\odot(b\odot c) \equiv abc(\bmod p)$.

Zaista, $a\odot b \equiv ab(\bmod p)$ i $a\odot b = ab + kp$ za neki ceo broj k. Dalje je $(a\odot b)\odot c \equiv (a\odot b)\cdot c \ (\bmod p)$, $(a\odot b)\cdot c = (ab+kp)\cdot c = abc + kcp \equiv abc \ (\bmod p)$, što daje prvu od relacija (1). Na sličan način se dokazuje i druga relacija.

Jedinični element, naravno, postoji; to je broj 1.

Da bismo dokazali invertibilnost elemenata iz S posmatrajmo za fiksirano a sve proizvode

$$(2) \qquad 1\odot a,\ 2\odot a, \ldots, (p-1)\odot a$$

elementa a sa elementima iz S. Medju tim proizvodima nema jednakih, jer ako bi bilo $i\odot a = j\odot a$ za $i > j$, imali bismo $ia \equiv ja (\mathrm{mod}\ p)$, tj. $p \mid (i-j)a$, a ovo je nemogućno jer p je prost broj i $1 \leqslant i-j \leqslant p-2$, $1 \leqslant a \leqslant p-1$. Prema tome, jedan od proizvoda iz (2), recimo $b \cdot a$, mora biti jednak 1. Dakle, b je levi inverzni element za a. Na osnovu komutativnosti operacije $\cdot$, b je i desni inverzni element za a.

Dakle, $(S,\odot)$ je grupa. Napomenimo da $(S,\odot)$ nije grupa ako p nije prost broj.

<u>Definicija 4</u>. Grupoidi $(G,\cdot)$ i $(H,\times)$ su izomorfni ako postoji bijekcija $f:G \to H$ sa osobinom

$$(\forall x,y \in G) \qquad f(x\cdot y) = f(x)\times f(y).$$

Preslikavanje f naziva se izomorfizam grupoida $(G,\cdot)$ na grupoid $(H,\times)$.

<u>Primer 4</u>. Neka je $G = \{1,i,-1,-i\}$ i $H = \{0,1,2,3\}$. Ako $\cdot$ označava množenje komleksnih brojeva a $\oplus$ sabiranje po modulu 4, grupoidi $(G,\cdot)$ i $(H,\oplus)$ su izomorfni. Izomorfizam je preslikavanje $f = \{(1,0),(i,1),(-1,2),(-i,3)\}$. Tablice ovih operacija

$\cdot$	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

imaju u suštini istu strukturu.

Može se reći da su izomorfni grupoidi, u stvari, isti grupoidi a razlikuju se samo po tome što su im elementi i operacije označeni različitim simbolima.

Ako su $(G,\cdot)$ i $(H,\times)$ izomorfni grupoidi i ako je $(G,\cdot)$ grupa onda je očigledno i $(H,\times)$ grupa. (U primeru 4 $(G,\cdot)$ je grupa. Stoga je i $(H,\oplus)$ grupa). Uopšte, ako je jedan od ovih grupoida neka struktura onda je i drugi grupoid ta ista struktura.

Ovakva zaključivanja se mogu preneti na algebarske strukture sa više od jedne operacije.

Algebarske strukture sa dve binarne operacije $(G,+,\cdot)$ i $(H,\oplus,\odot)$ su izomorfne ako postoji bijekcija $f:G\to H$ sa osobinom

$$(\forall x,y\in G)\quad f(x+y) = f(x)\oplus f(y)\wedge f(x\cdot y) = f(x)\odot f(y).$$

Kao i kod grupoida, izomorfne algebarske strukture imaju iste bitne osobine.

Razmatraćemo i neke pojmove koji su srodni pojmu izomorfizma. Pri tome ćemo imati u vidu grupe mada se svi ti pojmovi mogu posmatrati u vezi sa proizvoljnim algebarskim strukturama.

Definicija 5. Surjekcija $f:G\to H$ naziva se homomorfizam grupe $(G,\cdot)$ na grupu $(H,\times)$ ako važi

$$(\forall x,y\in G)\ f(x\cdot y) = f(x)\times f(y).$$

Ako postoji bar jedan homomorfizam kaže se da je grupa $(H,\times)$ homomorfna slika grupe $(G,\cdot)$ ili da je $(H,\times)$ homomorfna sa $(G,\cdot)$.

Primer 5. Grupa $(\{1,-1\},\cdot)$ je homomorfna slika grupe $(Z,+)$. Homomorfizam je preslikavanje $f:Z\to\{-1,1\}$ definisano pomoću

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ ako je } x \text{ paran broj} \\ -1 \text{ ako je } x \text{ neparan broj}. \end{cases}$$

Definicija 6. Izomorfizam grupe na samu sebe naziva se automorfizam. Homomorfizam grupe na neki njen deo naziva se endomorfizam.

Primer 6. Neka je a fiksirani element grupe $(G,\cdot)$. Preslikavanje $f:G\to G$ definisano pomoću $f(x) = a\cdot x\cdot a^{-1}$ je bijekcija. f je automorfizam jer je $f(x\cdot y) = a\cdot(x\cdot y)\cdot a^{-1} = (a\cdot x\cdot a^{-1})(a\cdot y\cdot a^{-1}) = f(x)\cdot f(y)$.

Definicija 7. Algebarska struktura $(S,+,\cdot)$, gde su $+$ i $\cdot$ binarne operacije skupa S, naziva se telo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1° $(S,+)$ je Abelova grupa;

2° Operacija $\cdot$ je distributivna prema operaciji $+$;

3^o Struktura $(S\setminus\{0\}, \cdot)$, gde je 0 neutralni element grupe $(S,+)$, je grupa.

<u>Definicija 8</u>. Telo $(S,+,\cdot)$ u kome je operacija $\cdot$ komutativna naziva se polje.

<u>Primer 7</u>. Tipični primeri brojnih polja su $(Q,+,\cdot)$, $(R,+,\cdot)$ i $(C,+,\cdot)$.

Opisno govoreći, brojno polje je skup brojeva nad kojima se mogu vršiti operacije sabiranja, oduzimanja, množenja i delenja, tako da je rezultat ovih operacija uvek element posmatranog skupa (osim prilikom delenja s nulom).

Postoje i konačna polja (odnosno tela). Konačno telo je komutativno i samim tim je polje, pa ćemo u daljem govoriti samo o polju.

Konačna polja nazivaju se <u>polja Galoisa</u> (Galua). Polje Galoisa sa n elemenata obeležava se sa GF(n) (G prema Galoisu a F prema engleskoj reči field - polje).

<u>Primer 8</u>. Polje ima najmanje dva elementa (neutralni element 0 aditivne grupe i neutralni element 1 multiplikativne grupe). Polje sa dva elementa je $(B,\underline{\vee},\wedge)$, gde je $B = \{0,1\}$ sa poznatim operacijama iz iskazne algebre, ekskluzivnom disjunkcijom i konjunkcijom.

Polje GF(n) postoji ako i samo ako je $n = p^k$ gde je p prost broj, a $k\in N$. Ovu činjenicu navodimo bez dokaza. Najpre dajemo konstrukciju polja GF(p), gde je p prost broj.

Skup $P = \{0,1,2,\ldots,p-1\}$ u odnosu na sabiranje $\oplus$ i množenje $\odot$ po modulu p obrazuje polje GF(p). Zaista, lako se dokazuje da ova struktura zadovoljava tačke 1^o i 2^o definicije 7, a u primeru 3 dokazali smo da je $(P\setminus\{0\}, \odot)$ grupa. Dakle, $GF(p) = (P,\oplus,\odot)$. Sva polja sa p elemenata izomorfna su konstruisanom polju GF(p).

U cilju konstrukcije polja $GF(p^k)$ posmatrajmo skup

$$\mathcal{P} = \{a_0x^{k-1} + a_1x^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \mid a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\in GF(p)\}$$

polinoma (k-1)-tog stepena sa koeficijentima (i promenljivom) iz polja GF(p). Simboli + i $\cdot$ označavaju sada operacije polja GF(p), tj. sabiranje i množenje po modulu p. Pri operacijama sa polinomima pridržavamo se pravila koja važe u GF(p).

Polinom je <u>ireducibilan</u> nad poljem GF(p) ako se ne može predstaviti kao proizvod polinoma nižeg stepena sa koeficijentima iz istog polja. Za svako k postoji polinom stepena k ireducibilan nad GF(p). Neka je P(x) jedan takav polinom.

Uvedimo u $\mathcal{P}$ operacije $\oplus$ i $\odot$ sabiranja i množenja (polinoma) po modulu ireducibilnog polinoma P(x). Množenje polinoma po modulu P(x) se izvodi tako što se polinomi pomnože po pravilima iz GF(p), rezultat se podeli sa P(x) a ostatak pri deljenju proglasi za rezultat operacije množenja po modulu P(x). Tada je struktura $(\mathcal{P}, \oplus, \odot)$ polje koje obeležavamo sa $GF(p^k)$. Sva polja sa istim brojem elemenata su medjusobno izomorfna.

Ove činjenice navodimo bez dokaza.

<u>Primer 9</u>. Konstruisaćemo polje GF(4). Polinomi stepena ne većeg od 1 sa koeficijentima iz GF(2) su 0,1,x,x+1. Polinom drugog stepena x^2+x+1 je ireducibilan što se proverava ispitivanjem svih mogućnosti faktorizacije. Usvojićemo $P(x) = x^2+x+1$ pa tablice operacija $\oplus$ i $\odot$ glase

$\oplus$	0	1	x	x+1
0	0	1	x	x+1
1	1	0	x+1	x
x	x	x+1	0	1
x+1	x+1	x	1	0

$\odot$	0	1	x	x+1
0	0	0	0	0
1	0	1	x	x+1
x	0	x	x+1	1
x+1	0	x+1	1	x

Pri konstrukciji multiplikativne tablice uzeto je, na primer, $x \odot x = x+1$ jer je $x^2 \equiv x+1 \pmod{x^2+x+1}$.

Primetimo da polja $GF(p^k)$ za $k>1$ nisu brojna polja. Elementi ovih polja su polinomi.

<u>Definicija 9</u>. Neka je $(X,+,\cdot)$ polje u kome je 0 neutralni element za sabiranje i e neutralni element za množenje. Karakteristika polja $(X,+,\cdot)$ je najmanji prirodan broj s takav da je $\overbrace{e+e+\ldots+e}^{s\text{ puta}} = 0$. Ako takav broj ne postoji karakteristika polja je broj 0.

Polje $GF(p^k)$ ima karakteristiku p. Polja $(Q,+,\cdot)$, $(R,+,\cdot)$ i $(C,+,\cdot)$ imaju karakteristiku 0.

1.4. Vektorski prostori

Neka je S polje i neka je V skup čije ćemo elemente nazivati vektorima. Kaže se da je uređen par (V,S) <u>vektorski prostor nad poljem S</u> ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1° U skupu V je definisana binarna operacija +, koju nazivamo sabiranje vektora, takva da je grupoid (V,+) Abelova grupa.

2° Definisana je binarna operacija (množenje vektora elementom polja S) koja svakom uređenom paru $(s,x) \in S \times V$ pridružuje jedan element iz V koji označavamo sa sx (ili xs) za koju su ispunjene relacije:

$$\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y,\quad (\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x,\quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,\quad 1\,x = x,$$

gde su x,y proizvoljni vektori, α, β proizvoljni elementi polja S i 1 neutralni element za množenje iz polja S.

Vektorski prostor (V,S) se često kratko označava sa V ako je poznato nad kojim poljem S je on konstruisan.

<u>Primer 1</u>. Neka su elementi n-torke $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ realni brojevi. Skup R^n svih ovakvih n-torki obrazuje vektorski prostor nad poljem realnih brojeva ako se sabiranje vektora i množenje vektora brojem definiše na sledeći način:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n),$$
$$\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n).$$

Na sličan način se konstruiše vektorski prostor nad proizvoljnim poljem.

Neka je sa 0 označen neutralni element za sabiranje u polju S.

Za vektore $x_1,x_2,\ldots,x_n$ iz vektorskog prostora V nad poljem S kažemo da su <u>linearno zavisni</u> ako postoje elementi $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ polja S, od kojih nisu svi jednaki 0, takvi da važi jednakost

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 +\ldots+ \alpha_nx_n = 0. \tag{1}$$

Izraz na levoj strani jednakosti (1) naziva se <u>linearna kombinacija</u> vektora.

Ako vektori nisu linearno zavisni, kažemo da su <u>linear-</u>

no nezavisni. Drugim rečima, za nezavisne vektore $x_1, x_2, \dots, x_n$ iz jednakosti (1) sleduje $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$.

Za skup vektora se kaže da je linearno zavisan ili nezavisan prema tome da li su vektori koji obrazuju skup linearno zavisni ili nezavisni.

Neka je $T = \{x_1, x_2, \dots, x_t\} \subset V$. Skup svih lineanih kombinacija vektora iz T, tj. skup

$$U = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_t x_t \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t \in S\},$$

naziva se lineal nad skupom T. Kaže se takodje da je T generatorski skup za U ili da T generiše U.

Linearno nezavisan skup B naziva se baza vektorskog prostora V ako B generiše V.

Primer 2. Za prostor R^n iz primera 1 bazu predstavlja sledeći skup

$$B = \{(1,0,\dots,0),\ (0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\},$$

tj. bazu obrazuju sve n-torke kod kojih je jedna koordinata jednaka 1 dok su ostale koordinate jednake 0. Broj elemenata baze je n.

Ako vektorski prostor ima bar jednu bazu koja sadrži konačno mnogo elemenata, prostor se naziva konačno-dimenzionalan. Može se dokazati da u konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru sve baze imaju podjednako mnogo elemenata. Broj elemenata u proizvoljnoj bazi konačno-dimenzionalnog prostora V naziva se dimenzija prostora V i označava se sa dim V.

Prostor iz primera 1 i 2 ima dimenziju n. Elementi toga prostora se nazivaju n-dimenzionalni vektori.

Podskup vektorskog prostora koji je i sam vektorski prostor nad istim poljem i u odnosu na iste operacije, naziva se potprostor polaznog prostora. Potprostor je pravi ako se ne poklapa sa celim prostorom. Lineal nad proizvoljnim skupom vektora jednog prostora je potprostor toga prostora koji može u specijalnim slučajevima da se poklapa sa celim prostorom.

Neka su U i V vektorski prostori nad istim poljem S i neka je $\mathfrak{A}$ jedno preslikavanje iz U u V. Preslikavanje $\mathfrak{A}$ naziva se linearni operator prostora U u prostor V ako za svako $x, y \in U$ i svako $\alpha \in S$ važe relacije $\mathfrak{A}(x+y) = \mathfrak{A}(x) + \mathfrak{A}(y)$,

$\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha\mathcal{A}(x)$. U specijalnom slučaju može da bude $U = V$.

Ako su U_1 i U_2 potprostori vektorskog prostora V, zbir $U_1 + U_2$ ovih potprostora definiše se pomoću jednakosti

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}.$$

Ako je $U = U_1 + U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, tada se U naziva direktan zbir potprostora U_1 i U_2, što se označava sa $U = U_1 \oplus U_2$.

Potprostor U je invarijantan potprostor linearnog operatora $\mathcal{A}$ ako $\mathcal{A}$ preslikava vektore iz U u vektore istog tog potprostora.

Neka je V vektorski prostor nad poljem S kompleksnih ili realnih brojeva. Posmatrajmo preslikavanje koje svakom paru vektora x,y iz V pridružuje jedan kompleksni broj. Taj broj označavaćemo sa (x,y). Neka za svako $x,y,z \in V$ i za svako $\alpha \in S$ važe sledeće relacije:

$$(x,y) = \overline{(y,x)}, \quad (\alpha x,y) = \alpha(x,y),$$

$$(x + y,z) = (x,z) + (y,z),$$

$$(x,x) \geqslant 0, \quad (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ovako definisano preslikavanje (x,y) naziva se skalarni proizvod vektora x i y.

U realnom vektorskom prostoru R^n skalarni proizvod vektora $x = (x_1,x_2,\dots,x_n)$ i $y = (y_1,y_2,\dots,y_n)$ može se definisati pomoću formule

$$(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Vektorski prostor u kome je definisan skalarni proizvod naziva se unitarni vektorski prostor. U unitarnom vektorskom prostoru definiše se, za svaki vektor x, norma $\|x\|$ vektora x pomoću $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Skup $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ vektora unitarnog vektorskog prostora je ortogonalan ako je $(x_i,x_j) = 0$ kadgod je $i \neq j$. Ovaj skup se naziva ortonormiran ako je ortogonalan i ako svi vektori iz skupa imaju normu jednaku 1. Baza vektorskog prostora čiji vektori obrazuju ortonormiran skup naziva se ortonormirana baza.

Ortogonalni komplement $U^{\perp}$ potprostora U vektorskog prostora V je skup svih onih vektora iz V koji su ortogonalni na sve vektore iz U.

1.5. Primeri i zadaci

1. Sedam prijatelja, koji odlaze na odmor, dogovore se da će svaki od njih da se javi razglednicom trojici od ostalih šest. Da li je mogućno organizovati korespondenciju tako da svako piše onim prijateljima koji će i njemu pisati?

Odgovor. Ne, jer bi u suprotnom slučaju postojao regularan, neorijentisa graf stepena 3 sa 7 čvorova, što je nemogućno.

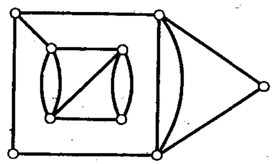
2. Opisati grafove kod kojih je stepen svakog čvora manji od 3.

3. Konstruisati regularan graf stepena 3 sa 2n čvorova ($n \geqslant 3$) koji nema trouglova.

4. Da li postoji graf sa 6 čvorova čiji su stepeni: 2,3,3,4,4,4?

5. Da li se grane grafa na sl. 1 mogu orijentisati tako da se dobije jako povezan digraf?

6. Neka je X skup od n elemenata ($n \geqslant 1$). Skup svih podskupova skupa X ćemo uzeti za skup čvorova grafa G, pri čemu su dva čvora iz G spojena granom ako i samo ako je presek odgovarajućih podskupova skupa X prazan. Odrediti broj čvorova i broj grana grafa G.



sl. 1

Rešenje. Skup čvorova grafa G je partitivni skup skupa X te je broj čvorova jednak 2^n (videti zadatak 25). Ako jedan podskup skupa X ima i ($i > 0$) elemenata, od preostalih n-i elemenata skupa X može se obrazovati 2^{n-i} podskupova disjunktnih sa posmatranim podskupom. Čvor koji odgovara praznom skupu ($i=0$) je povezan granama sa svih ostalih 2^n-1 čvorova i petljom sa samim sobom jer je $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$. Pošto podskupova sa i elemenata ima tačno $\binom{n}{i}$, graf G ima

$$\frac{1}{2}\left(2^n - 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 2^{n-i}\right) = \frac{1}{2}(3^n - 1)$$

grana i jednu petlju.

7. Odrediti hromatski broj Petersenovog grafa.

8. Neka je G graf sa n čvorova. Odrediti hromatski broj grafa G u funkciji od n ako je G: stablo, graf m-tostrane piramide,

kontura, kompletan graf, planarna kvadratna mreža strane m.

9. Čvorovi neorijentisanog grafa G_n su označeni sa $1,2,\ldots,2n$. Susedni su sledeći parovi čvorova: $(1,2n)$, $(i,i+1)$ $(i = 1,2,\ldots,2n-1)$, $(i,i+n)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Odrediti hromatski broj grafa G_n.

10. Iz potpunog grafa sa n čvorova odstranjeno je k $(2k \leq n)$ medjusobno nesusednih grana. Odrediti hromatski broj ovako dobijenog grafa.

11. Odrediti hromatski broj regularnog grafa stepena 1, i hromatski broj njegovog komplementa.

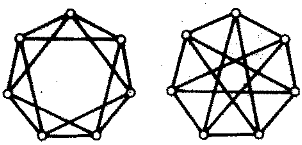
12. Dokazati da je broj 1-faktora grafa K_{2n} jednak $\frac{(2n)!}{2^n n!}$.

13. Dokazati da se Petersenov graf ne može rastaviti na tri 1-faktora.

14. Iz šahovske table su odstranjena dva polja koja su jedno drugom simetrična u odnosu na središnju tačku table. Da li je mogućno pokriti preostali deo šahovske table dominama tako da svaka domina pokriva dva susedna polja?

15. Na konsultacijama je bilo 20 studenata. Rešavano je 20 zadataka. Svaki student je rešio dva zadatka i svaki zadatak su rešila po dva studenta. Dokazati da je mogućno organizovati prikaz zadataka tako da svaki student prikaže po jedan zadatak koji je rešio i da svi zadaci budu prikazani. Od čega zavisi broj ovakvih načina prikazivanja?

Uputstvo. Posmatrati regularan bihromatski graf stepena 2 koji ima po 20 čvorova svake od boja. Prikazivanje zadataka na opisani način je mogućno ako i samo ako gornji graf sadrži bar jedan 1-faktor. Kako su sve komponente tog grafa konture parnih dužina, 1-faktor postoji. Broj načina prikazivanja zadataka zavisi od broja kontura u gornjem grafu.



sl. 2

16. Ispitati da li su grafovi sa sl. 2 izomorfni.

17. Koliko ima prirodnih brojeva sa najviše šest cifara u kojima se javlja cifra 1?

18. Koliko postoji brojeva sa najviše n cifara u kojima se pojavljuju cifre 3 ili 5?

19. Odrediti broj kombinacija k-te klase skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ u kojima se nalazi tačno s elemenata iz skupa $\{1,2,\ldots,m\}$, pri čemu je $0\leq s\leq k\leq m\leq n$.

20. Koliko postoji n-torki sastavljenih od brojeva $1,2,\ldots,m$ koje imaju tačno k $(1\leq k\leq n)$ koordinata različitih od jedne fiksirane n-torke opisanog oblika?

21. Na koliko načina je mogućno podeliti $m+n+p$ predmeta u tri grupe tako da u prvoj bude m predmeta, u drugoj n predmeta i u trećoj p predmeta?

22. U koliko se permutacija skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ izmedju brojeva 1 i n nalazi tačno r drugih brojeva?

23. Na koliko je načina mogućno postaviti n ljudi i n žena za okrugli sto tako da dve žene ne sede jedna do druge?

24. Od dva niza različitih brojeva $(a_1,a_2,\ldots,a_m)$ i $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ formiramo rasporede od $n+m$ elemenata tako da prvih p $(p\leq m)$ u rasporedu budu elementi iz prvog niza a poslednjih q $(q\leq n)$ iz drugog niza. Prebrojati ove rasporede.

25. Dokazati da partitivni skup skupa od n elemenata ima 2^n elemenata.

26. Koliko elemenata ima skup Y^X svih preslikavanja iz X u Y?

27. Koliko postoji grupoida $(X,\cdot)$, gde je X skup sa n elemenata?

28. Dokazati da u svakom grupoidu postoji najviše jedan neutralni element.

29. Odrediti neutralne elemente za grupoide $(P(X),\cup)$ i $(P(X),\cap)$ gde je $P(X)$ partitivni skup nekog skupa X a $\cup$ i $\cap$ označavaju uniju i presek skupova.

30. Ispitati da li skup $\{1,i,-1,-i\}$ snabdeven operacijom množenja kompleksnih brojeva obrazuje grupu.

31. Neka je S skup svih realnih brojeva oblika $a+b\sqrt{2}$, gde su a i b racionalni brojevi. Dokazati da je $(S,+,\cdot)$ polje.

32. Konstruisati tablice sabiranja i množenja za polje $GF(3)$.

33. Dokazati da u polju karakteristike p važi relacija

$$(x+y)^p = x^p + y^p.$$

34. Neka je P_n skup polinoma stepena ne većeg od n nad poljem S. U skupu P_n je sabiranje polinoma, kao i množenje polinoma elementom polja S, definisano na uobičajeni način. Ispitati da

li P_n predstavlja vektorski prostor nad S.

35. Dokazati da je skup svih realnih neprekidnih funkcija na segmentu $[a,b]$ vektorski prostor nad poljem realnih brojeva R, pri čemu su sabiranje funkcija i množenje funkcije realnim brojem definisani na uobičajeni način.

36. Dokazati da skup automorfizama jednog grafa obrazuje grupu u odnosu na operaciju kompozicije preslikavanja.

37. Dokazati da permutacija menja parnost ako u njoj dva elementa zamene mesta.

2. MATRICE I OPERACIJE SA MATRICAMA

U odeljku 2.1 definišu se matrice kao pravougaone šeme brojeva i uvode razne operacije sa matricama. U 2.2 se matrici pridružuje jedan digraf a zatim se osobine matrica proučavaju uz pomoć pridruženog digrafa.

2.1. Osnovni pojmovi

Pravougaona šema[1)] brojeva oblika

$$
\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{1}
$$

naziva se matrica. U stvari, šemu mogu obrazovati elementi proizvoljnog polja ili neke druge algebarske strukture sa dve operacije. Mi ćemo u ovoj knjizi smatrati, ako ništa posebno nije rečeno, da su matrice šeme realnih ili kompleksnih brojeva. Horizontalni redovi šeme su vrste matrice dok se vertikalni redovi nazivaju kolonama. Matrica (1) ima m vrsta i n kolona te se za nju kaže da je tipa $m \times n$. Brojevi koji obrazuju pravougaonu šemu, koju zovemo matrica, nazivaju se elementi matrice. Kada je matrica data u opštem obliku,(na primer, pomoću (1)), elementi matrice su snabdeveni sa dva indeksa od kojih prvi označava broj vrste u kojoj se element nalazi a drugi broj kolone. Element a_{ij} se nalazi na preseku i-te vrste i j-te kolone. Kaže se još da se taj elemenat nalazi na mestu (i,j) matrice.

---

1) Šeme koje nazivamo matricama često se, umesto sa dva para vertikalnih linija, kako je to učinjeno u ovoj knjizi, označavaju različitim tipovima zagrada (uglaste, oble, vitičaste).

Matrice se obično obeležavaju velikim slovima latinice. Na primer, matricu (1) bismo mogli da označimo slovom A.

Matrica A, umesto sa (1), može da se predstavi pomoću

$$A = \|a_{ij}\|_{m,n} ,$$

što ima isto značenje kao (1).

Ako je $m = n$, matrica A se naziva <u>kvadratna</u> matrica. Ona je tada matrica tipa $n \times n$ ili, kako se još kaže, kvadratna matrica reda n i obeležava se sa $A = \|a_{ij}\|_1^n$. Matrica tipa $1 \times n$ naziva se <u>matrica - vrsta</u> a matrica tipa $n \times 1$ <u>matrica - - kolona</u>. Vektori će se u matričnom računu obično predstavljati pomoću matrica - kolona a ne pomoću n-torki kako je to učinjeno u uvodnom poglavlju.

Kod kvadratne matrice elementi sa jednakim prvim i drugim indeksom, tj. elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ obrazuju <u>glavnu dijagonalu</u> matrice. Elementi $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ obrazuju <u>sporednu dijagonalu</u>. Zbir elemenata sa glavne dijagonale naziva se <u>trag</u> matrice A i obeležava se sa tr A. Dakle,

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

Ako su elementi matrice A brojevi iz polja K kaže se da je A <u>matrica nad poljem K</u>. U daljim izlaganjima pojavljivaće se, kao što je već rečeno, skoro isključivo matrice nad poljem R realnih brojeva (<u>realne</u> matrice) ili matrice nad poljem C kompleksnih brojeva (<u>kompleksne</u> matrice).

Dve matrice su po definiciji <u>jednake</u> ako i samo ako su istog tipa i ako su im odgovarajući elementi jednaki. Dakle, ako je $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$ i $B = \|b_{ij}\|_{p,q}$, onda je $A = B$ ako i samo ako je $m = p$, $n = q$ i $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n)$. Kao i svaka relacija jednakosti, jednakost matrica ima osobine refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti, tj.

$$A = A, \quad A = B \Rightarrow B = A, \quad A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C.$$

Matrica tipa 1×1 se smatra jednakom elementu koji je obrazuje.

Definisaćemo pojam submatrice.

Neka je $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$. Neka je $I = \{i_1, i_2, \ldots i_r\}$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_r)$ jedan podskup skupa $\{1,2,\ldots,m\}$ i neka je

$K = \{k_1, k_2, \ldots, k_s\}$ $(k_1 < k_2 < \ldots < k_s)$ jedan podskup skupa $\{1, 2, \ldots n\}$.

Matrica tipa $r \times s$

$$A_{i_1, i_2, \ldots, i_r}^{k_1, k_2, \ldots, k_s} = A_I^K = \begin{Vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \ldots & a_{i_1k_s} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & & a_{i_2k_s} \\ \vdots & & & \\ a_{i_rk_1} & a_{i_rk_2} & & a_{i_rk_s} \end{Vmatrix}$$

obrazovana od elemenata matrice A, koji se nalaze na presecima vrsta čiji su redni brojevi elementi skupa I i kolona sa rednim brojevima iz K, naziva se <u>submatrica</u> matrice A.

Pošto postoji $\binom{m}{r}$ podskupova I i $\binom{n}{s}$ podskupova K, postoji ukupno $\binom{m}{r}\binom{n}{s}$ submatrica tipa $r \times s$ matrice tipa $m \times n$.

Ako je I = K, dobijena kvadratna submatrica se naziva <u>glavna submatrica</u>. Kvadratna matrica reda n ima $\binom{n}{s}$ glavnih submatrica reda s. Ukupan broj glavnih submatrica (čiji su redovi izmedju 1 i n-1) jednak je

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} = 2^n - 2.$$

Ako je A matrica nad poljem K i $\alpha \in K$, proizvod αA (ili $A\alpha$) definiše se kao matrica koja se dobija od matrice A kada se svaki njen elemenat pomnoži sa α, tj.

$$\alpha \| a_{ij} \|_{m,n} = \| \alpha a_{ij} \|_{m,n}.$$

<u>Sabiranje</u> matrica je definisano za matrice istog tipa. Neka je $A = \| a_{ij} \|_{m,n}$ i $B = \| b_{ij} \|_{m,n}$. Tada je <u>zbir</u> A + B matrica A i B matrica $C = \| c_{ij} \|_{m,n}$ pri čemu je $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

<u>Primer 1</u>.

$$\alpha \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + \beta \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 2\beta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha & \alpha+\beta \\ \beta & \alpha+2\beta \end{Vmatrix}.$$

Matrica (-1) A = -A naziva se <u>suprotna matrica</u> matrice A. <u>Oduzimanje</u> matrica definisano je za matrice istog tipa i ono se izvodi uz pomoć suprotne matrice, tj.

$$A - B = A + (-B).$$

Ako je $A = \| a_{ij} \|_{m,n}$ i $B = \| b_{ij} \|_{m,n}$, onda je A - B = C, gde za matricu $C = \|c_{ij}\|_{m,n}$ važi $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Proizvod AB matrica A i B je definisan samo ako je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice B. Neka je $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$ i $B = \|b_{ij}\|_{n,p}$. Tada je proizvod $AB = C$, gde je $C = \|c_{ik}\|_{m,p}$ i važi jednakost

$$(2) \qquad c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

$$(i = 1,2,\dots,m; \quad k = 1,2,\dots,p).$$

Dakle, u preseku i-te vrste i k-te kolone proizvoda nalazi se broj koji se dobija pomoću elemenata i-te vrste matrice A i elemenata k-te kolone matrice B na opisani način. Zbog pogodnosti u radu, u matrici B smo indekse njenih elemenata označili sa j,k umesto sa i,j, što smo obično činili ranije. Očigledno, izbor simbola za oznaku indeksa elemenata nema uticaja na rezultat. Slično važi za matricu C.

Primer 2.

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x & y \\ z & u \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} ax+bz & ay+bu \\ cx+dz & cy+du \\ ex+fz & ey+fu \end{Vmatrix}.$$

S obzirom na definiciju množenja matrica, matrična jednakost $AB = BA$, koja definiše komutativnost matrica A i B, može biti ispunjena samo ako su A i B kvadratne matrice istog reda. Dakle, matrično množenje je, uopšteno govoreći, nekomutativna operacija. Čak i kvadratne matrice istog reda su, po pravilu, nekomutativne.

Primer 3. Matrice

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$$

nisu komutativne jer je

$$AB = \begin{Vmatrix} 14 & 17 \\ -4 & -5 \end{Vmatrix} \quad \text{a} \quad BA = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 7 \end{Vmatrix}.$$

Nasuprot tome, matrica A i matrica

$$I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

su komutativne jer je $AI = IA$.

2.2. Königov digraf matrice i grafovska interpretacija matričnih operacija

U ovoj knjizi matrice se proučavaju pomoću različitih grafova i digrafova pridruženih matricama.

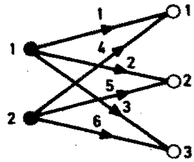
Matrici $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$ pridružuje se digraf $G(A)$ definisan na sledeći način. Čvorovi digrafa $G(A)$ obojeni su crnom i belom bojom. Crni čvorovi se nalaze u uzajamno jednoznačnoj korespondenciji sa vrstama matrice A i označeni su brojevima $1,2,\ldots,m$. Beli čvorovi odgovaraju kolonama matrice A i oni su označeni brojevima $1,2,\ldots,n$. Iz svakog crnog čvora vodi po jedna orijentisana grana do svakog od belih čvorova. Grani koja vodi od crnog čvora i do belog čvora j pridružuje se element matrice a_{ij}. Kaže se da pomenuta grana ima prenos a_{ij}. Digraf $G(A)$ naziva se Königov digraf matrice A.

U sledećim glavama uvešćemo i druge digrafove i grafove koji se pridružuju matricama.

Primer 1. Königov digraf matrice

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix}$$

prikazan je na sl. 1.



sl. 1

Digraf se množi brojem na taj način što se prenos svake njegove grane pomnoži tim brojem. Dakle, Königov digraf matrice αA je jednak $\alpha G(A)$.

Königov digraf je označen digraf. Označeni su mu i čvorovi i grane. Čvorovi su označeni rednim brojevima vrsta i kolona matrice a grane su označene elementima matrice. Königov digraf, pridružen matrici tipa $m \times n$, je tipa $m+n$ jer ima m crnih i n belih čvorova. Sabiranje Königovih digrafova definisano je za digrafove istog tipa. Neka su G_1 i G_2 digrafovi istog tipa. Zbir $G = G_1 + G_2$ je digraf istog tipa u kome je prenos grane koja ide izmedju crnog čvora i i belog čvora j jednak zbiru prenosa odgovarajućih grana digrafova G_1 i G_2. Očigledno važi relacija

$$G(A + B) = G(A) + G(B)$$

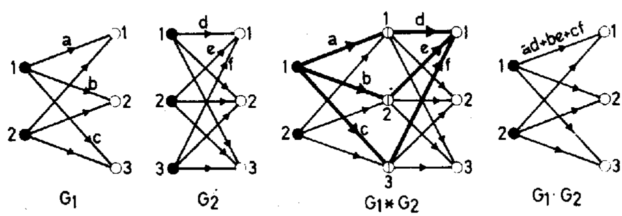
tj. sabiranju digrafova odgovara sabiranje matrica.

Definisaćemo kompoziciju i proizvod obojenih označenih digrafova.

Definicija 1. Neka digraf G_1 ima isto onoliko belih čvorova koliko digraf G_2 ima crnih. Kompozicija $G_1 * G_2$ digrafova G_1 i G_2 se dobija od digrafova G_1 i G_2 na taj način što se svaki beli čvor digrafa G_1 identifikuje sa odgovarajućim (koji je označen istim brojem) crnim čvorom digrafa G_2. Čvorovi nastali identifikacijom crnih i belih čvorova smatraju se po dogovoru obojenim u sivo. Na taj način kompozicija $G_1 * G_2$ sadrži tri grupe čvorova: crne, sive i bele.

Definicija 2. Proizvod $G_1 \cdot G_2$ digrafova G_1 i G_2 je obojeni označeni digraf koji se dobija od kompozicije $G_1 * G_2$ na taj način što se iz digrafa $G_1 * G_2$ udalje sve grane i svi sivi čvorovi a uvedu nove orijentisane grane izmedju crnih i belih čvorova, pri čemu je prenos grane koja vodi od i-tog crnog do k-tog belog čvora jednak zbiru prenosa[1] svih puteva (dužine 2) izmedju tih čvorova u $G_1 * G_2$.

Primer 2. Na sl. 2 prikazana su dva digrafa G_1 i G_2, zajedno



sl. 2

sa svojom kompozicijom $G_1 * G_2$ i proizvodom $G_1 \cdot G_2$. Na slici su označeni prenosi samo nekih grana a putevi iz crnog čvora 1 u beli čvor 1 u $G_1 * G_2$ su posebno istaknuti. Sivi čvorovi su prikazani pomoću kružića sa crtom.

Teorema 1. Digraf pridružen proizvodu matrica jednak je proizvodu digrafova pridruženih matricama koje obrazuju proizvod,

1) Potsetimo se da je prenos puta jednak proizvodu prenosa grana koje obrazuju put.

j. važi formula

$$G(A \cdot B) = G(A) \cdot G(B).$$

Dokaz. Neka je $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$ i $B = \|b_{jk}\|_{n,p}$. Posmatrajmo kompoziciju $G(A) * G(B)$. Od crnih ka belim čvorovima vode samo putevi dužine dva (preko sivih čvorova). Posmatrajmo put od i-tog crnog do k-tog belog čvora koji prolazi kroz sivi čvor j. Njegov prenos je $a_{ij}b_{jk}$. Zbir prenosa svih puteva od i-tog crnog do k-tog belog čvora je

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},$$

a to je po definiciji matričnog množenja element matrice AB na mestu (i,k).

Ovim je teorema dokazana.

Interesantna i veoma važna osobina Königovog digrafa se sastoji u tome što se grane sa prenosom 0 mogu smatrati nepostojećim. Prilikom predstavljanja digrafa crtežom takve se grane mogu izostaviti. Ovo važi i za kompoziciju digrafova. Naime, uklanjanjem ovakvih grana eliminišu se neki putevi u kompoziciji ali su prenosi tih puteva jednaki 0. Na taj način izostavljanje pomenutih grana ne utiče na formiranje proizvoda digrafova. S druge strane, izostavljanje grana dovodi do uprošćavanja crteža digrafa što je naročito značajno kod matrica koje sadrže veliki broj elemenata jednakih 0.

Primetimo da je kompozicija digrafova definisana i za digrafove koji pored belih i crnih sadrže i neke druge čvorove.

Teorema 2. Kompozicija obojenih označenih digrafova je asocijativna operacija.

Teorema 3. Proizvod obojenih označenih digrafova je asocijativna operacija.

Teorema 4. Proizvod matrica je asocijativna operacija.

Ove teoreme se redom dobijaju jedna iz druge na očigledan način tako da izostavljamo njihove formalne dokaze.

Teorema 5. Množenje matrica je distributivno u odnosu na sabiranje matrica, tj. važe jednakosti

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC.$$

Dokaz. Ovim jednakostima odgovaraju sledeće jednakosti za digrafove:

$$G(A)(G(B) + G(C)) = G(A)G(B) + G(A)G(C),$$

$$(G(A) + G(B))G(C) = G(A)G(C) + G(B)G(C),$$

koje su očigledne.

Definicija 3. Matrica O prozvoljnog tipa čiji su svi elementi jednaki O naziva se nula-matrica.

Nula-matrica tipa $m \times n$ obeležava se i sa O_{mn}. Kvadratna nula-matrica reda n se može obeležiti sa O_n.

Definicija 4. Kvadratna matrica kod koje su elementi na glavnoj dijagonali jednaki 1 dok su joj ostali elementi jednaki 0 naziva se jedinična matrica.

Jedinična matrica reda n obeležava se sa I_n. Ako nije potrebno posebno istaći red matrice, jedinična matrica se obeležava sa I.

Ako je A matrica tipa $m \times n$, važe jednakosti

$$O + A = A + O = A,$$

$$I_m A = A, \quad AI_n = A.$$

Prva, dvostruka relacija, u kojoj se podrazumeva da su matrice A i O istog tipa, je trivijalna; druge dve se neposredno dobijaju kada se matrice predstave odgovarajućim Königovim digrafovima.

Dakle, nula-matrica je neutralni element za sabiranje a jedinična matrica neutralni element za matrično množenje.

Jedinična matrica se pogodno predstavlja Kroneckerovim simbolom δ_{ij}, koji se definiše pomoću

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{za } i = j \\ 0, & \text{za } i \neq j. \end{cases}$$

Primenom ovog simbola imamo $I_n = \left\| \delta_{ij} \right\|_1^n$.

Definicija 5. Transponovana matrica matrice

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

je matrica

$$A^T = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

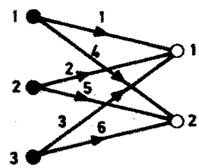
Drugim rečima, vrste matrice A postaju kolone matrice A^T, i obrnuto, kolone matrice A postaju vrste matrice A^T.

Digraf $G(A^T)$ matrice A^T dobija se od digrafa G(A) na taj način što beli čvorovi postaju crni a crni postaju beli, pri čemu i sve grane menjaju orijentaciju.

Primer 3. Za matricu A iz primera 1 transponovana matrica A^T glasi

$$A^T = \left\| \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{matrix} \right\|$$

i njen digraf je prikazan na sl.3.



sl. 3

Teorema 6. Za operaciju transponovanja matrica važe sledeće jednakosti:

$$(A^T)^T = A, \quad (A+B)^T = A^T + B^T, \quad (\alpha A)^T = \alpha A^T \quad (\alpha \in C),$$
$$(AB)^T = B^T A^T, \quad (A_1 A_2 \dots A_k)^T = A_k^T \dots A_2^T A_1^T.$$

Dokaz. Prve tri jednakosti su očigledne. Navešćemo dokaz četvrte jednakosti.

Posmatrajmo digrafove $G(A) * G(B)$ i $G(B^T) * G(A^T)$. Ako u prvom digrafu beli i crni čvorovi promene uloge i sve grane izmene orijentaciju, što odgovara transponovanju matrica, ovi digrafovi postaju identični a odatle izlazi $(AB)^T = B^T A^T$.

Peta jednakost se dokazuje matematičkom indukcijom po broju k pri čemu se primenjuje četvrta jednakost.

Ovim je teorema dokazana.

Definicija 6. Matrica A je simetrična ako je $A^T = A$.

Simetrična matrica mora biti kvadratna i njeni elementi su simetrični u odnosu na glavnu dijagonalu, tj. $a_{ij} = a_{ji}$.

<u>Definicija 7</u>. Matrica A je koso-simetrična[1] ako je $A^T = -A$. A je kvadratna matrica i važi jednakost $a_{ij} = -a_{ji}$. Za j=i dobijamo $a_{ii} = 0$.

Kvadratna matrica je <u>dijagonalna</u> ako su svi elementi izvan njene glavne dijagonale jednaki nuli. Ako se duž glavne dijagonale nalaze elementi $d_1, d_2, \ldots, d_n$, dijagonalna matrica se može prikazati u obliku $\|d_i \delta_{ij}\|_1^n$ ili pomoću specijalne oznake $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Kőnigov digraf dijagonalne matrice sadrži n grana sa prenosima $d_1, d_2, \ldots, d_n$, pri čemu grana sa prenosom d_i povezuje i-ti crni sa i-tim belim čvorom.

Ako je $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = d$ dijagonalna matrica se naziva <u>skalarnom</u> matricom i može se predstaviti pomoću jedinične matrice u obliku dI_n.

Kvadratna matrica je <u>gornje (donje) trougaona</u> ako su svi njeni elementi ispod(iznad) glavne dijagonale jednaki nuli. Interesantno je ispitati kakvu osobinu imaju odgovarajući digrafovi. (Videti zadatak 2 iz 2.5).

<u>Primer 4</u>. <u>Permutaciona</u> matrica P je kvadratna matrica kod koje se u svakoj vrsti i svakoj koloni nalazi tačno jedna jedinica dok su ostali elementi matrice jednaki nuli. Ako je P reda n, digraf G(P) ima n crnih i n belih čvorova. Iz svakog crnog čvora izlazi tačno jedna grana i u svaki beli čvor ulazi tačno jedna grana. Prenosi grana jednaki su 1.

Ako je A kvadratna matrica, proizvod AP je matrica koja se dobija iz A izvesnom permutacijom njenih kolona. Zaista, ako u G(P) vodi grana iz i-tog crnog čvora u j-ti beli čvor, u grafu G(AP) sve grane koje su u G(A) vodile u i-ti čvor sada vode u j-ti čvor.

Na sličan način se uvidja da množenje matrice A permutacionom matricom P s leva dovodi do neke permutacije vrsta matrice A.

Ako se želi da se u matrici A izvrši istovremena permutacija vrsta i kolona, i to ista permutacija za vrste i ko-

---

1) Umesto termina "koso-simetrična" može se upotrebiti i termin "anti-simetrična".

lone treba formirati proizvod P^TAP. Interesantno je uporediti digraf $G(A)$ sa digrafom $G(P^TAP)$. Neka permutaciona matrica P prevodi i-tu vrstu (kolonu) u j-tu vrstu (kolonu). Sve grane koje su izlazile (odnosno, ulazile) u čvor i u $G(A)$ izlaze (odnosno, ulaze) u čvor j u $G(P^TAP)$. Ovo možemo shvatiti kao da čvor koji je nosio oznaku i u $G(A)$ nosi sada oznaku j u $G(P^TAP)$. Dakle, digraf $G(P^TAP)$ je u suštini isti kao i digraf $G(A)$; samo su oznake čvorova sada nešto drugačije, tj. došlo je do permutacije oznaka čvorova. Dakle, $G(P^TAP)$ je izomorfan sa $G(A)$.

<u>Primer 5</u>. Proizvod dve permutacione matrice je permutaciona matrica.

2.3. <u>Računanje sa matricama razbijenim na blokove</u>

Ako je matrica A podeljena na više submatrica mrežom pravih koje su paralelne sa njenim vrstama i kolonama, kaže se da je A matrica <u>razbijena na blokove</u> ili <u>blok-matrica</u>.

<u>Primer 1</u>. Neka je

$$A = \left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}\right\| .$$

Matrica A se može podeliti na blokove, na primer, na sledeći način:

$$A = \left\|\begin{array}{c:cc:c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hdashline 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right\| .$$

Blokovi matrice A su matrice

$$B_1 = \|1\|, \quad B_2 = \|2 \quad 3\|, \quad B_3 = \|4\|,$$

$$B_4 = \left\|\begin{matrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{matrix}\right\|, \quad B_5 = \left\|\begin{matrix} 6 & 7 \\ 7 & 6 \\ 3 & 2 \end{matrix}\right\|, \quad B_6 = \left\|\begin{matrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{matrix}\right\| .$$

Matrica A se može prikazati na sledeći način:

$$A = \begin{Vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ B_4 & B_5 & B_6 \end{Vmatrix}.$$

<u>Primer 2</u>. Matrica $A = \begin{Vmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{Vmatrix}$ predstavlja, u stvari, matricu

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

U opštem slučaju matricu razbijenu na blokove možemo predstaviti na sledeći način:

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1\nu} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2\nu} \\ \vdots & & & \\ A_{\mu 1} & A_{\mu 2} & & A_{\mu\nu} \end{Vmatrix},$$

gde su A_{ij} $(i = 1,2,\ldots,\mu;\ j = 1,2,\ldots,\nu)$ matrice-blokovi.

Ako je α broj, tada je očigledno

$$\alpha A = \begin{Vmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \cdots & \alpha A_{1\nu} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & & \alpha A_{2\nu} \\ \vdots & & & \\ \alpha A_{\mu 1} & \alpha A_{\mu 2} & & \alpha A_{\mu\nu} \end{Vmatrix}.$$

Ako su A i B matrice istog tipa i ako su na isti način razbijene na blokove, tada je

$$A + B = \begin{Vmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1\nu}+B_{1\nu} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & & A_{2\nu}+B_{2\nu} \\ \vdots & & & \\ A_{\mu 1}+B_{\mu 1} & A_{\mu 2}+B_{\mu 2} & & A_{\mu\nu}+B_{\mu\nu} \end{Vmatrix},$$

što se takodje neposredno proverava.

Da bismo ispitali množenje matrica razbijenih na blokove, posmatrajmo matrice $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$ i $B = \|b_{jk}\|_{n,p}$.

Neka su one razbijene na blokove na sledeći način:

$$A = \begin{Vmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1\nu} \\ M_{21} & M_{22} & & M_{2\nu} \\ \vdots & & & \\ M_{\mu 1} & M_{\mu 2} & & M_{\mu\nu} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} N_{11} & N_{12} & \cdots & N_{1\lambda} \\ N_{21} & N_{22} & & N_{2\lambda} \\ \vdots & & & \\ N_{\nu 1} & N_{\nu 2} & & N_{\nu\lambda} \end{Vmatrix}.$$

Ovom rastavljanju na blokove odgovaraju sledeće particije prirodnih brojeva koji predstavljaju dimenzije matrica

$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_\mu$, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_\nu$, $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_\lambda$.

Neka je skup crnih čvorova digrafa $G(A)$ podeljen u podskupove prema particiji za m i neka je skup belih čvorova podeljen prema particiji za n. Neka su u $G(B)$ crni i beli čvorovi redom podeljeni prema particiji za n i p. Kada se formira $G(A) * G(B)$ i $G(A) \cdot G(B)$, dobija se za proizvod AB formula

$$AB = \begin{Vmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1\lambda} \\ P_{21} & P_{22} & & P_{2\lambda} \\ \vdots & & & \\ P_{\mu 1} & P_{\mu 2} & & P_{\mu\lambda} \end{Vmatrix},$$

gde za blokove P_{ik} važi formula

(1) $$P_{ik} = M_{i1}N_{1k} + M_{i2}N_{2k} + \ldots + M_{i\nu}N_{\nu k}.$$

Drugim rečima, množenje matrica razbijenih na blokove vrši se, formalno gledano, po istom pravilu kao množenje matrica.

Da bismo dokazali formulu (1) posmatrajmo puteve dužine 2 koji u $G(A) * G(B)$ vode iz m_i crnih a završavaju se u p_k belih čvorova, što odgovaraju bloku P_{ik}. Ti putevi, naravno, prolaze kroz sive čvorove. Podelimo n sivih čvorova u podskupove prema particiji $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_\nu$. Putevi koji vode preko prvih n_1 sivih čvorova odgovaraju matrici $M_{i1}N_{1k}$. Slično tome, putevi koji prolaze kroz drugih n_2 sivih čvorova daju sabirak $M_{i2}N_{2k}$ formule (1), itd.

Ovim je formula (1) dokazana.

Dakle, uopšte, imajući u vidu sabiranje matrica, množenje matrice brojem i množenje matrica, može se reći da se računanje sa matricama razbijenim na blokove obavlja po istim pravilima kao računanje sa matricama.

Blok-matrica je <u>kvazi-dijagonalna</u> (<u>kvazi-trougaona</u>) ako su svi blokovi izvan (ispod ili iznad) glavne dijagonale jednaki nula- matricama. Umesto kvazi-dijagonalna kaže se i blok-dijagonalna matrica.

2.4. Kroneckerov i Hadamardov proizvod matrica

U ovom odeljku definisaćemo još neke operacije nad matricama i proučićemo neke njihove osobine.

Kroneckerov proizvod $A \otimes B$ matrica $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$ i $B = \|b_{ij}\|_{p,q}$ je matrica

$$\begin{Vmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & & a_{2n}B \\ \vdots & & & \\ a_{m1}B & a_{m2}B & & a_{mn}B \end{Vmatrix}$$

tipa $mp \times nq$ koja se dobija od matrice A kada se svaki njen element a_{ij} zameni matricom $a_{ij}B$. Pri tome je matrica $a_{ij}B$ blok matrice $A \otimes B$.

Primer 1.

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} \otimes \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} = \left\Vert \begin{array}{cc:cc} 4 & 3 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ \hdashline 12 & 9 & 16 & 12 \\ 6 & 3 & 8 & 4 \end{array} \right\Vert .$$

Neposredno se mogu verifikovati osobine Kroneckerovog proizvoda izražene formulama:

(1) $$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C),$$

(2) $$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T,$$

(3) $$\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}A\ \mathrm{tr}B,$$

(4) $$\mathrm{sum}(A \otimes B) = \mathrm{sum}(A)\ \mathrm{sum}(B),$$

gde sum(X) označava sumu svih elemenata matrice X. U formuli (3) A i B su kvadratne matrice.

Na osnovu (1), Kroneckerov proizvod je asocijativna operacija. Ovaj proizvod nije komutativna operacija. Na primer, matrice iz primera 1 uzete u drugom poretku daju

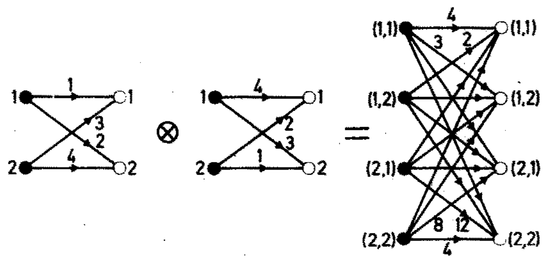
$$\begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} \otimes \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} = \left\Vert\begin{array}{cc:cc} 4 & 8 & 3 & 6 \\ 12 & 16 & 9 & 12 \\ \hdashline 2 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \end{array}\right\Vert ,$$

što se razlikuje od ranije dobijene matrice.

Medjutim, za Kroneckerov proizvod važi jedna osobina koja je srodna sa komutativnošću. Prethodno ćemo opisati Königov digraf matrice $A \otimes B$.

Posmatrajmo Königove digrafove $G(A)$, $G(B)$ matrica $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$ i $B = \|b_{ij}\|_{p,q}$. Königov digraf $G(A \otimes B)$ matrice $A \otimes B$ ima mp crnih i nq belih čvorova. Crni čvorovi se identifikuju (odnosno obeleženi su) sa uredjenim parovima crnih čvorova digrafova $G(A)$ i $G(B)$, pri čemu je prva komponenta crni čvor iz $G(A)$ a druga komponenta crni čvor iz $G(B)$. Na sličan način beli čvorovi digrafa $G(A \otimes B)$ označeni su sa uredjenim parovima belih čvorova digrafova $G(A)$ i $G(B)$. Crni čvor (i,k) povezan je sa belim čvorom (j,r) granom čiji je prenos jednak proizvodu prenosa grane koja u $G(A)$ povezuje crni čvor i sa belim čvorom j i prenosa grane koja u $G(B)$ povezuje crni čvor k sa belim čvorom r, tj. prenos pomenute grane iz (i,k) u (j,r) jednak je $a_{ij}b_{kr}$. Tako je definisan, paralelno sa Kroneckerovim proizvodom matrica, i Kroneckerov proizvod digrafova. Uvešćemo oznaku $G(A \otimes B) = G(A) \otimes G(B)$. (Videti takodje 11.5.)

Primer 2. Na sl. 1 su prikazani digrafovi matrica iz primera 1. Radi izbegavanja prenatrpanosti crteža prenosi nekih grana nisu posebno označeni.



sl.1

Teorema 1. Postoji permutaciona matrica P takva da je $P^T(A\otimes B)\,P = B\otimes A$.

Dokaz. Digrafi $G(A\otimes B)$ i $G(B\otimes A)$ su očigledno izomorfni (isti) ali su im čvorovi označeni različitim oznakama. Na osnovu primera 4 iz 2.2, vrste i kolone matrice $A\otimes B$ mogu se permutovati (primenjuje se ista permutacija na vrste i kolone) tako da se dobija $B\otimes A$.

Ovim je teorema dokazana.

Pomoću digrafova pridruženih matrici i na druge načine može se dokazati i sledeća teorema.

Teorema 2. Ako proizvodi AC i BD postoje, važi formula $(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD)$.

Hadamardov proizvod $A\circ B$ matrica $A = \|a_{ij}\|_1^n$ i $B = \|b_{ij}\|_1^n$ je matrica $C = \|c_{ij}\|_1^n$, gde je $c_{ij} = a_{ij}\, b_{ij}$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$. Hadamardov proizvod je komutativna i asocijativna operacija.

Hadamardov proizvod $A\circ B$ je glavna submatrica Kroneckerovog proizvoda $A\otimes B$.

Direktna suma $A\dot{+}B$ matrica A i B je matrica

$$\begin{Vmatrix} A & O \\ O & B \end{Vmatrix}.$$

Operacija $\dot{+}$ je asocijativna ali nije komutativna.

Direktnoj sumi matrica odgovara unija digrafova koja se definiše na sledeći način. Unija $G_1 \cup G_2$ digrafova (odnosno, grafova) G_1 i G_2 je digraf (odnosno, graf) kod koga je skup čvorova (grana) jednak uniji skupova čvorova (grana) digrafova G_1 i G_2. Unija je komutativna operacija u skupu neoznačenih grafova.

2.5. Primeri i zadaci

1. Neka su promenljive iz skupa $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ funkcije promenljivih iz skupa $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ a neka su ove poslednje sa svoje strane funkcije promenljivih iz skupa $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. Tada je, kao što je poznato iz analize

funkcija više promenljivih,

$$(1)\qquad \frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \frac{\partial z_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \frac{\partial z_i}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_k} \,.$$

Ako se uvedu funkcionalne matrice

$$A_{Z,U} = \left\| \frac{\partial z_i}{\partial u_j} \right\|_{m,n}, \quad A_{U,X} = \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\|_{n,p}, \quad A_{Z,X} = \left\| \frac{\partial z_i}{\partial x_k} \right\|_{m,p},$$

na osnovu (1) važi relacija

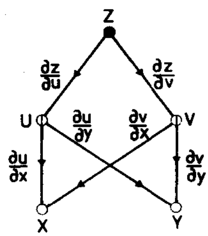
$$(2)\qquad A_{Z,X} = A_{Z,U}\, A_{U,X} \,.$$

Relaciju (1), odnosno (2), možemo pregledno interpretirati na kompoziciji $G(A_{Z,U}) * G(A_{U,X})$ digrafova pridruženih matricama $A_{Z,U}$ i $A_{U,X}$. Naime, parcijalni izvod $\frac{\partial z_i}{\partial x_k}$ jednak je zbiru prenosa puteva (dužine 2) koji vode iz crnog čvora i u beli čvor k. Na sl. 1 je prikazana kompozicija odgovarajućih digrafova u slučaju kada je $z = z(u,v)$ i $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Posmatrajući puteve dužine 2 dobijamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

(Ideju za ovaj primer dao je D.Dj.Tošić.)



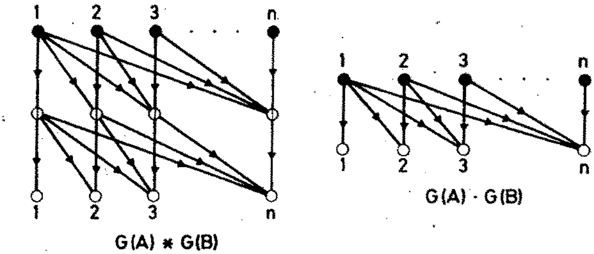
sl. 1

2. Neka su A,B gornje (donje) trougaone kvadratne matrice reda n. Dokazati da je matrica AB takodje gornje(donje) trougaona.

<u>Rešenje</u>. Posmatraćemo najpre slučaj kada su A,B gornje trougaone matrice. Odgovarajući digrafovi su dati na sl. 2. S obzirom na položaj čvorova, grane "idu na desno".

Kako Königov digraf gornje trougaone matrice sadrži samo grane sa prenosom a_{ij}, gde je $i \leqslant j$, kao i da Königov digraf sa gornjom osobinom odgovara samo gornje trougaonoj matrici, rešenje zadatka neposredno sleduje.

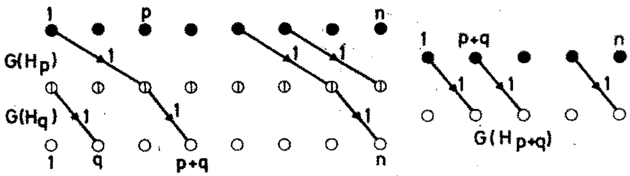
Za donje trougaone matrice do rezultata se može doći istom tehnikom, a mogućno je primenom transponovanja iskoristiti gore dobijeni rezultat.



sl. 2

3. Neka je $H_r = \| h_{ij} \|_1^n$, gde je $h_{ij} = \delta_{i,j-r+1} (r \geqslant 1)$. Dokazati da je $H_p H_q = H_{p+q} (p+q \leqslant n)$.

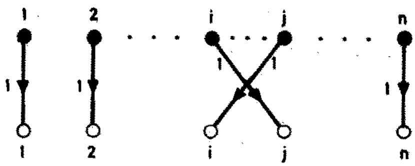
<u>Rešenje</u>. Rezultat direktno sleduje sa sl. 3.



sl. 3

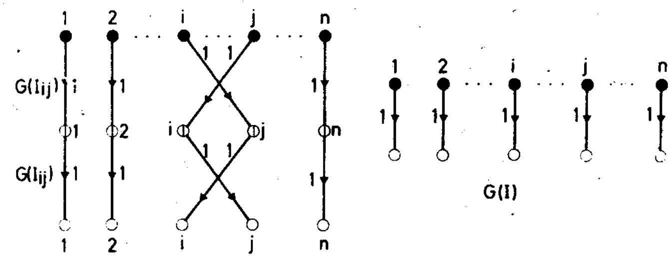
4. Neka je I_{ij} matrica koja se dobija iz jednačine matrice I medjusobnom zamenom njene i-te i j-te vrste. Tada važe jednakosti $I_{ij}^2 = I$, $I_{ik} I_{kj} I_{ji} = I_{kj} = I_{jk}$.

<u>Rešenje</u>. Zadatak ćemo rešiti primenom Königovih digrafova. Königov digraf matrice I_{ij} dat je na sl. 4.

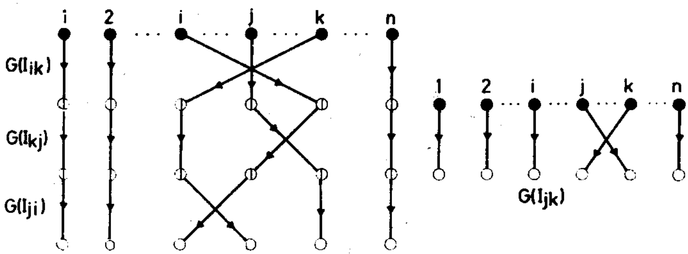


sl. 4

Sada se gornja tvrdjenja mogu proveriti pomoću sledećih očiglednih transformacija Königovih digrafova, videti sl. 5 i 6.



sl. 5



sl. 6

(Na sl. 6 su radi pojednostavljenja izostavljene neke oznake. Tako, na primer, sve grane sa slike imaju prenos 1.)

5. Dokazati da je proizvod dve dijagonalne matrice dijagonalna matrica.

6. Neka je

$$H = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 0 \end{array} \right\|$$

kvadratna matrica[1] reda n. Ako je A takodje kvadratna matrica reda n, odrediti matrice AH i HA. (Matrica H se naziva pomoćna jedinična matrica.)

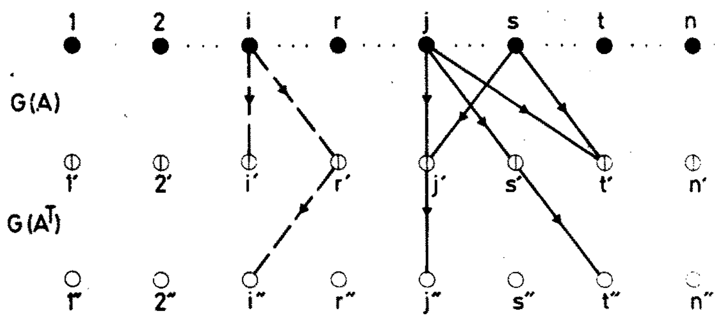
7. Ispitati tačnost formule

$$tr(AB) = tr(BA).$$

8. Ispitati da li skup matrica fiksiranog tipa nad poljem K obrazuje vektorski prostor nad poljem K u odnosu na operacije sabiranja matrica i množenja matrica elementom polja K.

9. Rešiti matričnu jednačinu $AA^T = aA$ $(a \neq 0)$, u skupu svih (0,1)-matrica (tj. matrica čiji su elementi jednaki 0 ili 1).

Rešenje. Očigledno je da A mora biti kvadratna matrica, a parametar a prirodan broj. S obzirom da je AA^T simetrična matrica, to je i A simetrična matrica. Potražimo sada proizvod $AA^T(=B)$ pomoću digrafova (sl. 7).



sl. 7

Neka je najpre $a_{ii} = 0$, tj. ne postoji grana ii′ u G(A). Sada u G(A) ne postoji ni grana ir′ za neko r, jer bismo u protivnom u G(A) imali granu ir′ a u $G(A^T)$ granu r′i″ pa bi važilo $b_{ii} \geq a_{ir}^2 = 1$, što je u kontradikciji sa $b_{ii} = a \cdot a_{ii} = 0$. Znači čvor i je izolovan u G(A).

Neka je sada $a_{jj} = 1$, tj. postoji grana jj′ u G(A). Za $a > 1$ neka postoji i grana, recimo, js′. Tada je $a_{js} = 1$, pa, s obzirom na simetriju matrice A, i $a_{sj} = 1$, tj. postoji grana

---

1) Ovde i dalje u knjizi smatraćemo da su elementi matrice koji nisu posebno označeni jednaki 0.

sj' u $G(A)$. Dalje neka postoje grane js' i st' u $G(A)$. Na osnovu gornjeg sada postoji i grana ts' u $G(A)$, odnosno $s't''$ u $G(A^T)$, pa je $b_{jt} \geqslant a_{js}a_{st} = 1$ a zbog $b_{jt} = aa_{jt}$ sleduje da je $a_{jt} = 1$, tj. postoji grana jt' u $G(A)$. Primetimo još da je za $a_{jj} = 1$ zbog $b_{jj} = aa_{jj} = a$ stepen čvora j jednak a. Na osnovu gornjeg sleduje da su komponente digrafa $G(A)$ izolovani čvorovi i potpuni bihromatski digrafovi sa $a+a$ čvorova, pa je $A = P(J_a \dotplus J_a \dotplus \dots \dotplus J_a \dotplus O_n)P^T$, gde je P proizvoljna permutaciona matrica a J_a kvadratne matrice reda a čiji su svi elementi jednaki 1. (Rešio S.Simić.)

10. Rešiti matričnu jednačinu $AA^T = a(J - A)$ $(a \neq 0)$, u skupu $(0,1)$-matrica (J je matrica čiji su svi elementi jednaki 1).

Rešenje. Slično kao u prethodnom zadatku A mora biti kvadratna i simetrična matrica, a parametar a prirodan broj. Neka je dalje $B = AA^T$. Za $a_{ii} = 1$ dobija se $b_{ii} \geqslant a_{ii}^2 = 1$, što je u kontradikciji sa $b_{ii} = a(1 - a_{ii}) = 0$, pa je uvek $a_{ii} = 0$. Znači A se može shvatiti i kao matrica susedstva (videti 7.4) neorijentisanog grafa bez petlji. Kako je $b_{ii} = a$, to je odgovarajući graf regularan stepena a. Ako bi isti graf imao trougao čiji su čvorovi i,j,k, tada bi s jedne strane bilo $b_{ij} \geqslant a_{ik}a_{jk} = 1$, dok je s druge strane $b_{ij} = a(1 - a_{ij}) = 0$ (kontradikcija). Stoga pomenuti graf nema trouglova. Uzmimo sada da je $a_{ij} = 0$. Tada je $b_{ij} = a(1 - a_{ij}) = a$ pa je za tačno a vrednosti k $a_{ik}a_{jk} = 1$, odnosno, $a_{ik} = a_{jk} = 1$. Znači, ako su i i j nesusedni čvorovi, tada oni imaju a zajedničkih suseda. Sada je očigledno pomenuti graf jednak $K_{a,a}$ dok je $A = P(J_{2a} - (J_a \dotplus J_a))P^T$, gde je P proizvoljna permutaciona matrica. (Zadatak i rešenje S.Simića.)

11. Dokazati da se svaka kvadratna matrica može predstaviti u vidu zbira jedne simetrične i jedne koso-simetrične matrice.

12. Neka su veličine $x_1,x_2,\dots,x_m$ u vezi sa veličinama $y_1,y_2,\dots,y_n$ pomoću relacija

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n , \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n , \\ &\vdots \\ x_m &= a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n . \end{aligned} \tag{1}$$

Ako se uvedu matrice

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{Vmatrix}, \quad Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix}$$

i matrica $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$, relacije (1) se mogu predstaviti matričnom relacijom $X = AY$. Relacije (1), odnosno odgovarajuća matrična relacija, definišu jednu linearnu transformaciju. Kaže se da pomoću ove linearne transformacije veličine $y_1, y_2, \ldots, y_n$ prelaze (transformišu se) u veličine $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Matrica A naziva se matrica linearne transformacije.

Neka se sada veličine $z_1, z_2, \ldots, z_p$ transformišu u veličine $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pomoću matrice $B = \|b_{jk}\|_{n,p}$. Tada pored relacije $X = AY$ važi i relacija $Y = BZ$, gde je Z matrica-kolona čiji su elementi $z_1, z_2, \ldots, z_p$. Eliminacijom matrice Y dobijamo $X = ABZ$. Zbog asocijativnosti matričnog množenja zaključujemo da je matrica rezultujuće linearne transformacije jednaka proizvodu matrica pojedinih linearnih transformacija.

Ovaj primer objašnjava motivaciju za uvodjenje matričnog množenja i za zasnivanje teorije matrica uopšte.

13. Posmatrajmo bilinearne transformacije

$$x = \frac{ay + b}{cy + d}, \quad y = \frac{ez + f}{gz + h}$$

i pridružimo im, redom, matrice

$$A = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} e & f \\ g & h \end{Vmatrix}.$$

Eliminacijom veličine y dobijamo x kao bilinearnu funkciju od z:

$$x = \frac{(ae+bg)z + (af+bh)}{(ce+dg)z + (cf+dh)}.$$

Interesantno je da je matrica

$$\begin{Vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{Vmatrix},$$

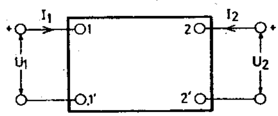
pridružena ovoj bilinearnoj transformaciji, jednaka proizvodu matrica A i B.

14. Komutator kvadratnih matrica A i B koje su istog reda je matrica

$$[A,B] = AB - BA .$$

Matrice su komutativne ako i samo ako je njihov komutator jednak nula-matrici.

15. U teoriji električnih kola proučavaju se i električne mreže sa dva para krajeva. U analizi ovakvih mreža koriste se ulazni napon U_1, ulazna struja I_1, izlazni napon U_2 i izlazna struja I_2 (videti sl. 8). Dve od ovih veličina izražavaju se pomoću druge dve. Pod odredjenim uslovima jednačine koje daju ovu vezu su linearne. Na primer, važe relacije



sl.8

(1)
$$U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2 ,$$
$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2 .$$

Ako se uvedu matrice

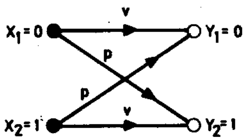
$$A = \left\| \begin{matrix} U_1 \\ I_2 \end{matrix} \right\| , \quad B = \left\| \begin{matrix} I_1 \\ U_2 \end{matrix} \right\| , \quad H = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\| ,$$

relacije (1) se mogu napisati u obliku A = HB.

16. Matrice se pojavljuju i u analizi statističkog modela <u>diskretnog telekomunikacionog kanala bez memorije</u>. Na ulazu kanala pojavljuju se otpremni kodni simboli iz skupa $x_1, x_2, \dots, x_m$. Ovi simboli izazivaju na izlaznom kraju kanala pojavljivanje simbola $y_1, y_2, \dots, y_n$. Verovatnoća da ulazni simbol x_i izazove na drugom kraju pojavljivanje simbola y_j je jednaka p_{ij}. Matrica $P = \|p_{ij}\|_{m,n}$ naziva se <u>kanalna</u> matrica. Ako se X i Y matrice-kolone, čiji elementi redom predstavljaju verovatnoće pojavljivanja pojedinih ulaznih, odnosno izlaznih, simbola, važi relacija X = PY. Ako se izlazni simboli jednog kanala pojavljuju na ulazu drugog kanala, rezultujuća kanalna matrica je jednaka proizvodu kanalnih matrica pojedinih kanala. Zbog ovoga se kanalne matrice veoma pogodno predstavljaju pomoću Königovih digrafova.

Razmotrimo slučaj binarnog simetričnog kanala. Jedini ulazni i izlazni simboli su 0 i 1. Kanalna matrica ima oblik

$$\begin{Vmatrix} v & p \\ p & v \end{Vmatrix}.$$



sl. 9

v je verovatnoća vernog prenosa simbola a p je verovatnoća pogreške u prenosu. Königov digraf ove matrice je prikazan na sl. 9. Ukoliko bi se više binarnih simetričnih kanala nadovezivali jedan na drugi trebalo bi posmatrati kompoziciju odgovarajućih Königovih digrafova.

17. Za blok-matricu $A = \|M_{ij}\|_{\mu,\nu}$ može se definisati kondenzovani Königov digraf. On ima μ crnih i ν belih čvorova, pri čemu se za prenos grane izmedju crnog čvora i i belog čvora j uzima matrica M_{ij}. Proučiti osobine kondenzovanih digrafova i dovesti ih u vezu operacijama nad blok-matricama.

18. Dokazati da je AA^T simetrična matrica, gde je A proizvoljna matrica.

19. Proveriti tačnost formule sum $(M \circ N) = \operatorname{tr} MN^T$.

20. Funkcija $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_{ij}x_ix_j$ naziva se kvadratna forma promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Kvadratna forma se može predstaviti pomoću x^TAx, gde je $A = \|a_{ij}\|_1^n$ simetrična matrica i $x^T = \|x_1x_2\ldots x_n\|$. Izraz $\dfrac{x^TAx}{x^Tx}$ naziva se Rayleighev količnik. Izraz x^TAy, gde je $y^T = \|y_1y_2\ldots y_n\|$ naziva se bilinearna forma.

21. Neka je $\mathfrak{A}$ linearan operator vektorskog prostora U dimenzije m u vektorski prostor V dimenzije n. Neka su U i V prostori nad istim poljem i neka vektori $u_1, u_2, \ldots, u_m$ obrazuju bazu prostora U, a vektori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bazu prostora V. Očigledno važe relacije

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}u_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n\ , \\
\mathfrak{A}u_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n\ , \\
&\ \vdots \\
\mathfrak{A}u_m &= a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \ldots + a_{mn}v_n\ .
\end{aligned}$$

Zbog linearnosti operator $\mathfrak{A}$ je potpuno odredjen matricom $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$. Matrica A naziva se <u>matrica operatora</u> $\mathfrak{A}$ u odnosu na zadate baze.

Ako $\mathfrak{A}$ preslikava prostor U u samog sebe, tada je $V = U$. Za zadatu bazu prostora U operator $\mathfrak{A}$ je potpuno odredjen jednom kvadratnom matricom. Za fiksiranu bazu n-dimenzionalnog vektorskog prostora postoji uzajamno jednoznačna korespondencija izmedju kvadratnih matrica reda n (nad istim poljem) i linearnih operatora koji taj prostor preslikavaju u samog sebe.

22. Navesti primer dve matrice, koje su različite od nula-matrice, a čiji je proizvod jednak nula-matrici.

3. STEPENI MATRICA

U asocijativnom grupoidu $(X,\cdot)$ za svaki element $a \in X$ i za svaki prirodni broj n definiše se stepen a^n pomoću $a^1 = a$ i $a^n = a\cdot a^{n-1}$ za $n > 1$. Definicijom se takodje usvaja $a^o = e$, gde je e neutralni element grupoida (ukoliko postoji). Negativni stepeni definišu se u grupoidima sa invertibilnim elementima o čemu će biti reči u 5.

Skup kvadratnih matrica datog reda nad nekim poljem je asocijativni grupoid s obzirom na množenje matrica. Za kvadratnu matricu A definiše se $A^o = I$, $A^1 = A$ i $A^n = A\cdot A^{n-1}$ za $n > 1$.

Ako je

$$P(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

polinom stepena n, pri čemu su promenljive x i koeficijenti $a_o, a_1, \dots, a_n$ elementi polja S, onda se matrični polinom $P(A)$ po kvadratnoj matrici A (nad istim poljem) definiše pomoću

$$P(A) = a_o A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_n I.$$

3.1. Grafovska interpretacija stepena matrica

U ovom poglavlju kvadratnoj matrici $A = \|a_{ij}\|_1^n$ pridružićemo opet jedan digraf. Digraf G^A, pridružen matrici A, sadrži čvorove označene sa $1,2,\dots,n$ i sve moguće grane (i petlje), pri čemu je grani koja vodi iz čvora i u čvor j pridružen element a_{ij}. Veličina a_{ij} naziva se prenos grane koja vodi iz i u j. Prenos puta u digrafu G^A je po definiciji jednak proizvodu prenosa grana koje obrazuju put. Stepeni matrice A se mogu odrediti pomoću digrafa G^A.

Teorema 1. Element $a_{ij}^{(k)}$ iz i-te vrste i j-te kolone matrice A^k jednak je zbiru prenosa svih puteva dužine k koji u digrafu G^A iz čvora i vode u čvor j.

Dokaz 1. Dokaz ćemo izvesti indukcijom po k. Za $k=1$ teorema je tačna na osnovu definicije digrafa G^A. Pretpostavimo da teorema važi za $k = s \geq 1$. Po definiciji matričnog množenja, element iz matrice $A^{s+1} = AA^s$ jednak je

$$a_{ij}^{(s+1)} = a_{i1}a_{1j}^{(s)} + a_{i2}a_{2j}^{(s)} + \dots + a_{in}a_{nj}^{(s)}.$$

Neka su $r_1, r_2, \dots, r_k$ čvorovi do kojih se može doći iz čvora i putem dužine 1. Tada je

$$(1) \qquad a_{ij}^{(s+1)} = a_{ir_1}a_{r_1j}^{(s)} + a_{ir_2}a_{r_2j}^{(s)} + \dots + a_{ir_k}a_{r_kj}^{(s)}.$$

Za svaki od čvorova $r_1, r_2, \dots, r_k$ (recimo r_p) a_{ir_p} predstavlja prenos puta dužine 1 od čvora i do čvora r_p. Po induktivnoj pretpostavci $a_{r_pj}^{(s)}$ predstavlja zbir prenosa puteva dužine s koji iz r_p vode u j. Zbir prenosa puteva dužine s+1 koji iz i vode u j preko r_p je onda $a_{ir_p}a_{r_pj}^{(s)}$. Sumiranjem ovakvih izraza za svako r_p za zbir prenosa svih puteva dužine s+1 koji iz i vode u j dobija se izraz (1).

Ovim je dokaz teoreme završen.

Dokaz 2. Posmatrajmo kompoziciju $G(A)*\dots*G(A)$ koju obrazuju k kopija grafa G(A). Suma prenosa puteva dužine k od crnog čvora i do belog čvora j jednaka je elementu $a_{ij}^{(k)}$ matrice A^k. Medjutim, svakom putu dužine k izmedju i i j iz pomenute kompozicije odgovara u G^A jedan put iste dužine, izmedju čvorova i i j, istog prenosa.

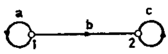
Ovim je dokaz završen.

Teorema 1 ima razne interesantne primene i posledice.

Pomoću teoreme 1 se naročito efikasno mogu odrediti stepeni matrica koje sadrže veliki broj elemenata jednakih 0. Naime, prilikom crtanja grafa G^A mogu se izostaviti grane čiji je prenos 0 jer su prenosi puteva koji više ne postoje u grafu posle ovog izostavljanja ionako jednaki 0. Na taj način graf se uprošćava te se u nekim slučajevima mogu lako da uoče svi interesantni putevi u grafu. Ilustrovaćemo ovu tehniku nalaženja stepena kvadratnih matrica na jednom prostom primeru.

Primer 1. Digraf G^A pridružen matrici

$$A = \begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{Vmatrix}$$



sl. 1

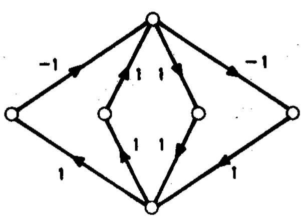
predstavljen je na sl. 1. Iz čvora 1 u čvor 1 vodi samo jedan put dužine k i njegov prenos jednak je a^k. Slično važi za čvor 2. Iz 1 u 2 vodi k puteva dužine k. Ovi putevi se sastoje od i petlji ($i = 0,1,2,\dots,k-1$) sa prenosom a, grane sa prenosom b i k-l-i petlji sa prenosom c, pri čemu je prenos puta $a^i b c^{k-1-i}$. Stoga je element na mestu (1,2) u matrici A^k jednak $b\sum_{i=0}^{k-1} a^i c^{k-1-i}$. Iz čvora 2 u čvor 1 ne vodi ni jedan put. Stoga je

$$A^k = \begin{Vmatrix} a^k & b(a^{k-1} + a^{k-2}c + \dots + c^{k-1}) \\ 0 & c^k \end{Vmatrix}.$$

Kvadratna matrica se naziva <u>nilpotentna</u> ako postoji prirodan broj k takav da je $A^k = 0$. Proizvoljna matrica je <u>nenegativna</u> ako su joj svi elementi nenegativni brojevi (o nenegativnim matricama biće govora i u poglavlju 8). Navešćemo jedan potreban i dovoljan uslov da nenegativna kvadratna matrica A bude nilpotentna.

Prema teoremi 1, A je nilpotentna matrica ako i samo ako postoji prirodan broj k takav da u digrafu G^A ne postoji ni jedan put dužine k. S druge strane, ako u G^A postoji bar jedan kružni put (ili orijentisana kontura, što se svodi na isto) onda u G^A postoje i putevi proizvoljne dužine. Stoga se dolazi do sledećeg zaključka.

<u>Teorema 2</u>. Nenegativna kvadratna matrica A je nilpotentna ako i samo ako pridruženi graf G^A ne sadrži nijednu orijentisanu konturu.



sl. 2

Ova teorema se ne može proširiti na matrice koje nisu nenegativne. Na sl. 2 je predstavljen digraf jedne nilpotentne matrice koji sadrži konture[1].

---

1) Ovaj primer je konstruisao Z.Lukić.

Primer 2. Neka se G^A dobija od jednog stabla kada se njegove grane orijentišu na proizvoljan način. Pošto G^A ne sadrži orijentisane konture, matrica A je nilpotentna bez obzira na veličinu elemenata koji su različiti od nule.

Vidi se da je nilpotentnost nenegativnih matrica osobina koja ne zavisi od prenosa grana u digrafu G^A, nego samo od strukture digrafa. Postoje i druge odobine matrica koje zavise samo od činjenice da li su pojedini elementi jednaki ili različiti od 0 a ne i od veličine elemenata različitih od 0. Takve osobine se na prirodan način opisuju pomoću grafova.

Opisaćemo sada i jednu primenu teoreme 1 u teoriji verovatnoće.

Primer 3. Razni slučajni procesi mogu se predstaviti sledećim modelom.

Neka je G digraf sa **n** čvorova koji sadrži sve moguće grane (i petlje). Zamislimo da se po granama digrafa (uvek u smeru strelica) kreće na slučajan način neki objekt - nazovimo ga čestica. Čestica se normalno nalazi u jednom od čvorova digrafa i u trenucima vremena $t = 1,2,\ldots$ ona po nekoj od grana digrafa prelazi u drugi (ne obavezno različiti) čvor. Ako se čestica u trenutku $t = t_o$ nalazi u čvoru i, ona u trenutku $t = t_o + 1$ prelazi u stanje j sa verovatnoćom p_{ij}. Veličine p_{ij} su definisane za svako $i,j = 1,2,\ldots,n$, one su nezavisne od veličine t_o i za njih važe relacije

$$p_{ij} \geqslant 0 \quad (i,j = 1,2,\ldots,n),$$

$$p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{in} = 1 \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Matrica $P = \| p_{ij} \|_1^n$ naziva se matrica verovatnoća prelaza na jedan korak. Digraf G za koga je definisana matrica P naziva se Markovljev lanac. Ako se čestica nalazi u čvoru i, kaže se da se Markovljev lanac nalazi u stanju i.

Matrice kod kojih je zbir elemenata u svakoj vrsti jednak 1 nazivaju se stohastičke matrice. Matrica P je stohastička matrica.

Interesantno je da se prouči ponašanje Markovljevog lanca u toku dužeg vremenskog perioda. Naročito su interesantni slučajevi kada su pojedine od veličina p_{ij} jednake 0.

Veličine p_{ij} možemo smatrati prenosima odgovarajućih grana u digrafu G a digraf G shvatiti kao digraf pridružen matrici P. Dakle, verovatnoća da čestica, nalazeći se u čvoru i, krene duž neke od grana koje izlaze iz čvora i jednaka je prenosu te grane. Stoga se grane čiji je prenos jednak 0 mogu izostaviti prilikom crtanja digrafa G. Na taj način digraf dobija pregledniju strukturu a bitne osobine Markovljevog lanca upravo i zavise od strukture ovako reduciranog digrafa.

Verovatnoća da čestica iz čvora i za k koraka predje u čvor j po nekom fiksiranom putu (dužine k) očigledno je jednaka proizvodu prenosa grana duž tog puta, tj. jednaka je prenosu tog puta. Na osnovu teoreme 1 zaključujemo onda da je verovatnoća da čestica iz stanja i za k koraka predje u stanje j (po bilo kom putu) jednaka elementu iz i-te vrste i j-te kolone matrice P^k.

Ponašanje Markovljevog lanca je stoga odredjeno strukturom matrica P^k $(k = 1,2,\ldots)$. Skoro sve interesantne osobine matrice P^k mogu se odrediti pomoću strukture pridruženog digrafa, dok prenosi grana utiču samo na kvantitativne karakteristike Markovljevog lanca. (Videti poglavlje 8.)

Navešćemo i jednu primenu teoreme 1 u teoriji konačnih automata.

Primer 4. Konačni automati vrše preslikavanje konačnih nizova izvesnih simbola (ulazni simboli) u konačne nizove nekih drugih simbola (izlazni simboli). Konačni automat, odnosno preslikavanje koje on vrši, pogodno se opisuje jednim digrafom G. Čvorovi digrafa $1,2,\ldots,n$ predstavljaju stanja automata. Na automat deluju simboli ulazne azbuke u diskretnim trenucima vremena $t = 0,1,2,\ldots$. Ako se u odredjenom trenutku automat nalazi u stanju i a na ulazu automata deluje simbol ulazne azbuke x_j, automat prelazi u novo stanje koje je odredjeno sa i i x_j. Pri tom se na izlazu automata pojavljuje simbol izlazne azbuke odredjen takodje sa i i x_j.

Neka je $X = \{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ skup svih ulaznih simbola. Ulazne simbole $x_1,x_2,\ldots,x_m$ ćemo u daljem tekstu shvatiti i kao realne promenljive. Skup ulaznih simbola proširujemo i praznim simbolom koji označava da na ulazu automata u datom trenutku ne deluje nijedan simbol. Prazni simbol označavamo sa

0 koji ćemo interpretirati po potrebi i kao broj nula. Ako bilo koji od simbola $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}$ prevodi automat iz stanja i u stanje j, grani digrafa koja povezuje čvorove i i j pridružujemo kao prenos zbir

$$(2) \qquad a_{ij} = x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_s}.$$

Ako je $a_{ij} = 0$, prelaz iz stanja i u stanje j je nemoguć jer 0 označava odsustvo signala na ulazu te automat ostaje u stanju i. Matrica $A = \|a_{ij}\|_1^n$ naziva se <u>matrica prelaza automata</u>.

Posmatrajmo jedan put dužine k izmedju čvorova i i j. Prenos toga puta je proizvod k veličina oblika (2). Ako se k zbirova oblika (2) izmnoži, dobija se zbir proizvoda od po k veličina skupa X. Smatrajmo da je množenje elemenata skupa X nekomutativno tako da se u svakom proizvodu od po k faktora zadržao prvobitni poredak faktora. Ako je $x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_k}$ jedan od sabiraka iz prenosa puta, niz ulaznih simbola $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}$ prevodi automat iz stanja i u stanje j. Dakle, zbir prenosa svih puteva dužine k izmedju čvora i i čvora j daje skup svih nizova od po k ulaznih simbola koji prevode automat iz čvora i u čvor j. Na osnovu teoreme 1, element na poziciji (i,j) k-tog stepena A^k matrice prelaza A predstavlja zbir proizvoda od po k elemenata skupa X, a svaki takav proizvod odredjuje jedan niz od k simbola koji prevode automat iz stanja i u stanje j. Svi takvi nizovi su odredjeni ovim putem.

3.2. <u>Cikličke matrice</u>

<u>Ciklička</u> matrica je matrica oblika

$$A = \begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & & & & \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_{n-1} & a_0 \end{Vmatrix}.$$

Vrste ove matrice su <u>cikličke permutacije</u> prve vrste.

Da bismo dobili jednu reprezentaciju cikličke matrice, posmatrajmo matricu reda n

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & I_{n-1} \\ I_1 & 0 \end{Vmatrix} .$$

Pridruženi digraf G^B je orijentisana kontura sa n čvorova. Putevi dužine k u G^B vode redom iz čvora 1 u čvor k+1, iz 2 u k+2,..., i to uvek samo po jedan takav put. Stoga je

$$B^k = \begin{Vmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{Vmatrix} .$$

Na osnovu ovoga dobijamo

$$A = a_0 I + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_{n-1} B^{n-1},$$

tj. svaka ciklička matrica je polinom permutacione matrice B.

3.3. <u>Varijacije sa ograničenjima</u>

Kao što je rečeno u odeljku 1.2, varijacija sa ponavljanjem k-te klase skupa $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je svaka uredjena k-torka $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$, pri čemu je $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ $(j = 1, \dots, k)$.

Broj varijacija k-te klase sa ponavljanjem skupa od n elemenata $\bar{V}_n^k = n^k$.

Pri formiranju varijacija sa ponavljanjem moguće je postaviti izvesna ograničenja. Posmatraćemo varijacije sa ograničenjima sledećeg tipa. Za svako $x_i \in X$ skup X je dekomponovan na dva disjunktna skupa X_{i1} i X_{i2}. U dopustivim varijacijama iza elemenata x_i, koji nije poslednji u varijaciji, može se nalaziti samo element iz skupa X_{i1}. Prvi element u varijaciji ne podleže ograničenjima.

Par (x_i, x_j) susednih elemenata varijacije je dopustiv par ako je $x_j \in X_{i1}$. Kvadratna matrica $A = \|a_{ij}\|_1^n$, u kojoj je $a_{ij} = 1$ ako je (x_i, x_j) dopustiv par i $a_{ij} = 0$ u suprotnom slučaju, je matrica dopustivih parova. Matrica $\tilde{A}$, koja se dobija od A zamenom jedinica nulama i nula jedinicama, naziva se matrica zabrana.

Odredićemo broj $\bar{V}_n^k(A)$ varijacija sa ponavljanjem k-te klase skupa od n elemenata pri datoj matrici dopustivih parova A.

U digrafu G^A sve grane imaju prenos jednak 1 pa stoga i svi putevi imaju prenos 1. Zbir prenosa puteva dužine k koji spajaju čvor i i čvor j u G^A je jednak broju tih puteva. Na osnovu teoreme 1 iz 3.1 može se onda reći da je broj puteva dužine k izmedju čvorova i i j u G^A jednak elementu $a_{ij}^{(k)}$ iz i-te vrste i j-te kolone matrice A^k. Kao što je objašnjeno u 1.2, varijacija k-te klase se može interpretirati kao put dužine k-1 u digrafu, te je broj varijacija k-te klase sa ponavljanjem pri datoj matrici dopustivih parova A jednak broju puteva dužine k-1 u digrafu G^A.

Ako sum Y označava zbir svih elemenata matrice Y, važi formula

$$\bar{V}_n^k(A) = \operatorname{sum} A^{k-1}, \quad k = 1,2,\ldots .$$

3.4. Diferencne jednačine i stepeni kvadratnih matrica

Stepeni kvadratnih matrica se mogu odrediti i pomoću tzv. diferencnih jednačina.

Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ (beskonačni) niz (kompleksnih) brojeva. Jednačina

(1) $$F(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) = 0 \quad (n = 1,2,\ldots),$$

gde je F proizvoljna funkcija, povezuje k+1 susednih članova niza i naziva se diferencna jednačina k-tog reda. Rešenje ove jednačine je funkcija $a_n = f(n)$ koja je identički zadovoljava.

Mi ćemo razmatrati homogenu linearnu diferencnu jednačinu k-tog reda sa konstantnim koeficijentima. To je jednačina oblika

(2) $$b_0 a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \ldots + b_{k-1} a_{n+1} + b_k a_n = 0 \quad (n = 1,2,\ldots)$$

gde su $b_0,b_1,\ldots,b_k$ kompleksni brojevi. Pretpostavimo da postoji rešenje jednačine (2) oblika $a_n = t^n$. Posle unošenja ovog izraza u (2) i posle skraćivanja sa t^n dobija se

(3) $$b_0t^k + b_1t^{k-1} + \ldots + b_{k-1}t + b_k = 0.$$

Algebarska jednačina (3) naziva se karakteristična jednačina diferencne jednačine (2). Neka su rešenja $t_1,t_2,\ldots,t_k$ jednačine (3) medjusobno različita. Svaka funkcija $t_1{}^n,t_2{}^n,\ldots,t_k{}^n$ je rešenje diferencne jednačine (2). Može se pokazati da je opšte rešenje (tj. rešenje koje sadrži sva posebna rešenja) jednačine (2) dato formulom

(4) $$a_n = C_1t_1{}^n + C_2t_2{}^n + \ldots + C_kt_k{}^n ,$$

gde su $C_1,C_2,\ldots,C_k$ proizvoljne konstante. Ako su poznati članovi niza $a_1,a_2,\ldots,a_k$, konstante $C_1,C_2,\ldots,C_k$ se mogu jednoznačno odrediti.

Ako je α rešenje reda s jednačine (3), tada svaka od funkcija $\alpha^n,n\alpha^n,n^2\alpha^n,\ldots,n^{s-1}\alpha^n$ predstavlja rešenje jednačine (2). Stoga je u opštem slučaju, opšte rešenje jednačine (2) linearna kombinacija funkcija oblika $n^p\beta^n$, gde β uzima vrednosti korena karakteristične jednačine (3) a za dati koren β parametar p uzima celobrojne vrednosti od 0 do q-1, gde je q red korena β.

Može se pokazati (videti poglavlje 7) da za svaku kvadratnu matricu $A =\|a_{ij}\|_1^n$ postoji polinom $P(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \ldots + b_{k-1}x + b_k$ takav da je $P(A) = 0$. Iz relacije $b_0A^k + b_1A^{k-1} + \ldots + b_{k-1}A + b_kI = 0$ dobija se $b_0A^{n+k} + b_1A^{n+k-1} + \ldots + b_{k-1}A^{n+1} + b_kA^n = 0$. Za proizvoljno i,j tada važi

(5) $$b_0a_{ij}^{(n+k)} + b_1a_{ij}^{(n+k-1)} + \ldots + b_{k-1}a_{ij}^{(n+1)} + b_ka_{ij}^{(n)} = 0.$$

Na taj način se nalaženje n-tog stepena matrice A svodi na rešavanje diferencne jednačine (5) uz dopunske uslove za svaki par indeksa i,j. Ti dopunski uslovi su fiksirani poznavanjem matrica $A^0 = I,A,A^2,\ldots,A^{k-1}$.

Primer 1. Lako se proverava da za matricu $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{Vmatrix}$ važi relacija $A^2 - 5A + 6I = 0$. Karakteristična jednačina odgovarajuće diferencne jednačine $a_{ij}^{(n+2)} - 5a_{ij}^{(n+1)} + 6a_{ij}^{(n)} = 0$ je $t^2 - 5t + 6 = 0$ i njena rešenja su $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. Stoga je opšte rešenje diferencne jednačine jednako $C_1 2^n + C_2 3^n$. Kako svaki element matrice A^n zadovoljava gornju diferencnu jednačinu, dobijamo

$$A^n = \begin{Vmatrix} \alpha_{11}2^n + \beta_{11}3^n & \alpha_{12}2^n + \beta_{12}3^n \\ \alpha_{21}2^n + \beta_{21}3^n & \beta_{22}2^n + \beta_{22}3^n \end{Vmatrix}.$$

Pošto je $A^0 = I$ i $A^1 = A$, dobijamo

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 2\alpha_{11} + 3\beta_{11} & 2\alpha_{12} + 3\beta_{12} \\ 2\alpha_{21} + 3\beta_{21} & 2\alpha_{22} + 3\beta_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{Vmatrix},$$

odakle se dobijaju sve nepoznate veličine. Konačno se dobija

$$A^n = \begin{Vmatrix} 2\cdot 2^n - 3^n & -2^n + 3^n \\ 2\cdot 2^n - 2\cdot 3^n & -2^n + 2\cdot 3^n \end{Vmatrix}.$$

I obrnuto, rešavanje diferencne jednačine reda k može se svesti na odredjivanje n-tog stepena jedne kvadratne matrice reda k. Za odredjivanje stepena ove matrice mogu se, naravno, primeniti i grafovske tehnike.

Diferencna jednačina (1) se može napisati u obliku

(6) $$a_{n+k} = H(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}),$$

a zatim se uvodjenjem veličina $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \ldots, y_n^{(k)}$ pomoću

$$a_n = y_n^{(1)},\ a_{n+1} = y_n^{(2)}, \ldots,\ a_{n+k-1} = y_n^{(k)},$$

svesti na sistem od k diferencnih jednačina prvog reda

(7) $$\begin{aligned} y_{n+1}^{(1)} &= y_n^{(2)} \\ y_{n+1}^{(2)} &= y_n^{(3)} \\ &\;\vdots \\ y_{n+1}^{(k-1)} &= y_n^{(k)} \\ y_{n+1}^{(k)} &= H(n, y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \ldots, y_n^{(k)}). \end{aligned}$$

Posmatrajmo sada opšti sistem homogenih diferencnih jednačina prvog reda sa konstantnim koeficijentima

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad x_{n+1}^{(1)} &= a_{11}x_n^{(1)} + a_{12}x_n^{(2)} + \dots + a_{1k}x_n^{(k)},\\
x_{n+1}^{(2)} &= a_{21}x_n^{(1)} + a_{22}x_n^{(2)} + \dots + a_{2k}x_n^{(k)},\\
&\vdots\\
x_n^{(k)} &= a_{k1}x_n^{(1)} + a_{k2}x_n^{(2)} + \dots + a_{kk}x_n^{(k)}.
\end{aligned}
$$

Ovaj sistem se može napisati u matričnom obliku

$$
(9)\qquad X_{n+1} = AX_n ,
$$

gde je $X_n^T = \|x_n^{(1)}\ x_n^{(2)}\ \dots\ x_n^{(k)}\|$ i $A = \|a_{ij}\|_1^k$.

Iz (9) se dobija

$$
(10)\qquad X_{n+1} = A^n X_1 ,
$$

tj. rešavanje sistema (8) se svodi na nalaženje n-tog stepena matrice A.

Ako jednačina (1) ima oblik (2) uz $b_o = 1$, onda se (6) svodi na

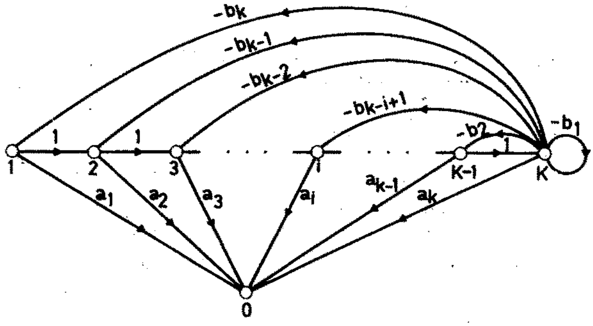
$$
(11)\qquad a_{n+k} = -b_k a_n - b_{k-1}a_{n+1} - \dots - b_1 a_{n+k-1}
$$

pa sistem (7) ima oblik (8), tj. (9), gde je

$$
(12)\qquad A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ -b_k & -b_{k-1} & \dots & & -b_2 & -b_1 \end{Vmatrix}.
$$

Matrica A se naziva <u>prateća matrica</u> polinoma $t^k + b_1 t^{k-1} + \dots + b_{k-1}t + b_k$.

Digraf G^A je prikazan na sl. 1 zajedno sa dopunskim čvorom 0 u koji ulaze grane čiji su prenosi elementi matrice X_1 koja je u našem slučaju odredjena sa $X_1^T = \|x_1^{(1)} x_1^{(2)} \dots$ $\dots x_1^{(k)}\| = \|y_1^{(1)} y_1^{(2)} \dots y_1^{(k)}\| = \|a_1\ a_2\ \dots\ a_k\|$. Putevi dužine n iz čvora 1 do čvora i odredjuju element $a_{1i}^{(n)}$. Ako se ovi pu-



sl. 1

tevi produže granom (i,0), zbir prenosa dobijenih puteva dužine n+1 iz čvora 1 do čvora 0 daje $a_{1i}^{(n)}a_i$. Kako je $\sum_{i=1}^{k} a_{1i}^{(n)}a_i$ na osnovu (10) jednako prvom elementu matrice X_{n+1}, tj. veličini $x_{n+1}^{(1)} = y_{n+1}^{(1)} = a_{n+1}$ dolazimo do sledećeg zaključka koji formulišemo u obliku teoreme.

Teorema 1. Neka je $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ niz kompleksnih brojeva koji zadovoljava linearnu homogenu diferencnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \dots + b_{k-1}a_{n+1} + b_k a_n = 0 \quad (n = 1,2,\dots)$$

i neka su poznati članovi niza $a_1, a_2, \dots, a_k$. Tada je opšti član niza a_n jednak zbiru prenosa puteva dužine n koji iz čvora 1 vode u čvor 0 u digrafu sa sl. 1.

Neki drugi metodi za odredjivanje stepena kvadratnih matrica biće opisani u poglavlju 7.

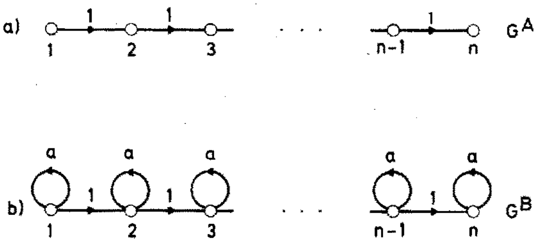
3.5. Primeri i zadaci

1. Odrediti k-te stepene sledećih matrica

a) $A = \|a_{ij}\|_1^n$, gde je $a_{ij} = \delta_{i,j-1}$;

b) $B = \|b_{ij}\|_1^n$, gde je $b_{ij} = a\delta_{ij} + \delta_{i,j-1}$.

Rešenje. Pridružimo matricama A odnosno B odgovarajuće digrafove G^A i G^B (videti sl. 1).



sl. 1

Sada na osnovu teoreme 1 iz 3.1 imamo:

a) $a_{ij}^{(k)} = \delta_{i,j-k} \quad \left(A^k = \|a_{ij}^{(k)}\|_1^n \right)$.

b) $b_{ij}^{(k)} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r} \delta_{i,j-r} \quad \left(B^k = \|b_{ij}^{(k)}\|_1^n \right)$

jer je $B^k = (aI + A)^k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r} A^r$.

Napomena. Deo zadatka b) može se rešiti istim metodom kao i a). Naime, sada važi

$$b_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0 & i > j \\ \binom{k}{j-i} a^{k-j+i} & i \leqslant j \end{cases},$$

jer u G^B postoje izmedju i i j putevi dužine k jedino ako je $0 \leqslant j-i \leqslant k$, a broj takvih puteva je $\binom{k}{j-i}$, dok je njihov prenos a^{k-j+i}.

2. Dokazati implikaciju

$$\mathrm{mod}(a_{ij}) \leqslant M \Rightarrow \mathrm{mod}(a_{ij}^{(k)}) \leqslant n^{k-1} M^k,$$

gde je a_{ij} odnosno $a_{ij}^{(k)}$ element na poziciji (i,j) matrice A, odnosno A^k (n je dimenzija kvadratne matrice A).

Rešenje. Pridružimo matrici A digraf G^A. Tada važi $\mathrm{mod}(a_{ij}^{(k)}) =$

$= \left|\sum_{w_k} C_{ij}(w_k)\right|$, gde je $C_{ij}(w_k)$ prenos puta w_k dužine k izmedju čvorova i i j digrafa G^A, a sumiranje ide po svim putevima w_k. Zbog $\operatorname{mod}(a_{ij}) \leqslant M$ važi $|C_{ij}(w_k)| \leqslant M^k$, pa s obzirom da izmedju čvorova i i j ima najviše n^{k-1} različitih puteva, dokaz implikacije direktno sleduje. Znak jednakosti važi ako i samo ako je $a_{ij} = \pm M (M > 0)$ za k parno ili $a_{ij} = M$ za k neparno.

3. Ako je A matrica reda n i ako je $A^m = 0$ za neki prirodan broj m, dokazati da je takodje $A^n = 0$.

4. Ako je A matrica reda n i ako je n_0 najmanji prirodan broj takav da je $A^{n_0} = 0$, dokazati da je $n_0 \leqslant n$. Kada važi znak jednakosti?

5. Neka je $A = \|a_{ij}\|_1^n$ i neka je $a_{ij} = 0$ za $i \leqslant j$. Tada je $A^n = 0$.

Rešenje. Pridružimo matrici A digraf G^A. Digraf G^A nema petlji i u njemu postoje samo orijentisane grane od čvora i ka čvoru j pod uslovom da je $i > j$. Prema tome, svi putevi u G^A su elementarni i dužine najviše n-1. Na osnovu teoreme 1 iz 3.1 sledi da je $A^n = 0$.

6. Matrica je strogo trougaona ako je trougaona i ako su joj elementi na glavnoj dijagonali jednaki nuli. Proveriti da li je $A^{n-1} = 0$ ako je A strogo trougaona matrica reda n.

7. Date su matrice

$$I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

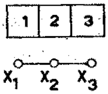
Dokazati da je skup matrica I,-I,A,-A,B,-B,C,-C grupa u odnosu na operaciju matričnog množenja.

8. Odrediti broj načina N_k, da kralj (šahovska figura) izvede niz od k poteza na šahovskoj tabli na sl. 2.

Rešenje. Graf kretanja kralja na ovoj tabli je dat na istoj slici. Zadatak se svodi na odredjuvanje broja svih puteva dužine k u ovom grafu.

Matrica dopustivih parova za ovaj problem varijacija sa ograničenjima je

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$



sl. 2

Nalaženjem A^3 uveravamo se da važi relacija $A^3 = 2A$. Posle množenja sa A^{k-3} dobija se $A^k = 2A^{k-2}$. Sabirajući sve elemente matrice A^k na osnovu teoreme 1 iz 3.1 dobijamo $N_k = 2N_{k-2}$. Pošto je $N_1 = 4$ i $N_2 = 6$, dobija se $N_{2k-1} = 2^{k+1}$ i $N_{2k} = 3 \cdot 2^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

U [17] je rešen isti problem za kretanje kralja po kvadratnoj šahovskoj tabli tipa $n \times n$.

9. Dokazati da je proizvod cikličkih matrica, ukoliko postoji, takodje ciklička matrica.

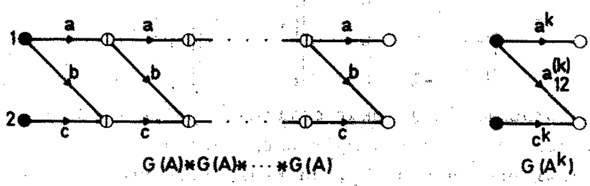
10. Odrediti A^n ako je

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 5 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{Vmatrix}.$$

11. Odrediti polinom matrice $H = \|h_{ij}\|_1^n$, gde je $h_{ij} = \delta_{i,j-1}$.

12. Koristeći Königov digraf $G(A)$ odrediti A^k ako je

$$A = \begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{Vmatrix}.$$



sl. 3

Rešenje. k-tostruka kompozicija digrafa G(A) sa samim sobom i odgovarajući digraf za A^k su prikazani na sl. 3.

Prema tome, $\begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{Vmatrix}^k = \begin{Vmatrix} a^k & a^{k-1}b + a^{k-2}bc + \ldots + bc^{k-1} \\ 0 & c^k \end{Vmatrix}.$

Napomena. Uporediti ovaj zadatak sa primerom 1 iz 3.1.

4. DETERMINANTE

U cilju definisanja <u>determinante</u> kvadratne matrice, kvadratnoj matrici se u ovom poglavlju pridružuje još jedan digraf. Mada se isti cilj može postići i sa već uvedenim digrafom G^A, iz razloga koji će postati jasni kasnije, uvodi se novi digraf.

4.1. Definicija determinante

Kvadratnoj matrici $A = \|a_{ij}\|_1^n$ pridružuje se takodje digraf G_A odredjen na sledeći način. Čvorovi digrafa su numerisani brojevima 1,2,...,n i za svako i,j iz čvora j vodi orijentisana grana u čvor i kojoj je pridružen element a_{ij} matrice A. Elementi glavne dijagonalne matrice A pridruženi su petljama digrafa G_A. Graf G_A se naziva <u>digraf pridružen matrici</u> A ili <u>Coatesov graf</u> matrice A.

U daljem izlaganju od interesa će biti faktori digrafa G_A. Proizvod brojeva pridruženih granama faktora naziva se <u>prenos faktora</u>. Broj pridružen grani nazivaćemo <u>prenos grane</u>. Prenos faktora F obeležavaćemo sa C(F). Broj kontura koje sačinjavaju faktor F je obeležen sa p(F). Sa $\mathfrak{F}$ je označen skup svih faktora digrafa G_A.

Kvadratnoj matrici $A = \|a_{ij}\|_1^n$ pridružuje se takodje broj

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

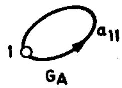
koji se naziva <u>determinanta</u> matrice A i koji se definiše zbirom

$$(1) \qquad \det A = (-1)^n \sum_{F \in \mathfrak{F}} (-1)^{p(F)} C(F) \ ,$$

gde se sumiranje vrši po svim faktorima F digrafa G_A pridruženog matrici A.

Razmotrićemo neke specijalne slučajeve formule (1).

Za n=1 je det $A = |a_{11}|$ a digraf G_A je predstavljen na sl. 1. G_A sadrži samo jedan faktor koji se poklapa sa G_A pa se (1) svodi na det $A = a_{11}$.



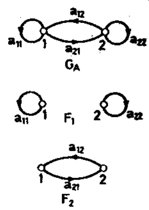
sl. 1

U slučaju n=2 imamo

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

pri čemu je G_A dat na sl. 2 zajedno sa svoja dva faktora F_1 i F_2. Prema (1) dobijamo

$$\det A = (-1)^2((-1)^2 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$



sl. 2

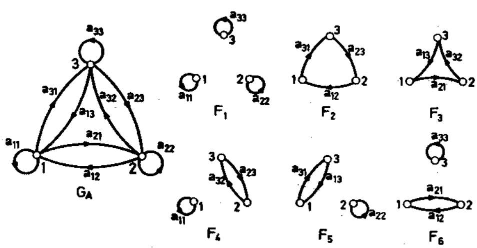
Za determinantu trećeg reda

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

digraf G_A prikazan je na sl. 3 zajedno sa svojih šest faktora.

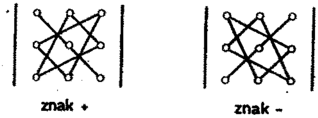
Stoga je

$$\det A = (-1)^3((-1)^3 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{12}a_{31}a_{23} + (-1)^1 a_{21}a_{32}a_{13} +$$
$$+ (-1)^2 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^2 a_{22}a_{13}a_{31} + (-1)^2 a_{33}a_{12}a_{21}) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$



sl. 3

Obično se vrednost determinante trećeg reda izračunava kao algebarski zbir proizvoda od po tri elementa uzeta prema šemi sa sl. 4.



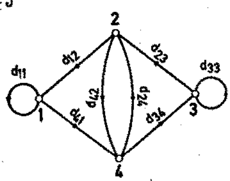
sl. 4

Sa znakom + uzimaju se elementi koji leže na dijagonali $a_{11}a_{22}a_{33}$ i u temenima dva trougla koji imaju po jednu stranu paralelnu ovoj dijagonali. Sa znakom - uzimaju se elementi koji leže na dijagonali $a_{31}a_{22}a_{13}$ i u temenima dva trougla koji imaju po jednu stranu paralelnu ovoj dijagonali.

Interesantno je da se pri crtanju digrafa G_A opet ne moraju crtati grane čiji je prenos jednak 0. Na taj način digraf postaje jednostavniji a formula (1) ostaje u važnosti. Razlog se sastoji u tome što su prenosi faktora koji posle uklanjanja grane sa prenosom 0 ne egzistiraju više u digrafu jednaki 0 jer su oni baš sadržavali uklonjenu granu. Tako, na primer, ako je u determinanti trećeg reda $a_{12}=0$, prenosi faktora F_2 i F_6 su jednaki nuli. Medjutim, posle uklanjanja grane sa prenosom a_{12}, faktori F_2 i F_6 više ne postoje. Ostali faktori ostaju nepromenjeni.

Opisana činjenica omogućava jednostavno izračunavanje determinanata po definiciji, ako determinanta sadrži dovoljno elemenata koji su jednaki 0.

Determinanti $D = \det\|d_{ij}\|_1^n$ može se takodje pridružiti jedan digraf na sličan način. Čvorovi digrafa, kojih ima n, obeleženi su brojevima 1,2,...,n. Za svaki par indeksa i,j za koji je $d_{ij} \neq 0$ povlači se iz čvora j orijentisana grana koja vodi u čvor i. Ovoj grani se pridružuje broj d_{ij}. Ako je $d_{ij}=0$, pomenuta grana se ne povlači. Ovako dobijeni digraf G_D naziva se graf pridružen determinanti D. U stvari, graf pridružen determinanti je Coatesov graf odgovarajuće matrice.



sl. 5

Na primer, determinanti

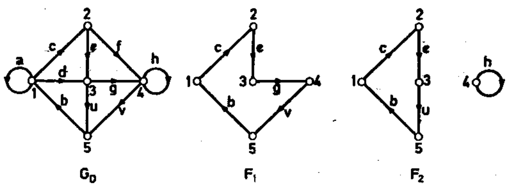
$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 0 & 0 & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

pridružuje se digraf G_D sa sl. 5.

Za determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & g & h & 0 \\ 0 & 0 & u & v & 0 \end{vmatrix}$$

prikazan je na sl. 6 pridruženi digraf G_D i svi njegovi faktori.



sl. 6

Formula (1) daje

$D = bcegv - bceuh.$

Lako se može shvatiti, da je digraf pridružen determinanti jednostavniji (a samim tim i proces odredjivanja determinante kraći) kod determinanti koje sadrže mnogo elemenata jednakih nuli. Značaj postupka sa grafovima sastoji se, izmedju ostalog, u tome što postoje oblasti primene gde se po pravilu pojavljuju baš determinante ovakve vrste (na primer, teorija električnih kola).

4.2. Osobine determinanata

Dokazaćemo sada izvestan broj teorema koje izražavaju osnovne osobine determinanata.

Teorema 1. det A = det A^T.

Dokaz. Digraf G_{A^T} dobija se iz digrafa G_A na taj način što se svim granama iz G_A promeni orijentacija. Stoga svakom faktoru F iz G_A odgovara u G_{A^T} jedan faktor F^T sastavljen od istih grana (koje su sada samo promenile orijentaciju) kao F, tj. sa istim prenosom i istim brojem kontura. Dakle, skup $\mathfrak{F}$ faktora digrafa G_A prelazi u skup $\mathfrak{F}^T$ faktora digrafa G_{A^T}. Na osnovu definicije determinante dobija se

$$\det A^T = (-1)^n \sum_{F^T \in \mathfrak{F}^T} (-1)^{p(F^T)} C(F^T) = (-1)^n \sum_{F \in \mathfrak{F}} (-1)^{p(F)} C(F) = \det A.$$

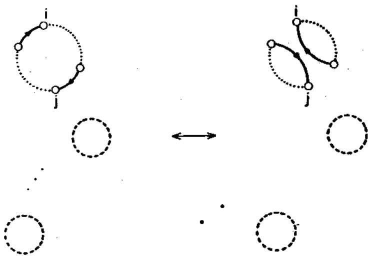
Na osnovu teoreme 1 svaki iskaz koji važi za vrste matrice A važi automatski i za kolone. Stoga ćemo u dokazima sledećih teorema navoditi samo delove koji se odnose na iskaze o vrstama.

Teorema 2. Determinanta se množi brojem ako se svaki element jedne i samo jedne vrste odnosno kolone njene matrice pomnoži tim brojem.

Dokaz. Neka je I skup grana digrafa G_A koje kao preno~~se imaju~~ elemente i-te vrste. I je, dakle, skup grana koje ulaze u čvor i. Svaki faktor digrafa G_A sadrži tačno jednu granu iz skupa I. Pomnožimo prenos svake grane iz skupa I sa λ. Tako dobijamo digraf G_B koji je pridružen determinanti det B koja nastaje od det A kada se u ovoj svaki element i-te vrste pomnoži sa λ. Digrafovi G_A i G_B sadrže iste faktore. Medjutim, svaki od faktora u G_B ima λ puta veći prenos nego u G_A. Stoga je det B = λ det A.

Teorema 3. Ako u matrici A determinante det A medjusobom promene mesta dve vrste (dve kolone), determinanta menja znak.

Dokaz. Neka se u matrici A promene medjusobom i-ta i j-ta vrsta. G_A se ovom transformacijom menja na taj način što grane koje su ulazile u čvor i ulaze sada u čvor j i, obrnuto, grane koje su ulazile u čvor j ulaze sada u čvor i. Grane koje su pre transformacije obrazovale jedan faktor obrazuju i posle transformacije faktor (na osnovu definicije faktora). Prenos ova dva faktora je isti ali se broj kontura u faktoru promenio (videti sl. 1). Ako čvorovi i i j pripadaju istoj konturi broj kontura se povećava za 1 a ako oni pripadaju različitim konturama broj kontura se smanjuje za 1 (sl. 1). Dakle, opisanom transformacijom svi sabirci izraza (1) iz 4.1 menjaju znak.



sl. 1

Ovim je teorema dokazana.

Teorema 4. Ako su u matrici A elementi jedne vrste (odnosno kolone) jednaki elementima neke druge vrste (odnosno kolone), tada je det A = 0.

Dokaz. Ako promenimo mesta pomenutim vrstama, determinanta, na osnovu teoreme 3, menja znak. S druge strane, promenom mesta ovih vrsta nije se ništa promenilo jer su vrste iste. Stoga je -det A = det A, tj. det A = 0.

Teorema 5. Ako su u matrici A elementi jedne vrste (odnosno kolone) proporcionalni elementima neke druge vrste (odnosno kolone), tada je det A = 0.

Dokaz. Ova teorema je neposredna posledica teorema 2 i 4.

Teorema 6. Neka su u matrici A elementi i-te vrste (i fiksno; $1 \leqslant i \leqslant n$) oblika

$$a_{ij} = a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Ako su $A^{(1)}$ (odnosno $A^{(2)}$) matrice koje se dobijaju kada se u matrici A elementi i-te vrste a_{ij} zamene sa $a_{ij}^{(1)}$ (odnosno $a_{ij}^{(2)}$), važi jednakost

$$\det A = \det A^{(1)} + \det A^{(2)}.$$

Dokaz. U dokazu teoreme 2 definisan je skup I. Kako svaki faktor iz G_A sadrži tačno jednu granu iz I, izraz (1) se može napisati u obliku

$$\det A = (-1)^n \sum_{j=1}^{n} \sum_{F \in \mathfrak{F}_j} (-1)^{p(F)} C(F),$$

gde je $\mathfrak{F}_j$ skup faktora koji sadrže granu a_{ij}. Dalje možemo pisati

(1) $$(-1)^n \sum_{F \in \mathfrak{F}_j} (-1)^{p(F)} C(F) = a_{ij}\alpha_{ij},$$

pa se dolazi do formule

(2) $$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij}.$$

Veličine α_{ij} ne zavise od elemenata i-te vrste. Stoga je

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)})\alpha_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}\alpha_{ij} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(2)}\alpha_{ij} = \det A^{(1)} + \det A^{(2)}.$$

Teorema 7. Determinanta ne menja vrednost ako se elementima jedne vrste (odnosno kolone) njene matrice dodaju elementi neke druge vrste (odnosno kolone), pošto se prethodno pomnože zadatim brojem.

Dokaz. Ova teorema je posledica teorema 6 i 5.

Kofaktor (ili algebarski komplement) elementa a_{ij} determinante $D = \det A$ je determinanta

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij} ,$$

gde je D_{ij} determinanta koja se dobija iz D izostavljanjem i-te vrste i j-te kolone.

Determinanta D_{ij} naziva se minor determinante D. Uopšte, determinanta proizvoljne kvadratne submatrice neke matrice naziva se minor te matrice (ili odgovarajuće determinante).

Pokazaćemo da su veličine α_{ij} iz (2) jednake veličinama A_{ij}.

Teorema 8. Determinanta D se može predstaviti na sledeće načine:

(3) $$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad (i = 1,\dots,n).$$

(4) $$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad (j = 1,\dots,n).$$

(Kaže se da je formulom (3) determinanta razvijena po elementima i-te vrste a formulom (4) po elementima j-te kolone).

Dokaz. Dokazaćemo najpre formulu (3) za i=n.

Koeficijent uz a_{nn} u razvoju

(5) $$D = a_{n1}\alpha_{n1} + a_{n2}\alpha_{n2} + \dots + a_{nn}\alpha_{nn}$$

je prema (2) za $a_{nn} \neq 0$ jednak

$$\alpha_{nn} = \frac{1}{a_{nn}} \sum_{F\in\mathcal{F}_n} (-1)^{n+p(F)}C(F).$$

(Ako je $a_{nn}= 0$, vrednost veličine α_{nn}, prema (5), nije bitna pa ćemo za nju usvojiti isti izraz koji dobijamo za $a_{nn} \neq 0$.) Sumiranje se vrši po svim faktorima F koji sadrže petlju sa prenosom a_{nn}. Ako se iz faktora F udalji pomenuta petlja zajedno sa čvorom n, dobija se faktor F^* digrafa H koji nastaje kada se iz G_D udalji čvor n sa svim granama (i petljom) koje su u vezi sa njim. Očigledno je

$$C(F) = a_{nn}C(F^*), \quad p(F) = p(F^*) + 1.$$

Stoga je

$$\alpha_{nn} = (-1)^{n-1} \sum_{F^*} (-1)^{p(F^*)}C(F^*) ,$$

gde se sumiranje vrši po svim faktorima F^* digrafa H. Digraf H je graf pridružen determinanti

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = A_{nn} ,$$

tj. determinanti koja nastaje kada se u determinanti D izostavi n-ta vrsta i n-ta kolona. Stoga je $\alpha_{nn} = A_{nn}$.

Posmatrajmo sada element $a_{nj} (1 \leq j < n)$. Da bismo odredili koeficijent α_{nj} uz ovaj element u razvoju (5), kolonu $\left\|\begin{matrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix}\right\|$ permutujemo redom sa kolonama

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,j+1} \\ \vdots \\ a_{n,j+1} \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} a_{1,j+2} \\ \vdots \\ a_{n,j+2} \end{matrix}\right\|, \ldots, \left\|\begin{matrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{matrix}\right\|.$$

Posle ovih n-j permutovanja, determinanta D postaje

$$(-1)^{n-j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & & a_{nn} & a_{nj} \end{vmatrix}$$

Razvoj ove determinante po elementima poslednje vrste je, naravno, identičan sa razvojem (5). Sada se vidi da je koeficijent uz a_{nj} jednak

$$(-1)^{n-j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n-1,1} & & a_{n-1,j-1} & a_{n-1,j+1} & & a_{n-1,n} \end{vmatrix},$$

a to je, u stvari, algebarski komplement A_{nj}, jer je $(-1)^{n-j} = (-1)^{n+j}$. Stoga važi formula

$$D = a_{n1}A_{n1} + \ldots + a_{nn}A_{nn},$$

tj.

$$\alpha_{nj} = A_{nj} \quad (j = 1,\ldots,n).$$

Ovim je formula (3) dokazana za i=n.

Formulu (3) za $i<n$ dokazujemo na taj način što vrstu $\|a_{i1} \ldots a_{in}\|$ permutujemo redom sa vrstama $\|a_{i+1,1} \ldots a_{i+1,n}\|$, $\|a_{i+2,1} \ldots a_{i+2,n}\|, \ldots, \|a_{n1} \ldots a_{nn}\|$ i na tako dobijenu determinantu primenimo (dokazani) razvoj po elementima n-te vrste.

Navedene teoreme o determinantama omogućavaju praktično izračunavanje determinanata. Determinante drugog i trećeg reda se direktno izračunavaju po formulama koje smo naveli. Determinante višeg reda se na osnovu teoreme 8 razvijaju po elementima neke vrste ili kolone. Na taj način se izračunavanje determinante n-tog reda svodi na izračunavanje n determinanata reda n-1. Ako u vrsti (ili koloni) po kojoj razvijamo determinantu ima elemenata jednakih 0, broj determinanata reda n-1, koje treba izračunati, se smanjuje. Zbog toga, obično pre razvijanja, primenom teoreme 7, u nekoj vrsti ili koloni se stvara što veći broj elemenata jednakih 0 (najčešće svi elementi osim jednog postaju jednaki 0).

Primer 1. U determinanti

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

četvrta vrsta ima najveći broj elemenata jednakih 0. Transformisaćemo determinantu tako da još dva elementa iz ove vrste budu jednaka 0. To ćemo postići na taj način što ćemo najpre elemente treće kolone pomnožiti sa -2 i dodati ih odgovarajućim elementima prve kolone, a zatim elemente treće kolone pomnožiti sa -3 i dodati ih elementima pete kolone. Determinanta D dobija sada oblik

$$D = \begin{vmatrix} -7 & 3 & 3 & -2 & -8 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -10 & -1 & 5 & 6 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 3 & -1 & -9 \end{vmatrix} .$$

Posle razvijanja po elementima četvrte vrste dobijamo

$$D = (-1)\cdot \begin{vmatrix} -7 & 3 & -2 & -8 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -10 & -1 & 6 & -13 \\ -5 & 2 & -1 & -9 \end{vmatrix} .$$

Sada je zgodno "napraviti" nule u drugoj vrsti dodavanjem elemenata poslednje kolone, eventualno pomnoženih pogodnim brojem, elementima ostalih kolona. Posle ovih transformacija dobija se

$$D = -\begin{vmatrix} -23 & -13 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -36 & -27 & -7 & -13 \\ -23 & -16 & -10 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -23 & -13 & -10 \\ -36 & -27 & -7 \\ -23 & -16 & -10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 23 & 13 & 10 \\ 36 & 27 & 7 \\ 23 & 16 & 10 \end{vmatrix} .$$

Oduzimanjem treće od prve vrste dobija se

$$D = -\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 36 & 27 & 7 \\ 23 & 16 & 10 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 36 & 7 \\ 23 & 10 \end{vmatrix} = -3(360 - 161) = -597.$$

Navešćemo još dve važne teoreme o determinantama.

<u>Teorema 9</u>. Neka je

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{Vmatrix},$$

gde su A_1 i A_2 kvadratne matrice (blokovi). Tada je

$$\det A = \det A_1 \det A_2 .$$

<u>Dokaz</u>. Neka su matrice A, A_1, A_2 reda n, n_1, n_2, respektivno. Digraf G pridružen matrici A sastoji se od digrafova G_1, G_2 pridruženih matricama A_1, A_2, respektivno, i nekih grana koje od čvorova digrafa G_1 vode ka čvorovima digrafa G_2. Ove grane odgovaraju elementima matrice B. Nijedna grana ne vodi iz čvorova digrafa G_2 ka čvorovima digrafa G_1. Stoga nijedna kontura ne može da sadrži grane koje odgovaraju matrici B pa se svaki faktor F digrafa G sastoji od jednog faktora F_1 digrafa G_1 i jednog faktora F_2 digrafa G_2. Očigledno je

(6) $$p(F) = p(F_1) + p(F_2), \quad C(F) = C(F_1)\, C(F_2).$$

Stoga je

$$\det A = (-1)^n \sum_{F\in\mathfrak{F}} (-1)^{p(F)} C(F)$$

$$= (-1)^{n_1+n_2} \sum_{F_1\in\mathfrak{F}_1} \sum_{F_2\in\mathfrak{F}_2} (-1)^{p(F_1)+p(F_2)} C(F_1)C(F_2)$$

$$= (-1)^{n_1} \sum_{F_1\in\mathfrak{F}_1} (-1)^{p(F_1)} C(F_1)(-1)^{n_2} \sum_{F_2\in\mathfrak{F}_2} (-1)^{p(F_2)} C(F_2)$$

$$= \det A_1 \det A_2.$$

Ovim je dokaz završen.

Primetimo da det A ne zavisi od elemenata matrice B.

Teorema 10. Ako su A i B kvafratne matrice istog reda, važi formula

$$\det AB = \det A \det B. \tag{7}$$

Dokaz. Neka su matrice A i B reda n. Najpre je na osnovu teoreme 9

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{vmatrix} = \det A \det B. \tag{8}$$

Pomnožimo prvu kolonu determinante (8) sa b_{11}, drugu kolonu sa $b_{21}, \ldots$, n-tu kolonu sa b_{n1} i dodajmo ih (n+1)-voj koloni. Zatim pomnožimo prvu kolonu sa b_{12}, drugu sa $b_{22}, \ldots$, n-tu sa b_{n2} i dodajmo ih (n+2)-goj koloni. Nastavimo tako redom i na kraju pomnožimo prvu kolonu sa b_{n1}, drugu sa $b_{n2}, \ldots$, n-tu sa b_{nn} i dodajmo ih (2n)-toj koloni. Na taj način dobijamo jednakost

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & AB \\ -I & 0 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Zamenimo u poslednjoj determinanti mesta sledećim parovima kolona: 1, n+1; 2, n+2;...; n, 2n. Tada dobijamo sledeću determinantu na koju odmah primenjujemo teoremu 9.

$$\begin{vmatrix} A & AB \\ -I & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} AB & A \\ 0 & -I \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$= (-1)^n \det AB \det(-I) = (-1)^n \det AB\, (-1)^n = \det AB$$

Na osnovu (8), (9) i (10) dobija se (7).

4.3. Razvoj jedne važne determinante

Neka je $A = \|a_{ij}\|_1^n$ i neka je λ promenljiva. Posmatrajmo determinantu

$$\text{(1)} \qquad \det (A + \lambda I) = (-1)^n \sum_{F \in \mathcal{F}} (-1)^{p(F)} C(F),$$

gde je $\mathcal{F}$ skup faktora digrafa pridruženog matrici $A + \lambda I$. Petlje ovog digrafa označene su redom sa $a_{11}+\lambda$, $a_{22}+\lambda, \ldots,$ $a_{nn}+\lambda$. Posmatrajmo faktor F koji sadrži tačno k petlji i neka su čvorovi sa petljama $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Prenos ovog faktora je $C(F) = (a_{i_1 i_1} + \lambda)(a_{i_2 i_2} + \lambda) \ldots (a_{i_k i_k} + \lambda)\,\alpha(F)$, gde je $\alpha(F)$ proizvod prenosa grana faktora F koje nisu petlje. $\alpha(F)$ ne zavisi od λ. Od faktora F se može dobiti 2^k linearnih digrafova H koji se od F razlikuju samo po tome što je kod svakog čvora $i_1, i_2, \ldots, i_k$ prenos petlje ili $a_{i_s i_s}$ ili λ, $s = 1, 2, \ldots, k$. Stoga se (1) može napisati u obliku

$$\text{(2)} \qquad \det (A + \lambda I) = (-1)^n \sum_{H \in \mathcal{H}} (-1)^{p(H)} C(H),$$

gde je $\mathcal{H}$ skup svih linearnih digrafova H dobijenih od faktora F iz $\mathcal{F}$ pomoću opisanog postupka.

Grupišimo linearne digrafove iz $\mathcal{H}$ na osnovu petlji sa prenosom λ. Posmatrajmo skup $\mathcal{H}_M$ linearnih digrafova H koji imaju petlje sa prenosom λ kod čvorova $j_1, j_2, \ldots, j_m$, pri čemu je $M = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$. Neka je E linearan digraf dobijen od H odbacivanjem čvorova sa pomenutim petljama. Očigledno, E je faktor digrafa pridruženog glavnoj submatrici A_M matrice A koja se od A dobija kada se iz A izostave vrste i kolone sa rednim brojevima iz skupa M. Stoga je

$$\text{(3)} \qquad (-1)^n \sum_{H \in \mathcal{H}_M} (-1)^{p(H)} C(H) = (-1)^n \lambda^m \sum_{E \in \mathcal{E}_M} (-1)^{m+p(E)} C(E)$$

$$= \lambda^m \det A_M ,$$

gde je $\mathcal{E}_M$ skup svih faktora digrafa pridruženog glavnoj submatrici A_M.

Iz (1), (2) i (3) dobija se

$$\det (A + \lambda I) = \sum_{M\subset\{1,2,\ldots,n\}} \lambda^m \det A_M .$$

Determinanta (1) je očigledno polinom stepena n po λ pa dobijamo sledeću teoremu (u kojoj je determinanta glavne submatrice reda k označena kao glavni minor reda k).

Teorema 1.

(4) $$\det (A + \lambda I) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

gde je a_k suma svih glavnih minora reda k matrice A.

4.4. Binet-Cauchyeva formula

Prema teoremi 10 iz 4.2 determinanta proizvoda dve kvadratne matrice jednaka je proizvodu determinanata tih matrica. Navešćemo jednu generalizaciju te teoreme.

Teorema 1 (J.P.M.Binet - A.L.Cauchy). Neka je $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$ i $B = \|b_{ij}\|_{n,m}$. 1^o Ako je $m>n$, tada je $\det AB = 0$; 2^o Ako je $m=n$, tada je $\det AB = \det A \det B$; 3^o Ako je $m<n$ tada je

(1) $$\det AB = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_m} (\det A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{1,2,\ldots,m})(\det B^{1,2,\ldots,m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}).$$

Dokaz. Iskaz 2^o predstavlja, u stvari, već spomenutu teoremu 10 iz 4.2. Da bismo dokazali 1^o i 3^o posmatrajmo matričnu jednakost

(2) $$\begin{Vmatrix} \lambda I_m+AB & -A \\ 0 & \lambda I_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \lambda I_m & -A \\ 0 & \lambda I_n+BA \end{Vmatrix},$$

koja se lako proverava blokovskim množenjem matrica. Na osnovu teorema 10 i 9 iz 4.2, iz (2) se prelaskom na odgovarajuće determinante dobija

(3) $$\lambda^n \det (\lambda I_m + AB) = \lambda^m \det (\lambda I_n + BA).$$

Za $m>n$ iz (3) sleduje

$$\det (\lambda I_m + AB) = \lambda^{m-n} \det (\lambda I_n + BA),$$

odakle se stavljanjem $\lambda=0$ dobija $\det AB = 0$, što predstavlja iskaz 1^o.

Za $m<n$, (3) pišemo u obliku

$$\lambda^{n-m} \det(\lambda I_m + AB) = \det(\lambda I_n + BA). \tag{4}$$

Prema teoremi 1 iz 4.3 dobijamo

$$\det(\lambda I_m + AB) = \lambda^m + a_1'\lambda^{m-1} + \dots + a_m',$$

$$\det(\lambda I_n + BA) = \lambda^n + a_1''\lambda^{n-1} + \dots + a_n'',$$

gde su a_k', a_k'' zbirovi glavnih minora reda k matrica AB i BA, respektivno. Prema (4) dobijamo $a_m' = a_m''$. Kako je $a_m' = \det AB$, i pošto je a_m'' jednako izrazu na desnoj strani relacije (1), teorema je dokazana.

4.5. Klasična definicija determinante

Standardan način uvodjenja determinanata oslanja se na neke pojmove iz kombinatorike koji su opisani u poglavlju 1.

Definicija. Kvadratnoj matrici $A = \|a_{ij}\|_1^n$ pridružuje se broj

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix},$$

koji se naziva determinanta matrice A i koji se definiše zbirom

$$\det A = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} (-1)^j a_{1j_1} \dots a_{nj_n},$$

gde se sumiranje vrši po svim permutacijama $j_1, \dots, j_n$ skupa $\{1,\dots,n\}$, pri čemu j označava broj inverzija u permutaciji $j_1, \dots, j_n$.

Ova definicija je ekvivalentna ranije navedenoj definiciji determinante. Dokazaćemo da se polazeći od ove definicije može izvesti formula (1) iz 4.1.

Za determinantu $D = |d_{ij}|_1^n$ važi po definiciji

(1) $$D = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} (-1)^j d_{1j_1} \ldots d_{nj_n},$$

gde je j broj inverzija u permutaciji $j_1, \ldots, j_n$ a sumiranje se vrši po svim permutacijama $j_1, \ldots, j_n$ brojeva $1, \ldots, n$. Posmatrajmo jedan fiksirani proizvod

(2) $$d_{1j_1} \ldots d_{ij_i} \ldots d_{nj_n}$$

iz sume na desnoj strani relacije (1). Proizvod (2) je različit od 0 ako i samo ako su brojevi d_{ij_i} $(i = 1, \ldots, n)$ različiti od 0. Ako je to slučaj, u digrafu G_D sigurno postoji n grana (i/ili petlji) koje su označene brojevima d_{ij_i} $(i = = 1, \ldots, n)$.

Posmatrajmo položaj pomenutih n grana u digrafu G_D i pogledajmo šta one obrazuju u tom digrafu. Kako u proizvodu (2) učestvuje tačno po jedan element iz svake vrste i tačno po jedan element iz svake kolone determinante D, u digrafu G_D u svaki čvor ulazi tačno jedna i iz svakog čvora izlazi tačno jedna grana (ili petlja) od pomenutih n grana. Odatle se zaključuje da te grane obrazuju faktor digrafa G_D. Dakle, svakom sabirku iz (1) koji je različit od 0 odgovara u digrafu G_D jedan faktor.

Na sličan način se zaključuje i obrnuto, tj. da svakom faktoru digrafa G_D odgovara u razvoju (1) determinante D jedan sabirak koji je različit od 0.

Stoga se vrednost determinante može izračunati pomoću prenosa faktora digrafa pridruženog determinanti.

Ostaje još otvoreno pitanje odredjivanja veličine $(-1)^j$ iz (1).

Posmatrajmo jedan faktor F digrafa G_D i odgovarajući proizvod (2). Formirajmo determinantu E na taj način što ćemo sve elemente iz D koji ne pripadaju posmatranom proizvodu (2) zameniti sa nulom. Digraf pridružen determinanti E je tačno posmatrani faktor F. Neka faktor F sadrži p(F) = p kontura koje sadrže redom $n_1, \ldots, n_p (n_1 + \ldots + n_p = n)$ čvorova.

Posmatrajmo determinantu E′ nastalu iz E na taj način što su u E zamenjena mesta najpre i-toj i j-toj vrsti a zatim u nastavku i-toj i j-toj koloni. Graf F′ pridružen determinanti E' nastaje od F na taj način što se najpre grana koja je ulazila u čvor i premešta tako da ulazi u čvor j i grana koja je ulazila u j premešta kod čvora i a zatim se ovakva zamena vrši sa granama koje izlaze iz čvorova i,j. Oblik pridruženog digrafa ostaje isti samo što čvor koji je nosio oznaku i nosi sada oznaku j i obrnuto. Oznake čvorova su, dakle, izmenile mesta. Medjutim, važi $E = E'$, tj. opisanom operacijom se vrednost detrminante ne menja.

Postupak možemo nastaviti sve dotle dok razmeštaj oznaka čvorova u pridruženom digrafu ne dobije sledeću strukturu. U prvoj konturi čvorovi nose oznake $1,2,\ldots,n_1$, kada idemo po konturi u pravcu orijentacije grana konture; u drugoj konturi, slično tome, oznake idu redom $n_1+1, n_1+2,\ldots,n_1+n_2$; i tako redom za sve konture. Determinanta $E^* = \det \|e_{ij}\|_1^n$ kojoj je ovaj digraf pridružen ima samo jedan sabirak u razvoju različit od nule, na primer,

$$(3) \qquad (-1)^k e_{1k_1} \cdots e_{nk_n},$$

gde je k broj inverzija permutacije $k_1,\ldots,k_n$. Na osnovu strukture pridruženog digrafa permutacija $k_1,\ldots,k_n$ je, u stvari, oblika

$$n_1,1,2,\ldots,n_1-1,n_1+n_2,n_1+1,n_1+2,\ldots,n_1+n_2-1,\ldots,n-1.$$

Broj inverzija u ovoj permutaciji je očigledno $n_1-1+n_2-1+\ldots+n_p-1 = n-p$. Stoga (3) ima vrednost

$$(4) \quad (-1)^{n-p} e_{1k_1} \cdots e_{nk_n} = (-1)^{n+p} d_{1j_1} \cdots d_{nj_n} = (-1)^{n+p(F)} C(F).$$

Determinanta (1) se onda može predstaviti u obliku

$$(5) \qquad D = (-1)^n \sum_i (-1)^{p(F_i)} C(F_i),$$

gde se sumiranje vrši po svim faktorima F_i digrafa G_D, što, u stvari, predstavlja formulu (1) iz 4.1.

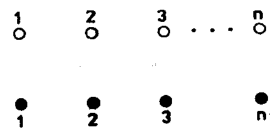
Prepušta se čitaocu da polazeći od definicije iz 4.1 izvede formulu iz klasične definicije determinante, navedene u ovom odeljku.

4.6. König-Chanova definicija determinante

Posmatrajmo Königov digraf G(A) kvadratne matrice A. Delimični digraf S ovog digrafa kod koga iz svakog crnog čvora izlazi tačno jedna grana i u svaki beli čvor ulazi tačno jedna grana naziva se separacija digrafa G(A). Prenos C(S) separacije S definiše se kao proizvod prenosa grana koje obrazuju separaciju.

Neka je A kvadratna matrica reda n. Digraf G(A) ima n crnih i n belih čvorova od kojih su i jedni i drugi označeni brojevima 1,2,...,n. Nacrtajmo digraf G(A) tako da je svaki beli čvor postavljen iznad crnog čvora koji je označen istim brojem (vidi sl. 1).

Za separaciju S definiše se i broj q(S). q(S) je jednako broju parova grana separacije S koje se na crtežu seku, pri čemu grane moraju biti predstavljene dužima.



sl. 1

Neka je $\mathcal{S}$ skup svih separacija digrafa G(A).

Determinanta se može definisati pomoću

$$\text{(1)} \qquad \det A = \sum_{S \in \mathcal{S}} (-1)^{q(S)} C(S) \, .$$

Ova definicija determinante ekvivalentna je ranije navedenim definicijama. U stvari, ova definicija je neposredna grafovska interpretacija klasične definicije što se uvidja na sledeći način.

Neka grane separacije S povezuju crne čvorove 1,2,..., n redom sa belim čvorovima $j_1, j_2, \ldots, j_n$. $j_1, j_2, \ldots, j_n$ je permutacija brojeva 1,2,...,n. Prenos separacije S jednak je $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$. Broj inverzija permutacije $j_1, j_2, \ldots, j_n$ jednak je veličini q(S) jer je svaka inverzija predstavljena parom grana koje se seku. Parnost separacije se identifikuje sa parnošću odgovarajuće permutacije.

4.7. Laplaceov razvoj

Formule sadržane u teoremi 8 odeljka 4.2 predstavljaju razvoj determinante po vrstama, odnosno kolonama. U ovom odeljku pokazaćemo jedan opštiji razvoj determinante, tzv. Laplaceov razvoj.

Neka je $A = \|a_{ij}\|_1^n$ kvadratna matrica reda n. Ako su $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_\nu\}$, $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_\nu\}$ podskupovi skupa $\{1,2,\ldots,n\}$, onda A_I^K označava submatricu matrice A koja je obrazovana elementima koji se nalaze u preseku vrsta sa indeksima iz skupa I i kolona sa indeksima iz skupa K. Determinanta $d_\nu = \det A_I^K = d_I^K$ naziva se minor reda ν.

Neka je $Q = \{1,2,\ldots,n\} \setminus I$ i $R = \{1,2,\ldots,n\} \setminus K$. Veličina

$$\Delta_\nu = (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_\nu+k_1+k_2+\ldots+k_\nu} \det A_Q^R = \Delta_I^K$$

naziva se algebarski komplement ili kofaktor minora d_ν. Kofaktor Δ_ν je, dakle, sa tačnošću do znaka jednak determinanti koja se dobija od det A kada se iz ove determinante udalje vrste čiji su redni brojevi elementi skupa I i kolone čiji su redni brojevi elementi skupa K. Ranije definisan kofaktor elementa determinante (tj. odgovarajuće matrice) specijalan je slučaj ovde definisanog kofaktora.

Teorema 1 (Laplaceov razvoj). Za proizvoljno $I \subset \{1,2,\ldots,n\}$, $|I| = \nu$, važi formula

$$\det A = \sum_{|K|=\nu} d_I^K \Delta_I^K ,$$

gde se sumiranje vrši po svim podskupovima K skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ koji sadrže tačno ν elemenata.

Dokaz. Prema formuli (1) iz prethodnog odeljka, imamo

$$\det A = \sum_{S \in \mathcal{S}} (-1)^{q(S)} c(S) . \tag{1}$$

Posmatrajmo jednu separaciju S. Grane ove separacije koje izlaze iz crnih čvorova $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ završavaju se u izvesnim belim čvorovima koje ćemo obeležiti sa $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ i ovi brojevi obrazuju skup K. Neka je $\mathcal{S}_K$ skup svih separacija koje imaju grane koje polaze iz čvorova skupa I a završavaju se u čvorovima skupa K. Tada se (1) može prikazati u obliku

$$\det A = \sum_{|K|=\nu} \sum_{S\in\mathcal{S}_K} (-1)^{q(S)} c(S) \ . \tag{2}$$

Skupovi čvorova I i K indukuju u G(A) jedan podgraf $G(A_I^K)$ pridružen minoru A_I^K. Ostali članovi obrazuju podgraf $G(A_Q^R)$. Proizvoljna separacija S iz $\mathcal{S}_K$ sadrži grane koje se nalaze u $G(A_I^K)$ i one obrazuju separaciju S' toga podgrafa. Slično tome, ostale grane iz S obrazuju separaciju S'' iz podgrafa $G(A_Q^R)$. Očigledno je $S = S'\cup S''$ i $c(S) = c(S')c(S'')$. Dalje je $q(S) = q(S') + q(S'') + m$, gde je m broj preseka grana separacije S' sa granama iz separacije S''. Dokazaćemo da je m iste parnosti kao zbir $i_1+ i_2+\ldots+ i_\nu + k_1+ k_2+\ldots+ k_\nu$.

Ako dva crna ili dva bela čvora zamene mesta (pri normalnoj reprezentaciji Königovog digrafa), broj preseka grana separacije menja parnost što odgovara činjenici da permutacija menja parnost pomoću transpozicije (tj. promene mesta dva elementa u permutaciji). Neka se crni čvorovi skupa I transpozicijama dovedu na crtežu tako da zauzimaju prvih ν levih pozicija pri čemu relativan položaj ovih kao ni relativan položaj preostalih crnih čvorova nije poremećen. Ukupno je izvršeno $(i_1-1)+(i_2-1)+\ldots+(i -1) = i_1+ i_2+\ldots+ i_\nu - \nu$ transpozicija. Ako se analogna stvar izvrši za bele čvorove skupa K, izvršeno je $(k_1-1)+(k_2-1)+\ldots+(k_\nu-1) = k_1+ k_2+\ldots+ k_\nu - \nu$ transpozicija. Sada se parne separacije S' ne seku sa granama separacije S''. Stoga je m iste parnosti kao veličina $i_1+ i_2+\ldots+ i_\nu + k_1+ k_2+\ldots+ k_\nu-2\nu$, tj. kao veličina $i_1+ i_2+\ldots+ i_\nu+ k_1+ k_2+\ldots+ k_\nu$.

Na osnovu izloženog formula (2) postaje

$$\det A = \sum_{|K|=\nu} \sum_{S\in\mathcal{S}_K} (-1)^{m+q(S')+q(S'')} c(S')c(S'') = \tag{3}$$

$$\sum_{|K|=\nu} \sum_{S'\in G(A_I^K)} (-1)^{q(S')} c(S')(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_\nu+k_1+k_2+\ldots+k_\nu} \sum_{S''\in G(A_Q^R)} (-1)^{q(S'')} c(S'')$$

$$= \sum_{|K|=\nu} d_I^K \, \Delta_I^K \, .$$

Ovim je teorema dokazana.

4.8. Neke specijalne teoreme o determinantama i matricama

Dokazaćemo sada jednu teoremu iz teorije grafova i neposredno ćemo je primeniti na matrice.

Teorema 1. Svaki regularan bihromatski multigraf G sadrži 1-faktor.

Pre nego što dokažemo ovu teoremu navedimo jednu njenu posledicu. Ako se iz grafa G udalje grane 1-faktora (čija je egzistencija obezbedjena teoremom 1) dobija se ponovo regularan bihromatski graf G′ na koji opet možemo primeniti teoremu 1. Kako je 1-faktor grafa G′ takodje 1-faktor grafa G, dobija se sledeća posledica.

Posledica 1. Grane regularnog bihromatskog multigrafa G stepena r mogu se podeliti na r 1-faktora, tj. G se može faktorisati na 1-faktore.

Lema 1. Ako svaki regularan bihromatski multigraf sa s čvorova sadrži 1-faktor, onda 1-faktor sadrži i graf G′ koji se od regularnog bihromatskog multigrafa G stepena r sa s čvorova dobija udaljavanjem ne više od r-1 grana.

Dokaz. Slično prethodnom, G se može faktorisati na r 1-faktora. Ako se iz G udalji ne više od r-1 grana, bar jedan od ovih r 1-faktora ostaje kompletiran što znači da G′ sadrži 1-faktor.

Ovim je lema dokazana.

Dokaz teoreme. Primetimo da G ima isti broj čvorova jedne i druge boje. Naime, ako je G regularan stepena r i ako ima n čvorova jedne i m čvorova druge boje, važi relacija nr=mr, tj. n=m, jer je i nr i mr jednako broju grana grafa.

Na osnovu ovog pretpostavimo da G ima 2n čvorova i da je regularan stepena r. Teoremu dokazujemo matematičkom indukcijom po broju n uz fiksirani stepen r.

Za n=1 tačnost teoreme se neposredno proverava.

Pretpostavimo da je teorema tačna za multigrafove sa 2n čvorova.

Posmatrajmo multigraf H sa 2(n+1) čvorova. Izostavimo iz njega dva čvora x i y koja su povezana bar jednom granom. Preostali multigraf H′ ima 2n čvorova i u njemu neki čvorovi imaju stepen r a neki su manjeg stepena. Čvorove stepena manjeg od r zvaćemo defektni čvorovi. Postoje defektni čvorovi i jedne i druge boje. Defektni čvorovi različitih boja mogu se spajati novim granama. Uvodjenjem najviše r-1 ovakvih grana dobija se multigraf H" koji ima 2n čvorova i regularan je stepena r. Na osnovu induktivne pretpostavke, na osnovu činjenice da se H′ dobija od H" izostavljanjem najviše r-1 grana, i na osnovu leme 1, proizilazi da H′ sadrži 1-faktor. Ako se taj 1--faktor proširi granom koja povezuje čvorove x i y, dobija se 1-faktor u multigrafu H. Ovim je teorema dokazana.

Definicija 1. Ako su elementi kvadratne matrice A nenegativni brojevi i ako elementi iz svake vrste i svake kolone imaju zbir 1, matrica A se naziva bistohastička.

Na osnovu teoreme 1 lako se dokazuje sledeća teorema o bistohastičkim matricama.

Teorema 2. Determinanta bistohastičke matrice sadrži bar jedan član u svom razvoju koji je različit od nule.

Dokaz. Dokazaćemo ovu teoremu najpre za slučaj kada je svaki element bistohastičke matrice $A = \|a_{ij}\|_1^n$ multipl nekog broja a. Posmatrajmo Königov digraf G(A) matrice A. Ako je $a_{ij} \neq 0$, grana izmedju i-tog crnog i j-tog belog čvora ima prenos a_{ij}. Neka je $a_{ij}= ka$, gde je k prirodan broj. Zamenimo granu sa prenosom a_{ij} sa k grana sa prenosom a. Tako dobijamo multidigraf H(A) u kome sve grane imaju prenos a. Ako se zanemare orijentacije grana u H(A), dobija se multigraf H′(A) koji je regularan stepena $\frac{1}{a}$. Ako se pretpostavi, suprotno tvrdjenju teoreme, da su svi članovi u razvoju det A jednaki nuli, digraf G(A) ne poseduje nijednu separaciju a to znači da H′(A) nema nijedan 1-faktor što je u suprotnosti sa teoremom 1. Ovim je teorema dokazana za posmatrani slučaj.

Neka se sada elementi matrice ne mogu prikazati kao multipli istog broja a. Ako ne važi iskaz teoreme, G(A) opet nema separacija. Sada se elementi matrice A mogu promeniti tako da matrica ostane bistohastička a da elementi postanu multipli jednog broja. Ovo se postiže menjanjem samo onih elemenata koji su različiti od nule, pri čemu ovi elementi ne postaju jednaki nuli. Na ovaj način slučaj se svodi na prethodni.

Ovim je teorema dokazana.

<u>Teorema 3</u> (G.Birkhoff-J.von Neumann). Svaka bistohastička matrica A se može pretstaviti kao linearna kombinacija

$$A = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_m P_m \tag{1}$$

nekih permutacionih matrica $P_1, P_2, \dots, P_m$, pri čemu je $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$.

<u>Dokaz</u>. Prema teoremi 2, det A sadrži bar jedan član u svom razvoju koji je različit od nule. Stoga Königov digraf G(A) sadrži bar jednu separaciju S_1. Neka je α_1 najmanji od prenosa grana u separaciji S_1. Separacija S_1 definiše jednu permutacionu matricu P_1. Matrica $A - \alpha_1 P_1$ je opet bistohastička sa tačnošću do jednog multiplikativnog faktora pa se na nju opet može primeniti isti postupak, pri čemu odgovarajući Königov digraf ima bar jednu granu manje od digrafa G(A). Stoga opisani postupak u konačno mnogo koraka dovodi do formule (1), pri čemu je $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$ jer je A bistohastička matrica.

Ovim je teorema dokazana.

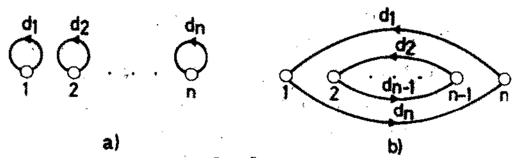
4.9. <u>Primeri i zadaci</u>

1. Odrediti vrednosti sledećih determinanata:

a) $D_1 = |d_{ij}|_1^n$, gde je $d_{ij} = d_i \delta_{ij}$;

b) $D_2 = |d_{ij}|_1^n$, gde je $d_{ij} = d_i \delta_{i,n+1-j}$.

<u>Rešenje</u>. Digrafovi pridruženi ovim determinantama prikazani su na sl. 1.



sl. 1

Oba digrafa sadrže samo po jedan faktor koje se poklapa sa njima samima. Stoga je

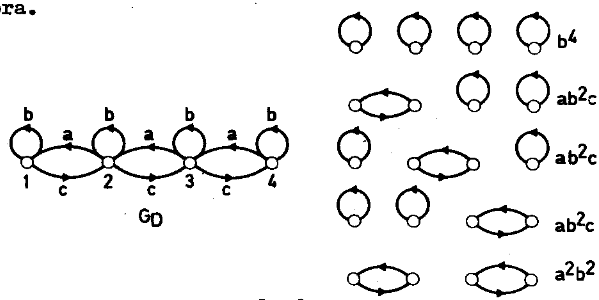
$$D_1 = (-1)^n (-1)^n d_1 d_2 \dots d_n = d_1 d_2 \dots d_n,$$

$$D_2 = (-1)^n (-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} d_1 d_2 \dots d_n.$$

2. Izračunati vrednost determinante:

$$D = \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & c & b \end{vmatrix}.$$

<u>Rešenje</u>. Na sl. 2 prikazan je odgovarajući digraf sa pet svojih faktora.



sl. 2

Stoga je

$$D = (-1)^4((-1)^4 b^4 + 3(-1)^3 ab^2c + (-1)^2 a^2c^2) = b^4 - 3ab^2c + a^2c^2.$$

3. Izračunati determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & & & & & \\ & & 0 & a_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & a_n \\ b_1 & 0 & & & & & \\ & & b_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & b_n & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 0 & & & & & \\ & & a_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_n & 0 \\ 0 & b_1 & & & & & \\ & & 0 & b_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & b_n \end{vmatrix}.$$

4. Ako je $A = \|a_{ij}\|_1^{2n+1}$ i $a_{ij} = 0$ za $i+j$ parno, dokazati da je $\det A = 0$

<u>Rešenje</u>. Digraf pridružen matrici A je bihromatski; naime, čvorovi čiji su indeksi iste parnosti nisu susedni. Pošto je broj čvorova u digrafu neparan svaki faktor bi trebalo da ima neparnu konturu. Medjutim, bihraomatski graf ne sadrži neparnu konturu. Prema tome, izlazi da je $\det A = 0$.

5. Ako je $D = |a_{ij}|_1^{2n+1}$ i ako je $a_{ij} = 0$ za ij neparno, tada je $D = 0$.

6. Odrediti determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & & 1 \end{vmatrix}.$$

7. Izračunati determinantu[1]

$$\Delta_n(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}.$$

<u>Rešenje</u>. Neka je $G_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ digraf pridružen determinanti. Tada je

$$\Delta_n(a_1,a_2,\ldots,a_n) = (-1)^n \sum_{F_i \in \mathfrak{F}} (-1)^{p(F_i)} c(F_i)$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \sum_{F_k \in \mathfrak{F}_k} (-1)^{p(F_k)} c(F_k),$$

gde je $\mathfrak{F}$ skup svih faktora digrafa $G_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ a $\mathfrak{F}_k$ skup onih faktora koji imaju tačno k petlji. Dalje imamo

---

1) Simbol crnog tipa označava da su svi elementi matrice ili determinante u odgovarajućem delu jednaki objektu označenom tim simbolom. Rešenje zadatka je dao S. Simić.

$$\Delta_n(a_1,a_2,\ldots,a_n) =$$

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subset\{1,2,\ldots,n\}} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k} \sum_{F_k'\in\mathfrak{F}_k'} (-1)^{p(F_k')} C(F_k'),$$

gde je F_k' faktor digrafa $G_{n-k}(0,0,\ldots,0)$. Sada sleduje

$$\Delta_n(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \sum_{k=0}^{n} \Delta_{n-k}(0,0,\ldots,0) S_k(a_1,a_2,\ldots,a_n),$$

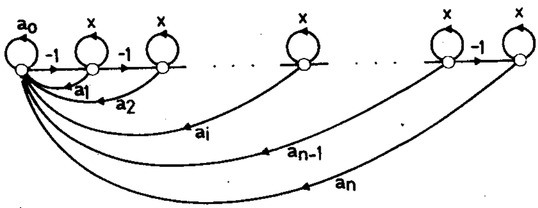
gde je $S_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ elementarna simetrična funkcija reda k za promenljive $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Lako se može pokazati da je $\Delta_m(0,0,\ldots,0) = (-1)^{m-1}(m-1)$, pa je

$$\Delta_n(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k-1}(n-k-1) S_k(a_1,a_2,\ldots,a_n).$$

8. Dokazati da se polinom $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ može prikazati u obliku determinante sledeće matrice

$$A = \begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & x \end{Vmatrix}.$$

Rešenje. Pridružimo posmatranoj matrici odgovarajući digraf G_A (videti sl. 3).



sl. 3

Sa gornje slike se vidi da su svi faktori digrafa G_A sledećeg tipa: sadrže jednu konturu dužine i+1 (obrazuju je prvih i+1 čvorova) i n-i petlji. Prema tome,

$$\det A = (-1)^{n+1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{1+n-i}(-1)^{i}\, a_i x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}.$$

9. Determinanta

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

je funkcija (polinom) promenljivih x_i, y_i, z_i $(i=1,2,3)$. Dokazati da se taj polinom ne može pretstaviti u obliku proizvoda dva polinoma od kojih ni jedan nije konstanta. Generalisati.

10. Izračunati determinantu:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & c \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & h \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix}.$$

11. Dokazati formulu

$$\det A = \sum_{F\in\mathcal{F}}(-1)^{e(F)}C(F),$$

gde $e(F)$ označava broj kontura parne dužine u faktoru F.

12. Izvesti teoreme iz odeljka 4.2 služeći se a) klasičnom definicijom determinante, b) König-Chanovom definicijom.

13. Izračunati vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & z+1 \end{vmatrix}$$

ako z zadovoljava jednačinu $z^5 = 1$.

14. Determinanta reda n

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & & x_n^2 \\ \vdots & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

naziva se Vandermondeova determinanta promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ova determinanta se izračunava na taj način što se redom za $i = 1,2,\ldots,n-1$ $(n-i)$-ta vrsta pomnoži sa x_1 i doda prvoj sledećoj vrsti. Dalje se dobijena determinanta razvije po elementima prve kolone. Vrednost determinante je $\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$.

15. Na šahovskoj tabli formata $n\times n$ polja nalazi se n topova. Formirajmo determinantu na taj način što ćemo u polja na kojima se nalaze topovi upisati jedinice a u ostala polja nule. Dokazati da je ova determinanta različita od nule ako i samo ako se topovi medjusobno ne napadaju.

5. INVERZNE MATRICE

Kao što je objašnjeno u poglavlju 3, u asocijativnim grupoidima se definišu stepeni elemenata, pri čemu je eksponent pozitivan. U grupi su svi elementi invertibilni pa je mogućno definisati i stepene sa celim negativnim eksponentom. Za proizvoljni element grupe a i za proizvoljni prirodni broj k po definiciji je $a^{-k} = (a^k)^{-1}$. Bez teškoća se pokazuje da je takodje $a^{-k} = (a^{-1})^k$. Uz ovakvu definiciju, za operacije sa stepenima elemenata grupe važe formalno ista pravila kao za operacije sa stepenima realnih ili kompleksnih brojeva.

U grupoidu kvadratnih matrica datog reda (operacija je množenje matrica) postoje invertibilni elementi. Kao što će se videti docnije, invertibilne su matrice čija je determinanta različita od nule. Za takve matrice definišu se negativni stepeni.

U komutativnim grupama mogućno je uvesti deljenje kao množenje sa inverznim elementom. Naime, količnik a:b definiše se kao $a\cdot b^{-1}$. Pošto je matrično množenje nekomutativna operacija, količnik matrica A:B bi imao dve vrednosti, $B^{-1}A$ i AB^{-1}, pa bismo mogli govoriti o levom i desnom deljenju matrica. Zbog ovoga se deljenje matrica ne definiše.

5.1. Adjungovana matrica i adjungovana determinanta

Posmatrajmo kvadratnu matricu

$$A = \|a_{ij}\|_1^n = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Neka je A_{ij} kofaktor elementa a_{ij}. Matrica

$$\|A_{ij}\|^T = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{Vmatrix}$$

naziva se <u>adjungovana matrica</u> matrice A i obeležava se sa adj A.

Dakle, adjungovana matrica zadate matrice dobija se kada se u matrici svaki element zameni svojim kofaktorom a zatim se dobijena matrica transponuje.

<u>Lema 1</u>. Za kvadratnu matricu $A = \|a_{ij}\|_1^n$ važe formule

(1) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \delta_{ik} \det A ;$$

(2) $$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \delta_{jk} \det A .$$

<u>Dokaz</u>. Dokazaćemo formulu (1). Formula (2) se analogno dokazuje. Za i=k, (1) se svodi na

(3) $$a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots + a_{kn}A_{kn} = \det A ,$$

što je tačno na osnovu teoreme 8 iz 4.2. Formulom (3) je det A razvijena po elementima k-te vrste.

Za $i \neq k$ dobijamo na levoj strani formule (1) izraz

(4) $$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} .$$

Ako se uporedi (4) sa (3), vidi se da (4) predstavlja determinantu dobijenu od det A na taj način što su elementi k-te vrste $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$ zamenjeni sa elementima i-te vrste a_{i1}, $a_{i2}, \dots, a_{in}$, pri čemu ostale vrste (različite od k-te) nisu menjane. Nova determinanta sadrži sada dve identične vrste jer se elementi $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ nalazeiu i-toj vrsti, te je stoga, na osnovu teoreme 4 iz 4.2, vrednost izraza (4) jednaka nuli.

Ovim je lema dokazana.

<u>Teorema 1</u>. Za kvadratnu matricu A važe jednakosti

(5) $$A \cdot \text{adj } A = (\det A)I ,$$

(6) $$(\mathrm{adj}\ A)\cdot A = (\det A)I\ .$$

Dokaz. Dokazaćemo formulu (5).

Element na mestu (i,k) matrice $A\cdot\mathrm{adj}\ A$ dobija se pomoću elemenata i-te vrste matrice A i elemenata k-te kolone matrice adj A. U i-toj vrsti matrice A nalaze se elementi $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in}$ dok se u k-toj koloni matrice adj A nalaze elementi $A_{k1},A_{k2},\ldots,A_{kn}$. Stoga je (i,k)-element matrice $A\cdot\mathrm{adj}\ A$ jednak

(7) $$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn}\ .$$

Izraz (7) je, na osnovu leme 1, jednak $\delta_{ik}\det A$ a to znači da je $A\cdot\mathrm{adj}\ A = (\det A)I$.

Formula (6) se dokazuje na sličan način.

Ovim je dokaz završen.

Determinanta adjungovane matrice naziva se adjungovana determinanta.

Teorema 2. Ako je A kvadratna matrica reda n, važi formula

(8) $$\det\mathrm{adj}\ A = (\det A)^{n-1}.$$

Ako se izjednače determinante matrica sa leve i desne strane relacije (5), pri čemu se primenjuje teorema 10 iz 4.2, dobija se

$$\det A\ \det\mathrm{adj}\ A = (\det A)^n.$$

Ako je $\det A \neq 0$, iz ove relacije dobija se (8). Može se dokazati da (8) važi i za $\det A = 0$.

Lema 2. Ako je A kvadratna matrica u kojoj je zbir elemenata svake vrste jednak nuli, tada su kofaktori elemenata iz svake vrste matrice A medjusobno jednaki.

Dokaz. Neka je $A = \|a_{ij}\|_1^n$ i neka su A_{ip} i A_{iq} redom kofaktori elemenata a_{ip} i a_{iq} $(p>q)$. S obzirom da je $\sum\limits_{t=1}^{n} a_{st} = 0$ za $s\in\{1,2,\ldots,n\}$, možemo u submatrici A_I^P, gde je $P = \{1,2,\ldots,n\}\setminus\{p\}$ a $I = \{1,2,\ldots,n\}\setminus\{i\}$, zameniti elemente q-te kolone sa $-\sum\limits_{\substack{t=1\\ t\neq q}}^{n} a_{st}$, $s\in I$, tako da se ona ne menja. Ako u tako dobijenoj matrici dodamo q-toj koloni sve preostale kolone a zatim za $q \neq p-1$ premestimo q-tu kolonu da bude neposredno desno od kolone p-1, tada je

$$A_{ip} = (-1)^{i+p} (-1)^{p-q-1} (-1) (-1)^{i+q} A_{iq} ,$$

tj. $A_{ip} = A_{iq}$. Ovim je lema dokazana.

Neposredna posledica gornje leme je sledeća teorema.

Teorema 3. Ako je A kvadratna matrica u kojoj je zbir elemenata svake vrste i svake kolone jednak nuli, tada su kofaktori svih elemenata matrice A medjusobno jednaki.

5.2. Inverzna matrica

Matrica X naziva se inverzna matrica matrice A ako važi

$$XA = AX = I . \tag{1}$$

Ispitaćemo pod kojim uslovima matrica ima inverznu matricu i da li je ta matrica jedinstvena.

Iz (1) najpre zaključujemo da A mora biti kvadratna matrica i da X mora biti kvadratna matrica istog reda. Dalje, pošto je det I = 1, primenom teoreme 10 iz 4.2, dolazi se do relacije det X det A = 1. Odavde se dobija da je potreban uslov za egzistenciju inverzne matrice det A $\neq$ 0. Tada je det X = $\frac{1}{\det A}$. Inverznu matricu matrice A obeležićemo sa A^{-1}.

Uslov det A $\neq$ 0 je i dovoljan za egzistenciju inverzne matrice jer matrica X = $\frac{1}{\det A}$ adj A zadovoljava (1) na osnovu teoreme 1 iz 5.1.

Dakle, ako je $A = \|a_{ij}\|_1^n$ i det A $\neq$ 0, važi formula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{Vmatrix} . \tag{2}$$

Primer 1. Za matricu $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$ je $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-6=-2,$

$$A^T = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}, \quad \text{adj } A = \begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix} \text{ i } A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}.$$

Zaista, važe jednakosti

$$\begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Inverzna matrica, ukoliko postoji, jedinstvena je i ona je odredjena formulom (2).

Zaista, pretpostavimo suprotno, tj da za neku kvadratnu matricu A postoje dve inverzne matrice X i Y. Tada je $AX = AY(= I)$. Množenjem ove jednakosti sa X sa leve strane dobijamo redom $X(AX) = X(AY)$, $(XA)X = (XA)Y$, $IX = IY$, $X = Y$. Dakle, ne postoje dve medjusobno različite inverzne matrice.

Matrica za koju postoji inverzna matrica naziva se <u>regularna</u> ili <u>nesingularna</u> matrica. Matrice koje nemaju inverznu matricu zovu se <u>singularne</u> matrice.

5.3. Grafovska interpretacija inverzne matrice

Pokazaćemo najpre kako se kofaktori elemenata determinante $D = |d_{ij}|_1^n$ mogu odrediti pomoću digrafa pridruženog determinanti. U tom cilju uvešćemo pojam veze $V(i\rightarrow j)$ izmedju čvorova i i j u digrafu G.

Neka je $i \neq j$. Delimični graf digrafa G naziva se <u>veza čvora i sa čvorom j</u>, u oznaci $V(i\rightarrow j)$, ako ima sledeće osobine:

1^o Iz čvora i izlazi tačno jedna grana (i nijedna ne ulazi);

2^o U čvor j ulazi tačno jedna grana (i nijedna ne izlazi);

3^o Iz ostalih čvorova izlazi tačno jedna i u svaki od njih ulazi tačno jedna grana.

Lako se zaključuje da jedna komponenta veze od i ka j predstavlja elementarni put (graf sa, na primer, s čvorova koji se mogu numerisati brojevima $1,\ldots,s$ tako da za svako $k=1,\ldots,s-1$ postoji grana koja vodi iz čvora k u čvor $k+1$ i da druge grane, osim navedenih, ne postoje) od i do j a da ostale komponente veze, ukoliko postoje, predstavljaju konture.

Veza $V(i\to i)$ čvora i sa čvorom i u G delimični je graf digrafa G sa sledećim osobinama:

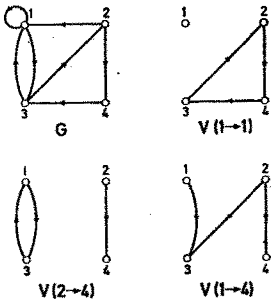
1° Čvor i je izolovan čvor;

2° Iz ostalih čvorova izlazi tačno jedna i u svaki od njih ulazi tačno jedna grana.

Prenos $C(V(i\to j))$ veze $V(i\to j)$ definiše se kao proizvod brojeva pridruženih granama koje se nalaze u vezi.

Na sl. 1 prikazan je jedan graf sa nekoliko svojih veza.

Posmatrajmo faktor F digrafa G_D koji sadrži granu označenu sa d_{ij}. Ako se ova grana udalji iz faktora, dobija se jedna veza $V(i\to j)$. Ako $p(G)$ označava broj komponenata (odvojenih delova) digrafa G koje predstavljaju konture, važe očigledno sledeće relacije



sl. 1

(1) $$p(F) = p(V(i\to j)) + 1 ,$$

(2) $$C(F) = d_{ij}C(V(i\to j)) .$$

Kofaktor D_{ij} elementa d_{ij}, prema teoremi 8 iz 4.2, jednak je koeficijentu uz d_{ij} u razvoju determinante. Stoga je na osnovu (1) iz 4.1

(3) $$d_{ij}D_{ij} = (-1)^n \sum_F{}' (-1)^{p(F)}C(F),$$

gde $\sum_F{}'$ označava sumiranje po onim faktorima F digrafa G_D koji sadrže granu označenu sa d_{ij}.

Na osnovu (3), (1) i (2) je

(4) $$D_{ij} = (-1)^n \sum_{V(i\to j)} (-1)^{p(V(i\to j))+1}C(V(i\to j)) ,$$

gde se sumira po svim vezama $V(i\to j)$ grafa G_D.

Ako je $d_{ij}= 0$, u grafu G_D se povlači grana iz čvora j u čvor i kojoj se pridružuje broj 0, pa se opet dobija formula (4).

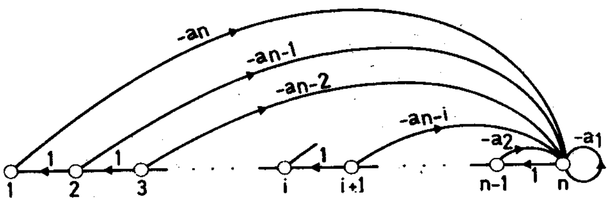
Na osnovu formule (2) iz 5.2, definicije determinante i formule (4) dobija se $A^{-1} = \|a^*_{ij}\|^n_1$, gde je

$$(5) \qquad a^*_{ij} = \frac{\sum\limits_{V(j\to i)} (-1)^{p(V(j\to i))+1} C(V(j\to i))}{\sum\limits_{F\in\mathcal{F}} (-1)^{p(F)} C(F)} .$$

Primer 1. Odredimo inverznu matricu matrice

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{Vmatrix} .$$

Digraf pridružen matrici A dat je na sl. 2. Najpre je



sl. 2

$\det A = (-1)^n (-1)^1 (-a_n) = (-1)^n a_n$. Postoje samo veze $V(i\to 1)$ sa prenosom $-a_{n-i}$ za $i=1,2,\dots,n-1$, veza $V(n\to 1)$ sa prenosom 1, i veze $V(i\to i+1)$ sa prenosom $-a_n$. Stoga je

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & \cdots & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{1}{a_n} \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Sada se mogu navesti neki od razloga za uvodjenje digrafa G_A u poglavlju 4 iako se isti cilj mogao postići i sa digrafom G^A iz poglavlja 3. Ako bi se za definiciju determinante koristio digraf G^A onda bi se u formuli (4) za kofaktor elementa na mestu (i,j) sumiranje moralo vršiti, umesto po vezama čvora i sa čvorom j, upravo obrnuto - po vezama čvora j sa čvorom i. Doduše, formula (5) za elemente inverzne matrice bila bi tada prirodnija. Medjutim, formula (4) služi u sledećem poglavlju za izvodjenje jedne formule za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina koja opet kada se primeni na neke probleme elektrotehnike (videti poglavlje 11) izgleda mnogo prirodnija nego odgovarajuća formula koja bi bila bazirana na digrafu G^A.

5.4. Primeri i zadaci

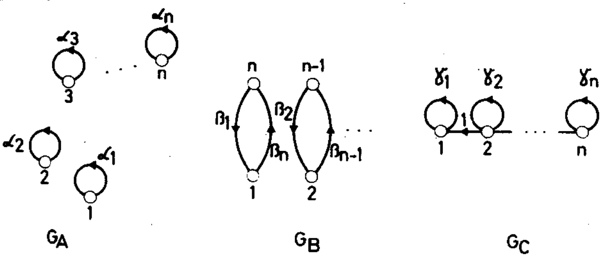
1. Odrediti inverzne matrice sledećih matrica:

a) $A = \|a_{ij}\|_1^n$, gde je $a_{ij} = \alpha_i \delta_{ij}$;

b) $B = \|b_{ij}\|_1^n$, gde je $b_{ij} = \beta_i \delta_{i,n+1-j}$;

c) $C = \|c_{ij}\|_1^n$, gde je $c_{ij} = \gamma_i \delta_{ij} + \delta_{i,j-1}$.

Rešenje. Pridružimo matricama A, B, C odgovarajuće digrafove G_A, G_B, G_C (videti sl. 1).



sl. 1

$$a)\ \det A = (-1)^n \sum_i (-1)^{p(F_i)} C(F_i) = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k ,$$

$$A_{ij} = (-1)^n \sum_{V(i\to j)} (-1)^{1+p(V(i\to j))} C(V(i\to j)) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \alpha_k \delta_{ij},$$

$$A^{-1} = \left\| \frac{1}{\alpha_i} \delta_{ij} \right\|_1^n .$$

b) $$\det B = (-1)^n \sum_i (-1)^{p(F_i)} C(F_i) = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \prod_{k=1}^{n} \beta_k ,$$

$$B_{ij} = (-1)^n \sum_{V(i\to j)} (-1)^{1+p(V(i\to j))} C(V(i\to j))$$

$$= (-1)^n \delta_{i,n+1-j} (-1)^{\left\{\frac{n}{2}\right\}} \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \beta_k = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \beta_k \, \delta_{i,n+1-j} ,$$

$$B^{-1} = \left\| \frac{1}{\beta_j} \delta_{j,n+1-i} \right\|_1^n .$$

c) Sada je $\det C = \prod_{k=1}^{n} \gamma_k$, dok je

$$C_{ij} = (-1)^{j-i} \frac{\prod_{k=1}^{n} \gamma_k}{\prod_{k=j}^{i} \gamma_k}$$

za $i \geqslant j$, odnosno $C_{ij} = 0$ za $i < j$. Odavde sleduje $C^{-1} = \left\| c_{ij}^{(-1)} \right\|_1^n$

gde je $$c_{ij}^{(-1)} = \begin{cases} (-1)^{i-j} \prod_{k=i}^{j} \frac{1}{\gamma_k} , & j \geqslant i \\ 0 , & j < i . \end{cases}$$

<u>Napomena</u>. Videti takodje zadatke 1 iz 3.5 i 1 iz 4.9.

2. Dokazati jednakost

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & x_n \\ x_1 & x_2 & & x_n & 0 \end{vmatrix} = -(A_{11}x_1^2 + \dots + (A_{ij} + A_{ji})x_i x_j + \dots),$$

gde su A_{ij} kofaktori elemenata a_{ij} matrice $A = \|a_{ij}\|_1^n$.

3. Dokazati formulu

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

4. Dokazati da je inverzna matrica P^{-1} permutacione matrice P jednaka transponovanoj matrici P^T.

5. Naći inverznu matricu matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ & & & -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

6. Neka je

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & A_{nn} \end{Vmatrix}$$

blok-matrica s kvadratnim matricama $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{nn}$. Dokazati da je matrica A regularna ako i samo ako je svaka od matrica $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn}$ regularna.

7. Neka je

$$A = \begin{Vmatrix} I & Q \\ O & B \end{Vmatrix}$$

blok-matrica pri čemu je B regularna kvadratna matrica. Dokazati da je A regularna matrica i da je

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} I & -QB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{Vmatrix}.$$

8. Dokazati da je inverzna matrica gornje trougaone matrice takodje gornje trougaona matrica.

Rešenje. Matrica $A = \|a_{ij}\|_1^n$ je gornje trougaona ako je $a_{ij} = 0$ za $i > j$. Stoga u digrafu G_A, pridruženom matrici A, nijedna grana ne vodi iz čvora sa manjim indeksom u čvor sa većim indeksom. Samim tim u G_A ne postoji nijedan put koji vodi iz čvora sa manjim indeksom u čvor sa većim indeksom, tj. nijedna veza $V(i \to j)$ za $i < j$. Na osnovu formule (4) iz 5.3 zaključujemo da je kofaktor $A_{ij} = 0$ za $i < j$. Dakle, u inverznoj matrici element na mestu (i,j) za $i > j$ jednak je nuli, tj. A^{-1} je gornje trougaona matrica.

9. Neka je $A = \|a_{ij}\|_1^{2n}$ nesingularna matrica za koju važi $a_{ij} = 0$ za $i+j$ parno. Stavimo $A^{-1} = B = \|b_{ij}\|_1^{2n}$. Dokazati da je takodje $b_{ij} = 0$ za $i+j$ parno.

Rešenje. Neka je G_A digraf pridružen matrici A. Digraf G_A je očigledno bihromatski. Neka su i,j indeksi dva čvora digrafa za koje je $i+j$ parno. Svaki put od $i(j)$ do $j(i)$ sadrži u tom slučaju neparan broj čvorova. Prema tome, i broj čvorova koji ne leže na odgovarajućem putu je neparan. Stoga u digrafu ne postoji nijedna veza izmedju čvorova čiji su indeksi iste parnosti. Sada je jasno da je $b_{ij} = 0$ za $i+j$ parno.

10. Dokazati da skup regularnih kvadratnih matrica odredjenog reda obrazuje grupu u odnosu na operaciju množenja matrica.

11. Ispitati da li skup matrica oblika

$$\begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad (a \in R)$$

obrazuje polje u odnosu na operacije sabiranja i množenja matrica.

12. Skup matrica oblika

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{Vmatrix} \quad (a,b,c,d \in R)$$

obrazuje nekomutativno telo u odnosu na operacije sabiranja i množenja matrica.

13. Ispitati da li skup svih regularnih kvadratnih matrica odredjenog reda obrazuje nekomutativno telo u odnosu na operacije sabiranja i množenja matrica.

14. Dokazati formulu

$$\det (A + xJ) = \det A + x \operatorname{sum} \operatorname{adj} A ,$$

gde je x broj, A kvadratna matrica i J (kvadratna) matrica čiji su svi elementi jednaki 1.

15. Ako su A i B regularne matrice, važe formule

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} , \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T .$$

16. Odrediti inverzne matrice za sledeće matrice:

$$\begin{Vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} , \quad \begin{Vmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} .$$

17. Dat je skup matrica A, gde je

$$A = \begin{Vmatrix} a & b \\ -b & a \end{Vmatrix} \qquad (a,b \in R) .$$

1° Da li postoji A^{-1} u datom skupu matrica?

2° Da li su komutativne bilo koje dve matrice iz datog skupa matrica?

3° Odrediti sve matrice A za koje je $A + A^{-1} = 0$.

18. Ako su A i B kvadratne matrice istog reda, važi formula

$$\operatorname{adj} (AB) = \operatorname{adj} B \operatorname{adj} A .$$

6. SISTEMI LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA

Funkcija $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ naziva se linearna forma promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pri ovome se smatra da su promenljive i koeficijenti u linearnoj formi realni ili kompleksni brojevi ili su elementi nekog drugog polja.

Jednačina $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, gde je b element istog polja, naziva se linearna algebarska jednačina po nepoznatima $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Navedena linearna forma se može predstaviti n-dimenzionalnim vektorom $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a odgovarajuća jednačina pomoću vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$ dimenzije n+1. Za sistem linearnih formi, odnosno jednačina, kaže se da je linearno zavisan (odnosno nezavisan) ako je skup odgovarajućih vektora linearno zavisan (odnosno nezavisan). U sistemu linearno zavisnih formi postoji forma koja se može izraziti kao linearna kombinacija ostalih formi. U sistemu zavisnih jednačina postoji jednačina koja se može dobiti kao posledica ostalih jednačina.

Rešavanje i proučavanje osobina sistema linearnih algebarskih jednačina predstavlja jedan od centralnih problema u linearnoj algebri. Pri tome teorija matrica i determinanata igra bitnu ulogu. Na sisteme linearnih algebarskih jednačina nailazimo u raznim granama matematike kao i u primenjenim disciplinama a posebno u elektrotehnici.

U ovom poglavlju su opisana opšta svojstva sistema linearnih algebarskih jednačina dok je numeričkim aspektima ove problematike posvećeno poglavlje 9.

Izmedju ostalih, opisuju se i grafovski metodi rešavanja sistema linearnih algebarskih jednačina (videti odeljke 6.2 - 6.4). Ove metode su razvili elektroinženjeri i oni su i poslužili kao polazna osnova za pisanje ove knjige.

6.1. Cramerove formule

Posmatrajmo sistem od n linearnih algebarskih jednačina sa n nepoznatih $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 ,\\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 ,\\
& \vdots\\
& a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n .
\end{aligned}
$$

Sistemu jednačina (1) ekvivalentna je matrična jednačina

$$(2)\qquad Ax = B,$$

gde je

$$(3)\qquad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix}, \quad x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}.$$

A je <u>matrica koeficijenata</u> uz nepoznate u sistemu jednačina, ili kraće, <u>matrica sistema</u>. B je <u>matrica slobodnih članova</u> a x <u>matrica nepoznatih</u>. Uvešćemo oznaku det A = D i determinantu D ćemo nazvati <u>determinanta sistema</u>.

Pretpostavimo da postoji bar jedno rešenje sistema (1), tj. da postoje brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koji zadovoljavaju sve jednačine iz (1). Da bismo odredili x_i, pomnožićemo determinantu sistema sa x_i (množeći i-tu kolonu sa x_i):

$$x_i D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1i}x_i & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2,i-1} & a_{2i}x_i & a_{2,i+1} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & & a_{n,i-1} & a_{ni}x_i & a_{n,i+1} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Za svako $j \neq i$ pomnožićemo j-tu kolonu ove determinante sa x_j i dodati i-toj koloni. Posle ovog niza transformacija elementi i-te kolone postaju izrazi na levim stranama jednačina (1). Stoga je

$$x_iD = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Ako poslednju determinantu označimo sa D_i i ako je $D \neq 0$, tada važe formule

(4) $$x_i = \frac{D_i}{D} \quad (i = 1,2,\ldots n) .$$

Formule (4) nazivaju se Cramerove formule.

Dakle, dokazali smo da je rešenje sistema dato formulama (4), a samim tim da je rešenje jedinstveno, ako je $D \neq 0$ i ako rešenje postoji.

Dokazaćemo sada da rešenje postoji ako je $D \neq 0$. Pokažimo da je formulama (4) zaista odredjeno jedno rešenje. Unećemo izraze (4) za x_i u (1) pa za i-tu jednačinu iz tog sistema dobijamo

(5) $$a_{i1}\frac{D_1}{D} + a_{i2}\frac{D_2}{D} + \ldots + a_{in}\frac{D_n}{D} = b_i .$$

Razvijmo svaku od determinanata D_j po j-toj koloni:

(6) $$D_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_iA_{ij} + \ldots + b_nA_{nj} .$$

Unoseći (6) u (5) dobijamo

(7) $$\begin{aligned} &\frac{1}{D}(a_{i1}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_iA_{i1} + \ldots + b_nA_{n1}) + \\ &\quad a_{i2}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_iA_{i2} + \ldots + b_nA_{n2}) + \ldots + \\ &\quad a_{in}(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_iA_{in} + \ldots + b_nA_{nn})) = \\ &\frac{1}{D}(b_1(a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + \ldots + a_{in}A_{1n}) + \\ &\quad b_2(a_{i1}A_{21} + a_{i2}A_{22} + \ldots + a_{in}A_{2n}) + \ldots + \\ &\quad b_i(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}) + \ldots + \\ &\quad b_n(a_{i1}A_{n1} + a_{i2}A_{n2} + \ldots + a_{in}A_{nn})) . \end{aligned}$$

Naosnovu leme 1 iz 5.1 izraz (7) jednak je b_i, što znači da je i-ta (a to znači i svaka) jednačina sistema (1) zadovoljena rešenjem (4).

Primer 1. Za sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 , \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 , \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 11 , \end{aligned}$$

dobijamo redom

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 6 - 1 - 1 - 4 - 3 = -5 ,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 11 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 , \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = -10 ,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -15 .$$

Stoga je $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \dfrac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \dfrac{D_3}{D} = 3.$

Ako je determinanta sistema jednaka nuli, Cramerove formule ne važe. U tom slučaju može da se desi da sistem nema nijedno rešenje ili da ima više rešenja. Može se dokazati da ako sistem ima dva rešenja onda ih on ima beskonačno mnogo. U tom slučaju rešenja sistema se izražavaju pomoću jednog ili više parametara koji mogu uzeti proizvoljne vrednosti. Opšti slučaj sistema linearnih algebarskih jednačina opisan je u 6.6. Ovde ćemo navesti jedan primer.

Primer 2. Za sistem jednačina

$$\begin{aligned} (1-a)x + (2a+1)y + (2a+2)z &= a , \\ ax + \quad ay &= 2a + 2 , \\ 2x + (a+1)y + (a-1)z &= a^2 - 2a + 9 , \end{aligned}$$

imamo

$$D = \begin{vmatrix} 1-a & 2a+1 & 2a+2 \\ a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \end{vmatrix} = a(a-1)(2-a) \ .$$

Za $a \notin \{0,1,2\}$ imamo $D \neq 0$ i Cramerove formule daju jedinstveno rešenje sistema.

Za $a=0$ druga jednačina se svodi na $0=2$ te sistem nema rešenja.

Za $a=1$ sistem dobija oblik $3y+4z=1$, $x+y=4$, $2x+2y=8$. Treća jednačina je posledica druge. Rešenja sistema su data sa

$$x = \alpha \ , \ y = 4 - \alpha \ , \ z = \frac{3\alpha - 11}{4} \ ,$$

gde je α proizvoljan broj.

Za $a=2$ sistem postaje $-x+5y+6z=2$, $2x+2y=6$, $2x+3y+z=9$. Eliminacijom x pomoću druge jednačine dobija se $6y+6z=5$, $y+z=3$, što predstavlja kontradikciju i sistem nema rešenja.

Sistem (1) se može rešiti u matričnom obliku polazeći od (2). Ako se matrična jednačina (2) pomnoži sa A^{-1} sleva, dobijaju se redom sledeće relacije: $A^{-1}(Ax) = A^{-1}B$, $(A^{-1}A)x = A^{-1}B$, $Ix = A^{-1}B$, $x = A^{-1}B$. Dakle, ako je A regularna matrica, rešenje jednačine (2) je $x = A^{-1}B$. Ovo rešenje je ekvivalentno sa Cramerovim formulama.

6.2. Rešavanje sistema linearnih jednačina pomoću grafova

Rešenje sistema linearnih algebarskih jednačina može se odrediti pomoću jednog grafa koji je pridružen sistemu algebarskih jednačina. U vezi sa tim uvodimo sledeću definiciju.

Neka je dat sistem linearnih algebarskih jednačina

$$Ax = B \ , \tag{1}$$

gde je $A = \|a_{ij}\|_1^n$ matrica koeficijenata, $x (x^T = \|x_1 \ldots x_n\|)$ matrica (kolona) nepoznatih i $B (B^T = \|b_1 \ldots b_n\|)$ matrica (kolona) slobodnih članova. Coatesov[1] digraf G pridružen sistemu (1)

1) Ovaj graf se naziva i graf protoka (flow graph).

je digraf sa n+1 čvorova koji su obeleženi sa $0,1,\ldots,n$ i u kome postoje samo one grane (i/ili petlje) koje su odredjene pomoću:

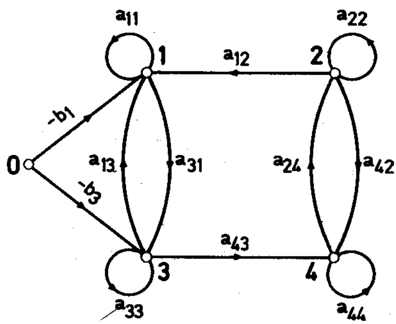
1° ako je $a_{ij} \neq 0$, iz čvora j vodi orijentisana grana (ili petlja) u čvor i i ona je obeležena sa a_{ij};

2° ako je $b_i \neq 0$, iz čvora 0 vodi orijentisana grana u čvor i i ona je obeležena sa $-b_i$.

Coatesov digraf sistema linearnih jednačina

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \phantom{+ a_{24}x_4} &= b_1 , \\
a_{22}x_2 \phantom{+ a_{13}x_3} + a_{24}x_4 &= 0 , \\
a_{31}x_1 \phantom{+ a_{12}x_2} + a_{33}x_3 \phantom{+ a_{24}x_4} &= b_3 , \\
a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= 0 ,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

prikazan je na sl. 1.



sl. 1

Deo Coatesovog digrafa koji se dobija kada se iz G udalji čvor 0 sa svojim granama je digraf G_A pridružen matrici A (odnosno determinanti det A).

Neka je $V(i \to j)$ jedna veza i sa j u G_A. Ako u G postoji grana označena sa $-b_i$, vezi $V(i \to j)$ odgovara u G jedna i samo jedna veza $V(0 \to j)$ koja nastaje kada se granama veze $V(i \to j)$ doda grana označena sa $-b_i$. Tada je, očigledno,

$$C(V(0 \to j)) = -b_i C(V(i \to j)) . \tag{3}$$

Prelazimo na rešavanje sistema (1).

Pretpostavimo da je $\det A \neq 0$, tj. da rešenje sistema postoji i da je ono jedinstveno. Prema Cramerovim formulama tada je:

$$x_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}}{\det A} \qquad (j = 1,\ldots,n) , \tag{4}$$

gde je A_{ij} algebarski komplement elementa a_{ij} u matrici A. Na osnovu definicije determinante i (4) iz 5.3 formula (4) postaje

$$x_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^n \sum\limits_{V(i\to j)} b_i (-1)^{p(V(i\to j))+1} C(V(i\to j))}{(-1)^n \sum\limits_{F} (-1)^{p(F)} C(F)} \qquad (j = 1,\dots,n).$$

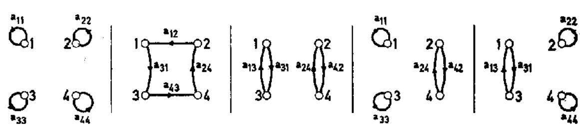
Ako se uzme u obzir (3), dobija se

$$(5) \qquad x_j = \frac{\sum\limits_{V(0\to j)} (-1)^{p(V(0\to j))} C(V(0\to j))}{\sum\limits_{F} (-1)^{p(F)} C(F)} \qquad (j = 1,\dots,n),$$

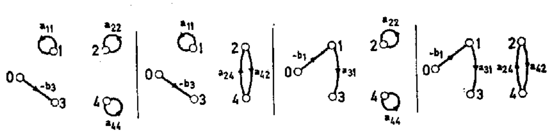
pri čemu se u brojiocu sumiranje vrši po svim vezama $V(0\to j)$ čvora 0 sa čvorom j u digrafu G a u imeniocu po svim faktorima F digrafa G_A.

Ovo je Coatesova formula za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina.

Na sl. 2 a) prikazani su svi faktori digrafa pridruženog matrici sistema jednačina (2) a na sl. 2 b) sve veze čvora 0 sa čvorom 3 Coatesovog grafa na sl. 1.



sl. 2 a)



sl. 2 b)

Na osnovu toga, a prema (4), za veličinu x_3 dobijamo

$$x_3=\frac{b_3a_{11}a_{22}a_{44}-b_3a_{11}a_{42}a_{24}-b_1a_{31}a_{22}a_{44}+b_1a_{31}a_{24}a_{42}}{a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{12}a_{24}a_{43}a_{31}+a_{13}a_{31}a_{42}a_{24}-a_{11}a_{33}a_{42}a_{24}-a_{22}a_{44}a_{13}a_{31}}.$$

Poseban značaj ovog metoda satoji se u tome što se graf iz koga se odredjuje rešenje može nacrtati na osnovu poznavanja strukture fizičkog sistema koji se opisuje linearnim jednačinama, bez da se same jednačine ispisuju (teorija električnih kola, sistemi automatskog upravljanja; videti poglavlje 11).

Pri praktičnom radu sa ovim metodom faktori i veze se obično ne ističu posebno, nego se nepoznata veličina koja se traži odredjuje direktno iz Coatesovog grafa. Ovo zahteva izvesnu rutinu jer se nepažnjom mogu izostaviti neke veze ili faktori. Mada nije poznato neko efikasno opšte pravilo za sistematsko nalaženje faktora i veza, za preporuku je, na primer, sledeće. Faktore je mogućno grupisati prema broju petlji koje ulaze u faktor. Za nalaženje veza $V(0\to j)$ potrebno je odrediti sve elementarne puteve iz čvora 0 u čvor j a ovi putevi se mogu klasificirati prema čvorovima koji sleduju neposredno posle čvora 0.

Opisani metod je namenjen za ručno računanje. Upotreba kompjutera u vezi sa ovim ~~metodom~~ nije preporučljiva jer kompjuter troši mnogo vremena za raspoznavanje faktora i veza u grafu. Praktična upotrebljivost ovog metoda je ograničena na sisteme jednačina sa najviše desetak nepoznatih uz uslov da pridruženi graf ima relativno mali broj grana. U protivnom je praktično nemogućno odrediti sve faktore i potrebne veze u grafu.

Korišćenje grafova za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina je naročito pogodno ako su koeficijenti sistema opšti brojevi.

6.3. Grafovi protoka signala

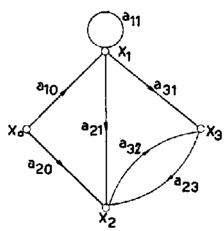
Metod S.J.Masona koristi za rešavanje sistema linearnih jednačina tzv. grafove protoka signala (signal flow graphs). Po tom metodu sistemu linearnih jednačina pridružuje se opet jedan digraf, kod koga je svakoj grani i petlji pridružen neki realan broj različit od nule. Pridruženi broj označava prenos grane. Rešenje sistema dobija se na osnovu strukture pridruženog digrafa, koji se naziva Masonov graf ili graf protoka signala.

Sistem jednačina sa nepoznatim $x_1,\dots,x_n$ mora biti sveden na oblik

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 &= a_{1o}x_o + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n ,\\ &\vdots\\ x_n &= a_{no}x_o + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n . \end{aligned}$$

Ovde je x_o parametar i nepoznate veličine treba izraziti pomoću x_o i koeficijenata a_{ij}. Uvodjenje parametra x_o nije od bitnog značaja.

Pridruženi digraf ima n+1 čvorova koji su označeni sa $x_o,x_1,\dots,x_n$. Za svako i,j za koje je $a_{ij} \neq 0$ iz čvora x_j u čvor x_i vodi orijentisana grana kojoj je pridružen broj a_{ij}.



sl. 1

Primer 1. Sistemu jednačina

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{1o}x_o + a_{11}x_1 ,\\ x_2 &= a_{2o}x_o + a_{21}x_1 + a_{23}x_3 ,\\ x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 , \end{aligned}$$

pridružuje se digraf sa sl. 1.

Neka su $K_1,\dots,K_j,\dots$ orijentisane konture digrafa. Konturu obrazuje takodje jedna petlja. Prenos konture je proizvod prenosa grana koje obrazuju konturu. Prenose kontura $K_1,\dots,K_j,\dots$ obeležavaćemo sa $T_1,\dots,T_j,\dots$

Determinanta digrafa definiše se pomoću

$$(2)\qquad \Delta = 1 - \sum_i T_i + \sum_{i,j} T_iT_j - \sum_{i,j,k} T_iT_jT_k + \dots$$

U ovom izrazu $\sum_i T_i$ označava zbir prenosa svih kontura digrafa, $\sum_{i,j} T_iT_j$ označava zbir proizvoda prenosa po dve konture koje se medjusobno ne dodiruju, tj. nemaju nijedan zajednički čvor, u $\sum_{i,j,k} T_i T_j T_k$ se sumiranje vrši po svim trojkama medjusobno nedodirujućih kontura itd.

Rešenje sistema linearnih jednačina odredjuje se po Masonovoj formuli

$$\frac{x_i}{x_o} = \frac{\sum_m p_m^{(i)} \Delta_m^{(i)}}{\Delta} \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{3}$$

gde je $p_m^{(i)}$ prenos m-tog elementarnog puta od čvora x_o do čvora x_i, $\Delta_m^{(i)}$ je determinanta podgrafa nastalog udaljavanjem svih čvorova pomenutog puta, a sumiranje se vrši po svim elementarnim putevima koji vode od x_o do x_i.

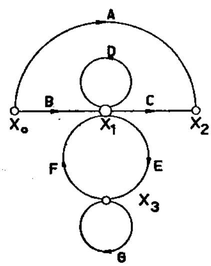
Primer 2. Digraf pridružen sistemu jednačina

$$\begin{aligned} x_1 &= Bx_o + Dx_1 + Fx_3 , \\ x_2 &= Ax_o + Cx_1 , \\ x_3 &= \qquad\quad Ex_1 + Gx_3 , \end{aligned}$$

prikazan je na sl. 2.

Primenom formule (3) dobija se:

$$\frac{x_2}{x_o} = \frac{A(1-(D+EF+G)+GD) + BC(1-G)}{1 - (D+EF+G) + GD} .$$



sl. 2

Masonova formula se izvodi uz pomoć Coatesove formule. Prethodno uvodimo još neke definicije.

Ako je G digraf sa odredjenim prenosima grana, izraz

$$\Delta_C(G) = \sum_F (-1)^{p(F)} C(F) , \tag{4}$$

gde se sumiranje vrši po svim faktorima digrafa G, nazivaćemo Coatesova determinanta digrafa G. Ranije definisanu determinantu digrafa (formule (2)) zvaćemo Masonova determinanta i obeležavaćemo je sa $\Delta_M(G)$.

Coatesova formula (5) iz 6.2 može se napisati po ugledu na Masonovu formulu u obliku

$$x_j = \frac{\sum_m q_m^{(j)} \Delta_C(G_m)}{\Delta_C(G_A)}, \tag{5}$$

gde je $q_m^{(j)}$ prenos m-tog elementarnog puta od čvora 0 do čvora j a G_m podgraf Coatesovog grafa koji je nastao udaljavanjem čvorova pomenutog puta.

Neka je G' digraf dobijen od digrafa G na taj način što je prenos svake petlje grafa G umanjen za 1. Ako G nema petlju kod nekog čvora, u digrafu G' se kod tog čvora pojavljuje petlja sa prenosom -1. Dokazaćemo najpre formulu

$$\Delta_C(G') = \Delta_M(G) . \tag{6}$$

Ako je A matrica reda n kojoj je pridružen digraf G, dobijamo

$$\Delta_C(G') = (-1)^n \det (A-I) . \tag{7}$$

Ako se u formulu (4) iz odeljka 4.3 stavi $\lambda = -1$, dobija se

$$\det(A-I) = (-1)^n(1 + \sum_s (-1)^{n_s} \det M_s) , \tag{8}$$

gde je M_s glavna submatrica (tj. submatrica dobijena izostavljanjem vrsta i kolona sa istim rednim brojevima) matrice A, n_s je red submatrice M_s a sumiranje se vrši po svim submatricama M_s.

Napomenimo da je digraf pridružen matrici M_s podgraf (digrafa G) sa n_s čvorova koji odgovaraju rednim brojevima vrsta (ili kolona) matrice A od kojih je formirana glavna submatrica M_s.

Ako se det M_s razvije primenom definicije determinante, iz (7) i (8) dobija se

$$\Delta_C(G') = 1 + \sum_s \sum_j (-1)^{p(F_{sj})} C(F_{sj}) , \tag{9}$$

pri čemu je F_{sj} faktor digrafa pridruženog matrici M_s. Kako F_{sj} predstavlja skup od $p(F_{sj})$ nedodirujućih kontura, iz (9) se, uzimajući u obzir (2), dobija (6).

Da bismo izveli Masonovu formulu (3) za sistem (1), napišimo (1) u obliku

(10) $$x = x_o A_o + Ax ,$$

gde je

$$A = \|a_{ij}\|_1^n , \quad x^T = \|x_1 x_2 \dots x_n\| , \quad A_o^T = \|a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n\| .$$

Posmatrajmo i sledeći oblik istog sistema

(11) $$(A-I)x = -x_o A_o .$$

Coatesov graf G sistema (11) dobija se od Masonovog grafa H sistema (10) na taj način što se prenos petlje svakog čvora, osim čvora O, umanji za 1, a prenosi grana koje izlaze iz čvora O pomnože sa x_o. Za nepoznatu x_i se prema (5) i (6) dobija

(12) $$x_i = \frac{\sum_m q_m^{(i)} \Delta_C(G_m)}{\Delta_C(G_A')} = \frac{x_o \sum_m p_m^{(i)} \Delta_M(H_m)}{\Delta_M(G_A)} ,$$

gde se u prvom izrazu za x_i razmatranje vrši na Coatesovom grafu G a u drugom na Masonovom grafu H. H_m je podgraf od H dobijen izostavljanjem čvorova m-tog elementarnog puta. Očigledno je $H_m' = G_m$. Ako se (12) podeli sa x_o, dobija se (3).

Formula (2) se može napisati u obliku simboličnog proizvoda

(13) $$= \prod_{i=1}^{s}{}^{*}(1-T_i) ,$$

gde je s broj kontura a zvezdica označava da u proizvodu posle množenja naznačenih faktora treba svaki član oblika $T_{i_1} T_{i_2} \dots$ $\dots T_{i_m}$, u kome se pojavljuju prenosi nedisjunktnih kontura, izjednačiti sa nulom, tj. izostaviti.

Stoga se za proizvoljan graf G formula (6) može napisati u sledećem interesantnom obliku

(14) $$\sum_F (-1)^{p(F)} C(F) = \prod_{i=1}^{s}{}^{*}(1-T_i) .$$

6.4. Chanov metod

Chanov metod (ili metod Chan-Mai) zasniva se na König-Chanovoj definiciji determinante iz odeljka 4.6 i Cramerovim formulama. Metod je za potrebe ove knjige neznatno modifikovan.

Posmatrajmo sistem jednačina

$$Ax = B \tag{1}$$

sa oznakama kao u 6.1. Königov digraf $G(A)$ matrice A crta se po konvenciji sa sl. 1 iz 4.6, tj. svaki beli čvor dolazi na crtežu iznad odgovarajućeg crnog čvora.

Neka je A_i matrica koja se od matrice A dobija na taj način što se i-ta kolona matrice A zameni sa matricom B. Kako je prema Cramerovim formulama

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad (i = 1,2,\ldots,n), \tag{2}$$

posmatraju se pored digrafa $G(A)$ i digrafovi $G(A_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$. Digraf $G(A_i)$ se dobija od digrafa $G(A)$ na taj način što se udalje sve grane koje ulaze u i-ti beli čvor i uvedu nove grane koje u beli čvor i ulaze iz crnih čvorova j za svako j za koje je $b_j \neq 0$. Pri tome, grana (i,j) ima prenos b_j. Da bi se iz $G(A)$ lakše dobili digrafovi $G(A_i)$, beli čvorovi digrafa $G(A)$ su označeni veličinama $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Ovako označen Königov digraf nazivamo Chanov graf sistema (1).

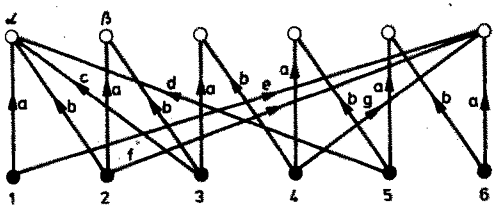
Neka je $\mathcal{S}_i$ skup separacija digrafa $G(A_i)$. Kao i ranije, $\mathcal{S}$ označava skup separacija digrafa $G(A_i)$. Na osnovu König-Chanove definicije determinante i formula (2) neposredno se dobija

$$x_i = \frac{\sum\limits_{S\in\mathcal{S}_i} (-1)^{q(S)} c(S)}{\sum\limits_{S\in\mathcal{S}} (-1)^{q(S)} c(S)}, \quad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{3}$$

Primer 1. Za sistem jednačina

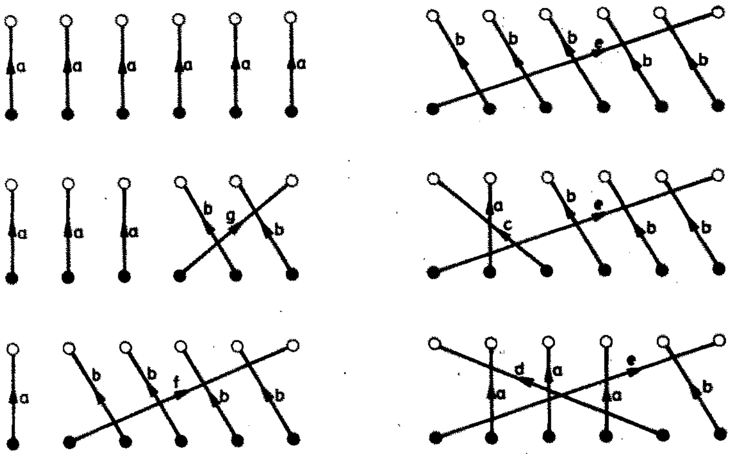
$$
\begin{array}{lllllll}
ax_1 & & & & & + ex_6 & = \alpha , \\
bx_1 & + ax_2 & & & & + fx_6 & = \beta , \\
cx_1 & + bx_2 & + ax_3 & & & & = 0 , \\
 & & bx_3 & + ax_4 & & + gx_6 & = 0 , \\
dx_1 & & & + bx_4 & + ax_5 & & = 0 , \\
 & & & & bx_5 & + ax_6 & = 0 .
\end{array}
$$

Chanov graf je prikazan na sl. 1.



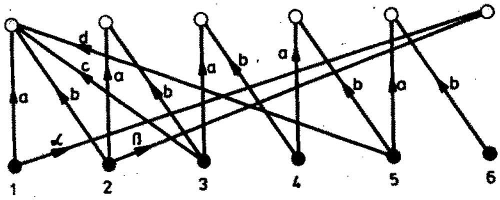
sl. 1

Na sl. 2 prikazane su sve separacije ovog digrafa.

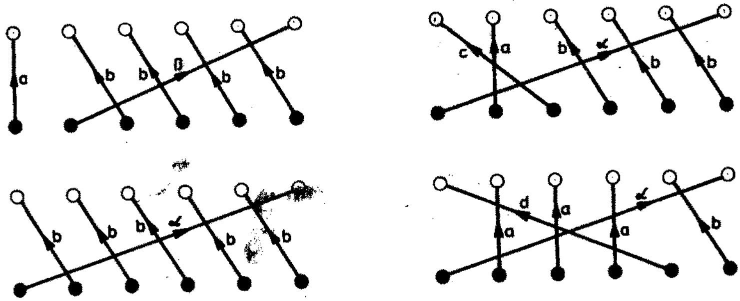


sl.2

Na sl. 3 prikazan je digraf $G(A_6)$, dok su na sl. 4 prikazane sve separacije ovog digrafa.



sl. 3



sl. 4

Prema formuli (3) dobijamo

$$x_6 = \frac{ab^4\beta - b^5\alpha + ab^3c\alpha + a^3bd\alpha}{a^6 + a^3b^2g + ab^4f - b^5e + ab^3ce + a^3bde} .$$

6.5. Rang matrice

U cilju analize proizvoljnih sistema linearnih algebarskih jednačina uvodi se pojam ranga matrice.

Za kvadratne matrice A i B kazaćemo da je matrica A veća od matrice B ako je red matrice A veći od reda matrice B.

Definicija 1. Rang matrice je red njene najveće kvadratne regularne submatrice.

Rang matrice A se obeležava sa rang A.

Nula-matrica 0 ne sadrži nijednu regularnu submatricu pa je, u skladu sa definicijom 1, rang 0 = 0.

Ako je A matrica tipa $m\times n$, ona ima $\binom{m}{p}\binom{n}{p}$ kvadratnih submatrica reda p. Stoga nije praktično da se rang matrice odredjuje na osnovu definicije 1 izuzev za matrice sasvim malog formata i neke druge matrice specijalnog oblika.

Primer 1. Data je matrica

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & a \\ a & 1 & a \end{Vmatrix},$$

gde je a realan broj. Kako je $\det A = a^2 + a^2 + a - a^3 - a - a = -a(a-1)^2$, dobija se rang A = 3 za $a \neq 0$ i $a \neq 1$.
Za a = 0 dobijamo

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

i rang A = 2 jer je, na primer, submatrica $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ regularna.
Ako je a = 1, matrica postaje

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

i njen rang je jednak 1 jer su sve submatrice drugog reda singularne.

Primer 2. Ako je D dijagonalna matrica, digraf G_D sadrži samo petlje kod čvorova koji odgovaraju nenultim elementima (sa dijagonale) matrice D. Pošto G_D ne sadrži puteve koji povezuju različite čvorove, svi kofaktori nedijagonalnih elemenata su jednaki nuli te jedino glavne submatrice mogu biti regularne. Pošto digraf regularne submatrice sadrži bar jedan faktor (u ovom slučaju sastavljen od petlji) rang matrice je jednak broju petlji digrafa G_D tj. broju nenultih elemenata matrice D.

U cilju definisanja jednog praktičnog postupka za odredjivanje ranga matrice uvodimo sledeće definicije.

<u>Definicija 2</u>. Elementarne transformacije matrice su: 1^o zamena mesta dve vrste (ili dve kolone); 2^o množenje jedne vrste ili kolone brojem koji je različit od nule; 3^o dodavanje elemenata jedne vrste (ili kolone), prethodno pomnoženih nekim brojem, odgovarajućim elementima druge vrste (ili kolone).

<u>Definicija 3</u>. Matrica A je ekvivalentna sa matricom B, u oznaci $A \cong B$, ako se matrica B može dobiti od matrice A izvodjenjem konačno mnogo elementarnih transformacija.

Neposredno se dokazuje da je relacija ekvivalentnosti matrica refleksivna, simetrična i tranzitivna, tj.da predstavlja relaciju ekvivalencije.

Bez dokaza navodimo sledeću teoremu.

<u>Teorema 1</u>. Ekvivalentne matrice imaju isti rang.

U praksi se rang matrice čiji su elementi zadati numerički obično odredjuje na taj način što se elementarnim transformacijama matrica transformiše u jednu dijagonalnu matricu. Na osnovu teoreme 1, dobijena dijagonalna matrica ima isti rang kao i početna matrica a rang dijagonalne matrice je na osnovu primera 2 jednak broju njenih nenultih elemenata.

<u>Primer 3</u>.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{Vmatrix} \cong \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{Vmatrix} \cong \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \end{Vmatrix}$$

$$\cong \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \end{Vmatrix} \cong \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{Vmatrix} \cong \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{Vmatrix}$$

$$\cong \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{Vmatrix} \cong \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix} \cong \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Dakle, rang A = 3. Preporučuje se da čitalac pažljivo identifikuje elementarne transformacije izvedene u pojedinim koracima.

Rang matrica igra važnu ulogu u raznim problemima linearne algebre. Sledeća teorema koju takodje navodimo bez dokaza daje osnovu za primene pojma ranga matrice.

Teorema 2. Neka su zadati n-dimenzionalni vektori $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = 1,2,\dots,m$ (nad nekim poljem S). Neka je $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$ matrica čije su vrste vektori a_i. Ako je rang A = = r, tada medju vektorima a_i, $i = 1,2,\dots,m$ postoji r vektora koji su linearno nezavisni. Ostalih m-r vektora su linearne kombinacije ovih r vektora.

6.6. Kronecker-Capellieva teorema

U odeljcima 6.1 - 6.4 razmatrali smo sisteme linearnih algebarskih jednačina kod kojih je broj jednačina jednak broju nepoznatih i kod kojih je determinanta sistema različita od nule. U ovom odeljku posmatramo opšti slučaj sistema linearnih algebarskih jednačina.

(1)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 , \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m . \end{aligned}$$

Navešćemo jednu teoremu koja, uz pomoć pojma ranga matrice, utvrdjuje kada sistem (1) ima rešenje.

Za sistem (1) kažemo da je saglasan ako postoji n-torka $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ koja zadovoljava svaku jednačinu sistema.

Matrice

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}$$

nazivaju se, redom, matrica sistema i proširena matrica sistema.

Teorema 1 (L.Kronecker-A.Capelli). Sistem linearnih algebarskih jednačina (1) je saglasan ako i samo ako je rang A = rang B.

Dokaz. Ako je sistem (1) saglasan, izvršimo nad matricom B sledeće elementarne transformacije: za svako $i = 1,2,\ldots,n$ pomnožimo i-tu kolonu sa x_i i dodajmo je poslednjoj koloni. Tada dobijamo matricu

$$B' = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Iz ovog neposredno sledi rang B = rang B′= rang A, čime je jedan deo teoreme dokazan.

Pretpostavimo sada rang A = rang B = r. Tada postoji r linearno nezavisnih vrsta (tj. n-dimenzionalnih vektora) matrice A. Neka su to prvih r vrsta. Ostalih m-r vrsta su linearne kombinacije ovih vrsta. (Isto se može reći za odgovarajuće linearne forme koje predstavljaju leve strane jednačina u sistemu (1)). No i za vrste matrice B možemo reći da su linearne kombinacije (i to iste kao u prethodnom slučaju) prvih r vrsta. Stoga je poslednjih m-r jednačina iz (1) posledica prvih prvih r jednačina. Poslednjih m-r jednačina možemo isključiti iz daljeg razmatranja jer će one biti automatski zadovoljene ako prvih r jednačina bude zadovoljeno.

Pretpostavimo da je kvadratna submatrica reda r u levom gornjem uglu matrice A regularna. Tada prvih r jednačina iz (1) pišemo u obliku

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n , \\ &\vdots \\ &a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n . \end{aligned} \tag{2}$$

Nepoznatima $x_{r+1},\ldots,x_n$ mogu se dati proizvoljne vrednosti a onda se iz sistema (2) po Cramerovim formulama odredjuju nepoznate $x_1,x_2,\ldots,x_r$.

Ovim je teorema dokazana.

Primer 1. Sistem linearnih algebarskih jednačina

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0\,,$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0\,,$$

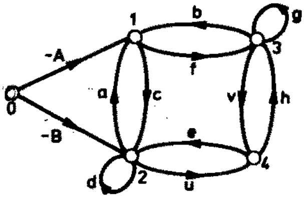
naziva se <u>homogeni</u> sistem. Ovaj sistem ima rešenje $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, koje se naziva <u>trivijalno</u> rešenje. Ako je determinanta sistema $D = \det \|a_{ij}\|_1^n$ različita od nule, na osnovu Cramerovih formula trivijalno rešenje je jedino rešenje sistema. Stoga je potreban uslov za egzistenciju netrivijalnih rešenja izražen pomoću $D=0$. Na osnovu teoreme 1 zaključujemo da je taj uslov i dovoljan jer za $D=0$ sleduje da je rang matrice sistema manji od n te sistem ima beskonačno mnogo rešenja.

6.7. <u>Primeri i zadaci</u>

1. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} ax_2 + bx_3 &= A\,, \\ cx_1 + dx_2 + ex_4 &= B\,, \\ fx_1 + gx_3 + hx_4 &= 0\,, \\ ux_2 + vx_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

ako je $acvh + bfeu - bcuh - afve \neq 0$.



sl. 1

<u>Rešenje</u>. Pridružimo datom sistemu Coatesov digraf (vidi sl. 1). Sada važi

$$x_i = \frac{\sum\limits_{V(0\to i)} (-1)^{p(V(0\to i))} C(V(0\to i))}{\sum\limits_{F} (-1)^{p(F)} C(F)} \qquad (i = 1,2,3,4)\,,$$

pa neposredno sledi

$$x_1 = \frac{-A(eug+dvh) + B(avh-uhb)}{acvh + bfeu - bcuh - afve}, \quad x_2 = \frac{A(cvh-fve)}{acvh + bfeu - bcuh - afve},$$

$$x_3 = \frac{A(feu-cuh)}{acvh + bfeu - bcuh - afve}, \quad x_4 = \frac{A(fvd+cug) + B(ubf-afv)}{acvh + bfeu - bcuh - afve}.$$

2. Dokazati da skup rešenja homogenog sistema linearnih algebarskih jednačina obrazuje vektorski prostor nad odgovarajućim

poljem.

3. Za različite vrednosti realnog parametra λ rešiti sistem linearnih jednačina:

$$\lambda x + y + z = 1, \; x + \lambda y + z = \lambda, \; x + y + \lambda z = \lambda^2.$$

4. Rešiti sistem jednačina

$$ax + y + z = 1, \; x + ay + z = 2, \; x + y + az = -3,$$

gde je a realan broj.

5. Ispitati da li matrice

$$A = \begin{Vmatrix} 3a+1 & a & 4a-1 \\ -a^2+1 & a-1 & -a^2+a \\ a^2+a+2 & a & a^2+2a \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} a+1 & a-2 & a^2-2a \\ 2a & 2a-3 & a^2-2a \\ -2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

imaju isti rang za svako a.

6. Proveriti da li je $x_1=x_2=x_3=x_4=1$ rešenje sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 2x_4 &= 0, \\ 13x_1 - 25x_2 + x_3 - 11x_4 &= 0 \end{aligned}$$

a zatim izračunati determinantu sistema.

7. Iz sistema jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{31}x_1 \qquad\qquad + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

odrediti nepoznatu x_2 pomoću Chanovog grafa.

8. Na osnovu Kronecker-Capellieve teoreme izvesti jedan potreban uslov za saglasnost sistema od n+1 jednačina koje sadrže n nepoznatih.

7. KARAKTERISTIČNI POLINOM I SPEKTAR MATRICE

7.1. Sopstveni vektori i sopstvene vrednosti matrica

n-dimenzionalni vektori će se u ovom poglavlju predstavljati matricama-kolonama tipa $n \times 1$.

Neka je x vektor odredjen sa $x^T = \| x_1 x_2 \dots x_n \|$ i neka je A matrica tipa $m \times n$. Proizvod Ax je matrica-kolona tipa $m \times 1$, tj. Ax je m-dimenzionalni vektor. Stoga se matrica A može shvatiti kao operator koji vektore iz R^n preslikava u vektore iz R^m.

Ako je $A = \| a_{ij} \|_1^n$ kvadratna matrica reda n, vektor Ax je iste dimenzije kao vektor x, pa se može postaviti pitanje kada je vektor Ax kolinearan sa x, tj. kada je

(1) $$Ax = \lambda x$$

za neko λ. Nula-vektor uvek zadovoljava jednačinu (1). Vektor $x \neq 0$ koji zadovoljava (1) naziva se sopstveni vektor matrice A. Broj λ se naziva sopstvena vrednost matrice A. Sopstveni vektor x i sopstvena vrednost λ su jedno drugom pridruženi ili pripadaju jedno drugom.

Jednoj sopstvenoj vrednosti može da pripada više sopstvenih vektora. Ako su x_1 i x_2 sopstveni vektori matrice A koji pripadaju sopstvenij vrednosti λ, tada zbog $Ax_1 = \lambda x_1$ i $Ax_2 = \lambda x_2$ važi i $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha\, x_1 + \beta A x_2 = \alpha\lambda x_1 + \beta\lambda x_2 = \lambda(\alpha x_1 + \beta x_2)$, tj. linearna kombinacija $\alpha x_1 + \beta x_2$ je takodje sopstveni vektor matrice A koji pripada sopstvenoj vrednosti λ. Vidi se da skup sopstvenih vektora matrice A obrazuje potprostor euklidskog n-dimenzionalnog prostora R^n. Dimenzija ovog potprostora naziva se geometrijska višestrukost sopstvene vrednosti λ.

Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori se mogu odrediti ako se, na primer, (1) napiše u razvijenom obliku:

$$(2)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 ,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2 ,\\ &\vdots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n . \end{aligned}$$

Sistemu jednačina (2) ekvivalentan je sistem

$$(3)\qquad \begin{aligned} (\lambda - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n &= 0 ,\\ - a_{21}x_1 + (\lambda - a_{22})x_2 - \dots - a_{2n}x_n &= 0 ,\\ &\vdots\\ - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots + (\lambda - a_{nn})x_n &= 0 . \end{aligned}$$

Kako sopstveni vektor nije nula-vektor, samo netrivijalna rešenja ovog homogenog sistema odredjuju sopstvene vektore. Uslov egzistencije netrivijalnih rešenja je da determinanta sistema bude jednaka nuli, tj.

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & - a_{12} & \dots & - a_{1n} \\ - a_{21} & - a_{22} & & - a_{2n} \\ \vdots & & & \\ - a_{n1} & - a_{n2} & & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 .$$

Uslov (4) može se napisati u obliku

$$(5)\qquad \det(\lambda I - A) = 0 .$$

Ako se determinanta na levoj strani jednačine (4), odnosno (5), razvije, dobija se polinom stepena n po promenljivoj λ, tj. (5) se svodi na

$$(6)\qquad a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 .$$

Jednačina (6), odnosno (4) ili (5), naziva se <u>karakteristična jednačina</u> matrice A. Rešenja karakteristične jednačine su <u>sopstvene vrednosti</u> matrice. Sopstvenih vrednosti ima n ali neke od njih mogu biti medjusobno jednake.

Za svako λ odredjeno jednačinom (6) rešava se sistem (3) i tako dobijaju odgovarajući sopstveni vektori.

<u>Primer 1</u>. Za matricu $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ karakteristična jednačina glasi

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 .$$

Sopstvene vrednosti su $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$. Za $\lambda_1 = 1$ sistem (3) postaje $x_1 - x_2 = 0$, $-x_2 + x_1 = 0$. Rešenje sistema je $x_1 = x_2 = \alpha$, gde je α proizvoljan broj. Sopstveni vektor za sopstvenu vrednost $\lambda_1 = 1$ je $\alpha\left\|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\|$ i on je odredjen sa tačnošću do na jednu multiplikativnu konstantu α. Na sličan način, za $\lambda_2 = -1$, sistem (3) se svodi na jednačinu $-x_1 - x_2 = 0$, tj. $x_2 = -x_1 = -\beta$, gde je β proizvoljan broj. Sopstveni vektor je $\beta\left\|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right\|$.

Svaka sopstvena vrednost λ ima kao koren karakteristične jednačine svoju višestrukost. Ova višestrukost naziva se <u>algebarska višestrukost</u> sopstvene vrednosti λ. Algebarska višestrukost proizvoljne sopstvene vrednosti nije manja od geometrijske višestrukosti.

<u>Primer 2</u>. Matrica $\left\|\begin{matrix}0 & 1\\0 & 0\end{matrix}\right\|$ ima sopstvenu vrednost 0 čija je algebarska višestrukost 2 a geometrijska 1. U primeru 1 algebarske i geometrijske višestrukosti su jednake.

Kolekcija $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sopstvenih vrednosti matrice A naziva se <u>spektar</u> matrice A.

Polinom

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n \tag{7}$$

naziva se <u>karakteristični polinom</u>[1] matrice A. Očigledno je $a_0 = 1$, a ako u (7) stavimo $\lambda = 0$ dobijamo $a_n = (-1)^n \det A$. S druge strane je, prema Vietéovim pravilima, $a_n = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ pa se dobija

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n, \tag{8}$$

tj. determinanta matrice jednaka je proizvodu njenih sopstvenih vrednosti.

Prema teoremi 1 iz 4.3 je

$$a_k = (-1)^k \sum_{M \subset \{1,2,\ldots,n\}} \det A_M , \tag{9}$$

---

1) U literaturi se karakteristični polinom često definiše pomoću determinante $\det(A - \lambda I)$.

gde se sumiranje vrši po svim podskupovima M sa n-k elemenata. Dakle, koeficijent karakterističnog polinoma a_k je sa znakom $(-1)^k$ jednak sumi svih glavnih minora reda k matrice A. Dalje, svakoj glavnoj submatrici A_M (koja je reda k) može se pridružiti odgovarajući digraf D_M i determinanta det A_M izraziti pomoću faktora ovih digrafova. Faktori ovih digrafova su delimični linearni podgrafovi sa po k čvorova digrafa G_A pridruženog matrici A. Stoga je

$$a_k = (-1)^k \sum_{M} (-1)^k \sum_{F \in D_M} (-1)^{p(F)} c(F) \tag{10}$$

$$= \sum_{F \in \mathfrak{F}^{(k)}} (-1)^{p(F)} c(F) ,$$

gde je $\mathfrak{F}^{(k)}$ skup svih linearnih delimičnih podgrafova digrafa G_A, koji sadrže tačno k čvorova. Formula (10) ostaje u važnosti ako se umesto digrafa G_A koristi i digraf G^A. Formula (10) je u literaturi prvi put zabeležena u [69].

<u>Primer 3</u>. Digraf G^A pridružen matrici

$$A = \begin{Vmatrix} a & b & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \\ f & g & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

prikazan je na sl. 1 zajedno sa svim svojim linearnim delimičnim podgrafovima koji su svrstani u grupe prema broju k čvorova.

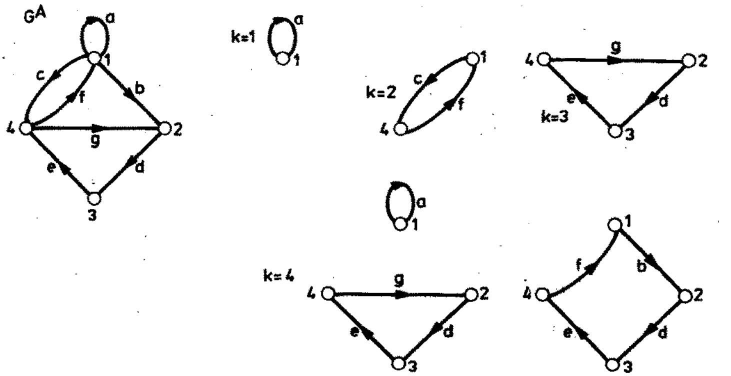
Na osnovu (10) dobija se

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 - a\lambda^3 - cf\lambda^2 - deg\lambda + adeg - bdef.$$

Na osnovu (10) dobijamo $a_1 = -\mathrm{tr}\, A$. S druge strane je $a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$, pa je

$$\mathrm{tr}\, A = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n. \tag{11}$$

Polinom B=P(A) kvadratne matrice A je kvadratna matrica istog reda. Odredićemo sopstvene vrednosti matrice B.



sl. 1

Neka je $Ax = \lambda x$ (tj. neka je x sopstveni vektor za sopstvenu vrednost λ matrice A) i neka je

$$B = P(A) = b_o A^k + b_1 A^{k-1} + \ldots + b_{k-1}A + b_k.$$

Tada je

$$\begin{aligned} Bx &= (b_o A^k + b_1 A^{k-1} + \ldots + b_{k-1}A + b_k)x \\ &= b_o A^k x + b_1 A^{k-1}x + \ldots + b_{k-1}Ax + b_k x \\ &= b_o \lambda^k x + b_1 \lambda^{k-1} x + \ldots + b_{k-1}\lambda x + b_k x \\ &= (b_o \lambda^k + b_1 \lambda^{k-1} + \ldots + b_{k-1}\lambda + b_k)x = P(\lambda)x. \end{aligned}$$

Dakle, x je sopstveni vektor i za matricu B za sopstvenu vrednost $P(\lambda)$. Prema tome, ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti matrice A, tada su $P(\lambda_1), P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_n)$ sopstvene vrednosti matrice P(A).

Može se pokazati da su višestrukosti sopstvenih vrednosti $P(\lambda_1), P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_n)$ jednake višestrukostima sopstvenih vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Ako se neke od sopstvenih vrednosti matrice B poklapaju, odgovarajuće višestrukosti se sabiraju.

Specijalno, ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti matrice A, tada su $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ sopstvene vrednosti matrice A^k $(k=1,2,\dots,)$. Iz ovog sledi formula

(12) $$\operatorname{tr} A^k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k .$$

Na sličan način se mogu odrediti sopstvene vrednosti Kroneckerovog proizvoda dve kvadratne matrice.

Ako su A i B kvadratne matrice i ako za vektore (matrice-kolone) x i y važi $Ax = \lambda x$ i $By = \mu y$, tada je

$$(A\otimes B)(x\otimes y) = (Ax)\otimes(By) = (\lambda x)\otimes(\mu y) = \lambda\mu(x\otimes y) .$$

Dakle, ako je λ sopstvena vrednost matrice A i ako je μ sopstvena vrednost matrice B, proizvod $\lambda\mu$ je sopstvena vrednost Kroneckerovog proizvoda $A\otimes B$. Ovo rezonovanje je mogućno upotpuniti tako da dobijamo sledeći zaključak. Ako se spektar matrice A sastoji od brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ i ako se spektar matrice B sastoji od brojeva $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, spektar matrice $A\otimes B$ se sastoji od brojeva $\lambda_i\mu_j$ $(i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,m)$.

7.2. Cayley-Hamiltonova teorema i minimalni polinom kvadratne matrice

Kvaziveza Q_{ij} izmedju čvorova i i j u digrafu G sa n čvorova je uredjen par (C, P_{ij}), gde je C skup medjusobno disjunktnih orijentisanih kontura digrafa G a P_{ij} put izmedju čvorova i i j, pri čemu je ukupan broj grana u konturama iz C i putu P_{ij} jednak n. Neka je $Q(i,j)$ skup svih kvaziveza Q_{ij}. Za fiksirano i,j indekse i,j ćemo izostaviti i za $Q_{ij}\in Q(i,j)$ pisati $Q = (C,P)$. Prenos $\sigma(Q)$ kvaziveze Q definiše se kao proizvod prenosa grana koje obrazuju kvazivezu a $p(Q)$ kao broj kontura u C.

Teorema 1. Ako je A kvadratna matrica i $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ njen karakteristični polinom, tada je $P(A) = O$.

Dokaz. Neka je $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_k\lambda^{n-k} + \dots + a_n$. Tada je

(1) $$P(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_kA^{n-k} + \dots + a_nI .$$

Prema (10) iz 7.1 koeficijent a_k se izražava pomoću prenosa linearnih delimičnih podgrafova digrafa G^A koji sadrže tačno k grana. Prema teoremi 1 iz 3.1 element na mestu (i,j) matrice A^{n-k} jednak je zbiru prenosa puteva dužine n-k što vode iz čvora i u čvor j. Stoga je element na mestu (i,j) u matrici a_kA^{n-k} jednak $\sum_{Q} (-1)^{p(Q)}c(Q)$, gde se sumiranje vrši po svim kvazivezama Q = (C,P) izmedju čvorova i i j u kojima put P ima dužinu n-k. Sabirajući članove a_kA^{n-k} za $0 \leqslant k \leqslant n$ zaključujemo da je element na mestu (i,j) u matrici (1) jednak

$$(2) \qquad \sum_{Q \in Q(i,j)} (-1)^{p(Q)}c(Q) .$$

Za svako $Q \in Q(i,j)$ definisaćemo $\overline{Q} \in Q(i,j)$ na sledeći način. Neka je Q = (C,P). Podjimo iz čvora i po putu P ka čvoru j. Ako konture iz C sadrže k grana, put P sadrži n-k grana. Put P prolazi n-k+1 puta kroz neki čvor računajući tu i početni i završni čvor. Pošto konture iz C sadrže k čvorova a digraf G ih ima ukupno n, krećući se po putu P moramo naići 1^o na čvor x puta P koji smo već jednom obišli, ili 2^o na čvor y u nekoj konturi K iz C. U prvom slučaju se $\overline{Q}$ dobija iz Q tako što se iz P udalje grane predjene izmedju dva dolaska u x i tako formirana kontura doda skupu kontura C. U drugom slučaju se u put P umeću kod čvora y grane iz K a K se udaljuje iz C.

Vidi se da je $\overline{\overline{Q}} = Q$, $c(\overline{Q}) = c(Q)$ i $p(\overline{Q}) = p(Q) \pm 1$. Pošto je $(-1)^{p(Q)}c(Q) + (-1)^{p(\overline{Q})}c(\overline{Q}) = 0$ za svako Q, izraz (2) je jednak nuli.

Ovim je teorema dokazana

Teorema 1 se naziva Cayley-Hamiltonova teorema. Navedeni kombinatorni dokaz je otkriven tek nedavno a ovde je formulisan prema [108], [109]. Cayley-Hamiltonova teorema predstavlja jednu od najznačajnijih teorema u teoriji matrica. Ona ima mnogobrojne primene u fizici, elektrotehnici i drugim tehničkim disciplinama.

Ova teorema se često izražava u sledećem obliku: Svaka matrica je, u matričnom smislu, nula svog karakterističnog polinoma.

Korisno je da čitalac direktno proveri ovu teoremu za kvadratne matrice drugog reda.

Pored karakterističnog polinoma $P(\lambda)$ postoje i drugi polinomi $Q(\lambda)$ za koje je $Q(A) = 0$. Na primer, svaki polinom oblika $Q(\lambda) = P(\lambda)R(\lambda)$, gde je $R(\lambda)$ proizvoljni polinom, ima spomenutu osobinu.

Polinom $m(\lambda)$ najmanjeg stepena u kome je koeficijent uz najstariji član jednak 1 i za koji je $m(A) = 0$ naziva se <u>minimalni polinom</u> matrice A.

Lako se uvidja da je minimalni polinom $m(\lambda)$ za datu matricu A jedinstven i da je svaki polinom $Q(\lambda)$, sa osobinom $Q(A) = 0$, deljiv minimalnim polinomom $m(\lambda)$. Na osnovu ovoga se zaključuje da je minimalni polinom faktor karakterističnog polinoma. Na osnovu ovoga se minimalni polinom najčešće i odredjuje.

<u>Primer 2</u>. Karakteristični polinom matrice

$$\begin{Vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{Vmatrix}$$

je polinom $P(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$. Minimalni polinom $m(\lambda)$ je jedan od delilaca ovog polinoma. Neposrednom proverom se dobija da je $m(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

Ako se minimalni polinom matrice poklapa sa njenim karakterističnim polinomom matrica je <u>nederogatorna</u>. U suprotnom slučaju, kada je stepen minimalnog polinoma manji od stepena karakterističnog polinoma, matrica se naziva <u>derogatorna</u>.

Kao što je definisano u odeljku 3.4, prateća matrica polinoma $f(\lambda) = \lambda^k + b_1\lambda^{k-1} + \ldots + b_{k-1}\lambda + b_k$ je matrica A koja je u 3.4 data sa (12) a njen digraf G^A je prikazan na sl. 1 u 3.4 (sa dopunskim čvorom 0 koji u ovom kontekstu treba izostaviti). Na osnovu zadatka 8 iz 4.9 zaključujemo da je $f(\lambda)$ karakteristični polinom matrice A. Dokazaćemo da je $f(\lambda)$ takodje minimalni polinom matrice A. Pretpostavimo suprotno, da postoji polinom $g(\lambda) = g_0\lambda^s + g_1\lambda^{s-1} + \ldots + g_{s-1}\lambda + g_s$ stepena $s < k$ takav da je $g(A) = 0$. Posmatrajmo čvorove 1 i s+1 u G^A. Jedini put dužine manje od k koji vodi iz 1 u s+1 ima dužinu s. Stoga uslov $g(A) = 0$ daje $g_0 = 0$, što protivureči da je $g(\lambda)$ polinom stepena s. Dakle $f(\lambda)$ je karakteristični i minimalni polinom svoje prateće matrice. Prateća matrica proizvoljnog polinoma je nederogatorna.

7.3. Sličnost matrica i Jordanov kanonični oblik

Definicija 1. Matrica A je slična sa matricom B ako postoji nesingularna matrica X takva da je

$$(1) \qquad A = X^{-1}BX .$$

Ako je matrica A slična sa matricom B, piše se $A \sim B$. Iz definicije se vidi da je relacija sličnosti definisana samo za kvadratne matrice. Ako važi jednakost (1), kaže se da se A dobija iz B transformacijom pomoću matrice X ili da je A slična sa B preko matrice X.

Ako se stavi B = A, vidi se da je jednakost (1) zadovoljena sa X = I. Dakle, $A \sim A$, tj. relacija sličnosti je refleksivna.

Iz (1) se dobija $B = XAX^{-1}$, tj. $B = Y^{-1}AY$, gde je $Y = X^{-1}$. Znači da iz $A \sim B$ sleduje $B \sim A$ pa zaključujemo da je relacija sličnosti simetrična.

Relacija sličnosti matrica je i tranzitivna jer iz $A \sim B$ i $B \sim C$ sleduje najpre egzistencija matrica X i Y takvih da je $A = X^{-1}BX$ i $B = Y^{-1}CY$, a zatim je $A = X^{-1}Y^{-1}CYX$, tj. $A = Z^{-1}CZ$, gde je $Z = YX$, što znači $A \sim C$.

Dakle, relacija sličnosti je relacija ekvivalencije. Skup kvadratnih matrica je ovom relacijom razbijen na klase ekvivalencije, koje se nazivaju klasama sličnosti. Dve matrice pripadaju istoj klasi sličnosti ako i samo ako su slične.

Slične matrice imaju niz zajedničkih osobina. Na primer, slične matrice imaju isti red, što je očigledno. One imaju i isti karakteristični polinom, tj. iste sopstvene vrednosti, jer iz $A \sim B$ sleduje egzistencija matrice X takve da važi (1), a zatim je

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det(\lambda X^{-1}X - X^{-1}BX) = \det X^{-1}(\lambda I - B)X \\ &= \det(X^{-1}) \det(\lambda I - B) \det X = \det(X^{-1}X) \det(\lambda I - B) \\ &= \det I \det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - B) , \end{aligned}$$

što dokazuje tvrdjenje.

Medjutim, ako dve matrice imaju isti karakteristični polinom, one ne moraju biti slične.

Primer 1. Matrice $A = I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ i $B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ imaju isti karakteristični polinom $(\lambda - 1)^2$. Medjutim, one nisu slične jer bi za svaku nesingularnu matricu X bilo $X^{-1}AX = X^{-1}IX = X^{-1}X = I$ te ne bi mogla važiti jednakost $B = X^{-1}AX$.

Primer 2. Ako su digrafovi G_A i G_B matrica A i B izomorfni, na osnovu primera 4 iz 2.2 važi jednakost $A = P^T BP$, gde je P permutaciona matrica. Kao što je spomenuto u zadatku 4 iz 5.4, $P^{-1} = P^T$ pa se dobija $A = P^{-1}BP$. Dakle, ako su G_A i G_B izomorfni, matrice A i B su slične preko jedne permutacione matrice. Isti zaključak je u važnosti i kada se G_A i G_B zamene sa G^A i G^B. Ako su pak Königovi digrafovi G(A) i G(B) izomorfni, matrice A i B su povezane relacijom $A = QBP$, gde su P i Q permutacione matrice. Permutaciona matrica Q permutuje crne čvorove digrafa G(B) a permutaciona matrica P permutuje bele čvorove. Ako se zahteva da A i B budu slične matrice, digrafovi G(A) i G(B) treba da budu izomorfni sa izomorfizmom koji održava sparenost crnih i belih čvorova. To znači da izomorfizam φ ima sledeću osobinu. Ako φ preslikava crni čvor i digrafa G(A) u crni čvor j digrafa G(B), onda je slika belog čvora i digrafa G(A) upravo beli čvor j digrafa G(B), i obrnuto. Drugim rečima, digraf G(A) se može dobiti iz digrafa G(B) permutacijom parova crnih i belih čvorova (a ne proizvoljnom permutacijom čvorova, kao što je to bio slučaj kod digrafova G_A i G_B, odnosno G^A i G^B).

Ako kvadratna matrica A reda n ima n linearno nezavisnih sopstvenih vektora (to je, na primer, slučaj kod simetrične matrice), tada je matrica A slična dijagonalnoj matrici $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, gde su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti matrice A. Zaista, ako je U matrica čije su kolone jedinični sopstveni vektori $u_1, u_2, \ldots, u_n$ koji pripadaju redom sopstvenim vrednostima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ i koji su medjusobno normalni, dobija se $U^T = U^{-1}$ a zatim

$$(2) \qquad U^{-1}AU = \begin{Vmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{Vmatrix} A \begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \ldots & \lambda_n u_n \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} \lambda_1 u_1^T u_1 & \lambda_2 u_1^T u_2 & \dots & \lambda_n u_1^T u_n \\ \lambda_1 u_2^T u_1 & \lambda_2 u_2^T u_2 & & \lambda_n u_2^T u_n \\ \vdots & & & \\ \lambda_1 u_n^T u_1 & \lambda_2 u_n^T u_2 & & \lambda_n u_n^T u_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{Vmatrix},$$

jer je $u_i^T u_j = \delta_{ij}$.

Postupak nalaženja dijagonalne matrice koja je slična zadatoj matrici naziva se dijagonalizacija matrice.

Medjutim, nije svaka matrica slična nekoj dijagonalnoj matrici. Ipak, svaka matrica je slična jednoj matrici koja pored elemenata na glavnoj dijagonali ima još samo na dijagonali, neposredno uz glavnu dijagonalu, elemente različite od nule. Ovakve matrice nazivaju se Jordanove matrice i sada ćemo ih striktno definisati.

Definicija 2. Kvadratna matrica reda n

$$J_1(\lambda) = \|\lambda\| \qquad (n = 1),$$

$$J_n(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{Vmatrix} \qquad (n > 1),$$

naziva se Jordanov blok. Direktna suma Jordanovih blokova

$$J_{n_1}(\lambda_1) \dotplus J_{n_2}(\lambda_2) \dotplus \dots \dotplus J_{n_k}(\lambda_k)$$

je Jordanova matrica.

Jordanova matrica je kvazidijagonalna matrica a medju brojevima $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ može biti i medjusobno jednakih.

Teorema 1. **Svaka kvadratna matrica je slična nekoj Jordanovoj matrici.**

Dokaz ove teoreme je veoma opširan i njemu posvećujemo ostatak teksta u ovom odeljku. Plan dokaza je sledeći.

Da bismo dokazali sličnost zadate matrice A sa jednom

Jordanovom matricom dokazaćemo, najpre, da je A slična sa jednom gornje trougaonom matricom B. Dalje se dokazuje da je B slična sa jednom kvazidijagonalnom matricom C u kojoj su dijagonalni blokovi gornje trougaone matrice. Najzad dokazujemo sličnost matrice C sa jednom Jordanovom matricom J. Zbog tranzitivnosti relacije sličnosti izlazi da je $A \sim J$.

Lema 1. Kvadratna matrica A reda n slična je sa gornje trougaonom matricom B u kojoj se na glavnoj dijagonali nalaze sopstvene vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ matrice A. Poredak sopstvenih vrednosti na glavnoj dijagonali može se proizvoljno izabrati.

Dokaz. Transformaciju matrice A u matricu B izvršićemo nizom koraka. U prvom koraku formiramo matricu $A^* = X^{-1}AX$, gde je $X = \|x_1 \ Y\|$ regularna matrica, pri čemu je x_1 sopstveni vektor (kolona) matrice A za sopstvenu vrednost λ_1 a Y matrica tipa $n \times (n-1)$ takva da je X regularna matrica.

Neka je $X^{-1} = \begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{Vmatrix}$. Iz uslova $X^{-1}X = I$ dobijaju se za vektore

-vrste $z_1, z_2, \ldots, z_n$ relacije $z_1x_1 = 1$, $z_ix_1 = 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$.
Prva kolona matrice $X^{-1}AX$ ima stoga oblik

$$X^{-1}Ax_1 = X^{-1}\lambda_1 x_1 = \lambda_1 \begin{Vmatrix} z_1x_1 \\ z_2x_1 \\ \vdots \\ z_nx_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix},$$

pa je

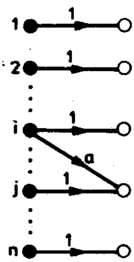
$$X^{-1}AX = \left\Vert\begin{array}{c|c} \lambda_1 & a_1 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right\Vert .$$

Sopstvene vrednosti matrice A_1 su preostalih n-1 sopstvenih vrednosti matrice A. Sada isti postupak treba primeniti na matricu A_1, itd., dok se ne dobije matrica prvog reda koja već ima gornje trougaoni oblik. Ako je S matrica koja matricu A_1 transformiše na gornje trougaoni oblik, onda matrica $\left\Vert\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right\Vert$ transformiše matricu A^* na gornje trougaoni oblik.

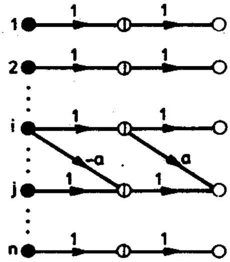
Ovim je dokaz završen.

Opisaćemo sada dve slične transformacije matrica koje ćemo često koristiti u daljem izlaganju.

1° Neka je E_{ij} matrica čiji je element na mestu (i,j) jednak 1 dok su ostali elementi jednaki nuli. Königov digraf matrice $I + aE_{ij}$ reda n prikazan je na sl. 1.



sl. 1



sl. 2

Na sl. 2 prikazana je kompozicija Königovih digrafova za matrični proizvod na levoj strani jednakosti

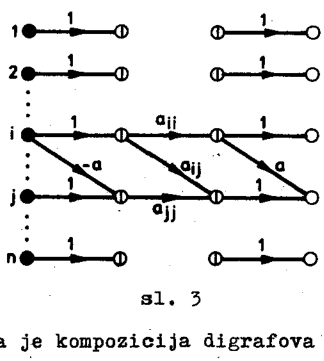
(3) $$(I - aE_{ij})(I + aE_{ij}) = I.$$

Sa sl. 2 se neposredno dobija (3). Odavde je

(4) $$(I + aE_{ij})^{-1} = I - aE_{ij}.$$

Neka su matrice A i B slične preko matrice $I + aE_{ij}$, tj. neka je

(5) $$B = (I - aE_{ij})A(I + aE_{ij}).$$



sl. 3

Na sl. 3 prikazana je kompozicija digrafova za proizvod matrica na desnoj strani relacije (5).

Sa sl. 3 se vidi da se transformacija sastoji u tome što su i-toj vrsti matrice A dodati elementi j-te vrste pomnoženi sa -a i što su j-toj koloni dodati elementi i-te kolone pomnoženi sa a. Ako je uz to A gornje trougaona matrica, grane digrafa G(A) idu "na dole" pa se transformacijom i-ta vrsta eventualno menja samo počevši od mesta (i,j) pa nadesno. Slično tome j-ta kolona se može menjati samo na mestu (i,j) i iznad. Specijalno za $i < j$ imamo

$$b_{ij} = a_{ij} + a(a_{ii} - a_{jj}) . \tag{6}$$

Ako je $a_{ii} \neq a_{jj}$, može se a odabrati tako da bude $b_{ij} = 0$. Dakle, transformacijom pomoću matrice $I + aE_{ij}$ može se u gornje trougaonoj matrici proizvesti nula na mestu (i,j) ako je $a_{ii} \neq a_{jj}$, pri čemu se još, eventualno, menjaju elementi i-te vrste desno od mesta (i,j) i elementi j-te kolone iznad ovog mesta.

2° Ako se u digrafu G(A) matrice A permutuju oznake parova crnih i belih čvorova, dobija se digraf G(B) matrice B koja je slična sa matricom A preko jedne permutacione matrice (videti takodje primer 2).

<u>Lema 2</u>. Svaka kvadratna matrica A je slična nekoj kvazidijagonalnoj matrici C oblika

$$C = C_{11} \dotplus C_{22} \dotplus \cdots \dotplus C_{rr} , \tag{7}$$

gde je C_{ii} gornja trougaona matrica čiji su elementi na glavnoj dijagonali jednaki sopstvenoj vrednosti μ_i matrice A. Pri tome je red matrice C_{ii} jednak višestrukosti sopstvene vrednosti μ_i.

<u>Dokaz</u>. Na osnovu leme 1 matrica A je slična sa gornje trougaonom matricom B, pri čemu se na glavnoj dijagonali matrice B nalaze sopstvene vrednosti matrice A. Neka je matrica B odabrana tako da se medjusobno jednake sopstvene vrednosti nalaze na susednim mestima glavne dijagonale. Neka su $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ sopstvene vrednosti matrice A sa višestrukostima $n_1, n_2, \ldots, n_r$, respektivno. Tada se B može izabrati u obliku

$$(8) \qquad B = \begin{Vmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ & C_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{rr} \end{Vmatrix}$$

gde je C_{ss} $(s = 1,2,\ldots,r)$ (kvadratna) gornje trougaona matrica reda n_s u kojoj su na glavnoj dijagonali svi elementi jednaki μ_s. Transformisaćemo matricu B uzastopno pomoću raznih matrica oblika $I + aE_{ij}$. Mesta (i,j) u matrici B koja odgovaraju submatricama C_{pq} $(p \neq q)$ nazivaćemo <u>plava</u> mesta. Pošto se za plava mesta (i,j), i-ti i j-ti element glavne dijagonale matrice C razlikuju, može se na plavom mestu (i,j) transformacijom oblika $I + aE_{ij}$ dobiti broj nula. Pri tome se mogu promeniti elementi na plavim mestima iznad i desno od plavog mesta (i,j). Da ne bismo daljim transformacijama "pokvarili" već dobijene nule, plava mesta ćemo tretirati specijalnim redosledom. Poredjajmo plava mesta u niz tako da je <u>uvek</u> plavo mesto (i,j) ispred mesta (k,r) ako je $i<k$ i $j = r$ ili $i=k$ i $j>r$. Ovo se postiže ako se, na primer, uzmu najpre plava mesta (i,j) sa najmanjim indeksom <u>i</u>, i ona poredjaju prema opadajućim indeksima <u>j</u>, a zatim uzmu mesta sa sledećom vrednosti <u>i</u> i ona poredjaju na isti način prema <u>j</u>, itd. dok se ne iscrpe sva plava mesta. Dakle, na svim plavim mestima mogu se dobiti nule i matrica (8) se svodi na oblik (7).

Ovim je lema dokazana.

Matrica C naziva se <u>Jacobijev kanonični oblik</u> matrice A.

<u>Lema 3</u>. Svaka nilpotentna matrica A je slična sa direktnom sumom matrica oblika $H_s = \|\delta_{i,j-1}\|_1^s$.

<u>Dokaz</u>. Prema definiciji nilpotentne matrice postoji prirodan broj k takav da je $A^k = 0$. Ako je x sopstveni vektor matrice A koji pripada sopstvenoj vrednosti λ , zbog $Ax = \lambda x$ dobija se $A^k x = \lambda^k x = 0$, tj. $\lambda^k = 0$ i $\lambda = 0$. Dakle, sve sopstvene vrednosti nilpotentne matrice su jednake nuli. Prema lemi 1, A je slična jednoj strogo gornje trougaonoj matrici $C = \|c_{ij}\|_1^n$ (tj. $c_{ij} = 0$ za $i \geqslant j$).

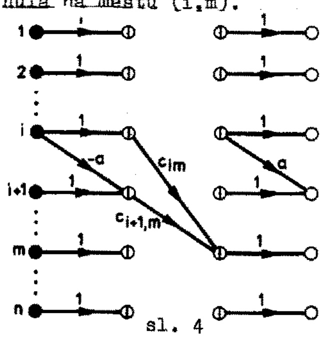
Razmestimo čvorove digrafa $G(C)$ po ugledu na sl. 1.

Grane ovog digrafa idu "na dole". Najviša grana koja izlazi iz i-tog crnog čvora naziva se glavna grana tog čvora. Redni broj belog čvora u kojem se završava glavna grana crnog čvora i naziva se rang čvora i i obeležava se sa σ_i. Ako iz čvora i ne izlazi nijedna grana, usvaja se $\sigma_i = +\infty$.

Dokazaćemo da je matrica C slična sa jednom strogo trougaonom matricom D za koju glavne grane crnih čvorova digrafa G(D) nemaju zajedničkih tačaka. To ćemo postići nizom sličnih transformacija oblika 1° i 2°. U stvari, vršićemo permutaciju, tj. promenu redosleda parova čvorova. Kao što je već rečeno, par obrazuju jedan crni čvor i beli čvor sa istim rednim brojem. Ove parove ćemo na specijalan način smeštati postepeno na donji deo crteža. Prilikom premeštanja par čvorova dobija novi redni broj. Radi kratkoće u izražavanju govorićemo o premeštanju crnih čvorova iako se sa crnim čvorom premešta i odgovarajući beli čvor.

Premestimo najpre izolovane crne čvorove na dole. Medju ostalim crnim čvorovima uočimo one najvećeg ranga, a između njih najniži, i spustimo ga iznad dole već smeštenih crnih čvorova. Zbog premeštanja odgovarajućeg belog čvora pri ovome se može promeniti rang samo onih čvorova koji imaju manji rang od čvora koji se premešta. Ponavljajmo ovaj postupak sve dok se ne desi da dva dole smeštena crna čvora imaju isti rang. Tada postupamo na sledeći način.

Neka za crne čvorove i,i+1 važi $\sigma_i = \sigma_{i+1} = m$. Tada se transformacijom pomoću matrice $I + aE_{i,i+1}$ sa pogodno izabranim a postiže nula na mestu (i,m).

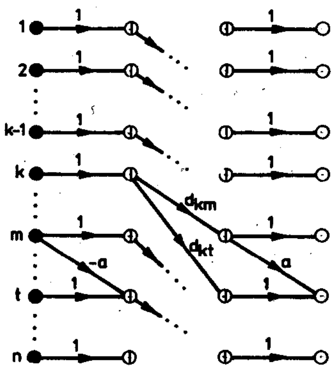


sl. 4

Zaista, prema sl. 4 treba izabrati a tako da je $c_{im} - ac_{i+1,m} = 0$. Ovom transformacijom povećava se rang čvora i ali ne i čvora i+1. Crni čvorovi ranga i+1 mogu, eventualno, da povećaju rang ali to nije bitno za dalja razmatranja. Kod crnih čvorova ispod čvora i ništa se ne menja. Sada se čvorovi i i i+1 smatraju kao nesmešteni i ponavlja se ranija procedura.

Na kraju zaista dobijamo matricu D sa traženim osobinama. Rangovi crnih čvorova digrafa G(D) obrazuju strogo rastući niz.

U digrafu G(D) možemo postupno eliminisati sporedne grane (tj. grane koje nisu glavne) svih čvorova. Pretpostavimo da smo već eliminisali sporedne grane crnih čvorova i za $i < k$ i posmatrajmo crni čvor k. Neka je $\sigma_k = m$. Primenimo redom transformacije pomoću matrica $I + aE_{mt}$ (videti sl. 5) za $t = m+1, m+2, \ldots, n$.

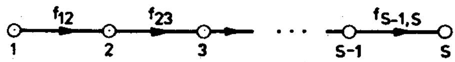


sl. 5

Ako se izabere a takvo da je $d_{km}a + d_{kt} = 0$, element matrice D na mestu (k,t) postaje nula, tj. uklanja se jedna sporedna grana čvora k. Pošto glavne grane nemaju zajedničkih tačaka, ovom transformacijom se ne menja ništa iznad čvora k. Na prvi pogled može da se izmeni situacija crnog čvora m. Medjutim, pošto su glavne grane čvorova m i t disjunktne, moguća je promena samo sporednih grana čvora m što ovde nije bitno.

Na opisani način dolazimo do matrice F čiji digraf

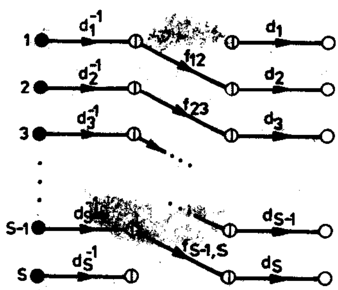
G(F) sadrži samo glavne grane. Posmatrajmo sada digraf G^F. Ovaj digraf ne sadrži konture (jer grane vode od čvorova sa manjim rednim u čvorove sa većim rednim brojem), iz svakog čvora izlazi najviše jedna grana i u svaki čvor ulazi najviše jedna grana. Komponente ovog digrafa su očigledno digrafovi oblika digrafa sa sl. 6.



sl. 6

Prenumerišimo čvorove digrafa G^F tako što ćemo uzeti jednu komponentu i njene čvorove numerisati kao na sl. 6, a zatim nastaviti numeraciju drugih komponenti na isti način.

Kada bi prenosi grana digrafa G^F bili jednaki 1 dobijena matrica bi bila direktna suma matrica H_s iz leme 3. No prenosi mogu postati jednaki 1 ako se na F primeni transformacija pomoću pogodne dijagonalne matrice $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_s)$. Da ovakva matrica postoji uveravamo se pomoću sl. 7, gde je dat transformacioni digraf za slučaj kada G^F ima samo jednu komponentu.



sl. 7

Opšti slučaj je, očigledno, sasvim analogan.

Ako se izabere $d_1 = 1$ onda se sa sl. 7 dobijaju relacije

$$f_{12} d_2 = 1, \quad f_{23} \frac{d_3}{d_2} = 1, \quad \ldots, \quad f_{s-1,s} \frac{d_s}{d_{s-1}} = 1,$$

odakle je

$$d_2 = \frac{1}{f_{12}}\ ,\ d_3 = \frac{1}{f_{12}f_{23}}\ ,\dots,\ d_s = \frac{1}{f_{12}f_{23}\cdots f_{s-1,s}}$$

Ovim je lema dokazana.

<u>Dokaz teoreme 1</u>. Prema lemi 2 svaka kvadratna matrica je slična jednoj matrici oblika (7). Kao što se vidi iz dokaza leme 2, važi relacija

$$C_{ss} = \mu_s I + N_s\ ,\quad s = 1,2,\dots,r\ ,$$

gde je N_s jedna nilpotentna matrica reda n_s. Prema lemi 3 postoji nesingularna matrica X_s takva da je

$$X_s^{-1} N_s X_s = J_{m_1}(0) \dotplus J_{m_2}(0) \dotplus \dots \dotplus J_{m_p}(0)$$

za neko p. Sada je

$$X_s^{-1} C_{ss} X_s = J_{m_1}(\mu_s) \dotplus J_{m_2}(\mu_s) \dotplus \dots \dotplus J_{m_p}(\mu_s)\ ,$$

što se neposredno proverava naznačenim množenjem.

Sada se pomoću matrice

$$X = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \dots \dotplus X_s$$

matrica A očigledno transformiše u jednu Jordanovu matricu.

Ovim je dokaz završen.

Na glavnoj dijagonali nalaze se sopstvene vrednosti matrice A. Može postojati i više Jordanovih blokova koji odgovaraju istoj sopstvenoj vrednosti.

Jordanova matrica koja je slična sa matricom A naziva se <u>Jordanov kanonični oblik</u> matrice A. Jordanov kanonični oblik nije jedinstven jer je redosled redjanja Jordanovih blokova duž dijagonale Jordanove kvazidijagonalne matrice proizvoljan.

Pojam sličnosti matrica je od interesa u teoriji vektorskih prostora. Neka je $\mathfrak{A}$ linearni operator koji preslikava vektorski prostor V u samog sebe. Za zadatu bazu B prostora V operator $\mathfrak{A}$ se predstavlja jednom kvadratnom matricom A. Neka su B_1 i B_2 dve baze prostora i A_1 i A_2 odgovarajuće matrice operatora $\mathfrak{A}$. Može se pokazati da su matrice A_1 i A_2 slične.

Prilikom smene promenljivih u kvadratnoj formi nailazi se takodje na pojam sličnosti matrica. Ako se u kvadratnoj formi $x^T Ax$ ($A = \|a_{ij}\|_1^n$, $x^T = \|x_1 x_2 \ldots x_n\|$) uvede smena promenljivih $x = Sy$ ($S = \|s_{ij}\|_1^n$, $S^{-1} = S^T$, $y = \|y_1 y_2 \ldots y_n\|$), dobija se $x^T Ax = (Sy)^T ASy = y^T S^T ASy = y^T(S^{-1}AS)y = y^T By$. Matrica B je simetrična ako je matrica A simetrična. Dakle, dobijena je kvadratna forma po novim promenljivima a matrice stare i nove kvadratne forme su slične.

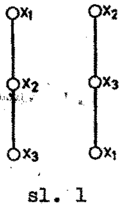
7.4. Karakteristični polinom grafa

Graf može da bude predstavljen jednom kvadratnom matricom čiji je red jednak broju čvorova grafa. Element na preseku i-te vrste i j-te kolone ove matrice jednak je broju grana koje povezuju čvorove x_i i x_j, pri čemu su čvorovi grafa označeni sa $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ova matrica se zove matrica susedstva grafa i obeležava se sa A.

Primer 1. Matrice susedstva grafa na sl. 1 i prvog multigrafa sa sl. 2 iz odeljka 1.1 su, redom,

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Ako dopustimo da dva čvora mogu biti spojena najviše jednom granom, elementi matrice A mogu biti samo 0 ili 1. Elementi matrice susedstva multigrafa su prirodni brojevi i nula. Matrice susedstva grafova i multigrafova su simetrične matrice. Zbir elemenata sa glavne dijagonale jednak je broju petlji u grafu.



sl. 1

Regularni grafovi stepena r imaju matricu susedstva u kojoj se u svakoj vrsti i svakoj koloni nalazi tačno r jedinica. Matrica susedstva potpunih grafova ima na glavnoj dijagonali elemente jednake nuli; ostali elementi matrice jednaki su 1.

Izomorfni grafovi mogu imati različite matrice susedstva.

Primer 2. Na sl. 1 data su dva izomorfna grafa (tj. jedan graf sa dve različite numeracije čvorova). Ovim grafovima odgovaraju matrice susedstva

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Dakle, $A_1 \neq A_2$. Medjutim, iz načina formiranja matrice susedstva vidi se da se različite matrice susedstva istog grafa mogu dobijati jedna iz druge prenumeracijom čvorova grafa, odnosno permutovanjem vrsta i kolona matrica. Pri ovom je bitno da se ista permutacija primenjuje i na vrste i na kolone. Tako, na primer, A_1 se može dobiti iz A_2 ako se najpre u A_2 prva vrsta stavi na mesto treće, treća na mesto druge i druga na mesto prve, a zatim se iste operacije izvrše sa kolonama.

Dve matrice susedstva A_1 i A_2 nekog grafa povezane su relacijom $A_2 = P^{-1}A_1P$, gde je P neka permutaciona matrica. Pošto je permutaciona matrica nesingularna matrica, A_1 i A_2 su slične matrice.

U ovom odeljku opisaćemo dve važne invarijante grafa: karakteristični polinom i spektar grafa. Karakteristični polinom $P_G(\lambda)$ grafa G predstavlja karakteristični polinom jedne od matrica susedstva A grafa G, tj. $P_G(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

Različite matrice susedstva imaju iste karakteristične polinome jer slične matrice imaju iste karakteristične polinome. Stoga je karakteristični polinom grafa $P_G(\lambda)$ jedinstven, tj. invarijantan u odnosu na prenumeraciju čvorova.

Uopšte, ako se za matricu susedstva A nekog grafa G odrede karakteristični polinom, sopstvene vrednosti i spektar, kaže se da su to, redom, karakteristični polinom, sopstvene vrednosti i spektar grafa G.

Primer 3. Ako za graf iz primera 2 uzmemo matricu susedstva A_1, karakteristični polinom grafa odredjen je determinantom

$$\det(\lambda I - A_1) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2).$$

Nule ovog polinoma su 0, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ i one obrazuju spektar grafa.

Sopstvene vrednosti grafova su realni brojevi (videti teoremu 1 iz 7.6).

Neka je G nepovezan graf sa komponentama povezanosti $G_1,\ldots,G_s$ koje se mogu posmatrati i kao samostalni grafovi. Ako su $A_1,\ldots,A_s$ matrice susedstva grafova $G_1,\ldots,G_s$, matrica susedstva A grafa G ima oblik

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{Vmatrix} = A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_s.$$

Dakle, za karakteristične polinome važi

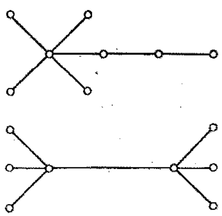
$$P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda)\ \ldots\ P_{G_s}(\lambda).$$

a odavde sleduje da se spektar grafa G dobija objedinjavanjem spektra njegovih komponenti povezanosti $G_1,\ldots,G_s$.

Iz ranije navedenog sleduje da izomorfni grafovi imaju iste karakteristične polinome, odnosno spektre. Ovde se samo po sebi nameće pitanje: Da li neizomorfni grafovi imaju različite karakteristične polinome? Ova interesantna hipoteza se opovrgava primerom dva neizomorfna stabla (sl. 2) koji imaju iste karakteristične polinome

$$P_G(\lambda) = \lambda^8 - 7\lambda^6 + 9\lambda^4.$$

U literaturi su navedeni i drugi primeri neizomorfnih izospektralnih grafova.



sl. 2

Dokazano je da ne samo karakteristični polinom matrice susedstva nego i opštije matrične funkcije (na primer, permanent - videti 10.1) ne odredjuju graf sa tačnošću do izomorfizma.

I pored ovoga spektri grafova mogu da posluže kao korisno sredstvo u analizi različitih problema sa grafovima. Videćemo da su koeficijenti karakterističnog polinoma odredjeni strukturom grafa. Stvar se može posmatrati i obrnuto, tj. na osnovu poznatog karakterističnog polinoma ili spektra grafa određivati detalje strukture grafa. Jasno je da se svi detalji strukture ne mogu u opštem slučaju odrediti jer, kao što je navedeno, postoje grafovi različite strukture sa istim spektrom. Stoga su interesantna, na primer, sledeća dva pitanja:

1° Kako se različite osobine grafa odražavaju u spektru grafa?

2° Koje se osobine grafa i na koji način mogu odrediti pomoću spektra grafa?

Navešćemo neke osobine karakterističnog polinoma i spektra grafa.

Neka je $P_G(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ karakteristični polinom grafa i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ spektar grafa. Stepen karakterističnog polinoma jednak je broju čvorova grafa. Jasno je da je $a_0 = 1$. Koeficijent a_1 je sa obrnutim znakom jednak tragu matrice susedstva, tj. broju petlji grafa. Koeficijent a_2 jednak je zbiru glavnih minora drugog reda matrice susedstva, tj. zbiru determinanti matrica susedstva svih podgrafova sa dva čvora. Ako se ograničimo na grafove bez petlji i višestrukih grana, determinanta matrice susedstva grafa sa dva čvora jednaka je -1 ako su čvorovi spojeni granom i jednaka 0 u obrnutom slučaju. Stoga je koeficijent $-a_2$ jednak broju grana grafa. Uopšte, koeficijenti karakterističnog polinoma imaju vrednosti koje se mogu odrediti iz strukture grafa, što pokazuju sledeće dve teoreme H. Sachsa.

Teorema 1. Neka je

$$P_G(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n ,$$

gde je A matrica digrafa G koji može da ima višestruke grane ili petlje. Tada je

$$(1) \qquad a_i = \sum_{L_i \subset G} (-1)^{p(L_i)} \qquad (i = 1, \ldots, n) ,$$

gde se sumiranje vrši po svim linearnim delimičnim podgrafovima L_i sa tačno i čvorova; $p(L_i)$ označava broj komponenti povezanosti grafa L_i.

Dokaz. Svakoj grani i petlji digrafa G pridružimo kao njen prenos broj 1. Tako dobijeni digraf G_A je digraf pridružen matrici susedstva A digrafa G. Na osnovu formule (10) iz 7.1 dobija se formula za a_i iz teoreme.

Ovim je dokaz završen.

Za slučaj neorijentisanih grafova bez petlji imamo sledeću specijalizaciju teoreme 1.

<u>Teorema 2</u>. Neka $P_G(\lambda)$ ima značenje iz teoreme 1, s tim što se sada posmatra neorijentisan graf G. <u>Elementarne figure</u> su: a) potpuni graf K_2 sa dva čvora; b) kontura C_p sa $p \geqslant 3$ čvorova. <u>Osnovna figura</u> U_i je svaki graf sa tačno i čvorova, čije su sve komponente povezanosti elementarne figure. Neka je $p(U_i)$ broj komponenata za U_i i $c(U_i)$ broj kontura koje se kao komponente sadrže u U_i. Tada je

$$(2) \qquad a_i = \sum_{U_i \subset G} (-1)^{p(U_i)} 2^{c(U_i)},$$

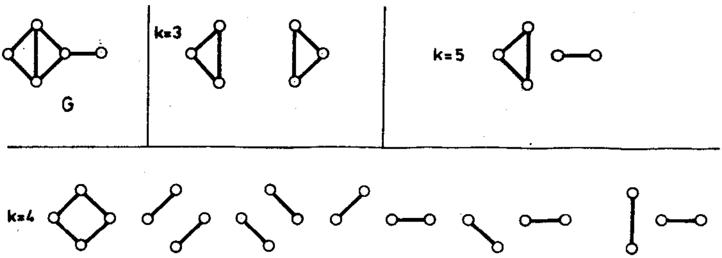
gde se sumiranje vrši po svim osnovnim figurama sa tačno i čvorova koje se kao delimični podgrafovi nalaze u G.

<u>Dokaz</u>. Digraf G_A pridružen matrici susedstva A grafa G dobija se od G kada se svaka neorijentisana grana zameni parom orijentisanih grana koje povezuju iste čvorove ali su suprotnih orijentacija, jer je A simetrična matrica. Tada važi (1). Posmatrajmo jedan linearni delimični podgraf L_i digrafa G_A. Zajedno sa orijentisanim konturama dužina većih od 2 (neka ih ima k) digrafa L_i posmatrajmo i sve orijentisane konture dobijene promenom orijentacije grana u konturama. Zbog simetričnosti matrice A sve ove konture postoje u G_A kao delimični podgrafovi. Od ovih ukupno 2k orijentisanih kontura može se formirati više delimičnih linearnih podgrafova. Naime, svakoj konturi grafa G odgovaraju dve orijentisane konture i tačno jedna od te dve može da udje u sastav jednog linearnog delimičnog podgrafa. Stoga je broj ovakvih podgrafova 2^k. Svi oni odgovaraju jednoj osnovnoj figuri U_i za koju je $c(U_i) = k$. Orijentisanim konturama dužine 2 odgovaraju u osnovnoj figuri U_i komponente K_2. Konture dužine 1, tj. petlje, po pretpostavci teoreme ne postoje u G. Stoga se umesto sumiranja po linearnim delimičnim podgrafovima može sumirati po osnovnim figu-

rama U_i pa se dobija formula (2).

Ovim je teorema dokazana.

Primer 4. Na sl. 3 prikazan je jedan graf G sa svojim osnovnim figurama koje su grupisane prema broju čvorova k ($k \geqslant 3$).



sl. 3

Svaka grana obrazuje jednu osnovnu figuru sa 2 čvora. Na osnovu (2) dobija se za karakteristični polinom ovog grafa

$$P_G(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^3 - 2\cdot 2\lambda^2 + (5-2)\lambda + 2$$
$$= \lambda^5 - 6\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda + 2 .$$

Bihromatski grafovi imaju spektar sa sledećom osobinom. Ako je a sopstvena vrednost grafa, tada je i -a sopstvena vrednost grafa, i, uz to, broj sopstvenih vrednosti koje su jednake a jednak je broju sopstvenih vrednosti koje su jednake -a. To znači da je spektar bihromatskog grafa, shvaćen kao skup tačaka na brojnoj osi, simetričan u odnosu na tačku 0. Karakteristični polinom bihromatskog grafa sa n čvorova ima, dakle, osobinu $P_G(-\lambda) = (-1)^n P_G(\lambda)$.

Da bismo dokazali ovu osobinu zamislimo da su čvorovi grafa pravilno obojeni sa dve boje, recimo, crvenom i plavom. Neka ima n_1 čvorova crvene boje i n_2 čvorova plave boje, pri čemu je $n_1 + n_2 = n$. Označimo čvorove crvene boje redom sa $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ a čvorove plave boje sa $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_{n_1+n_2}$ i posmatrajmo odgovarajuću matricu susedstva A. Ona je oblika

$$A = \left\| \begin{matrix} O_{n_1} & B \\ B^T & O_{n_2} \end{matrix} \right\| ,$$

gde je B matrica tipa $n_1 \times n_2$ čiji su elementi 0 i 1, jer grane grafa povezuju samo crvene sa plavim čvorovima.

Sada se neposredno dobija

$$P_G(-\lambda) = \det(-\lambda I - A) = (-1)^n \det(\lambda I + A) = (-1)^n \begin{vmatrix} \lambda I_{n_1} & B \\ B^T & \lambda I_{n_2} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n (-1)^{n_1} \begin{vmatrix} -\lambda I_{n_1} & -B \\ B^T & \lambda I_{n_2} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \lambda I_{n_1} & -B \\ -B^T & \lambda I_{n_2} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \det(\lambda I - A) = (-1)^n P_G(\lambda) .$$

Ovim je navedena osobina bihromatskih grafova dokazana. U stvari, važi sledeća teorema.

Teorema 3. Povezan, konačan i neorijentisan graf, bez petlji i sa najmanje dva čvora, je bihromatski ako i samo ako je njegov spektar, posmatran kao skup tačaka na brojnoj osi, simetričan u odnosu na tačku nula.

Dokaz. Deo ove teoreme je već dokazan. No sada ćemo dati jedan nezavisan dokaz oslanjajući se na teoremu 2.

Ako je spektar simetričan u odnosu na tačku nula, karakteristični polinom ima oblik

$$(3) \qquad P_G(\lambda) = \lambda^n + a_2 \lambda^{n-2} + a_4 \lambda^{n-4} + \dots ,$$

tj. koeficijenti polinoma sa neparnim indeksom jednaki su nuli.

Ako je graf bihromatski, on ne sadrži nijednu neparnu konturu (tj. konturu neparne dužine) pa, prema tome, i nema osnovnih figura sa neparnim brojem čvorova. Stoga su neparni koeficijenti u (3) zaista jednaki nuli.

Neka je sada graf nebihromatski. Treba dokazati da je bar jedan od neparnih koeficijenata iz (3) različit od nule. Pošto je graf nebihromatski on sadrži, po teoremi Königa, bar jednu neparnu konturu. Neka je $2k+1$ dužina najkraće neparne konture. Jedine osnovne figure sa $2k+1$ čvorova su baš najkraće konture (dužine $2k+1$). Stoga je, prema (2), koeficijent a_{2k+1} različit od nule.

Ovim je dokaz završen.

Pošto je stablo bihromatski graf, karakteristični polinom stabla je oblika (3). Na osnovu teoreme 2 dobija se $a_{2k} = (-1)^k p_k$, gde je p_k broj skupova od po k medjusobno nesusednih grana.

7.5. Matrične funkcije

Ako je $P(\lambda)$ polinom, definiše se polinom $P(A)$ kvadratne matrice A, kao što je to objašnjeno u poglavlju 3. U ovom odeljku ćemo definisati matričnu funkciju $f(A)$ gde je $f(\lambda)$ funkcija kompleksne promenljive .

Neka je

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

minimalni polinom matrice A, pri čemu je $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = m$. Kazaćemo da je funkcija $f(\lambda)$ definisana na spektru matrice A ako su definisane veličine

$$f(\lambda_i),\ f'(\lambda_i),\ \ldots,\ f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$$

za $i = 1,2,\ldots,s$. Očigledno postoji bezbroj polinoma $g(\lambda)$ koji na spektru matrice A imaju istu vrednost kao funkcija $f(\lambda)$, tj. za koje važi

$$g(\lambda_i) = f(\lambda_i), g'(\lambda_i) = f'(\lambda_i), \ldots, g^{(m_i-1)}(\lambda_i) = f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$$

za $i = 1,2,\ldots,s$.

Ako su $g(\lambda)$ i $h(\lambda)$ dva takva polinoma, interesantno je da je uvek $g(A) = h(A)$. Zaista, razlika $d(\lambda) = g(\lambda) - h(\lambda)$ se anulira na spektru matrice A a to znači da je minimalni polinom $m(\lambda)$ matrice A faktor polinoma $d(\lambda)$; kako je $m(A) = 0$ dobijamo $d(A) = 0$, tj. $g(A) = h(A)$. Iz izloženog dalje sledi da postoji jedinstveni polinom $r(\lambda)$ stepena manjeg od m koji ima istu vrednost kao i $f(\lambda)$ na spektru od A. Naime, ako se proizvoljni polinom $g(\lambda)$ podeli sa $m(\lambda)$, ostatak pri deljenju upravo predstavlja traženi polinom $r(\lambda)$.

<u>Definicija 1</u>. Neka je $f(\lambda)$ kompleksna funkcija definisana na spektru kvadratne matrice A, čiji minimalni polinom ima stepen m. Neka je $r(\lambda)$ jedinstveni polinom stepena manjeg od m koji ima iste vrednosti kao $f(\lambda)$ na spektru matrice A. Tada se matrična funkcija $f(A)$ matrice A definiše kao matrica koja predstavlja vrednost matričnog polinoma $r(A)$, tj. važi formula $f(A) = r(A)$.

Neka je J jedan Jordanov kanonični oblik matrice A, tj. neka postoji nesingularna matrica T takva da je $A = T^{-1}JT$. Tada je $f(A) = r(A) = r(T^{-1}JT) = T^{-1}r(J)T = T^{-1}f(J)T$. Na taj način se nalaženje matrične funkcije $f(A)$ svodi na odredjivanje te matrične funkcije za odgovarajuću Jordanovu matricu.

Na osnovu teoreme 1 iz 3.1 se neposredno dobija formula

$$(A_1 \dotplus A_2)^k = A_1^{\,k} \dotplus A_2^{\,k} ,$$

gde su A_1 i A_2 kvadratne matrice a odatle sledi za proizvoljni polinom $P(\lambda)$ sledeća formula

$$P(A_1 \dotplus A_2) = P(A_1) \dotplus P(A_2) .$$

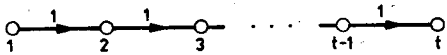
Stoga se izračunavanje polinoma $r(J)$ Jordanove matrice $J = J_1 \dotplus J_2 \dotplus \dots \dotplus J_p$ svodi na odredjivanje ovoga polinoma za Jordanove blokove $J_1, J_2, \dots, J_p$. Stoga ćemo razmatrati slučaj kada je matrica J Jordanov blok. Neka je

$$J = \begin{Vmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{Vmatrix} = \lambda_0 I + H ,$$

gde je

$$H = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{Vmatrix} .$$

pomoćna jedinična matrica reda, na primer, t a λ_0 jedna od sopstvenih vrednosti matrice A. Digraf G^H je prikazan na sl.1.



sl. 1

Putevi dužine k digrafa G^H vode izmedju čvorova 1 i k+1, 2 i k+2 itd., pa je

$$H^k = \left\|\begin{array}{c|c} 0_k & \begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{matrix} \\ \hline 0_{k,n} & 0_{n-k} \end{array}\right\| .$$

Dakle, $H^t = 0$.

Ako je $r(\lambda) = r_0 + r_1(\lambda-\lambda_0) + \ldots + r_s(\lambda-\lambda_0)^s$, dobija se $r(J) = r_0 I + r_1(J-\lambda_0 I) + \ldots + r_s(J-\lambda_0 I)^s = r_0 I + r_1 H + \ldots + r_s H^s$. Dalje je

$$r(J) = \left\|\begin{matrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_{t-1} \\ & r_0 & r_1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & r_1 \\ & & & r_0 \end{matrix}\right\| .$$

Kako je $r_i = \dfrac{r^{(i)}(\lambda_0)}{i!} = \dfrac{f^{(i)}(\lambda_0)}{i!}$, dobija se

$$r(J) = f(J) = \left\|\begin{matrix} f(\lambda_0) & \frac{1}{1!} f'(\lambda_0) & \cdots & \frac{1}{(t-1)!} f^{(t-1)}(\lambda_0) \\ & f(\lambda_0) & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{1}{1!} f'(\lambda_0) \\ & & & f(\lambda_0) \end{matrix}\right\|$$

Pošto smo na taj način pokazali kako se odredjuje matrična funkcija Jordanovog bloka možemo na osnovu izloženog formulisati sledeću teoremu.

<u>Teorema 1</u>. Neka je funkcija kompleksne promenljive $f(\lambda)$ definisana na spektru kvadratne matrice A. Neka je $A = T^{-1}JT$, gde je $J = J_1 \dotplus J_2 \dotplus \ldots \dotplus J_p$ Jordanov kanonični oblik matrice A, pri čemu su $J_1, J_2, \ldots, J_p$ Jordanovi blokovi. Tada je

$$f(A) = T^{-1}(f(J_1) \dotplus f(J_2) \dotplus \ldots \dotplus f(J_p))T .$$

Navešćemo još neke postupke za odredjivanje matričnih funkcija.

Ako je $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ beskonačni niz matrica istog formata, beskonačni zbir

$$(1) \qquad A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n$$

naziva se <u>matrični red</u>. Ako je $A_n = \|a_{ij}^{(n)}\|_{p,q}$ i ako je $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{ij}^{(n)} = a_{ij}$ $(i = 1,2,\ldots,p;\ j = 1,2,\ldots,q)$, kaže se da red (1) konvergira i da mu je zbir matrica $A = \|a_{ij}\|_{p,q}$.

Neka se kompleksna funkcija $f(\lambda)$ može prikazati beskonačnim redom

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda - \lambda_0)^n$$

sa poluprečnikom konvergencije R i neka je A kvadratna matrica čije se sopstvene vrednosti nalaze u krugu $|\lambda - \lambda_0| < R$. Može se pokazati da je u važnosti formula

$$f(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(A - \lambda_0 I)^n.$$

<u>Primer 1</u>. Pošto je $e^{\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$, dobija se $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

Takodje je $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I - A)^{-1}$ ako su moduli sopstvenih vrednosti matrice A manji od 1.

Može se takodje dokazati da važi formula

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} (\lambda I - A)^{-1} f(\lambda) d\lambda,$$

gde je $f(\lambda)$ kompleksna funkcija definisana na spektru matrice A a kóntura kompleksne integracije obuhvata spektar matrice A.

7.6. Neke specijalne matrice

U poglavljima 2 i 3 smo uveli neke specijalne matrice kao što su, na primer, simetrične, koso-simetrične i nilpotentne matrice. U ovom odeljku ćemo definisati još neke specijalne matrice i za neke od njih navesti izvesne osobine njihovih spektara.

Konjugovana matrica $\bar{A}$ matrice $A = \|a_{ij}\|$ nad poljem kompleksnih brojeva definiše se pomoću $\bar{A} = \|\bar{a}_{ij}\|$, tj. elementi matrice $\bar{A}$ su konjugovano-kompleksne vrednosti odgovarajućih elemenata matrice A. Matrica je cirkularna ako je $\bar{A}A = I$.

Matrica $(\overline{A^T}) = (\bar{A})^T$ naziva se konjugovano-transponovana matrica matrice A i obeležava se sa A^H ili sa A^*. Ova matrica se naziva hermitski konjugovana matrica matrice A.

Matrica A se naziva hermitska ako je $A^H = A$. Neposredno se proverava da su realne simetrične matrice hermitske.

Matrica A je normalna ako je $AA^H = A^HA$.

Matrica A je ortogonalna ako je $A^{-1} = A^T$. Na primer, permutacione matrice su ortogonalne.

Matrica A je unitarna ako je $A^{-1} = A^H$.

Matrica A je idempotentna ako je $A^2 = A$. Iz ovog sledi da su i svi dalji stepeni matrice jednaki samoj matrici.

Matrica A je involutivna ako je $A^2 = I$.

Matrica A je unimodularna ako je det $A = 1$. A je potpuno unimodularna ako je svaki minor matrice A jednak 1,0 ili -1.

Za dokaz sledeće teoreme potrebna nam je definicija skalarnog proizvoda dva vektora čije su koordinate kompleksni brojevi. Neka su

$$x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix}$$

n-dimenzionalni kompleksni vektori. Tada je njihov skalarni proizvod

$$(x|y) = y^H x = x^T \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i .$$

Veličina $\|x\| = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i}$ je norma vektora. Norma vektora je (realan) nenegativan broj.

Ako je A kvadratna matrica reda n, važi formula

$$(Ax|y) = y^H Ax = (A^H y)^H x = (x|A^H y) .$$

Slično tome, imamo

$$(x|Ay) = (A^H x|y) .$$

Teorema 1. Sopstvene vrednosti hermitske matrice A su realni brojevi.

Dokaz. Neka je λ jedna sopstvena vrednost matrice A i neka je x odgovarajući sopstveni vektor, tj. $Ax = \lambda x$. Tada je

$$\lambda\|x\|^2 = \lambda(x|x) = (\lambda x|x) = (Ax|x) = (x,A^H x) =$$
$$(x,Ax) = (x,\lambda x) = x^T\overline{(\lambda x)} = \bar{\lambda} x^T \bar{x} = \bar{\lambda}\|x\|^2 .$$

Pošto je $x \neq 0$, dobijamo $\lambda = \bar{\lambda}$, tj. λ je realan broj.

Ovim je dokaz završen.

Na osnovu ove teoreme, realne simetrične matrice imaju realne sopstvene vrednosti. Može se pokazati da su sopstvene vrednosti realne koso-simetrične matrice čisto imaginarni brojevi a da ortogonalne matrice imaju sopstvene vrednosti čiji je moduo jednak 1.

Kao što je pokazano u 7.3 sve sopstvene vrednosti nilpotentne matrice su jednake nuli. Šta se može reći o sopstvenim vrednostima idempotentnih matrica?

Dokazaćemo još jednu teoremu za hermitske matrice.

Teorema 2. Neka je A hermitska matrica sa sopstvenim vrednostima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n)$ i neka je B njena glavna submatrica sa sopstvenim vrednostima $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ $(\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_k)$. Tada važe nejednakosti

$$\lambda_{n-k+s} \leq \mu_s \leq \lambda_s , \qquad s = 1,2,\ldots,k .$$

Dokaz. Dokazaćemo tvrdjenje teoreme najpre za $k = n-1$. Neka se B dobija iz matrice A izostavljenjem njene i-te vrste i i-te kolone. Matrica A se može prikazati u obliku $A = U^H \Lambda U$, gde je $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ a $U = \|u_{ij}\|_1^n$ unitarna matrica. Dalje je

$$\frac{\mathrm{adj}(\lambda I - A)}{\det(\lambda I - A)} = (\lambda I - A)^{-1} = U^H(\lambda I - A)U .$$

Uporedjujući elemente ovih matrica na mestu (i,i) dobijamo

$$\frac{\det(\lambda I - B)}{\det(\lambda I - A)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{|u_{ji}|^2}{\lambda - \lambda_j} .$$

Dobijena funkcija je očigledno opadajuća u svim tačkama u kojima je neprekidna. Stoga izmedju svaka svoja dva pola ima jednu nulu. Ove nule su sopstvene vrednosti matrice B. Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ medjusobno različiti brojevi i ako je $u_{1i}, u_{2i}, \ldots, u_{ni} \neq 0$, onda su svih $n-1$ sopstvenih vrednosti matrice B različiti od sopstvenih vrednosti matrice A i nalaze se izmedju ovih, tj. važe nejednakosti

$$\lambda_1 > \mu_1 > \lambda_2 > \mu_2 > \cdots > \lambda_{n-1} > \mu_{n-1} > \lambda_n .$$

Ako A ima višestruke sopstvene vrednosti, neke sopstvene vrednosti matrice B se poklapaju sa njima; to se dogadja i kada je $u_{ji} = 0$ za neko j. No, i tada se može tvrditi da se sopstvene vrednosti matrice B nalaze izmedju sopstvenih vrednosti matrice A, tj. sada važe nejednakosti

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n-1} \geqslant \mu_{n-1} \geqslant \lambda_n .$$

Dokazana osobina matrica A i B, uzastopnom primenom ovakvog rezonovanja na submatrice sve manjeg i manjeg formata, prenosi se na opšti slučaj kada je B glavna submatrica reda k matrice A.

Ovim je teorema dokazana.

Nejednakosti iz ove teoreme nazivaju se Cauchyjeve nejednakosti a u literaturi na engleskom jeziku ova teorema se naziva interlacing theorem.

Pojedine specijalne klase matrica definišu se i pomoću osobina sopstvenih vrednosti.

Realna simetrična matrica čije su sve sopstvene vrednosti pozitivne (negativne) naziva se <u>pozitivno (negativno) definitna</u> matrica. Ako su sopstvene vrednosti nenegativne (nepozitivne), pri čemu je bar jedna sopstvena vrednost jednaka nuli, za matricu se kaže da je <u>pozitivno (negativno) semi-definitna</u>. Matrica koja poseduje sopstvene vrednosti oba znaka naziva se <u>indefinitna</u>.

7.7. Primeri i zadaci

1. Izračunati sopstvene vrednosti matrice

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} .$$

2. Ako su A i B kvadratne matrice reda n i m respektivno, dokazati da važi formula

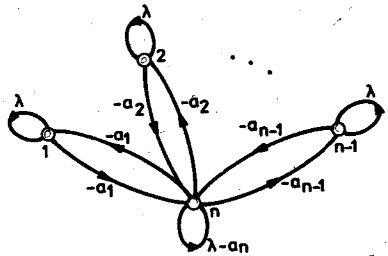
$$\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n .$$

3. Odrediti karakteristični polinom nilpotentne matrice.
4. Dokazati da je spektar kvadratne matrice A objedinjenje spektara glavnih podmatrica koje odgovaraju komponentama jake povezanosti digrafa G_A. Primeniti ovaj rezultat na odredjivanje sopstvenih vrednosti matrice

$$M = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} .$$

5. Data je simetrična kvadratna matrica reda n

$$A = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & 0 & & a_2 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & & a_n \end{matrix}\right\| .$$



sl. 1

Odrediti sopstvene vrednosti ove matrice.

Rešenje. Digraf pridružen determinanti $\det(\lambda I - A)$ je predstavljen na sl. 1.

Neposredno se dobija

$$P_G(\lambda) = (-1)^n((-1)^n \lambda^{n-1}(\lambda - a_n) + (-1)^{n-1}a_1{}^2 \lambda^{n-2} +$$

$$+ (-1)^{n-1}a_2{}^2 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}a_{n-1}^2 \lambda^{n-2})$$

$$= \lambda^n - a_n\lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} a_i{}^2 = 0 .$$

Sopstvene vrednosti su

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}(a_n \pm \sqrt{a_n{}^2 + 4 \sum_{i=1}^{n-1} a_i{}^2}) , \quad \lambda_{3,\dots,n} = 0.$$

6. Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti matrice A i ako su $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ sopstvene vrednosti matrice B, dokazati da se spektar matrice $A \otimes I_m + I_n \otimes B$ sastoji od brojeva $\lambda_i + \mu_j$ $(i = 1,2,\dots,n;\ j = 1,2,\dots,m)$.

7. U 3.2 je pokazano da je svaka ciklička matrica A reda n polinom permutacione matrice B (istog reda). Kako je pridruženi digraf G^B (orijentisana) kontura, formula (10) iz 7.1 daje za karakteristični polinom matrice B izraz $\lambda^n - 1$. Dakle, sopstvene vrednosti matrice B su n-ti koreni iz jedinice $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Ako je $A = P(B)$, gde je $P(x)$ izvesni polinom, sopstvene vrednosti cikličke matrice su $P(\varepsilon_1), P(\varepsilon_2), \dots, P(\varepsilon_n)$.

8. Matrica susedstva A (neorijentisane) konture C_n sa n čvorova je (simetrična) ciklička matrica za koju je $A = B^{n-1} + B$, prema odeljku 3.2. Stoga su sopstvene vrednosti matrice A date pomoću

$$\lambda_i = \varepsilon_i^{n-1} + \varepsilon_i = \varepsilon_i + \varepsilon_i^{-1} = e^{\frac{2\pi}{n}i} + e^{-\frac{2\pi}{n}i} = 2\cos\frac{2\pi}{n}i$$

$i = 0,1,\ldots,n-1.$

9. Dokazati da slične matrice imaju iste minimalne polinome.

10. Posmatrajmo varijacije sa ograničenjima k-te klase skupa od n elemenata sa matricom dopustivih parova A (videti 3.3). Sada je moguéno izvesti jedan eksplicitni izraz za broj ovakvih varijacija $V_n^k(A)$.

Neka je $\varphi(\lambda) = b_o\lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + \ldots + b_m$ minimalni polinom matrice A. Tada je

$$(1) \qquad b_o A^{m+k} + b_1 A^{m-1+k} + \ldots + b_1 A^k = 0, \qquad k = 0,1,2,\ldots .$$

Uvodjenjem oznake N_i = sum A^i iz (1) se dobija

$$(2) \qquad b_o N_{m+k} + b_1 N_{m-1+k} + \ldots + b_m N_k = 0, \qquad k = 0,1,2,\ldots .$$

Neka su $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ nule minimalnog polinoma $\varphi(\lambda)$. Ako posmatramo simetrične matrice A ove nule su realne i jednostruke. Rešenje diferencne jednačine (2) je u tom slučaju oblika

$$(3) \qquad N_k = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k + \ldots + C_m\lambda_m^k = V_n^{k+1}(A).$$

Konstante $C_1,\ldots,C_m$ se mogu odrediti ako je poznato m veličina N (=n), $N_1,\ldots,N_{m-1}$.

11. Veličine $C_1,C_2,\ldots,C_m$ u izrazu(3) za N_k broj puteva dužine k iz primera 10 mogu biti odredjene ako se poznaju sopstveni vektori matrice susedstva grafa. Matrica susedstva A neorijentisanog grafa (sa n čvorova) je simetrična i stoga postoji sistem medjusobno ortogonalnih sopstvenih vektora $u_1,u_2,\ldots,u_n$ koji pripadaju sopstvenim vrednostima $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ matrice A. Ako su ovi vektori normirani, tj. ako su im moduli jednaki 1, matrica $U=\|u_1\ldots u_n\|$, čije su kolone pomenuti sopstveni vektori, zadovoljava relaciju $A = U\Lambda U^{-1}$, gde je Λ dijagonalna matrica sa dijagonalnim elementima $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Pošto je matrica U

ortogonalna (tj. $U^{-1} = U^T$), dobija se $A^k = U\Lambda^k U^T$.

Ako je $U = \|u_{ij}\|_1^n$ (tj. sopstveni vektor u_j ima koordinate u_{ij}, $i = 1,2,\ldots,n$), element $a_{ij}^{(k)}$ matrice A^k na mestu (i,j) može se izraziti u eksplicitnom obliku

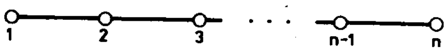
$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{\ell=1}^{n} u_{i\ell} u_{j\ell} \lambda_\ell^k .$$

Kako je $N_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}$, dobija se

$$(1) \qquad N_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} u_{i\ell} u_{j\ell} \lambda_\ell^k = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell^k \sum_{i=1}^{n} u_{i\ell} \sum_{j=1}^{n} u_{j\ell} =$$

$$\sum_{\ell=1}^{n} (u_{1\ell} + u_{2\ell} + \ldots + u_{n\ell})^2 \lambda_\ell^k .$$

Odredićemo broj N_k puteva dužine k u grafu sa sl. 2.



sl. 2

Matrica susedstva ima oblik

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{Vmatrix} .$$

Neposredno se proverava da su $\lambda_j = 2\cos\frac{\pi}{n+1} j$, $j = 1,2,\ldots,n$, sopstvene vrednosti ove matrice i da su $u_{ij} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\frac{\pi}{n+1} ij$, $i = 1,2,\ldots,n$, koordinate odgovarajućih sopstveni vektora u_j. Na osnovu (1) neposredno se dobija

$$N_k = \frac{2^{k+1}}{n+1} \sum_{\ell=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \operatorname{cotg}^2 \frac{2\ell-1}{n+1} \frac{\pi}{2} \cos^k \frac{2\ell-1}{n+1} \pi .$$

12. Spektar grafa bez grana se sastoji od brojeva jednakih nuli; spektar potpunog grafa K_n sa n čvorova sadrži broj n-1 kao i n-1 brojeva jednakih -1.

13. Dokazati da grafovi $K_{1,4}$ i $C_4 \cup K_1$ imaju isti spektar.

14. Prema teoremi 1 iz 3.1 broj N_k zatvorenih puteva dužine k u grafu G je jednak tragu matrice A^k, gde je A matrica susedstva grafa G. Prema (12) iz 7.1 dobija se $N_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$, gde su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti grafa G. Svakom trouglu grafa G odgovara 6 zatvorenih puteva dužine 3. Stoga za broj trouglova grafa G važi formula

$$t = \frac{1}{6} N_3 = \frac{1}{6}(\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \ldots + \lambda_n^3) .$$

15. Odrediti A^n $(n = 2,3,\ldots)$ ako je $A = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ (a,b,c,d kompleksni brojevi).

Rešenje. Ako su analitička funkcija $f(\lambda)$ i potreban broj njenih izvoda definisani na spektru matrice A, važi formula

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\lambda)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda , \tag{1}$$

gde kontura C obuhvata spektar matrice A.

U našem slučaju je

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{P(\lambda)} \begin{Vmatrix} \lambda - d & b \\ c & \lambda - a \end{Vmatrix} , \tag{2}$$

gde je $P(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$. Uvodjenjem (2) u (1) i stavljanjem $f(\lambda) = \lambda^n$ dobija se

$$A^n = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \dfrac{(\lambda - d)\lambda^n}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)} d\lambda & \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \dfrac{b\lambda^n}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)} d\lambda \\ \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \dfrac{c\lambda^n}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)} d\lambda & \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \dfrac{(\lambda - a)\ {}^{n}}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)} d\lambda \end{Vmatrix} .$$

Ako se primeni teorema o ostacima, dobija se za $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$A^n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{Vmatrix} (\lambda_1 - d)\lambda_1^n - (\lambda_2 - d)\lambda_2^n & b(\lambda_1^n - \lambda_2^n) \\ c(\lambda_1^n - \lambda_2^n) & (\lambda_1 - a)\lambda_1^n - (\lambda_2 - a)\lambda_2^n \end{Vmatrix} .$$

a za $\lambda_1 = \lambda_2$

$$A^n = \begin{Vmatrix} (n+1)\lambda_1^{\,n} - d\lambda_1^{\,n-1} & nb\lambda_1^{\,n-1} \\ nc\lambda_1^{\,n-1} & (n+1)\lambda_1^{\,n} - a\lambda_1^{\,n-1} \end{Vmatrix} .$$

16. Matrica H reda n zove se <u>Hadamardova matrica</u> ako su njeni elementi jednaki 1 ili -1 i ako važi jednakost

(1) $$HH^T = nI .$$

Dokazati da za $n \geqslant 3$ mora biti $n = 4k$, gde je k prirodan broj.

<u>Dokaz</u>. Jednakost (1) je ekvivalentna tvrdjenju da su vrste matrice H medjusobno ortogonalne. Očigledno je da permutacija vrsta ili kolona matrice H a takodje i množenje vrsta ili kolona matrice H sa -1 ne dovodi do prestanka važenja jednakosti (1). Stoga H možemo dovesti na oblik u kojem se prva vrsta matrice sastoji samo od jedinica. Posmatrajmo prve tri vrste ove matrice. One su sastavljene od kolona oblika

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} , \quad \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix} , \quad \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix} , \quad \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{Vmatrix} ,$$

koje se pojavljuju x, y, z, w puta respektivno. Tada je

(2) $$\begin{aligned} x + y + z + w &= n , \\ x + y - z - w &= 0 , \\ x - y + z - w &= 0 , \\ x - y - z + w &= 0 . \end{aligned}$$

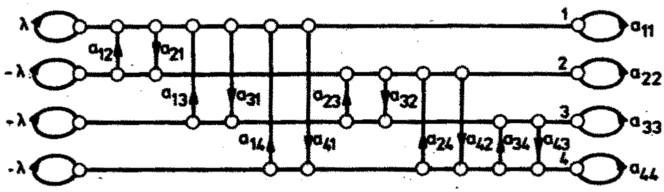
Poslednje tri jednakosti izražavaju ortogonalnost posmatranih vrsta. Iz (2) se dobija $x = y = z = w = \frac{n}{4}$, odakle sleduje $n = 4k$.

<u>Primedba 1</u>. Hadamardove matrice reda 1 i 2 postoje. To su, na primer, matrice $H_1 = \|1\|$ i $H_2 = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. Nije utvrdjena egzistencija Hadamardovih matrica za svako $n = 4k$.

<u>Primedba 2</u>. Hadamardove matrice se koriste pri konstrukciji

blok-šema i drugih kombinatornih objekata.

17. Dokazati da je Kroneckerov proizvod Hadamardovih matrica takodje Hadamardova matrica.



sl. 3

18. Neka je $A = \|a_{ij}\|_1^n$. Na sl. 3 je dat posebno stilizovan digraf $G_{A-\lambda I}$. Za karakteristični polinom

$$P(\lambda) = \lambda^4 - b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 - b_3\lambda + b_4$$

matrice A dobija se redom

$$b_1 = -(-a_{11} - a_{22} - a_{33} - a_{44}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} ;$$

$$\begin{aligned} b_2 = {} & (a_{33}a_{44}(-1)^2 + a_{34}a_{43}(-1)^1) + (a_{22}a_{44}(-1)^2 + a_{24}a_{42}(-1)^1) \\ & + (a_{22}a_{33}(-1)^2 + a_{23}a_{32}(-1)^1) + (a_{11}a_{44}(-1)^2 + a_{14}a_{41}(-1)^1) \\ & + (a_{11}a_{33}(-1)^2 + a_{13}a_{31}(-1)^1) + (a_{11}a_{22}(-1)^2 + a_{12}a_{21}(-1)^1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 = {} & -(a_{22}a_{33}a_{44}(-1)^3 + a_{22}a_{34}a_{43}(-1)^2 + a_{24}a_{42}a_{33}(-1)^2 + a_{44}a_{23}a_{32}(-1)^2 \\ & + a_{24}a_{32}a_{43}(-1)^1 + a_{23}a_{42}a_{34}(-1)^1) - (a_{11}a_{33}a_{44}(-1)^3 + a_{11}a_{34}a_{43}(-1)^2 \\ & + a_{13}a_{31}a_{44}(-1)^2 + a_{14}a_{41}a_{33}(-1)^2 + a_{31}a_{43}a_{14}(-1)^1 + a_{41}a_{34}a_{13}(-1)^1) \\ & - (a_{11}a_{22}a_{44}(-1)^3 + a_{11}a_{24}a_{42}(-1)^2 + a_{12}a_{21}a_{44}(-1)^2 + a_{14}a_{41}a_{22}(-1)^2 \\ & + a_{21}a_{42}a_{14}(-1)^1 + a_{41}a_{24}a_{12}(-1)^1) - (a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^3 + a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^2 \\ & + a_{12}a_{21}a_{33}(-1)^2 + a_{13}a_{31}a_{22}(-1)^2 + a_{21}a_{32}a_{13}(-1)^1 + a_{31}a_{23}a_{12}(-1)^1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 = {} & (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}(-1)^4 + a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}(-1)^3 + a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}(-1)^3 \\ & + a_{11}a_{24}a_{42}a_{33}(-1)^3 + a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}(-1)^3 + a_{13}a_{31}a_{22}a_{44}(-1)^3 \\ & + a_{14}a_{41}a_{22}a_{33}(-1)^3 + a_{11}a_{42}a_{34}a_{23}(-1)^2 + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}(-1)^2 \\ & + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}(-1)^2 + a_{31}a_{23}a_{12}a_{44}(-1)^2 + a_{41}a_{24}a_{12}a_{33}(-1)^2 \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}(-1)^2 + a_{13}a_{31}a_{24}a_{42}(-1)^2 + a_{13}a_{41}a_{34}a_{22}(-1)^2 \end{aligned}$$

$$+ a_{14}a_{21}a_{42}a_{33}(-1)^2 + a_{14}a_{31}a_{43}a_{22}(-1)^2 + a_{14}a_{41}a_{23}a_{32}(-1)^2$$
$$+ a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}(-1)^1 + a_{24}a_{12}a_{31}a_{43}(-1)^1 + a_{13}a_{21}a_{42}a_{34}(-1)^1$$
$$+ a_{13}a_{41}a_{24}a_{32}(-1)^1 + a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}(-1)^1 + a_{14}a_{31}a_{23}a_{42}(-1)^1).$$

(Ovaj primer je naveden prema [69].)

19. Kao što je pokazano u 7.3 kvadratna forma x^TAx smenom $x = Sy$, gde je S ortogonalna matrica, prelazi u kvadratnu formu y^TBy, gde je $B = S^{-1}AS$. Ako se S izabere tako da je B Jordanov kanonički oblik matrice A, kvadratna forma y^TBy naziva se <u>kanonički oblik</u> kvadratne forme x^TAx. B je tada dijagonalna matrica sa sopstvenim vrednostima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ na dijagonali a kvadratna forma y^TBy postaje $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$. Kvadratna forma x^TAx se naziva <u>(pozitivno, negativno) definitna, (pozitivno, negativno) semidefinitna, indefinitna</u> prema tome da li je matrica A, redom, (pozitivno, negativno) definitna, (pozitivno, negativno) semidefinitna, indefinitna.

8. NENEGATIVNE MATRICE

Matrica je <u>nenegativna</u> (<u>pozitivna</u>) ako su svi njeni elementi nenegativni (pozitivni). U teoriji nenegativnih matrica posebnu ulogu igra pojam nerazloživosti. Ovom pojmu posvećujemo odeljak 8.1. U ovom poglavlju koristićemo se digrafom G^A koji je definisan u poglavlju 3.

8.1. Nerazložive i razložive matrice

<u>Definicija 1</u>. Kvadratna matrica A je nerazloživa ako je digraf G^A jako povezan. Ako G^A nije jako povezan, matrica A se naziva razloživom.

Posmatrajmo razloživu matricu A. Pošto osobina jake povezanosti digrafa ne zavisi od numeracije njegovih čvorova, prenumerišimo čvorove digrafa G^A tako da najpre označimo sa 1,2,... čvorove iz jedne komponente jake povezanosti iz koje ne vode grane u druge komponente a onda predjimo na ostale komponente. Tako dobijamo digraf $G^{P^{-1}AP}$, gde je P neka permutaciona matrica. Matrica $P^{-1}AP$ ima oblik

$$\begin{Vmatrix} X & O \\ Y & Z \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

gde su X i Z kvadratne matrice.

Stoga je definiciji 1 ekvivalentna sledeća definicija:

<u>Definicija 2</u>. Kvadratna matrica A je razloživa ako postoji permutaciona matrica P takva da $P^{-1}AP$ ima oblik (1). Ako nije razloživa, matrica A se zove nerazloživa.

Razloživa matrica se može prikazati u tzv. <u>normalnom obliku</u>. Do normalnog oblika matrice A dolazi se posmatranjem digrafa G^A.

Posmatrajmo komponente jake povezanosti (neka ih ima s na broju) digrafa G^A i numerišimo ih redom brojevima 1,2,...,s na sledeći način. Najpre numerišimo (sa brojevima $1,2,\ldots,g$) komponente iz kojih nijedna grana ne izlazi (smatramo da takvih komponenata ima g). Udaljimo iz digrafa označene komponente sa svim granama koje su za njih vezane. Na preostali deo digrafa primenjujemo isti postupak. Na ovaj način numerišimo sve komponente.

Kada je završeno numerisanje komponenata numerišimo čvorove i to tako da najpre numerišemo čvorove iz prve komponente, zatim iz druge i tako redom. Na taj način smo dobili digraf $G^{P^{-1}AP}$ a matrica $P^{-1}AP$ se naziva <u>normalni oblik</u> matrice A.

Ako se $P^{-1}AP$ razbije na blokove koji odgovaraju komponentama jake povezanosti digrafa $G^{P^{-1}AP}$, dobija se

$$P^{-1}AP = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 \ \ldots & 0 & 0 \ \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & A_g & 0 & 0 \\ A_{g+1,1} & A_{g+1,2} & A_{g+1,g} & A_{g+1} & 0 \\ \vdots & & & & \ddots \\ A_{s1} & A_{s2} & A_{sg} & A_{s,g+1} & A_s \end{Vmatrix}.$$

Ovde su $A_1, A_2, \ldots, A_s$ nerazložive matrice a u svakom redu

$$A_{f1},\ A_{f2},\ \ldots,\ A_{f,f-1} \qquad (f = g+1,\ \ldots,s)$$

bar jedna matrica je različita od nula-matrice.

Očigledno je da je normalna forma matrice u suštini jedinstvena. U stvari, postoje različite normalne forme zbog toga što prvih g komponenata možemo da numerišemo na više načina (na $g!$ načina). Isto tako u označavanju preostalih $s-g$ komponenti imamo izvesnu slobodu. Numeracija čvorova u pojedinim komponentama je takodje proizvoljna. Bez obzira na ovu nejedinstvenost normalne forme ona pregledno izražava strukturu (razložive) matrice.

<u>Teorema 1</u>. Ako je A nerazloživa nenegativna matrica reda n, ta-

da je matrica $(I+A)^{n-1}$ pozitivna.

Dokaz. Digraf G^{I+A} je jako povezan i svaki čvor ima petlju. Svaka dva čvora su povezana putem. Najkraći put izmedju dva čvora je dužine najviše n-1. Putevi kraći od n-1 mogu se pomoću petlji produžiti da budu dužine n-1. Zbog nenegativnosti matrice A svi putevi imaju pozitivan prenos. Dakle, $(I+A)^{n-1}$ je pozitivna matrica.

Ovim je dokaz završen.

8.2. Primitivne i imprimitivne matrice

Posmatrajmo nenegativnu nerazloživu matricu A. Pridruženi digraf G^A je jako povezan. Neka je d najveći zajednički delilac dužina (orijentisanih) kontura digrafa G^A.

Definicija 1. Ako je d najveći zajednički delilac dužina kontura digrafa G^A pridruženog nenegativnoj nerazloživoj matrici A, tada je A primitivna matrica za d = 1 i imprimitivna za $d > 1$. U poslednjem slučaju d se naziva indeks imprimitivnosti matrice A.

Proučićemo strukturu digrafa imprimitivne matrice A indeksa imprimitivnosti d ($\geqslant 2$).

Pošto je svaki zatvoren put u digrafu unija nekih kontura, najveći zajednički delilac dužina svih zatvorenih puteva jednak je najvećem zajedničkom deliocu dužina kontura.

Posmatrajmo proizvoljne čvorove i,j digrafa G^A. Neka su u_1 i u_2 dužine dva puta π_1 i π_2 koji vode iz i u j. Pošto je G^A jako povezan postoji put π iz j u i i neka on ima dužinu t. Objedinjavanjem π_1 i π, odnosno π_2 i π, dobijamo dva zatvorena puta čije su dužine u_1+t i u_2+t. Na osnovu izloženog je $d|(u_1+t)$ i $d|(u_2+t)$ te je $u_1 \equiv u_2 (\mathrm{mod}\ d)$. Skup čvorova digrafa G^A se sada može razložiti na tzv. skupove imprimitivnosti $I_1, I_2, \ldots, I_d$ na sledeći način. Skup I_k $(k = 1,2,\ldots,d)$ je skup svih čvorova i koji imaju osobinu da je dužina proizvoljnog puta iz odredjenog unapred fiksiranog čvora x u čvor i kongruentna k po modulu d. Vidi se da je čvor x u skupu I_d.

Podgrafovi digrafa G^A indukovani skupovima imprimitivnosti $I_1, I_2, \ldots, I_d$ ne sadrže nijednu granu jer ako bi izmedju čvorova, recimo, y i z iz istog skupa imprimitivnosti postojala grana, onda bi iz x u z vodila dva puta čije se dužine razlikuju za 1 te bi bilo $d = 1$.

Grane digrafa G^A povezuju čvorove iz I_k i čvorove iz I_{k+1} za $k = 1,2,\ldots,d-1$ kao i čvorove iz I_d sa čvorovima iz I_1. Zaista ako bi neka grana povezivala čvorove iz nekih drugih skupova imprimitivnosti postojala bi kontura dužine manje od d, što je nemogućno. Digraf sa ovakvom osobinom naziva se <u>ciklički d-delni digraf</u>.

Prenumerišimo čvorove digrafa G^A tako da se numerišu najpre čvorovi iz I_1 zatim oni iz I_2 itd. Na kraju se numerišu čvorovi iz I_d.

Ovim smo, u stvari, dokazali sledeću teoremu.

<u>Teorema 1</u>. Za imprimitivnu matricu A indeksa imprimitivnosti d postoji permutaciona matrica P takva da je

$$(1) \qquad P^{-1}AP = \begin{Vmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & A_{d-1,d} \\ A_{d1} & 0 & 0 & & 0 \end{Vmatrix},$$

gde se duž glavne dijagonale nalaze kvadratne nula-matrice. Digraf G^A je ciklički d-delni.

Ideja dokaza teoreme 1 iz prethodnog odeljka može se iskoristiti za dokaz sledeće teoreme.

<u>Teorema 2</u>. Za primitivnu matricu A postoji prirodan broj s takav da je A^s pozitivna matrica. Imprimitivna matrica nema ovu osobinu.

<u>Dokaz</u>. Potrebno je dokazati da za neki prirodan broj s postoji put dužine s izmedju proizvoljna dva čvora i i j digrafa G^A. Pošto je G^A jako povezan, svaka dva čvora su povezana nekim putem. Potrebno je ove puteve proširiti tako da svi imaju istu dužinu s (u dokazu teoreme 1 iz 8.1 to je postignuto dodavanjem petlji). Ovo ćemo postići proširivanjem svakog puta odgovarajućim zatvorenim putem koji prolazi kroz sve čvorove grafa i ima

dužinu koja je potrebna.

Pošto je najveći zajednički delilac dužina kontura jednak 1, svaki dovoljno veliki prirodan broj m može se predstaviti kao zbir dužina nekih kontura, s tim što neke konture mogu biti uzete u obzir i više puta. Pronadjimo u digrafu neki zatvoren put koji povezuje medjusobno sve čvorove digrafa. Takav put sigurno postoji zbog jake povezanosti digrafa i neka je njegova dužina q. Objedinjavanjem ovog zatvorenog puta dužine q i ranije navedenih kontura čija je ukupna dužina m, dobijamo zatvoren put dužine m+q koji prolazi kroz sve čvorove digrafa. Broj m+q može biti proizvoljan dovoljno veliki broj.

Ovim je prvi deo teoreme dokazan.

Imprimitivna matrica A indeksa imprimitivnosti d nema osobinu primitivne matrice jer u matrici A^{pd} (p proizvoljan prirodan broj) postoje elementi koji su jednaki nuli. Zaista ako čvorovi i, j digrafa G^A pripadaju različitim skupovima imprimitivnosti, izmedju njih ne postoji put dužine pd.

Ovim je teorema dokazana.

Ako je A imprimitivna matrica indeksa imprimitivnosti d, putevi dužine d u digrafu G^A očigledno počinju i završavaju se u istom skupu imprimitivnosti. Na osnovu toga neposredno dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 3. Ako je A imprimitivna matrica indeksa imprimitivnosti d, onda postoji permutaciona matrica P takva da je $P^{-1}A^dP$ kvazi-dijagonalna matrica sa kvadratnim blokovima na glavnoj dijagonali.

8.3. Frobeniusova teorema i njena primena na spektar grafa

Nenegativne nerazložive matrice imaju specijalne spektralne osobine. Neke od njih su izražene sledećom teoremom koja potiče od G.F.Frobeniusa.

Teorema 1. Svaka nerazloživa, nenegativna matrica A ima pozitivnu sopstvenu vrednost r, koja je jednostruka nula karakterističnog polinoma. Moduli svih ostalih sopstvenih vrednosti nisu veći od r. "Maksimalnoj" sopstvenoj vrednosti r odgovara sopstveni vektor sa pozitivnim koordinatama. Ako pri tome A ima h sopstvenih vrednosti, po modulu jednakih r, ti brojevi su medjusobno različiti i zadovoljavaju jednačinu $\lambda^h - r^h = 0$. Uopšte, skup sopstvenih vrednosti $\lambda_1 = r, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ matrice A, posmatran kao skup tačaka u kompleksnoj λ ravni, prelazi sam u sebe pri rotaciji ravni za ugao $\frac{2\pi}{h}$. Za $h > 1$ je mogućno, permutacijom vrsta i istom permutacijom kolona, dovesti matricu A na sledeći "ciklički" oblik

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & A_{12} & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

gde se duž glavne dijagonale nalaze kvadratne nula-matrice.

Dokaz ove teoreme se izostavlja zbog opširnosti. Druge teoreme o spektrima nenegativnih matrica navedene su u Dodatku.

Matrica susedstva grafa (multigrafa, digrafa i multidigrafa) je nenegativna pa se teorija nenegativnih matrica može primeniti na spektre grafova. Najveća realna sopstvena vrednost o kojoj se govori u teoremi 1, naziva se (kada se posmatraju spektri grafova) <u>indeks grafa</u>.

U dokazu sledeće teoreme, koja se odnosi na spektre grafova, primenjuje se Frobeniusova teorema.

<u>Teorema 2</u>. Konačan, povezan, neorijentisan graf bez petlji i sa najmanje dva čvora, čiji je indeks jednak r, bihromatski je ako i samo ako njegov spektar sadrži broj $-r$.

<u>Dokaz</u>. Ako je graf bihromatski, iz teoreme 3 iz 7.4 sleduje da njegov spektar sadrži broj $-r$.

Pretpostavimo sada obrnuto, tj. da spektar grafa sadrži broj $-r$, i dokažimo da je graf bihromatski.

Matrica susedstva grafa A je nenegativna, nerazloživa i simetrična. Spektar grafa se sastoji od realnih brojeva. Sopstvena vrednost r je na osnovu teoreme Frobeniusa jednostruka. Takodje, sopstvena vrednost $-r$ mora biti jednostruka, jer bi suprotna pretpostavka vodila do kontradikcije sa Frobeniusovom teoremom. Dakle, matrica A ima tačno dve sopstvene vrednosti sa maksimalnim modulom r. Na osnovu Frobeniusove teoreme matrica A se može permutacijom vrsta i istom permutacijom kolona dovesti na oblik

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{Vmatrix},$$

gde se na glavnoj dijagonali nalaze kvadratne nula-matrice. Stoga je graf bihromatski.

Ovim je dokaz teoreme završen.

U daljem tekstu dajemo pregled osnovnih osobina spektra grafa.

Pošto je matrica susedstva proizvoljnog grafa nenegativna, na osnovu teoreme 1 se zaključuje da spektar grafa leži u krugu $|\lambda| \leqslant r$, gde je r najveća realna sopstvena vrednost.

Sopstvenevrednosti matrice susedstva grafa sa n čvorova obeležavaćemo sa $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Smatraćemo uvek da λ_1 označava najveću realnu sopstvenu vrednost, tj. indeks grafa. Algebarska višestrukost indeksa grafa može u opštem slučaju da bude veća os 1, a odgovarajući karakteristični vektor je nenegativan.

Matrica susedstva neorijentisanog grafa je simetrična, znači hermitska, te se spektar grafa, budući na osnovu teoreme 1 iz 7.6 sastavljen od realnih brojeva, nalazi na segmentu $[-r, r]$.

Neka je dat spektar $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nekog grafa.

Broj petlji grafa je očigledno jednak tragu matrice susedstva. Stoga je za grafove bez petlji tr $A = 0$, tj. $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$.

Broj čvorova grafa je, naravno, jednak broju n a za neorijentisane grafove bez petlji i višestrukih grana broj grana je $m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ (videti odeljak 7.4.). Dakle, za ovu klasu grafova se osnovni elementi grafa mogu neposredno odrediti pomoću spektra grafa.

Poznato je da za indeks povezanog neorijentisanog grafa bez petlji i višestrukih grana važi nejednakost $2\cos\frac{\pi}{n+1} \leqslant r \leqslant n-1$, gde je n broj čvorova grafa. Donja granica se postiže kod stabala koja imaju samo dva čvora stepena 1 a gornja kod potpunih grafova.

Ako se ne postavi uslov povezanosti, sleduje da je za graf bez grana $r = 0$, a u ostalim slučajevima $r \geqslant 1$.

Jedini povezan graf za koji je $r = 1$ je graf $K_{1,1}$ koji ima dva čvora i jednu granu koja povezuje ta dva čvora. Spektar ovog grafa je skup $\{1,-1\}$. Lako se zaključuje da grafovi za koje je $r = 1$ moraju medju komponentama povezanosti da sadrže bar jedan $K_{1,1}$ i da mogu imati izvestan broj izolovanih čvorova i nijedan drugi tip komponente povezanosti.

Za najmanju vrednost q iz spektra važi nejednakost $-r \leqslant q \leqslant 0$. Za graf G bez grana je $q = 0$. U suprotnom slučaju je $q \leqslant -1$. Ovo je posledica teoreme 2 iz 7.6. Naime, ako bi bilo $q > -1$, proizilazi da bi jedna glavna submatrica matrice susedstva imala najmanju karakterističnu vrednost manju od q. Ta submatrica odgovara grafu $K_{1,1}$ koji sigurno postoji kao podgraf u G, jer G sadrži bar jednu granu. Za G važi $q = -1$ ako i samo ako su sve komponente grafa potpuni grafovi.

Donja granica $q = -r$ se dostiže ako komponenta povezanosti grafa G, koji ima najveći indeks, predstavlja bihromatski graf (teorema 2).

Na osnovu izloženog može se formulisati sledeća teorema koja precizira osnovne spektralne osobine neorijentisanih grafova bez petlji i višestrukih grana.

Teorema 3. Za spektar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ neorijentisanog grafa G bez petlji i višestrukih grana važe sledeći iskazi:

1° Brojevi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ su realni i $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0$.

2° Ako G ne poseduje ni jednu granu, važi $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

3° Ako G sadrži bar jednu granu, za najveću vrednost iz spektra $\lambda_1 = r$ i najmanju $\lambda_n = q$ važe nejenakosti

(1) $$1 \leqslant r \leqslant n-1 ,$$

(2) $$-r \leqslant q \leqslant -1 .$$

U (1) se gornja granica dostiže ako i samo ako je G potpun graf, a donja ako i samo ako G kao komponente povezanosti pose-

duje samo grafove $K_{1,1}$ i izolovane čvorove, pri čemu mora postojati bar jedan $K_{1,1}$.
U (2) se gornja granica dostiže ako i samo ako G kao komponente povezanosti sadrži potpune grafove a donja ako i samo ako je komponenta povezanosti grafa G, koja ima najveći indeks, bihromatski graf. Ako je G povezan graf donja granica u (1) se zamenjuje sa $2\cos\frac{\pi}{n+1}$. Znak jednakosti tada važi ako i samo ako je G stablo koje ne sadrži nijedan čvor stepena većeg od dva.

Navedimo sada neke spektralne karakteristike regularnih grafova.

Indeks regularnog povezanog grafa je jednak stepenu grafa. Lako se uvidja da to važi i za nepovezan graf ali tada indeks nije jednostruka sopstvena vrednost. Višestrukost indeksa je jednaka broju komponenata povezanosti.

Neposredno se proverava da indeksu regularnog grafa odgovara sopstveni vektor čije su sve koordinate jednake 1. U povezanom regularnom grafu su sopstveni vektori ostalih sopstvenih vrednosti ortogonalni na ovaj vektor tj. suma njihovih koordinata je jednaka 0.

Dalje osobine spektra grafa mogu se dobiti polazeći od činjenice da su koeficijenti karakterističnog polinoma grafa celi brojevi. Iz ovog sleduje da su elementarne simetrične funkcije i zbirovi k-tih (k prirodan broj) stepena sopstvenih vrednosti celi brojevi.

Pošto je koeficijent uz najstariji član karakterističnog polinoma jednak 1, racionalne sopstvene vrednosti su (ukoliko postoje) celi brojevi.

Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori matrice susedstva grafa imaju i sledeću osobinu koja je povezana sa strukturom grafa.

Neka je λ jedna sopstvena vrednost a $u^T = \|u_1\ u_2\ \dots\ u_n\|$ odgovarajući karakteristični vektor matrice susedstva A grafa G. Pridružimo čvoru x_i veličinu u_i $(i = 1,2,\dots,n)$. Ako se jednakost $Au = \lambda u$ napiše u skalarnom obliku, za svako i se dobija $u_i = \sum_j a_{ij}u_j$, gde se sumiranje vrši po indeksima j onih čvorova x_j u koje iz čvora x_i vodi bar jedna grana. Za neorijentisane grafove bez petlji i višestrukih grana može se pisati $\lambda u_i = \sum_j u_j$. U ovom slučaju je za svaki čvor x_i zbir veličina u_j čvorova x_j, susednih čvoru x_i, λ puta veći od veličine u_i čvora x_i.

I pored brojnih uslova koje mora da zadovolji spektar grafa nije poznato kako treba tražiti odgovor na pitanje da li jedan zadati skup brojeva predstavlja spektar nekog grafa.

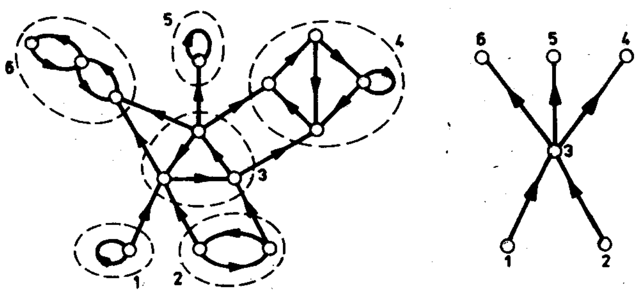
8.4. Markovljevi lanci

U primeru 3 iz odeljka 3.1 definisan je Markovljev lanac kao digraf G za koga je definisana (stohastička) matrica verovatnoće prelaza na jedan korak P takva da je $G = G^P$. U ovom odeljku ćemo, koristeći se rezultatima iz ovog poglavlja, detaljnije proučiti osobine Markovljevih lanaca.

Struktura digrafa G^P odredjuje sve bitne osobine Markovljevog lanca. Posmatrajmo najpre opšti slučaj kada je P razloživa matrica.

Posmatrajmo pomoćni digraf H^P koji se konstruiše pomoću digrafa G^P na sledeći način. Svakoj komponenti jake povezanosti iz G^P odgovara u H^P jedan čvor. Izmedju čvorova a,b digrafa H^P postoji orijentisana grana ako i samo ako postoji orijentisana grana koja u odgovarajućem smeru povezuje dva čvora iz G^P koji pripadaju komponentama jake povezanosti od G^P koje odgovaraju čvorovima a i b. Digraf H^P naziva se kondenzacija digrafa G^P.

Na sl. 1 prikazan je jedan digraf G^P u kome su istaknute njegove komponente a zatim je data kondenzacija H^P digrafa G^P.



sl. 1

Komponente jake povezanosti digrafa G^P kojima u H^P odgovaraju čvorovi čiji je izlazni stepen 0 nazivaju se <u>završne</u> komponente. Ako se čestica nalazi u nekoj od završnih komponenti, ona ne može više da napusti tu komponentu jer iz nje ne vodi nijedna grana u druge komponente. Ako se čestica nalazi u nekoj komponenti koja nije završna, ona će posle dovoljno dugog vremena sa verovatnoćom 1 da napusti tu komponentu. Stoga čestica kad-tad dolazi u jednu od završnih komponenti. Unutar jedne završne komponente čestica može da obilazi, sa većom ili manjom verovatnoćom sve čvorove jer izmedju svaka dva čvora postoji neki put. Zbog toga se čvorovi u završnim komponentama nazivaju <u>povratni</u> čvorovi. Čvorovi koji ne pripadaju završnim komponentama nazivaju se <u>nepovratni</u> čvorovi.

Dakle, čestica u Markovljevom lancu postepeno napušta nepovratne čvorove i počevši od jednog trenutka ona se kreće samo po povratnim čvorovima, tj. po nekoj od završnih komponenti. Stoga je za ispitivanje ponašanja Markovljevog lanca posle dovoljno dugog vremena bitna glavna submatrica matrice P odredjena unijom završnih komponenti.

Kako je komponenta jake povezanosti jako povezan graf, glavna submatrica A matrice P odredjena jednom završnom komponentom je nerazloživa. Posmatrajmo stoga jedan Markovljev lanac u kome je matrica verovatnoće prelaza na jedan korak upravo nerazloživa matrica A. Ovakav Markovljev lanac se naziva <u>nerazloživ</u>.

Ako je A imprimitivna matrica indeksa imprimitivnosti d digraf G^A je ciklički d-delni. Markovljev lanac se tada naziva <u>ciklički</u> ili <u>periodički</u>. Čestica ciklički obilazi skupove imprimitivnosti $I_1, I_2, \ldots, I_d$.

Ako je $A = \|a_{ij}\|_1^n$ primitivna matrica Markovljev lanac je <u>neperiodički</u>. Čvorovi digrafa G^A obeleženi su sa $1,2,\ldots,n$. Neka je p_i verovatnoća da se u početnom momentu čestica nalazi u čvoru i $(i = 1,2,\ldots,n)$. Tada je očigledno

$$p_j^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij}^{(k)}$$

verovatnoća da se čestica nalazi u čvoru j posle k koraka. Ako je $P_k = \| p_1^{(k)}\ p_2^{(k)}\ \dots\ p_n^{(k)} \|$ i $P = \| p_1\ p_2\ \dots\ p_n \|$ dobija se

$$P_k = PA^k ,$$

a odatle transpozicijom

$$P_k^T = (A^T)^k\ P^T. \tag{1}$$

Pretpostavimo da postoji $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = B$. Tada je redom $BA = B$, $A^T B^T = B^T$, tj. $A^T B^T P^T = B^T P^T$. Za matricu kolonu $x = B^T P^T$ dobija se $A^T x = x$ što znači da je x sopstveni vektor matrice A^T za sopstvenu vrednost 1. Označimo sa P_∞ matricu $\| p_1^\infty\ p_2^\infty \dots\ p_n^\infty \|$ verovatnoća p_i^∞ da će se čestica naći u čvoru i posle dovoljno dugog vremena. Ako se u (1) stavi $k \to +\infty$ dobija se

$$P_\infty^T = BP^T = x ,$$

tj. tražene verovatnoće su (ukoliko postoje) jednake koordinatama sopstvenog vektora x matrice A^T za sopstvenu vrednost 1.

Dokazaćemo sada da te verovatnoće zaista postoje na taj način što ćemo dokazati da postoji $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k$.

Pošto je matrica A stohastička, neposredno se proverava da je jedna sopstvena vrednost matrice jednaka 1 sa sopstvenim vektorom čije su sve koordinate jednake 1. Pošto je ovo pozitivan vektor, iz teoreme Frobeniusa proizilazi da su moduli svih sopstvenih vrednosti najviše jednaki 1. Pošto je A i primitivna matrica postoji samo jedna sopstvena vrednost sa maksimalnim modulom 1. Neka je $A = T^{-1}JT$, gde je J Jordanov kanonični oblik matrice A. Dalje je $A^k = T^{-1}J^kT$. Prema teoremi 1 iz 7.5 postoji $\lim J^k$ jer je $J = J_1 \dotplus J_2 \dotplus \dots \dotplus J_p$, pri čemu je $J_1 = \|1\|$ dok ostali Jordanovi blokovi $J_2,\dots,J_p$, imaju po dijagonali brojeve po modulu manje od 1. Pošto postoji $\lim\limits_{k\to+\infty} J^k$ postoji i $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k$.

Raspodela verovatnoća $p_1, p_2, \dots, p_n$ se naziva <u>stacionarnom</u>. Izmedju ostalog, to znači da je verovatnoća za nalaženje čestice u pojedinim čvorovima posle dovoljno dugog vremena nezavisna od čvora iz kojeg je čestica počela kretanje. Kaže se takodje da ovakav Markovljev lanac ima <u>ergodičko svojstvo</u>.

Iz izloženog proizilazi da samo nerazloživ neperiodički Markovljev lanac ima ergodičko svojstvo.

Korisno je da čitalac uporedi ovde skiciranu teoriju Markovljevih lanaca sa standardnim pristupima ovoj teoriji (videti, na primer, [30], [97]).

9. GAUSSOV ALGORITAM I SLABO POPUNJENE MATRICE

U poglavlju 6 opisani su metodi za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina koji su, pored svoje teorijske vrednosti, naročito pogodni kada se primene na sisteme u kojima su koeficijenti promenljive veličine. Ti metodi su, medjutim, po pravilu, nedovoljno efikasni kada se primene na sisteme sa numeričkim koeficijentima. U ovom poglavlju biće opisani neki metodi za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina sa numeričkim koeficijentima.

Posmatrajmo sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 , \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n . \end{aligned} \tag{1}$$

Sistem (1) možemo prikazati u matričnom obliku $Ax = b$, pri čemu, radi preglednosti, matrice-kolone shvatamo kao vektore. Sistem (1) ima rešenje ako je $\det A \neq 0$, izuzimajući slučaj homogenog sistema, kada je $b = 0$. Rešenje sistema (1), ako je $\det A \neq 0$, može se predstaviti u matričnom obliku $x = A^{-1} b$, gde je A^{-1} inverzna matrica matrice A. Ovo je samo formalni oblik rešenja sistema, s obzirom da je izračunavanje inverzne matrice ekvivalentno rešavanju sistema (1).

Sistemi linearnih jednačina mogu se deliti na više načina. Jedna mogućnost je podela sistema po veličini - mali i veliki sistemi. Ovde nema neke oštre podele, mada se sistem od preko 20 jednačina može smatrati velikim. Kod nekih problema broj jednačina može biti i preko 1000.

Sistemi se takodje mogu deliti prema vrsti matrice sistema A. Naime, ako matrica A ima dosta nula, kaže se da je matrica A <u>slabo popunjena</u>[1] i za taj slučaj postoje specijalni

1) Umesto termina <u>slabo popunjena</u> mogućno je upotrebiti i jedan od sledećih termina: <u>rastresita</u>, <u>razredjena</u>, <u>retka</u>.

metodi. Slabo popunjene matrice se javljaju, na primer, u analizi električnih mreža u Elektrotehnici. Slabo popunjenim matricama su posvećeni odeljci 9.3 - 9.5.

Numerički metodi za rešavanje sistema linearnih jednačina dele se na direktne i iterativne. Kod direktnih metoda rešenje dobijamo u jednom koraku. Zbog velikog broja operacija za ove metode je karakteristično da se kod većih sistema javlja velika greška. Osnovni direktni metod je Gaussova eliminacija. Cramerova pravila spadaju takodje u direktne metode. Medjutim, ona se ne koriste u numeričkoj analizi zbog velikog broja operacija.

Kod iterativnih metoda se rešenje u svakom iterativnom koraku poboljšava. Osnovna prednost ovih metoda je u tome što se greške zaokrugljivanja ne akumuliraju. Pored toga, iterativni metodi su relativno jednostavni u odnosu na direktne metode, pa se uspešno primenjuju za rešavanje velikih sistema. Jacobijev i Gauss-Seidelov metod su osnovni iterativni metodi. Iterativni metodi neće biti obradjeni u ovoj knjizi.

9.1. Gaussov metod eliminacije[1)]

Gaussov metod eliminacije (ili kraće - Gaussov metod) spada u najrasprostranjenije metode za rešavanje sistema linearnih jednačina. Posmatrajmo sistem linearnih jednačina

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2\,, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n\,. \end{aligned}$$

Ako prvu jednačinu ovog sistema pomnožimo sa $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ i saberemo sa drugom, zatim sa $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ i saberemo sa trećom, itd., i na kraju sa $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ i saberemo sa n-tom jednačinom, dobijamo ekvivalentni sistem jednačina (množenje jedne jednačine kon-

1) Uvodni tekst za ovo poglavlje, odeljak 9.1 i deo teksta iz odeljka 9.2 preuzeti su, uz neznatne izmene, iz knjige D. Dj.Tošića [90], sa odobrenjem autora.

stantom i dodavanje drugoj jednačini spada u elementarne transformacije, kojima dobijamo ekvivalentni sistem, tj. sistem sa istim rešenjem):

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \,,\\
a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)},\\
a_{32}^{(2)}x_2 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)},\\
&\vdots\\
a_{n2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)}.
\end{aligned}
$$

Ako izuzmemo prvu jednačinu sistema (2), ostaje sistem od n-1 jednačina sa nepoznatama $x_2,\dots,x_n$. Množenjem druge je-dna-jednačine sa $-a_{32}^{(2)}/\,a_{22}^{(2)}$ i sabiranjem sa trećom jednačinom, itd., i na kraju množenjem sa $-a_{n2}^{(2)}/\,a_{22}^{(2)}$ i sabiranjem sa n-tom jednačinom, dobijamo sistem jednačina

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \,,\\
a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)},\\
a_{33}^{(3)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)},\\
&\vdots\\
a_{n3}^{(3)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(3)}x_n &= b_n^{(3)}.
\end{aligned}
$$

Ako nastavimo sa ovim postupkom, svodimo sistem na trougaoni oblik

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \,,\\
a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)},\\
&\vdots\\
a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)}.
\end{aligned}
$$

Ovim je završen prvi deo Gaussovog metoda - trougaona eliminacija. Drugi deo je povratna zamena. Iz poslednje jednačine sistema (3) nalazimo x_n, iz pretposlednje x_{n-1}, itd., i na kraju iz prve jednačine x_1.

Da bismo došli do jednakosti koje su pogodne za izračunavanje koeficijenata sistema (3), pretpostavimo da smo posle k-1 koraka došli do sistema

$$
\begin{aligned}
&\vdots && \vdots \\
&a_{kk}^{(k)}x_k + a_{k,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{kj}^{(k)}x_j + \dots + a_{kn}^{(k)}x_n = b_k^{(k)}, \\
&\vdots && \vdots \\
&a_{ik}^{(k)}x_k + a_{i,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{ij}^{(k)}x_j + \dots + a_{in}^{(k)}x_n = b_i^{(k)}, \\
&\vdots && \vdots \\
&a_{nk}^{(k)}x_k + a_{n,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{nj}^{(k)}x_j + \dots + a_{nn}^{(k)}x_n = b_n^{(k)},
\end{aligned}
$$

pri čemu smo izostavili prvih k-1 jednačina. U sledećem koraku i-ta jednačina se menja na taj način što se k-ta jednačina množi sa $-a_{ik}^{(k)}/\,a_{kk}^{(k)}$ i sabira sa i-tom jednačinom. Na taj način koeficijent $a_{ij}^{(k)}$ se transformiše u koeficijent $a_{ij}^{(k+1)}$ čija je vrednost

$$
a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\, a_{kj}^{(k)} , \tag{4}
$$

pri čemu je $k = 1,\dots,n-1$; $j = k+1,\dots,n+1$; $i = k+1,\dots,n$; $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$, $a_{i,n+1}^{(k)} = b_i^{(k)}$.

Povratna zamena je opisana jednakošću

$$
x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i)}} \Big(a_{i,n+1}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j\Big) ,
$$

gde je $i = n,n-1,\dots,1$. Kao što se vidi, povratna zamena ide obrnutim redom.

Primer 1. Primenom Gaussovog metoda rešimo sistem jednačina

$$
\begin{aligned}
1{,}2307x - 2{,}7132y + 7{,}0032z &= 5{,}5207 , \\
2{,}0201x + 6{,}1891y - 1{,}9901z &= 6{,}2191 , \\
3{,}2109x - 3{,}7944y + 2{,}4344z &= 1{,}8509 .
\end{aligned}
$$

Pretpostavićemo da kod izračunavanja dobijeni rezultat zaokrugljujemo na 4 decimalna mesta.

Trougaonom eliminacijom dobijamo redom sledeće sisteme linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} 1{,}2307x - 2{,}7132y + 7{,}0032z &= 5{,}5207 , \\ 10{,}6426y - 13{,}4853z &= -2{,}8427 , \\ 3{,}2843y - 15{,}8370z &= -12{,}5526 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1{,}2307x - 2{,}7132y + 7{,}0032z &= 5{,}5207 , \\ 10{,}6426y - 13{,}4853z &= -2{,}8427 , \\ - 11{,}6754z &= -11{,}6753 . \end{aligned}$$

Povratna zamena daje

$$x = 1{,}0000; \quad y = 1{,}0000; \quad z = 1{,}0000 .$$

U ovom primeru računali smo sa 4 decimale i dobili smo tačno rešenje sistema. Ako bismo u povratnoj zameni računali sa više decimala, rezultat bi se neznatno razlikovao od tačnog rešenja.

S obzirom da se kod Gaussovog metoda pojavljuje veliki broj operacija, može se očekivati da se zbog numeričkog odsecanja greška može znatno akumulirati, što znači da koeficijente $a_{ij}^{(k)}$ možemo smatrati približnim brojevima, a samim tim i rešenje sistema. Zbog toga se Gaussov postupak može modifikovati metodom vodećih (stožernih) elemenata.

Na samom početku trougaone eliminacije množili smo prvu jednačinu sistema (1) sa $-\frac{a_{21}}{a_{11}},\ldots,-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ i dodavali drugoj, trećoj,...,n-toj jednačini. Kako su koeficijenti približni brojevi, greška množenja će biti minimalna ako su množitelji $-\frac{a_{21}}{a_{11}},\ldots,-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ minimalni. Ovaj slučaj nastupa kada je $|a_{11}|$ maksimalno. Prema tome, sistem (1) treba tako napisati da $|a_{11}|$ bude maksimalno. Posle prvog koraka, u jednakosti (2), sistem od n-1 jednačina pišemo tako da je $|a_{22}^{(2)}|$ maksimalno, itd. Primenom ovog metoda istovremeno izbegavamo slučaj da je neki od koeficijenata $a_{ii}^{(k)}$ jednak nuli.

Pomoću Gaussovog metoda trougaone eliminacije možemo takodje izračunavati determinante. Ovim metodom dobijamo determinantu u kojoj su elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli. Prema tome,

$$D = \det\|a_{ij}\|_1^n = a_{11}^{(1)}a_{22}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n)}.$$

Dakle, za izračunavanje determinante upotrebi se približno isti broj operacija kao kod trougaone eliminacije za sistem jednačina, s tim što nema povratne zamene.

S obzirom da je Gaussov postupak osnovni direktni metod za rešavanje sistema linearnih jednačina, korisno je da se razmotri broj operacija. Lako se dokazuje da je broj potrebnih operacija kod Gaussovog metoda:

Operacija	Trougaona eliminacija	Povratna zamena
Sabiranje	$\frac{n^3 - n}{3}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
Množenje	$\frac{n^3 - n}{3}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
Deljenje	$\frac{n(n-1)}{2}$	n

Kao što se vidi, najveći broj operacija je kod sabiranja i množenja u trougaonoj eliminaciji. Tako, na primer, za $n = 20$ ukupan broj operacija iznosi 5910, dok za $n = 100$ ovaj broj jednak je 681 550. Zbog toga što je broj operacija srazmeran trećem stepenu reda[1] sistema, Gaussov metod ima ograničenu primenu zbog akumuliranja grešaka zaokrugljivanja. Veći sistemi se mogu rešavati na računarima koji rade sa velikim brojem značajnih cifara, medjutim, treba voditi računa da povećanje broja cifara ne povećava znatno red sistema.

Na osnovu pregleda broja operacija zaključujemo da su Cramerova pravila neprimenljiva za velike sisteme. Naime, za izračunavanje determinante broj operacija je skoro isti kao za rešavanje sistema, a kako je kod Cramerovih pravila potrebno $n+1$ determinanata, ukupan broj operacija je $n+1$ puta veći nego kod Gaussovog metoda.

<u>Primedba</u>. Ako bismo determinantu n-tog reda direktno izračunavali razvojem po nekoj vrsti ili koloni, dobili bismo linearnu

1) Pod redom sistema podrazumevamo broj jednačina sistema, pri čemu je broj jednačina jednak broju nepoznatih.

kombinaciju n determinanata reda n-1.

Ako sa P_n označimo ukupan broj operacija za izračunavanje determinante n-tog reda, tada je

$$P_n = 2n - 1 + nP_{n-1} ,$$

pri čemu je $P_1 = 0$, $P_2 = 3$. Na primer, za n = 12 imamo ukupno $P_{12} = 1\ 302\ 061\ 343$ operacija, a za n = 20 imamo P_{20} $6{,}6 \cdot 10^{18}$. Ako bi jedna operacija trajala 10^{-5} sec, tada bi za izračunavanje determinante reda 20 bilo potrebno $6{,}6 \cdot 10^{13}$ sec, tj. $2{,}09 \cdot 10^{6}$ godina! Primenom Gaussovog metoda broj operacija je oko 5 300, te je potrebno 0,053 sec. Medjutim, to još uvek ne znači da je Gaussov metod optimalan, tj. da ima minimalan broj operacija [88]. Razbijanjem matrice na blokove broj operacija se može smanjiti.

Ovo je ubedljiv primer kako se razvojem pogodnih numeričkih metoda može smanjiti broj operacija, a time znatno povećati tačnost izračunavanja.

9.2. Svodjenje na trougaonu formu

Gaussov metod trougaone eliminacije je osnovni metod za rešavanje sistema linearnih jednačina. On ima niz modifikacija medju kojima su i one kod kojih se matrica sistema A svodi na trougaonu formu. Tako, na primer, ako matricu $A = \|a_{ij}\|_1^n$ prikažemo u obliku

(1) $$A = L(U + I) ,$$

gde je L donja trougaona matrica, U strogo gornja trougaona i I jednačina matrica, tj.

$$L = \begin{Vmatrix} a'_{11} & & & \\ a'_{21} & a'_{22} & & \\ \vdots & & & \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{Vmatrix} ,$$

$$U = \begin{Vmatrix} 0 & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} \\ & 0 & a'_{23} & & a'_{2n} \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{Vmatrix} ,$$

tada se sistem $Ax = b$ svodi na

(2) $$L(U + I)x = b\ .$$

Uvodjenjem matrice y pomoću

(3) $$(U + I)x = y\ ,$$

jednačina (2) se svodi na

(4) $$Ly = b$$

Ako jednačine (3) i (4) predstavimo u razvijenom obliku, imamo

(5) $$\begin{aligned} a'_{11}y_1 \phantom{+ a'_{n2}y_2 + \dots + a'_{nn}y_n} &= b_1\ ,\\ a'_{21}y_1 + a'_{22}y_2 \phantom{+ \dots + a'_{nn}y_n} &= b_2\ ,\\ &\ \vdots\\ a'_{n1}y_1 + a'_{n2}y_2 + \dots + a'_{nn}y_n &= b_n\ ; \end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n &= y_1\ ,\\ x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n &= y_2\ ,\\ &\ \vdots\\ x_n &= y_n\ . \end{aligned}$$

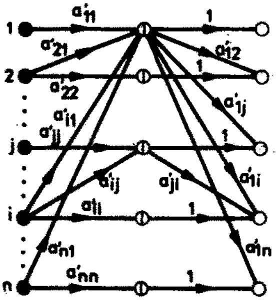
Kao što se vidi, sistemi (5) i (6) rešavaju se povratnom zamenom, i to (5) odozgo i (6) odozdo. Glavni problem kod ovog pristupa je u nalaženju matrice $A' = \|a'_{ij}\|_1^n$.

Iz jednačine $L(U + I) = A$ dobijamo

(7) $$\begin{Vmatrix} a'_{11} & & & \\ a'_{21} & a'_{22} & & \\ \vdots & & & \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \dots & a'_{1n} \\ & 1 & a'_{23} & a'_{2n} \\ & & & \vdots \\ & & & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{Vmatrix} .$$

Kompozicija digrafova koja odgovara matričnom proizvodu na levoj strani relacije (7) prikazana je na sl. 1. U digrafu $G(L)$ grane idu "na gore" a u digrafu $G(U+I)$, one idu "na dole".

Neposredno se vidi da je prva kolona matrice L jednaka prvoj koloni matrice A, tj. $a'_{11} = a_{11}$, $a'_{21} = a_{21}$, ... , $a'_{n1} = a_{n1}$. Dalje se mogu jednostavno odrediti prenosi grana koje izlaze iz prvog sivog čvora, tj. elementi prve vrste matrice U+I. Sa sl. 1 imamo $a'_{11}a'_{12} = a_{12},\ldots,a'_{11}a'_{1j} = a_{1j},\ldots,a'_{11}a'_{1n} = a_{1n}$, tj. $a'_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$, $j = 2,3,\ldots,n$.



sl. 1

Sada se prvi crni i prvi beli čvor mogu izostaviti iz razmatranja. Da bismo mogli da eliminišemo i prvi sivi čvor moramo u daljem radu uzeti u obzir prenose puteva koji vode kroz taj čvor. Za proizvoljno $i(\geqslant 2)$, $j(\geqslant 2)$ važi $\sigma + a'_{i1}a'_{1j} = a_{ij}$. Ovde $a'_{i1}a'_{1j}$ je prenos puta izmedju i-tog crnog i j-tog belog čvora koji prolazi kroz prvi sivi čvor a σ zbir prenosa takvih puteva koji prolaze kroz ostale sive čvorove. Odavde je $\sigma = a_{ij} - a'_{i1}a'_{1j}$, tj. posle odbacivanja prvog sivog čvora moramo elemente matrice A umanjiti za $a'_{i1}a'_{1j}$ i dalje nastaviti rad sa reduciranim digrafom (bez čvorova sa indeksom 1) i izmenjenom matricom A.

Posle j-1 iteracija ovog postupka najviši neizbačeni čvorovi imaju indeks j i u tom momentu odredjujemo a'_{ij} i a'_{ji} za $i \geqslant j$ (videti sl. 1). Na taj način se dolazi do sledećih formula:

(8) $$a'_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a'_{ik}a'_{kj},$$

(9) $$a'_{ji} = \frac{1}{a'_{jj}}\left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} a'_{jk}a'_{ki}\right).$$

Dakle, faktorizacija matrice A u obliku (1) je moguća ako je $a'_{jj} \neq 0$, $j = 1,2,\ldots,n$, te se u (9) izbegava deljenje sa nulom. Sledeća nešto opštija teorema, koja se dokazuje sličnim postupkom daje dovoljne uslove za egzistenciju faktorizacije.

Teorema 1. Neka je A kvadratna matrica reda n i neka je sa D_k označen njen glavni minor det $A^{\{1,2,\ldots,k\}}_{\{1,2,\ldots,k\}}$. Ako je $D_k \neq 0$, $k = 1,2,\ldots,n$, matrica A se može (i to na jedinstven način) faktorisati u obliku $A = LDU$, gde je L donja trougaona matrica čiji su svi dijagonalni elementi jednaki 1, U je gornja trougaona matrica čiji su svi dijagonalni elementi jednaki 1, a D je dijagonalna matrica. Pri tome se na glavnoj dijagonali matrice D nalaze redom brojevi $D_1, \frac{D_2}{D_1}, \frac{D_3}{D_2}, \ldots, \frac{D_n}{D_{n-1}}$.

Na osnovu (5) i (6) formule (8) i (9) daju

$$y_i = \frac{1}{a'_{ii}}\Big(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a'_{ik} y_k\Big), \tag{10}$$

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} a'_{ik} x_k, \tag{11}$$

pri čemu je $x_n = y_n$.

Jednakostima (8) - (11) opisan je Croutov metod za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina. On ima značajne prednosti u poredjenju sa Gaussovim metodom ali se u ovakve pojedinosti nećemo ovde upuštati.

9.3. Razlaganje sistema linearnih algebarskih jednačina na podsisteme

U ovom i u sledećim odeljcima opisaćemo neke specifičnosti u radu sa sistemima linearnih algebarskih jednačina kod kojih je matrica sistema slabo popunjena a (nenulti) elementi matrice su zadati numerički.

Ne postoji neki strogo odredjeni kvantitativni kriterijum koji odredjuje kada matricu treba smatrati slabo popunjenom. Posebni postupci za tretiranje slabo popunjenih matrica uključuju sprovodjenje raznih dodatnih operacija te su stoga oni efikasni kada matrica zaista sadrži veliki broj elemenata jednakih nuli. Nekad je očigledno da posebne tehnike nisu efikasne. Na primer, ako (kvadratna) matrica reda 100 sadrži 10 nula, najbolje je te nule ignorisati i sistem tretirati uobičajenim metodima. Medjutim, ako matrica reda 1000 sadrži 4000 elemenata različitih od nule, očigledno je najbolje matricu zadati veličinom i položajem njenih nenultih elemenata i tretirati je posebnim tehnikama. Grubo se može smatrati da je matrica slabo popunjena ako, nezavisno od njenog reda, svaka vrsta i svaka kolona sadrži po "nekoliko" nenultih elemenata.

Kao što je i nagovešteno, slabo popunjena matrica se u memoriji kompjutera čuva na taj način što se pamti samo veličina nenultih elemenata i za svaki takav element pamti se redni broj vrste i redni broj kolone u kojima se on nalazi.

Kod slabo popunjenih matrica A izuzetnu ulogu igraju pridruženi digrafovi $G(A)$ i G^A.

Prilikom tretiranja sistema jednačina sa slabo popunjenim matricama najpre se pokušava da se sistem rastavi na izvesne podsisteme manjeg formata, da se svaki podsistem reši posebno a zatim da se na osnovu rešenja podsistema dobije rešenje sistema.

U 9.1 je prilikom objašnjenja izbora stožernih elemenata za Gaussovu eliminaciju već nagovešteno da permutacija jednačina i permutacija nepoznatih u jednačinama igra važnu ulogu. Permutovanju jednačina i nepoznatih odgovara permutovanje vrsta i kolona matrice sistema A. Za razliku od permutacija vrsta i kolona iz poglavlja 8, ovde je dozvoljeno da se različite permutacije primene na vrste i kolone. U opštem slučaju matrica A se transformiše pomoću dve permutacione matrice P i Q tako da nova matrica ima oblik $A' = PAQ$. Digraf $G(PAQ)$ se dobija od digrafa $G(A)$ na taj način što se posebno vrše permutacije oznaka crnih (dejstvo matrice P) i belih (dejstvo matrice Q) čvorova.

Sistem je mogućno rastaviti na podsisteme ako se permutacijom vrsta i kolona matrica sistema A može dovesti na sledeći kvazi-trougaoni oblik

$$(1)\qquad A' = \left\| \begin{matrix} A_{11} & & & \\ A_{21} & A_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{matrix} \right\|,$$

gde su $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{mm}$ kvadratni blokovi.

Ako se vektori x i b iz sistema $A'x = b$, predstave u obliku $x^T = \| x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_m \|$, $b^T = \| b_1 \; b_2 \; \ldots \; b_m \|$, gde su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ i $b_1, b_2, \ldots, b_m$ redom vektori dimenzija koje odgovaraju dimenzijama dijagonalnih blokova u (1), onda je rešenje sistema $A'x = b$ ekvivalentno rešavanju sledećih podsistema

$$(2)\qquad A_{kk}x_k = b_k - \sum_{j=1}^{k-1} A_{kj}x_j \;,\; k = 1,2,\ldots,m.$$

Naravno, najpre rešavamo sistem (2) za k=1, koji se tada svodi na $A_{11}x_1 = b_1$, a zatim redom ostale sisteme.

Dijagonalnim blokovima u (1) odgovaraju komponente jake povezanosti digrafa $G^{A'}$. No digrafovi G^A i $G^{A'}$ nisu izomorfni pa se postavlja pitanje kako odrediti $G^{A'}$ a samim tim i matricu A'.

Prema teoremi 9 iz 4.2 važi formula

$$(3)\qquad \det A' = \det A_{11} \det A_{22} \ldots \det A_{mm} \;.$$

Posmatraćemo sistem u kome je $\det A \neq 0$, tj. $\det A' \neq 0$. Tada je i svaka od determinanata na desnoj strani jednakosti (3) različita od nule. Posmatrajmo digraf $G(A_{kk})$ za $k = 1,2,\ldots,m$. U digrafu postoji bar jedna separacija jer je $\det A_{kk} \neq 0$. Prenumerišimo bele čvorove u $G(A_{kk})$ tako da svaka grana separacije povezuje crni i beli čvor istog rednog broja. To znači da se kolone matrice A_{kk} mogu permutovati tako da dijagonalni elementi matrice budu različiti od nule. Dakle, u matrici A' se može naknadnom permutacijom kolona unutar dijagonalnih blokova postići da svi dijagonalni elementi matrice A' budu različiti od nule. Smatraćemo da je matrica A' već napisana u tom obliku.

Da bismo od A dobili A', posmatrajmo digraf G(A). Kako je $\det A \neq 0$ u G(A) postoji bar jedna separacija. Izaberimo jednu od separacija i, slično ranijem, prenumerišimo bele čvorove tako da separacija povezuje crne i bele čvorove istih rednih brojeva. Na taj način dobijamo $G(B)$ pri čemu matrica B ima iste dijagonalne elemente kao A'.

Na prvi pogled različit izbor separacije digrafa $G(A)$ može da dovede do različitih matrica A' a samim tim i do različitog broja m podsistema. Može se dokazati da izbor separacije nije bitan a da se različite matrice A'razlikuju po nekim manje važnim stvarima kao što je razmeštaj vrsta i kolona unutar pojedinih dijagonalnih blokova, ili redosled blokova. U stvari, za bilo koje razlaganje sistema na podsisteme (sa nenultim dijagonalnim elementima, što je uvek moguéno postići) <u>svaka</u> separacija digrafa $G(A)$ je <u>unija</u> separacija digrafova podsistema pa je očigledno svejedno koja se separacija bira.

Sada je očigledno G^B izomorfan sa $G^{A'}$. Matrica A' predstavlja normalnu formu (videti 8.1) matrice B. Dijagonalni blokovi u A'odgovaraju komponentama jake povezanosti digrafa G^B kao što je to opisano u 8.1.

Na osnovu izloženog od interesa je algoritam za odredjivanje komponenata jake povezanosti u digrafu. (Pošto se algoritam realizuje na kompjuteru ne zadovoljava intuitivni postupak naveden u 1.1).

Navodimo algoritam za odredjivanje komponenata jake povezanosti koji su dali R.W.H.Sargent i A.W.Westerberg, ne upuštajući se u detalje kompjuterske realizacije algoritma.

U digrafu se polazi od proizvoljnog čvora i kreće duž nekog puta. Ako se put vrati u neki od čvorova kroz koji je već prošao onda se čvorovi koji leže na zatvorenom putu, koji je upravo obrazovan, kondenzuju u jedan čvor a put se dalje nastavlja iz tog kondenzovanog čvora. U daljem radu kondenzovani čvorovi se tretiraju kao i obični čvorovi ali se pamti koje čvorove oni zamenjuju. Grane koje su bile u vezi sa zamenjenim čvorovima sada su u vezi sa kondenzovanim čvorom. Petlje nastale kondenzacijom se ne uzimaju u obzir. Put koji sledimo završava se u čvoru (koji je možda nastao kondenzacijom) iz kojeg ne vodi nijedna grana. Ovaj završni čvor puta odredjuje komponentu jake povezanosti koja odgovara početnom bloku A_{11} iz (1). Pošto se ovaj čvor izbaci,u preostalom digrafu se formira novi put čiji završni čvor odredjuje A_{22}, itd. Na ovaj način se postepeno odredjuju sve komponente jake povezanosti, odnosno svi blokovi iz (1).

9.4. Eliminacija kod slabo popunjenih matrica

Pošto se sistem jednačina, ukoliko je to moguće, razloži na podsisteme prema postupku opisanom u prethodnom odeljku, pristupa se rešavanju svakog podsistema posebno. U ovom odeljku razmatraćemo problem rešavanja sistema koji se ne može (opisanim postupkom) razložiti na manje podsisteme.

Posmatrajmo sistem (1) iz 9.1. Neka je matrica sistema slabo popunjena i neka se sistem ne može razložiti na podsisteme. Opet se primenjuje Gaussov metod eliminacije ali njegova primena sada ima niz specifičnosti.

Kod slabo popunjenih matrica ne zahteva se da stožerni element $a_{kk}^{(k)}$ u k-tom koraku eliminacije bude po modulu maksimalan, ali se zahteva da on bude iznad odredjene minimalne vrednosti koje su za različite vrste problema preporučene u literaturi. Smatraćemo da je uvek prilikom izbora stožernog elementa ovaj uslov ispunjen. Veća sloboda prilikom izbora stožernog elementa omogućava minimizaciju broja nenultih elemenata sa kojima se matrica popunjava u toku procesa eliminacije.

<u>Primer 1</u>. Ako se na sistem sa matricom

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & & & \\ 1 & & 2 & & \\ 1 & & & -2 & \\ 1 & & & & 2 \end{Vmatrix}$$

primeni Gaussov algoritam, već u prvom koraku eliminacije podmatrica tipa 4 X 4 će biti potpuno popunjena. Medjutim, premeštanjem vrsta i kolona ova se matrica može napisati u obliku

$$\begin{Vmatrix} 2 & & & & 1 \\ & -2 & & & 1 \\ & & 2 & & 1 \\ & & & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

Proces eliminacije sada ne dovodi do pojavljivanja novih nenultih elemenata.

S obzirom na način čuvanja slabo popunjene matrice u memoriji računara i s obzirom na to da se aritmetičke operacije u suštini obavljaju samo sa nenultim elementima, jasno je da pojavljivanje novih nenultih elemenata dovodi do većeg zauzeća memorije i dužeg rada programa a može da izazove i prekid rada programa ako se predvidjeni memorijski prostor iscrpi. Stoga je minimizacija broja novih nenultih elemenata koji se pojavljuju u procesu eliminacije jedno od centralnih pitanja u radu sa slabo popunjenim matricama.

Posmatrajmo Königov digraf G(A) slabo popunjene matrice A. Neka je crni čvor i povezan sa belim čvorom j granom čiji je prenos a_{ij}. Neka je d_i^+ izlazni stepen čvora i a d_j^- ulazni stepen čvora j. Ako se a_{ij} uzme za stožerni element pri eliminaciji mora se na $d_j^- - 1$ mesta u j-toj koloni praviti nula, tj. i-ta vrsta se $d_j^-{-}1$ puta dodaje drugim vrstama (pošto se prethodno pomnoži sa odredjenim brojem). Pri svakom ovom dodavanju dodaje se $d_i^+{-}1$ elemenata koji su različiti od nule. Ukupno se $(d_i^+-1)(d_j^--1)$ elemenata različitih od nule dodaje pri ovom koraku eliminacije. Pošto je matrica slabo popunjena verovatno je da će ovi elementi biti dodavani elementima koji su bili jednaki nuli, tj. pri ovom koraku eliminacije pojaviće se $(d_i^+-1)(d_j^--1)$ novih nenultih elemenata.

Na osnovu izloženog stožerni element je odredjen granom (i,j) digrafa G(A) za koju je $(d_i^+-1)(d_j^--1)$ minimalno. Naravno, u svakom narednom koraku eliminacije posmatra se podgraf digrafa sa jednim čvorom manje.

9.5. Trakaste matrice[1]

Mnogi problemi iz prakse svode se na rešavanje sistema linearnih jednačina, kod kojih je matrica sistema A (videti sistem (1) iz 9.1) slabo popunjena, simetrična a takodje i pozitivno definitna (poslednji uslov je bitan jer se tada ne mora voditi računa o numeričkoj stabilnosti rešenja, ako se pri

1) Ovaj odeljak je izradio S.Simić.

rešavanju koristi neki od metoda eliminacije). Ako se sistem rešava, recimo, Gaussovom eliminacijom mnoge nule matrice A u procesu eliminacije mogu postati sada nenulti elementi kao što je već objašnjeno u 9.4 i samim tim došlo bi do akumuliranja greške. U cilju izbegavanja takvih situacija ili bar njihove minimizacije u literaturi su razvijeni postupci kojima se na neki način stavljaju pod "kontrolu" nenulti elementi. Jedna klasa postupaka svodi se na to da se jednačine i nepoznate (što se tiče redosleda pojavljivanja) preurede. U ovom odeljku razmotriće se postupci za svodjenje matrice na tzv. <u>trakastu</u> formu.

Za neku matricu $M = \|m_{ij}\|$ kaže se da je <u>trakasta</u> ako postoji broj β ($\beta < n-1$) takav da je $m_{ij} = 0$ za $|i-j| > \beta$. Ako je još $m_{ij} \neq 0$ za $|i-j| \leq \beta$, tada se takva matrica naziva <u>potpuna trakasta matrica</u>. U specijalnom slučaju ako je $\beta = 1$ odgovarajuća trakasta matrica naziva se i <u>tridijagonalna</u> matrica. Broj β se naziva <u>širina trake</u>, a po nekim autorima (što je opravdanje) za širinu trake uzima se veličina $2\beta + 1$.

Posmatrajmo sada sistem linearnih jednačina

$$Ax = b \,. \tag{1}$$

Pošto je A simetrična matrica u cilju održavanja simetrije vršićemo isto permutovanje jednačina i nepoznatih. Simbolički se može to predstaviti na sledeći način

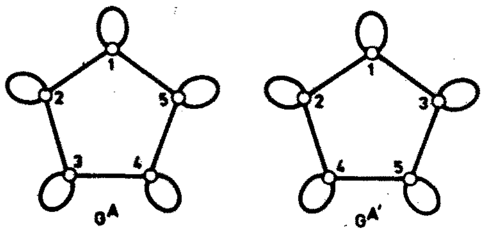
$$(PAP^T)(Px) = Pb \,, \tag{2}$$

gde je P neka permutaciona matrica. Na taj način sistem (1) postaje

$$A'x' = b', \tag{3}$$

gde je $A' = PAP^T$, $x' = Px$ i $b' = Pb$. Ako je novodobijena matrica A' trakasta, tada nije teško videti da će se u tom slučaju znatno redukovati stvaranje nenultih elemenata u procesu eliminacije. Stoga je od interesa poznavati neki postupak kojim bi se neka slabo popunjena, simetrična matrica prevela (istim permutovanjem vrsta i kolona) u trakastu formu ali takav da širina trake (ili neka druga brojna karakteristika) bude minimalna. Problemi ovog tipa mogu se na prirodan način prikazati pomoću grafova. Naime, kod slabo popunjenih matrica nas interesuje da li je neki element nulti ili nenulti (vrednosti nenultih elemenata nisu od interesa u početnoj analizi) tako da digraf G^A bez oznaka prenosa grana predstavlja dobar model za slabo popunjenu matricu A. Specijalno, ako je matrica A simetrična, onda se digraf G^A svodi na neorijentisani graf. Neka je $\mathfrak{R}(G^A)$ matrica susedstva grafa G^A. Sada bi se u terminima teorije grafova naš zadatak sveo na permutaciju čvorova gornjeg grafa tako da njegova matrica susedstva ima trakastu formu sa što manjom širinom trake.

Primer 1. Na sl. 1 su date dve numeracije čvorova istog grafa.



sl. 1

Odgovarajuće matrice susedstva su

$$\mathfrak{R}(G^A) = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| , \quad \mathfrak{R}(G^{A'}) = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| .$$

U prvom slučaju $\beta = 4$ a u drugom $\beta = 2$.

Prenumeraciji čvorova nekog grafa odgovara neka permutaciona matrica P, tj. ona koja će matricu A prevesti u trakastu formu $A' = PAP^T$.

Posmatrajmo sada i-tu vrstu matrice $\mathfrak{R}(G^A)$. Neka je q(i) indeks one kolone za koju su svi elementi u i-toj vrsti levo od pozicije q(i) jednaki nuli dok je element na poziciji (i,q(i)) različit od nule. Definišimo veličinu β_i sa

(4) $$\beta_i = \begin{cases} i-q(i), & i \geqslant q(i), \\ 0, & i < q(i). \end{cases}$$

Tada se lako može pokazati da je širina traka data sa

(5) $$\beta = \max_i \beta_i .$$

Sam zadatak svodjenja neke slabo popunjene, simetrične matrice na trakastu formu sa što je mogućno manjom širinom trake sada se može prikazati u vidu sledećeg problema: Odrediti P tako da važi relacija

$$\beta = \min_P \max_i \beta_i' ,$$

gde β_i' odgovara matrici $\mathcal{A}(G^{A'}) = P\mathcal{A}(G^A)P^T$. Inače, u literaturi se prilikom prevodjenja matrica u trakasti oblik minimiziraju i neke druge veličine, na primer, veličina zvana <u>profil</u> koja se definiše kao

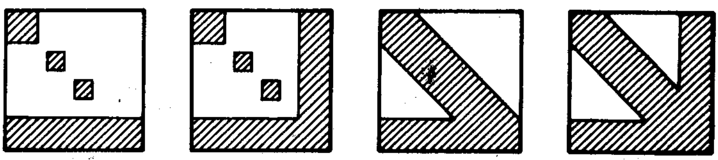
(6) $$\pi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i ,$$

gde je n red matrice A iz (1).

Pomenućemo sada neke osnovne metode za svodjenje matrica na trakastu formu. Jedan od prvih zabeleženih metoda je iterativnog karaktera. Prvo se uoči jedna numeracija čvorova (čvorovi se označavaju redom brojevima 1,2,...) grafa G^A. Zatim se u svakom koraku nalazi grana za koju je razlika oznaka njenih krajnjih čvorova maksimalna. Dalji postupak sastoji se u prenumeraciji jednog od čvorova te grane ali tako da se u novodobijenom grafu ne dobije grana kod koje bi razlika oznaka njenih krajnjih čvorova bila veća od ranije postojeće maksimalne vrednosti. Završna numeracija čvorova uporedjena sa polaznom odredjuje traženu permutacionu matricu. Ovaj algoritam je dosta nesavršen i, štaviše, ako se ne "pogode" dobre grane, može da se završi daleko pre nego što se nadje minimalna širina trake.

Drugi poznati algoritam je direktan pa samim tim i veoma brz(vreme rada je grubo rečeno proporcionalno broju grana grafa) mada ni on ne garantuje najbolje rešenje. Inače u osnovi ovog algoritma leži grafovska tehnika. Opet se kao u gornjem slučaju uočava graf G^A. Zatim se izabere jedan od njegovih čvorova koji ima minimalni stepen i on se prenumeriše sa oznakom 1. Potom se uočavaju njegovi susedi koji se u cilju prenumerisanja prvo urede u rastući poredak u odnosu na stepene njihovih čvorova, pa se zatim numerišu redom sa 2,3,... . Dalji postupak sastoji se u tome da se sada redom primeni isti postupak ali na (neprenumerisane) susede čvorova 2,3,..., itd. Ovaj postupak se primenjuje sve dok se ne iscrpe svi čvorovi prve komponente ako je graf nepovezan, a zatim se isti postupak ponovi na preostale komponente grafa. Inače, ovaj algoritam se može često koristiti u kombinaciji sa izvesnim iterativnim algoritmima pri čemu bi on služio kao dobra priprema za iterativne algoritme. Takodje su razmatrane i razne modifikacije gornjeg algoritma, kao i strategije izbora optimalnih numeracija u slučaju da postoji sloboda većeg izbora u pojedinim koracima.

Na kraju napomenimo da se umesto trakastih formi koriste i neke druge forme, a neke od njih prikazane su na sl. 2.



sl. 2

Na slici su elementi na nešrafiranim delovima jednaki nuli.

10. NEKE NUMERIČKE MATRIČNE FUNKCIJE

Najčešće upotrebljavana netrivijalna numerička funkcija kvadratne matrice je svakako determinanta. Pored determinante u literaturi su definisane i razne druge numeričke funkcije kvadratne matrice. U ovom poglavlju opisaćemo neke od njih a posebno <u>permanent</u> i <u>pfafijan</u>.

10.1. <u>Permanent</u>

Neka je G_A digraf pridružen kvadratnoj matrici $A = \|a_{ij}\|_1^n$ i neka je, kao u 4.1, $\mathfrak{F}$ skup svih faktora digrafa G_A. Pojedini faktori su obeleženi sa F a $C(F)$ označava prenos faktora, tj. proizvod prenosa grana koje obrazuju faktor.

<u>Permanent</u> per A matrice A definisan je pomoću

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{per} A = \sum_{F \in \mathfrak{F}} C(F) \; .$$

Dakle, per A sadrži iste sabirke kao det A samo su oni svi uzeti sa znakom +. Zbog toga se per A ponekad označava sa $\dagger A \dagger$. Permanent se može definisati i pomoću

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{per} A = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

gde se sumiranje vrši po svim permutacijama $j_1, j_2, \ldots, j_n$ skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ova definicija permanenta je analogna klasičnoj definiciji determinante iz 4.6.

Permanent, iako prividno jednostavnije definisan od determinante, nema neka pogodna svojstva koja ima determinanta, pa je stoga računanje sa permanentom po pravilu komplikovanije. Na primer, permanent ne menja znak kada dve vrste promene mesta. To ima za posledicu da permanent matrice sa dve jednake vrste ne mora biti jednak nuli. Medjutim, za permanent važi razvoj analogan razvoju determinante po vrsti ili koloni.

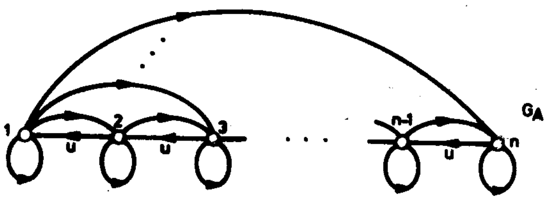
U nekim slučajevim permanent matrice jednak je determinanti iste ili nešto modifikovane matrice. Takve relacije su od interesa jer se pomoću njih teorija permanenta povezuje sa dobro razradjenom teorijom determinanti.

Posle neophodnih definicija navešćemo jedan takav rezultat. U sledećem odeljku biće opisana jedna klasa grafova za čije matrice susedstva važe slične relacije.

Matrica $A = \|a_{ij}\|_1^n$ se naziva <u>(gornja) semitrougaona</u> ako je $a_{ij} = 0$ za $j < i - 1$. Matrica $B = \|b_{ij}\|_1^n$ je <u>srodna</u> sa matricom A ako je $b_{ij} = a_{ij}$ za $i \geqslant j$ i $b_{ij} = -a_{ij}$ za $i < j$.

<u>Teorema 1</u>. Ako su A i B kvadratne semitrougaone matrice i ako je matrica B srodna sa matricom A, tada je per A = det B.

<u>Dokaz</u>. Digraf G_A prikazan je na sl. 1.



sl. 1

Grane koje nisu eksplicitno prikazane na crtežu vode iz čvorova sa manjim rednim brojem u čvorove sa većim rednim brojem. Posmatrajmo faktor F digrafa G_A koji sadrži p(F) kontura. Broj grana označenih sa u na sl. 1 koje ne pripadaju konturama faktora F je očigledno p(F)-1. Stoga faktoru F pripada n-p(F) grana u.

Digraf G_B se razlikuje od G_A samo po tome što su prenosi grana u suprotnog znaka. Stoga ovi digrafovi sadrže iste faktore. Neka su $C_A(F)$, $C_B(F)$ prenosi faktora F u G_A, G_B, respektivno. Tada je $C_B(F) = (-1)^{n-p(F)} C_A(F)$. Dalje je

$$\det B = (-1)^n \sum_F (-1)^{p(F)} C_B(F) = \sum_F C_A(F) = \operatorname{per} A .$$

Ovim je teorema dokazana.

Posledica 1. Ako su A i B tridijagonalne matrice i ako je matrica B srodna sa matricom A, tada je per A = det B.

U literaturi su opisani i drugi slučajevi kada je permanent matrice mogućno transformisati u determinantu promenom znaka izvesnih elemenata matrice.

Jedan od najinteresantnijih problema u vezi sa permanentom je proveravanje tačnosti van der Waerdenove hipoteze. B.L.van der Waerden je 1926 god. pretpostavio da za bistohastičku kvadratnu matricu A reda n važi nejednakost

$$\operatorname{per} A \geqslant \frac{n!}{n^n} .$$

Do danas je dokazano da ova nejednakost važi za $n \leqslant 5$.

10.2. Grafovi benzenoidnih ugljovodonika

U ovom odeljku će biti uspostavljena veza izmedju determinante i permanenta matrice susedstva za jednu važnu klasu grafova, koja je od interesa u hemiji.

Neka je H bihromatski digraf. Naravno, H ne sadrži (orijentisane) konture neparnih dužina. Svaki faktor digrafa H, ukoliko postoju, takodje ne sadrži konture neparne dužine.

Potreban uslov za egzistenciju faktora je da u digrafu postoji podjednak broj čvorova obojenih sa svakom od dve boje. Dalje ćemo posmatrati samo bihromatske digrafove sa $N = 2n$ čvorova od kojih je n čvorova obojeno, recimo, crnom bojom dok je drugih n čvorova obojeno, recimo, belom bojom.

Delimični digraf digrafa H kod koga iz svakog crnog (belog) čvora izlazi tačno jedna grana i u svaki beli (crni) čvor ulazi tačno jedna grana zvaćemo crna (bela) separacija.

Svaki faktor grafa H može se na jedinstven način predstaviti kao unija jedne crne i jedne bele separacije. I obrnuto, unija jedne crne i jedne bele separacije daje faktor digrafa H.

Ako je s_1 broj crnih i s_2 broj belih separacija u H, iz gornjeg sleduje da je broj faktora u H jednak $s_1 s_2$. Na osnovu formule (1) iz 10.1 dobija se za permanent matrice susedstva A grafa G jednakost

(1) $$\operatorname{per} A = s_1 s_2 .$$

Neka je G neorijentisani bihromatski graf sa n+n čvorova. Kao što je rečeno u 1.1, regularni delimični graf grafa G stepena 1 naziva se 1-faktor grafa G. Broj 1-faktora označavaćemo sa k.

Grafu G se može pridružiti digraf H, koji se dobija iz G kada se svaka njegova grana zameni sa dve orijentisane grane suprotnih orijentacija koje povezuju isti par čvorova. Očigledno, svakom 1-faktoru u G odgovara u H (na prirodan način) tačno jedna crna i tačno jedna bela separacija. Stoga je $s_1 = s_2 = k$. Pošto su matrice susedstva grafova G i H jednake formula (1) postaje

(2) $$\operatorname{per} A = k^2 .$$

Neka su crni čvorovi numerisani sa $1,2,\ldots,n$ a beli sa $n+1,n+2,\ldots,2n$. Crnu separaciju možemo predstaviti permutacijom $j_1,j_2,\ldots,j_n$ brojeva $n+1,n+2,\ldots,2n$. ($j_1,j_2,\ldots,j_n$ označavaju redom bele čvorove u kojima se završavaju grane koje polaze redom iz crnih čvorova $1,2,\ldots,n$.) Na sličan način belu separaciju možemo predstaviti permutacijom $i_1,i_2,\ldots,i_n$ brojeva $1,2,\ldots,n$.

Posmatrajmo faktor koji je dobijen unijom crne separacije $j_1,j_2,\ldots,j_n$ i bele separacije $i_1,i_2,\ldots,i_n$. Znak sabiranja koji u razvoju determinante det A odgovara posmatranom faktoru odredjujemo na osnovu broja inverzija u permutaciji

(3) $$j_1,j_2,\ldots,j_n,i_1,i_2,\ldots,i_n .$$

j-ovi sa i-ovima obrazuju, očigledno, n^2 inverzija. Ako je j broj inverzija permutacije $j_1,j_2,\ldots,j_n$ a i broj inverzija permutacije $i_1,i_2,\ldots,i_n$, tada je broj inverzija permutacije (3) jednak $i+j+n^2$ a znak sabirka u razvoju det A koji odgovara posmatranom faktoru je $(-1)^{i+j+n}$ jer su n^2 i n iste parnosti. Veličinu $(-1)^i$ zvaćemo <u>parnost bele separacije</u> a $(-1)^j$ <u>parnost crne separacije</u>.

Neka je K jedan 1-faktor u G a C odgovarajuća crna i P odgovarajuća bela separacija u H. Neka su par P i par C parnosti tih separacija. Lako je ustanoviti da važi par C = par P. <u>Parnost</u> par K 1-faktora K definisaćemo kao zajedničku vrednost parnosti separacija C i P:

$$\text{par } K = \text{par } P = \text{par } C .$$

Lema 1. Za bihromatski graf sa $N = n+n$ čvorova važi jednakost

$$\det A = (-1)^n \sum_{F \in \mathcal{F}} (-1)^{r(F)} c(F) , \tag{4}$$

gde je $r(F)(=r)$ broj kontura, čije su dužine oblika $4s$, a koje se nalaze u faktoru F.

Dokaz. Da bi se pomoću (1) iz 4.1 dobilo (4) potrebno je dokazati da je $(-1)^{2n+p(F)} = (-1)^{n+r(F)}$, tj. $p(F) \equiv n + r(F)$ (mod 2). U grafu postoje samo konture parne dužine. Neka je $q(F) = q$ broj komponenata sa brojem čvorova oblika $4s+2$ u faktoru F i neka su $4t_i+2$ $(i = 1,\ldots,q)$ brojevi čvorova u tim komponentama. Ako su $4s_i$ $(i = 1,\ldots,r)$ dužine ostalih kontura iz F, dobijamo redom

$$\sum_{i=1}^{q} (4t_i+2) + \sum_{i=1}^{r} 4s_i = 2n ,$$

$$2\sum_{i=1}^{q} t_i + q + 2\sum_{i=1}^{r} s_i = n , \qquad q \equiv n \pmod 2 .$$

Kako je $p(F) = q(F) + r(F)$, dobijamo $p(F) \equiv n + r(F)$ (mod 2), što je i trebalo dokazati.

Teorema 1. 1-faktori K_1 i K_2 u bihromatskom grafu su iste parnosti ako i samo ako unija skupova grana grafova K_1 i K_2 obrazuje paran broj kontura dužine oblika $4s$ $(s = 1,2,\ldots)$.

Dokaz. Neka je $\text{par } C_1 = \text{par } K_1 = (-1)^j$ i $\text{par } P_2 = \text{par } K_2 = (-1)^i$. Znak sabiranja u razvoju det A koji odgovara faktoru $C_1 \cup P_2$ je $(-1)^{i+j+n}$. Uporedjujući ovo sa rezultatom leme 1 dobijamo da je $i+j \equiv r(C_1 \cup P_2)$ (mod 2). Dakle, K_1 i K_2 su iste parnosti ako i samo ako je broj kontura dužine $4s$ u faktoru $C_1 \cup P_2$ paran.

Odavde neposredno sleduje iskaz teoreme.

Na osnovu teoreme se vidi da osobina dva 1-faktora "biti iste parnosti" (odnosno, "biti različite parnosti") ne zavisi od numeracije čvorova grafa, odnosno, izbora boja pri bojenju grafa. Ova binarna relacija je relacija ekvivalencije i ona na prirodan način deli skup 1-faktora na dve klase ekvivalencije. Medjutim, parnost 1-faktora zavisi od numeracije čvorova što se lako može proveriti na primerima.

Neka je k_+ broj 1-faktora pozitivne parnosti i k_- broj 1-faktora negativne parnosti.

Teorema 2. $\det A = (-1)^n(k_+ - k_-)^2$.

Dokaz. Već je ustanovljeno da je $(-1)^{r(P_i \cup C_j)} = \operatorname{par} P_i \operatorname{par} C_j$. Stoga formula (4) postaje

$$\det A = (-1)^n \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{r(P_i \cup C_j)}$$

$$= (-1)^n \sum_{i=1}^{k} \operatorname{par} C_i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{par} P_j = (-1)^n(k_+ - k_-)^2.$$

Vrednost determinante matrice susedstva, naravno, ne zavisi od numeracije čvorova, što se potvrdjuje i ovom formulom.

U poglavlju 12 razmatraćemo problem odredjivanja algebarske višestrukosti $\eta(G)$ broja 0 u spektru bihromatskih grafova G. Pokazaćemo da je broj η u uskoj vezi sa 1-faktorima posmatranog grafa.

Ako graf H ne sadrži nijedan 1-faktor, tj. ako je $k = 0$ ($k_+ = k_- = 0$), iz poslednje teoreme se dobija $\det A = 0$, tj. $\eta(G) > 0$. Na osnovu ovoga dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 3. Ako je $\eta(H) = 0$, onda povezani bihromatski graf H ima 1-faktor.

Medjutim, ako je $k \neq 0$, to još uvek ne znači da je $\eta(H) = 0$, jer na osnovu teoreme 2 još uvek može biti $k_+ = k_-$ i $\det A = 0$.

Definisaćemo sada jednu klasu grafova (nazvaćemo je klasa $\mathfrak{K}$) koja je posebno interesantna u hemiji i u kojoj za svaki graf H važi implikacija $k \neq 0 \Rightarrow \eta(H) = 0$. To će se postići tako što će u konstruisanoj klasi grafovi sadržati 1-faktore samo jedne parnosti (recimo pozitivne). Tada je $k_- = 0$ i $k_+ = k$ pa je $\det A = (-1)^n k^2$.

Pre nego što definišemo klasu $\mathfrak{K}$ grafova definisaćemo pojam planarnog grafa i dokazaćemo jednu teoremu o planarnim grafovima.

Planarni grafovi su oni grafovi koji se mogu nacrtati u ravni tako da im se grane ne seku. Preciznije, zahteva se da je graf mogućno predstaviti u ravni tako da zajednička tačka dve grane može biti samo čvor grafa koji predstavlja zajedničku krajnju tačku tih grana.

Ako je planarni graf predstavljen na opisani način u ravni, on deli ravan na više konačnih zatvorenih oblasti i jednu beskonačnu oblast. Svaka konačna oblast naziva se okce. Broj ovih oblasti može se izraziti pomoću broja čvorova i grana na osnovu sledeće teoreme koju je dao L.Euler.

Teorema 4. Povezan, planaran graf (ili multigraf) sa n čvorova i m grana deli ravan na $f = m-n+2$ oblasti (uključujući i beskonačnu oblast).

Dokaz. Dokaz ćemo sprovesti indukcijom po broju grana. Minimalan broj grana koje sadrži povezan graf sa n čvorova je $m = n-1$. Graf se tada svodi na stablo. Stablo ne ograničava nijednu konačnu oblast, pa je $f = 1$. Dakle, Eulerova formula važi za $m = n-1$.

Neka je $m > n-1$. Tada graf sadrži bar jednu konturu. Pretpostavimo da Eulerova formula važi za grafove sa $m-1$ grana. Posmatrajmo jednu granu koja pripada nekoj konturi. Ova grana je granična za dve oblasti. Ako je udaljimo iz grafa, broj oblasti i broj grana se smanjuje za 1. Po induktivnoj pretpostavci je onda $f-1 = (m-1)-n+2$. Odavde sleduje za graf sa m grana $f = m-n+2$, što je i trebalo dokazati

Prelazimo na definiciju klase $\mathfrak{K}$.

Klasi $\mathfrak{K}$ pripadaju povezani planarni grafovi koji se mogu predstaviti u ravni tako da svako okce bude kontura čija je dužina oblika $4s+2$ $(s \in N)$.

Iz načina konstrukcije grafova iz klase $\mathfrak{K}$ zaključujemo da su ovi grafovi bihromatski.

Lema 2. Neka je $H \in \mathfrak{K}$. U unutrašnjosti svake konture dužine $4s$ $(s \in N)$ grafa H nalazi se neparan broj čvorova a u unutrašnjosti svake konture dužine $4s+2$ $(s \in N)$ nalazi se paran broj čvorova.

Dokaz. Neka je C jedna kontura grafa H. Posmatrajmo podgraf H' indukovan čvorovima koji leže unutar ili na konturi C. Neka H' ima n čvorova m grana i f (=m-n+1) okaca. Neka su dužine kontura koje ograničavaju pojedina okca $d_j = 4s_j+2$ ($s_j \in N$, $j = 1,2,\ldots,f$) i neka je d dužina konture C. Tada je

$$d + \sum_{j=1}^{f} d_j = 2m .$$

Ako uvedemo $s = \sum_{j=1}^{f} s_j$, dobijamo $d+4s+2f = 2m$. Na osnovu Eulerove teoreme za planarne grafove, dobijamo $f = m-n+1$, što zajedno sa poslednjom relacijom daje $d+4s = 2(n-1)$ ili $n-d = 2s+1-\frac{d}{2}$.

Kako je n-d broj čvorova u unutrašnjosti konture C, iskaz leme se dobija neposredno iz ove relacije.

Lema 3. Neka je $H \in \mathfrak{K}$ graf sa k čvorova. Nijedna osnovna figura sa k čvorova grafa H ne sadrži konturu dužine 4s ($s \in N$).

Dokaz. Pretpostavimo da u nekom grafu H iz klase $\mathfrak{K}$ postoji osnovna figura U koja obuhvata sve čvorove i koja sadrži konturu C dužine 4s ($s \in N$). Prema lemi 2 u unutrašnjosti konture C nalazi se neparan broj čvorova. Pošto je H bihromatski graf komponente figure U sadrže paran broj čvorova. Stoga bar jedan čvor iz unutrašnjosti konture C ne može da pripada figuri U, a to je kontradikcija.

Ovim je lema dokazana.

Teorema 5. Neka je $H \in \mathfrak{K}$. Svi 1-faktori grafa H su iste parnosti.

Dokaz. Ova teorema je neposredna posledica teoreme 1 i leme 3.

Na osnovu ranije izloženog i teoreme 5 dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 6. Neka je H (bihromatski) graf sa n+n čvorova, k 1-faktora i matricom susedstava A, koji pripada klasi $\mathfrak{K}$. Tada važe sledeći iskazi:

1^o $\det A = (-1)^n k^2$;

2^o $\det A = (-1)^n \operatorname{per} A$;

3^o $\eta(H) = 0$ ako i samo ako je $k > 0$.

U vidu posebne teoreme ističemo vezu izmedju broja 1-faktora i spektra grafa H.

Teorema 7. Neka je $H \in \mathfrak{K}$. Broj 1-faktora grafa H jednak je proizvodu nenegativnih sopstvenih vrednosti grafa H.

Dokaz. Ako nije svakom bojom obojen podjednak broj čvorova grafa H, tada je, naravno, k = 0 ali tada se matrica susedstva A grafa H može predstaviti u obliku

$$A = \begin{Vmatrix} O & B \\ B^T & O \end{Vmatrix},$$

gde je B matrica tipa $m \times n$ $(m \neq n)$ pa je

$$A^2 = \begin{Vmatrix} BB^T & O \\ O & B^TB \end{Vmatrix};$$

sopstvene vrednosti matrice A^2 su s jedne strane kvadrati sopstvenih vrednosti grafa a s druge strane predstavljaju objedinjenje sopstvenih vrednosti matrica BB^T i B^TB pa na osnovu (3) iz 4.4, broj nula pripada spektru grafa. Za slučaj kada je svakom bojom obojen podjednak broj čvorova teorema 7 sleduje iz teoreme 6, formule 8 iz 7.1 i teoreme 3 iz 7.4.

Jedna poklasa (nazovimo je $\mathfrak{B}$) klase $\mathfrak{K}$ posebno je interesantna u hemiji. U klasu $\mathfrak{B}$ spadaju, po definiciji, svi oni grafovi H iz klase $\mathfrak{K}$ za koje važi: 1^o stepeni čvorova iz H nisu veći od 3, i 2^o svaka dva okca iz H imaju najviše jednu zajedničku granu. Grafovi iz klase $\mathfrak{B}$ reprezentuju molekule benzenoidnih ugljovodonika.

Na osnovu teoreme 6 pitanje stabilnosti benzenoidnih ugljovodonika (tj. prema 12.4.3 ispitivanje da li je $\eta(H) = 0$) svodi se na utvrdjivanje egzistencije bar jednog 1-faktora. Za većinu molekula sa kojima se hemičari sreću moguéno je bez većih teškoća tačno utvrditi egzistenciju 1-faktora.

10.3. Pfafijan

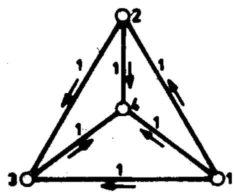
Ako je A koso-simetrična matrica neparnog reda n, važe jednakosti

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A ,$$

tj. $\det A = 0$. Dakle, determinanta koso-simetrične matrice neparnog reda je jednaka nuli. Za izračunavanje determinante koso-simetrične matrice $A = \|a_{ij}\|_1^n$ parnog reda n može se posmatrati neorijentisan graf G koji nastaje od G_A (ili G^A) kada se svaki par orijentisanih grana suprotnih orijentacija a koji spajaju iste čvorove i, j zameni neorijentisanom granom. Orijentisane grane su imale prenose a_{ij} i $a_{ji} = -a_{ij}$. Neorijentisanoj grani se može kao prenos pridružiti (zajednički) modul ove dve veličine. Grana se posebno markira strelicom koja je usmerena od čvora i ka čvoru j ako je $a_{ij} > 0$. (Uprkos ove naknadne orijentacije, grane grafa G smatramo neorijentisanim.) Graf G nema petlji.

Primer 1. Koso-simetričnoj

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$



sl. 1

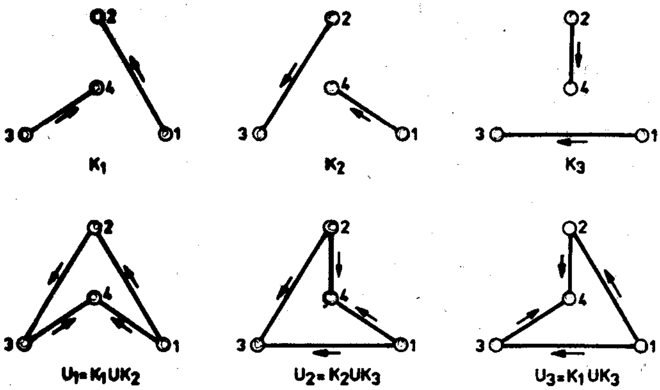
pridružujemo graf G sa sl. 1.

Za izračunavanje det A korisno je uvesti funkciju Pf A koja se naziva pfafijan matrice A a u uskoj je vezi sa 1-faktorima grafa G. Pfafijan se definiše samo za koso-simetrične matrice.

Posmatrajmo 1-faktore grafa G. Definisaćemo parnost 1-faktora jednim postupkom koji je sličan postupku iz prethodnog odeljka. Kao što se iz ranijeg izlaganja vidi, unija skupova grana dva 1-faktora daje jednu osnovnu figuru U sa n čvorova grafa G. Konture ove osnovne figure su parne dužine. Za svaku od ovih kontura C neka je $s(C) = \min(p,q)$ gde je p broj grana koje se prilikom obilaska konture C prolaze u smeru strelice a q broj grana po kojima se kreće nasuprot strelice. (Broj s(C) očigledno ne zavisi od smera obilaska konture C.) Za osnovnu figuru U neka je $t(U) = c(U) + \sum_C s(C)$, gde je c(U) broj kontura figure U, a sumiranje se vrši po svim konturama C osnovne figure U. Konačno neka je $f(U) = (-1)^{t(U)}$. Za dva 1-

-faktora K_i, K_j grafa G se kaže da su <u>iste parnosti</u> ako oni obrazuju osnovnu figuru U sa $f(U) = 1$. Ako je $f(U) = -1$, 1-faktori su suprotne parnosti. Ako se za jedan fiksirani 1-faktor uzme da je pozitivne parnosti onda je parnost svih 1-faktora odredjena. Parnost 1-faktora K obeležavaćemo sa par K i ona može biti jednaka 1 ili -1. Važi formula par K_i par $K_j = f(U)$.

Primer 2. 1-faktori grafa sa sl. 1 prikazani su na sl. 2 zajedno sa osnovnim figurama koje dva po dva od njih obrazuju.



sl. 2

Neposredno se uveravamo da važe sledeće jednakosti

$$c(U_1) = c(U_2) = c(U_3) = 1 ,$$

$$s(U_1) = 1, \; s(U_2) = s(U_3) = 2 ,$$

$$t(U_1) = 2, \; t(U_2) = t(U_3) = 3 ,$$

$$f(U_1) = 1, \; f(U_2) = f(U_3) = -1.$$

Dakle, 1-faktori K_1 i K_2 su iste parnosti dok K_3 ima suprotnu parnost.

<u>Prenos</u> C(K) 1-faktora K grafa G definiše se kao proizvod prenosa grana koje obrazuju 1-faktor.

Definicija 1. Pfafijan Pf A koso-simetrične matrice A je broj definisan pomoću

$$\text{(1)} \qquad \text{Pf } A = \sum_K (\text{par } K) C(K) ,$$

gde se sumiranje vrši po svim 1-faktorima K grafa G pridruženog matrici A.

Ovom definicijom je pfafijan odredjen sa tačnošću do znaka, ali to nije bitno, kao što će se odmah videti. Značaj pfafijana pokazuje sledeća teorema.

Teorema 1. Za svaku koso-simetričnu matricu A važi formula

$$\text{(2)} \qquad \det A = (\text{Pf } A)^2 .$$

Dokaz. Ako je red matrice A neparan, tada je det A = 0. No, u tom slučaju pridruženi graf G ne sadrži nijedan 1-faktor K pa definicija 1 daje Pf A = 0. Dakle, (2) važi u ovom slučaju.

Neka je sada red n matrice A paran. Prema definiciji determinante dobija se

$$\text{(3)} \qquad \det A = \sum_F (-1)^{p(F)} C(F) ,$$

gde se sumiranje vrši po svim faktorima digrafa G_A.

Prelaskom na neorijentisani graf G faktore F grupišemo u osnovne figure U te formula (3) postaje

$$\text{(4)} \qquad \det A = \sum_U (-1)^{p(U)} 2^{c(U)} C(U) g(U) ,$$

slično izvodjenju formule za koeficijente karakterističnog polinoma grafa u 7.4. C(U) je proizvod prenosa grana koje obrazuju konture figure U i kvadrata prenosa grana koje obrazuju elementarne figure K_2. Pošto je G graf sa pozitivnim prenosima grana, C(U) je pozitivno pa je bilo potrebno uvesti funkciju g(U) koja daje znak prenosa faktora čijim objedinjavanjem je nastala osnovna figura U. Kod osnovnih figura U koje sadrže samo parne konture jasno je da prenosi svih faktora koji su zamenjeni osnovnom figurom imaju isti znak (koji je obeležen sa g(U)). Ako, pak, figura sadrži neparnu konturu, dva faktora grafa G_A koji se medjusobno razlikuju po smeru obilaženja neparne konture imaju suprotan znak (a istu apsolutnu vrednost). Stoga je ukupan doprinos takve figure sumi(4) jednak nuli pa se može uzeti da je tada g(U) = 0. Drugim rečima, možemo smatrati da se u (4) sumiranje vrši samo po onim osnovnim figurama U grafa G koje ne sadrže konture neparne dužine.

S druge strane, svaka takva osnovna figura U može se na $2^{c(U)}$ načina predstaviti u obliku $U = K_i \cup K_j$, gde su K_i, K_j izvesni 1-faktori grafa G.

Osnovna figura U sadrži p(U) - c(U) elementarnih figura K_2 koje potiču od kontura dužine 2 odgovarajućih faktora pa je $g(U) = (-1)^{p(U) - c(U)} \prod_C (-1)^{s(C)}$, gde se množenje vrši po svim konturama C figure U. Stoga je

$$(-1)^{p(U)} g(U) = (-1)^{p(U)} (-1)^{p(U)-c(U)} \prod_C (-1)^{s(C)} =$$

$$(-1)^{c(U) + \sum_C s(C)} = (-1)^{t(U)} = f(U) = \text{par } K_i \text{ par } K_j.$$

Formula (4) sada postaje

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i,j} (\text{par } K_i)(\text{par } K_j) C(K_i \cup K_j) \\ &= \sum_i \sum_j (\text{par } K_i)(\text{par } K_j) C(K_i) C(K_j) \\ &= \sum_i (\text{par } K_i) C(K_i) \sum_j (\text{par } K_j) C(K_j) = (\text{Pf } A)^2. \end{aligned}$$

Ovim je teorema dokazana.

<u>Posledica 1</u>. Determinanta koso-simetrične matrice čiji su elementi celi brojevi je kvadrat celog broja.

<u>Primer 3</u>. Za matricu A iz primera 1 je, na osnovu primera 2, Pf A = ± (1+1-1) = ± 1 pa je det A = 1.

11. PRIMENE U ELEKTROTEHNICI

Primene teorije matrica u elektrotehnici su mnogostruke i veoma rasprostranjene. Jedna od važnih karakteristika matrica koje se pojavljuju u elektrotehnici je da su one, po pravilu, slabo popunjene, tj. da sadrže veliki broj elemenata jednakih nuli. Ta činjenica opravdava veliku popularnost grafovskih, tj. kombinatornih, metoda u teoriji matrica medju elektroinženjerima. Naravno, grafovski metodi nisu vezani samo za slabo popunjene matrice. Isto tako nije prednost ovih metoda samo u tome da se brzo odredi rešenje nekog sistema; oni mogu da posluže i za dokazivanje raznih teorema.

U okviru ovog poglavlja moguće je dati samo osnovne ideje u vezi primena teorije matrica, posebno, kombinatorne teorije matrica. Pri ovome naglasak nije dat na iscrpnost opisa primena već na dodatna objašnjenja specifičnog matematičkog aparata koji se pojavljuje u primenama. Ova napomena se odnosi i na sledeća dva poglavlja.

11.1. Kirchhoffova pravila i jednačine konturnih struja

Analiza električnih kola se sa matematičke tačke gledišta, u suštini, svodi na formiranje i rešavanje jednog sistema linearnih algebarskih jednačina. Ovaj sistem se formira uz pomoć teorije grafova, pa ćemo stoga najpre uvesti relevantne pojmove i teoreme teorije grafova.

Posmatrajmo neorijentisan multigraf G bez petlji sa m grana. Svakoj grani pridružimo jednu orijentaciju tako da G postane multidigraf. Osobine grafova koje se izlažu u ovom poglavlju ne zavise od načina orijentacije grana multigrafa.

Neka su grane iz G obeležene sa $u_1,\dots,u_m$. Svakom ciklusu c iz G pridružićemo m-dimenzionalni vektor $c = (c_1,\dots,c_m)$. Ako ciklus c prolazi r_i puta granom u_i u pravcu strelice i s_i puta istom granom nasuprot strelici, komponenta c_i(i =

$= 1,\dots,m$) vektora c se definiše pomoću $c_i = r_i - s_i$. U nekim slučajevima ciklus se predstavlja vektorom sa više od m komponenata. Tada se prvih m komponenata definišu kao što je opisano, a ostale komponente su po definiciji jednake nuli. Vektor c se naziva ciklusni vektor.

Ciklusni vektor je u potpunosti odredjen ciklusom. Obrnuto ne važi. Jednom vektoru može da odgovara više ciklusa, a postoje vektori čije su komponente celi brojevi kojima ne odgovara nijedan ciklus nego, na primer, nezatvoren lanac.

Ciklus kome odgovara nula-vektor zvaćemo trivijalni ciklus. U daljem tekstu posmatraćemo samo netrivijalne cikluse.

Vektor pridružen nekom ciklusu je invarijantan u odnosu na cikličku permutaciju niza grana koje obrazuju ciklus. U ovom poglavlju je celishodno smatrati identičnim cikluse koji se mogu dobiti jedan iz drugog cikličkom permutacijom njihovih grana.

Promena smera obilaženja ciklusa dovodi do promene znaka svih koordinata pridruženog vektora.

Ciklus koji ne prolazi više od jedanput ni kroz koji čvor grafa zove se elementaran ciklus.

Grane elementarnog ciklusa obrazuju, kada se zanemari njihova orijentacija, jedan delimični podgraf datog grafa. Lako se zaključuje da ovaj delimični podgraf predstavlja konturu.

Ako vektori c_1 i c_2 predstavljaju cikluse koji pripadaju istoj komponenti povezanosti posmatranog multigrafa, linearna kombinacija $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$, pri čemu su α_1 i α_2 celi brojevi, takodje predstavlja vektor pridružen nekom ciklusu. Ako c_1 i c_2 odgovaraju ciklusima iz različitih komponenata, pomenutoj linearnoj kombinaciji ne odgovara ciklus jer ne možemo, krećući se najpre jednim ciklusom, da predjemo na drugi. Dakle, vektoru $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$ odgovara neki "ciklus" koji se sastoji od odvojenih ciklusa.

Sabiranje ciklusa i množenje ciklusa skalarom (celim brojem) definiše se pomoću odgovarajućih operacija za pridružene vektore.

Kaže se da je skup datih ciklusa grafa zavisan ili nezavisan prema tome da li je skup pridruženih vektora linearno zavisan ili nezavisan nad skupom celih brojeva.

Skup nezavisnih ciklusa koji dodavanjem bilo kojeg novog netrivijalnog ciklusa grafa postaje skup zavisnih ciklusa naziva se baza ciklusa. Svaki ciklus grafa može se izraziti kao linearna kombinacija ciklusa iz baze ciklusa. Graf može da poseduje više ciklusnih baza.

U primenama je od interesa odredjivanje bar jedne baze.

Ako se formiraju sve moguće linearne kombinacije ciklusnih vektora sa koeficijentima iz polja realnih brojeva (a ne samo sa koeficijentima koji su celi brojevi), skup ovako formiranih linearnih kombinacija obrazuje vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.

Za dalja razmatranja potrebna je sledeća definicija.

Ciklomatički broj (ili nultost) $\nu(G)$ neorijentisanog multigrafa G bez petlji sa n čvorova, m grana i p komponenata povezanosti definiše se pomoću

(1) $$\nu(G) = m - n + p .$$

Teorema 1. Ako se izmedju dva čvora multigrafa G uvede nova grana, onda se ciklomatički broj $\nu(G)$ povećava za 1 ako ovi čvorovi pripadaju istoj komponenti povezanosti; u suprotnom slučaju $\nu(G)$ ostaje nepromenjeno.

Dokaz. U prvom slučaju parametri n i p grafa G ostaju nepromenjeni, te se povećavanjem m za 1 na osnovu (1) uvećava i $\nu(G)$ za 1. Ako pak nova grana spaja čvorove različitih komponenata povezanosti iz G, broj komponenti p se smanjuje za 1, pa se $\nu(G)$ ne menja.

Na osnovu teoreme 1 lako se zaključuje da je ciklomatički broj proizvoljnog grafa nenegativan ceo broj. Naime, za graf G bez grana je $\nu(G) = 0$, a sa dodavanjem grana ciklomatički broj ne opada.

Teorema 2. Broj ciklusa u svakoj bazi ciklusa jednak je ciklomatičkom broju grafa.

Dokaz. Izvešćemo dokaz indukcijom po broju grana m. Za grafove bez grana ($m=0$) stav je tačan, jer je $\nu(G) = 0$, a graf ne poseduje nijedan ciklus, što, naravno, povlači za sobom da je baza ciklusa prazan skup. Pretpostavimo da je stav tačan za sve grafove sa m grana i posmatrajmo proizvoljan graf G_{m+1} sa m+1 grana. Udaljimo iz G_{m+1} granu u_{m+1} i dobićemo graf G_m sa m grana. Numerišimo grane iz G_m brojevima od 1 do m. Cikluse iz G_{m+1} i iz G_m predstavićemo vektorima sa m+1 koordinata. Naravno, vektori pridruženi ciklusima iz G_m imaju nulu kao poslednju koordinatu.

Svi ciklusi iz G_m su ciklusi i u G_{m+1}. Neka je M skup onih ciklusa iz G_{m+1} koji nisu ciklusi u G_m a čiji ciklusni vektori imaju (m+1)-u koordinatu različitu od nule. Ako je M prazan skup, grana u_{m+1} ne pripada nijednoj konturi (tj. predstavlja <u>most</u>) grafa G_{m+1}, pa ova grana povezuje dve komponente povezanosti grafa G_m, odakle je $\nu(G_m) = \nu(G_{m+1})$. No tada se i baze ciklusa grafova G_m i G_{m+1} poklapaju, te stav važi i za G_{m+1}.

Posmatrajmo stoga slučaj kada M nije prazan skup. Tada u_{m+1} povezuje čvorove iste komponente povezanosti grafa G_m, pa je $\nu(G_{m+1}) = \nu(G_m) + 1$. Neka vektori $c_1,\dots,c_k$ ($k = \nu(G_m)$) odredjuju jednu bazu ciklusa u G_m. Ni jedan od vektora $d_1, d_2, \dots \in M$ ne može da se predstavi kao linearna kombinacija vektora $c_1,\dots,c_k$, jer vektori d_i imaju a c_i nemaju (m+1)-u komponentu različitu od nule. Dakle, skup vektora $c_1,\dots,c_k$, d_1 je linearno nezavisan. Dokažimo da ovaj skup obrazuje bazu, tj. da mu se ne može pridružiti nijedan novi vektor a da skup ostane linezavisan. Pokažimo to, na primer, za d_2. Vektor $d_2 - d_1$ (ili neka druga linearna kombinacija) ima poslednju komponentu jednaku nuli, te odgovarajući ciklus pripada grafu G_m. Stoga postoje konstante $\beta_1,\dots,\beta_k$ takve da je $d_2 - d_1 = \beta_1 c_1 + \dots + \beta_k c_k$, a to znači da su vektori $c_1,\dots,c_k$, d_1, d_2 linearno zavisni. Dakle, $c_1,\dots,c_k$, d_1 obrazuju jednu bazu. Pošto sve baze moraju sadržati isti broj vektora, u ovom slučaju $\nu(G_{m+1})$, teorema je dokazana.

<u>Teorema 3</u>. Svaki povezan neorijentisan multigraf (bez petlji) sadrži delimični graf oblika stabla.

<u>Dokaz</u>. Udaljimo iz grafa proizvoljnu granu koja pripada nekoj konturi. Ponavljajmo ovaj postupak dokle god u grafu postoji neka kontura. Pošto se na ovaj način ne može narušiti povezanost grafa, na kraju se dobija povezan graf bez kontura, tj. stablo.

Ovim je dokaz završen.

Graf čije sve komponente povezanosti predstavljaju stabla naziva se šuma. Neorijentisan multigraf (bez petlji) poseduje bar jedan delimični graf oblika šume. Šuma se može odrediti na taj način što se u svakoj komponenti povezanosti grafa odredi jedno stablo postupkom iz teoreme 3. Ako graf ima n čvorova, m grana i p komponenata povezanosti, šuma se sastoji od p stabala, odnosno, n-p grana. Broj grana proizvoljne šume grafa naziva se rang grafa i obeležava sa r(G). Dakle, r(G) = n - p. Da bi se dobila šuma, iz grafa je potrebno udaljiti m - n + p grana.

Pojam stabla, odnodno šume, bitan je u vezi sa jednim algoritmom za konstrukciju baze ciklusa.

Neka je u multigrafu G odredjena jedna šuma. Proizvoljna grana koja ne pripada šumi naziva se spojnica i ona obrazuje sa granama iz šume tačno jednu konturu grafa G. Svaki od ciklusa grafa G, koji se obrazuju obilaženjem ovako konstruisanih kontura, prolazi kroz jednu granu kroz koju ne prolazi ni jedan drugi ovakav ciklus. Proizvoljan skup ovakvih ciklusa je stoga linearno nezavisan. Kako ovakvih ciklusa ima tačno m-n+p, zaključujemo da oni obrazuju bazu ciklusa.

U teoriji električnih mreža se za odredjivanje struja u granama kola, kada su poznate elektromotorne sile koje deluju na kolo, primenjuje i drugi Kirchhoffov zakon. Prema ovom zakonu se za svaki ciklus grafa koji predstavlja električnu mrežu (uključujući tu i cikluse dobijene kombinacijama elementarnih ciklusa) može napisati jedna linearna jednačina koja povezuje veličine struja u granama ciklusa i veličine napona koji deluju duž tog ciklusa. Ako se za sve cikluse (elementarne, kako se to obično pri praktičnim izračunavanjima radi) napišu jednačine, one će (po pravilu) biti zavisne. Stoga je potrebno odrediti maksimalan broj nezavisnih jednačina koje se mogu dobiti po drugom Kirchhoffovom zakonu i odrediti cikluse koji daju nezavisne jednačine. Jednačine dobijene na osnovu jednog skupa ciklusa će biti nezavisne ako su odgovarajući ciklusni vektori linearno nezavisni. Dakle, potrebno je naći jednu ciklusnu bazu i napisati Kirchhoffove jednačine na osnovu ciklusa iz ove baze.

Na osnovu teoreme 2, za električnu mrežu čiji je graf povezan može se formirati m-n+1 linearno nezavisnih jednačina po drugom Kirchhoffovom zakonu.

Objasnićemo sa nešto više detalja primenu dobijenih rezultata u elektrotehnici.

Posmatrajmo električnu mrežu sastavljenu od generatora jednosmerne elektromotorne sile i otpornika, čiji je graf povezan i ima n čvorova i m grana. Kada se posle uključivanja generatora u mreži uspostavi ravnotežno stanje kroz svaku granu mreže u_i protiče odredjena struja I_i a na krajevima grane deluje napon $U_i = E_i - R_i I_i$, gde je E_i elektromotorna sila generatora postavljenog u granu u_i a R_i otpornost u ovoj grani. Grane mreže, odnosno grane odgovarajućeg multigrafa, orijentisane su a orijentacija grane odredjuje znak struje I_i i napona U_i.

Ako je c jedan ciklus čiji je ciklusni vektor $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$, prema drugom Kirchhoffovom zakonu važi jednakost

(2) $$c_1U_1 + c_2U_2 + \ldots + c_mU_m = 0 .$$

Ova jednakost važi ne samo za elementarne cikluse već i za cikluse složenije strukture. Ona važi i za vektore c dobijene formalnim linearnim kombinacijama ciklusnih vektora.

Ako se iz sistema jednačina oblika (2) odrede veličine U_i, lako se izračunavaju odgovarajuće struje I_i.

Kao što je rečeno, nezavisnih jednačina oblika (2) ima samo m-n+1. Kako nepoznatih ima m, potrebno je formirati još n-1 nezavisnih jednačina koje povezuju veličine $U_1, U_2, \ldots, U_m$. Do ovih jednačina se dolazi na osnovu prvog Kirchhoffovog zakona. Ne upuštajući se u sve detalje ovog pitanja navodimo jedan postupak za odredjivanje struja u kolu kada su poznate elektromotorne sile i otpornosti grana. To je metod konturnih struja.

U stvarnom električnom kolu struja ima odredjeni smer u svakoj grani. Kao što je rečeno, grane grafa koji predstavlja električnu mrežu orijentišu se na proizvoljan način. Ako se izabrani smer orijentacije grane poklapa sa stvarnim smerom struje, jačina struje je pozitivna veličina. U suprotnom slučaju jačina struje se uzima sa negativnim znakom. Uz ovakvu konvenciju o znaku jačina struja, prvi Kirchhoffov zakon kaže da je zbir jačina struja u granama koje se stiču u jednom čvoru jednak nuli.

U povezanom grafu sa n čvorova može se napisati n jednačina na osnovu prvog Kirchhoffovog zakona. Medjutim, može se dokazati da postoji samo n-1 nezavisnih jednačina a da je n-ta jednačina posledica ostalih jednačina.

Kombinacijom prvog i drugog Kirchhoffovog zakona dobija se metod konturnih struja. Metod bazira na sledećem.

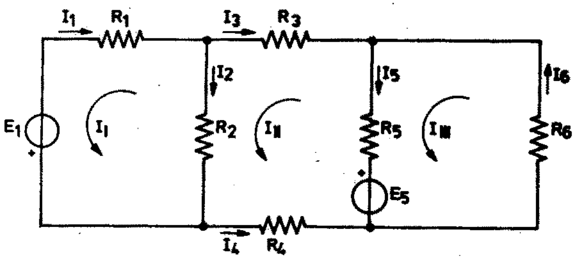
U grafu mreže (koji smatramo povezanim) izabere se delimični graf oblika stabla. Za nezavisne konture dobijene na osnovu izabranog stabla napišu se jednačine električne ravnoteže prema drugom Kirchhoffovom zakonu. Pri ovom se smerovi obilaženja kontura (tj. orijentacija ciklusa) uzimaju proizvoljno. n-1 struja koje odgovaraju granama stabla eliminišu se na osnovu n-1 jednačina koje daje prvi Kirchhoffov zakon. Posle ove eliminacije sistem jednačina ima oblik

(3)
$$\begin{aligned} R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + \dots + R_{1\nu}I_\nu &= E_1 , \\ R_{21}I \ \ + R_{22}I_2 + \dots + R_{2\nu}I_\nu &= E_2 , \\ &\vdots \\ R_{\nu 1}I_1 + R_{\nu 2}I_2 + \dots + R_{\nu\nu}I_\nu &= E_\nu . \end{aligned}$$

Ovde su $I_1, I_2, \dots, I_\nu$ struje u spojnicama stabla, tj. u nezavisnim konturama. R_{ii} je zbir otpornosti otpornika i električnih generatora koje se nalaze u i-toj konturi. R_{ij} $(i \neq j)$ je ukupna otpornost ovih električnih elemenata koji se nalaze u i-toj i j-toj konturi uzeta sa znakom + ako se smerovi konture i i j u zajedničkoj grani poklapaju, odnosno sa znakom - u suprotnom slučaju. E_i je ukupan zbir elektromotornih sila generatora koji deluju u i-toj konturi, pri čemu se svaka elektromotorna sila uzima sa odgovarajućim znakom.

Kada se sistem jednačina (3) reši, preostale struje se dobijaju na osnovu prvog Kirchhoffovog pravila. U stvari, situacija se interpretira na taj način što se zamišlja da struja I_i predstavlja konturnu struju, tj. prolazi naokolo cele i-te konture. Stvarna struja u granama stabla jednaka je (algebarskom) zbiru konturnih struja koje prolaze kroz tu granu. Pri rešavanju sistema jednačina (3) mogućno je primeniti sve ranije opisane metode rešavanja sistema. Cramerove formule se, po pravilu, primenjuju samo na sisteme sa do 4 nepoznate. Ako su koeficijenti sistema (3) numerički, obično se primenjuje Gaussov algoritam. Pošto su matrice sistema (3) često slabo popunjene, preporučljiva je upotreba metoda iz poglavlja 9. Ako su koeficijenti u (3) opšti brojevi, dolazi u obzir upotreba Coatesove ili Masonove tehnike, naravno uz uslov da je matrica sistema dovoljno razredjena.

Primer 1. Za kolo na sl. 1 poznate su vrednosti otpornosti i elektromotornih sila: $E_1 = 5V$, $E_5 = 100V$, $R_1 = 300\Omega$, $R_2 = 500\Omega$, $R_3 = 400\Omega$, $R_4 = 200\Omega$, $R_5 = 500\Omega$, $R_6 = 2000\Omega$.



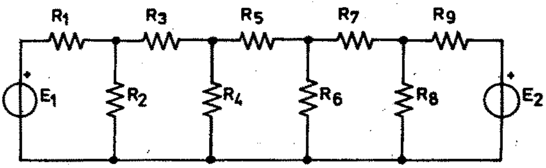
sl. 1

Za izabrane smerove konturnih struja I_I, I_{II}, I_{III} odgovarajuće jednačine imaju oblik

$$\begin{aligned} 800I_I - 500I_{II} \qquad\qquad &= 5 , \\ -500I_I + 1600I_{II} - 500I_{III} &= 100 , \\ - 500I_{II} + 2500I_{III} &= -100 . \end{aligned}$$

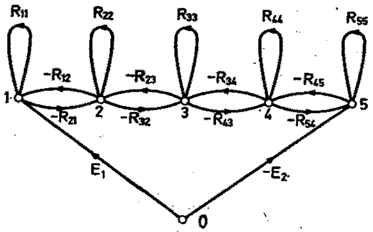
Rešenje ovog sistema je $I_I = 0,05A$, $I_{II} = 0,07A$, $I_{III} = -0,026A$. Prema sl. 1, a na osnovu prvog Kirchhoffovog zakona, dobija se $I_1 = -I_I = -0,05A$, $I_2 = I_{II} - I_I = 0,02A$, $I_3 = -I_{II} = -0,07A$, $I_4 = I_{II} = 0,07A$, $I_5 = I_{III} - I_{II} = -0,096A$, $I_6 = I_{III} = -0,026A$.

Primer 2. Odrediti struju u grani otpornika R_5 kola sa sl. 2.



sl. 2

Da bismo našli struju u grani sa otpornikom R_5, primenićemo metod konturnih struja. Neka svaku konturu (ima ih 5) odredjuje jedna redna (horizontalna) grana i dve njoj susedne paralelne (vertikalne) grane (videti sl. 2). Orijentišimo te konture u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na časovniku. Umesto da pišemo odgovarajući sistem jednačina kome bismo pridružili Coatesov digraf, odmah ćemo crtati digraf (što je uz malo prakse mogućno), videti sl. 3.



sl. 3

Za struju I kroz R_5, koja odgovara čvoru 3, dobija se izraz

$$I=\frac{E_1R_{21}R_{32}R_{44}R_{55}-E_1R_{21}R_{32}R_{45}R_{54}+}{R_{12}R_{21}R_{33}R_{44}R_{55}-R_{12}R_{21}R_{34}R_{43}R_{55}-R_{12}R_{21}R_{33}R_{45}R_{54}+R_{11}R_{23}R_{32}R_{44}R_{55}-}\cdots$$

$$\frac{+E_2R_{45}R_{34}R_{12}R_{21}-E_2R_{45}R_{34}R_{11}R_{22}}{-R_{11}R_{23}R_{32}R_{45}R_{54}+R_{11}R_{22}R_{34}R_{43}R_{55}+R_{11}R_{22}R_{33}R_{45}R_{54}-R_{11}R_{22}R_{33}R_{44}R_{55}},$$

gde je $R_{11} = R_1 + R_2$, $R_{22} = R_2 + R_3 + R_4$, $R_{33} = R_4 + R_5 + R_6$, $R_{44} = R_6 + R_7 + R_8$, $R_{55} = R_8 + R_9$, $R_{12} = R_{21} = R_2$, $R_{23} = R_{32} = R_4$, $R_{34} = R_{43} = R_6$, $R_{45} = R_{54} = R_8$.

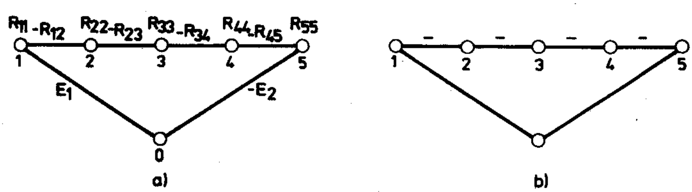
11.2. Coatesova formula za simetrične sisteme i neke njene primene u elektrotehnici

Sistemi linearnih algebarskih jednačina koji se pojavljuju u elektrotehnici su po pravilu simetrični, tj. odgovarajuća matrica sistema je simetrična. Ovo se posebno odnosi na sisteme jednačina koji su dobijeni metodom konturnih struja ili metodom nezavisnih napona.[1)]

Za simetrične sisteme Coatesova formula iz odeljka 6.2 za rešenje sistema može se modifikovati tako da njena upotreba postaje jednostavnija.

Neka se u skladu sa oznakama iz 6.2 posmatra sistem jednačina $Ax = B$, pri čemu je sada A simetrična matrica. Posmatrajmo Coatesov digraf G ovog sistema i njegov podgraf G_A indukovan čvorovima $1,2,\ldots,n$. Ako je $a_{ij} \neq 0$, onda su, zbog $a_{ij} = a_{ji}$, čvorovi i i j povezani sa dve grane različitih orijentacija od kojih svaka ima prenos a_{ij}. Ove dve grane ćemo zameniti jednom neorijentisanom granom sa prenosom a_{ij}. Petlje digrafa G ćemo izostaviti a prenose petlji ćemo pridružiti odgovarajućim čvorovima. Grane koje izlaze iz čvora 0 smatraćemo takodje neorijentisanim, pri čemu se prenosi tih grana ne menjaju. Na ovaj način dobijamo Coatesov graf G′ sistema jednačina.

Primer 1. Coatesovom digarfu sistema iz primera 2 iz prethodnog odeljka odgovara Coatesov graf prikazan na sl. la.



sl. 1

Specijalno, ako se rešava sistem jednačina dobijen primenom metoda konturnih struja, oznake prenosa grana i čvorova mogu

1) Metod nezavisnih napona nije obradjen u ovoj knjizi.

se izostaviti, kao što je to učinjeno na sl. 1b. Prenosi grana i čvorova mogu se rekonstruisati na osnovu numeracije čvorova. Jedino se znak zajedničkih otpornosti parova kontura mora naznačiti za svaku granu koja predstavlja takvu otprnost.

Kao što je pokazano u odeljku 6.2, na osnovu Coatesovog digrafa G dobija se sledeće rešenje sistema

$$(1) \qquad x_j = \frac{\sum\limits_{V(0\to j)} (-1)^{p(V(0\to j))} C(V(0\to j))}{\sum\limits_{F} (-1)^{p(F)} C(F)}, \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

gde se u brojiocu sumiranje vrši po svim vezama $V(0\to j)$ čvora 0 sa čvorom j u digrafu G a u imeniocu po svim faktorima digrafa G_A.

Prelaskom na graf G' mora se u formuli (1) izvršiti izvesna modifikacija.

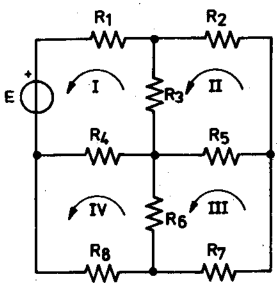
U imeniocu se umesto po faktorima digrafa G_A sumira po osnovnim figurama U (koje su već uvedene u odeljku 7.4) odgovarajućeg grafa G_A'. Osnovna figura U je u ovom odeljku delimični graf grafa G_A' čije su komponente izolovani čvorovi, grafovi K_2 i konture proizvoljnih dužina ($\geqslant 3$). Izolovani čvorovi odgovaraju petljama digrafa G_A i doprinos izolovanog čvora i prenosu figure U je prenos tog čvora a_{ii}. Grafovi K_2 odgovaraju orijentisanim konturama dužine 2 u G_A i jedan graf K_2 sa čvorovima i,j doprinosi prenosu figure U sa faktorom a_{ij}^2. Ako se u figuri U nalazi k kontura, onda je njihov doprinos (kao što je objašnjeno u 7.4) jednak 2^k puta proizvod prenosa grana koje obrazuju te konture. Stoga se kao doprinos pojedine konture može uzeti dvostruki proizvod prenosa grana koje obrazuju tu konturu. Sa ovakvom modifikacijom imenilac izraza (1) postaje $\sum\limits_{U} (-1)^{p(U)} C(U)$, gde se sumiranje vrši po svim osnovnim figurama grafa G_A'.

Sličnom analizom se dolazi do zaključka da se u brojiocu, umesto sumiranja po vezama $V(0\to j)$ digrafa G, mora vršiti sumiranje po delimičnim grafovima grafa G' čije su komponente: put koji povezuje čvor 0 sa čvorom j, izolovani čvorovi, grafovi K_2 i konture. Ovakav delimični graf ćemo zvati modifikovana veza čvora 0 sa čvorom j i obeležavati sa $U(0\to j)$. Prenos modifikovane veze je proizvod faktora koji potiču od pojedinih komponenata veze. Putu od 0 do j odgovara doprinos koji je jednak prenosu tog puta, tj. proizvodu grana koje obrazuju put. Svaki izolovani čvor doprinosi sa faktorom koji je jednak broju koji je pridružen tom čvoru. Doprinos grafa K_2 je kvadrat broja pridruženog odgovarajućoj grani a kontura doprinosi sa dvostrukim proizvodom prenosa svojih grana. Na taj način dobijamo sledeću modifikovanu Coatesovu formulu

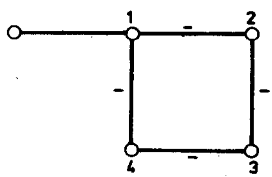
$$(2)\qquad x_j = \frac{\sum\limits_{U(0\to j)} (-1)^{p(U(0\to j))} C(U(0\to j))}{\sum\limits_{U} (-1)^{p(U)} C(U)} \qquad (j = 1,2,\dots,n)\ ,$$

gde se u brojiocu sumiranje vrši po svim modifikovanim vezama $U(0\to j)$ čvora 0 sa čvorom j u grafu G' a u imeniocu po svim osnovnim figurama U grafa G'_A.

Primer 2. Za električno kolo na sl. 2, Coatesov graf G' sistema jednačina dobijenih metodom konturnih struja prikazan je na sl. 3.



sl. 2



sl. 3

Sada se, na primer, struja u grani otpornika R_8, tj. konturna struja I_{IV}, direktno nalazi po modifikovanoj Coatesovoj formuli

$$I_{IV} = \frac{E_1(-R_{14})(R_{22}R_{33}-R_{23}^2)+}{R_{11}R_{22}R_{33}R_{44}-R_{11}R_{22}R_{34}^2-R_{22}R_{33}R_{14}^2-R_{33}R_{44}R_{12}^2} \cdots$$

$$\frac{+ E_1(-R_{12})(-R_{23})(-R_{34})}{- R_{44}R_{11}R_{23}^2 + R_{12}^2R_{34}^2 + R_{23}^2R_{14}^2 - 2R_{12}R_{23}R_{34}R_{41}},$$

gde je $R_{11} = R_1 + R_3 + R_4$, $R_{22} = R_2 + R_3 + R_5$, $R_{33} = R_5 + R_6 + R_7$, $R_{44} = R_4 + R_6 + R_8$, $R_{12} = R_{21} = R_3$, $R_{23} = R_{32} = R_5$, $R_{34} = R_{43} = R_6$, $R_{14} = R_{41} = R_4$ i $E_1 = E$.

Dopunske informacije o primeni ovog metoda u elektrotehnici čitalac može da nadje u [106] ili u knjizi [105].

Dokazaćemo sada nekoliko osnovnih teorema iz teorije električnih mreža koristeći se razvijenim matematičkim aparatom. U prethodnom odeljku smo uveli sistem jednačina koji opisuje ponašanje električne mreže sa jednosmernim generatorima i otpornicima. Taj sistem ćemo koristiti kao polaznu osnovu za dokazivanje novih rezultata. Dobijeni rezultati se odnose i na druge vrste električnih mreža pod odredjenim uslovima. Bitno je da se mreža na ovaj ili onaj način opisuje sistemom linearnih algebarskih jednačina. Takve mreže ćemo nazivati <u>linearne mreže</u>.

<u>Teorema 1</u> (Princip superpozicije). Jačina električne struje koja se javlja u nekoj grani linearne električne mreže pod dejstvom više električnih generatora uključenih u raznim granama mreže jednaka je zbiru struja koje u toj grani izazivaju pojedini generatori.

<u>Dokaz</u>. Za analizu koristićemo metod konturnih struja. Fiksirajmo jednu granu električne mreže, a konture na koje se primenjuje metod konturnih struja izaberimo tako da samo jedna od kontura (recimo, k-ta) prolazi kroz posmatranu granu. Obeležimo ukupnu struju u k-toj konturi (tj. u posmatranoj grani) sa I_k. Neka nezavisnih kontura ima n i neka u njima deluju generatori čija ukupna elektromotorna sila za konture 1,2,...,k, ...,n redom $U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots, U_n$. Neka su $I_{k1}, I_{k2}, \ldots, I_{kn}$ struje koje svaka od ovih elektromotornih sila pojedinačno izaziva u posmatranoj grani. Ako bi u kolu delovao samo generator u i-toj konturi, Coatesov graf bi kod čvora 0 sadržavao samo granu sa prenosom $-U_i$ i ta grana bi povezivala čvor 0 sa čvorom i te bi važila formula

$$(3) \qquad I_{ki} = \frac{-U_i \sum\limits_{V(i\to k)} (-1)^{p(V(i\to k))} C(V(i\to k))}{\sum\limits_{F} (-1)^{p(F)} C(F)}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Zbir formula (3) je

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (-U_i) \sum\limits_{V(i\to k)} (-1)^{p(V(i\to k))} C(V(i\to k))}{\sum\limits_{F} (-1)^{p(F)} C(F)}$$

$$= \frac{\sum\limits_{V(0\to k)} (-1)^{p(V(0\to k))} C(V(0\to k))}{\sum\limits_{F} (-1)^{p(F)} C(F)},$$

a to je izraz za ukupnu struju I_k.

Ovim je teorema dokazana.

Napomena 1. Navedeni princip superpozicije važi uopšte a ne samo za simetrične sisteme. Matematička formulacija ovog principa je sledeća.

Posmatrajmo sisteme jednačina u matričnom obliku

$$Ax = B_1 \ , \ Ax = B_2 \ .$$

Neka su rešenja ovih sistema redom vektori x_1, x_2, tj. neka važe jednakosti

$$Ax_1 = B_1 \ , \ Ax_2 = B_2 \ .$$

Tada je $x_1 + x_2$ rešenje sistema $Ax = B_1 + B_2$ jer je

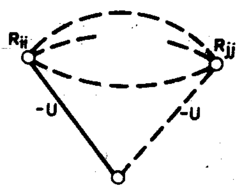
$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = B_1 + B_2 \ .$$

Napomena 2. Princip superpozicije, čija je matematička osnova objašnjena, daleko je opštiji i igra veliku ulogu u elektrotehnici i drugim tehničkim naukama gde se pojavljuju linearni sistemi. Jedna formulacija ovog principa (sa terminologijom iz tehničkih nauka) glasi: Svaki odziv jednak je sumi odziva koje proizvode pojedine eksitacije i to nezavisno od mesta u mreži, vremenske varijacije i prirode tih eksitacija.

U daljem tekstu je sa G_o označen podgraf Coatesovog grafa bez čvora 0, tj. graf pridružen matrici sistema jednačina koji se posmatra.

Teorema 2 (Teorema recipročnosti). Posmatrajmo jednu linearnu mrežu i u njoj dve grane i i j. Ako u grani i deluje generator napona U, struja u grani j označena je sa I_i. Ako generator premestimo u granu j onda će struja u grani i biti I_j. Važi formula $I_i = I_j$.

Dokaz. Koristimo se metodom konturnih struja. Izaberimo konture tako da samo i-ta prolazi kroz granu i, a samo j-ta kroz granu j. Coatesov graf pridružen ovoj mreži dat je na sl. 4.



sl. 4

Kada se generator elektromotorne sile U nalazi u i-toj grani, struja u j-toj konturi iznosi

$$I_i = \frac{-U \sum\limits_{U(i\to j)} (-1)^{p(U(i\to j))} C(U(i\to j))}{D(G_o)},$$

gde je $D(G_o)$ determinanta grafa G_o, a $\sum\limits_{U(i\to j)} C(U(i\to j))$ suma prenosa svih modifikovanih veza u G_o od i do j. Kada se generator nalazi u j-toj grani, struja u i-toj grani je

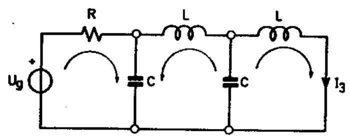
$$I_j = \frac{-U \sum\limits_{U(j\to i)} (-1)^{p(U(j\to i))} C(U(j\to i))}{D(G_o)},$$

gde je $\sum\limits_{U(j\to i)} C(U(j\to i))$ suma prenosa svih modifikovanih veza u G_o od j do i. Ovaj slučaj je predstavljen na sl. 4 isprekidanom linijom. Pošto kod mreža važi $R_{jk} = R_{kj}$ možemo dve paralelne i suprotno orijentisane grane sa prenosima R_{jk} i R_{kj} zameniti jednom neorijentisanom sa prenosom Z_{jk}, kao što je već objašnjeno. Tako je graf G_o postao neorijentisan, a za neorijentisane grafove očigledno važi:

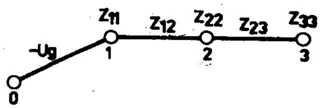
$$C(U(i \rightarrow j)) = C(U(j \rightarrow i)) \ , \ p(U(i \rightarrow j)) = p(U(j \rightarrow i)) \ ,$$

odakle proizilazi $I_i = I_j$, čime je teorema dokazana.

<u>Primer 3</u>. Proverićemo da li teorema važi za RLC mrežu na sl.5. Postavimo generator u konturu 1. Umesto otpornosti R_{ij} pojavljuje se impedansa Z_{ij} a struje i naponi predstavljeni su kompleksnim veličinama.



sl. 5



sl. 6

Struja u konturi 3 dobija se iz grafa na sl. 6 pomoću izraza (2) i iznosi

$$I_3 = \frac{U_g Z_{12} Z_{23}}{Z_{11}Z_{22}Z_{33} - Z_{12}^2 Z_{33} - Z_{23}^2 Z_{11}} \ ,$$

gde su

$$Z_{11} = R + \frac{1}{sC} \ , \ Z_{22} = sL + \frac{2}{sC} \ , \ Z_{33} = sL + \frac{1}{sC} \ , \ Z_{12} = Z_{23} = \frac{1}{sC} \ ,$$

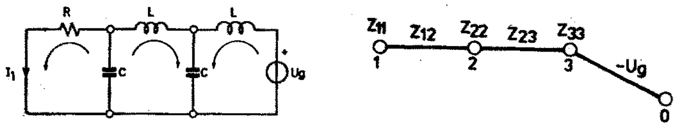
pri čemu s označava kompleksnu učestanost. Posle sredjivanja dobijamo

$$I_3 = \frac{U_g sC}{s^5C^3L^2R + s^4L^2C^2 + 3s^3C^2LR + 2s^2LC + sRC} \ .$$

Premestimo sada generator u konturu 3. Graf koji odgovara ovakvoj mreži i sama mreža prikazani su na sl. 7. Struja u konturi 1, izračunata pomoću izraza (2), iznosi

$$I_1 = \frac{U_g Z_{23} Z_{12}}{Z_{11}Z_{22}Z_{33} - Z_{12}^2 Z_{33} - Z_{23}^2 Z_{11}} \ ,$$

što je identično sa ranijim izrazom. Dakle, teorema recipročnosti važi za ovu mrežu.

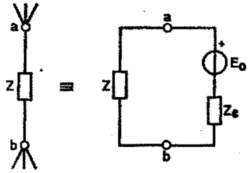


sl. 7

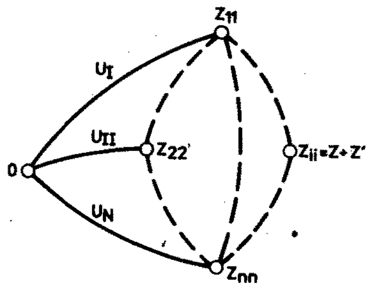
U daljem tekstu koriste se neki termini iz elektrotehnike koji nisu ovde definisani.

Teorema 3 (Theveninova teorema). Neka su u električnoj mreži čvorovi a i b povezani granom impedanse Z. Deo kola izmedju ta dva čvora može se zameniti granom koja sadrži impedansu Z_e i naponski generator napona E_0, a da se struja I kroz Z ne promeni, tj. $I = \frac{E_0}{Z + Z_e}$ (videti sl. 8). (Ovde je Z_e ekvivalentna impedansa ostatka kola izmedju čvorova a i b kada su svi naponski generatori u mreži kratko spojeni a svi strujni generatori uklonjeni, a E_0 je napon izmedju čvorova a i b kada je grana sa impedansom Z isključena iz kola.)

Dokaz. Primenimo metod konturnih struja. Izaberimo konture tako da i-ta prolazi kroz granu sa impedansom Z. Coatesov graf pridružen mreži prikazan je na sl. 9.



sl. 8



sl. 9

Struja i-te konture računa se iz datog grafa po obrascu

(4) $$I_i = \frac{\sum\limits_{U(0\to i)} (-1)^{p(U(0\to j))} C(U(0\to j))}{D(G_o)} = \frac{A}{D(G_o)} .$$

Determinanta $D(G_o)$ može se prikazati u obliku

(5) $$D(G_o) = (Z + Z')D(G_o - i) + D',$$

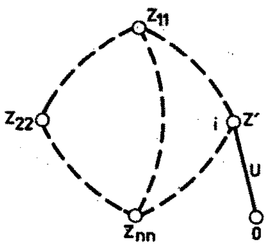
gde $D(G_o - i)$ predstavlja determinantu grafa koji se dobija kada se iz G_o izostavi čvor i, a D' je determinanta grafa koji se dobija od G_o izostavljanjem petlje sa prenosom $Z + Z'$. Napon U_{ab} iznosi

$$U_{ab} = ZI = ZI_i = Z \frac{A}{(Z + Z')D(G_o - i) + D'} ,$$

a E_o po definiciji iznosi

(6) $$E_o = \lim_{Z\to\infty} U_{ab} = \lim_{Z\to\infty} \frac{A}{(1 + \frac{Z'}{Z})D(G_o - i) + \frac{D'}{Z}} = \frac{A}{D(G_o - i)} .$$

Z_e ćemo izračunati kao ulaznu impedansu Z_{ul} izmedju tačaka a i b. Raspored kontura ostaje isti; jedino umesto grane sa Z stavljamo generator napona U. Odgovarajući Coatesov graf je dat na sl. 10.



sl. 10

Struja kroz granu sa generatorom je

$$I_o = \frac{UD(G_o - i)}{D''} ,$$

gde je D'' determinanta grafa koji se dobija iz grafa na sl. 1 uklanjanjem čvora 0 i grane sa prenosom U, i njena vrednost iz nosi

$$D'' = Z'D(G_o-i) + D''',$$

gde je D''' determinanta grafa koji se dobija iz G_o uklanjanjem petlje Z'. Vidi se da je $D''' = D'$. Z_{ul} iznosi po definiciji

$$Z_{ul} = Z_e = \frac{U}{I_o} = \frac{D''}{D(G_o-i)} \tag{7}$$

$$= \frac{Z'D(G_o-i) + D'}{D(G_o-i)} = Z' + \frac{D'}{D(G_o-i)} .$$

Iz (4) i (5) se dobija

$$I_i = \frac{\dfrac{A}{D(G_o-i)}}{Z + Z' + \dfrac{D'}{D(G_o-i)}} ,$$

što zajedno sa (6) i (7) daje

$$I_i = \frac{E_o}{Z + Z_{ul}} ,$$

čime je teorema dokazana.

11.3. Sistemi upravljanja i transformacije Masonovog digrafa

U teoriji sistema upravljanja pojavljuju se matematički modeli koji se svode na sisteme linearnih diferencijalnih jednačina. Ako se na sistem linearnih diferencijalnij jednačina sa konstantnim koeficijentima primeni Laplaceova transformacija[1] dobija se sistem linearnih algebarskih jednačina koji treba rešiti. U jednačinama se sada, umesto funkcija koje zavise od vremena a koje predstavljaju napone, struje ili druge fizičke veličine, pojavljuju Laplaceovi likovi tih funkcija.

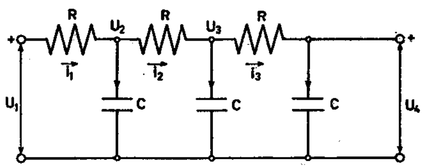
Matrica dobijenog sistema linearnih algebarskih jednačina je, po pravilu, slabo popunjena. Stoga se grafovske teh-

---

1) O rešavanju diferencijalnih jednačina i sistema diferencijalnih jednačina pomoću Laplaceove transformacije videti, na primer, D.S.Mitrinović, J.D.Kečkić, Jednačine matematičke fizike, Beograd 1978.

nike rešavanja sistema pojavljuju po prirodi stvari u ovim problemima. Pokazaćemo na nekoliko primera te vrste upotrebu grafova protoka signala. U nekim slučajevima nije uopšte potrebno pisati jednačine koje opisuju stanje sistema nego se neposredno crta odgovarajući graf protoka signala jer je oblik ovog grafa sugerisan samom konfiguracijom sistema[1].

Primer 1. Lestvičasta RC mreža sa dva pristupa. Za lestvičastu mrežu sa dva pristupa na sl. 1 odrediti funkciju prenosa, koja je definisana kao odnos Laplaceovih likova ulaznog i izlaznog napona $G(s) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{U_4(s)}{U_1(s)}$.



sl. 1

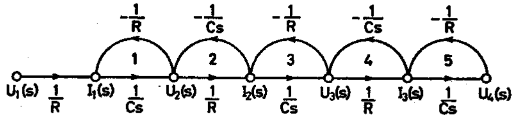
Za ovu mrežu se mogu pisati jednačine

$$I_1(s) = \frac{1}{R}(U_1(s) - U_2(s)),\quad U_2(s) = \frac{1}{Cs}(I_1(s) - I_2(s)),$$

$$I_2(s) = \frac{1}{R}(U_2(s) - U_3(s)),\quad U_3(s) = \frac{1}{Cs}(I_2(s) - I_3(s)),$$

$$I_3(s) = \frac{1}{R}(U_3(s) - U_4(s)),\quad U_4(s) = \frac{1}{Cs}I_3(s).$$

Na osnovu ovih jednačina obrazuje se graf protoka signala na sl. 2.



sl. 2

1) Narednih nekoliko primera su redigovani na osnovu beležaka M.Stojića.

Postoji samo jedan elementaran put izmedju čvorova $U_1(s)$ i $U_4(s)$; njegov prenos je $p_1 = \frac{1}{R^3C^3s^3}$. Ne postoji nijedna kontura koja ne dodiruje ovaj put, te je $\Delta_1 = 1$.

Graf sadrži 5 kontura, od kojih svaka ima prenos $-\frac{1}{RCs}$. Ove konture su na sl. 2 označene brojevima 1,...,5.

Konture 1 i 3, 1 i 4, 1 i 5, 2 i 4, 2 i 5, i 3 i 5 medjusobno se ne dodiruju. Takvih parova ima, dakle, 6.

Postoji samo jedna trojka (1, 3, 5) medjusobno nedodirujućih kontura.

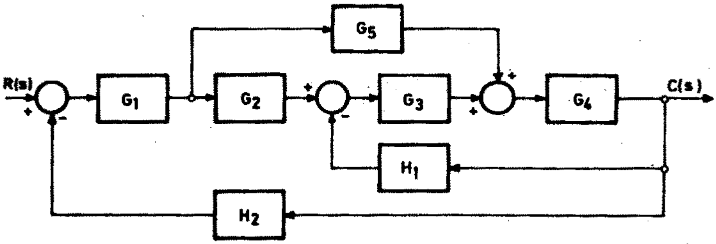
Ne postoji četiri ili više medjusobno nedodirujućih kontura.

Na osnovu izloženog, Masonova formula daje:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{R^3C^3s^3}}{1 - (-5\frac{1}{RCs}) + 6\frac{1}{R^2C^2s^2} - (-\frac{1}{R^3C^3s^3})} = \frac{1}{\tau^3s^3+5\tau^2s^2+6\tau s+1},$$

gde je $\tau \overset{\text{def}}{=} RC$ vremenska konstanta jedne ćelije.

<u>Primer 2. Sistem automatskog upravljanja sa jednim ulazom i jednim izlazom</u>. Za sistem sa sl. 3 odrediti funkciju spregnutog prenosa.



sl. 3

Direktno se obrazuje graf protoka signala predstavljen na sl. 4.

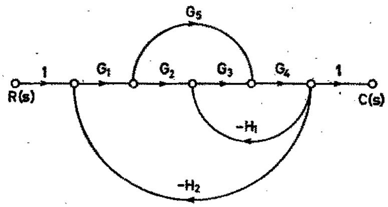
Postoje dva elementarna puta. Odgovarajući prenosi i determinante podgrafova su

$$p_1 = G_1G_2G_3G_4,\ \Delta_1 = 1;\quad p_2 = G_1G_5G_4,\ \Delta_2 = 1\ .$$

U grafu se nalaze ukupno tri konture koje se medjusobno dodiruju. Redom se dobija

$$T_1 = -G_3G_4H_1, \quad T_2 = -G_1G_2G_3G_4H_2, \quad T_3 = -G_1G_5G_4H_2;$$

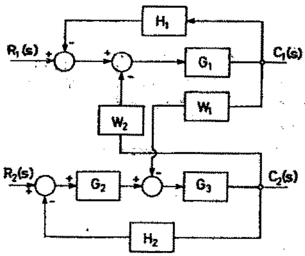
$$\frac{C}{R}(s) \overset{def}{=\!=} \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_4G_5}{1 + G_3G_4H_1 + G_1G_2G_3G_4H_2 + G_1G_4G_5H_2} .$$



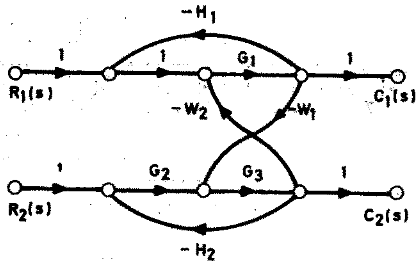
sl. 4

Primer 3. Multivarijabilni sistem automatskog upravljanja. Na linearan sistem sa sl. 5 deluju dva ulazna signala $R_1(s)$ i $R_2(s)$. Odrediti funkcionalnu zavisnost izlaznih signala $C_1(s)$ i $C_2(s)$ od ulaznih signala.

Možemo primeniti princip superpozicije, jer je sistem, po pretpostavci, linearan.



sl. 5



sl. 6

Graf protoka signala za ovaj sistem predstavljen je na sl. 6.

Od $R_1(s)$ do $C_1(s)$ vodi samo jedan elementaran put (čiji je prenos $p_1' = G_1$) koji ne dodiruje konturu prenosa $-G_2G_3H_2$, te je, dakle, $\Delta_1' = 1 + G_2G_3H_2$.

Izmedju $R_2(s)$ i $C_1(s)$ postoji takodje samo jedan elementarni put (njegov prenos je $p_1'' = -G_2G_3W_2G_1$). Ovaj put dodiruje sve konture grafa, te je $\Delta_1'' = 1$.

U grafu postoje tri konture sa prenosima $T_1 = -G_1H_1$, $T_2 = -G_2G_3H_2$ i $T_3 = G_1W_1G_3W_2$. Prva i druga od ovih kontura se medjusobno ne dodiruju.

Na osnovu izloženog dobijamo

$$C_1(s) = \frac{G_1(1 + G_2G_3H_2)R_1(s) - G_1G_2G_3W_2R_2(s)}{1 + G_1H_1 + G_2G_3H_2 - G_1G_3W_1W_2 + G_1G_2G_3H_1H_2} .$$

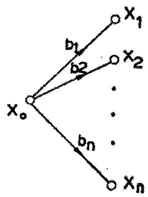
Sličnim razmatranjima nalazimo

$$C_2(s) = \frac{-G_1G_3W_1R_1(s) + G_2G_3(1 + G_1H_1)R_2(s)}{1 + G_1H_1 + G_2G_3H_2 - G_1G_3W_1W_2 + G_1G_2G_3H_1H_2} .$$

U praksi su od interesa i razne transformacije Masonovog i Coatesovog digrafa, koje ćemo ukratko opisati posle neophodnih uvodnih objašnjenja.

Očigledno je da se sistem jednačina može na više ekvivalentnih načina predstaviti u obliku (1) iz 6.3. Iz toga sleduje da istom sistemu jednačina mogu biti pridruženi različiti digrafovi. Digrafovi koji odgovaraju istom sistemu jednačina su ekvivalentni digrafovi.

Najprostiji digraf koji odgovara jednom sistemu jednačina je zvezdoliki digraf. On se dobija ako se sistem jednačina postupnom eliminacijom nepoznatih svede na oblik $x_1 = b_1x_0, \ldots, x_n = b_nx_0$. Odgovarajući digraf je predstavljen na sl. 7.

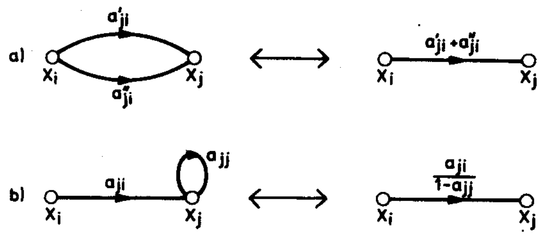


sl. 7

Ako se na neki način dobije zvezdoliki digraf, bez teškoća se pomoću njega mogu odrediti rešenja sistema.

Vidi se da je potrebno definisati neke transformacije nad digrafovima koje bi, kada se izvrše nad datim digrafom, dovodile do njemu ekvivalentnog digrafa. Te transformacije bi odgovarale algebarskim transformacijama sistema jednačina. Cilj bi bio da se navedenim transformacijama digraf dovede na zvezdoliki, odnosno što prostiji oblik.

U cilju[1] odredjivanja jedne od nepoznatih veličina mogu se vršiti razne ekvivalentne transformacije Masonovog digrafa. Posmatrajmo prvo situaciju kada digraf sadrži višestruke grane ili petlje. Njih tada možemo eliminisati na sledeći način: Višestruke grane se zamenjuju jednom granom čiji je prenos jednak zbiru prenosa pojedinih grana (za slučaj dvostruke grane videti sl. 8a). Petlja u nekom čvoru uklanja se na taj način što sve grane koje ulaze u taj čvor menjaju prenos shodno pravilu sa sl. 8b).



sl. 8

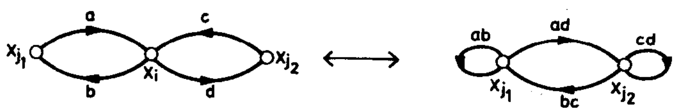
Da bismo opravdali gornje dve transformacije, primetimo kao prvo, da se tada u oba slučaja u odgovarajućem sistemu (1) iz 6.3 menja samo jedna jednačina, tj. ona koja odgovara nepoznatoj x_j. Sada nije teško videti da eliminaciji paralelnih grana odgovara sledeća algebarska transformacija: $x_j = \dots + a'_{ji}x_i + a''_{ji}x_i + \dots$ zamenjuje se sa $x_j = \dots + (a'_{ji} + a''_{ji})x_i + \dots$. Što se tiče eliminacije petlji za slučaj $a_{jj} \neq 1$, imamo: $x_j = \dots + a_{jj}x_j + \dots + a_{ji}x_i + \dots$ zamenjuje se sa $x_j = \dots + \frac{a_{ji}}{1-a_{jj}}\, x_i + \dots$. Za gornje dve transformacije postoji i fizička interpretacija. U prvom slučaju ona je očigledna, a u drugom, samo za $|a_{jj}| < 1$, imajući u vidu $\frac{1}{1-a_{jj}} = 1 + a_{jj} + a_{jj}^2 + \dots$, sleduje da signal koji stiže u čvor sa petljom beskonačno mnogo puta obilazi petlju slabeći pri svakom obilasku za iznos proporcionalan veličini a_{jj} ($|a_{jj}| < 1$), dok se dotični čvor tada ponaša kao sabirač signala.

Posebno interesantne transformacije su one koje uklju-

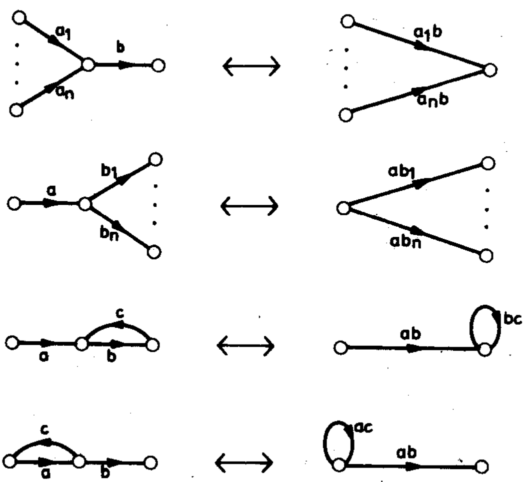
---

1) Preostali tekst u ovom odeljku napisao je S.Simić.

čuju eliminaciju čvorova digrafa. Posmatrajmo slučaj eliminacije samo jednog čvora i to čvora bez petlje[1]. Neka je G Masonov digraf, x_i čvor koji se uklanja a J skup indeksa svih onih čvorova x_j koji su polazni ili završni čvorovi grana koje polaze ili se završavaju u x_i. Uklonimo sada čvor x_i iz G i zajedno sa njim sve grane koje su mu incidentne. Da bi novodobijeni digraf bio ekvivalentan prethodnom potrebno je, za svaki par različitih vrednosti j_1, j_2 iz J, izvršiti transformaciju prema sl. 9, gde je radi preglednosti stavljeno $a_{ij_1} = a$, $a_{j_1 i} = b$, $a_{ij_2} = c$ i $a_{j_2 i} = d$.



sl. 9



sl. 10

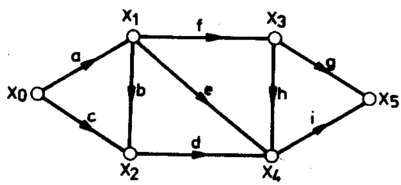
1) U literaturi su razradjeni i postupci za simultano uklanjanje više čvorova iz Masonovog grafa. O tome videti, na primer, [12].

Algebarski, poslednje transformacije odgovaraju eliminaciji nepoznate x_1 iz sistema, što nije teško proveriti.

Napomenimo još da se prilikom primene gornje transformacije na neki digraf mogu javiti višestruke grane ili petlje, a one se mogu na osnovu ranijeg eliminisati. Inače, u specijalnim slučajevima gornja transformacija rezultira u sledeće slučajeve opisane na sl. 10.

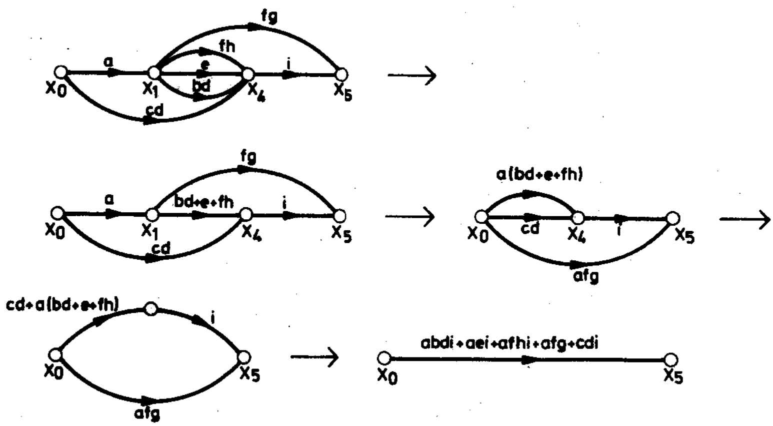
Dosad pomenute transformacije veoma su pogodne za redukciju tzv. <u>kaskadnih</u> digrafova, tj. digrafova kod kojih nema zatvorenih (orijentisanih) kontura (odnosno povratne sprege, u terminima primene u tehnici).

<u>Primer 4</u>. Za Masonov digraf sa sl. 11 naći odnos $\frac{x_5}{x_0}$.



sl. 11

Primenom pojedinih transformacija dobijaju se redom digrafovi prikazani na sl. 12.

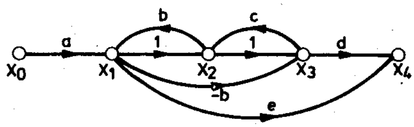


sl. 12

Znači, $\frac{x_s}{x_o} = ai(bd + fh + e + \frac{cd}{a} + \frac{fg}{i})$.

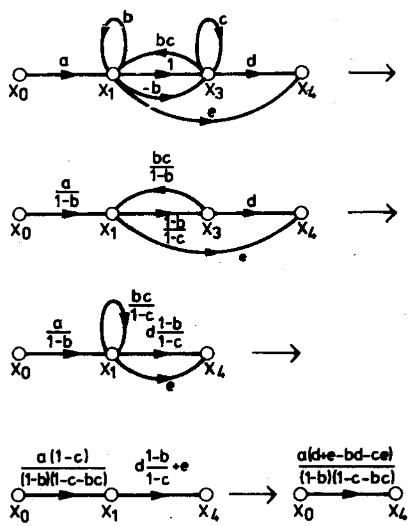
Inače, u slučaju da postoje zatvorene (orijentisane) konture situacija se nešto komplikuje. Za praksu ti slučajevi su od velikog interesa.

Primer 5. Naći odnos $\frac{x_4}{x_o}$ za Masonov digraf sa sl. 13.



sl. 13

Primenom opisanih transformacija redom se dobijaju sledeći ekvivalentni digrafovi, videti sl. 14.



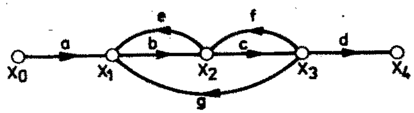
sl. 14

Znači, $\frac{x_4}{x_o} = a\frac{d+e-bd-ce}{(1-b)(1-c-bc)}$.

Opisaćemo još neke transformacije.

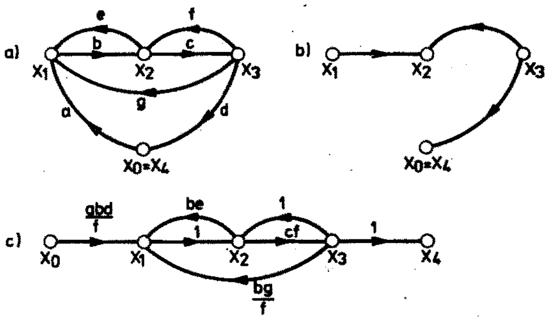
Jedna od transformacija koja se često koristi je tzv. normalizacija. Pod normalizacijom podrazumevamo transformaciju koja ima za cilj da se prenosi što većeg broja grana učine jednakim jedinici (ili nekom drugom broju). Koristeći Masonovu formulu lako se zaključuje da se to može postići menjanjem prenosa pojedinih grana ali tako da se prenosi svih puteva od izvora do ponora kao i prenosi svih kontura ne promene.

Primer 6. Izvršiti normalizaciju grafa sa sl. 15.



sl. 15

U cilju normalizacije, identifikujmo najpre čvorove x_0 i x_4. Tada se dobija digraf kod koga u smislu normalizacije mora da važi da sve konture zadržavaju iste prenose, sl. 16a.

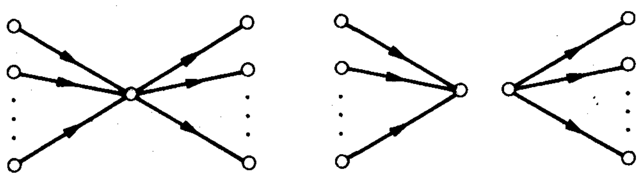


sl. 16

Izaberimo u njemu jedno stablo (sl. 16b) i uzmimo da su prenosi grana tog stabla jednaki jedinici. Tada se prenosi ostalih grana mogu tako izabrati da prenosi svih kontura ostanu nepromenjeni. Na sl. 16c dat je normalizovani Masonov digraf. Ovaj postupak može se primeniti na proizvoljni Masonov digraf.

Sledeća transformacija proizilazi iz zahteva da se promeni tip čvora u Masonovom digrafu. Naime, primenom Masonove formule mogućno je naći odnose $\frac{x_i}{x_o}$ samo ako je x_o izvorni čvor. U praksi se često može pojaviti potreba za izračunavanjem odnosa $\frac{x_i}{x_j}$, gde x_i i x_j nisu izvorni čvorovi. Taj problem bi se mogao rešiti traženjem odnosa veličina $\frac{x_i}{x_o}$ i $\frac{x_j}{x_o}$. Medjutim, postoji i drugi pristup primenom tzv. <u>inverzije čvora</u>. Pod inverzijom nekog čvora podrazumevamo postupak kojim se taj čvor pretvara u izvorni čvor. Za sistem (1) iz 6.3 inverzija nekog čvora x_i značila bi da se veličina x_o sada proglasi kao nepoznata dok bi veličina x_i bila parametar. To znači da bi se sada i-ta jednačina zamenila sa $x_o = \frac{1}{a_{io}} x_i - \frac{a_{i1}}{a_{io}} x_1 - \ldots$. U Masonovom digrafu ova transformacija se svodi na sledeće. Iz digrafa se prvo udalje sve grane koje ulaze u čvor x_i a zatim se za svako j koje odgovara nekoj grani, koja je polazila iz čvora x_j a završavala se u x_i i imala prenos a_{ij}, doda digrafu grana od čvora x_j ka x_o sa prenosom $\frac{-a_{ij}}{a_{io}}$, dok se posebno izmedju čvorova x_i i x_o dodaje u smeru od x_i ka x_o grana sa prenosom $\frac{1}{a_{io}}$.

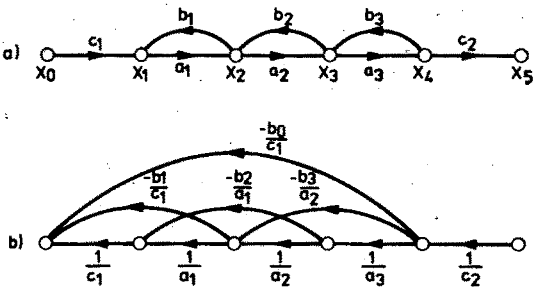
Inverzija se može koristiti i za uprošćavanje Masonovih digrafova i to u sledećem smislu. Naime, složenost nekog digrafa može se kvantitativno izraziti pomoću <u>indeksa složenosti</u> digrafa. Prethodno uvedimo pojam cepanja nekog čvora. <u>Cepanje</u> nekog čvora sastoji se u deobi datog čvora na dva čvora od kojih je jedan izvor a drugi ponor (videti sl. 17).



sl. 17

Indeks složenosti nekog digrafa definiše se kao najmanji broj čvorova koji je potrebno rascepiti da bi se dobio digraf bez (orijentisanih) kontura. Primenom inverzije često se smanjuje indeks složenosti digrafa.

Primer 7. Za Masonov digraf sa sl. 18a naći odnos $\frac{x_5}{x_o}$.



sl. 18

Na sl. 18b prikazan je digraf dobijen iz digrafa sa sl. 18a uzastopnom inverzijom čvorova x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Taj digraf je kaskadni te se lako nalazi

$$\frac{x_o}{x_5} = \frac{1}{c_1 c_2}\left(\frac{1}{a_2}\left(\frac{1}{a_1} - b_1\right)\left(\frac{1}{a_3} - b_3\right) - \frac{b_2}{a_1 a_3} - b_o\right)$$

a odatle se neposredno dobija $\frac{x_5}{x_o}$.

Inače gornji tipovi transformacija poseduju svoje analogone i kod Coatesovih digrafova. Jedan način da se one sprovedu kod Coatesovih digrafova sastoji se u prelaženju sa Coatesovog digrafa na Masonov digraf (za to je potrebno i dovoljno svakom čvoru Coatesovog digrafa dodati petlju sa prenosom 1) i zatim sprovesti transformacije Masonovog digrafa nakon kojih se vrši inverzni prelaz. Same transformacije Coatesovog digrafa sa stanovišta primena su od manjeg interesa.

11.4. Matrice incidencije grafova

U teoriji električnih kola pojavljuju se različite matrice incidencije grafova. U ovom odeljku objasnićemo opštu ideju koja dovodi do definisanja matrica incidencije a zatim ćemo se upoznati sa nekim od ovih matrica.

Neka su dati skupovi $A = \{a_1', \ldots, a_m\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$

i jedna binarna relacija ϱ u skupu $A \times B$.

Primer 1. Ako je A skup lica muškog pola, a B skup lica ženskog pola, relacija "biti u braku" je jedna od mogućnih relacija ϱ u skupu $A \times B$. Pri ovome $(a_i, b_j) \in \varrho$ ako i samo ako je lice a_i u braku sa licem b_j.

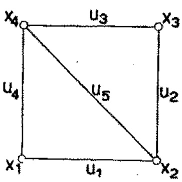
Binarna relacija se može predstaviti pomoću matrica incidencije. Za svaku binarnu relaciju ϱ u skupu $A \times B$ definiše se matrica incidencije $S_{A,B}$ skupa A i skupa B. $S_{A,B} = \| s_{ij} \|$ je pravougaona matrica tipa $m \times n$, pri čemu je $s_{ij} = 1$ ako $(a_i, b_j) \in \varrho$ i $s_{ij} = 0$ ako $(a_i, b_j) \notin \varrho$.

Za graf se mogu definisati različite matrice incidencije. Ulogu skupova A i B mogu da igraju, na primer, skup čvorova, skup grana, skup nezavisnih ciklusa, itd., a relacija može biti definisana, na primer, sa: "čvor je susedan grani", "ciklus prolazi granom", itd. Različite matrice incidencije ističu različite informacije o grafu. Prednost ove ili one matrice incidencije zavisi od problema koji se razmatra.

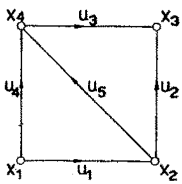
Često se upotrebljava matrica incidencije čvorova i grana $R = \| r_{ij} \|_{nm}$. Neka je skup čvorova $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i skup grana $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$. Ako je čvor x_i susedan sa granom u_j, važi $r_{ij} = 1$; u suprotnom slučaju je $r_{ij} = 0$. Pri formiranju ove matrice incidencije ne vodi se računa o orijentaciji grana.

Primer 2. Za graf sa sl. 1 matrica incidencija čvorova i grana ima oblik

$$R = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$



sl. 1



sl. 2

Jednu vrstu matrica incidencije smo i ranije naveli. To je matrica susedstva grafa. Ova matrica se dobija iz opšte matrice incidencije $S_{A,B}$, ako se uzme $A = B = X$ (X skup čvorova), a za ρ se uzme relacija susednosti čvorova. Matrica susedstva uzima u obzir i orijentaciju grana.

Opštije matrice incidencije imaju osim 0 i 1 i druge brojeve kao svoje elemente. Često su u upotrebi <u>(-1,0,1)-matrice incidencije</u> sa elementima -1, 0, 1. I u ovoj grupi se pojavljuje matrica incidencije čvorova i grana $S = \|s_{ij}\|$. Ona ima iste dimenzije kao i R, ali je

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako grana } u_j \text{ izlazi iz čvora } x_i; \\ 0, & \text{ako } x_i \text{ i } u_j \text{ nisu susedni elementi;} \\ -1, & \text{ako } u_j \text{ ulazi u } x_i. \end{cases}$$

<u>Primer 3</u>. Za graf sa sl. 2 matrica S ima oblik

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$$

U primenama su važne i <u>ciklomatičke matrice</u> grafa. Za svaku bazu ciklusa grafa G, koja je zadata vektorima $c_1, \ldots, c_k$ ($c_i = (c_{1i}, \ldots, c_{mi})$, $i = 1, \ldots, k$; $k = \nu(G)$) obrazuje se ciklomatička matrica $C = \|c_{ij}\|_{mk}$. Vektori ciklusa predstavljaju kolone ciklomatičke matrice. Ako bazu sačinjavaju prosti ciklusi, elementi ciklomatičke matrice su -1, 0, 1. Elementi matrice C imaju tada sledeće značenje:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako ciklus } c_j \text{ prolazi granom } u_i \text{ u pravcu strelice;} \\ 0, & \text{ako ciklus } c_j \text{ ne prolazi granom } u_i; \\ -1, & \text{ako ciklus } c_j \text{ prolazi granom } u_i \text{ nasuprot strelici.} \end{cases}$$

Dokazaćemo neke teoreme koje se odnose na uvedene matrice incidencije.

<u>Graf grana</u> L(G) grafa G je graf čiji se čvorovi nalaze u biunivokoj korespondenciji sa skupom grana grafa G. Dva čvora iz L(G) su spojena granom ako i samo ako se odgovarajuće grane u grafu G stiču u istom čvoru.

Neka $A(G)$ označava matricu susedstva grafa G, a $A(L(G))$ matricu susedstva odgovarajućeg grafa grana $L(G)$. Matrica $D = \|d_i \delta_{ij}\|$, u kojoj su veličine d_i $(i = 1,2,\ldots)$ stepeni čvorova, naziva se <u>matrica stepena čvorova</u> grafa G.

<u>Teorema 1</u>. Za matricu incidencije čvorova i grana R grafa G važe jednakosti

$$RR^T = A(G) + D\,,$$
$$R^TR = A(L(G)) + 2I\,.$$

<u>Dokaz</u>. Element iz i-te vrste i k-te kolone matrice RR^T je jednak $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\, r_{kj}$. Neka je $i \neq k$. Izraz $r_{ij}\, r_{kj}$ će biti jednak 1, ako su i čvor x_i i čvor x_k susedni grani u_j. Dakle, $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\, r_{kj}$ jednako je broju grana koje povezuju čvorove x_i i x_k. Za $i = k$ dobijamo izraz $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^{\,2}$. Vidi se da $r_{ij}^{\,2}$ ima vrednost 1, ako je grana u_j susedna čvoru x_i. Stoga je $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^{\,2} = d_i$.

Ovim je dokazana prva relacija.

Slično ovome, za opšti element matrice R^TR imamo izraz $\sum_{k=1}^{n} r_{ki}\, r_{kj}$. Sabirak $r_{ki}\, r_{kj}$ $(i \neq j)$ je različit od nule, tj. jednak 1, ako su grane u_i i u_j susedne istom čvoru x_k, tj. ako su i same susedne. Za $i = j$ imamo $\sum_{k=1}^{n} r_{ki}^{\,2}$. Svaka grana je susedna za tačno dva čvora, te će $r_{ki}^{\,2}$ tačno za dve vrednosti k biti jednako 1, tj. $\sum_{k=1}^{n} r_{ki}^{\,2} = 2$.

Ovim je dokazana i druga relacija.

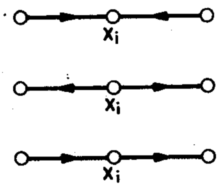
Korisno je da čitalac proveri tačnost teoreme 1 na primeru grafa sa sl. 1.

<u>Teorema 2</u>. Za matricu incidencije čvorova i grana S i ciklomatičku matricu C važi relacija $SC = O$.

<u>Dokaz</u>. Prema definiciji matričnog množenja, element iz i-te vrste i j-te kolone matrice SC jednak je

$$s_{i1}\, c_{1j} + s_{i2}\, c_{2j} + \cdots + s_{im}\, c_{mj}\,. \tag{1}$$

Vektor $(c_{1j},\ldots,c_{mj})$ predstavlja ciklus c_j. Pretpostavimo da je to elementaran ciklus. Onda on prolazi kroz nijednu ili kroz tačno dve grane koje su susedne čvoru x_i. U prvom slučaju je izraz (1) jednak 0. Neka su to u drugom slučaju grane u_{p_1} i u_{p_2}. Zbir (1) se onda svodi na $s_{ip_1}c_{p_1j} + s_{ip_2}c_{p_2j}$.



sl. 3

Na sl. 3 prikazan je čvor x_i sa granama u_{p_1} i u_{p_2}, pri čemu su navedene sve mogućne orijentacije grana. Ciklus u svakom od navedenih slučajeva može da bude orijentisan u dva smera. Neposredno se u svakom od ovih šest slučajeva uveravamo da je

$$s_{ip_1}c_{p_1j} + s_{ip_2}c_{p_2j} = 0.$$

Ovim je dokazana tačnost relacije $SC = 0$ za slučaj kada su ciklusi koje predstavlja matrica C elementarni. Ako su pak ciklusi neelementarni, oni se uvek mogu prikazati u vidu zbira elementarnih ciklusa, te se zbog distributivnosti matričnog množenja prema sabiranju slučaj svodi na prethodni.

Ovim je teorema 2 dokazana.

Primedba. Relacija $SC = 0$ važi i u slučaju kada C predstavlja matricu incidencije grana i svih ciklusa grafa. Ovo sleduje iz teoreme 2 i činjenice da se svi ciklusi mogu izraziti kao linearne kombinacije ciklusa iz jedne baze ciklusa.

U 11.1 smo videli da svaki povezani graf sadrži delimični graf oblika stabla.

Neka je $D(G)$ broj stabala koja se kao delimični grafovi sadrže u neorijentisanom grafu G bez petlji. Medju stablima koja ulaze u ovaj broj mogu postojati (i skoro uvek postoje) i medjusobno izomorfna stabla. Ako je G nepovezan graf, očigledno važi $D(G) = 0$. Na osnovu teoreme 3 iz 11.1 za povezan graf G je uvek $D(G) > 0$.

Neka graf G poseduje čvorove $x_1, x_2, \ldots, x_n$, čiji su stepeni redom $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Neka je $A = \|a_{ij}\|_1^n$ matrica susedstva i $D = \|d_{ij}\|_1^n$ matrica stepena čvorova grafa G.

Teorema 3 (G.Kirchhoff, H.M.Trent, [57], [91]). Svi kofaktori matrice $D - A$ su medjusobno jednaki i njihova zajednička vrednost je jednaka broju stabala $D(G)$ grafa G.

Pre nego što dokažemo ovu teoremu formulisaćemo i dokazaćemo dve leme.

Orijentišimo grane grafa G na proizvoljan način. Neka je sa $S = \|s_{ij}\|_{n,m}$ označena (-1,0,1)-matrica incidencije čvorova i grana na taj način dobijenog digrafa.

Lema 1. $SS^T = D - A$.

Dokaz. Element na mestu (i,k) matrice SS^T je jednak $e_{ik} = \sum_{j=1}^{m} s_{ij}\, s_{kj}$. Ako su x_i i x_k susedni čvorovi, postoji samo jedna grana u_j takva da je $s_{ij}\, s_{kj} = -1$ te je stoga $e_{ik} = -1$. Ako x_i i x_k nisu susedni čvorovi, dobijamo $e_{ik} = 0$. Za $i = k$ očigledno je $e_{ii} = d_i$, čime je dokaz završen.

Neka je $S_i^{j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}}$ kvadratna submatrica reda n-1 matrice S koja se dobija kada se iz S izostavi i-ta vrsta a zadrže samo kolone sa rednim brojevima $j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}$.

Lema 2. Determinanta det $S_i^{j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}}$ ima vrednost 1 ili -1 ako grane čiji su redni brojevi $j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}$ obrazuju stablo. U suprotnom slučaju determinanta je jednaka nuli.

Dokaz. Pretpostavimo da pomenute grane obrazuju stablo. Pošto matrica S u svakoj koloni ima dva nenulta elementa, matrica $S_i^{j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}}$ ima bar u jednoj koloni tačno jedan nenulti eelement 1 ili -1. Razvijanjem det $S_i^{j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}}$ po takvoj koloni dobija se determinanta nižeg reda sa istom osobinom. Stoga je vrednost početne determinante jednaka 1 ili -1.

Ako grane sa rednim brojevima $j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}$ ne obrazuju stablo, one obrazuju jedan nepovezan graf H. Ako je x_i izolovan čvor u H, matrica $S_i^{j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}}$ ima u svakoj koloni dva nenulta elementa (1 i -1). Pošto je zbir elemenata u svakoj koloni jednak nuli, matrica je singularna. Ako x_i nije izolovan čvor, det $S_i^{j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}}$ se može razviti kao u slučaju stabla i problem svesti na determinantu nižeg reda. Medjutim, zbog nepovezanosti grafa H, proces sukcesivnog razvijanja determinante zaustaviće se kada se izbace vrste koje odgovaraju čvorovima iz komponente grafa H u kojoj se nalazi čvor x_i. Preostala determinanta odgovaraće (-1,0,1)-matrici incidencije za preostale komponente grafa H pa će opet zbir elemenata u svakoj koloni biti jednak nuli. Stoga je det $S_i^{j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}} = 0$.

Ovim je dokaz završen.

Dokaz teoreme 3. Na osnovu teoreme 3 iz 5.1 svi kofaktori matrice D - A imaju istu vrednost. Neka je S_i matrica dobijena od matrice S izostavljanjem i-te vrste. Matrica $S_iS_i^T$ je na osnovu leme 1 glavna kvadratna submatrica reda n-1 matrice D - A. Prema Binet-Cauchyjevoj formuli dobijamo

$$(1) \qquad \det S_iS_i^T = \sum_{j_1<j_2<\ldots<j_{n-1}} (\det S_i^{j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}})^2.$$

Svakom izboru brojeva $j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}$ odgovara jedan delimični graf H grafa G. Prema lemi 2 sabirci na desnoj strani relacije (1) su jednaki 1 ako je H stablo i jednaki 0 u suprotnom slučaju.

Kako je izraz (1) istovremeno jednak kofaktorima matrice D - A teorema je dokazana.

Teorema 3 rešava problem odredjivanja veličine D(G) u opštem slučaju samo u principu jer se pri efektivnom računanju nailazi na teškoće pri razvoju determinante kojom je odredjen broj stabala. No za neke grafove to ide veoma jednostavno.

Teorema 4 (A.Cayley, [8]). U potpunom grafu K_n sa n čvorova nalazi se n^{n-2} stabala.

Dokaz. Na osnovu prethodne teoreme dobijamo

$$D(K_n) = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & & -1 \\ \vdots & & & \\ -1 & -1 & & n-1 \end{vmatrix} = n^{n-2}.$$

Navedena determinanta je reda n-1.

Sledeći odeljak je posvećen odredjivanju broja stabala u raznim grafovima.

11.5. Odredjivanje broja stabala

Broj stabala D(G) grafa G je od interesa u različitim primenama; na primer, D(G) se pojavljuje u analizi električnih mreža[1], zatim prilikom odredjivanja verovatnoće povezanosti telekomunikacionih sistema, u analizi maserskih efekata i dr.

Za potpuni bihromatski graf $K_{m,n}$ sa m+n čvorova dobija se primenom teoreme 3 iz prethodnog odeljka

$$(1)\qquad D(K_{m,n}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{n\ \ n\ \ \ddots\ \ n}}^{m} & \overbrace{\hphantom{\ \ -1\ \ \ \ }}^{n-1} \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc|ccc} n & & & & & \\ & \ddots & & & -1 & \\ & & n & & & \\ \hline m & & & & & \\ & -1 & & & \ddots & \\ & & & & & m \end{array}\right| \end{array} = m^{n-1}\, n^{m-1}.$$

Determinanta se izračunava na taj način što se sve preostale vrste dodaju prvoj vrsti a zatim se novoformirana prva vrsta doda redom vrstama m+1,m+2,...,m+n-1. Dobijena determinanta je trougaona i njena vrednost je jednaka proizvodu dijagonalnih elemenata.

Primenom teoreme 3 iz 11.4 problem se, kao što je već rečeno, u opštem slučaju, rešava samo u principu jer se, pri efektivnom računanju, nailazi na teškoće pri razvoju determinante kojom je odredjen broj stabala.

Postoje dve modifikacije ove matrične metode koje, kako ćemo videti, imaju značaj samostalnih metoda.

1^{o} U [98] je za graf G sa n čvorova uvedena funkcija

$$(2)\qquad B^{n}_{\lambda}(G) = \frac{1}{\lambda}\det(D - A + \lambda I)\ .$$

Lako se uvidja da važi formula

$$(3)\qquad D(G) = \frac{1}{n} B^{n}_{o}(G)\ .$$

2^{o} U [52] je zabeleženo da se broj D(G) može, za regularne grafove, izraziti pomoću karakterističnog polinoma $P_G(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ grafa G. U važnosti je formula

---

1) U analizi električnih mreža je od interesa da se odrede sva stabla. Radi kontrole rezultata korisno je unapred znati ukupan broj stabala.

(4) $$D(G) = \frac{1}{n} P'_G(r) ,$$

gde je r indeks (stepen) regularnog grafa G.

Formule (3) i (4) su proste posledice teoreme Kirchhoffa-Trenta koja je navedena u 11.4. Značaj ovih formula se sastoji u tome što se funkcije $B^n_\lambda(G)$ i $P_G(\lambda)$ mogu za neke grafove da odrede pomoću istih funkcija nekih prostijih grafova.

Mogućnosti koje pruža (3) su kratko opisane u 1.

U 2 se primenom formule (4) odredjuje broj stabala u nekim regularnim grafovima.

1. Direktna suma (ili unija $G_1 \cup G_2$) $G_1 \dotplus G_2$ grafova G_1 i G_2 je graf koji kao komponente povezanosti sadrži sve komponente grafova G_1 i G_2. Potpuni proizvod $G_1 \nabla G_2$ grafova G_1 i G_2 dobija se od grafa $G_1 \dotplus G_2$ kada se svaki čvor iz G_1 spoji sa po jednom granom sa svakim od čvorova iz G_2. Komplement $\bar{G}$ grafa G je graf koji ima iste čvorove kao G i u kome su dva čvora susedna ako i samo ako oni nisu susedni u G. Graf je elementaran ako je povezan i ako je ∇-primitivan (tj. ako se ne može predstaviti kao potpuni proizvod dva grafa).

U [98] se izvode formule

(5) $$B^n_\lambda(\bar{G}) = (-1)^{n-1} B^n_{-(\lambda+n)}(G) ,$$

(6) $$B^{n_1+n_2}_\lambda(G_1 \dotplus G_2) = \lambda B^{n_1}_\lambda(G_1) B^{n_2}_\lambda(G_2) ,$$

(7) $$B^{n_1+n_2}_\lambda(G_1 \nabla G_2) = (\lambda+n) B^{n_1}_{\lambda+n_2}(G_1) B^{n_2}_{\lambda+n_1}(G_2) .$$

Korišćenjem formula (5) - (7) mogućno je odrediti funkcije $B^n_\lambda(G)$ za sve grafove ako su ove funkcije poznate za elementarne grafove. Pošto se veličina D(G) jednostavno odredjuje na osnovu $B^n_\lambda(G)$, isti zaključak se dobija i za veličinu D(G).

Na žalost, klasa elementarnih grafova je vrlo široka. Ipak, mnogi se grafovi mogu predstaviti pomoću operacija $\dotplus$ i ∇ polazeći od veoma uske klase elementarnih grafova. U [99] je odredjena funkcija $B^n_\lambda(G)$ ako elementaran graf G predstavlja: a) graf koji se sastoji od samo jednog čvora, b) konturu dužine m, c) put dužine s.

Samo na osnovu ova tri rezultata mogućno je primenom formula (5) - (7) odrediti funkciju $B_\lambda^n(G)$, a samim tim i broj stabala za razne vrste grafova koji su parcijalno tretirani od strane niza autora. Tako je, na primer, stvar rutine odrediti $D(G)$ ako komplement $\overline{G}$ grafa G kao komponente povezanosti sadrži izolovane čvorove, potpune grafove, bikompletne grafove, puteve i konture.

Na taj način metod sa funkcijom $B_\lambda^n(G)$ daje sve rezultate vezane za broj stabala raznih grafova koji se nalaze opisani u radovima [4] i [75], tj. praktično sve rezultate koji su poznati u ovoj oblasti.

2. Kao što se funkcija $B_\lambda^n(G)$ može izraziti pomoću iste funkcije za elementarne grafove, tako se i funkcija $P_G(\lambda)$ za neke grafove G može odrediti pomoću karakterističnih polinoma nekih prostijih grafova. U ovom slučaju se "prost" i "složen" graf uzimaju u odnosu na neke operacije nad grafovima koje nisu identične sa onim koje su opisane u 1.

Posmatraćemo n-arne operacije nad grafovima koje su uvedene u [24] i [18]. To su: nepotpuna proširena p-suma grafova (skraćeno: NEPS) i Booleova funkcija grafova. Za NEPS dajemo definiciju ekvivalentnu onoj u [24] a koja je navedena u [19].

Definicija 1. NEPS $g(G_1,\dots,G_n)$ grafova $G_1,\dots,G_n$ sa bazom B je graf, čiji je skup čvorova jednak Descartesovom proizvodu skupova čvorova grafova $G_1,\dots,G_n$ i u kojem su dva čvora $(x_1,\dots,x_n)$ i $(y_1,\dots,y_n)$ susedna ako i samo ako postoji n-torka $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ iz B, takva da je $x_i = y_i$ kad god je $\beta_i = 0$ i x_i susedno sa y_i u G_i kad god je $\beta_i = 1$.

Definicija 2. Neka su $G_i = (X_i,U_i)$ $(i = 1,\dots,n)$ dati grafovi, pri čemu X_i i U_i označavaju odgovarajuće skupove čvorova i grana. Ako je $f(p_1,\dots,p_n)$ proizvoljna Booleova funkcija $(f : \{0,1\}^n \to \{0,1\})$, Booleova funkcija $G = f(G_1,\dots,G_n)$ grafova $G_1,\dots,G_n$ je graf $G = (X,U)$, gde je $X = X_1 \times \dots \times X_n$ i gde se U definiše na sledeći način. Za proizvoljna dva čvora $(x_1,\dots,x_n)$ i $(y_1,\dots,y_n)$ iz G se definišu Booleove promenljive $p_1,\dots,p_n$, pri čemu je, za svako i, $p_i = 1$ ako i samo ako su x_i i y_i susedni u G_i. Čvorovi $(x_1,\dots,x_n)$ i $(y_1,\dots,y_n)$ su susedni u G ako i samo ako je, za svako i, $x_i \neq y_i$ i $f(p_1,\dots,p_n) = 1$.

Skup n-torki za koje Booleova funkcija $f(p_1,\dots,p_n)$ dobija vrednost 1 obeležavaćemo sa F. Koristićemo i oznaku $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$.

Uvedene operacije su veoma opšte. Variranjem skupova B i F dobijaju se razne n-arne operacije.

Za NEPS je u važnosti sledeća teorema [19]:

Teorema 1. NEPS sa bazom B grafova $G_1,\dots,G_n$, čiji su spektri odredjeni pomoću $\{\lambda_{ji_j} \mid i_j = 1,\dots,m_j\}$ $(j = 1,\dots,n)$, ima spektar $\{\Lambda_{i_1,\dots,i_n} \mid i_j = 1,\dots,m_j,\ j = 1,\dots,n\}$, gde je

$$\Lambda_{i_1,\dots,i_n} = \sum_{\beta\in B} \lambda_{1i_1}^{\beta_1}\cdots\lambda_{ni_n}^{\beta_n}.$$

Odgovarajuća teorema za Booleovu funkciju grafova je dokazana u [18]. Ako se spektar grafa G_j sastoji od brojeva λ_{ji_j} $(i_j = 1,\dots,m_j)$, brojeve iz spektra grafa $\overline{G}_j$ ćemo obeležavati sa $\overline{\lambda}_{ji_j}$. Ako je G_j regularan graf i ako je niz $\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jm_j}$ monoton i nerastući, može se uzeti da važe relacije $\overline{\lambda}_{j1} = m_j-1-\lambda_{j1}$ i $\overline{\lambda}_{ji_j} = -1-\lambda_{ji_j}$ za $i_j > 1$, što je dokazano u [81].

Koristićemo i konvenciju $\lambda_{ji_j}^{[\beta_j]} = \lambda_{ji_j}$ za $\beta_j = 1$ i $\lambda_{ji_j}^{[\beta_j]} = \overline{\lambda}_{ji_j}$ za $\beta_j = 0$.

Teorema 2. Ako su $G_1,\dots,G_n$ regularni grafovi, spektar grafa $G = f(G_1,\dots,G_n)$ je skup $\{\Lambda_{i_1,\dots,i_n} \mid i_j = 1,\dots,m_j;\ j = 1,\dots,n\}$, gde je

$$\Lambda_{i_1,\dots,i_n} = \sum_{\beta\in F} \lambda_{1i_1}^{[\beta_1]}\cdots\lambda_{ni_n}^{[\beta_n]}.$$

Formula (4) važi, kao što je navedeno, ako je G regularan graf. Stoga je za primenu formule (4) bitna činjenica da su NEPS i Booleova funkcija regularnih grafova regularni grafovi. Ova se činjenica može lako izvesti na osnovu definicije pomenutih operacija. U [29] je naveden jedan algebarski dokaz za Booleovu funkciju koji se može sprovesti i za NEPS.

Mi ćemo u daljem tekstu odrediti broj stabala za neke klase grafova, koje nastaju kao rezultati primene NEPS-a ili Booleove funkcije na regularne grafove. Pošto teoreme 1 i 2 daju spektre grafova formulu (4) ćemo modifikovati na sledeći način.

Teorema 3. Ako je $\{\lambda_1 = r, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ spektar regularnog grafa G stepena r, važi formula

$$D(G) = \frac{1}{m} \prod_{i=2}^{m} (r-\lambda_i) . \tag{8}$$

Opisaćemo bliže neke specijalne slučajeve uvedenih operacija.

Razmotrimo najpre zbir i proizvod grafova. To su binarne operacije tipa NEPS-a. Za zbir je $B = \{(0,1),(1,0)\}$ a za proizvod $B = \{(1,1)\}$. Neka je $G_1 = (X_1,U_1)$, $G_2 = (X_2,U_2)$, $G_1 + G_2 = (X,U)$ i $G_1 \times G_2 = (X,V)$. Prema definiciji je $X = X_1 \times X_2$. Neka je $(x_1,x_2) \in X$, $(y_1,y_2) \in X$. Kod zbira su čvorovi (x_1,x_2) i (y_1,y_2) susedni ako i samo ako je ili $x_1 = y_1$ i $(x_2,y_2) \in U_2$ ili $(x_1,y_1) \in U_1$ i $x_2 = y_2$. Kod proizvoda su pomenuti čvorovi susedni ako i samo ako je $(x_1,y_1) \in U_1$ i $(x_2,y_2) \in U_2$.

Jaki proizvod grafova je NEPS sa bazom koja sadrži sve n-torke osim n-torke $(0,\ldots,0)$.

Primer 1. Graf k-dimenzionalne rešetke. Graf k-dimenzionalne rešetke G ima kao čvorove sve tačke sa celobrojnim koordinatama iz jedne kocke k-dimenzionalnog Euklidovog prostora, pri čemu su dva čvora susedna ako i samo ako se odgovarajuće tačke razlikuju u tačno jednoj koordinati. Ovaj graf se može predstaviti kao zbir k potpunih grafova sa n čvorova. Poznato je da spektar potpunog grafa K_n sa n čvorova sadrži broj n-1 i n-1 brojeva jednakih -1. Prema teoremi 1 spektar grafa $G_1+\ldots+G_k$ sadrži sve brojeve oblika $\lambda_{1i_1}+\ldots+\lambda_{ki_k}$. Indukcijom po k lako se može zaključiti da spektar grafa G sadrži brojeve $\lambda_i = n(k-i)-k$, $i = 0,1,\ldots,k$, sa višestrukostima $p_i = \binom{k}{i}(n-1)^i$. Prema (8) je

$$D(G) = n^{n^k-k-1} \prod_{i=1}^{k} i^{\binom{k}{i}(n-1)^i} .$$

Primer 2. Graf prizme. Graf prizme G je graf čiji su čvorovi temena prizme a grane ivice prizme. Neka je osnova prizme jedan n-tougao. Graf G se može predstaviti kao zbir jedne konture dužine n i potpunog grafa K_2. Kontura dužine n sadrži u spektru brojeve $2\cos\frac{2\pi}{n}i$ $(i = 0,1,\ldots,n-1)$, dok je spektar grafa K_2 jednak $\{1,-1\}$. Stoga se u spektru grafa G nalaze brojevi $2\cos\frac{2\pi}{n}i + 1$, $2\cos\frac{2\pi}{n}i - 1$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, pa je

$$D(G) = \frac{1}{2n}\prod_{i=1}^{n-1}\left(2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}i\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(4 - 2\cos\frac{2\pi}{n}i\right)$$

$$= \frac{8^{n-1}}{n}\prod_{i=1}^{n-1}\sin^2\frac{\pi}{n}i\left(1 + 2\sin^2\frac{\pi}{n}i\right).$$

<u>Primer 3</u>. <u>Kvadratna rešetka na torusu</u>. Posmatrajmo kružni torus. Krug koji leži na torusu a čija je ravan normalna na osu torusa, naziva se uzdužni krug. Poprečni krug se dobija kada se torus preseče sa poluravni koja se oslanja na osu torusa. Ako imamo nekoliko uzdužnih i nekoliko poprečnih krugova na torusu, dobijamo kvadratnu rešetku. <u>Graf kvadratne rešetke</u> ima za čvorove preseke uzdužnih i poprečnih krugova. Susedni su oni čvorovi koji su neposredno spojeni lukom nekog od krugova sa torusa.

Graf kvadratne rešetke G može se predstaviti kao zbir dve konture. Neka su to konture dužina m i n (m uzdužnih i n poprečnih krugova). Na osnovu ranije izloženog dobija se

$$D(G) = \frac{1}{mn}\prod_{i=0}^{n-1}\prod_{j=0}^{m-1}\left(4 - 2\cos\frac{2\pi}{n}i - 2\cos\frac{2\pi}{n}j\right)$$

$$= \frac{4^{mn-1}}{mn}\prod_{i=0}^{n-1}\prod_{j=0}^{m-1}\left(\sin^2\frac{\pi}{n}i + \sin^2\frac{\pi}{m}j\right), (i,j)\neq(0,0).$$

Ako se, umesto zbira, posmatra jaki proizvod kontura, dobija se graf koji odgovara kvadratnoj rešetki na torusu kod koje su u svakom "kvadratiću" povučene i "dijagonale". Na osnovu teoreme 1, jaki proizvod grafova G_1 i G_2 sadrži u spektru sve brojeve oblika $\lambda_{1i_1} + \lambda_{2i_2} + \lambda_{1i_1}\lambda_{2i_2}$.

Stoga se za opisanu modifikaciju kvadratne rešetke na torusu dobija

$$D(G) = \frac{1}{mn} \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{j=0}^{m-1} (8-2\cos \frac{2\pi}{n}i - 2\cos \frac{2\pi}{m}j - 4\cos \frac{2\pi}{n}i \cos \frac{2\pi}{m}j)$$

$$= \frac{2^{mn-1}}{mn} \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{j=0}^{m-1} (4-\cos \frac{2\pi}{n}i - \cos \frac{2\pi}{m}j - 2\cos \frac{2\pi}{n}i \cos \frac{2\pi}{m}j),$$

$$(i,j) \neq (0,0).$$

Primer 4. Graf prostornih dijagonala prizme. Na kraju posmatrajmo graf G koji ima za čvorove temena n-tostrane prizme a kao grane sve prostorne dijagonale prizme. G se može predstaviti kao ekskluzivna disjunkcija konture G_1 dužine n i potpunog grafa G_2 sa dva čvora.

Za ekskluzivnu disjunkciju je $F = \{(1,0),(0,1)\}$ pa spektar sadrži, prema teoremi 2, sve brojeve oblika $\lambda_{1i_1}\overline{\lambda}_{2i_2} + \overline{\lambda}_{1i_1}\lambda_{2i_2}$.

Spektar za G_2 je $\{1,-1\}$ a za $\overline{G}_2$ $\{0,0\}$. Stoga se spektar za G sastoji od 2n brojeva $\overline{\lambda}_{11},\ldots,\overline{\lambda}_{1n}, -\overline{\lambda}_{11},\ldots,-\overline{\lambda}_{1n}$. Prema ranije izloženom komplement konture sadrži u spektru brojeve n-3 i $-1-2\cos \frac{2\pi}{n}i$ $(i = 1,\ldots,n-1)$. Stoga je

$$D(G) = \frac{n-3}{n} \prod_{i=1}^{n-1} (n-4-2\cos \frac{2\pi}{n}i)(n-2+2\cos \frac{2\pi}{n}i).$$

Karakteristični polinom, odnosno spektar, grafa može se, opštije nego u poglavlju 7, definisati kao karakteristični polinom, odnosno spektar, neke kvadratne matrice koja je na odredjen način pridružena grafu. Spektralni metod u teoriji grafova je skup postupaka za dobijanje i dokazivanje iskaza o strukturi grafova koji u svojim bitnim tačkama koriste karakteristične polinome, odnosno spektre grafova.

Ovde su opisana dva metoda za odredjivanje broja stabala grafova. Oba ta metoda su spektralna. Kao što je rečeno, pomoću ta dva metoda mogu se dobiti praktično svi rezultati u ovoj oblasti. Spektralni metod se stoga može smatrati veoma efikasnim u posmatranom domenu teorije grafova. Navedeni rezultati su samo primeri primene metoda i postoji još mnogo klasa grafova kod kojih se broj stabala može odrediti na opisani način.

11.6. Kodovi koji ispravljaju greške

U telekomunikacionoj tehnici važnu ulogu igra teorija kodiranja. Teorija kodiranja je matematička teorija koja predstavlja deo kombinatorike.

U teoriji kodiranja posmatra se skup F od q različitih simbola (slova) koji se naziva azbuka. U praktičnim problemima je obično $q = 2$ i $F = \{0,1\}$. U teorijskim razmatranjima se često uzima $q = p^r$ (p prost broj) i $F = GF(q)$.

Koristeći simbole skupa F mogućno je formirati q^n n-torki koje se nazivaju reči. Dužina reči je jednaka broju n slova koja sačinjavaju reč. Skup svih reči dužine n obeležava se sa F^n. U slučaju kada je $q = p^r$, reči se mogu interpretirati kao n-dimenzionalni vektori nad poljem $GF(q)$ a skup F^n je tada vektorski prostor nad tim poljem.

Poruke koje se šalju kroz telekomunikacioni kanal kodiraju se pomoću reči iz skupa F^n. Može se zamisliti da se reč odašilje slovo po slovo kroz kanal. Usled smetnji slovo može da se pogrešno prenese kroz kanal i da ga korisnik na kraju kanala registruje kao neko drugo slovo. Neka je p verovatnoća da se slovo na kraju kanala primi kao neko drugo slovo Tada je np srednja vrednost broja grešaka prilikom prenošenja reči dužine n. Na osnovu verovatnoće p, koja predstavlja karakteristiku kanala, može se odrediti maksimalan broj grešaka e koji može praktično da se pojavi prilikom prenošenja reči dužine n.

Jedan od glavnih zadataka teorije kodiranja je da razradi metode za korekciju greški, tj. da omogući da se reči na kraju telekomunikacionog kanala tačno rekonstruišu.

U skup F^n reči, tj n-torki, se uvodi rastojanje $d(x,y)$ (tzv. Hammingovo rastojanje) pomoću sledeće definicije.

Definicija 1. Rastojanje $d(x,y)$ reči x i y iz F^n je jednako broju koordinata u kojima se reči x i y razlikuju.

Skup $S(x,r) = \{y \mid y \in F^n,\ d(x,y) \leqslant r\}$ n-torki y koje su od n-torke x udaljene najviše za r (tj. n-torki koje se od x razlikuju na najviše r mesta) naziva se sfera poluprečnika r sa centrom u x.

U slučaju kada je F^n vektorski prostor nad $GF(q)$, 0 označava vektor čije su sve koordinate jednake 0. Tada se za proizvoljni vektor x uvodi <u>težina</u> $W(x)$ vektora x pomoću $W(x) = d(x,0)$. Drugim rečima, težina vektora je jednaka broju njegovih koordinata koje su različite od nule.

Svaki podskup C skupa F^n naziva se <u>kod</u>. Minimalno medjusobno rastojanje n-torki iz jednog koda C naziva se <u>kodovsko rastojanje</u>. Kod kodovskog rastojanja $2e + 1$ ima osobinu da se njegove n-torke mogu da rekonstruišu na kraju telekomunikacionog kanala ako se prilikom prenošenja svake n-torke ne napravi više od e grešaka, tj. ako se bar n-e slova prenošene reči tačno primi na kraju kanala. Da bi uvideli ovu činjenicu posmatrajmo kod kodovskog rastojanja $2e + 1$ čije su n-torke označene sa $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Neka se kroz kanal pošalje n-torka x_i i neka se ona na drugom kraju kanala registruje kao n-torka y. Rastojanje $d(x_i, y)$ je najviše jednako e jer kanal, po pretpostavci, pravi najviše e grešaka. Znači y pripada sferi $S(x_i, e)$ poluprečnika e sa centrom u x_i. n-torka y ne pripada nijednoj sferi $S(x_j, e)$ sa centrom u nekoj drugoj n-torki x_j koda jer su sfere $S(x_i, e)$ i $S(x_j, e)$ disjunktne. Ovo je posledica činjenice što je $d(x_i, x_j) \geqslant 2e + 1$, tj. rastojanje centara sfera je veće od zbira poluprečnika tih sfera. Dakle, y pripada samo jednoj od sfera poluprečnika e koje su opisane oko n-torki $x_1, x_2, \ldots, x_m$ iz koda. Stoga se y rekonstruiše kao n-torka x_i.

<u>Definicija 2</u>. Kod $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ $(\subset F^n)$ kodovskog rastojanja $2e + 1$ se naziva perfektan ako je

$$\bigcup_{i=1}^{m} S(x_i, e) = F^n,$$

tj. ako je unija sfera poluprečnika e opisanih oko n-torki koda C jednaka skupu svih n-torki F^n.

<u>Primer 1</u>. Posmatrajmo 9 četvorki sastavljenih od simbola 0,1,2 (četvorke su ispisane vertikalno):

0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	2	1	2	1	0	1	0	2
0	1	2	2	0	1	1	2	0

Rastojanje izmedju bilo koje dve od ovih devet četvorki je jednako 3. Sfere poluprečnika 1 opisane oko ovih četvorki su medjusobno disjunktne i svaka sadrži 9 četvorki. Stoga je tim sferama pokriveno svih 81 četvorki sastavljenih od simbola 0, 1, 2 pa je navedeni kod perfektan. Parametri koda su $n=4$, $q=3$, $e=1$, tj. kod može da ispravi jednu grešku.

Dakle, šifrator u sistemu veze ima tri osnovna simbola 0, 1 i 2. U elektronskom uredjaju to može da znači, na primer, odsustvo impulsa, pozitivan pravougaoni impuls i negativan pravougaoni impuls. Ako hoćemo da korisne informacije označavamo četvorkama i ako znamo da se kroz sistem veze najviše jedna komponenta četvorke može pogrešno preneti, upotrebljavamo gornji kod. Ovim kodom možemo prenositi najviše devet različitih informacija, na primer, devet slova.

Ako sistem ne pravi više od jedne greške u svakoj četvorci, četvorka se uvek može rekonstruisati na izlazu. Na primer, ako se na izlazu dobije četvorka 0 0 1 1, očigledno je da nju treba protumačiti kao četvorku 2 0 1 1.

Interesantno je da se navedeni kod može primeniti kao "sistem" pri igranju na sportskoj prognozi. Ako je potrebno predvideti ishod četiri fudbalske utakmice (označimo sa 1 pobedu domaćeg kluba, sa 0 nerešen rezultat i sa 2 pobedu gostujućeg kluba) tako da se prognoza za najmanje tri utakmice pokaže kao tačna, onda je, očigledno, potrebno postaviti više prognoza. Ako svakoj četvorci navedenog koda odgovara jedna prognoza ishoda četiri utakmice, onda je na osnovu ranije rečenog jasno da ćemo, bez obzira na stvarne ishode utakmica, u jednoj od devet prognoza imati bar tri tačna rezultata.

Definicija 3. k-dimenzionalni podprostor C vektorskog prostora F^n naziva se linearni (n,k)-kod nad poljem $GF(q)$.

Kod linearnih kodova se za odredjivanje kodovskog rastojanja ne moraju odrediti rastojanja izmedju svake dve n-torke koda. Naime, za proizvoljna dva vektora x i y iz koda važi $d(x,y) = d(x-y,0) = W(x-y)$. Pošto je C takodje vektorski prostor vektor $x-y$ pripada kodu C pa se zaključuje da je kodovsko rastojanje koda jednako minimalnoj težini vektora koji pripadaju kodu a različiti su od 0.

Linearni kodovi C se obično predstavljaju pomoću generišuće matrice koda. Vrste generišuće matrice obrazuju bazu vektorskog prostora C. Ako C predstavlja (n,k)-kod njegova generišuća matrica G je dimenzija $k \times n$. Vektori koda C se dobijaju kao linearne kombinacije vrsta matrice G pri čemu se, naravno, koeficijenti uzimaju iz odgovarajućeg polja GF(q).

Skup svih vektora koji su ortogonalni na sve vektore koda C naziva se dualni kod koda C i obeležava se sa $C^{\perp}$. Ako je C linearni (n,k)-kod, dualni kod $C^{\perp}$ je linearni (n,n-k)-kod. Generišuća matrica H dualnog koda $C^{\perp}$ naziva se kontrolna matrica koda C. Generišuća matrica G i kontrolna matrica H koda C su povezane relacijom $GH^T = 0$, koja se neposredno proverava na osnovu navedenih definicija.

12. MATRICE I GRAFOVI U HEMIJI[1)]

U ovom poglavlju prikazaćemo nekoliko primena teorije matrica i teorije grafova u hemiji. Naročito će nas zanimati slučajevi kod kojih je moguća, a često i neophodna, istovremena i kombinovana upotreba ovih dveju matematičkih tehnika. Matrice i grafovi imaju u hemiji, a naročito u fizičkoj i teorijskoj hemiji, tako mnogobrojne primene da njihov sveobuhvatni pregled na ovom mestu nikako ne bi došao u obzir. Zbog ograničenog obima a i zbog namene ovog poglavlja, osvrnućemo se samo na nekoliko odabranih primera. Ove primere ćemo, medjutim, birati tako da pokriju što je moguće više raznorodnih oblasti hemijske teorije.

12.1. Grafovski i matrični prikaz hemijske strukture

12.1.1. Klasično učenje o hemijskoj strukturi

U šezdesetim godinama XIX veka nastala je teorija o hemijskoj strukturi koja se danas označava kao klasična.

Najmanja hemijska individua jeste molekul. On je nosilac hemijskih osobina supstanci. Molekul se može dalje deliti na atome. Hemijske promene nastaju usled pregrupisavanja atoma u molekulima.

Atome u okviru jednog molekula drže na okupu izvesne hemijske sile. Jedna od najbitnijih osobina ovih sila jeste da imaju karakter zasićenja: atom jedne vrste može za sebe da veže tačno odredjeni broj atoma druge vrste, posle čega dolazi do uzajamnog zasićenja hemijskih sila. Kažemo da se izmedju odgovarajućih atoma stvara hemijska veza. Neki atomi unutar molekula su medjusobno hemijski vezani dok drugi nisu medjusobno hemijski vezani.

Brojčana mera sposobnosti nekog atoma da za sebe veže

1) Ovo poglavlje je napisao I.Gutman.

druge atome naziva se valenca. U klasičnom učenju o hemijskoj strukturi valenca je uvek ceo broj. Najčešće je valenca svih atoma istog elementa ista. Na primer, ugljenik, kiseonik i vodonik imaju obično valencu 4, 2 i 1, respektivno.

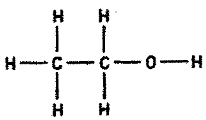
Ukupnost podataka o hemijskoj povezanosti atoma u okviru jednog molekula naziva se hemijska struktura (odgovarajućeg jedinjenja). Hemijska struktura se uobičajeno predstavlja tzv. strukturnom formulom, koja nije ništa drugo nego jedan graf (tačnije: multigraf). Taj graf se konstruiše prema sledećim pravilima.

1. Čvorovi grafa prikazuju atome a označavaju se hemijskim simbolom odgovarajućeg elementa (H za vodonik, C za ugljenik, O za kiseonik, Fe za gvoždje,...).

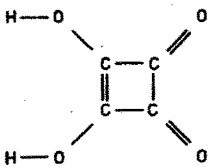
2. Dva čvora u grafu su povezana ako i samo ako izmedju odgovarajućih atoma u molekulu postoji hemijska veza. Dakle, grane grafa prikazuju hemijske veze; stepen čvora poklapa se sa valencom dotičnog atoma.

3. Hemijska veza može biti jednostruka, (dvostruka, trostruka,...) pa se tada izmedju odgovarajućih čvorova nalazi jedna grana (odnosno, dve, tri,... grane).

Na sl. 1 su date strukturne formule etanola (I) i kvadratne kiseline (II).



I



II

sl. 1

12.1.2. Molekulski grafovi

Iz praktičnih razloga strukturne formule se često prikazuju na skraćeni način, kada je jasno o kakvim jedinjenjima se radi. Mi ćemo se ovde ograničiti na dva načina grafovskog prikaza ugljovodonika.

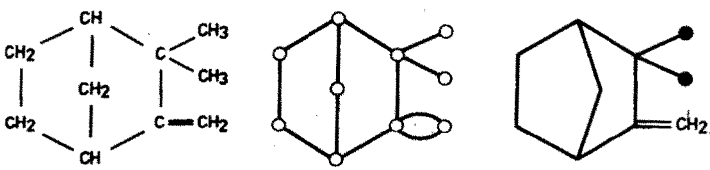
Ugljovodonici su jedinjenja koja sadrže samo ugljenik

(C) i vodonik (H). Ugljovodonik je zasićen ako njegovi molekuli sadrže samo jednostruke veze. Ako u molekulu postoje i višestruke veze, onda je ugljovodonik nezasićen. Važnu klasu nezasićenih ugljovodonika čine konjugovani ugljovodonici, kod kojih je svaki atom ugljenika vezan tačno jednom dvostrukom vezom. Podrazumevamo da u molekulima ugljovodonika svi ugljenikovi atomi imaju valencu 4 i svi vodonikovi atomi valencu 1.

C-graf se dobija tako što se atomi ugljenika prikazuju neoznačenim čvorovima, dok se atomi vodonika izostavljaju. Čvorovi C-grafa mogu, prema tome, da imaju stepen 1,2,3 i 4.

Hückelov graf služi za predstavljanje konjugovanih ugljovodonika. Prikazuju se samo atomi ugljenika a sve grane u grafu su jednostruke (bez obzira da li su odgovarajuće veze u molekulu jednostruke ili dvostruke). Čvorovi Hückelovog grafa mogu imati stepen 1, 2 i 3.

Na sl. 2 prikazan je ugljovodonik kamfen (III), njegov C-graf (IV) kao i uobičajena skraćena hemijska formula (V). Ova poslednja formula je samo jedan adekvatno stilizovani C-graf.

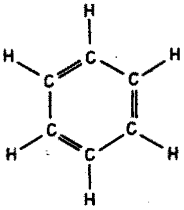


III IV V

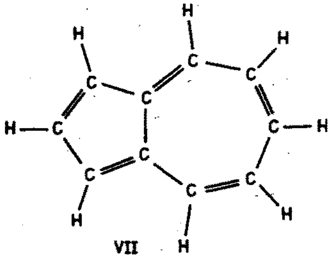
sl. 2

Na sl. 3 su dati primeri konjugovanih ugljovodonika benzena (VI) i azulena (VII) kao i njima pridruženih Hückelovih grafova (VIII) i (IX).

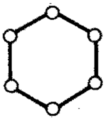
Svi do sada opisani grafovi pomoću kojih se prikazuje hemijska struktura molekula nazivaju se zajedničkim imenom molekulski grafovi.



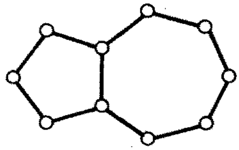
VI



VII



VIII



IX

sl. 3

12.1.3. Matrično prikazivanje hemijskih struktura

Grafovsko prikazivanje hemijskih struktura uobičajeno je u današnjoj hemiji. Jasno je, medjutim, da se iste informacije o medjusobnoj povezanosti atoma mogu po potrebi formulisati i u matričnom vidu. Jedan od mnogih načina na koji se hemijska struktura može opisati matricom jeste pomoću tzv. topološke matrice $T = \|t_{ij}\|_1^n$. Red n ove kvadratne matrice jednak je broju atoma u molekulu. Po definiciji je za $r \neq s$

$$t_{rs} = \begin{cases} \text{red veze rs ako su atomi r i s povezani,} \\ \text{0 ako atomi r i s nisu povezani.} \end{cases}$$

Red veze rs jednak je 1, 2, odnosno 3, u slučaju jednostruke, dvostruke, odnosno trostruke veze. Dijagonalni elementi topološke matrice na neki konvencionalni način simbolizuju odgovarajući hemijski element.

Za matrični prikaz strukture ugljovodonika možemo da koristimo matricu susedstva (za definiciju videti odeljak 7.4) C-grafa, odnosno Hückelovog grafa. Ove matrice označićemo sa A_C, odnosno A_H. Ako je iz teksta očigledno o kojoj se vrsti molekulskog grafa radi, matricu susedstva ćemo pisati kratko kao A.

Iz izloženog je jasno da se matrice A_C i A_H mogu shvatiti kao specijalni slučajevi topološke matrice T.

12.1.4. Hosoyin indeks

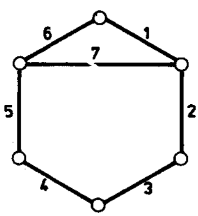
Godine 1971. japanski teorijski hemičar H.Hosoya [51] pokazao je da se niz fizičko-hemijskih osobina zasićenih ugljovodonika (na primer, toplota sagorevanja, temperatura ključanja i dr.) može dovesti u prostu matematičku vezu sa tzv. "topološkim indeksom" Z, koji se definiše na sledeći način.

Neka je G graf sa n čvorova i m grana. Neka se u tom grafu može na p(G,k) načina izabrati k nezavisnih tj. medjusobno nesusednih grana (k = 1,2,...,m). Za sve grafove ćemo dogovorno uzeti da je p(G,0) = 1. Tada je po definiciji

$$Z = Z(G) = \sum_{k=0}^{m} p(G,k) .$$

Ako je G C-graf jednog zasićenog ugljovodonika, onda se Z(G) naziva Hosoyinim topološkim indeksom odgovarajućeg jedinjenja.

Brojeve p(G,k), koji će se pojaviti u kasnijem izlaganju, ilustrovaćemo na primeru grafa G sa sl. 4, čije su grane numerisane od 1 do 7. Jasno je da je p(G,0) = 1 i p(G,1) = 7.



sl. 4

U grafu G postoji sledećih 11 parova nezavisnih grana: $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{2,6\}$, $\{3,5\}$, $\{3,6\}$, $\{3,7\}$, $\{4,6\}$ i $\{4,7\}$. Postoje i dve trojke nezavisnih grana: $\{1,3,5\}$ i $\{2,4,6\}$. Zbog toga je p(G,2) = 11 i p(G,3) = 2. Lako se vidi da je $p(G,k) = 0$ za $k > 3$.

Kao što je poznato, u teoriji grafova se graf koji ne sadrži konture naziva šuma.

Teorema 1. Neka je G proizvoljna šuma sa n čvorova i neka je A njegova matrica susedstva. Tada je

$$(1) \qquad Z(G) = i^{-n}\det(iI_n + A)\ , \quad i^2 = -1\ .$$

Dokaz. Matrici $iI_n + A$ pridružićemo Coatesov digraf G'. Očigledno je da se G' dobija tako što se grane grafa G zamene parom suprotno orijentisanih grana, a na svaki čvor grafa G se doda po jedna petlja sa prenosom i. Izračunaćemo determinantu matrice $iI_n + A$ prema definiciji iz 4.1.

S obzirom da je graf G šuma, jedine konture u digrafu G' su konture dužine dva (koje odgovaraju granama grafa G i imaju prenos 1) i konture dužine jedan (petlje, čiji je prenos jednak i).

Doprinos svakog od faktora F_k sumi (1) iz 4.1 je isti, ne zavisi od k i iznosi

$$(-1)^{p(F_k)}C(F_k) = (-1)^{k+n-2k}\,1^k\,i^{n-2k} = (-i)^n\ .$$

Zbog toga je u našem slučaju

$$\sum_{F\in\mathfrak{F}}(-1)^{p(F)}C(F) = \sum_{k=0}^{m}(-i)^n p(G,k) = (-i)^n Z(G)\ .$$

Kako je, s druge strane, prema definiciji (1) iz 4.1

$$\det(iI_n + A) = (-1)^n\sum_{F\in\mathfrak{F}}(-1)^{p(F)}C(F)\ ,$$

neposredno dobijamo jednačinu (1).

12.2. Grafovski i matrični prikaz hemijskih reakcija

12.2.1. Elementi kinetike složenih hemijskih reakcija

Zadatak hemijske kinetike je da proučava kako se koncentracija pojedinih hemijskih individua menja u toku odigravanja hemijske reakcije.[1)]

Neka se u posmatranom reaktoru odigravaju hemijske reakcije izmedju supstanci $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Neka u nekom trenutku vremena t koncentracija supstance M_j iznosi $a_j = a_j(t)$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Brzina hemijske reakcije (u odnosu na M_j) se odredjuje kao $v_j = \frac{da_j}{dt}$.

<u>Zakon o dejstvu masa</u> daje matematički izraz za brzinu svake elementarne hemijske reakcije. Neka se takva jedna reakcija odigrava prema jednačini

$$\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \ldots + \alpha_n M_n \xrightarrow{k} \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + \ldots + \beta_n M_n ,$$

gde su α_j i β_j celi pozitivni brojevi ili nula ($j = 1,2,\ldots, n$). Prema gornjoj jednačini α_j molekula supstance M_j stupa u reakciju a β_j molekula se stvara u reakciji. Tada je

$$v_j = \frac{da_j}{dt} = k(\beta_j - \alpha_j) \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{\alpha_i},$$

pri čemu je $k > 0$ tzv. <u>konstanta brzine reakcije</u>. Red reakcije je odredjen sa $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

Mi ćemo se u daljem izlaganju ograničiti na važan specijalni slučaj kada su sve elementarne reakcije prvog reda i kada uvek iz jednog molekula reaktanta nastaje jedan molekul produkta:

(1) $$M_i \xrightarrow{k_{ij}} M_j .$$

Konstanta brzine pretvaranja supstance M_i u supstancu M_j označena je sa k_{ij}. Kada se M_i ne pretvara u M_j (u jednoj elementarnoj reakciji) pisaćemo $k_{ij} = 0$. Takodje se podrazumeva da je $k_{jj} = 0$ za svako j.

Ako se u posmatranom reaktoru istovremeno odigrava više elementarnih reakcija tipa (1), imamo sistem složenih hemijskih reakcija. Tada je

---

1) U ovom izlaganju ne pravimo razliku izmedju koncentracije i aktivnosti pojedinih učesnika u hemijskoj reakciji. Takodje ćemo se ograničavati na kinetiku homogenih hemijskih reakcija.

(2) $$v_j = \frac{da_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} k_{ij}a_i - a_j \sum_{i=1}^{n} k_{ji} .$$

Kao primer posmatrajmo sistem reakcija

$$M_1 \xrightarrow{k_{12}} M_2 ,$$
$$M_2 \xrightarrow{k_{23}} M_3 ,$$
$$M_3 \xrightarrow{k_{34}} \text{produkti koji nas ne zanimaju.}$$

Ovim reakcijama odgovaraju diferencijalne jednačine

$$\frac{da_1}{dt} = -k_{12}a_1 ,$$

$$\frac{da_2}{dt} = k_{12}a_1 - k_{23}a_2 ,$$

$$\frac{da_3}{dt} = k_{23}a_2 - k_{34}a_3 .$$

Sistem jednačina (2) za $j = 1,2,\ldots,n$ može se pisati u matričnom obliku kao

(3) $$\frac{d}{dt} a = Ka ,$$

pri čemu je

$$a = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Vmatrix}, \quad K = \begin{Vmatrix} -\sum_i k_{1i} & k_{21} & k_{31} \ldots & k_{n1} \\ k_{12} & -\sum_i k_{2i} & k_{32} & k_{n2} \\ \vdots & & & \\ k_{1n} & k_{2n} & k_{3n} & -\sum_i k_{ni} \end{Vmatrix}.$$

U našem primeru je

$$K = \begin{Vmatrix} -k_{12} & 0 & 0 \\ k_{12} & -k_{23} & 0 \\ 0 & k_{23} & -k_{34} \end{Vmatrix}.$$

Rešenje sistema linearnih diferencijalnih jednačina

(3) tražimo u obliku

$$(4) \qquad a = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Vmatrix} = e^{\lambda t} \begin{Vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{Vmatrix} = e^{\lambda t} C .$$

Zamena (4) u (3) daje $KC = \lambda C$, iz čega se vidi da je konstanta λ sopstvena vrednost a C sopstveni vektor matrice K.

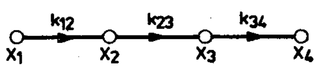
Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti matrice K sa sopstvenim vektorima $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Radi jednostavnosti pretpostavićemo da su sve sopstvene vrednosti medjusobno različite. Tada opšte rešenje sistema (3) glasi

$$a = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e^{\lambda_j t} C_j ,$$

gde su μ_j konstante koje se mogu odrediti iz početnih uslova zadatka.

12.2.2. Reakcioni digraf.

Reakcioni digraf se definiše kao digraf čiji čvorovi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ odgovaraju reagujućim supstancama $M_1, M_2, \ldots, M_n$ a izmedju čvorova x_i i x_j postoji orijentisana grana sa prenosom $k_{ij} \neq 0$. Reakcioni digraf ranije posmatranog primera je dat na sl. 1,



sl. 1

pri čemu smo uveli pomoćni čvor x_4 koji reprezentuje "produkte koji nas ne zanimaju".

Koncept reakcionog digrafa široko se primenjuje u hemijskoj kinetici jer omogućava jednostavno prikazivanje odnosa koji vladaju u sistemu složenih hemijskih reakcija. Osim toga, taj koncept omogućava da se na jednostavni način formulišu mnogi rezultati hemijske kinetike. Navodimo bez dokaza sledeće teoreme.

Hemijska reakcija dostiže svoje stacionarno stanje kada su sve brzine $v_j (j = 1,2,\ldots,n)$ jednake nuli.

Teorema 1. Ako u reakcionom digrafu postoji čvor x iz koga ne polazi ni jedna grana, onda je u stacionarnom stanju $a_j = 0$ za sve čvorove iz kojih vodi orijentisani put u čvor x.

Teorema 2. Uslov $a_j \neq 0$ za svako $j = 1,2,\ldots,n$ u stacionarnom stanju postiže se ako i samo ako sve grane reakcionog digrafa pripadaju nekoj (orijentisanoj) konturi.

12.2.3. Neki metodi za rešavanje kinetike složenih hemijskih reakcija

Kao što smo videli, rešavanje sistema linearnih diferencijalnih jednačina (3) svodi se na odredjivanje sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora jedne matrice. Drugim rečima, potrebno je odrediti one vrednosti parametra λ za koje je zadovoljena jednačina

(5) $$\det(\lambda I_n - K) = 0 .$$

U sledećem koraku potrebno je naći netrivijalna rešenja homogenog sistema linearnih jednačina

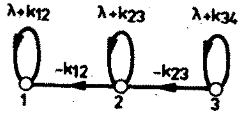
(6) $$\begin{aligned}
-C_{j1}\sum_i k_{1i} + C_{j2}k_{21} + \ldots + C_{jn}k_{n1} &= \lambda_j C_{j1} ,\\
C_{j1}k_{12} - C_{j2}\sum_i k_{2i} + \ldots + C_{jn}k_{n2} &= \lambda_j C_{j2} ,\\
&\vdots\\
C_{j1}k_{1n} + C_{j2}k_{2n} + \ldots - C_{jn}\sum_i k_{ni} &= \lambda_j C_{jn} ,
\end{aligned}$$

čije su nepoznate $C_{j1}, C_{j2}, \ldots, C_{jn}$.

U konkretnim problemima koji se javljaju u hemijskoj kinetici uvek je veliki broj matričnih elemenata k_{ij} jednak nuli. Zbog toga je pogodno da se jednačina (5) i sistem (6) rešavaju jednim od ranije opisanih grafovskih metoda.

Veza izmedju Coatesovog grafa matrice $\lambda I_n - K$ i reakcionog digrafa je jednostavna i očigledna.

Coatesov graf za matricu $\lambda I_3 - K$ iz ranije opisanog složenog reakcionog sistema dat je na sl. 2.



sl. 2

Jedini faktor ovog digrafa sadrži tri petlje, pa se dobija

$$\det(\lambda I_3 - K) = (\lambda + k_{12})(\lambda + k_{23})(\lambda + k_{34}) .$$

Sopstvene vrednosti matrice K su $\lambda_1 = -k_{12}$, $\lambda_2 = -k_{23}$, $\lambda_3 = -k_{34}$. Može se dokazati da je

$$C_1 = \begin{Vmatrix} (k_{23} - k_{12})(k_{34} - k_{12}) \\ k_{12}(k_{34} - k_{12}) \\ k_{12}k_{23} \end{Vmatrix}, \quad C_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ k_{34} - k_{23} \\ k_{23} \end{Vmatrix}, \quad C_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

iz čega dobijamo opšte rešenje

$$\begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix} = \mu_1 e^{-k_{12}t} C_1 + \mu_2 e^{-k_{23}t} C_2 + \mu_3 e^{-k_{34}t} C_3 .$$

Ako na početku reakcije u reaktoru postoji samo supstanca M_1, tj. ako za $t = 0$ imamo $a_2 = a_3 = 0$, možemo da odredimo konstante μ_1, μ_2 i μ_3 iz uslova

$$\mu_1(k_{23} - k_{12})(k_{34} - k_{12}) = a_1(0) ,$$

$$\mu_1 k_{12}(k_{34} - k_{12}) + \mu_2(k_{34} - k_{23}) = 0 ,$$

$$\mu_1 k_{12}k_{23} + \mu_2 k_{23} + \mu_3 = 0 .$$

Tada naše rešenje u konačnom obliku glasi

$$a_1(t) = a_1(0)e^{-k_{12}t} ,$$

$$a_2(t) = a_1(0) \frac{k_{12}}{k_{23} - k_{12}} (e^{-k_{12}t} - e^{-k_{23}t}) ,$$

$$a_3(t) = a_1(0)k_{12}k_{23}\left(\frac{e^{-k_{12}t}}{(k_{12} - k_{34})(k_{12} - k_{23})}\right.$$

$$\left. + \frac{e^{-k_{23}t}}{(k_{23} - k_{12})(k_{23} - k_{34})} + \frac{e^{-k_{34}t}}{(k_{34} - k_{12})(k_{34} - k_{23})}\right).$$

12.2.4. Ravnoteža u složenim sistemima. Teorema Jacimirskog

Posmatrajmo kinetički sistem sastavljen od supstanci $M_1, M_2, \ldots, M_n$ koji ima osobinu da je uvek $k_{ji} \neq 0$ kada je $k_{ij} \neq 0$. Kada ovaj sistem dostigne svoje stacionarno stanje, brzina pretvaranja supstance M_i u supstancu M_j izjednačava se sa brzinom pretvaranja supstance M_j u supstancu M_i: $k_{ij}\, a_i^o = k_{ji}\, a_j^o$, gde sa a_j^o označavamo stacionarnu koncentraciju supstance M_j ($j = 1,2,\ldots,n$). Uvodjenjem tzv. konstante ravnoteže $K_{ij} = \frac{k_{ji}}{k_{ij}}$ možemo gornju relaciju da pišemo u obliku $a_i^o = K_{ij}\, a_j^o$.

Neka je G reakcioni digraf sistema. S obzirom na osobinu $k_{ij} \neq 0 \Longleftrightarrow k_{ji} \neq 0$, njegovi čvorovi x_i i x_j ili nisu susedni ili su spojeni parom suprotno orijentisanih grana čiji su prenosi k_{ij} i k_{ji}. Samim tim je broj (orijentisanih) grana paran; označićemo ga sa $2m$. Jasno je da je tada i broj različitih konstanti ravnoteže jednak $2m$. Medjutim, nisu sve ove konstante ravnoteže medjusobno nezavisne.

Dokazaćemo najpre sledeću teoremu.

Teorema 3. Neka u reakcionom digrafu postoji (orijentisana) kontura dužine t i neka su čvorovi digrafa G označeni tako da iz čvora x_j polazi grana u čvor x_{j+1} ($j = 1,2,\ldots,t$; $x_{t+1} \equiv x_1$). Tada je

$$K_{12}\, K_{23} \cdots K_{t-1,t}\, K_{t1} = 1 . \tag{7}$$

Dokaz. Uočimo prvo da iz definicije konstante ravnoteže sleduje da je $K_{ij}\, K_{ji} = 1$, čime je teorema dokazana za sve konture dužine 2. Budući da je $a_1^o = K_{12}\, a_2^o$, $a_2^o = K_{23}\, a_3^o, \ldots, a_{t-1}^o = K_{t-1,t}\, a_t^o$, zaključujemo da je

$$a_1^o = K_{12} K_{23} \dots K_{t-1,t}\, a_t^o . \tag{8}$$

S druge strane, po pretpostavci teoreme u reakcionom grafu postoji grana izmedju čvorova x_1 i x_t, dakle

$$a_1^o = K_{1t}\, a_t^o . \tag{9}$$

Uporedjivanje jednačina (8) i (9) daje $K_{12}K_{23} \dots K_{t-1,t} = K_{1t}$. Jednačina (7) sada izlazi iz činjenice da je $K_{1t} = \frac{1}{K_{t1}}$.

Ovim je teorema dokazana.

Relacije tipa (7) mogu se napisati za sve konture digrafa G. Razlikovaćemo trivijalne relacije (kada je $t = 2$) i netrivijalne (kada je $t > 2$). Jasno je da ima tačno m trivijalnih relacija $K_{ij}K_{ji} = 1$. Postavlja se pitanje koliko je netrivijalnih relacija tipa (7) nezavisno. Odgovor na to daje sledeći rezultat Jacimirskog [104] iz 1972. godine.

Neka je graf G^* dobijen zamenjivanjem parova suprotno orijentisanih grana grafa G sa po jednom neorijentisanom granom. Jasno je da G^* ima m grana i n čvorova. U hemiji se, po pravilu, javlja slučaj kada je graf G^* povezan.

Teorema 4. Broj ν nezavisnih netrivijalnih relacija tipa (7) jednak je ciklomatičkom[1] broju grafa G, tj. $\nu = m - n + 1$.

Dokaz. Dokazaćemo prvo da ima n-1 nezavisnih konstanti ravnoteže. Budući da je G^* povezan, možemo u njemu da uočimo jedan delimični graf T oblika stabla. (Naravno, grane stabla T su orijentisane.) Neka je x_n proizvoljni čvor digrafa G (odnosno stabla T). Tada u stablu T postoji orijentisani put koji polazi od bilo kojeg čvora x_r i vodi do čvora x_n $(r = 1,2,\dots,n-1)$. Neka je taj put dužine $p = p(r,n)$ i neka vodi preko čvorova $x_{r_0}, x_{r_1}, \dots, x_{r_p}$ $(x_{r_0} = x_r;\ x_{r_p} = x_n)$.

Sve ravnotežne koncentracije možemo izraziti u funkciji koncentracije a_n^o i konstanti K_{r_{j-1},r_j} $(j = 1,2,\dots,p;\ r = 1,2,\dots,n-1)$

$$a_r^o = K_{r_0,r_1} K_{r_1,r_2} \dots K_{r_{p-1},r_p}\, a_n^o . \tag{10}$$

1) Ciklomatički broj grafa je definisan u odeljku 11.1.

S obzirom da u stablu T imamo n-1 orijentisanih grana koje vode prema čvoru x_n, tačno n-1 različitih konstanti ravnoteže učestvuje u jednačinama tipa (10) za $r = 1,2,\dots,n-1$. Bilo koja druga konstanta ravnoteže, recimo K_{rs}, odredjena je tada preko ovih n-1 konstanti zbog $K_{rs} = \frac{a_r^o}{a_s^o}$.

Prema tome, tačno n-1 konstanti je nezavisno.

Broj nezavisnih konstanti ravnoteže (n-1) jednak je, s druge strane, broju svih mogućnih konstanti ravnoteže (2m) umanjenom za broj trivijalnih relacija (m) i umanjenom za broj nezavisnih netrivijalnih relacija (ν). Prema tome je $n-1 = 2m - m - \nu$, iz čega teorema 4 sleduje neposredno.

Može se dokazati da teorema Jacimirskog važi i u opštem slučaju kada graf G ima $p > 1$ komponenti povezanosti. Tada je broj nezavisnih netrivijalnih relacija tipa (7) jednak $\nu = m - n + p$.

12.3. Matrični metodi u stehiometriji

Posmatrajmo hemijsku reakciju

$$\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \dots + \alpha_n M_n \rightarrow \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + \dots + \beta_n M_n , \tag{1}$$

koja se odigrava izmedju supstanci $M_1, M_2, \dots, M_n$. Po pravilu, ne mogu oba koeficijenta α_i i β_i biti istovremeno različiti od nule, tj. važi $\alpha_i \beta_i = 0$ $(i = 1,2,\dots,n)$. Supstance za koje je $\alpha_i > 0$ nazivaju se reaktanti a supstance za koje je $\beta_i > 0$ nazivaju se produkti reakcije. Jedna supstanca ne može istovremeno biti i reaktant i produkt reakcije.

Odredjivanje koeficijenata α_i i β_i vrši se na osnovu činjenice da se ukupan broj atoma bilo koje vrste ne menja kada se reaktanti pretvaraju u produkte. Ovaj zadatak se rešava u okviru hemijske discipline - stehiometrije.

Neka su $A_1, A_2, \dots, A_m$ simboli atoma i neka molekul M_i sadrži e_{ij} atoma tipa A_j. Tada empirijska formula molekula M_i može da se piše u obliku simboličke sume

$$M_i = \sum_{j=1}^{m} e_{ij} A_j . \tag{2}$$

Konstante e_{ij} su, naravno, nenegativni celi brojevi. Činjenicu da se ukupan broj atoma bilo koje vrste za vreme odigravanja hemijske reakcije (1) održava, možemo da pišemo u obliku

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} \gamma_i M_i = 0 ,$$

gde je $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$ i ove koeficijente treba odrediti. Jednačina (3) neznatno odstupa od uobičajenog načina pisanja u hemiji. Naime, umesto $2H_2 + O_2 = 2H_2O$ ovde se ista jednačina piše kao $2H_2 + O_2 - 2H_2O = 0$.

Definisaćemo vektor koeficijenta γ i matricu empirijskih formula E pomoću

$$\gamma = \|\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\|, \qquad E = \|e_{ij}\|_{n,m}.$$

Kombinovanjem jednačina (2) i (3) dobija se

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i M_i = \sum_{j=1}^{m} A_j \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_{ij} ,$$

tj. $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_{ij} = 0 \quad (j = 1,2,\dots,m)$ ili

$$(4) \qquad \gamma E = 0 .$$

Odredjivanje koeficijenata u hemijskim jednačinama svodi se, prema tome, na rešavanje matrične jednačine (4).

Ako vektor γ zadovoljava jednačinu (4), tada to čini i svaki vektor $x\gamma$, gde je x proizvoljni broj. Zbog toga se od rešenja u hemijskom smislu zahteva još da

(5a) γ_i bude ceo broj za $i = 1,2,\dots,n$;

(5b) $\gamma\gamma^T > 0$;

(5c) $\gamma\gamma^T$ bude minimalno .

Zahtev (5a) uvek može da se ispuni pogodnim izborom x, zahtev (5b) odbacuje trivijalno rešenje $\gamma = 0$, dok zahtev (5c) omogućava jedinstvenost rešenja. Rešenje jednačine (4) koje zadovoljava zahteve (5) ostaje neodredjeno do na predznak. što znači da je svejedno šta se piše s leve a šta s desne strane u hemijskim jednačinama. Konvencionalno, $\gamma_i > 0$ odgovara reaktantima a $\gamma_i < 0$ produktima reakcije.

Pre nego što ćemo preći na diskusiju o rešenjima jednačine (4) treba napomenuti da koeficijenti γ_i u opštem slučaju ne moraju uopšte da postoje. Tako, na primer, ne mogu se naći koeficijenti u jednačini

$$\gamma_1 KMnO_4 + \gamma_2 HCl + \gamma_3 H_2O + \gamma_4 KClO + \gamma_5 MnO_2 = 0 \; . \tag{6}$$

S druge strane, u nekim slučajevima koeficijenti mogu da se odrede na beskonačno mnogo načina. Na primer, jednačine

$$3H_2 + 2O_2 - 2H_2O - H_2O_2 = 0 \; , \tag{7a}$$

$$4H_2 + 3O_2 - 2H_2O - 2H_2O_2 = 0 \; , \tag{7b}$$

$$7H_2 + 5O_2 - 4H_2O - 3H_2O_2 = 0 \; , \tag{7c}$$

su stehiometrijski ispravne.

Matrična jednačina (4) ima uvek jedno trivijalno rešenje $\gamma = 0$. Broj netrivijalnih rešenja (ukoliko ona postoje) je, kao što je već ranije ukazano, beskonačno velik. Medjutim, broj linearno nezavisnih rešenja (L) je ograničen i iznosi

$$L = n - \text{rang } E \; . \tag{8}$$

Razlikovaćemo tri slučaja.

1) L = 0. Nema niti jednog rešenja, pa koeficijenti ne mogu da se odrede. Na primer, za reakciju (6) je

$$\begin{Vmatrix} KMnO_4 \\ HCl \\ H_2O \\ KClO \\ MnO_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} K \\ Mn \\ O \\ H \\ Cl \end{Vmatrix}$$

i

$$L = n - \text{rang} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = 5 - 5 = 0 \; .$$

Stehiometrijski zadaci koji bi pretpostavljali odigravanje ovakvih hemijskih reakcija nerešivi su.

2) $L = 1$. Postoji tačno jedno linearno nezavisno rešenje. Koristeći se zahtevima (7) možemo jednoznačno odrediti koeficijente. Primer:

$$\begin{Vmatrix} KMnO_4 \\ K_2MnO_4 \\ MnO_2 \\ K_2O \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} K \\ Mn \\ O \end{Vmatrix},$$

$$L = n - \operatorname{rang} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = 4 - 3 = 1 .$$

Koeficijenti su

$$2KMnO_4 + 2K_2O + MnO_2 - 3K_2MnO_4 = 0 .$$

3) $L > 1$. Ima više rešenja i koeficijenti ne mogu da se odrede jednoznačno. Zaista, ako su γ' i γ'' dva različita (linearno nezavisna) vektora koji zadovoljavaju (4) i (5), onda to čini i vektor $g\gamma' + h\gamma''$ pod uslovom da su g i h uzajamno prosti celi brojevi. Na primer, za reakciju (7) je

$$\begin{Vmatrix} H_2 \\ O_2 \\ H_2O \\ H_2O_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} H \\ O \end{Vmatrix},$$

$$L = 4 - \operatorname{rang} \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix} = 2.$$

Koeficijenti su

$$(2g + h)H_2 + (g + h)O_2 - 2gH_2O - hH_2O_2 = 0$$

a jednačine (7a) - (7c) su specijalni slučajevi za $g=h=1$; $g=1$, $h=2$; $g=2$, $h=3$.

Stehiometrijski zadaci koji bi se zasnivali na poznavanju koeficijenata ovakvih jednačina bili bi neodredjeni. Jasno je da se tada moraju zadati još neki dopunski uslovi koje reaktanti i produkti treba da zadovolje. Potrebno je tačno L - 1 takvih uslova.

Kako matrica E ima dimenzije $n \times m$, važi relacija

$$\text{rang } E \leqslant \min\{n,m\}$$

iz čega sleduje $L \geqslant n - \min\{n,m\}$. Prema tome, u slučaju da je broj različitih molekulskih vrsta (n) veći od broja vrsta atoma (m), mogu se sigurno naći koeficijenti hemijske jednačine. Ako je razlika n - m veća od jedan, (na primer, u reakciji (7)), koeficijenti se ne mogu odrediti jednoznačno.

12.4. Teorija grafova i molekulske orbitale

12.4.1. Hückelova molekulsko orbitalna teorija

Jedan od zadataka kvantne hemije jeste da opisuje i proučava elektronsku strukturu molekula. To se postiže ~~rešava~~njem Schrödingerove jednačine

(1) $$\hat{H}\Psi_j = E_j\Psi_j ,$$

gde je $\hat{H}$ Hamiltonov operator (ili operator energije), Ψ_j talasna funkcija sistema i E_j energija sistema. Indeks j ukazuje da jedna Schrödingerova jednačina u opštem slučaju može da ima više različitih rešenja. Talasna funkcija potpuno opisuje stanje sistema na koji se odnosi Hamiltonov operator.

Ako talasna funkcija opisuje stanje jednog elektrona (u molekulu), onda se ona naziva molekulskom orbitalom. Kao što je poznato, fizički smisao molekulske orbitale Ψ je u tome što $|\Psi|^2 dV$ predstavlja verovatnoću da se odgovarajući elektron nadje u delu prostora dV.

Iz poznavanja talasne funkcije mogu se izračunati sve fizičke osobine odgovarajućeg sistema. Energija sistema na koji se Hamiltonov operator $\hat{H}$ odnosi i čije stanje je opisano talasnom funkcijom Ψ_j jeste E_j.

Primena Hamiltonovog operatora zahteva izmedju ostalog i izračunavanje drugih parcijalnih izvoda. Dakle, Schrödingerova jednačina je parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda. Pod odredjenim uslovima (u koje ovde nećemo da ulazimo) može se diferencijalna jednačina (1) transformisati u matrični oblik

(2) $$H\Psi_j = E_j\Psi_j ,$$

pri čemu je sada H Hamiltonova matrica a Ψ_j je talasna funkcija u vektorskom obliku. Iz jednačine (2) je očigledno da je Ψ_j sopstveni vektor a E_j sopstvena vrednost matrice H.

Da bi se rešila Schrödingerova jednačina (1), odnosno (2), za konkretne molekulske sisteme, kvantna hemija pribegava aproksimacijama.

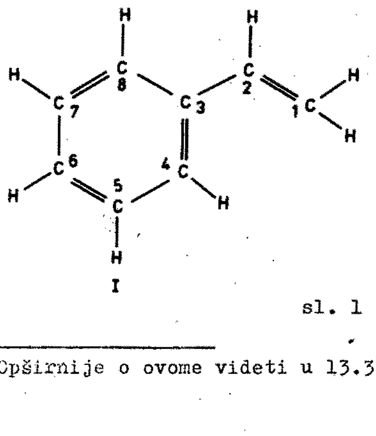
Jedan vrlo popularni kvantno-hemijski aproksimativni metod za opisivanje stanja pojedinih elektrona u konjugovanim ugljovodonicima jeste Hückelova molekulsko orbitalna teorija. (Za definiciju konjugovanih ugljovodonika videti odeljak 12. 1.2.)

U okviru Hückelovog metoda Hamiltonova matrica $H = \|h_{ij}\|$ ima dimenzije $n \times n$, gde je n broj ugljenikovih atoma u molekulu. Neka su atomi ugljenika označeni sa 1,2,...,n. Tada su matrični elementi h_{rs} zadani[1] kao:

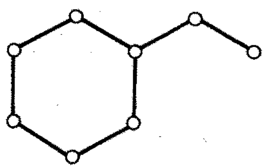
(3a) $h_{rr} = \alpha$, $r = 1,2,\ldots,n$;

(3b) $h_{rs} = \beta$, ako medju atomima r i s ($r \neq s$) postoji hemijska veza ;

(3c) $h_{rs} = 0$, ako medju atomima r i s ($r \neq s$) ne postoji hemijska veza .



I



II

sl. 1

1) Opširnije o ovome videti u 13.3.5.

Parametri α i β nazivaju se <u>Coulombov integral</u> i <u>integral rezonancije</u>; oni se u Hückelovoj teoriji smatraju konstantama.

Na primer, za ugljovodonik stiren (I na sl. 1) Hamiltonova matrica u Hückelovoj teoriji ima oblik

$$H = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha \end{Vmatrix} .$$

Imajući u vidu jednačine (3) nije teško videti da se Hamiltonova matrica u Hückelovoj teoriji može prikazati u obliku

(4) $$H = \alpha I_n + \beta A ,$$

pri čemu je A jedna simetrična matrica čiji su dijagonalni elementi nule a nedijagonalni elementi jedinice ili nule u zavisnosti od toga da li su odgovarajući atomi povezani ili ne. U stvari, $A = A_H$ je upravo matrica susedstva Hückelovog grafa (koji je definisan u 12.2.1.). Graf II sa sl.1 je Hückelov graf stirena I.

<u>Teorema 1</u>. Ako je λ sopstvena vrednost a C sopstveni vektor matrice A, onda je $\alpha + \beta\lambda$ sopstvena vrednost a C sopstveni vektor matrice H.

<u>Dokaz</u>. Pomnožimo jednačinu $I_n C = C$ konstantom α a jednačinu $AC = \lambda C$ konstantom β. Dobijene relacije sabiranjem daju $\alpha I_n C + \beta AC = \alpha C + \beta\lambda C$, tj. $(\alpha I_n + \beta A)C = (\alpha + \beta\lambda)C$, tj. $HC = (\alpha + \beta\lambda)C$, što je trebalo dokazati.

Iz gornjeg rezultata izlazi da se Hückelove molekulske orbitale Ψ_j podudaraju sa sopstvenim vektorima C_j matrice susedstva Hückelovog grafa, tj. $\Psi_j = C_j$. Izmedju sopstvenih vrednosti λ_j matrice A_H i energije E_j odgovarajućih elektrona postoji prosta veza

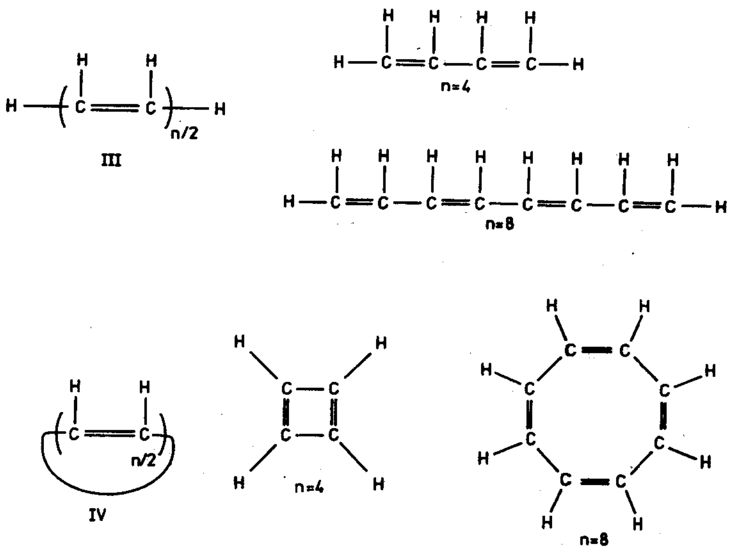
$$E_j = \alpha + \beta\lambda_j ,$$

pri čemu imamo tačno n različitih molekulskih orbitala (j = 1, 2,...,n). Ovaj značajan zaključak pokazuje da izmedju Hückelove molekulsko orbitalne teorije i spektralne teorije grafova postoji duboka i dalekosežna veza. Hückelova teorija predstavlja važno područje primene spektara grafova.

U nastavku izlaganja navešćemo nekoliko primera iz ovog područja.

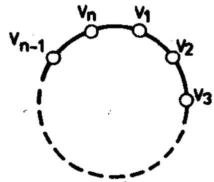
12.4.2. Dva primera: linearni polieni i anuleni

Odredimo karakteristični polinom i spektar dva važna Hückelova grafa, naime, onih koji su pridruženi linearnim polienima (III) i anulenima (IV), sl. 2. Hückelovi grafovi ovih jedinjenja su V i VI na sl. 3. Ovi grafovi imaju svoja posebna imena: V je put sa n čvorova a VI je kontura (dužine n) i označavaju se sa P_n, odnosno C_n.



sl. 2

V



VI

sl. 3

Dokažimo najpre nekoliko opštijih rezultata prema [41]. Podsećamo da se graf koji ne sadrži nijednu konturu naziva šuma. Kao što je izvedeno u odeljku 7.4, karakteristični polinom $P(W,\lambda)$ šume W sa n čvorova ima oblik

$$(5) \qquad P(W,\lambda) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k p(W,k)\, \lambda^{n-2k},$$

gde su brojevi $p(W,k)$ definisani ranije (videti 12.1.4).

Neka je e_{rs} proizvoljna grana grafa G koja leži izmedju čvorova v_r i v_s. Neka su grafovi $G - e_{rs}$ i $G - v_r - v_s$ dobijeni odbacivanjem grane e_{rs}, odnosno odbacivanjem čvorova v_r i v_s, iz grafa G.

<u>Teorema 2</u>. Za proizvoljan graf G važi jednakost

$$(6) \qquad p(G,k) = p(G - e_{rs},k) + p(G - v_r - v_s,k-1).$$

<u>Dokaz</u>. U grafu G možemo izabrati k nezavisnih grana na dva načina. Ili se grana e_{rs} nalazi medju izabranih k grana ili ne. Broj izbora prvog tipa jednak je broju izbora k-1 nezavisne grane u grafu $G - v_r - v_s$, dakle $p(G - v_r - v_s,k-1)$. Broj izbora k nezavisnih grana u G koji ne sadrže granu e_{rs} jednak je broju izbora k nezavisnih grana u grafu $G - e_{rs}$, dakle $p(G - e_{rs},k)$. Ovim je teorema dokazana.

Kombinacijom formula (5) i (6) dolazimo do sledeće teoreme.

<u>Teorema 3</u>. Za karakteristični polinom šume W važi rekurentna relacija

$$P(W,\lambda) = P(W - e_{rs},\lambda) - P(W - v_r - v_s,\lambda),$$

pri čemu je e_{rs} proizvoljna grana šume W, koja leži izmedju čvorova v_r i v_s.

Primenimo teoremu 3 na put i to na granu izmedju čvorova v_n i v_{n-1}, sl. 3. Tada je $P_n - e_{n,n-1}$ graf čije dve komponente povezanosti put dužine n-1 i put dužine jedan. Zbog toga je

$$P(P_n - e_{rs},\lambda) = P(P_1,\lambda)\, P(P_{n-1},\lambda) = \lambda P(P_{n-1},\lambda).$$

Graf $P_n - v_n - v_{n-1}$ je put dužine n-2.

Teorema 3 daje konačno formulu

$$P(P_n,\lambda) = \lambda P(P_{n-1},\lambda) - P(P_{n-2},\lambda) \tag{7}$$

iz koje se bez teškoće mogu rekurzivno odrediti polinomi $P(P_n,\lambda)$, polazeći od $P(P_1,\lambda) = \lambda$ i $P(P_2,\lambda) = \lambda^2 - 1$.

U teoriji specijalnih funkcija su poznati Čebiševljev polinom prve vrste $T_n(\lambda)$ i Čebiševljeva funkcija druge ~~vrste~~ vrste $U_n(\lambda)$. Oni su partikularna rešenja diferencijalne jednačine

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0$$

kada izvršimo smenu $t = \cos\lambda$. Čebiševljeve funkcije zadovoljavaju rekurentne relacije

$$T_n(\lambda) = 2\lambda T_{n-1}(\lambda) - T_{n-2}(\lambda)\ ,$$

$$U_n(\lambda) = 2\lambda U_{n-1}(\lambda) - U_{n-2}(\lambda)\ ,$$

koje po formi podsećaju na jednačinu (7).

Znajući da je $U_2(\lambda) = 2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}$ i $U_3(\lambda) = (4\lambda^2 - 1)\sqrt{1-\lambda^2}$, lako zaključujemo da je

$$P(P_n,2\lambda)\sqrt{1-\lambda^2} = U_{n+1}(\lambda)\ . \tag{8}$$

Identitet (8) ukazuje na zanimljivu vezu izmedju teorije grafova i teorije specijalnih funkcija.

Kao što je objašnjeno u odeljku 3.4, najopštija funkcija koja zadovoljava rekurentnu relaciju $f_n = af_{n-1} + bf_{n-2}$ ima oblik $f_n = Ax_1^n + Bx_2^n$, gde su A i B neodredjene konstante a x_1 i x_2 su koreni jednačine $x^2 = ax + b$. Primenimo ovaj rezultat na relaciju (7). Koreni jednačine $x^2 = \lambda x - 1$ glase $x_{1,2} = \dfrac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$. Uvedemo li smenu $\lambda = 2\cos t$, imamo

$$x_{1,2} = \cos t \pm \sqrt{\cos^2 t - 1} = \cos t \pm i \sin t .$$

Uzimajući u obzir Eulerov obrazac $\cos t \pm i \sin t = e^{\pm it}$, dobijamo

$$P(P_n, 2 \cos t) = A(e^{it})^n + B(e^{-it})^n = Ae^{int} + Be^{-int}$$
$$= (A + B) \cos nt + i(A - B) \sin nt .$$

Konstante A i B odredjuju se iz početnih uslova: $P(P_1, 2 \cos t) = 2 \cos t$ i $P(P_2, 2 \cos t) = 4 \cos^2 t - 1$. Jednostavno izračunavanje daje $A + B = 1$; $i(A - B) = \frac{\cos t}{\sin t}$, tj. $P(P_n, 2 \cos t) = \cos nt + \cos t \frac{\sin nt}{\sin t} = \frac{(\cos nt \sin t + \sin nt \cos t)}{\sin t} = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$. Prema tome, karakteristični polinom puta dužine n ima sledeći jednostavni oblik:

$$P(P_n, \lambda) = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}, \tag{9}$$

pri čemu je $\lambda = 2 \cos t$.

Spektar puta odredjuje se sada bez teškoća iz jednačine $P(P_n, \lambda) = 0$. Iz uslova $\sin(n+1)t = 0$ izlazi $(n+1)t = \pi j$ i konačno dobijamo

$$\lambda_j = 2 \cos \frac{\pi j}{n+1}, \quad j = 1,2,\dots,n .$$

Predjimo sada na izračunavanje karaterističnog polinoma i spektra konture C_n. Sam graf C_n predstavlja jednu osnovnu figuru (sa n čvorova i jednom komponentom povezanosti). Iz teoreme 1 iz 7.4 vidimo da ova osnovna figura utiče samo na vrednost koeficijenta a_n i njen doprinos iznosi $(-1)^1 2^1 = -2$. Sve ostale osnovne figure sastoje se isključivo iz elementarnih figura K_2. Koeficijenti a_j karakterističnog polinoma konture odredjeni su kao $a_j = b_j$ za $j = 1,2,\dots,n-1$ i $a_n = b_n - 2$, pri čemu je

$$b_{2k} = (-1)^k p(G,k),\ k = 1,2,\dots;\ b_{2k-1} = 0,\ k = 1,2,\dots .$$

Ovaj rezultat može se napisati i u obliku

$$P(C_n, \lambda) = -2 + \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k p(C_n, 2k)\, \lambda^{n-2k} . \tag{10}$$

Primenimo teoremu 2 na konturu C_n i to na granu e_{1n} izmedju čvorova v_1 i v_n. Lako se vidi da je $C_n - e_{1n} = P_n$ i $C_n - v_1 - v_n = P_{n-2}$. Prema tome je $p(C_n,k) = p(P_n,k) + p(P_{n-2},k-1)$, što zamenom u (10) daje

$$P(C_n, \lambda) = P(P_n, \lambda) - P(P_{n-2}, \lambda) - 2 \; . \tag{11}$$

Koristeći se izrazom (9) imamo dalje

$$P(C_n, \lambda) = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t} - \frac{\sin(n-1)t}{\sin t} - 2 = 2(\cos nt - 1), \tag{12}$$

gde je $\lambda = 2 \cos t$.

Iz (12) se neposredno može odrediti spektar konture. Iz uslova $P(C_n, \lambda) = 0$ sleduje $nt = 2\pi j$, tj.

$$\lambda_j = 2 \cos \frac{2\pi j}{n} \; , \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Može se utvrditi i bliska veza izmedju Čebiševljevih polinoma prve vrste i karakterističnog polinoma konture, naime

$$P(C_n, 2\lambda) = 2T_n(\lambda) - 2 \; .$$

Ukazujemo na kraju da je poznavanje spektra grafova P_n i C_n od velikog značaja za kvantno hemijski opis elektronske strukture linearnih poliena i anulena. Specijalno, važan je zaključak da kontura C_n ima (dve) nule u svom spektru ako i samo ako je $n = 4\ell$ ($\ell = 1,2,\ldots$). U sledećem odeljku će biti objašnjeno da to znači da anuleni sa 4ℓ ugljenikovih atoma imaju nevezne molekulske orbitale i da su samim tim hemijski nestabilni.

12.4.3. Neki problemi i rezultati Hückelove molekulsko orbitalne teorije

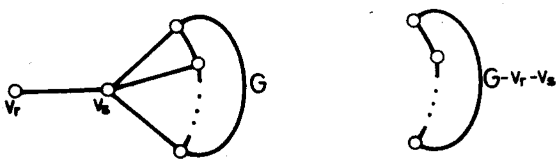
Navešćemo ovde nekoliko problema i rezultata Hückelove teorije koji se na naročito jednostavan način mogu formulisati terminologijom teorije grafova.

Molekulska orbitala Ψ_j sa energijom $E_j = \alpha + \beta\lambda_j$ naziva se vezna ako je $\lambda_j > 0$, antivezna ako je $\lambda_j < 0$ i nevezna ako je $\lambda_j = 0$. Smatra se da elektroni u veznim orbitalama doprinose hemijskoj vezi, dok oni u neveznim orbitalama slabe hemijsku vezu. Elektroni čije je stanje opisano neveznim molekulskim orbitalama ne igraju znatnu ulogu u stvaranju hemijske veze. Medjutim, u okviru Hückelove teorije dokazuje se da su konjugovani ugljovodonici koji poseduju nevezne molekulske orbitale izuzetno nestabilni i reaktivni. U razloge ove pojave ovde ne možemo da ulazimo.

Za teoriju konjugovanih jedinjenja veoma je važno da se ustanovi koji sistemi imaju nevezne molekulske orbitale. Jasno je da se broj neveznih orbitala nekog konjugovanog ugljovodonika podudara sa brojem nula u spektru odgovarajućeg Hückelovog grafa. Budući da je $\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$, zaključujemo da u spektru grafa postoje nule ako i samo ako je $\det A = 0$.

Opšte rešenje problema nula u spektru grafa nije poznato, ali je dobijeno mnogo parcijalnih rezultata. Navešćemo, ilustracije radi, dva stava [27].

<u>Teorema 4</u>. Neka u grafu G postoji čvor v_r stepena jedan i neka je on susedan čvoru v_s. Tada grafovi G i $G - v_r - v_s$ imaju isti broj nula u spektru.



sl. 4

<u>Dokaz</u>. Ako je c sopstveni vektor matrice susedstva $A = \|a_{ij}\|$ sa sopstvenom vrednošću $\lambda = 0$, tada je zadovoljena jednačina $Ac = 0$. Neka je $c = \|c_1\ c_2\ \dots\ c_n\|^T$. Tada je matrična jednakost $Ac = 0$ ekvivalentna sistemu homogenih linearnih jednačina $\sum_{s=1}^{n} a_{rs} c_s = 0$ za $r = 1,2,\dots,n$. S obzirom da je $a_{rs} = 0$ ako čvorovi v_r i v_s nisu susedni i $a_{rs} = 1$ ako su čvorovi v_r i v_s susedni, dobijamo uslov

$$\sum_{s \to r} c_s = 0\ , \quad r = 1,2,\dots,n\ , \tag{13}$$

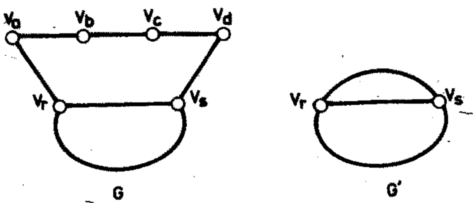
gde $\sum_{r \to s}$ označava sumiranje preko svih onih čvorova v_s koji su susedni sa čvorom v_r. Dakle, suma komponenti vektora c "oko" svakog čvora v_r mora biti nula. Broj linearno nezavisnih sopstvenih vektora sa sopstvenom vrednošću nula (tj. broj nula u spektru grafa) jednak je broju nezavisnih komponenti c_s u sistemu jednačina (13).

Neka je čvor v_s grafa G susedan sa čvorovima $v_a, v_b, \ldots, v_f$ i v_r. Neka je sistem jednačina (13) zadovoljen za graf $G - v_r - v_s$ tako da su čvorovima $v_a, v_b, \ldots, v_f$ pridružene komponente $c_a, c_b, \ldots, c_f$ vektora c. Kada se od grafa $G - v_r - v_s$ predje na graf G, sistemu (13) se moraju dodati dve nove jednačine: $c_s = 0$ i $c_a + c_b + \ldots + c_f + c_r = 0$. Zbog uslova $c_s = 0$, sve ranije jednačine koje su važile za graf $G - v_r - v_s$ ostaju neizmenjene. S obzirom da $c_s = 0$ i $c_r = -(c_a + c_b + \ldots + c_f)$ nisu nove nezavisno promenljive veličine, vidimo da je broj nezavisnih komponenti vektora c u grafovima G i $G - v_r - v_s$ isti.

Ovim je teorema 4 dokazana.

Preporučujemo čitaocu da sam dokaže sledeću posledicu teoreme 4. Neka graf G ima dva čvora v_r i v_p stepena jedan koja su susedna istom čvoru v_s. Tada u spektru grafa G ima bar jedna nula.

<u>Teorema 5</u>. Neka u grafu G postoje čvorovi v_r, v_a, v_b, v_c, v_d i v_s i grane $e_{ra}, e_{ab}, e_{bc}, e_{cd}$ i e_{ds} i neka su čvorovi v_a, v_b, v_c i v_d stepena dva. Neka se graf G' dobija odbacivanjem čvorova v_a, v_b, v_c i v_d iz grafa G i uvodjenjem nove grane e_{rs} izmedju čvorova v_r i v_s. Tada grafovi G i G' imaju isti broj nula u spektru.



sl. 5

<u>Dokaz</u>. Da bi sistem (13) bio zadovoljen za graf G, moraju (izmedju ostalog) da važe jednakosti

$$c_r + c_b = 0, \ c_a + c_c = 0, \ c_b + c_d = 0, \ c_c + c_s = 0.$$

Dakle, $c_a = c_s$ i $c_d = c_r$. Zbog toga se izbacivanjem čvorova v_a, v_b, v_c i v_d i spajanjem čvorova v_r i v_s ništa ne menja u broju nezavisno promenljivih komponenti vektora c.

Ovim je teorema dokazana.

Ukupna elektronska energija, koja se dobija sabiranjem pojedinačnih energija svih elektrona u molekulu, je druga važna molekulsko orbitalna karakteristika konjugovanih jedinjenja. Po pravilu je ova ukupna energija odredjena kao

$$E = 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} E_j = 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} (\alpha + \beta\lambda_j) = n\alpha + 2\beta\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_j ,$$

pri čemu smo pretpostavili da je $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. Jasno je da netrivijalni deo ovog izraza predstavlja suma $2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \lambda_j$, koju ćemo označiti sa $\mathcal{E}$.

Dokazaćemo sledeću jednostavnu ali veoma značajnu teoremu.

Teorema 6. Ako je $\lambda_{\frac{n}{2}} \geqslant 0 \geqslant \lambda_{\frac{n}{2}+1}$, onda je $\mathcal{E} = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|$.

Dokaz. Budući da Hückelov graf nema petlji, važi jednakost $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0$. To isto se može napisati i kao $\sum_{+} \lambda_j = -\sum_{-} \lambda_j$, pri čemu $\sum_{+}$ i $\sum_{-}$ označava sumiranje preko svih pozitivnih odnosno negativnih sopstvenih vrednosti λ_j. Ako je $\lambda_{\frac{n}{2}} \geqslant 0 \geqslant \lambda_{\frac{n}{2}+1}$, onda se $\mathcal{E}$ može prikazati kao $2\sum_{+} \lambda_j = \sum_{+} \lambda_j - \sum_{-} \lambda_j$ iz čega neposredno sleduje teorema 6.

U daljem izlaganju podrazumevaćemo da je ispunjen uslov $\lambda_{\frac{n}{2}} \geqslant 0 \geqslant \lambda_{\frac{n}{2}+1}$ i da važi teorema 6.

Prema teoremi 1 iz 3.1 veličina $\operatorname{tr} A^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2$ jednaka je broju puteva dužine 2 u grafu. S druge strane je, očigledno, broj ovih puteva jednak dvostrukom broju grana grafa pa se dolazi do formule

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 = 2m ,$$

gde je m broj grana u grafu.

Teorema 7 (McClelland [64]). Ako je $\lambda_{\frac{n}{2}} \geqslant 0 \geqslant \lambda_{\frac{n}{2}+1}$, onda je $\mathcal{E} \leqslant \sqrt{2mn}$.

Dokaz. Na osnovu odnosa izmedju srednje vrednosti i srednje kvadratne vrednosti za nenegativne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ važi nejednakost

$$\frac{1}{n} \sum_j x_j \leqslant \left(\frac{1}{n} \sum_j x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Primenjeno na spektar grafa to daje

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \leqslant \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

tj. $\frac{\mathcal{E}}{n} \leqslant \left(2\,\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ iz čega izlazi teorema 7.

Za veličinu $\mathcal{E}$ poznate su mnogobrojne druge relacije. Navodimo bez dokaza nejednakosti (14) i identitet (15) (videti [39], [42])

(14) $$2m - n(\det A_H)^{\frac{2}{n}} \leqslant 2mn - \mathcal{E}^2 \leqslant (n-1)(2m - n(\det A_H)^{\frac{2}{n}}),$$

(15) $$\mathcal{E} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-2} \log \left| \lambda^n P(G, \tfrac{i}{\lambda}) \right| d\lambda .$$

Jedan interesantni matematički objekat koji se pojavljuje u Hückelovoj teoriji je polinom sparivanja grafa G. On se definiše na sledeći način (videti [41]):

$$\alpha(G, \lambda) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k p(G,k)\, \lambda^{n-2k}.$$

Teoremu 3 i druge srodne rezultate možemo sada da preformulišemo tako da se odnose i na polinom sparivanja.

Teorema 8. Ako je graf W šuma, onda se njegov polinom sparivanja podudara sa karakterističnim polinomom, tj. $\alpha(W,\lambda) = P(W,\lambda)$.

Teorema 9. Ako je e_{rs} proizvoljna grana grafa G, izmedju čvorova v_r i v_s, tada je

$$\alpha(G,\lambda) = \alpha(G - e_{rs},\lambda) - \alpha(G - v_r - v_s,\lambda) .$$

Može da se dokaže i sledeća važna teorema.

Teorema 10. Za proizvoljni graf G sve nule polinoma sparivanja su realne.

Zanimljivo je da je polinom sparivanja grafa pored kvantne hemije našao primene i u hemijskoj termodinamici kao i u statističkoj fizici čvrsteg stanja.

12.4.4. Alternantni ugljovodonici i njihovi grafovi

U teorijskoj hemiji je važan pojam alternantnog ugljovodonika. Konjugovani ugljovodonik je alternantan ako se njegovi atomi mogu označiti sa dva simbola (recimo, zvezdicom i kružićem) tako da svaki atom označen zvezdicom ima za susede samo atome označene kružićem, a svaki atom označen kružićem ima za susede samo atome označene zvezdicom. U slučaju da takvo označavanje nije mogućno, ugljovodonik je nealternantan.

Proces označavanja grafa sa dva simbola, ekvivalentan je bojenju grafa (sa dve boje), što je opisano u 1.1. Stoga alternantni (nealternantni) ugljovodonici imaju bihromatske (nebihromatske) grafove.

U odeljku 7.4 dokazano je da su spektri bihromatskih grafova simetrični u odnosu na tačku 0.

U Hückelovoj teoriji ovaj rezultat se interpretira tako da su energetski nivoi molekulskih orbitala alternantnih konjugovanih ugljovodonika simetrično rasporedjeni oko energije $E_0 = \alpha$. Dakle, orbitala sa energijom $E = \alpha + \beta\lambda$ ima svoj "par" u orbitali čija je energija $E = \alpha - \beta\lambda$. To je poznata "teorema parova" koja ima niz veoma važnih posledica u kvantnoj hemiji. Na primer, iz teoreme parova sleduje da je kod bihromatskih grafova (sa parnim brojem čvorova) uvek zadovoljen uslov $\lambda_{\frac{n}{2}} \geqslant 0 \geqslant \lambda_{\frac{n}{2}+1}$.

13. PRIMENE U FIZICI

Od mnogobrojnih primena teorije matrica u fizici u ovom poglavlju su obradjene uglavnom one primene kod kojih dolazi do izražaja kombinatorni pristup teoriji matrica.

13.1. Treperenje membrane

Pri aproksimativnom numeričkom rešavanju mnogih parcijalnih diferencijalnih jednačina pojavljuju se slabo popunjene matrice a, izmedju ostalog, spektri grafova pridruženih tim matricama igraju značajnu ulogu.

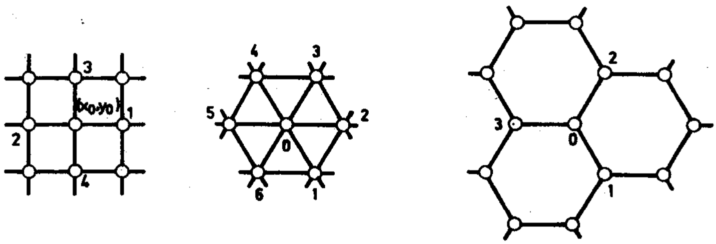
Posmatrajmo, na primer, parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \lambda z = 0 \tag{1}$$

(ili $\Delta z + \lambda z = 0$, gde je $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ Laplaceov operator), gde za nepoznatu funkciju $z = z(x,y)$ važi granični uslov $z(x,y) = 0$ za tačke (x,y) koje leže na jednoj prostoj zatvorenoj liniji Γ u xy-ravni. Poznato je da jednačina (1) ima rešenja samo za jedan beskonačni niz $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$ vrednosti λ koje se nazivaju <u>sopstvenim vrednostima</u> jednačine. Niz sopstvenih vrednosti se naziva <u>spektar</u> jednačine i svakoj sopstvenoj vrednosti odgovara jedan skup rešenja jednačine (1). Rešenja jednačine su njene <u>sopstvene funkcije</u>.

Pri aproksimativnom odredjivanju funkcije z posmatraju se njene vrednosti za skup tačaka (x_i,y_i) koje obrazuju u xy-ravni mrežu (kvadratnu, trougaonu, heksagonalnu). Ovoj mreži se na prirodan način može pridružiti jedan (beskonačni) graf. Tačke (x_i,y_i) su čvorovi grafa a grane povezuju čvorove koji se nalaze na najmanjem mogućnom (pozitivnom) rastojanju. Tačke (odnosno, čvorovi) koji leže u unutrašnjosti krive Γ nazivaju se unutrašnje tačke (čvorovi) dok se ostale tačke (čvorovi) mreže (tj. odgovarajućeg grafa) nazivaju spoljašnjim. Neka je $z_i = z(x_i,y_i)$. Zbog graničnog uslova možemo uzeti da je $z_i = 0$ za sve spoljašnje tačke.

U slučaju kvadratne mreže (videti sl. 1)



sl. 1

neka je, za moment, $z_o = z(x_o,y_o)$, gde je (x_o,y_o) fiksirana tačka mreže, i neka su $z_1 = z(x_o + h,y_o)$, $z_2 = z(x_o - h,y_o)$, $z_3 = z(x_o,y_o + h)$, $z_4 = z(x_o,y_o - h)$ vrednosti funkcije z za susedne tačke. Ovde je pretpostavljeno da tačke mreže leže na pravama koje su paralelne koordinatnim osama i da je rastojanje izmedju susednih tačaka jednako h. Vrednost izraza $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ u tački (x_o,y_o) može se, kao što je uobičajeno u numeričkoj analizi, aproksimirati pomoću izraza

(2) $$\frac{1}{h^2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - 4z_o) .$$

Jednačina (1) postaje

(3) $$\frac{1}{h^2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - 4z_o) + \lambda z_o = 0 ,$$

tj.

(4) $$(4 - \lambda h^2)z_o = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 .$$

Neka su sada unutrašnje tačke označene sa 1,2,...,n. Stavljajući $\nu = 4 - \lambda h^2$ i formirajući jednačine oblika (4) za svaku unutrašnju tačku (x_i,y_i), $i = 1,2,\ldots,n$, mreže, dobijamo sistem linearnih algebarskih jednačina

(5) $$\nu z_i = \sum_{j \cdot i} z_j \ , \quad i = 1,2,\ldots,n \ ,$$

gde se sumiranje vrši po svim indeksima j koji odgovaraju unutrašnjim tačkama (x_j,y_j) koje su susedne sa tačkom (x_i,y_i). Nije potrebno da se u sumi (5) uključe spoljašnje tačke jer je vrednost funkcije z jednaka nuli za ove tačke. Neka je G podgraf grafa mreže indukovan unutrašnjim čvorovima. Ako ν interpretiramo kao sopstvenu vrednost grafa G a $\|z_1,z_2,\ldots,z_n\|^T$ kao odgovarajući sopstveni vektor, vidimo da (5) upravo definiše sopstvene vrednosti za G. Graf G se zove <u>graf membrane</u>.

Ako su ν_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ sopstvene vrednosti grafa G, približne vrednosti sopstvenih vrednosti jednačine (1) date su pomoću $\lambda_i^* = \frac{4 - \nu_i}{h^2}$. Odgovarajući sopstveni vektor približno odredjuje jedno rešenje jednačine (1). Pri tome se može desiti da vrednosti $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*$ dobro aproksimiraju ne prve sopstvene vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ jednačine (1) nego neke druge iz beskonačnog niza sopstvenih vrednosti jednačine (1).

Matrica susedstva A grafa G je slabo popunjena matrica. Pri proizvoljno velikom n, broj elemenata koji su različiti od nule u proizvoljnoj vrsti ili koloni ne premašuje stepen čvorova u grafu mreže koji iznosi 4, 6 i 3, redom za kvadratnu, trougaonu i heksagonalnu mrežu. Stoga se ovakve matrice, u principu, mogu tretirati sredstvima opisanim u poglavlju 9. Digrafovi G_A i G^A se poklapaju jer je A simetrična matrica a njihova neorijentisana modifikacija je upravo graf membrane G.

Za trougaonu i heksagonalnu mrežu (videti sl. 1) koriste se redom sledeći aproksimativni izrazi za Δz u tački (x_o,y_o):

$$\frac{2}{3h^2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 - 6z_o) \ ,$$

$$\frac{4}{3h^2}(z_1 + z_2 + z_3 - 3z_o) \ ,$$

gde su opet $z_1,z_2,\ldots,z_6$ vrednosti funkcije z u tačkama susednim tački (x_o,y_o). U oba slučaja se opet dobija sistem (5), samo su sada veličine λ_i^* i ν_i povezane redom sledećim jednakostima

$$\lambda_i^* = \frac{2}{3}\,\frac{6 - \nu_i}{h^2}\,, \quad \lambda_i^* = \frac{4}{3}\,\frac{3 - \nu_i}{h^2}\,.$$

Opisana procedura za približno rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina se često primenjuje prilikom rešavanja nekih problema iz fizike i u odgovarajućim tehničkim primenama. Stoga je teorija spektara grafova korisna u praktičnim izračunavanjima ove vrste. Ovi problemi su i poslužili kao motivacija za uvodjenje i proučavanje spektara grafova.

Najinteresantniji problem ove vrste je svakako problem treperenja membrane. Postoje i neki drugi problemi kao što je, na primer, problem treperenja vazduha u prostoru odredjenog oblika. Mi ćemo opisati problem treperenja membrane.

Ako se membrana koja treperi Ω učvrsti duž njenog ruba Γ, njen pomeraj $F(x,y,t)$ u pravcu koji je normalan na njenu ravan je funkcija koordinata x,y i vremena t i zadovoljava talasnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right), \tag{6}$$

gde je c konstanta koja zavisi od fizičkih osobina membrane i od specifične sile (napona) kojoj je membrana izložena.

Rešenja jednačine (6) oblika $F(x,y,t) = z(x,y)e^{i\omega t}$ su od posebnog interesa. Ako se ovaj izraz zameni u (6) dobija se

$$-\omega^2 z(x,y) = c^2\left(\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}\right). \tag{7}$$

Smenom $\lambda = \frac{\omega^2}{c^2}$ jednačina (7) se svodi na jednačinu (1).

Predstavljanje membrane grafom nije matematička apstrakcija, već ima odredjeno fizičko značenje. Parcijalna diferencijalna jednačina (1) opisuje treperenje membrane, pri čemu se membrana prikazuje kontinualnim modelom. Ako se membrana prikaže diskretnim modelom, koji ćemo sada opisati, dolazi se do sistema (5) koji je dobijen prilikom aproksimativnog rešavanja jednačine (1).

Prema diskretnom modelu membrana se sastoji od materijalnih tačaka koje u stanju ravnoteže leže u čvorovima grafa jedne pravilne mreže (opet se obično posmatraju kvadratna, trougaona i heksagonalna mreža) u ravni. Svaka materijalna tačka deluje na susedne tačke elastičnim silama. Pretpostavlja se da sve materijalne tačke imaju istu masu i da su elastične sile istog intenziteta za svaki par susednih tačaka. Ako su $z_i(t)$ i $z_j(t)$ pomeraji susednih materijalnih tačaka i i j u trenutku t, elastična sila koja nastoji da smanji relativni pomeraj između te dve tačke je

$$F_{ij} = -K(z_i(t) - z_j(t)) ,$$

gde je K konstanta koja karakteriše elastične osobine membrane.

Jednačina kretanja k-te materijalne tačke je sada data pomoću

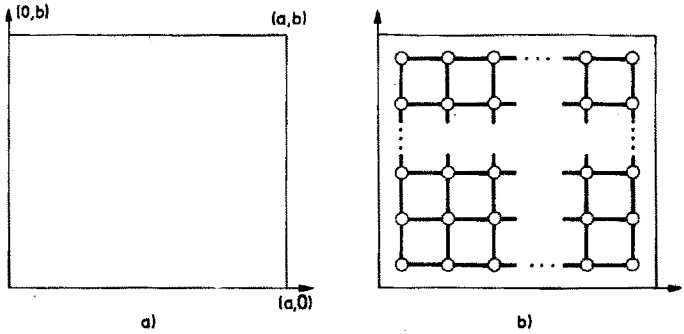
$$m \frac{d^2 z_k(t)}{dt^2} = -K \sum_{j \cdot k} (z_k(t) - z_j(t)) , \tag{8}$$

gde je m masa materijalnih tačaka i gde se sumiranje vrši po svim susedima j materijalne tačke k. Za čvor j grafa mreže u kojem se ne nalazi materijalna tačka usvaja se $z_j(t) = 0$. Slično ranijem, takvi čvorovi se mogu zvati spoljašnjim čvorovima. Opet se mogu posmatrati harmonijske oscilacije i uzeti $z_k(t) = z_k e^{i\omega t}$, (gde je $i^2 = -1$). Ako se ovaj izraz unese u (8) za svaku materijalnu tačku k, dobija se opet sistem (5). Dakle, rešenje problema pomoću diskretnog modela predstavlja aproksimativno rešenje problema pomoću kontinualnog modela. (Naravno, u nekim slučajevima može se stvar posmatrati i obrnuto; kontinualni model može da da aproksimativno rešenje za diskretni model.)

Navedeni primer je od principijelnog značaja. Kada se problemi kontinualne matematike rešavaju pomoću digitalnih elektronskih računara, oni se moraju aproksimirati odgovarajućim diskretnim modelima jer su digitalni računari naprave sa diskretnim dejstvom. (Oni menjaju svoje stanje u diskretnim trenucima vremena a unutrašnje stanje računara je odredjeno stanjem konačnog broja ćelija računara, pri čemu je broj mogućnih stanja svake ćelije konačan.) Zbog toga numerička matematika predstavlja vezu i svojevrsno objedinjenje kontinualne i diskretne matematike.

<u>Primer 1</u>. Posmatrajmo parcijalnu diferencijalnu jednačinu (1) uz granični uslov: $z(x,y) = 0$ za tačke (x,y) na stranama

pravougaonika čija su temena u tačkama (0,0), (a,0), (0,b), (a,b) (videti sl. 2a).



sl. 2

Iz teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina je poznato da su sopstvene vrednosti λ_{ij}, $i,j = 1,2,\ldots$, ovog problema odredjene sa

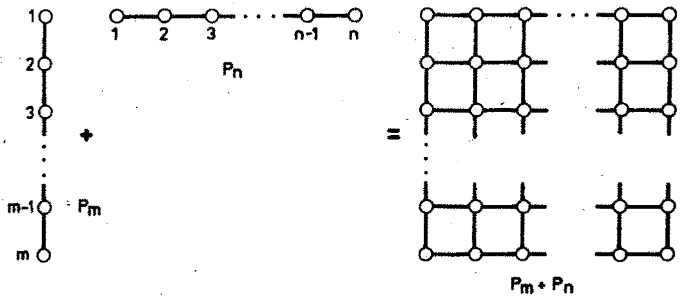
$$(9) \qquad \lambda_{ij} = \pi^2\left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}\right) .$$

Sopstvena funkcija z_{ij} za ovu sopstvenu vrednost je data formulom

$$(10) \qquad z_{ij} = A \sin \frac{i\pi}{a} x \sin \frac{j\pi}{b} y ,$$

gde je A proizvoljna konstanta. Ove činjenice se neposredno proveravaju zamenom u jednčinu (1).

Posmatrajmo kvadratnu rešetku čije su tačke (ph,qh) (p, q celi brojevi). Unutrašnje tačke za posmatrani problem obrazuju graf sa sl. 2b. Ako je $\left[\frac{a}{h}\right] = m$, $\left[\frac{b}{h}\right] = n$, graf ima $m \times n$ čvorova a to je, u stvari, graf $P_m + P_n$ koji ćemo obeležiti sa $G_{m,n}$. Potsetimo se da je zbir grafova definisan u 11.5 kao specijalni slučaj NEPS-a. Put P_n sa n čvorova definisan je u 12.4. 2. ali je on proučavan i u primeru 10 iz odeljka 7.7, gde je i predstavljen na sl. 2. Konstrukcija grafa $G_{m,n}$ na osnovu grafova P_m i P_n je prikazana na sl. 3.



sl. 3

Ako je A matrica susedstva grafa G sa m čvorova i ako je B matrica susedstva grafa H sa n čvorova, lako se zaključuje da je $A \otimes I_n + I_m \otimes B$ matrica susedstva grafa G + H. Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sopstvene vrednosti grafa G i ako su $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sopstvene vrednosti grafa H, onda su $\lambda_i + \mu_j$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ sopstvene vrednosti grafa G + H. Ovo tvrdjenje je specijalni slučaj teoreme 1 iz 11.5 a može se proveriti i na sledeći način. Neka je x_i sopstveni vektor za λ_i i neka je y_j sopstveni vektor za μ_j. Tada je

$$(A \otimes I_n + I_m \otimes B)(x_i \otimes y_j) = (A \otimes I_n)(x_i \otimes y_j) + (I_m \otimes B)(x_i \otimes y_j)$$

$$= (Ax_i) \otimes (I_n y_j) + (I_m x_i) \otimes (By_j) = (\lambda_i x_i) \otimes y_j + x_i \otimes (\mu_j y_j)$$

$$= (\lambda_i + \mu_j)(x_i \otimes y_j) .$$

Odavde se vidi da je $\lambda_i + \mu_j$ sopstvena vrednost grafa G + H sa sopstvenim vektorom $x_i \otimes y_j$.

Spektar lanca P_m naveden je u primeru 11 iz 7.7 i u 12.4.2, odakle vidimo da je $\lambda_i = 2 \cos \frac{\pi}{m+1} i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, pri čemu su koordinate sopstvenog vektora x_i jednake $\sin \frac{\pi}{m+1} ip$, $p = 1, 2, \ldots, m$. Stoga su sopstvene vrednosti ν_{ij} grafa $G_{m,n} = P_m + P_n$ jednake

$$\nu_{ij} = 2 \cos \frac{\pi}{m+1} i + 2 \cos \frac{\pi}{n+1} j \quad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n) \tag{11}$$

a odgovarajući sopstveni vektor $x_i \otimes y_j$ ima koordinate

$$A \sin \frac{\pi}{m+1} ip \sin \frac{\pi}{n+1} jq \quad (p = 1,2,\ldots,m;\ q = 1,2,\ldots,n), \tag{12}$$

gde je A proizvoljna konstanta.

Na osnovu (11) odredjuju se približne vrednosti λ^*_{ij} sopstvenih vrednosti λ_{ij} jednačine (1):

$$\lambda^*_{ij} = \frac{4 - \nu_{ij}}{h^2} = \frac{2}{h^2}(1 - \cos\frac{\pi}{m+1}i + 1 - \cos\frac{\pi}{n+1}j)$$

$$= \frac{4}{h^2}(\sin^2\frac{\pi}{2(m+1)}i + \sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}j) .$$

Ako su, pri fiksiranim i i j, brojevi m i n dovoljno veliki, argumenti sinusnih funkcija su mali tako da se pomoću približne formule $\sin x \approx x$ dobija

$$\lambda^*_{ij} \approx \frac{4}{h^2}\left(\frac{\pi^2 i^2}{4(m+1)^2} + \frac{\pi^2 j^2}{4(n+1)^2}\right) = \pi^2\left(\frac{i^2}{((m+1)h)^2} + \frac{j^2}{((n+1)h)^2}\right)$$

$$\approx \pi^2\left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}\right) = \lambda_{ij} .$$

Dakle, λ^*_{ij} dobro aproksimira λ_{ij} ako je rastojanje h susednih tačaka mreže dovoljno malo.

Na sličan način se uvidja da (12) dobro aproksimira funkciju (10). Naime, koordinata (12) sopstvenog vektora odgovara čvoru grafa koji reprezentuje tačku $(x,y) = (ph,qh)$. Zbog toga izraz (12) postaje

$$A \sin\frac{i\pi x}{(m+1)h} \sin\frac{j\pi y}{(n+1)h} \approx A \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{j\pi y}{b} .$$

Komplikovaniji primeri mogu se naći u [100] .

13.2. Problem dimera

Spektri grafova ili spektri izvesnih matrica koje su u uskoj vezi sa matricama susedstva pojavljuju se u velikom broju problema statističke fizike [55], [74], [78].

Problem dimerâ, o kome je reč u ovom odeljku, odnosi se na istraživanje termodinamičkih osobina sistema dvoatomskih molekula (tzv. dimerâ) koji se adsorbuju na površini kristala. Najpogodnija mesta za adsorpciju atoma na površini kristala obrazuju dvodimenzionalnu mrežu (koja je slična mrežama razmatranim u prethodnom odeljku). Jedan dimer može da zauzme dve susedne tačke mreže. Potrebno je odrediti broj načina na koje dimeri mogu biti postavljeni na mrežu tako da se ne preklapaju i da su sve tačke mreže pokrivene dimerima.

Problem dimerâ na kvadratnoj mreži je ekvivalentan sa problemom odredjivanja broja načina da se šahovska tabla dimenzija n x n (n paran broj) pokrije sa $\frac{1}{2}n^2$ domina, tako da svaka domina pokriva dva susedna polja table i da sva polja table budu pokrivena.

Adsorpcionoj površini se može pridružiti jedan graf. Čvorovi grafa predstavljaju tačke koje su najpogodnije za adsorpciju atoma. Dva čvora grafa su susedna ako i samo ako odgovarajuće tačke mogu biti pokrivene jednim dimerom. Na taj način položaj dimerâ na površini odredjuje jedan 1-faktor u odgovarajućem grafu (i obrnuto). Dakle, problem dimerâ je sveden na ovaj način na problem odredjivanja broja 1-faktora u izvesnom grafu.

Pošto su svi grafovi koji se razmatraju bihromatski, mi možemo neposredno primeniti formulu (2) iz 10.2. Medjutim, kao što je naglašeno u poglavlju 10, izračunavanje permanenta nije tako jednostavno kao izračunavanje determinante te zbog toga nastaju teškoće.

Razvijene su različite tehnike za savladjivanje ovih teškoća. Većina njih je bazirana na sledećoj ideji. Pomnožimo elemente matrice susedstva $A = \|a_{ij}\|_1^n$ grafa koji se posmatra pogodno odabranim brojevima α_{ij}, tako da se dobije nova matrica $A^* = \|\alpha_{ij}a_{ij}\|$. Dokazano je da se brojevi α_{ij} mogu odabrati tako da važi formula per A = det A^*. Jedan takav rezultat je opisan u 10.1. U 10.2 je opisana klasa grafova za koju se permanent matrice susedstva neposredno svodi ili je identičan sa determinantom. Efekat množenja elemenata matrice A brojevima α_{ij} je obično takav da neki elementi matrice A samo menjaju znak. Za planarne grafove A se na ovaj način može pretvoriti u koso-simetričnu matricu A tako da bude per A = det A^* [55].

Za ilustraciju ove tehnike odredićemo broj rasporeda dimerâ (tj. 1-faktora) za kvadratnu mrežu, tj. za graf $G_{m,n} = P_m + P_n$ opisan u prethodnom odeljku, koristeći se jednom od mogućnih varijanata za transformisanje permanenta u determinantu.

Posmatrajmo graf $G_{m,n}$ kao što je dat na sl. 3 iz 13.1. Prema situaciji na slici $G_{m,n}$ sadrži horizontalne i vertikalne grane. Neka je $H_{m,n}$ digraf dobijen od $G_{m,n}$ zamenom svake njegove grane parom odgovarajućih orijentisanih grana medjusobno suprotnih orijentacija. Orijentisane grane digrafa $H_{m,n}$ su takodje horizontalne ili vertikalne. Neka je $A_{m,n}$ matrica susedstva grafa $G_{m,n}$, odnosno, digrafa $H_{m,n}$. Na osnovu (2) iz 10.1 važe formule

$$k^2 = \operatorname{per} A_{m,n} = \sum_{F\in\mathfrak{F}} 1 , \quad \det A_{m,n} = \sum_{F\in\mathfrak{F}} (-1)^{p(F)},$$

gde je $\mathfrak{F}$ skup faktora F digrafa $H_{m,n}$.

Bez dokaza navodimo sledeću lemu.

Lema 1. Za svaki faktor $F \in \mathfrak{F}$ važi formula

$$(-1)^{p(F)} = i^{h(F)},$$

gde je $i^2 = -1$ a $h(F)$ označava broj horizontalnih grana faktora F.

Sada se lako dokazuje sledeća teorema.

Teorema 1. Broj 1-faktora k grafa $G_{m,n}$ je odredjen pomoću

$$k^2 = \det(A_m \otimes I_n + iI_m \otimes A_n)$$

gde A_s označava matricu susedstva puta P_s sa s čvorova.

Dokaz. Prema primeru 1 iz 13.1 matrica susedstva grafa $G_{m,n}$ je data izrazom $A_{m,n} = A_m \otimes I_n + I_m \otimes A_n$. Jedinice iz $A_m \otimes I_n$ odgovaraju vertikalnim a jedinice iz $I_m \otimes A_n$ horizontalnim granama. Matrica

$$A^*_{m,n} = A_m \otimes I_n + iI_m \otimes A_n$$

se razlikuje od $A_{m,n}$ po tome što su jedinice koje odgovaraju horizontalnim granama pomnožene sa i. Prema lemi 1 dobija se $\operatorname{per} A_{m,n} = \det A^*_{m,n}$, čime je teorema dokazana.

Kao što je ranije objašnjeno, sopstvene vrednosti matrice $A_{m,n}$ su

$$2 \cos \frac{\pi}{m+1}j + 2 \cos \frac{\pi}{n+1}p \quad (j = 1,2,\ldots,m;\ p = 1,2,\ldots,n).$$

Lako se uvidja da su sopstvene vrednosti matrice $A^*_{m,n}$ date pomoću

$$2\cos\frac{\pi}{m+1}j + 2i\cos\frac{\pi}{n+1}p \quad (j = 1,2,\ldots,m;\ p = 1,2,\ldots,n).$$

Kako je determinanta matrice jednaka proizvodu svojih sopstvenih vrednosti dobijamo

$$k^2 = \prod_{j=1}^{m}\prod_{p=1}^{n}\left(2\cos\frac{\pi}{m+1}j + 2i\cos\frac{\pi}{n+1}p\right).$$

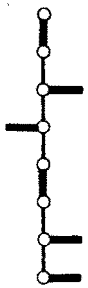
Ako su m i n neparni, očigledno je k = 0. Neka je m parno. Tada je

$$k^2 = 2^{mn}\prod_{j=1}^{\frac{m}{2}}\prod_{p=1}^{n}\left(\cos^2\frac{\pi}{m+1}j + \cos^2\frac{\pi}{n+1}p\right).$$

Za kvadratnu $n \times n$ mrežu sa $n = 2,4,6,8$ dobijamo redom $k = 2,\ 36,\ 6728,\ 12988816$. Poslednji broj se može napisati u obliku $2^4 901^2$ i to je broj načina da se šahovska tabla uobičajenih dimenzija 8×8 pokrije sa 32 domine.

Može se pokazati da važi asimptotska relacija $k \sim e^{\frac{mn}{\pi}G}$ $(m \to +\infty,\ n \to +\infty)$, gde je $G = 0{,}91597$ Catalanova konstanta.

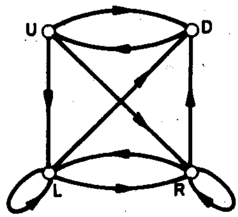
Postoji i sasvim drugačiji pristup problemu dimerâ; to je tzv. metod prenosne matrice.



sl. 1

Položaj dimera na kvadratnoj mreži može da se odredi navodjenjem položaja dimera kod svakog čvora, tj. "na gore", "na dole", "nalevo", "nadesno". Koristićemo oznake U,D,L,R redom za ove slučajeve (prema engleskom: up, down, to the left, to the right). Tada se situacija u jednoj koloni čvorova grafa $G_{m,n}$ može prikazati m-torkom simbola U,D,L,R. Na primer, kolona od 8 čvorova, koji su prikazani dimerima sa sl. 1 može se prikazati 8-orkom (D,U,R,L,D,U,R,R).

Primetimo da je broj m-torki koje predstavljaju sve moguće kolone čvorova u rasporedima dimera jednak broju puteva dužine m-1 u grafu sa sl. 2 koji polaze iz čvorova D,L,R a završavaju se u čvorovima U,L,R. Takve m-torke se nazivaju dozvoljene m-torke.



sl. 2

Posmatrajmo sada graf F čiji su čvorovi sve dozvoljene m-torke simbola U,D,L,R i čije su grane definisane na sledeći način. Za dve dozvoljene m-torke x i y vodi orijentisana grana iz x u y ako i samo ako m-torka x ima simbole R tačno na onim pozicijama na kojima m-torka y ima simbole L. Na taj način, ako iz x vodi grana u y, kolona čvorova predstavljena sa y može biti smeštena neposredno desno od kolone predstavljene sa x u jednom razmeštaju dimerâ na mreži odredjenoj sa $G_{m,n}$.

Neka S (odnosno Q) označava skup m-torki koje ne sadrže simbole L (odnosno, simbole R). Svaka m-torka iz S može biti prva (računato sleva) u jednom rasporedu dimera na grafu $G_{m,n}$. Slično tome, Q je skup svih završnih m-torki u rasporedima dimerâ.

Lako je videti da je broj rasporeda dimerâ na grafu $G_{m,n}$ jednak broju puteva dužine n-1 u grafu F koji polaze iz nekog čvora iz S a završavaju se u nekom od čvorova skupa Q.

Ako umesto grafa $G_{m,n}$ (= $P_m + P_n$) posmatramo graf $P_m + C_n$, tada je broj rasporeda dimera jednak broju zatvorenih puteva dužine n u grafu F.

Matrica susedstva grafa F naziva se prenosna matrica (transfer matrix) T za posmatrani problem dimerâ. Odredjivanje ove matrice je dosta složeno (videti, na primer, [78], [26]). Broj puteva grafa se izražava preko sopstvenih vrednosti grafa (videti 7.7). Za velike dužine puteva dominantan je sabirak koji potiče od najveće sopstvene vrednosti. Ako je r najveća (realna) sopstvena vrednost prenosne matrice T broj rasporeda dimera k je asimptotski odredjen sledećom formulom

$$k \sim cr^n \ (n \to +\infty),$$

gde je c pozitivna konstanta.

Za prebrojavanje rasporeda dimerâ koristi se i pfafijan (videti, na primer, [55]).

I neki drugi problemi teorijske fizike mogu se svesti na prebrojâvanje 1-faktora (tj. rasporeda dimerâ). Najpoznatiji takav problem je čuveni Isingov problem iz teorije feromagnetizma (videti, na primer, [55], [74]).

Problem puteva u grafu nije od interesa u fizici samo u vezi sa problemom odredjivanja broja 1-faktora. Brojevi puteva različitih osobina u grafovima mreža pojavljuju se u mnogim drugim problemima; pomenimo ovde samo problem slučajnog kretanja po mreži i problem elementarnih puteva (videti [55], [74], [78]).

13.3. Matrične reprezentacije grupa i neke njihove primene[1)]

U ovom odeljku je ukratko izložena teorija matričnih reprezentacija grupa, pri čemu su mnogi dokazi izostavljeni. Teorija reprezentacija ima višestruke primene u fizici, hemiji, teoriji konstrukcija itd. U daljem tekstu nagoveštene su neke od ovih primena.

13.3.1. Reprezentacije konačnih grupa

Definicija 1. Neka je data grupa $G = (\{g_1, \dots, g_n\}, *)$. Svaki homomorfizam $\Gamma : g \mapsto \Gamma(g)$, $g \in G$, gde je $(\{\Gamma(g_1), \dots, \Gamma(g_n)\}, \cdot)$ neka multiplikativna grupa nesingularnih matrica, nazivamo reprezentacijom grupe G.

Pod reprezentacijom ćemo često podrazumevati i samu grupu matrica o kojoj se govori u definiciji 1 i tu grupu ćemo takodje označavati sa Γ. Operaciju grupe G obeležavaćemo u daljem tekstu sa $\cdot$ a često ćemo ovaj simbol izostavljati.

---

1) Ovaj odeljak je izradio M.Merkle na osnovu svog diplomskog rada "Faktorizacija karakterističnog polinoma grafa" odbranjenog na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu 1977 godine.

Red matrica, elemenata grupe Γ, nazivamo <u>dimenzijom</u> reprezentacije Γ.

<u>Primer 1</u>. Za grupu G definišimo preslikavanje Γ pomoću $\Gamma(g_i) = 1$, za svako $g_i \in G$. Kako je $1 = \Gamma(g_i \cdot g_j) = \Gamma(g_i)\cdot\Gamma(g_j)$, za svako $i,j = 1,\dots,n$, sleduje da je Γ reprezentacija grupe G. Ta reprezentacija se naziva <u>trivijalna</u>. Svaka grupa poseduje trivijalnu reprezentaciju.

<u>Teorema 1</u>. Neka je data grupa G. Definišimo preslikavanje $\Gamma: g \mapsto \Gamma(g), g \in G$ pomoću

$$\text{(1)} \qquad \Gamma_{ij}(g_k) = \begin{cases} 0, & g_i \neq g_k \cdot g_j \\ 1, & g_i = g_k \cdot g_j \end{cases}, \quad i,j,k = 1,\dots,n,$$

gde je $\Gamma_{ij}(g_k)$ element matrice $\Gamma(g_k)$. Preslikavanje Γ definisano sa (1) je reprezentacija grupe G.

Dokaz ove teoreme izvodi se pomoću definicije 1 korišćenjem pravila za množenje matrica.

Reprezentacija Γ definisana pomoću (1) se naziva <u>regularna</u>.

<u>Definicija 2</u>. Neka su Γ_1 i Γ_2 reprezentacije grupe G. Ako postoji nesingularna matrica S takva da je $\Gamma_2(g) = S\Gamma_1(g)S^{-1}$ za svako $g \in G$, tada kažemo da su reprezentacije Γ_1 i Γ_2 ekvivalentne.

Matrice $\Gamma_1(g)$ i $\Gamma_2(g)$ su slične.

<u>Teorema 2</u>. Proizvoljna reprezentacija Γ konačne grupe G je ekvivalentna sa jednom reprezentacijom T čiji su elementi unitarne matrice.

Reprezentaciju T nazivamo <u>unitarnom</u> reprezentacijom.

<u>Dokaz</u>. Definišimo simetričnu matricu H pomoću

$$H = \sum_{g \in G} \Gamma(g)\cdot\Gamma^*(g) ,$$

gde X^* označava konjugovano-transponovanu matricu matrice X. Na osnovu primera 11 iz 7.7, postoji unitarna matrica U takva da je $U^{-1}HU = D$, pri čemu je D dijagonalna matrica, čiji su dijagonalni elementi jednaki sopstvenim vrednostima matrice H. Dalje se dobija

$$D = U^{-1}\sum_{g\in G}\Gamma(g)\cdot\Gamma^*(g)\cdot U = \sum_{g\in G}U^{-1}\cdot\Gamma(g)\cdot U\cdot U^{-1}\cdot\Gamma^*(g)\cdot U =$$

$$= \sum_{g\in G}\Gamma'(g)\cdot\Gamma'^*(g) ,$$

gde je $\Gamma'(g) = U^{-1}\Gamma(g)U$. Zatim važe jednakosti

$$D_{kk} = d_k = \sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n}\Gamma'_{kj}(g)\,\bar{\Gamma}'_{kj}(g) =$$

$$= \sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n}|\Gamma'_{kj}(g)|^2, \quad k = 1,\ldots,n,$$

gde je n dimenzija reprezentacije Γ. Ovde i u daljem tekstu ovog odeljka element matrice X na mestu (i, j) označen je sa X_{ij}.

Kako je $|\Gamma'_{kj}(g)|^2 \geqslant 0$, važi nejednakost $D_{kk} \geqslant 0$. Medjutim, $D_{kk} \neq 0$, jer je u suprotnom slučaju det $\Gamma(g) = 0$ za svako $g \in G$, a to je u suprotnosti sa činjenicom da je Γ reprezentacija grupe. Stoga je $D_{kk} > 0$. Iz toga sleduje da je $(D^p)_{kk} = (D_{kk})^p$, za svaki realan broj p.

Definišimo matricu V pomoću jednakosti $V = UD^{\frac{1}{2}}$. Tada je $T(g) = V^{-1}\Gamma(g)V = D^{-\frac{1}{2}}\Gamma'(g)D^{\frac{1}{2}}$ unitarna matrica za svako $g \in G$, što sleduje iz sledećih jednakosti

$$T(g)\cdot T^*(g) = D^{-\frac{1}{2}}\Gamma'(g)D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}\Gamma'^*(g)D^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}}\cdot\Gamma'(g)D\,\Gamma'^*(g)D^{-\frac{1}{2}}$$

$$= D^{-\frac{1}{2}}\Gamma'(g)\sum_{a\in G}\Gamma'(a)\cdot\Gamma'^*(a)\cdot\Gamma'^*(g)D^{-\frac{1}{2}}$$

$$= D^{-\frac{1}{2}}\sum_{a\in G}\Gamma'(g\cdot a)\,\Gamma'^*(a\cdot g)D^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}}DD^{-\frac{1}{2}} = I ,$$

pri čemu je korišćeno da za pozitivno definitnu dijagonalnu matricu D važi $D^* = D$.

Ovim je dokaz završen.

Prema dokazanoj teoremi, u svakoj klasi medjusobno ekvivalentnih reprezentacija postoji jedna unitarna. To nam daje mogućnost da baš tu unitarnu reprezentaciju izdvojimo kao predstavnika klase kojoj pripada. Na taj način se problem svodi na razmatranje uže strukture, koja je bogatija osobinama.

Za proizvoljan linearan operator $\mathfrak{A}$ u linearnom vektorskom prostoru V čija je baza B, jednoznačno je odredjena matrica A, takva da je $\mathfrak{A}x = Ax$, gde je $x \in V$. Matrica i data baza jednoznačno odredjuju jedan linearni operator. S obzirom na ovu korespondenciju koristićemo iste oznake za operator i njemu odgovarajuću matricu. Primetimo da, pri nesingularnoj transformaciji baze $B_2 = CB_1$ matrica A_1 dobija oblik $A_2 = CA_1C^{-1}$, pri čemu su A_1 i A_2 matrice istog operatora u bazama B_1 i B_2. Iz toga sleduje da se ekvivalentne reprezentacije dobijaju jedna iz druge pri promeni baza odgovarajućih prostora.

Definicija 3. Skup S linearnih unitarnih operatora unitarnog vektorskog prostora V je potpuno razloživ ako u V postoji neki pravi potprostor V' koji je invarijantan prema svakom operatoru iz S.

Izborom pogodne baze postiže se da matrice svih operatora iz S imaju oblik

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Definicija 4. Skup S unitarnih matrica je potpuno razloživ ako postoji matrica T tako da, za svaku matricu $X \in S$, matrica TXT^{-1} ima oblik (2).

Definicija 5. Unitarna reprezentacija Γ grupe G je razloživa (svodljiva, reducibilna) ako je skup S koji se sastoji od svih elemenata reprezentacije Γ potpuno razloživ. U protivnom, za reprezentaciju Γ kažemo da je nerazloživa (nesvodljiva, ireducibilna).

Pretpostavimo da se unitaran vektorski prostor V može razložiti u direktan zbir p pravih potprostora invarijantnih prema svim operatorima iz S, tj. $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_p$, pri čemu je p izabrano što je moguće veće. Tada matrice operatora iz S dobijaju oblik

$$\begin{Vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

gde je A_i $(i = 1,2,\dots,p)$ kvadratna matrica reda n_i $(n_i = \dim V_i)$.

Teorema 3. Neka je Γ jedna unitarna reprezentacija proizvoljne grupe G. Reprezentacija Γ je ekvivalentna sa jednom reprezentacijom Γ' čiji svi elementi imaju oblik (3).

Ako je $p = 1$, reprezentacija Γ je nerazloživa, a ako je $p > 1$, reprezentacija Γ je razloživa.

Neka je $\Gamma = (\{\Gamma(g_1),\dots,\Gamma(g_n)\},\cdot)$, gde su $g_i, i = 1,\dots,n$, elementi grupe G. Prema teoremi 3 imamo

$$\Gamma'(g_i) = \begin{Vmatrix} A_1(g_i) & & & \\ & A_2(g_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p(g_i) \end{Vmatrix}.$$

Formirajmo skupove $\tilde{\Gamma}^{(j)} = \{A_j(g_i) \mid g_i \in G\}$, $j = 1,\dots,p$, kao i odgovarajuće grupe $\Gamma^{(j)} = (\tilde{\Gamma}^{(j)},\cdot)$.

Iz načina na koji smo obrazovali matrice $A_j(g_i)$ može se zaključiti da su $\tilde{\Gamma}^{(j)}$ $(j = 1,\dots,p)$ nerazloživi skupovi matrica.

Kako je

$$\Gamma'(g_i)\cdot\Gamma'(g_j) = \begin{Vmatrix} A_1(g_i) & & \\ & \ddots & \\ & & A_p(g_i) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_1(g_j) & & \\ & \ddots & \\ & & A_p(g_j) \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} A_1(g_i)A_1(g_j) & & \\ & \ddots & \\ & & A_p(g_i)A_p(g_j) \end{Vmatrix}$$

a sa druge strane

$$\Gamma'(g_i)\cdot\Gamma'(g_j) = \Gamma'(g_i\cdot g_j) = \begin{Vmatrix} A_1(g_i\cdot g_j) & & \\ & \ddots & \\ & & A_p(g_i\cdot g_j) \end{Vmatrix},$$

zaključujemo da je $A_k(g_i)\cdot A_k(g_j) = A_k(g_i\cdot g_j)$, $(i,j = 1,\dots,n;$ $k = 1,\dots,p)$, što znači da su $\Gamma^{(j)}$ nerazložive reprezentacije grupe G. Neka je medju njima r različitih reprezentacija. Tada kažemo da je ovim postupkom reprezentacija Γ razložena u direktan zbir nerazloživih reprezentacija grupe G, što se može prikazati u obliku

$$\Gamma = a_1 \Gamma^{(1)} + a_2 \Gamma^{(2)} + \ldots + a_r \Gamma^{(r)} ,$$

gde a_i, $i = 1,\ldots,r$, predstavlja broj pojavljivanja submatrice $A_i(g_j)$ u matrici $\Gamma'(g_j)$ za svako j.

Teorema 4. Neka su $\Gamma^{(i)}$ i $\Gamma^{(j)}$ dve nerazložive reprezentacije grupe G, dimenzija n_i i n_j respektivno. Ako je matrica M tipa $n_i \times n_j$ takva da je

$$\Gamma^{(i)}(g)\cdot M = M\cdot\Gamma^{(j)}(g) \tag{4}$$

za svako $g \in G$, tada važi jedno i samo jedno od tvrdjenja: (i) $M = 0$; (ii) $n_i = n_j$, $\det M \neq 0$, $\Gamma^{(i)}$ i $\Gamma^{(j)}$ su ekvivalentne reprezentacije.

Teorema 5. Reprezentacija $\Gamma^{(i)}$ konačne grupe G je nerazloživa ako i samo ako važi implikacija: Ako matrica P zadovoljava jednakost

$$\Gamma^{(i)}(g)\cdot P = P\cdot\Gamma^{(i)}(g) \tag{5}$$

za svako $g \in G$, tada je $P = \lambda I$, gde je λ skalar.

Neka su $\Gamma^{(i)}$, $i = 1,2,\ldots,r$ nerazložive neekvivalentne unitarne reprezentacije grupe G. Označimo sa $\Gamma^{(i)}_{km}(g)$, $k,m = 1,\ldots,n_i$ element matrice $\Gamma^{(i)}(g)$, pri čemu je dimenzija reprezentacije $\Gamma^{(i)}$ jednaka n_i. Skup svih preslikavanja $f : g \mapsto f(g)$, $g \in G$, $f(g) \in C$, snabdeven operacijama množenja skalarom (kompleksnim brojem) i sabiranja, čini vektorski prostor R_G nad poljem kompleksnih brojeva. $\Gamma^{(i)}_{km}$ pripadaju prostoru R_G. Uvedimo skalarni proizvod

$$(f_1,f_2) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{g\in G} f_1(g)f_2(g) \ , \quad f_1,f_2 \in R_G.$$

Teorema 6. Ako su $\Gamma^{(i)}$ i $\Gamma^{(j)}$ dve nerazložive, neekvivalentne (izuzev, eventualno, jednake) unitarne reprezentacije grupe G, važi jednakost

$$(\Gamma_{km}^{(i)}, \Gamma_{pq}^{(j)}) = \frac{n}{n_i}\delta_{ij}\delta_{kp}\delta_{mq}, \quad 1 \leq k,m \leq n_i;\ 1 \leq p,q \leq n_j,$$

gde je n broj elemenata grupe G.

Dokaze teorema 4, 5 i 6 ne navodimo. Oni se mogu naći u knjigama u kojima se izlaže teorija reprezentacija.

Broj funkcija $\Gamma_{km}^{(i)}$ iznosi $N = n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_r^2$. Iz teoreme 6 možemo zaključiti da u vektorskom prostoru R_G postoji N linearno nezavisnih elemenata. S druge strane, n funkcija F_g, $g \in G$, definisanih sa $F_g(u) = \delta_{gu}$, $u \in G$, čine bazu prostora R_G, jer za svako preslikavanje $f \in R_G$ važi

$$f(u) = \sum_{g\in G} F_g(u)f(g) .$$

Prema tome, $N \leq n$.

Teorema 7. Neka je r broj neekvivalentnih nerazloživih reprezentacija grupe G sa n elemenata. Označimo dimenziju reprezentacije $\Gamma^{(i)}$ sa n_i, $i = 1,\ldots,r$. Tada važi jednakost

$$N = n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_r^2 = n .$$

Sada ćemo definisati pojam karaktera reprezentacije a teorema 7 će naknadno biti dokazana.

Definicija 6. Karakter reprezentacije Γ grupe G je preslikavanje $g \in G \mapsto \chi(g)$ definisano sa

$$\chi(g) = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{kk}(g) ,$$

pri čemu su $\Gamma_{kk}(g)$, $k = 1,\ldots,m$ elementi na glavnoj dijagonali matrice $\Gamma(g)$, a m je dimenzija reprezentacije Γ.

Iz definicija 1 i 6 sleduje da ekvivalentne reprezentacije imaju jednake karaktere, jer su tragovi odgovarajućih matrica jednaki. Pored toga, χ nije u opštem slučaju uzajamno jednoznačno preslikavanje. Ako su g_1, g_2, g_3 tri različita elementa grupe G i ako je $g_1 = g_3g_2g_3^{-1}$, tada je $\chi(g_1) = \chi(g_2)$. Bez teškoća se pokazuje da je relacija $\sim$ definisana na skupu G pomoću

(6) $\quad g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow (\exists g_3)(g_1 = g_3 \cdot g_2 \cdot g_3^{-1}), \quad g_1, g_2, g_3 \in G ,$

relacija ekvivalencije.

Definicija 7. Klase ekvivalencije relacije definisane sa (6) nazivamo klase konjugovanosti grupe G.

Karakteri reprezentacija mogu da se shvate i kao preslikavanje skupa svih klasa konjugovanosti u skup kompleksnih brojeva. Neka je x klasa konjugovanosti. Tada definišemo $\chi(x) = \chi(g)$, $g \in x$. U tom smislu karakteri pokazuju niz osobina analognih osobinama matričnih elemenata.

Neka je ClG skup svih klasa konjugovanosti grupe G. U vektorski prostor R_{ClG} svih kompleksnih funkcija sa domenom ClG uvodimo skalarni proizvod

$$(f_1,f_2) \overset{def}{=\!=} \sum_{x\in ClG} f_1(x)f_2(x) \ , \quad f_1,f_2 \in R_{ClG} \ .$$

Teorema 8. Neka su $\chi^{(i)}$ i $\chi^{(j)}$ karakteri dve unitarne, neekvivalentne ili jednake, nerazložive reprezentacije $\Gamma^{(i)}$ i $\Gamma^{(j)}$ respektivno, konačne grupe G sa n elemenata. Neka je ClG skup svih klasa konjugovanosti grupe G. Tada važe jednakosti

(i) $$(\chi^{(i)},\chi^{(j)}) = n\,\delta_{ij} \ ,$$

(ii) $$\sum_{x\in ClG} \chi^{(i)}(x)\overline{\chi}^{(j)}(x) = n\,\delta_{ij} \ ,$$

gde je n(x) broj elemenata klase x.

Teorema 9. Broj unitarnih neekvivalentnih nerazloživih reprezentacija konačne grupe G jednak je broju klasa konjugovanosti te grupe.

Teorema 10. Neka je Γ proizvoljna unitarna reprezentacija grupe G koja ima n elemenata. Tada se Γ na jedinstven način može razložiti u direktan zbir nerazloživih reprezentacija

(7) $$\Gamma = a_1\Gamma^{(1)} \oplus \ldots \oplus a_r\Gamma^{(r)}.$$

Nenegativni celi brojevi a_i su odredjeni pomoću

(8) $$a_i = \frac{1}{n}(\chi^{(i)},\chi), \quad i = 1,2,\ldots,r,$$

gde su $\chi^{(i)}$ i χ karakteri reprezentacija $\Gamma^{(i)}$ i Γ .

Dokaz. Postojanje razvoja (7) dokazano je ranije. Iz (7) dobijamo

$$\chi(g) = a_1 \chi^{(1)}(g) + \ldots + a_r \chi^{(r)}(g) , \tag{9}$$

za svako $g \in G$. Dalje je

$$(\chi, \chi^{(i)}) = a_1(\chi^{(1)}, \chi^{(i)}) + \ldots + a_r(\chi^{(r)}, \chi^{(i)}) ,$$

gde je i fiksirani indeks ($1 \leqslant i \leqslant r$). Koristeći jednakost (i) iz teoreme 8 dobijamo (8). Pomoću (8) jednoznačno su odredjeni koeficijenti a_i ($i = 1,\ldots,r$) iz čega sleduje da je razvoj (9) jedinstven.

Ovim je dokaz završen.

Posledica. Iz (9) sleduje

$$\chi(e) = a_1 \chi^{(1)}(e) + \ldots + a_r \chi^{(r)}(e) ,$$

gde je e jedinični element grupe G. Iz toga dobijamo

$$m = a_1 n_1 + \ldots + a_r n_r , \tag{10}$$

gde su $m, n_1, \ldots, n_r$ dimenzije reprezentacija $\Gamma, \Gamma^{(1)}, \ldots, \Gamma^{(r)}$, respektivno.

Dokaz teoreme 7. Neka je Γ regularna reprezentacija grupe G, definisana sa (1) i neka je e jedinični element grupe G. Iz (10) dobijamo $n = a_1 n_1 + \ldots + a_r n_r$. Kako je $a_i = \frac{1}{n}(\chi^{(i)}, \chi) = n_i$, zaključujemo da je teorema tačna.

Definicija 8. Karakter nerazložive reprezentacije grupe G nazivamo primitivnim karakterom te grupe.

Da bismo datu unitarnu reprezentaciju razložili u direktan zbir nerazloživih reprezentacija od interesa je naći sve primitivne karaktere, jer su time odredjeni ne samo koeficijenti u (7), već i vektori (13) nove baze, u kojoj matrice reprezentacije imaju blok-dijagonalni oblik.

Primitivne karaktere ćemo obeležavati sa $\chi^{(i)}(x_j) = \chi^{(i)}_j$, $1 \leqslant i,j \leqslant r$, pri čemu se gornji indeks odnosi na i-tu nerazloživu reprezentaciju a donji indeks na j-tu klasu konjugovanosti x_j. Kvadratna tablica sastavljena od brojeva $\chi^{(i)}_j$, tako da se u vrstama nalaze elementi sa jednakim indeksom i, dok se u kolonama nalaze elementi sa jednakim indeksom j, naziva se tablica primitivnih karaktera. Takodje ćemo posmatrati i matricu $H = \|\chi_j^{(i)}\|_1^r$.

Iz teoreme 8 sleduje ortogonalnost vrsta matrice H. Iz ortogonalnosti vrsta sleduje i ortogonalnost kolona, jer ako je $H^*H = nI$, tada je takodje $HH^* = nI$. Prema tome, važe jednakosti

$$\sum_{j=1}^{r} r_j \chi_j^{(i)} \overline{\chi}_j^{(k)} = n\delta_{ik}, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{r} r_j \chi_j^{(i)} \overline{\chi}_p^{(i)} = n\delta_{jp}, \tag{12}$$

gde je r_j broj elemenata u j-toj klasi konjugovanosti.

Navedimo sada, bez dokaza, nekoliko teorema koje omogućuju nalaženje tablice karaktera.

Teorema 11. Brojevi $\chi_j^{(i)}$ mogu se predstaviti u obliku zbira konačno mnogo korena broja jedan.

Teorema 12. Dimenzija n_i svake nerazložive reprezentacije konačne grupe G je delilac broja n elemenata te grupe.

Teorema 13. Komutativna grupa ima samo reprezentacije dimenzije jedan.

Tablice karaktera za grupe koje se često pojavljuju u primenama mogu se naći u literaturi.

U sledećoj teoremi dat je efektivan postupak za konstrukciju ortonormirane baze u kojoj matrice date reprezentacije imaju blok-dijagonalan oblik.

Teorema 14. Neka je G grupa koja sadrži n elemenata. Neka je Γ unitarna reprezentacija dimenzije m grupe G, pri čemu važi

$$\Gamma = a_1 \Gamma^{(1)} \oplus \dots \oplus a_r \Gamma^{(r)},$$

gde su $\Gamma^{(i)}$, $i = 1,\dots,r$, nerazložive unitarne reprezentacije grupe G, dimenzija n_i, $i = 1,\dots,r$ respektivno. Neka su $e_1, e_2, \dots, e_m$ vektori ortonormirane baze B vektorskog prostora R^m u kome su definisani operatori $\Gamma(g), g \in G$. Označimo sa $\chi^{(i)}$ karakter i-te nerazložive reprezentacije. Definišimo linearnu kombinaciju vektora e_k, $k = 1,\dots,m$, pomoću

$$(13) \qquad e'_{ip} = \sum_{k=1}^{m} c_{ikp} \sum_{g\in G} \bar{\chi}^{(i)}(g)\cdot\Gamma(g)\cdot e_k \ , \quad i = 1,\dots,r \ ,$$

gde su c_{ikp}, $i = 1,\dots,r$, $k = 1,\dots,m$, $p = 1,2,\dots$, proizvoljne konstante. Tada važe sledeća tvrdjenja:

(i) Ako je $n_i = 1$, tada su vektori e'_{ip} sopstveni vektori svake od matrica $\Gamma(g), g\in G$.

(ii) Ako je $n_i > 1$, tada vektor e'_{ip} pripada potprostoru R^{n_i}, koji je invarijantan u odnosu na svaku od matrica $\Gamma(g)$, $g\in G$.

(iii) Za svako i, iz (13), dobijamo $a_i n_i$ linearno nezavisnih vektora. Postoji m $(= \sum_{i=1}^{r} a_i n_i)$ ortonormiranih vektora oblika (13).

(iv) Skup m ortonormiranih vektora oblika (13) čini bazu vektorskog prostora R^m, u toj bazi sve matrice $\Gamma(g)$, $g\in G$, imaju isti blok-dijagonalni oblik. Blokovi predstavljaju nerazložive reprezentacije na koje se data reprezentacija razlaže.

Dokaz. Neka je $\Gamma^{(i)}$ jednodimenzionalna nerazloživa reprezentacija grupe G. Pri fiksiranom izboru konstanti, uvodimo oznaku $e'_{ip} = e'_i$, $c_{ikp} = c_{ik}$. Tada važi

$$\begin{aligned}
\Gamma(f)e'_i &= \sum_{k=1}^{m} c_{ik} \sum_{g\in G} \bar{\chi}^{(i)}(g)\Gamma(f)\Gamma(g)e_k \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_{ik} \sum_{g\in G} \bar{\chi}^{(i)}(g)\Gamma(f\cdot g)e_k \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_{ik} \sum_{h\in G} \bar{\chi}^{(i)}(f^{-1}\cdot h)\Gamma(h)e_k \\
&= \sum_{k=1}^{m} c_{ik} \sum_{h\in G} \bar{\chi}^{(i)}(f^{-1})\bar{\chi}^{(i)}(h)\Gamma(h)e_k \\
&= \bar{\chi}^{(i)}(f^{-1})e'_i \ , \quad \text{za svako } f\in G \ ,
\end{aligned}$$

pri čemu je korišćena osobina $\bar{\chi}^{(i)}(f\cdot g) = \bar{\chi}^{(i)}(f)\,\bar{\chi}^{(i)}(g)$, koja važi za $n_i = 1$.

Ovim je dokazano (i).

Neka je $\Gamma^{(i)}$ jedna nerazloživa reprezentacija za koju je $n_i > 1$, $a_i \neq 0$. Ortonormiranu bazu B' sačinjava a_i grupâ od po n_i vektora $x_{iv\nu}$, $\nu = 1,\ldots,n_i$, $v = 1,\ldots,a_i$. Lineal nad skupom vektora $\{x_{iv1}, x_{iv2},\ldots,x_{ivn_i}\}$, sa fiksiranim v, čini invarijantni potprostor za $\Gamma^{(i)}(g)$, za svako $g \in G$. Neka su $\Gamma_{\mu\nu}(g)$, $\mu,\nu = 1,\ldots,m$ elementi matrice $\Gamma(g)$ pri bazi B i neka je $\Gamma'(g)$ sa elementima $\Gamma'_{\mu\nu}(g)$ matrica koja se dobija iz $\Gamma(g)$ prelaskom iz baze B u bazu B'. Elemente matrice $\Gamma^{(i)}(g)$ označavaćemo sa $\Gamma^{(i)}_{\mu\nu}(g)$. Označimo sa $\Gamma^{(i)\prime}(g)$ matricu koja se dobija iz $\Gamma'(g)$ kada se stavi da su svi njeni elementi jednaki nuli sem onih koji odgovaraju v-tom pojavljivanju reprezentacije $\Gamma^{(i)}$ u Γ, za dato v.

Važi jednakost

$$\Gamma^{(i)\prime}(g)\cdot x_{iv} = \sum_{\mu=1}^{n_i} \Gamma'_{\mu\nu}(g)\, x_{iv\mu}, \tag{14}$$

pri čemu smo uzeli u obzir blok-dijagonalni oblik matrice $\Gamma(g)$. Množenjem (14) sa $\bar{\Gamma}^{(i)\prime}_{pp}(g)$, $p = 1,\ldots,n_i$ i sumiranjem po g dobijamo

$$\sum_{g\in G} \Gamma^{(i)\prime}_{pp}(g)\,\Gamma^{(i)\prime}(g)\, x_{iv\nu} = \sum_{g\in G}\sum_{\mu=1}^{n_i} \Gamma^{(i)\prime}(g)\, x_{iv\nu}\bar{\Gamma}^{(i)\prime}_{pp}(g)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n_i}\Big(\sum_{g\in G} \Gamma^{(i)\prime}_{\mu\nu}(g)\,\bar{\Gamma}^{(i)\prime}_{pp}(g)\Big)\, x_{iv\nu}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n_i} \frac{n}{n_i}\,\delta_{pm}\,\delta_{p\nu}\, x_{iv\nu} = \frac{n}{n_i}\delta_{p\nu} x_{iv\nu}.$$

Sumiranjem po indeksu p dobijamo

$$\sum_{g\in G}\sum_{p=1}^{n_i} \bar{\Gamma}^{(i)\prime}_{pp}(g)\,\Gamma^{(i)\prime}(g)\, x_{iv\nu} = \frac{n}{n_i} x_{iv\nu},$$

$$\sum_{g\in G} \bar{\chi}^{(i)}(g)\,\Gamma^{(i)\prime}(g)\, x_{iv\nu} = \frac{n}{n_i} x_{iv\nu}. \tag{15}$$

Kako je Γ blok-dijagonalna matrica, iz (15) sleduje

$$\sum_{g\in G} \bar{\chi}^{(i)}(g)\Gamma(g)\, x_{iv\nu} = \frac{n}{n_i} x_{iv\nu} .$$

S obzirom da je u bazi B $x_{iv\nu} = \sum_{k=1}^{m} c_k e_k$, dobijamo

$$x_{iv\nu} = \sum_{k=1}^{m} c_k \sum_{g\in G} \bar{\chi}^{(i)}(g)\Gamma(g) e_k .$$

Ovim je teorema dokazana.

13.3.2. Faktorizacija karakterističnog polinoma grafa

Neka je A proizvoljna matrica i Γ unitarna matrica koja komutira sa A, tj. $\Gamma A = A\Gamma$.

Može se pokazati da ako je u datoj bazi matrica Γ razložena na blokove, tada je i matrica A razložena na blokove. Ako je A matrica susedstva grafa, tada razlaganje na blokove dovodi do faktorizacije karakterističnog polinoma grafa.

Automorfizam φ grafa G može se shvatiti kao permutacija skupa čvorova grafa a to znači da postoji permutaciona matrica $\Gamma(\varphi)$ takva da je

(16) $$A = \Gamma(\varphi)\cdot A\cdot \Gamma^T(\varphi) .$$

Iz ovog neposredno sleduje:

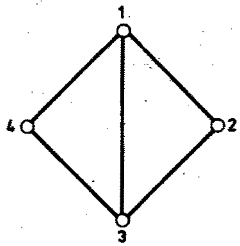
Teorema 15. Grupa $\mathfrak{A}_G$ automorfizama grafa G izomorfna je s jednom grupom permutacionih matrica.

Iz teoreme 15 sleduje da grupa $\mathfrak{A}_G$ poseduje jednu matričnu reprezentaciju pomoću grupe permutacionih matrica Γ. Kako su permutacione matrice unitarne, (16) se svodi na $A\Gamma(\varphi) = \Gamma(\varphi)A$ za svaki $\varphi \in \mathfrak{A}_G$. Prema tome, za svodjenje matrice A na blok-dijagonalni oblik dovoljno je naći bazu u kojoj su matrice reprezentacije Γ u blok-dijagonalnom obliku.

Primer 2. Posmatrajmo graf sa slike 1.

Matrica susedstva grafa G je

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} .$$



sl. 1

Svi automorfizmi grafa (dati u obliku permutacija) su

$$e = \left\|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{matrix}\right\|,\ g_1 = \left\|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{matrix}\right\|,\ g_2 = \left\|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{matrix}\right\|,\ g_3 = \left\|\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{matrix}\right\|.$$

Tablica grupe $\mathfrak{A}_G$ ima oblik

$\cdot$	e	g_1	g_2	g_3
e	e	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	e	g_3	g_2
g_2	g_2	g_3	e	g_1
g_3	g_3	g_2	g_1	e

Unitarna reprezentacija grupe $\mathfrak{A}_G$ pomoću permutacionih matrica sadrži sledeće elemente

$$\Gamma(e)=\left\|\begin{matrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}\right\|,\Gamma(g_1)=\left\|\begin{matrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{matrix}\right\|,\Gamma(g_2)=\left\|\begin{matrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{matrix}\right\|,\Gamma(g_3)=\left\|\begin{matrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{matrix}\right\|$$

Tablica karaktera glasi

	e	g_1	g_2	g_3
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1	-1
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	-1
$\chi^{(4)}$	1	-1	-1	1

Ortonormirani vektori nove baze su

$$e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)^T,\ e_2' = \left(-\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^T,$$

$$e'_3 = (0\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{2}})^T,\ e'_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 0)^T.$$

Matrica transformacije U se dobija kao matrica čije su vrste vektori nove baze. U novoj bazi matrice Γ' imaju oblik

$$\Gamma'(e) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad \Gamma'(g_1) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

$$\Gamma'(g_2) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix},\quad \Gamma'(g_3) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Matrica A u novoj bazi ima oblik

$$\bar{A} = UAU^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{18}{10} & \frac{2}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{16}{10} & -\frac{8}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

a njene sopstvene vrednosti su $\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 0$.

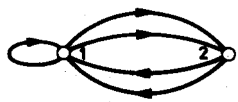
Definicija 9. Neka je skup čvorova X grafa G podeljen na neprazne podskupove $X_1,\ldots,X_k$, tako da je, za svako $i,j = 1,\ldots,k$, svaki čvor iz X_i susedan sa tačno b_{ij} čvorova iz X_j. Multidigraf H sa matricom susedstva $B = \|b_{ij}\|_1^k$ naziva se delilac grafa G.

Teorema 16. Ako je graf H delilac grafa G, tada je karakteristični polinom grafa G deljiv sa karakterističnim polinomom grafa H (videti takodje teoremu 8 iz tačke 1 Dodatka).

Iz teoreme 16 zaključujemo da je za faktorizaciju karakterističnog polinoma grafa od interesa naći delilac grafa. Ovim postupkom red polinoma koji treba izračunati može se značajno smanjiti. Postupak se može više puta primenjivati, sve dok se ne dobije potpuna faktorizacija.

Metod faktorizacije karakterističnog polinoma grafa pomoću delioca i metod faktorizacije pomoću grupe automorfizama nemaju istu oblast primene. Naime, postoje grafovi kod kojih grupa automorfizama sadrži samo jedinični element, a imaju delilac. U tim slučajevima faktorizacija je moguća samo pomoću delioca.

Primer 3. Za graf sa sl. 1 delilac se dobija kad se uzme da čvorovi 1 i 3 pripadaju jednom podskupu, a čvorovi 2 i 4 drugom. Graf delioca je dat na sl. 2.



sl. 2

a njegova matrica susedstva je $B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}$. Karakteristična jednačina ove matrice je $\lambda^2 - \lambda - 4 = 0$, odakle se dobija $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Delilac grafa je u vezi sa trivijalnom (totalno simetričnom) reprezentacijom grupe automorfizama. To ćemo pokazati na primeru grafa sa sl. 1.

Kako je $\chi^{(1)}(g) = 1$ za svako $g \in \mathfrak{A}_G$, vektori $e_k^{(1)}$ se odredjuju po formuli

$$e_k^{(1)} = \sum_{g \in \mathfrak{A}_G} \Gamma(g) e_k .$$

Kako su $\Gamma(g)$ permutacione matrice, vektor koji se dobija mora da ima iste koeficijente na mestima koja odgovaraju jednoj klasi X_i. U našem primeru imamo da je taj vektor $\|c_1 \ c_2 \ c_1 \ c_2\|^T$ jer je $X_1 = \{1,3\}$, $X_2 = \{2,4\}$. Sopstvene vrednosti matrica $\Gamma^{(1)}(g)$ su jednostruke. Vektori e' su sopstveni vektori matrice A. Za odredjivanje sopstvenih vrednosti koristićemo jednačinu

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{Vmatrix} = \lambda \begin{Vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{Vmatrix} ,$$

što daje svega dve nezavisne jednačine: $c_1 + 2c_2 = c_1$ i $2c_1 = c_2$. Matrica ovog sistema je $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}$ i ona predstavlja matricu susedstva delioca grafa G.

13.3.3. Grupa C_{4v}

U primenama se često umesto pojma automorfizma koristi pojam simetrije.

Simetrija geometrijske figure je preslikavanje figure na figuru koje "čuva" rastojanje tačaka. Kod nekih geometrijskih figura skup simetrija je konačan. Na primer, simetrija pravougaonika odredjena je jednom permutacijom skupa njegovih temena. Skup simetrija obrazuje grupu.

Kao primer, opisaćemo detaljnije grupu koja se označava sa C_{4v}. Grupa C_{4v} je grupa simetrija kvadrata. Sastoji se iz sledećih elemenata (osa z je normalna na ravan kvadrata a x- i y-osa su simetrale strana kvadrata): E identična transformacija; C_4 rotacija za ugao $\frac{\pi}{2}$ oko ose z; $C_4^2 = C_4 \cdot C_4$; $C_4^3 = C_4^2 \cdot C_4$; m_x rotacija za ugao π oko ose x; m_y rotacija za ugao π oko ose y; σ_u simetrija u odnosu na pravu $y = -x$; σ_v simetrija u odnosu na pravu $y = x$. Tablica ove grupe je

	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
E	E	C_4	C_4^2	C_4^3	m_x	m_y	σ_u	σ_v
C_4	C_4	C_4^2	C_4^3	E	σ_u	σ_v	m_y	m_x
C_4^2	C_4^2	C_4^3	E	C_4	m_y	m_x	σ_v	σ_u
C_4^3	C_4^3	E	C_4	C_4^2	σ_v	σ_u	m_x	m_y
m_x	m_x	σ_v	m_y	σ_u	E	C_4^2	C_4^3	C_4
m_y	m_y	σ_u	m_x	σ_v	C_4^2	E	C_4	C_4^3
σ_u	σ_u	m_x	σ_v	m_y	C_4	C_4^3	E	C_4^2
σ_v	σ_v	m_y	σ_u	m_x	C_4^3	C_4	C_4^2	E

Iz tablice nalazimo klase konjugovanosti, koristeći činjenicu da, ako su x i y u istoj klasi konjugovanosti, tada postoji $u \in G$ tako da je $xu = uy$.

Postoji 5 klasa konjugovanosti: $K_1 = \{E\}$, $K_2 = \{m_x, m_y\}$, $K_3 = \{\sigma_u, \sigma_v\}$, $K_4 = \{C_4, C_4^3\}$, $K_5 = \{C_4^2\}$. Prema tome, grupa ima 5 nerazloživih reprezentacija. Iz jednačine $n_1^2 + \dots + n_5^2 = 8$ dobijamo $n_1 = \dots = n_4 = 1$, $n_5 = 2$. Iz uslova ortogonalnosti dobijamo[1] tablicu primitivnih karaktera

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1	-1	1
$\chi^{(3)}$	1	-1	1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(5)}$	2	0	-2	0	0

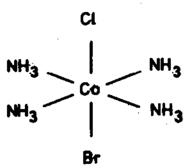
Neka je Γ regularna reprezentacija grupe. Poznatim postupkom dobijamo

$$\Gamma = \Gamma^{(1)} \oplus \Gamma^{(2)} \oplus \Gamma^{(3)} \oplus \Gamma^{(4)} \oplus 2\,\Gamma^{(5)}.$$

Nalaženjem vektora nove baze dobijamo matricu transformacije

$$U = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix} \right\| .$$

Grupu simetrije C_{4v} poseduje, na primer, molekul sa sl. 3,



sl. 3

gde su četiri grupe NH_3 rasporedjene po temenima kvadrata, a ostali atomi na osi normalnoj na ravan kvadrata, koja sadrži njegovo središte.

Da bismo našli sopstvene vektore bez upotrebe teorije reprezentacija trebalo bi rešavati algebarsku jednačinu osmog stepena kao i osam homogenih sistema linearnih jednačina od po

---

1) U primenama se koriste gotove tablice karaktera.

osam nepoznatih.

13.3.4. Grupe operatora koji komutiraju sa hamiltonijanom

Razmatranja iz 13.3.2 se mogu proširiti tako da postoji mogućnost za faktorizaciju hamiltonijana (tj. Hamiltonovog operatora), nalaženje sopstvenih funkcija, rešavanje sekularne (tj. karakteristične) jednačine i za rešavanje drugih problema s ovim u vezi, korišćenjem osobina reprezentacije neke grupe operatora koji komutiraju sa hamiltonijanom.

S obzirom na fizičko značenje hamiltonijana, može se pokazati da je on invarijantan prema transformacijama koordinata operacijama simetrije. Uvedimo, u vezi s tim, sledeće oznake:

x vektor položaja tačke u prvobitnom koordinatnom sistemu;
g operacija simetrije;
x' vektor položaja u novom sistemu, posle izvršene operacije simetrije;
$H(x)$ Hamiltonov operator ili hamiltonijan;
$\Psi(x)$ sopstvena funkcija hamiltonijana (talasna funkcija);
E sopstvena vrednost (energija) koja odgovara Ψ;
$r(g)$ operator koji se definiše pomoću

$$r(g)\Psi(x') = \Psi(x) , \quad \Psi(x') = r^{-1}(g)\Psi(x) .$$

Iz $H(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$ dobijamo

$$H(x)\Psi(x) = r(g)H(gx)\Psi(gx) = r(g)H(gx)r^{-1}(g)\Psi(x) =$$
$$= r(g)H(x)r^{-1}(g)\Psi(x) ,$$

gde je korišćena činjenica iz fizike da je $H(gx) = H(x)$. Prema tome, važi jednakost $H = rHr^{-1}$, odnosno

$$H(x)r(g) = r(g)H(x). \tag{17}$$

Bez teškoća se pokazuje da skup operacija simetrija prema kojima je hamiltonijan invarijantan, čini neku grupu G.

Neka je Ψ_i $(i = 1,\dots,n)$ sopstvena funkcija Hamiltonovog operatora, pri čemu je nivo energije E n-tostruko degenerisan, tj.

$$H\Psi_i = E\Psi_i , \quad i = 1,\dots,n.$$

Iz (17) na osnovu razmatranja u 13.3.2 zaključujemo da je

$$r(g)\Psi_j = \sum_{i=1}^{n} \Gamma(g)_{ij}\Psi_i\ , \quad j = 1,\dots,n,$$

gde su $\Gamma(g)_{ij}$ neki kompleksni koeficijenti. Od svih tih koeficijenata možemo formirati matrice $\Gamma(g) = \|\Gamma(g)_{ij}\|_1^n$, $g \in G$. Skup tako formiranih matrica čini grupu Γ, koja je reprezentacija grupe G. Ako su talasne funkcije ortonormirane, onda je Γ unitarna reprezentacija ove grupe.

13.3.5. LCAO teorija i primer butadiena

Problem koji se dosta često javlja u kvantnoj teoriji je da se talasna funkcija Ψ molekula na pogodan način predstavi kao linearna kombinacija talasnih funkcija Φ atoma (LCAO = = linear combination of atomic orbitals). Potrebno je naći koeficijente u razvoju

(18) $$\Psi = a_1\Phi_1 + \dots + a_n\Phi_n.$$

Koeficijenti se odredjuju iz uslova minimuma energije, koristeći varijacioni račun. Funkcionela

$$E = \frac{\int \bar{\Psi} H \Psi dx}{\int \bar{\Psi}\Psi dx}\ ,$$

gde je H Hamiltonov operator, treba da ima minimum. Iz toga dobijamo[1])

(19) $$\sum_{r=1}^{n} a_r(h_{rm} - Es_{rm}) = 0, \quad m = 1,\dots,n,$$

gde je

$$h_{rm} = \int \Phi_r H \Phi_m\, dx, \quad s_{rm} = \int \Phi_r\Phi_m\, dx.$$

Sistem jednačina (19) omogućuje da se nadju veličine a_r, $r = 1,\dots,n$.

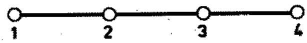
Često se koristi Hückelova aproksimacija pomoću koje se, kako je to već objašnjeno u 12.4.1, dolazi do jednačine

1) Videti, na primer, knjigu: L.F.Phillips, Basic Quantum Chemistry, New York 1965. Uporediti, takodje, sa 12.4.1.

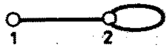
$$
(20) \qquad \begin{vmatrix} \alpha-E & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \alpha-E & & \beta_{2n} \\ \vdots & & & \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & & \alpha-E \end{vmatrix} = 0 ,
$$

gde je $\alpha = h_{rr}$, $\beta_{rs} = h_{rs} = \beta$ ako su atomi r i s povezani u molekulu, a ako nisu, $\beta_{rs} = 0$.

Postupak ćemo objasniti na primeru butadiena, čiji je Hückelov graf (vidi 12.2.1) dat na sl. 4.



sl. 4



sl. 5

Ako u (20) uvedemo smenu $\lambda = \frac{E-\alpha}{\beta}$, dobijamo za slučaj butadiena

$$
(21) \qquad \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 .
$$

Hückelov graf butadiena poseduje osnu simetriju reda 2. Grupa simetrije se obeležava sa C_2 i sadrži dva elementa: jedinični element E i rotaciju za ugao π koja se, takodje, obeležava sa C_2. Kao što se vidi iz (21), posle primene operacije C_2 (tj. prelaskom 1-4 i 2-3), jednačina ostaje ista. Jedna razloživa reprezentacija grupe C_2 data je sa

$$
\Gamma(C_2) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \Gamma(E) = I_4 .
$$

Vektori nove baze su $\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \phi_4)$; $\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2 + \phi_3)$; $\Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - \phi_4)$; $\Psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2 - \phi_3)$.

U novoj bazi jednačina (21) postaje

$$
\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 .
$$

Iz toga se dobija $x_{1,2} \approx \pm 1{,}618$ i $x_{3,4} \approx \pm 0{,}618$. Energija se izračunava prema $E = \alpha - \beta x$, pri čemu se α i β dobijaju eksperimentalno. Na taj način se dobija energetski dijagram butadiena.

Delilac grafa sa sl. 4 dat je na sl. 5, a njegova jednačina je $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Iz (21) se tada dobija i druga jednačina $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$.

13.4. Matrice u kvantnoj mehanici

U kvantnoj mehanici kretanje, odnosno stanje, mikroobjekta se opisuje kompleksnom talasnom funkcijom Ψ koja zavisi od prostornih koordinata x,y,z i vremena t. Kao što je već rečeno u 12.4, kvadrat modula talasne funkcije daje zapreminsku gustinu verovatnoće nalaženja čestice u datom trenutku vremena. Talasna funkcija se dobija kao rešenje Schrödingerove talasne jednačine $\hat{H}\Psi = E\Psi$, gde je $\hat{H}$ Hamiltonov operator. Talasna jednačina ima, po pravilu, beskonačno mnogo rešenja $\Psi = \Psi_j$ ($j = 1,2,\ldots$) a svakoj talasnoj funkciji Ψ_j odgovara jedna vrednost energije E_j.

Na bazi poznatih rešenja $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ Schrödingerove jednačine mogućno je formirati matricu $H = \|h_{ij}\|$, gde je

$$h_{ij} = \int \bar{\Psi}_i \, \hat{H} \, \Psi_j \, dV ,$$

pri čemu se integracija vrši po celom prostoru. Matrica H je matrica energije mikroobjekta. Ona je u opštem slučaju <u>beskonačna</u> matrica (tj. matrica sa beskonačno mnogo vrsta i kolona) i ona takodje opisuje kretanje posmatranog mokroobjekta.

Postoji i matrični prilaz kvantnoj mehanici koji je 1925. godine prvi primenio W.Heisenberg još pre Schrödingerove formulacije kvantne mehanike. Prema ovom pristupu u kvantnoj mehanici važe jednačine kretanja koje se iz jednačina kretanja klasične fizike dobijaju na taj način što se umesto fizičkih veličina uzmu odgovarajuće matrice.

Pre nego što navedemo jedan primer spomenućemo da za <u>beskonačne</u> matrice važe formalno ista pravila računanja kao i za <u>konačne</u> matrice. U striktnu formulaciju teorije beskonačnih matrica nećemo ulaziti u ovoj knjizi. Napomenimo samo da se rezultati teorije konačnih matrica moraju primenjivati sa odredjenim oprezom. Na primer, prilikom množenja beskonačnih matrica mora se ispitivati konvergencija beskonačnog zbira (tj. reda) kojim je sada definisan svaki element matrice proizvoda. U primenama se zahteva da su spomenuti redovi konvergentni.

Primer 1. U klasičnoj fizici jednačina kretanja linearnog harmonijskog oscilatora glasi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \,, \tag{1}$$

gde je ω kružna učestanost oscilatora a x koordinata kojom se odredjuje položaj oscilatora u trenutku vremena t. Zbir H kinetičke i potencijalne energije, tj. totalna energija oscilatora, dat je pomoću

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\,\omega^2 x^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\,\omega^2 x^2}{2} \,, \tag{2}$$

gde je p impuls, v brzina a m masa oscilatora. Svim veličinama odgovaraju u kvantnoj mehanici matrice. Elemente tih matrica označićemo istim slovima kao klasične fizičke veličine sa dodatkom indeksa koji označavaju mesto elementa u matrici.

Jednačinama (1) i (2) odgovaraju u kvantnoj mehanici sledeće relacije

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{ij} + \omega^2 x_{ij} = 0 \,, \tag{3}$$

$$H_{ii} = \frac{m}{2}\left((v^2)_{ii} + \omega^2 (x^2)_{ii}\right) . \tag{4}$$

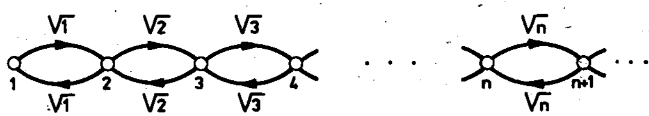
Na osnovu ovih relacija i opštih zakona kvantne mehanike odredjuju se elementi matrica koje predstavljaju interesantne veličine.

Primer 2. Za matricu X koordinate x oscilatora iz primera 1 dobija se

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{1} & & & \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \\ & & \sqrt{3} & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{Vmatrix} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, A \,,$$

gde je $\hbar$ Planckova konstanta.

Digraf G^A je sada beskonačan i on je prikazan na sl. 1



sl. 1

Na osnovu klasične relacije $e_p = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ za potencijalnu energiju e_p dobija se odgovarajuća matrična relacija za matricu E_p potencijalne energije oscilatora

$$E_p = \frac{m\omega^2}{2} X^2 = \frac{\hbar\omega}{4} A^2.$$

Na osnovu puteva dužine 2 u digrafu G^A odredjujemo A^2 koristeći teoremu 1 iz 3.1. Na taj način se dobija

$$E_p = \frac{\hbar\omega}{4}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & & & \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{6} & & \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \sqrt{12} & \\ & \sqrt{6} & 0 & 7 & \ddots & \ddots \\ & & \sqrt{12} & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & & \end{matrix}\right\|.$$

13.5. Jedna primena matričnog računa u mehanici[1]

Teorija matrica je našla široku primenu u mehanici. Prednost matričnog prikaza u odnosu na klasičan način su, konciznost i skraćeni način pisanja diferencijalnih i konačnih jednačina kretanja sistema materijalnih tačaka. Čak i kasnija analiza ovih jednačina i njihovo rešavanje postaje jednostavnije ako se koriste metodi matričnog računa. Iz širokog spektra primene matričnog računa u teoriji oscilacija, analitičkoj mehanici, automatici, teoriji elastičnosti i drugim oblastima mehanike, ovde će biti prikazano nekoliko detalja iz teorije oscilacija.

Analizom slobodnih neprigušenih oscilacija sistema sa

1) Ovaj odeljak je napisao D.Mikičić.

konačnim brojem stepeni slobode kretanja, mogu se u slučaju malih oscilacija odrediti kinetička energija E_k i potencijalna energija E_p sistema pomoću formula

(1) $$2E_k = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k , \quad 2E_p = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} c_{jk}q_jq_k ,$$

ili u matričnom obliku

(2) $$2E_k = (\dot{q})A\{\dot{q}\} , \qquad 2E_p = (q)C\{q\} ,$$

gde su $A = \|a_{jk}\|_1^s$ konstantna matrica koeficijenata inercije a_{jk}, $C = \|c_{jk}\|_1^s$ konstantna matrica koeficijenata krutosti c_{jk}, dok je (q) matrica vrsta, a $\{q\}$ matrica kolona sa koordinatama q_j $(j = 1,2,\ldots,s)$, pri čemu su q_j generalisane koordinate sistema sa s stepeni slobode kretanja. Tačka označava diferenciranje po vremenu t.

Lagrangeove jednačine kretanja u ovom slučaju su

(3) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0 , \qquad \sum_{k=1}^{s} a_{jk}\ddot{q}_k + c_{jk}q_k = 0 ,$$

a u matričnom obliku

(4) $$A\{\ddot{q}\} + C\{q\} = 0 .$$

Jednačina (4) se može napisati u "inverznom" obliku (5), ili u "direktnom" obliku (6) već prema kasnijim potrebama:

(5) $$C^{-1}A\{\ddot{q}\} + \{q\} = 0 ,$$

(6) $$\{\ddot{q}\} + A^{-1}C\{q\} = 0 .$$

Partikularna rešenja jednačine (4) traže se u obliku

(7) $$\{q\} = \{R\} \cos(\omega t - \alpha) , \qquad (\omega, \alpha = \text{konst.}) ,$$

gde je $\{R\}$ matrica (vektor) kolona sa elementima R_i $(i = 1,2,\ldots,s)$, pri čemu su R_i proizvoljne konstante. Zamenom (7) u (4) dobija se sistem algebarskih jednačina

(8) $$(\omega^2 A - C)\{R\} = 0 .$$

Da bi sistem (8) imao, osim trivijalnog ($R_1 = R_2 = \ldots = R_s = 0$), i netrivijalna rešenja, mora biti

$$\det(\omega^2 A - C) = 0 \,. \tag{9}$$

Jednačina (9) se u teoriji oscilacija zove frekventna jednačina. Njena rešenja su $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_s^2$, pri čemu su svi koreni ω_j^2 realni i pozitivni, jer su matrice A i C realne, simetrične i pozitivno definitne. Ako je broj stepeni slobode $s \geqslant 3$, rešavanje frekventne jednačine (9) može biti dosta složeno, pa se u tom slučaju za formiranje frekventne jednačine koriste inverzni oblik (5) ili direktni oblik (6) umesto (4). Tako se, na primer, zamenom (7) u (6) dolazi sličnom analizom do jednostavnijeg oblika frekventne jednačine

$$\det(A^{-1}C - \omega^2 I) = 0 \,. \tag{10}$$

Ovde se nepoznata ω^2 pojavljuje samo po dijagonali determinante.

Ako se uzme u obzir da su svi koreni frekventne jednačine realni i pozitivni, onda se zaključuje da je opravdana pretpostavka (7). Veličine $\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_s$, predstavljaju kružne frekvencije slobodnih neprigušenih oscilacija materijalnog sistema sa s stepeni slobode kretanja. Oscilacije koje odgovaraju tim frekvencijama predstavljaju glavne oscilacije sistema. Najniža frekvencija ω_1 naziva se osnovnom frekvencijom, a prva glavna oscilacija sistema koja ima tu frekvenciju, naziva se osnovnom oscilacijom, jer oscilacije sa najnižom frekvencijom u rezultujućem kretanju imaju primaran značaj.

Rešeavanje frekventne jednačine se ne vrši samo radi odredjivanja nekih fizičkih karakteristika sistema (frekvencije oscilovanja), nego i radi odredjivanja konačnih jednačina kretanja $q_i(t)$, $(i = 1,2,\ldots,s)$. Rešavanje frekventne jednačine predstavlja prvi korak u rešavanju diferencijalnih jednačina kretanja (4). U slučaju da je $s > 3$, konciznost matričnog računa naročito dolazi do izražaja. Svi detalji potrebni za konačno rešavanje sistema linearnih diferencijalnih jednačina oblika (4) mogu se videti, na primer, u [80]. Ovde će to biti izloženo u skraćenoj formi.

Odredimo sada matričnim putem glavne oblike oscilovanja, a zatim kretanje sistema $q_j(t)$, koje se može prikazati superpozicijom njegovih glavnih oblika oscilovanja. U tom cilju ćemo sistem generalisanih koordinata $q_i(t)$ zameniti drugim sistemom generalisanih koordinata $\xi(t)$, tako da diferencijalne jednačine kretanja (3) imaju oblik

$$\ddot{\xi}_j + k_j \xi_j = 0 \ , \quad (j = 1,2,\ldots,s). \tag{11}$$

Svaka od jednačina (11) može se rešiti nezavisno jedna od druge. Tako odabrane koordinate su glavne koordinate, a oblici oscilovanja opisani tim koordinatama nazivaju se glavnim oblicima (ili glavnim formama) oscilovanja sistema.

Ako se podje od jednačine (6), pri čemu se uvodi oznaka $A^{-1}C = B$ (<u>dinamička matrica sistema</u>), dobija se

$$\{\ddot{q}\} + B\{q\} = 0 \ . \tag{12}$$

Potrebno je odrediti koordinate ξ_i tako da su zadovoljene diferencijalne jednačine (11), čiji je matrični oblik

$$\{\ddot{\xi}\} + K\{\xi\} = 0 \ , \tag{13}$$

gde je $K = \mathrm{diag}(k_1,k_2,\ldots,k_s)$, $(k_i \neq k_j,\ i \neq j)$.

Ako koordinate q_j i ξ_j opisuju kretanje jednog istog sistema, onda izmedju njih postoji homogena linearna veza

$$\{q\} = M\{\xi\}, \quad M = \|\mu_{ij}\|_1^s \ . \tag{14}$$

Zamenom (14) u (12) dobija se:

$$M\{\ddot{\xi}\} + BM\{\xi\} = 0 \ , \tag{15}$$

$$\{\ddot{\xi}\} + M^{-1}BM\{\xi\} = 0. \tag{16}$$

Sada se uporedjivanjem (16) sa (13) dobija da je $K = M^{-1}BM$. Može se pokazati da ovakva transformacija matrice B u dijagonalnu matricu K postoji, a matrica M se u mehanici zove <u>modalna</u> matrica za matricu B.

Rešenja diferencijalnih jednačina (11) se traže u obliku

$$\xi_j = c_j \cos(\omega_j t - \alpha_j), \quad (c_j, \alpha_j = \mathrm{const.}). \tag{17}$$

Sa novim oznakama $c_j \cos \alpha_j = d_j$, $c_j \sin \alpha_j = e_j$, $\{D \cos \omega t\}$ i $\{E \sin \omega t\}$ vektori (kolone) sa elementima $d_j \cos \omega_j t$, odnosno $e_j \sin \omega_j t$, veza (14) dobija oblik

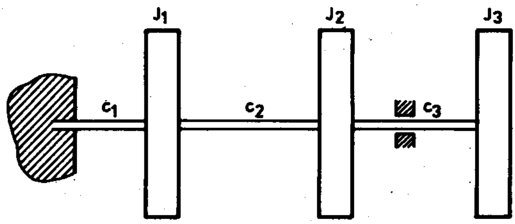
(18) $$\{q\} = M\{D \cos \omega t\} + M\{E \sin \omega t\} .$$

Zamenom početnih uslova $\{q(0)\}$ i $\{\dot{q}(0)\}$ u izraz (18) i njegov izvod po vremenu, odredjujemo konstante integracije:

(19) $$\{D\} = M^{-1}\{q(0)\} = \|d_1, d_2, \ldots, d_s\|^T,$$

(20) $$\{E\} = M^{-1}\{\dot{q}(0)\} = \|\omega_1 e_1, \omega_2 e_2, \ldots, \omega_s e_s\|^T.$$

Kao primer razmotrićemo oscilovanje torzionog sistema prikazanog na sl. 1. Ovde je potrebno odrediti opšte integrale diferencijalnih jednačina kretanja, u slučaju da su momenti inercija diskova $J_1 = J_2 = J_3 = J$, a koeficijenti krutosti vratila $c_1 = c_2 = c_3 = c$.



sl. 1

Sistem ima s=3 stepena slobode kretanja. Generalisane koordinate su $q_i = \theta_i$ uglovi diskova u odnosu na stabilan ravnotežni položaj, kada su ove koordinate jednake nuli. Kinetička energija E_k u ovom slučaju je

$$E_k = \frac{1}{2} (J_1\dot{\theta}_1^2 + J_2\dot{\theta}_2^2 + J_3\dot{\theta}_3^2) ,$$

a potencijalna energija E_p je odredjena formulom

$$E_p = \frac{1}{2} (c_1\theta_1^2 + c_2(\theta_2 - \theta_1)^2 + c_3(\theta_3 - \theta_2)^2) .$$

Uporedjivanjem sa izrazima (1) i (2) dolazi se do zaključka da je matrica koeficijenata inercije

$$A = \begin{Vmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{Vmatrix} = J \cdot I \ ,$$

a matrica koeficijenata krutosti

$$C = \begin{Vmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{Vmatrix} = c \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} .$$

U ovom slučaju je dinamička matrica $B = A^{-1}C = J^{-1}C$, tako da frekventna jednačina (10) postaje (za $h = cJ^{-1}$, $z = \omega^2$)

$$z^3 - 5hz^2 + 6h^2z - h^3 = 0, \quad z_1 = 0{,}198h, \quad z_2 = 1{,}555h, \quad z_3 = 3{,}247h.$$

Sada je potrebno odrediti modalnu matricu M iz (16), koju čine modalne kolone $\{\mu_{js}\}$. Modalne kolone se odredjuju zamenom odgovarajućih vrednosti z u jednačinu $(B - zI)\{\mu\} = 0$. Tako se zamenom $z_1 = 0{,}198h$ dobija

$$\begin{Vmatrix} 2h-z_1 & -h & 0 \\ -h & 2h-z_1 & -h \\ 0 & -h & h-z_1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \mu_{31} \end{Vmatrix} = 0,$$

iz čega sleduje $\mu_{11} = 1$, $\mu_{21} = 1{,}802$, $\mu_{31} = 2{,}25$. Slično se za $z = z_2$ dobija da je $\mu_{12} = 1$, $\mu_{22} = 0{,}445$, $\mu_{32} = -0{,}802$, a za $z = z_3$ dobija da je $\mu_{13} = 1$, $\mu_{23} = -1{,}247$, $\mu_{33} = 0{,}555$, čime je odredjena modalna matrica.

Opšti integrali diferencijalnih jednačina kretanja su

$$\theta_1 = c_1\cos(\omega_1 t - \alpha_1) + c_2\cos(\omega_2 t - \alpha_2) + c_3\cos(\omega_3 t - \alpha_3),$$

$$\theta_2 = c_1 \mu_{21}\cos(\omega_1 t - \alpha_1) + c_2 \mu_{22}\cos(\omega_2 t - \alpha_2) + $$
$$+ c_3 \mu_{23}\cos(\omega_3 t - \alpha_3),$$

$$\theta_3 = c_1 \mu_{31}\cos(\omega_1 t - \alpha_1) + c_2 \mu_{32}\cos(\omega_2 t - \alpha_2) + $$
$$+ c_3 \mu_{23}\cos(\omega_3 t - \alpha_3),$$

gde je $\omega_j = \sqrt{z_j}$ $\quad (j = 1,2,3)$.

ZAVRŠNI KOMENTAR

Glavna ideja ove knjige se sastoji u tome da se teorija matrica (ili bar jedan njen veliki deo) fundira i razvija pomoću različitih digrafova koji se pridružuju matricama. Za proizvoljnu matricu A definiše se njen Königov digraf G(A) (videti poglavlje 2). Ako je A kvadratna matrica, njoj se mogu pridružiti još i digrafovi G^A (poglavlje 3) i G_A (poglavlje 4). Pored ovih digrafova koriste se i neki drugi digrafovi ili grafovi (videti poglavlja 6, 10, 11).

U zavisnosti od problema koji se tretira uzima se ovaj ili onaj digraf u razmatranje. Ponekad je u istom problemu korisno posmatrati različite pridružene grafove. U izvesnim slučajevima je potrebno u pogodnom momentu preći sa jednog digrafa na drugi (na primer, prilikom svodjenja matrice na Jordanov kanonički oblik ili u odeljku 9.3).

Na osnovu ovoga naslov knjige je mogao da bude "Grafovska teorija matrica". Izabran je ipak nešto opštiji naslov "Kombinatorna teorija matrica" jer je teorija grafova deo kombinatorike a kombinatornih sadržaja ima mnogo i u standardnim pristupima teoriji matrica. Takvi kombinatorni sadržaji su i ovde zadržani.

Osnovu sprovedenog kombinatornog pristupa teoriji matrica čine sledeće teoreme i definicije: teorema 1 iz 2.2, koja daje grafovsku interpretaciju proizvoda matrica; primer 4 iz 2.2, koji opisuje dejstvo množenja sa permutacionim matricama; teorema 1 iz 3.1, koja dovodi u vezu stepene matrica i puteve u pridruženom digrafu; grafovske definicije determinante iz 4.1 i 4.6; grafovska interpretacija kofaktora iz 5.3 i definicije nerazloživosti i primitivnosti nenegativnih matrica iz poglavlja 9. Potrebno je primetiti da se grafovi u teoriji matrica ne pojavljuju u vezi sa nekim specijalnim ili nevažnim pitanjima, nego da se zaista centralni pojmovi i problemi mogu pogodno formulisati na bazi teorije grafova.

Na pisanje ove knjige autora su navele sledeće četiri grupe radova iz oblasti elektrotehnike, matematike i hemije:

1° Elektroinženjeri su razvili niz grafovskih metoda za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina koji se pojavljuju u teoriji električnih kola, u teoriji povratne sprege i dr. Ovi metodi koriste grafove protoka (C.L.Coates [13], [28], [10]), grafove protoka signala (S.J.Mason [67], [68], [93]) i Chanove grafove (S.P.Chan - H.N.Mai [11], [9]) i opisani su redom u odeljcima 6.2 - 6.4. Karakteristično je da pomenuti grafovi (a naročito Masonovi grafovi protoka signala) pružaju bolju sliku o fizičkom sistemu koji se opisuje nego što to čini odgovarajući sistem jednačina. Stoga su oni uvedeni i korišćeni intuitivno, pri čemu je opravdanost tih postupaka često bivala tek naknadno strogo teorijski dokazivana. Terminologija korišćena u ovoj knjizi oslanja se na terminologiju upotrebljavanu u elektrotehničkoj literaturi.

2° U matematičkoj literaturi postoji veliki broj radova u kojima su rezultati iz teorije matrica dobijani ili dokazivani sredstvima teorije grafova. Osnivač moderne teorije grafova, madjarski matematičar D.König je prvi koji je koristio grafovske metode u teoriji matrica [59], [60]. Doduše, i pre Königa bilo je izvesnih naslućivanja u ovom pravcu (videti [76], fusnota na str. 260, gde se spominje Cauchyevo pravilo za odredjivanje znaka sabirka u razvoju determinante). Videti takodje i novije radove koji pripadaju ovoj grupi ([29], [16], [31], [32], što predstavlja samo nekoliko primera). Interesantno je da su u literaturi objavljeni uglavnom originalni i dovoljno netrivijalni rezultati dobijeni pomoću teorije grafova a da se tek u novije vreme pojavilo nekoliko članaka u kojima se i elementarnija ali fundamentalna pitanja interpretiraju na ovaj način ([21], [37], [38], [62]).

3° U teoriji spektara grafova (videti odeljke 7.4, 8.3, 10.2; [15], [19], [82], [25], [26]), kao i u njenim primenama u hemiji i u drugim disciplinama (12.4, 11.5, 13.1; [2], [35]) koriste se rezultati teorije matrica za proučavanje grafova. Iako se ovde radi o upravo obrnutom postupku od onog u ovoj knjizi, veliki broj rezultata je doprineo da se uvidi, kako se i obrnuto, grafovi mogu koristiti u teoriji matrica.

4° Problemi elektrotehnike i tehnike uopšte doveli su do potrebe rešavanja sistema linearnih jednačina čija je matrica slabo popunjena a elementi su joj dati numerički. Specijalni metodi tretiranja ovakvih matrica koriste u znatnoj meri sredstva teorije grafova [85], [86], [89]. Neke od ovih tehnika su ukratko opisane u poglavlju 9.

Sinteza ideja iz navedene četiri grupe radova dovela je do ove knjige.

U prvom trenutku čitaocu može da izgleda čudno da se "jača" teorija (navodno, teorija determinanata i matrica) fundira i interpretira pomoću "slabije" teorije (teorije grafova). Tačno je da je teorija matrica stara i dobro razradjena disciplina. Teorija grafova je mladja (kao posebna matematička disciplina) ali je u poslednjih dvadesetak godina tako intenzivno proučavana i primenjivana da se više ne može o njoj govoriti kao o nerazradjenoj disciplini. Mnogi stari i teški problemi teorije grafova su danas rešeni (širim krugovima najpoznatiji takav problem je problem četiri boje, koji je rešen 1976. godine) a u toku je proces sredjivanja mnogobrojnih novih rezultata i njihove prezentacije u vidu monografija širim krugovima čitalaca. S druge strane, deo teorije grafova koji se koristi u teoriji matrica je najelementarniji deo teorije grafova a to znači i najbolje razradjen. "Najteža" teorema teorije grafova koja se koristi u ovoj knjizi je teorema 1 iz 4.8. "Rezultati" teorije grafova koji se koriste uglavnom su lako uočljive činjenice u stilu: "ako sve grane digrafa promene orijentaciju onda grane koje su obrazovale faktor, opet obrazuju jedan faktor". Takve "teoreme" nisu dokazivane nego su kao očigledne činjenice navodjene na mestima na kojima su bile potrebne. Uostalom graf se može shvatiti kao skup snabdeven binarnom relacijom (što znači da teorija grafova uključuje teoriju binarnih relacija - ili obrnuto), a binarna relacija je univerzalan pojam i, naravno, može da posluži za definiciju specijalnijih pojmova u svim granama matematike.

Ovu diskusiju ćemo dopuniti citiranjem interesantnih mesta iz nekoliko članaka poznatih matematičara.

U svom poslednjem radu [33] veliki matematičar G.F. Frobenius kaže na kraju:

"Teorija grafova, pomoću koje je g. König izveo gornju teoremu[1], je po mom mišljenju nedovoljno prikladno pomoćno sredstvo za razvijanje teorije determinanata. U ovom slučaju ona vodi do jedne sasvim specijalne teoreme koja je male vrednosti. Ono što je vredno u njenoj sadržini izraženo je u teoremi II".

U svojoj knjizi o grafovima [60] (koja predstavlja prvu takvu knjigu a trenutak njenog objavljivanja se danas uzima za trenutak formiranja teorije grafova kao samostalne matematičke discipline) D.König odgovara na ovu kritiku:

"Sasvim je prirodno da pisac knjige o grafovima neće potpisati ovakvo mišljenje. Razlozi koji se za i protiv vrednosti ili bezvrednosti jedne teoreme ili jednog metoda mogu navesti, imaju uvek, manje ili više, subjektivan karakter, tako da bi od malog naučnog interesa bilo kada bi mi ovde pokušavali da opovrgnemo Frobeniusovu tačku gledanja. Ali ako Frobenius želi da svoju oštru kritiku o primenljivosti grafova u teoriji determinanata potkrepi time što se njegova zaista "dragocena" teorema E ne može dokazati pomoću teorije grafova, tada se njegovo tvrdjenje, kao što smo videli, ne može održati. Dokaz pomoću teorije grafova, koji smo dali za teoremu E, izgleda nam jednostavniji i očigledniji, koji na prirodan način odgovara kombinatornom karakteru teoreme i koji vodi do interesantne generalizacije (teorema C)".

Nedavno se američki matematičar H.Schneider [84] na sledeći način osvrnuo na Frobeniusovo mišljenje:

"Ova krajnje kritička primedba je, izgleda, bez presedana u Frobeniusovim sabranim delima. Ona govori o korisnosti teorije grafova uopšte i posebno Königove teoreme... Danas postoji veliki broj primena grafova na matrice tako da danas ne može biti sumnje o korisnosti metoda teorije grafova u teoriji matrica... Ironično je da poslednje publikovane reči jednog od najvećih matematičara koji su živeli u ovom veku nisu izdržale sud vremena... Ja imam sledeću hipotezu... Poslednji rad Frobeniusa je pripremljen na osnovu Frobeniusovih beležaka ali Frobenius nije napisao poslednju verziju".

---

1) U ovoj knjizi to je teorema 2 iz 4.8.

Pri ovome H.Schneider izražava mišljenje da je neko od Frobeniusovih saradnika dopisao poslednji kritički pasus.

Kombinatorni pristup teoriji matrica, prihvaćen u ovoj knjizi, kao što je već rečeno, ne "smeta" postojećoj teoriji matrica. Ona se i na ovaj način može dobro izložiti. Pri ovakvom pristupu se neki rezultati lakše dokazuju (na primer, asocijativnost matričnog množenja, osobine determinanata, svodjenje na Jordanov kanonički oblik, dokazivanje jedinstvenosti normalne forme razložive matrice i, naročito, dokazivanje koreknosti grafovskih postupaka za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina). Činjenica da se grane sa prenosom 0 mogu da odstrane iz grafova pridruženih matricama, omogućava tretiranje slabo popunjenih matrica (sa opštim elementima - poglavlje 6, sa numeričkim elementima - poglavlje 9). Graf pridružen slabo popunjenoj matrici može se često odrediti iz konfiguracije fizičkog sistema koji se opisuje matricom što je značajno u primenama. Efikasnost grafovskih metoda kod slabo popunjenih matrica može da navede na pogrešan zaključak da su grafovski metodi primenljivi samo na slabo popunjene matrice. Ta efikasnost je samo jedna dodatna dobra strana ovog pristupa. Grafovski metodi su primenljivi na sve matrice a od problema koji se tretira i oblika matrice zavisi da li ćemo prednost dati grafovskim ili nekim drugim metodima. Uostalom postoje problemi u teoriji matrica gde se (bar za sada) ne vidi kakve bi prednosti dala grafovska interpretacija. Takvi problemi su u ovoj knjizi opisani na standardan način (na primer, odeljci o rangu matrice i dr.).

Navešćemo sada neke podatke o literaturi.

Digraf G(A) matrice A je nazvan Königov jer je D.König koristio u svojim radovima odgovarajući bihromatski graf (videti [60]). Definicija determinante iz 4.6 nazvana je König - Chanova jer je D.König povezivao članove u razvoju determinante sa separacijama digrafa G(A) a S.P.Chan je (sa saradnikom H.N.Mai) dao ideju za pravilo o odredjivanju znaka posmatranog člana [11], iako pravilo, predloženo u tom radu, nije korektno. Nijedan od ovih autora ne spominje mogućnost da se ovakva grafovska interpretacija uzme za definiciju determinante. Pravilo o odredjivanju znaka članova determinante je dato u [1] ali na neformalan način.

Digraf G_A je nazvan Coatesov digraf a formula (1) iz 4.1 za determinantu se može nazvati Coatesova formula jer ih je i uveo C.L.Coates u [13], mada je teško utvrditi ko je prvi došao na ideju o ovakvom tipu grafovske interpretacije determinante (videti o ovom diskusiju u [26], poglavlje 1). F.Harary je u [49], citirajući Coatesa, predložio da se njegova formula u nešto izmenjenom obliku (videti zadatak 11 iz 4.9) uzme za definiciju determinante. Zbog toga bi se definicija determinante iz 4.1 mogla nazvati Harary - Coatesova definicija. No izgleda da je sugestija F.Hararyja iz [49] bila zaboravljena pa je autor ove knjige nezavisno došao kasnije na istu ideju i polazeći od nje skicirao elementarnu teoriju determinanata [21]. Nešto kasnije, i opet nezavisno, slična stvar je objavljena u [37].

U spisku literature navedeni su uglavnom knjige i radovi koji su relevantni za grafovski pristup teoriji matrica. Od opšte literature autor se posebno koristio knjigama [72], [97], [66], ali je konsultovao i mnoge druge knjige o matricama od kojih je svega nekoliko ušlo u spisak literature. Uključeno je i nekoliko knjiga u kojima se teorija matrica primenjuje.

Autor knjige je više puta isprobao u univerzitetskoj nastavi predloženi grafovski pristup teoriji determinanata. Autor smatra da je ovakav pristup naročito pogodan u nastavi matematike na elektrotehničkim fakultetima jer se tamo u nastavi stručnih predmeta koriste grafovi protoka i grafovi protoka signala.

LITERATURA

1. A.C.Aitken, Determinants and matrices, Edinburgh 1948.
2. A.T.Balaban, Chemical application of graph theory, London 1976.
3. S.Barnett, Matrices in control theory, London 1971.
4. S.D.Bedrosian, Formulas for the number of trees in certain incomplete graphs, J.Franklin Inst. 289(1970), 67-69.
5. R.Bellman, Introduction to matrix analysis, New York - Toronto - London 1960.
6. H.A.Božilović, Ž.A.Spasojević, G.N.Božilović, Zbirka zadataka iz osnova elektrotehnike, II deo, Novi Sad 1972.
7. G.Burns, Introduction to group theory with applications, New York-San Francisco-London 1977.
8. A.Cayley, A theorem on trees, Quart. J.Math. 23(1889), 376-378.
9. S.P.Chan, Introductory topological analysis of electrical networks, New York 1969.
10. S.P.Chan, B.H.Bapna, A modification of the Coates gain formula for the analysis of linear systems, Int. J. Control 5(1967), no.5, 483-495.
11. S.P.Chan, H.N.Mai, A flow-graph method for the analysis of linear systems, IEEE Transactions on Circuit Theory, CT - 14(1967), no.3, 350-354.
12. W.K.Chen, Applied graph theory, Amsterdam-London 1971.
13. C.L.Coates, Flow graph solutions of linear algebraic equations, IRE Trans. Circuit Theory, CT-6(1959), 170-187.
14. L.Collatz, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig 1963.
15. L.Collatz, U.Sinogowitz, Spektren endlicher Grafen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 21(1957), 63-77.
16. C.D.H.Cooper, On the maximum eigenvalue of a reducible non-negative real matrix, Math. Z. 131(1973), 213-217.
17. D.Cvetković, Die Zahl der Wege eines Grafen, Glasnik Mat.

Ser. III 5(25)(1970), 205-210.
18. D.Cvetković, The Boolean operations on graphs - spectrum and connectedness, V kongres na matematičnite, fizičarite i astronomite na Jugoslavija, Ohrid, 14-19 septembri 1970, Zbornik na trudovite, tom I, Skopje 1973, 115-119.
19. D.M.Cvetković, Graphs and their spectra, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn.Fak. Ser.Mat.Fiz. No.354-No.356(1971), 1-50.
20. D.M.Cvetković, The spectral method for determining the number of trees, Publ. Inst.Math. (Beograd) 11(25)(1971), 135-141.
21. D.M.Cvetković, The determinant concept defined by means of graph theory, Mat.Vesnik 12(27)(1975), 333-336. Prevod na holandski: Definitie en berekening van determinanten met behulp van grafen, Nieuw Tijdsch.v.Wisk. 63(1976), no.4, 209-215. Srpsko-hrvatska verzija: Definisanje pojma determinante sredstvima teorije grafova, u knjizi [25], 257-264.
22. D.Cvetković, I.Gutman, The algebraic multiplicity of the number zero in the spectrum of a bipartite graph, Mat.Vesnik 9(24)(1972), 141-150.
23. D.M.Cvetković, J.H.van Lint, An elementary proof of Lloyd's theorem, Proc. Kon. Neder.Akad. v. Wet. 80(1977), 6-10.
24. D.M.Cvetković, R.P.Lučić, A new generalization of the concept of the p-sum of graphs, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn.Fak. Ser.Mat.Fiz. No.302-No.319(1970), 67-71.
25. D.Cvetković, M.Milić, Teorija grafova i njene primene, II izmenjeno i prošireno izdanje, Beograd 1977.
26. D.M.Cvetković, M.Doob, H.Sachs, Spectra of graphs - Theory and applications, Berlin-New York 1980,1982; Kiev 1984.
27. D.Cvetković, I.Gutman, N.Trinajstić, Graphical studies on the relations between the structure and reactivity of conjugated systems: The role of non-bonding molecular orbitals, J.Mol. Struct. 28(1975), 289-303.
28. C.A.Desoer, The optimum formula for the gain of a flow graph or a simple derivation of Coates'formula, Proc. IRE, 48(1960), 883-889.
29. A.L.Dulmage, N.S.Mendelsohn, Graphs and matrices, u knjizi: Graph theory and theoretical physics, (Editor: F.Harary),

London-New York 1967, 167-227.

30. W.Feller, An introduction to probability theory and its applications, New York 1957.

31. M.Fiedler, Some applications of the theory of graphs in matrix theory and geometry, Theory of graphs and its applications, Proc. Symp. held in Smolenice in June 1963, Prague 1964, 37-41.

32. M.Fiedler, Inversion of bigraphs and connections with the Gauss elimination, Graphs, hypergraphs and block systems. Proc. Symp. on Comb. Analysis, held in Zielona Góra, September 1976, Zielona Góra, 1976, 57-68.

33. G.F.Frobenius, Über zerlegbare Determinanten, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Berl., 1917, 274-277.

34. P.M.Gibson, An identity between permanents and determinants, Amer.Math. Monthly 76(1969), 270-271.

35. A.Graovac, I.Gutman, N.Trinajstić, Topological approach to the chemistry of conjugated molecules, Berlin-Heidelberg-New York 1977.

36. A.Graovac, I.Gutman, N.Trinajstić, T.Živković, Graph theory and molecular orbitals, Application of Sachs theorem, Theoret. Chim. Acta 26(1972), 67-78.

37. J.V.Greenman, Graphs and determinants, Math. Gazette 60 (1976), 241-246.

38. J.V.Greenman, Graphs and Markov chains, Math. Gazette 60 (1976), 49-54.

39. I.Gutman, Bounds for total π-electron energy, Chem. Phys. Letters 24(1974), 283-285.

40. I.Gutman, Odredjivanje koeficijenata u hemijskim jednačinama. Egzistencija rešenja, Glasnik Hem. Društva Beograd 40(1975), 195-200.

41. I.Gutman, The acyclic polynomial of a graph, Publ. Inst. Math.(Beograd) 22(1977), 63-69.

42. I.Gutman, The energy of a graph, Berichte der Mathematisch-Statistischen Sektion in Forschungszentrum Graz 103(1978), 1-22.

43. I.Gutman, Topologija i stabilnost konjugovanih ugljovodonika. Zavisnost ukupne pi-elektronske energije od molekulske topologije, Glasnik Hem. Društva Beograd 43(1978).

44. I.Gutman, N.Trinajstić, Graph theory and molecular orbitals, Topics Curr. Chem. 42(1973), 49-93.
45. I.Gutman, N.Trinajstić, Primjena teorije grafova u kemiji. II. Veza izmedju teorije molekularnih orbitala i teorije grafova. Kemija u industriji (Zagreb) 22(1973), 237-240.
46. I.Gutman, N.Trinajstić, Primjena teorije grafova u kemiji. III. Alternantni ugljikovodici i njihova svojstva, Kemija u industriji (Zagreb) 23(1974), 329-333.
47. I.Gutman, N.Trinajstić, Graph theory and molecular orbitals, XV, The Hückel rule, J.Chem. Phys. 64(1976), 4921-4925.
48. F.Harary, A graph theoretic method for the complete reduction of a matrix with a view toward finding its eigenvalues, J. Math. Phys. 38(1959), 104-111.
49. F.Harary, The determinant of the adjacency matrix of a graph, SIAM Rev. 4(1962), 202-210.
50. F.Harary, Graph theory, Reading 1969.
51. H.Hosoya, Topological index, Bull. Chem. Soc. Japan 44 (1971), 2332-2339.
52. H.Hutschenreuter, Einfacher Beweis des Matrix-Gerüst-Satzes der Netzwerktheorie, Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau 13 (1967), 403-404.
53. D.Ivanović, Kvantna mehanika, Beograd 1974.
54. W.Jackson, A characterization of the reducibility of nonnegative matrices, Proc. 8-th South-Eastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Winnipeg 1977, 381-384.
55. P.W.Kasteleyn, Graph theory and crystal physics, Graph theory and theoretical physics (ed. F.Harary), London-New York 1967, 43-110.
56. J.D.Kečkić, Algebra I, Elementi linearne algebre i teorije polinoma, Beograd 1973.
57. G.Kirchhoff, Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird, Ann. Phys. Chem. 72(1847), 497-508.
58. J.V.Knop, I.Gutman, N.Trinajstić, Primjena teorije grafova u kemiji VII. Prikazivanje kemijskih struktura u dokumen-

taciji. Kemija u industriji (Zagreb) 24(1975), 505-510.
59. D.König, Über Graphen und ihre Anwendungen auf Determinantentheorie und Mengenlehre, Math. Ann. 77(1916), 453-465.
60. D.König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936 (drugo izdanje: New York 1950).
61. J.H.van Lint, Coding theory, Berlin-Heidelberg-New York 1971.
62. E.K.Lloyd, Matrices, graphs and adjoints, Math. Gazette 61 (1977), 201-204.
63. G.Lukatela, Statistička teorija telekomunikacija i teorija informacija, skripta, Beograd 1978.
64. B.J.McClelland, Properties of the latent roots of a matrix: the estimation of π-election energies, J.Chem.Phys. 54 (1971), 640-643.
65. C.C.MacDuffee, The theory of matrices, New York 1946.
66. M.Marcus, H.Minc, A survey of matrix theory and matrix inequalities, Boston 1964.
67. S.J.Mason, Feedback theory, some properties of signal flow graphs, Proc.IRE 41(1953), No.9, 1144-1156.
68. S.J.Mason, Feedback theory, further properties of signal flow graphs, Proc.IRE 44(1956), No.7, 920-926.
69. M.Milić, Flow graph evaluation of the characteristic polynomial of a matrix, IEEE Trans. Circuit Theory CT-11(1964), 423-424.
70. D.S.Mitrinović, Matrice i determinante, Beograd 1972.
71. D.S.Mitrinović, Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima, I, V izmenjeno i dopunjeno izdanje, Beograd 1978.
72. D.S.Mitrinović, D.Ž.Djoković, Polinomi i matrice, Beograd 1966 (II izdanje: Beograd 1975).
73. D.S.Mitrinović, D.Mihajlović, P.M.Vasić, Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija, VII izdanje, Beograd 1977.
74. E.W.Montroll, Lattice statistics, Applied combinatorial mathematics (ed. E.F. Beckenbach), New York-London-Sydney 1964, 96-143.
75. J.W.Moon, Enumerating of labelled trees, Graph theory and theoretical physics (ed. F.Harary), New York 1967, 262-272.
76. T.Muir, The theory of determinants in the historical order

of development, I, New York 1960.
77. M.Parodi, La localisation des valeurs caractéristiques des matrices et ces applications, Paris 1959.
78. J.K.Percus, Combinatorial methods, New York 1969.
79. B.Popović, Osnovi elektrotehnike I, Beograd 1976.
80. B.Lj.Radosavljević, Poglavlja iz mehanike, I deo, Mašinski fakultet, Beograd 1969.
81. H.Sachs, Über selbstkomplementäre Graphen, Publ. Math. (Debrecen) 9(1962), 270-288.
82. H.Sachs, Beziehungen zwischen den in einem Graphen enthaltenen Kreisen und seinem charakteristischen Polynom, Publ. Math.(Debrecen) 11(1963), 119-134.
83. L.I.Schiff, Quantum mechanics, New York-Toronto-London 1955.
84. H.Schneider, The concept of irreducibility and full indecomposability of a matrix in the works of Frobenius, König and Markov, Linear Algebra and Appl. 18(1977), 139-162.
85. Sparse matrix computations (ed. J.R.Bunch, D.J.Rose), Academic Press, New York-San Francisco-London 1976.
86. Sparse matrix techniques, Advanced course held at the Technical University of Denmark, Copenhagen, August 9-12, 1976, (ed. V.A.Barker), Lecture Notes Math. No.572, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1977.
87. M.Stojić, Kontinualni sistemi automatskog upravljanja, Beograd 1978.
88. V.Strassen, Gaussian elimination is not optimal, Numer. Math. 13(1969), No.4, 354-356.
89. R.P.Tewarson, Sparse matrices, New York-London 1973.
90. D.Tošić, Uvod u numeričku analizu, Beograd 1978.
91. H.M.Trent, A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 40(1954), 1004-1007.
92. J.H.Wilkinson, The algebraic eigenvalue problem, Oxford 1965.
93. D.Younger, A simple derivation of Mason's gain formula, Proc. IEEE 51(1963), 1043-1044.
94. P.Zumbulović, Dokaz principa superpozicije, teoreme recipročnosti i Theveninove teoreme pomoću Coatesovih grafova

protoka, u knjizi [25], 252-257.

95. R.Zurmühl, Matrizen und ihre technischen Anwendungen, Berlin-Gottingen-Heidelberg 1961.

96. В.В.Белов, Е.М.Воробьев, В.Е.Шаталов, Теория графов, Москва 1976.

97. Р.Ф.Гантмахер, Теория матриц, Москва 1966.

98. А.К.Кельманс, О числе деревьев графа I, Автоматика и телемеханика 26(1965), 2194-2204.

99. А.К.Кельманс, О числе деревьев графа II, Автоматика и телемеханика 1966, no.2, 56-65.

100. И.Н.Ляшенко, Х.М.Мередов, Численное решение некоторых спектральных задач теории колебаний, Киев 1978.

101. А.Н.Мелихов, Ориентированние графи и конечные автомати, Москва 1971.

102. В.П.Сигорский, Математический апарат инженера, Киев 1975.

103. Н.Ф.Степанов, М.Е.Ерлыкина, Г.Г.Филипов, Методы линейной алгебры в физической химии, Москва 1976.

104. К.Б.Яцимирский, Применение метода графов к исследованию сложных равновесий, Журн. неорг. химии 17(1972), 2323-2328.

105. D.Cvetković, Teorija grafova i njene primene, Naučna knjiga, Beograd 1986.

106. D.Cvetković,Z.Cvetković, Jedna modifikacija Coatesove formule za analizu električnih mreža, XXV konferencija ETAN-a, Mostar 1981.

107. D.Cvetković,S.Simić, Kombinatorika - klasična i moderna, Naučna knjiga, Beograd 1984.

108. H.Straubing, A combinatorial proof of the Cayley-Hamilton theorem, Discrete Math. 43(1983), 273-279.

109. D. Zeilberger, A combinatorial approach to matrix algebra, Discrete Math. 56(1985), 61-72.

D O D A T A K

PREGLED JOŠ NEKIH POJMOVA I REZULTATA TEORIJE MATRICA

1. Nenegativne matrice

Za nenegativne matrice važi sledeća teorema (videti, na primer, [97], str. 365):

Teorema 1. Nenegativna matrica ima nenegativnu sopstvenu vrednost r, takvu da moduli svih drugih sopstvenih vrednosti nisu veći od r. Toj "maksimalnoj" sopstvenoj vrednosti odgovara sopstveni vektor sa nenegativnim koordinatama.

U daljem tekstu ćemo vektor sa pozitivnim, odnosno nenegativnim, koordinatama zvati pozitivan, odnosno nenegativan vektor.

Navešćemo sada još neke teoreme iz teorije nenegativnih matrica koje, izmedju ostalog, otktivaju razne spektralne osobine grafova.

Teorema 2 (videti, na primer, [97], str. 367). "Maksimalna" sopstvena vrednost r' proizvoljne glavne submatrice reda $< n$ nenegativne matrice A reda n nije veća od "maksimalne" sopstvene vrednosti r matrice A. Ako je A nerazloživa matrica, uvek je $r' < r$. Ako je A razloživa matrica, onda bar za jednu glavnu submatricu važi $r' = r$.

Teorema 3 (videti, na primer, [97], str. 372). Pri uvećanju bilo kojeg elementa nenegativne matrice A "maksimalna" sopstvena vrednost matrice ne opada. Ona strogo raste ako je A nerazloživa matrica.

Teoreme 2 i 3 utvrdjuju da kod jako povezanih grafova svaki podgraf ili delimični graf (pa, prema tome, i svaki delimični podgraf) ima indeks koji nije veći od indeksa grafa.

Teorema 4 (videti, na primer, [26]). Neka je A realna simetrična matrica, r i q najveća i najmanja njena sopstvena vrednost a x sopstveni vektor za r. Za glavnu submatricu B matrice A neka je q' najmanja sopstvena vrednost sa sopstvenim vektorom y. Tada je $q' \geqslant q$. Ako je $q' = q$, vektor y je ortogonalan na projekciju vektora x na potprostor koji odgovara submatrici B.

Teorema 5 (videti, na primer, [97], str. 377). Ako je "maksimalna" sopstvena vrednost r nenegativne matrice A jednostruka i njoj odgovaraju pozitivni sopstveni vektori u matrici A i transponovanoj matrici A^T, matrica A je nerazloživa.

Teorema 6 (videti, na primer, [97], str. 376). "Maksimalnoj" sopstvenoj vrednosti r nenegativne matrice A odgovara pozitivni sopstveni vektor u matrici A i A^T ako i samo ako se matrica A može permutacijom vrsta i istom permutacijom kolona predstaviti u kvazidijagonalnom obliku $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)$, gde su $A_1, A_2, \ldots, A_s$ nerazložive matrice od kojih svaka ima broj r za svoju "maksimalnu" sopstvenu vrednost.

Teorema 7 (videti, na primer, [26]). Neka je $A = \| a_{ij} \|_1^n$ realna simetrična matrica sa sopstvenim vrednostima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ $(\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n)$. Za zadatu particiju $\{1,2,\ldots,n\} = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_m$, gde je $|\Delta_i| = n_i > 0$, posmatrajmo odgovarajuće razbijanje na blokove matrice $A = \| A_{ij} \|_1^m$, gde je A_{ij} blok tipa $n_i \times n_j$. Neka je e_{ij} = sum A_{ij} i neka je $B = \| e_{ij}/n_i \|_1^m$ (e_{ij}/n_i je srednja vrednost zbira elemenata u vrsti matrice A_{ij}). Neka su $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ $(\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_m)$ sopstvene vrednosti matrice B. Tada važe nejednakosti

$$\lambda_{n-m+i} \leqslant \mu_i \leqslant \lambda_i \quad (i = 1,2,\ldots m).$$

Ako se pretpostavi da je u svakom bloku A_{ij} zbir elemenata u vrsti jednak za svaku vrstu, iskaz gornje teoreme može se učiniti preciznijim. Neka je $B = \| b_{ij} \|_1^m$.

Teorema 8 (videti, na primer, [26]). Neka je matrica A razbijena na blokove kao u teoremi 7. Neka je zbir elemenata u svakoj vrsti bloka A_{ij} jednak b_{ij}. Tada je spektar matrice B sadržan u spektru matrice A (imajući u vidu i višestrukosti sopstvenih vrednosti), tj. karakteristični polinom matrice A deljiv je sa karakterističnim polinomom matrice B.

2. Norma matrice i lokalizacija sopstvenih vrednosti

Normom[1] matrice A naziva se realni broj $\|A\|$ koji zadovoljava sledeće osobine:

1° $\|A\| \geqslant 0$; $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

2° $\|aA\| = |a|\,\|A\|$ (a realan ili kompleksan broj).

U specijalnom slučaju je $\|-A\| = \|A\|$.

3° $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$ (nejednakost trougla);

4° $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$,

pri čemu su A i B matrice koje se mogu pomnožiti.

Iz ove osobine izlazi da za kvadratne matrice važi nejednakost

$\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$.

Ako norma matrice zadovoljava sledeće dopunske uslove, naziva se kanoničkom normom:

5° Neka je $|A|$ matrica čiji su elementi moduli elemenata matrice A. Tada je

$|a_{ij}| \leqslant \|A\|$.

6° Iz nejednakosti $|A| \leqslant |B|$ sleduje $\|A\| \leqslant \|B\|$, gde se usvaja da je $|A| \leqslant |B|$ ako je $|a_{ij}| \leqslant |b_{ij}|$.

Za matrice se uvode sledeće tri osnovne kanoničke norme:

a) m-norma: $\|A\|_m = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$,

tj. maksimalni zbir modula elemenata neke vrste matrice A

b) ℓ-norma: $\|A\|_\ell = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$,

tj. maksimalni zbir modula elemenata neke kolone matrice A.

c) k-norma: $\|A\|_k = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$

Primer. Za matricu $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$ imamo $\|A\|_m = 7$, $\|A\|_\ell = 6$, $\|A\|_k =$

---

1) Prvi deo ovog odeljka je preuzet iz [90].

$= \sqrt{30}$.

Pored ovih normi uvodi se p-norma pomoću

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i,j} |a_{i,j}|^p\right)^{1/p} \qquad (p > 0).$$

Teorema 1 (I. Schur; videti, na primer, [72], str. 362). **Neka** su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti kompleksne matrice $A = \|a_{ij}\|_1^n$. Tada je

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = (\|A\|_k)^2,$$

pri čemu znak jednakosti važi ako i samo ako je A normalna matrica.

Teorema 2 (S.A.Geršgorin; videti, na primer, [72], str. 364). Sopstvene vrednosti kompleksne matrice $A = \|a_{ij}\|_1^n$ nalaze se u uniji krugova $|z - a_{ij}| \leqslant R_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, gde je $R_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - a_{ii}$.

Ako je $|a_{ii}| > R_i$ za $i = 1,2,\ldots,n$, nijedan od krugova ne obuhvata koordinatni početak pa je matrica A regularna. Ova posledica Goršgorinove teoreme naziva se Hadamardova teorema.

Iz teoreme 2 može se izvesti i Perronova teorema, na osnovu koje za sopstvene vrednosti λ_i kvadratne kompleksne matrice A važi nejednakost

$$|\lambda_i| \leqslant \min\{\|A\|_m, \|A\|_\ell\}.$$

3. Gramova matrica

Matrica

$$G = \begin{Vmatrix} (x_1,x_1) & (x_1,x_2) & \cdots & (x_1,x_n) \\ (x_2,x_1) & (x_2,x_2) & & (x_2,x_n) \\ \vdots & & & \\ (x_n,x_1) & (x_n,x_2) & & (x_n,x_n) \end{Vmatrix},$$

pri čemu (x_i,x_j) označava skalarni proizvod m-dimenzionalnih realnih vektora x_i i x_j, naziva se Gramova matrica vektora

$x_1,x_2,\ldots,x_n$. Ako je X matrica čije su kolone vektori $x_1,x_2,\ldots,x_n$, važi relacija $G = X^TX$. Primenom Binet-Cauchyjeve formule dobija se $\det G = 0$ za $n > m$ i $\det G = (\det X)^2$ za $m = n$. Gramova matrica vektora je singularna ako i samo ako su ti vektori linearno zavisni. Gramova matrica je simetrična i pozitivno semidefinitna. Svaka simetrična pozitivno semidefinitna matrica je Gramova matrica nekih vektora. Analogni rezultati važe za kompleksne vektore.

Ako je λ najmanja sopstvena vrednost matrice susedstva A neorijentisanog grafa G, matrica $-\frac{1}{\lambda}(A - \lambda I)$ je simetrična, pozitivno semidefinitna i ima jedinice na glavnoj dijagonali te postoje jedinični vektori $x_1,x_2,\ldots,x_n$ za koje je to Gramova matrica. Vektori $x_1,x_2,\ldots,x_n$ odredjuju graf G. Oni predstavljaju, redom, čvorove $1,2,\ldots,n$ grafa. Ako su čvorovi i i j nesusedni vektori x_i i x_j su medjusobno ortogonalni. Ako su i i j susedni vektori x_i i x_j zaklapaju ugao $\arccos \frac{1}{-\lambda}$.

4. Invarijantni faktori i elementarni delioci

Polinomna matrica ili λ-matrica je matrica čiji su elementi polinomi po promenljivoj λ. Minori reda r polinomne matrice A takodje su polinomi po λ. Neka je $D_r(\lambda,A) = D_r(\lambda)$ najveći zajednički delilac svih minora reda r matrice A, pri čemu je najstariji koeficijent polinoma $D_r(\lambda)$ jednak 1.

Dve λ-matrice su ekvivalentne ako se jedna iz druge može dobiti pomoću konačnog broja sledećih elementarnih transformacija:

1° Množenje vrste ili kolone brojem različitim od 0.

2° Zamena dve vrste ili kolone.

3° Dodavanje jedne vrste (ili kolone) pomnožene nekim polinomom po λ, nekoj drugoj vrsti (odnosno) koloni.

Ekvivalentnost matrica je relacija ekvivalencije.

Svaka λ-matrica je ekvivalentna jednoj matrici oblika

$$\mathrm{diag}(i_1(\lambda),i_2(\lambda),\ldots,i_r(\lambda),0,0,\ldots,0), \tag{1}$$

gde su $i_k(\lambda)$ $(k = 1,2,\ldots,r)$ polinomi po λ sa najstarijim koeficijentom jednakim 1, i gde je $i_{k+1}(\lambda)$ deljiv sa $i_k(\lambda)$ za $k = 1,2,\ldots,r-1$. Matrica oblika (1) naziva se Smithov kanonični oblik.

Smithov kanonični oblik je jedinstven za zadatu matricu A i važe relacije

$$i_1(\lambda) = D_1(\lambda, A), \quad i_k(\lambda) = \frac{D_k(\lambda, A)}{D_{k-1}(\lambda, A)} \quad (k=2,3,\ldots,r),$$

gde je r rang matrice A. Polinomi $i_k(\lambda)$ $(k = 1,2,\ldots,r)$ nazivaju se invarijantni faktori λ-matrice A. Dve λ-matrice su ekvivalentne ako i samo ako imaju iste invarijantne faktore.

Koreni delioci $(\lambda - \lambda_0)^{\alpha}$ sa najvećim mogućnim eksponentom α invarijantnih faktora nazivaju se elementarni delioci λ-matrice A.

Ako je A kvadratna matrica čiji su elementi brojevi, pod invarijantnim faktorima i elementarnim deliocima matrice A podrazumevaju se invarijantni faktori i elementarni delioci λ-matrice $\lambda I - A$. Matrice A i B su slične ako i samo ako su λ-matrice $\lambda I - A$ i $\lambda I - B$ ekvivalentne. Uz pomoć elementarnih delilaca matrice A može se odrediti njen Jordanov kanonički oblik. Minimalni polinom kvadratne matrice reda n jednak je n-tom invarijantnom faktoru matrice $\lambda I - A$.

Problematika skicirana u ovom odeljku opširnije je obradjena, na primer, u knjizi [72].

5. Matrične i grafovske jednačine

Ako su $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ i $g(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ matrične funkcije matrica $X_1,X_2,\ldots,X_n$, relacija

$$f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = g(X_1,X_2,\ldots,X_n) \tag{1}$$

naziva se matrična jednačina. Rešiti jednačinu (1) znači odrediti sve n-torke $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ matrica koje identički zadovoljavaju (1). Znak jednakosti u (1) označava jednakost matrica.

Posmatraćemo isključivo matrične jednačine sa jednom nepoznatom, tj. jednačine oblika

$$f(X) = g(X) \,, \tag{2}$$

gde je X nepoznata matrica. U literaturi su opisana svojstva i način rešavanja, na primer, sledećih matričnih jednačina, koje predstavljaju specijalne slučajeve jednačine (2) (videti [97])

$$AX = XB, \quad AX = XA, \quad AX - XB = C$$

$$X^m = A, \quad P(X) = 0, \quad e^X = B,$$

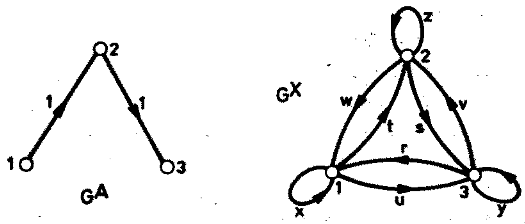
gde su A,B,C zadate kvadratne matrice reda n, X nepoznata matrica (istog reda) i P(X) matrični polinom po matrici X.

Teorija matričnih jednačina ne može ovde biti izložena. Navešćemo samo jednu specijalnu jednačinu i rešiti je grafovskim metodima.

Posmatrajmo jednačinu $X^2 = A$, gde je

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

i gde je X nepoznata realna matrica.



sl. 1

Digraf G^A je prikazan na sl. 1 a na istoj slici je prikazan pokušaj rekonstrukcije digrafa G^X. Na osnovu teoreme 1 iz 3.1 može se redom zaključiti sledeće. Pošto je $A^3 = 0$, to je $X^6 = 0$, tj. X je nilpotentna matrica. Za karakteristični polinom $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ matrice X važi $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Stoga je $\operatorname{tr} X = x + y + z = -a_1 = 0$. Pošto je $\operatorname{tr} X^2 = \operatorname{tr} A = 0$, zbir prenosa zatvorenih puteva dužine 2 u G^X jednak je 0. Ako je $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, morao bi zbir $2(ru + sv + tw)$ prenosa zatvorenih puteva dužine 2 koji ne sadrže petlje biti različit od nule što prema formuli (10) iz 7.1 implicira $a_2 \neq 0$. Iz ovog sleduje $x = y = z = 0$, te G^X nema petlji.

Sada vidimo da u G^X sigurno postoje grane sa prenosima

u, v, w takve da je $uv = 1$ i $wu = 1$. No tada postoji put dužine 2 izmedju čvorova 3 i 1 sa prenosom $vw \neq 0$, što je u kontradikciji sa činjenicom da G^A ne sadrži granu izmedju čvorova 3 i 1. Dakle, jednačina $X^2 = A$ nema rešenja u skupu realnih matrica.

Neka je $G^X = G$. Uvedimo grafovske funkcije $\mathcal{F}(G)$ i $\mathcal{G}(G)$ pomoću

$$\mathcal{F}(G) = G^{f(X)}, \quad \mathcal{G}(G) = G^{g(X)}.$$

Tada se iz (2) dobija grafovska jednačina

$$\mathcal{F}(G) = \mathcal{G}(G), \tag{3}$$

koju treba rešiti po G. Pri ovome jednakost grafova treba shvatiti kao jednakost grafova sa označenim čvorovima (i granama).

Interesantan slučaj nastaje kod matrične jednačine $f(X) = C$, gde je C fiksirana matrica za koju važi relacija $P^{-1}CP = C$ za svaku permutacionu matricu P. Kod ovakve jednačine egzistencija rešenja $X = R$ povlači egzistenciju rešenja $X = P^{-1}RP$ jer je

$$f(P^{-1}RP) = P^{-1}f(R)P = P^{-1}CP = C.$$

U odgovarajućoj grafovskoj jednačini $\mathcal{F}(G) = G^C$ znak jednakosti možemo interpretirati kao izomorfizam grafova sa označenim granama. Ovakve jednačine možemo shvatiti kao grafovske jednačine u pravom smislu reči a odgovarajuće matrične jednačine rešavati grafovskim metodima.

Sličan slučaj nastaje kada jednačina (2) ima osobinu da je

$$f(P^{-1}XP) = P^{-1}f(X)P, \quad g(P^{-1}XP) = P^{-1}g(X)P .$$

Tada u grafovskoj jednačini (3) opet možemo jednakost shvatiti kao izomorfizam. Primeri 9 i 10 iz 2.5 odnose se na ovaj slučaj.

O grafovskim jednačinama, uopšte, videti članak: D. Cvetković, S. Simić, A bibliography of graph equations, J. Graph Theory 3(1979), 311-324.

6. Razno

1. Ako su matrice A i B tipa $m \times n$ i $n \times p$, respektivno,

važi dvostruka nejednakost.

$$\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B - n \leqslant \operatorname{rang}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B).$$

Ovo je Sylvesterova teorema (videti, na primer, [66], str.28).

2. Ako su elementi determinante funkcije jedne promenljive, tada za izvod determinante po toj promenljivoj važi sledeća formula

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & & f_{2n} \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & & f_{nn} \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} f_{11}' & f_{12}' & \cdots & f_{1n}' \\ f_{21} & f_{22} & & f_{2n} \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & & f_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21}' & f_{22}' & & f_{2n}' \\ \vdots & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & & f_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & & f_{2n} \\ \vdots & & & \\ f_{n1}' & f_{n2}' & & f_{nn}' \end{vmatrix}.$$

3. Ako su elementi matrice $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$ funkcije promenljive t tada se izvod $\frac{dA}{dt}$ matrice A definiše pomoću

$$\frac{dA}{dt} = \left\|\frac{d}{dt}\, a_{ij}\right\|_{m,n}.$$

Na sličan način definiše se i integral matrice A.

Sistem linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 ,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 ,$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n ,$$

može se napisati u matričnom obliku

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b ,$$

gde je $A = \|a_{ij}\|_1^n$, $x^T = \|x_1\ x_2 \ldots x_n\|$ i $b^T = \|b_1\ b_2 \ldots b_n\|$.

4. Neka je $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$. Matrica $C_r(A)$, čiji su elementi determinante kvadratnih podmatrica reda r (tj. minori reda r) matrice A, naziva se <u>r-ta adjungovana matrica</u> matrice A. Kvadratnih podmatrica reda r ima $\binom{m}{r}\binom{n}{r}$ i njihove determinante su u $C_r(A)$ poredjane prema leksikografskom uredjenju kombinacija rednih brojeva vrsta, odnosno kolona, koje odredjuju submatricu.

Ako je

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

onda je

$$C_2(A) = \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}.$$

Ako je A kvadratna matrica reda n, tada je

$$\det C_r(A) = (\det A)^{\binom{n-1}{r-1}}.$$

Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti matrice A, tada $\binom{n}{r}$ proizvoda $\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_r}$, gde je $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, predstavljaju sopstvene vrednosti matrice $C_r(A)$.

P R I L O Z I

PSEUDOINVERZNA MATRICA I NEKE NJENE PRIMENE

Srdjan S. Stanković

1. Uvod

U okviru rešavanja mnogih praktičnih problema obrade eksperimentalnih podataka u cilju identifikacije ili optimizacije sistema različite prirode (tehničke, biološke, ekonomske, itd.) javlja se potreba za rešavanjem po x jednačine

$$Ax = y \,, \tag{1}$$

gde je A matrica dimenzija $m \times n$, a x i y vektori odgovarajućih dimenzija, u opštem slučaju sa kompleksnim elementima. Kada je A kvadratna nesingularna matrica, tj. kada je $m = n = \text{rang } A$, rešenje jednačine (1) je $x = A^{-1}y$. Kada je A singularna ili nekvadratna matrica, rešenje u opštem slučaju ne mora biti jedinstveno; štaviše, skup linearnih jednačina (1) može biti i nekonzistentan. Rešenje se tada može tražiti u aproksimativnom smislu tako što se problem rešavanja jednačine (1) transformiše u problem minimizacije kvadratne forme

$$J = \|Ax - y\|^2 = (Ax - y)^*(Ax - y) \tag{2}$$

u odnosu na x, gde je Y^* transponovano-konjugovana matrica matrice Y. Rešenje ovog problema takodje može biti nejedinstveno. Tada se pod <u>najboljim aproksimativnim rešenjem</u> jednačine (1) podrazumeva takav vektor x_0 koji zadovoljava za svako x ili

$$\|Ax - y\| > \|Ax_0 - y\| \tag{3}$$

ili

$$\|Ax - y\| = \|Ax_0 - y\| \,, \quad \|x\| \geqslant \|x_0\| \,, \tag{4}$$

tj. x_0 je vektor minimalne norme koji minimizira J. Ovakav izbor u praktičnim problemima često odgovara minimizaciji indeksa performanse sistema uz minimalnu potrošnju energije, goriva, itd. Najbolje aproksimativno rešenje jednačine (1) u smislu relacija (3) i (4) je jedinstveno i dato relacijom

$$x_o = A^+y \,, \tag{5}$$

gde je A^+ tzv. pseudoinverzna ili generalisana inverzna matrica matrice A.

2. Konstrukcija pseudoinverzne matrice

Ako je rang $A = r$, tada se može izabrati neka baza $\{c_1,\dots,c_r\}$ prostora kolona ove matrice. Bazni vektori mogu jednostavno biti linearno nezavisne kolone matrice A. Tada je svaka kolona u A linearna kombinacija ovih vektora, tj. ako je $C = \|c_1\dots c_r\|$, a A^j j-ta kolona matrice A, sleduje da je $A^j = Cd_j$ $(j = 1,2,\dots,n)$, gde je d_j odgovarajući r-dimenzionalni vektor, odnosno

$$A = CD \,, \tag{6}$$

gde je $D = \|d_1\dots d_r\|$. Može se lako pokazati da je rang $C =$ rang $D = r$.

Polazeći od (6), E.H.Moore [1] je definisao pseudoinverznu matricu A^+ relacijom

$$A^+ = D^*(DD^*)^{-1}(C^*C)^{-1}C^*, \tag{7}$$

R.Penrose [2] je nezavisno dao sledeću definiciju:

Definicija. Za proizvoljnu matricu A pseudoinverzna matrica je jedinstvena matrica X koja zadovoljava sledeće relacije

$$AXA = A \,, \tag{8}$$

$$XAX = X \,, \tag{9}$$

$$(AX)^* = AX \,, \tag{10}$$

$$(XA)^* = XA \,. \tag{11}$$

Lako se može pokazati da $X = A^+$, gde je A^+ definisano relacijom (7), zadovoljava (8)-(11). Na primer,

$$AA^+A = CDD^*(DD^*)^{-1}(C^*C)^{-1}C^*CD = CD = A \,, \tag{12}$$

$$(AA^+)^* = A^{+*}A^* = C(C^*C)^{-1}(DD^*)^{-1}DD^*C \;= AA^+. \tag{13}$$

Da bi se pokazala jedinstvenost pseudoinverzne matrice, pretpostavimo da X i Y zadovoljavaju (8)-(11). Tada sleduje

(14) $$X = XAX = A^*X^*X = A^*Y^*A^*X^*X = A^*Y^*XAX = A^*Y^*X = YAX =$$
$$= YX^*A^* = YAYX^*A^* = YY^*A^*X^*A^* = YY^*A^* = YAY = Y .$$

Pseudoinverzna matrica, definisana na ekvivalentan način preko (7) ili preko (8)-(11), često se naziva Moore-Penroseovom pseudoinverznom matricom. Inače, postoje i drukčije definicije pseudoinverzne matrice koje koriste samo pojedine relacije iz skupa (8)-(11) [4].

Napomena 1. Iz (7) sleduje da je, u slučaju kvadratne nesingularne matrice A, $A^+ = A^{-1}$. Kada je $r = n$ u (6), tada je $D = I_n$, te izraz za A^+ postaje $(A^*A)^{-1}A^*$, dok je, pri $r = m$, $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$. Pseudoinverzni vektor vektora A je, očigledno, $A^+ = A^*/\|A\|^2$.

Primer. Ako je u jednačini (1)

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{Vmatrix}, \quad y = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix},$$

tada je, s obzirom da je rang A = 1,

$$A^+ = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{Vmatrix}^+ = \left(\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix} \|1 \;\; 2\| \right)^+ = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}\frac{1}{6}\|1 \;\; 2 \; -1\| = \frac{1}{30}\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{Vmatrix},$$

$$x_o = A^+y = \frac{1}{30}\begin{Vmatrix} 2 \\ 4 \end{Vmatrix} = \frac{1}{15}\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Napomena 2. Numeričko izračunavanje pseudoinverzne matrice u generalnom slučaju, kada je rang $A = r < \min(m,n)$, nije direktno. Najčešće se koristi rekurzivni metod Grevillea [3], [4], [5], zasnovan na pogodnom razbijanju matrice A na blokove.

Teorema 1. Jednačina (1) ima rešenje ako i samo ako je

(15) $$AA^+y = y ;$$

generalno rešenje je dato izrazom

(16) $$x = A^+y + (I_n - A^+A)z ,$$

gde je z proizvoljan n-dimenzionalan vektor.

Dokaz. Ako x zadovoljava (1), važi relacija

$$(53)\qquad z_i(t) = z_{io}\exp(q_{ii}t) + \exp(q_{ii}t)\int_{t_o}^{t}\exp(-q_{ii}\tau)f(\tau)d\tau,$$

odakle je evidentno da $z_i(t) \to 0$ za $t\to\infty$, s obzirom da je Re $q_{ii} < 0$. Dakle, $z_i(t) \to 0$, kada $t\to\infty$ za svako $i = 1,2,\dots,n$: dovoljnost uslova teoreme su dokazani. Potrebnost uslova sledi ako se usvoji suprotna pretpostavka.

Naglasimo da se konstantna matrica A, čije sve karakteristične vrednosti poseduju negativne realne delove, naziva stabilnom matricom. Saglasno dokazanoj teoremi, stabilna matrica stanja definiše asimptotski stabilan sistem.

Za ma koju stabilnu matricu A, broj $\alpha > 0$, odredjen sa

$$(54)\qquad \max_i \text{Re}\,\lambda_i = -\alpha$$

definiše stepen stabilnosti linearnog stacionarnog sistema.

3.3. Linearne matrične jednačine. U prethodnom izlaganju postavljene su linearne diferencijalne matrične jednačine (3), (41) i (43), kojima su odredjene, redom, fundamentalna matrica, Gramova matrica kontrolabilnosti i Gramova matrica observabilnosti. Ove matrične jednačine, kao što će biti i pokazano u daljem izlaganju, imaju važnu ulogu u algebarskoj teoriji upravljanja linearnim dinamičkim sistemima.

U gornjem smislu, neka je potrebno proceniti veličinu integrala

$$(55)\qquad J = \int_{t_o}^{t_1} x^T(t)Q(t)x(t)dt,$$

gde je $Q(t)$ kvadratna matrica n-tog reda čiji su članovi neprekidne funkcije vremena u intervalu $[t_o,t_1]$, duž ma koje trajektorije $x(t)$ sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

Integral J se može izraziti u funkciji početnog stanja $x(t_o)$, polazeći od rešenja (2) sistema:

$$(56)\qquad J = \int_{t_o}^{t_1} x^T(t_o)\Phi^T(t,t_o)Q(t)\Phi(t,t_o)x(t_o)dt \overset{\text{def}}{=} x^T(t_o)M(t_o,t_1)x(t_o)\ ,$$

gde je sa $M(t_o,t_1)$ označen integralni izraz

$$(57)\qquad M(t_o,t_1) = \int_{t_o}^{t_1} \Phi^T(t,t_o)Q(t)\Phi(t,t_o)dt$$

koji je identičan sa (34), definicionoj relaciji Gramove matrice observabilnosti.

Na taj način, polazni integral J je dat preko kvadratne forme početnog ...ja $x(t_o)$ i $M(t_o,t_1)$, matrice te kvadratne forme. Ako je poznata fundamentalbazi eksperimentalnih podataka, vektora nepoznatih parametara $\theta^T = \|\theta_1 \dots \theta_n\|$u linearnim modelima (funkcijama regresije) tipa

(23) $$\eta(x,\theta) = E\{y|x\} = f^T(x)\theta = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\theta_i \ ,$$

gde je $x^T = \|x_1 \dots x_k\|$ vektor realnih nezavisno promenljivih, y realna zavisno promenljiva, a $E\{\cdot\}$ simbol matematičkog očekivanja. Ako je izvršeno N merenja veličine y pri poznatim vrednostima x, tada zamena u (23) daje

(24) $$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1)\theta_1 + \dots + f_n(x_1)\theta_n + e_1 \ , \\ &\vdots \\ y_N &= f_1(x_N)\theta_1 + \dots + f_n(x_N)\theta_N + e_N \ , \end{aligned}$$

gde su $e_1, \dots, e_N$ greške prilikom merenja. Ako se uvedu oznake

(25) $$Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{Vmatrix} , \quad X = \begin{Vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \vdots & & \\ f_1(x_N) & & f_n(x_N) \end{Vmatrix} , \quad E = \begin{Vmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_N \end{Vmatrix} ,$$

jednačina (24) postaje

(26) $$Y = X\theta + E \ .$$

Za ocenjivanje vektora nepoznatih parametara θ može se koristiti metod najmanjih kvadrata. U okviru ovog metoda ocena $\hat{\theta}$ vektora θ je definisana uslovom

(27) $$\min_{\theta} \|E\|^2 = \min_{\theta} (Y - X\theta)^T(Y - X\theta) \ .$$

Iz relacije $\operatorname{grad}_{\theta} \|E\|^2 = 0$ sleduju tzv. normalne jednačine

(28) $$X^T X \hat{\theta} = X^T Y \ .$$

Ako je $|X^T X| \neq 0$, rešenje normalnih jednačina je jedinstveno

(29) $$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = X^+ Y \ ,$$

imajući u vidu da je, prema napomeni 1, $(X^T X)^{-1} X = X^+$ pri datim uslovima.

Kada je $|X^T X| = 0$, rešenje normalnih jednačina je višeznačno

(30) $$\hat{\theta} = (X^TX)^+X^TY + (I - H)Z = X^+Y + (I - H)Z ,$$

gde je $H = (X^TX)^+X^TX = X^+X$, a Z proizvoljan vektor (teorema 1), imajući takodje u vidu da je $(X^TX)^+X^T = X^+$ [4].

Ako je $E\{e_i\} = 0$; $E\{e_ie_j\} = \sigma^2\delta_{ij}$, može se pokazati da je pri $|X^TX| \neq 0$ ocena (29) nepomerena ($E\{\hat{\theta}\} = \theta$) i sa najmanjom disperzijom u okviru skupa svih linearnih nepomerenih ocena. Disperziona matrica je tada

(31) $$D\{\hat{\theta}\} = E\{(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T\} = \sigma^2(X^TX)^{-1} .$$

Kada je $|X^TX| = 0$, ocena definisana relacijom (30) pomerena je čak i pri $Z = 0$. Ocene postaju nepomerene jedino u slučaju $(X^TX)^+ = (X^TX)^{-1}$.

U okviru disperzione analize se često, pri nejedinstvenosti rešenja normalnih jednačina, traže ocene nekih linearnih kombinacija parametara, koje se koriste pri formiranju kriterijuma provere različitih hipoteza. Može se pokazati [5], [6] da funkcija $\psi = c^T\theta$, pri uslovu $X^+Xc = c$, ima linearnu nepomerenu ocenu sa najmanjom disperzijom, koja je jedinstvena u klasi linearnih nepomerenih ocena. Ova ocena je data izrazom $\hat{\psi} = c^T\hat{\theta} = c^TX^+Y$ [5].

Napomena 4. Prikazana analiza se može proširiti na generalniji slučaj kada je $D\{E\} = E\{EE^T\} = V$, gde je $|V| \neq 0$. Može se pokazati da je tada nepomerena ocena minimalne disperzije funkcije $\psi = c^T\theta$, pri $X^+Xc = c$, data izrazom $\hat{\psi} = c^T\hat{\theta}$, gde je

(32) $$\hat{\theta} = (X^TV^{-1}X)^+X^TV^{-1}Y .$$

Lako se može pokazati da $\hat{\theta}$, definisano relacijom (32), minimizira generalizovanu sumu kvadrata

(33) $$\|Y - X\theta\|^2_{V^{-1}} = (Y - X\theta)^TV^{-1}(Y - X\theta).$$

Kada je $V = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_N^2)$, ova suma postaje

(34) $$\sum_{i=1}^{N}(y_i - f^T(x_i)\theta_i)^2/\sigma_i^2 .$$

Pojedini članovi u sumi imaju težine koje su obrnuto proporcionalne tačnosti izvršenih merenja.

Detaljna analiza je za opšti slučaj data u [5], [6].

3.2. Linearno programiranje

Posmatra se problem linearnog programiranja: traži se n-dimenzionalni vektor x takav da maksimizira kriterijum

$$z = cx \quad (35)$$

pri ograničenjima[1)]

$$a \leqslant Ax \leqslant b \quad (36)$$

gde je A matrica dimenzija $m \times n$, a i b m-dimenzionalni vektori-kolone, a c n-dimenzionalni vektor-red. Uz pretpostavke da je problem rešiv i da je optimalno z konačno, kao i da je rang $A = m$, eksplicitno rešenje postavljenog problema linearnog programiranja je

$$x = \sum_{i \in K} A^i a_i + \sum_{i \in L} A^i b_i + \sum_{i \in M} A^i (\xi_i b_i + (1-\xi_i) a_i) + (I_n - A^+ A) y \ , \quad (37)$$

gde su $K = \{i \mid cA^i < 0\}$, $L = \{i \mid cA^i > 0\}$, $M = \{i \mid cA^i = 0\}$, $0 \leqslant \xi_i \leqslant 1$, $A^1, \ldots, A^m$ kolone matrice A^+, dok je y proizvoljan vektor-kolona.

Dokaz, kao i detaljnija diskusija, vezana za definiciju pseudoinverzne matrice relacijom (8), dati su u [4].

Literatura

1. E.H.Moore, General Analysis, Part I, Mem. Amer. Philos. Soc. 1(1935), 197-209.
2. R.Penrose, A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc., (1955), 51, 406-413.
3. Ф.Р.Гантмахер, Теория матриц, Наука, Москва, 1966.
4. S.Barnett, Matrices in Control Theory, Van Nostrand, New York, 1971.
5. A.Albert, Regression and the Moore-Penrose pseudoinversion, Academic Press, 1972.
6. В.И.Денисов, Математическое обеспечение системы ЭВМ-експериментатор, Наука, Москва, 1977.

1) Ovde se koristi konvencija da je $X \leqslant Y$ ako je svaki element matrice X manji od ili jednak odgovarajućem elementu matrice Y.

PRIMENA SLABO POPUNJENIH MATRICA U MODELOVANJU SLOŽENIH ELEKTRIČNIH MREŽA

Dušica Ćalović

Za formiranje matematičkih modela neophodnih pri rešavanju čitavog niza problema vezanih za eksploataciju i upravljanje složenim električnim mrežama koriste se opšte metode analize mreža bazirane na izvesnim fundamentalnim konceptima kao što su graf, čvor, grana, stablo, kostablo, presek, kontura i drugi. Pri tome obično polaznu tačku u postupku stvaranja adekvatnog matematičkog modela realnoj mreži predstavlja izbor pogodne ekvivalentne mreže koja u sebi sadrži sve informacije potrebne za obrazovanje željenog modela. Od složenosti i prirode proučavanog problema zavise osobine ekvivalentne mreže i oblik njenoga grafa [1], [2].

U skupu svih složenih mreža, elektroenregetske mreže obrazuju jedan specijalan podskup mreža sa promenljivom strukturom. Ova osobina elektroenergetskih mreža prisutna je u oba podsistema iz kojih je sastavljena: proizvodnog podsistema i prenosne mreže. U prvom podsistemu promenljivost strukture izvora i potrošača energije vezanih u čvorovima mreže ima reperkusija na dimenzije i vrednosti elemenata vektora stanja, a u drugom na oblik grafa prenosne mreže. Čvorovima grafa zamenjuju se pojedini sistemi sabirnica u visokonaponskim postrojenjima, a granama grafa prenosni vodovi i interekonektivni transformatori. Za razliku od drugih tipova složenih mreža u granama elektroenregetskih mreža postoje rasklopni aparati pomoću kojih se u eksploataciji mreža vrše neprekidne promene oblika grafa mreže. Pri tome treba naglasiti da se pod promenama topološke strukture grafa elektroenergetske mreže podrazumevaju promene broja grana i promene broja čvorova.

Na sadašnjem stupnju razvoja elektroenregetske mreže spadaju u kategoriju mreže sa niskim stepenom povezanosti. Ako se broj grana mreže obeleži sa L, a broj čvorova prenosne mreže sa N, tada je stepen povezanosti elektroenregetske mreže definisan sa $e = \frac{L}{N-1} - 1$. Zemlja-čvor kao čvor nultnog potencijala obeležava se sa $N + 1$ [3].

Zbog niskog stepena povezanosti matematički modeli elektroenergetskih mreža u stacionarnom režimu formiraju se pomoću matrica koje u sebi sadrže veoma mali broj nenultih elemenata. Provera ovakvih modela i algoritama za mreže sa velikim brojem čvorova i grana zahteva obradu na vrlo brzim računarima sa velikom memorijom. Za njihovo rešavanje pored direktnih, egzaktnih metoda kod kojih se rešenje problema ako postoji dobija posle konačnog broja računskih operacija, koriste se i indirektne ili iterativne metode bazirane na beskonačnom broju iteracija kod kojih rešenje postoji samo ako postupak konvergira. Nesumljivo da primenom matematičkih metoda za redukciju slabo popunjenih matrica zahtevi za memorijom i brzinom računanja postaju znatno umereniji.

Usled ubrzanog razvoja elektroenergetskih sistema i sve veće složenosti elektroenergetskih mreža s početka sedamdesetih godina sve češće se naglašava potreba za neprekidnim praćenjem radne konfiguracije elektroenergetskih mreža [4]. Aktivnosti vezane za ove probleme predstavljaju značajan skup funkcija nadzora u eksploataciji elektroenergetskih sistema. One se baziraju na akviziciji i obradi podataka koji se putem teleinformacionog prenosa dobijaju iz sistema i u osnovi rešavaju probleme identifikacije konfiguracije (topološke strukture) elektrotenergetskih mreža. Neophodno je da razvijeni matematički modeli u opštem slučaju sadrže sledeća tri osnovna aspekta pomoću kojih se kompletno opisuje proces funkcionisanja sistema: 1^{o} topološka svojstva, koja zavise od oblika grafa ekvivalentne mreže; 2^{o} kvantitativna svojstva, vezana za vrednosti parametara komponenata mreže; 3^{o} logička svojstva, koja opisuju zavisnost kvalitativno različitih funkcionalnih stanja sistema od njegovih topoloških i kvantitativnih osobina.

U postupcima identifikacije topološke strukture elektroenergetskih mreža polazi se od tačno opisanih topoloških karakteristika komponenata koje ulaze u sastav mreže da bi se posle uvodjenja pogodno izabranih matrica i za usvojeni orijentisani graf mreže formirao model prilagodjen željenoj nameni.

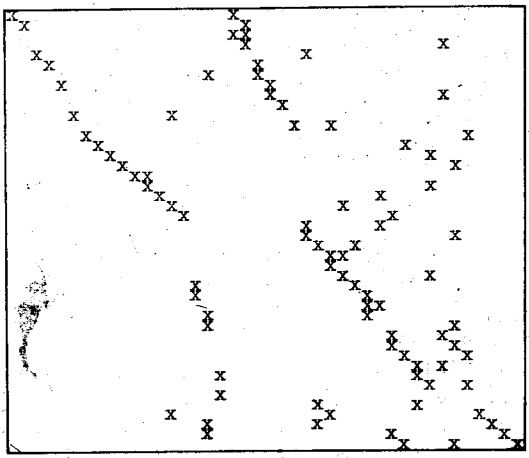
Medjutim, zbog prisustva niza neizvesnosti ne može se sastaviti model koji bi preslikavao ponašanje modelovanog sistema sa apsolutnom tačnošću, usled čega se u postupku modelovanja mora neprekidno voditi računa o nameni modela. Za identifikaciju konfiguracije elektroenergetskih mreža, pored determinističkih postupaka, razvijeni su i stohastički postupci [5], [6], [7].

Deterministički pristup polazi od poznate matrice admitansa u baznoj konfiguraciji i poredi proračunate i izmerene vrednosti elemenata vektora stanja, uz istovremeno posmatranje nekog indeksa koji predstavlja kriterijum za detekciju nastalih promena u konfiguraciji mreže.

Stohastički pristup polazi od problema estimacije stanja sa zašumljenim merenjima gde se osmatra neki pogodno izabrani indeks performansi. Ova etimacija bazira se na poznavanju konfiguracije mreže, koja je zavisna od radnog stanja. Otuda problemi odredjivanja konfiguracije i stacionarnih stanja elektroenergetskih mreža medjusobno koegzitiraju te je neophodno da se rešavaju zajedno. Estimacija stanja zasnovana na pogrešnim informacijama o konfiguraciji mreže bila bi besmislena.

Provera razvijenih metoda identifikacije topološke strukture elektroenrgetskih mreža izvršena je na mreži Srbije na naponskim nivoima 220 kV i 400 kV. Za stanje mreže krajem 1977. i početkom 1978. godine. Ekvivalentna mreža kojom je zamenjena realna mreža sadržala bi 52 grane i 43 čvora u usvojenoj, baznoj konfiguraciji. Medjutim, radi postizanja veće tačnosti pri primeni stohastičkog postupka, koji pored podataka o admitansama grana i o naponima čvorova koristi merne vrednosti tokova aktivnih snaga, u mreži su izostavljene grane u kojima teku samo reaktivne snage. Na taj način ekvivalentna mreža zamenjena je grafom koji sadrži 44 grane i 39 čvorova. Ugao napona 39. čvora uzet je kao referentni.

Primenom razvijenih algoritama pomoću kojih se sprovodi estimacija sumnjivih parametara grana mreže formirana je matrica J_r tipa 44x42. Struktura matrice data je sledećom šemom; nenulti elementi označeni su znakom x.



U sledećoj tabeli navedeni su nenulti elementi i njihov položaj u matrici. Prva kolona daje vrednost elementa, druga broj vrste a treća broj kolone tog elementa.

6,88	1	1	-136,13	16	37	10,32	32	17
-6,88	1	19	13,38	17	11	-10,32	32	37
6,88	2	2	-13,38	17	12	106,25	33	32
-6,88	2	20	4,94	18	12	-106,25	33	36
7,49	3	19	-4,94	18	35	4,07	34	32
-7,49	3	20	14,34	19	13	-4,07	34	37
25,18	4	20	-14,34	19	31	11,22	35	33
-25,18	4	36	27,53	20	14	-11,22	35	38
6,88	5	3	-27,53	20	28	30,24	36	34
-6,88	5	25	14,30	21	15	-30,24	36	36
17,85	6	4	-14,30	21	32	-11,52	37	18
-17,85	6	21	8,62	22	25	11,52	37	34
-42,74	7	17	-8,62	22	31	5,01	38	35
42,74	7	21	3,86	23	25	-5,01	38	38
11,15	8	5	-3,86	23	37	28,29	39	18
-11,15	8	22	25,10	24	26	43,58	40	26
57,47	9	22	-25,10	24	29	-43,58	40	34
-57,47	9	36	15,12	25	27	10,89	41	14
12,88	10	23	-15,12	25	28	-10,89	41	27
11,44	11	6	24,01	26	27	-0,51	41	39
-11,44	11	14	7,67	27	28	-15,12	42	17
16,76	12	24	-7,67	27	35	15,12	42	26
-16,76	12	27	11,44	28	16	0,20	42	40
13,76	13	7	-11,44	28	29	16,94	43	17
-13,76	13	38	13,76	29	16	-16,94	43	32
5,39	14	8	-13,76	29	30	0,41	43	41

-5,39	14	33	17,32	30	30	3,78	44	33
13,76	15	9	-17,32	30	31	-3,78	44	37
-13,76	15	35	5,85	31	17	-0,004	44	42
136,13	16	10	-5,85	31	30			

L i t e r a t u r a

1. G.W.Stagg, A.H.El-Abiad, Computer Methods on Power System Analysis, Mc Graw-Hill, New York, N.Y., 1968.
2. H.E.Brown, Solution of Large Networks by Matrix Methods, Wiley, New York, N.Y., 1975.
3. R.Pélissier, Les réseaux d'énergie électrique, Tomes 1,2, Dunod, Paris, 1971.
4. G.H.Couch, I.F.Morrison, Data Validation and Topology Determination for Power System Monitoring and Control, IEEE PES Summer Meeting, July 14-19, 1974, Paper No. C 74361-2.
5. D.Ćalović, Deterministički pristup indirektnoj identifikaciji konfiguracije elektroenergetskih mreža, Referat br. 32123 za XIV Savetovanje JUKO CIGRE, Sarajevo, maj 1979.
6. A.S.Debs, "Parameter Estimation for Power Systems in the Steady-State, IEEE Trans. on Auto.Control, Vol. AC-19, No.6, Dec. 1974, pp.882-886.
7. Y.Sekine, H.Suzuki, A Method for Estimating Network Configuration of Power System, 1975 PSCC, Cambridge, England, Sept. 1-5, 1975, Paper No. 2.3/1.

MATRIČNI METODI U ALGEBARSKOJ TEORIJI UPRAVLJANJA LINEARNIM DINAMIČKIM SISTEMIMA

Trajko B. Petrović

1. Matematički model linearnog sistema u prostoru stanja

Veliki broj radova posvećenih savremenim metodima projektovanja multivarijabilnih dinamičkih sistema obično počinje frazom: "Neka je dat linearni nestacionarni dinamički sistem upravljanja:

(1a) $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0,$

(1b) $y(t) = C(t)x(t),$

gde su: $x(t)$ n-dimenzionalni vektor stanja, $u(t)$ m-dimenzionalni vektor upravljanja (ulaza) i $y(t)$ r-dimenzionalni vektor izlaza sistema. Članovi matrica $A(t) = \|a_{ij}(t)\|_1^n$, $B(t) = \|b_{ij}(t)\|_{n,m}$ i $C(t) = \|c_{ij}(t)\|_{r,n}$ su u opštem slučaju, funkcije vremena.

Razmotrimo diferencijalnu jednačinu stanja slobodnog sistema, odnosno sistema u odsustvu upravljanja: $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Ako je $A(t)$ neprekidna funkcija za svako t, rešenje jednačine stanja slobodnog sistema ima oblik:

(2) $x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0)$ za svako t,

gde je $\Phi(t,t_0)$ fundamentalna kvadratna matrica sistema reda n, takva da je:

(3) $\dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0)$, za svako t, $\Phi(t_0,t_0) = I$

(I je nxn jednačina matrica).

Matrica $\Phi(t,t_0)$ se odlikuje sledećim osobinama [1]:

(4a) $\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0) = \Phi(t_2,t_0)$, za svako t_0, t_1, t_2;

(4b) $\Phi(t_1,t_0) = \Phi^{-1}(t_0,t_1)$, za svako t_0, t_1;

(4c) $\dot{\Phi}^T(t_0,t) = -A^T(t)\Phi^T(t_0,t)$, za svako t, t_0;

(4d) $\det\Phi(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\,A(\tau)\,d\tau \neq 0$, za svako t,t_0.

Svojstvo (4c) ukazuje da se $\Phi^T(t_0,t)$ može proglasiti fundamentalnom matricom tzv. adjungovanog sistema čiji je model $\dot{q}(t) = -A^T(t)q(t)$, dok iz (4d) sledi da je $\Phi(t,t_0)$ nesingularna matrica.

Pod pretpostavkom da je $A(t)$ i dalje neprekidna, a $B(t)$ i $u(t)$ u delovima neprekidne funkcije za svako t, matrična jednačina kretanja (rešenja) stanja linearnog nestacionarnog sistema (1) može se za svako t prikazati u vidu

$$\text{(5)} \quad x(t) = \Phi(t,t_o)x(t_o) + \int_{t_o}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

Ovaj rezultat se jednostavno dokazuje direktnim unošenjem rešenja (5) u diferencijalnu jednačinu stanja (1a).

Matrična jednačina kretanja izlaza $y(t)$ se nalazi smenom integralne jednačine (5) kretanja stanja u (1b):

$$\text{(6)} \quad y(t) = C(t)\Phi(t,t_o)x(t_o) + \int_{t_o}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Za $x(t_o) = 0$, poslednja jednačina poprima oblik:

$$\text{(7)} \quad y(t) = \int_{t_o}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_o}^{t} G(t,\tau)u(\tau)d\tau,$$

gde je

$$\text{(8)} \quad G(t,\tau) = \begin{cases} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) & (t \geq \tau), \\ 0 & (t > \tau). \end{cases}$$

$G(t,\tau)$ je matrica impulsnih odziva modela (1) multivarijabilnog linearnog kontinualnog nestacionarnog dinamičkog sistema, budući da je element ove matrice na mestu (i,j) odziv u trenutku t i-te koordinate vektora izlaza, na jediničnu impulsnu pobudu na j-tom ulazu sistema u trenutku $\tau > t_o$, kada su sve druge komponente vektora ulaza i svi početni uslovi jednaki nuli.

U poslednjem slučaju, za slobodan sistem sa konstantnim parametrima: $A(t) = A$, fundamentalna matrica je data sa:

$$\text{(9)} \quad \Phi(t,\tau) = \Phi(t-\tau) = e^{A(t-\tau)},$$

gde je po definiciji

$$\text{(10)} \quad e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}.$$

Red (10) konvergira za svaku konstantnu matricu A i svako t.

Korišćenjem (9), jednačina (6) za sistem sa konstantnim parametrima (pored matrice A, i B i C su konstantne matrice) je oblika:

$$\text{(11)} \quad y(t) = Ce^{A(t-t_o)}x(t_o) + C\int_{t_o}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

tako da matrica impulsnih odziva stacionarnog sistema sada zavisi samo od $(t-\tau)$:

(12) $$G(t-\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B, \qquad t \geq \tau.$$

U cilju formiranja diskretizovanog modela kontinualnog sistema (1), usvojimo $t_o = t_k$ i $t = t_{k+1}$ u integralnoj jednačini (5):

(13a) $$x(t_{k+1}) \overset{def}{=} x(k+1) = \Phi(t_{k+1},t_k)x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1},\tau)B(\tau)u(t_k)d\tau$$

(13b) $$= E(k)x(k) + F(k)u(k),$$

gde su

(14) $$E(k) \overset{def}{=} \Phi(t_{k+1},t_k) \quad i \quad F(k) \overset{def}{=} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1},\tau)B(\tau)d\tau$$

matrica stanja i upravljanja, sada, diskretizovanog modela sistema.

Gornji model je postavljen pod pretpostavkom da vektor ulaza $u(t)$ zadovoljava:

(15) $$u(t) = u(t_k) \overset{def}{=} u(k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0,1,2,\dots,$$

gde je $t_{k+1} - t_k = T$ perioda diskretizacije.

Definicijom fundamentalne matrice diskretnog sistema (13b):

(16) $$\Phi(k+1,m) = E(k)\Phi(k,m), \quad \Phi(k,m) = \prod_{i=m}^{k-1} E(i) \text{ za } k > m, \ \phi(m,m) = I,$$

jednačine kretanja stanja $x(k)$ i izlaza $y(k)$ su:

(17a) $$x(k) = \Phi(k,0)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k,j+1)F(j)u(j)$$

(17b) $$= \Phi(k,m)x(m) + \sum_{j=m}^{k-1} \Phi(k,j+1)F(j)u(j),$$

(18) $$y(k) = C(k)x(k).$$

Usvajanjem $x(0) = 0$, jednačina (18) kretanja izlaza $y(k)$ sistema je:

(19) $$y(k) = \sum_{j=0}^{k-1} C(k)\Phi(k,j+1)F(j)u(j) \overset{def}{=} \sum_{j=0}^{k-1} G(k,j)u(j),$$

gde je

(20) $$G(k,j) = \begin{cases} C(k)\Phi(k,j+1)F(j) & (k > j) \\ 0 & (k \leq j) \end{cases}$$

matrica impulsnih odziva modela (13) i (18) multivarijabilnog linearnog diskretnog nestacionarnog sistema. Primetimo, da za sistem sa konstantnim parametrima (matrice E, F i C su konstantne), fundamentalna matrica $\Phi(k)$ predstavlja jedinstveno rešenje diferentne matrične jedačine

(21) $\Phi(k+1) = E\Phi(k),\quad \Phi(0) = I;\quad \Phi(k) = E^k,\quad k = 0,1,2,\ldots,$

dok matrica $G(k,j)$ impulsnih odziva zavisi samo od $(k-j)$.

2. Kontrolabilnost i observabilnost

U analizi i projektovanju linearnih dinamičkih sistema dominantnu ulogu imaju uslovi kontrolabilnosti i observabilnosti, prvi put uvedeni u originalnom radu [2]. Ovi uslovi su i polazni u izučavanju strukturnih osobina sistema i u rešavanju niza problema optimalnog i modalnog upravljanja.

Razmotrimo linearni nestacionarni dinamički sistem upravljanja (1). Dati sistem je kontrolabilan po stanju u vremenskom intervalu $[t_o,t_f]$, ako i samo ako egzistira upravljanje $u(t)$ definisano na $[t_o,t_f]$, koje prevodi ma koji početni vektor stanja $x(t_o)$ u ma koji finalni vektor stanja $x(t_f)$.

Polazeći od matrične jednačine (5) kretanja stanja sistema (1), x_o u trenutku t_o može biti prevedeno u x_f u trenutku t_f, ako i samo ako egzistira neki ulazni signal $u(t)$ u vremenu $[t_o,t_f]$, takav da je

(22) $$x_f-\phi(t_f,t_o)x(t_o) = \int_{t_o}^{t_f} \phi(t_f,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau .$$

Definišimo nxn Gramovu matricu kontrolabilnosti:

(23) $$W(t_o,t_f) = \int_{t_o}^{t_f} \Phi(t_f,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_f,\tau)d\tau$$

i pokažimo da se vektor (t_o,x_o) može prevesti u (t_f,x_f) ako i samo ako postoji n-dimenzionalni vektor η, takav da je

(24) $$x_f - \Phi(t_f,t_o)x_o = W(t_o,t_f)\eta .$$

Ako postoji vektor η, takav da važi (24), upravljanje $u(t) = B^T(t)\Phi^T(t_f,t)\eta$ prevodi (t_o,x_o) u (t_f,x_f). I obrnuto, pretpostavimo da ne egzistira vektor η za koji važi (24). Tada se može odrediti takav n-dimenzionalni vektor z da je ispunjeno $W(t_o,t_f)z = 0$ i $z^T(x_f-\phi(t_f,t_o)x_o) \neq 0$. Dalje, neka je $u(t)$ vektor kojim se postiže cilj upravljanja. Iz (22) sledi

(25) $$z^T(x_f-\Phi(t_f,t_o)x_o) = \int_{t_o}^{t_f} z^T\Phi(t_f,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \neq 0 .$$

Saglasno definiciji vektora z, dobija se

$$(26)\qquad z^T W(t_0,t_f)z = \int_{t_0}^{t_f} z^T\Phi(t_f,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_f,\tau)z d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \|B^T(\tau)\Phi^T(t_f,\tau)z\|^2 d\tau = 0,$$

što je tačno (u uslovima neprekidnosti B, Φ i usvojene vektorske norme $\|\cdot\|$), ako i samo ako je $B^T(\tau)\Phi^T(t_f,\tau)\, z = 0$ za $\tau\epsilon[t_0,t_f]$. Ispunjenje poslednjeg uslova implicira

$$(27)\qquad \int_{t_0}^{t_f} z^T\Phi(t_f,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = 0,$$

što protivreči (25). Dakle, u uslovima uvedenih pretpostavki ne egzistira upravljanje koje prevodi sistem iz (t_0,x_0) u (t_f,x_f).

Iz prethodnog sledi da je sistem (1) kontrolabilan na $[t_0,t_f]$ ako i samo ako za ma koji n-dimenzionalni vektor z egzistira n-dimenzionalni vektor η takav da je $z = W(t_0,t_f)\eta$. U opštem slučaju, matrična jednačina $M\eta = z$ ima rešenje za ma koje z, ako i samo ako je broj nezavisnih kolona matrice M jednak dimenziji vektora z. Na taj način je pokazano da je nesingularnost Gramove matrice $W(t_0,t_f)$ potreban i dovoljan uslov kontrolabilnosti stanja sistema (1). Tada, neposredno iz (22), sledi, da za kontrolabilan sistem (1), upravljanje

$$(28)\qquad u(t) = B^T(t)\Phi(t_f,t)W^{-1}(t_0,t_f)(x_f-\Phi(t_f,t_0)x_0)$$

prevodi (t_0,x_0) u (t_f,x_f).

Sasvim jednostavno se može pokazati da ovi rezultati ostaju u važnosti i za diskretni model (13) nestacionarnog sistema. Vremenski interval $[t_0,t_f]$ je zamenjen sekvencom k_0, $k_0+1,\ldots,k_f$, tako da diskretni ekvivalent (23) ima oblik:

$$(29)\qquad W(k_0,k_f) = \sum_{k=k_0}^{k_f} \Phi(k_0,k)F(k)F^T(k)\Phi^T(k_0,k).$$

Pod observabilnošću sistema podrazumeva se mogućnost odredjivanja stanja slobodnog sistema na osnovu poznavanja izlaza u nekom vremenskom intervalu. Tačnije, sistem je observabilan na intervalu $[t_0,t_f]$ ako i samo ako se stanje sistema u trenutku t može jednoznačno odrediti na osnovu vrednosti izlaza u intervalu $[t_0,t_f]$. U daljem tekstu, postavićemo uslove observabilnosti linearnih diskretnih sistema, a zatim, posebno, i za linearne kontinualne sisteme.

Razmotrimo linearni diskretni nestacionarni sistem u odsustvu upravljanja: $x(k+1) = E(k)x(k)$, $y(k) = C(k)x(k)$. Smenom (17b) u (18) za $u(j) = 0$ za svako j, dobija se:

(30) $$y(k) = C(k)\Phi(k,k_o)x(k_o).$$

Mogućnost jednoznačnog odredjivanja $x(k_o)$ na osnovu merenja $y(k)$, $k_o \leq k \leq k_f$, direktno je uslovljena rangom tzv. Gramove matrice observabilnosti:

(31) $$M(k_o,k_f) = \sum_{k=k_o}^{k_f} \Phi^T(k,k_o)C^T(k)C(k)\Phi(k,k_o).$$

Realno, $x(k_o)$ se može sračunati ako i samo ako je matrica $M(k_o,k_f)$ nesingularna. Da bi ovo dokazali, formirajmo matričnu jednačinu

(32) $$\Phi^T(k,k_o)C^T(k)y(k) = \Phi^T(k,k_o)C^T(k)C(k)\Phi(k,k_o)x(k_o)$$

množenjem leve i desne strane u (30) faktorom $\Phi^T(k,k_o)C^T(k)$. Sumiranjem po k i uzimanjem u obzir (31), dobija se:

(33) $$\sum_{k=k_o}^{k_f} \Phi^T(k,k_o)C^T(k)y(k) = M(k_o,k_f)x(k_o).$$

Poslednja jednačina poseduje jedinstveno rešenje ako i samo ako je broj nezavisnih kolona matrice $M(k_o,k_f)$ jednak dimenziji vektora na levoj strani iste jednačine. Njegova dimenzija je n, pa prema tome, jednačina (33) ima jedinstveno rešenje ako i samo ako je matrica $M(k_o,k_f)$ ranga n, odnosno nesingularna.

Analogno, kontinualan nestacionaran sistem (1) je observabilan ako i samo ako je Gramova matrica observabilnosti

(34) $$M(t_o,t_f) = \int_{t_o}^{t_f} \Phi^T(t,t_o)C^T(t)C(t)\Phi(t,t_o)dt$$

nesingularna, odnosno rang $M(t_o,t_f) = n$.

Alternativni potrebni i dovoljni uslovi observabilnosti diskretnog sistema (13) i (18) mogu se iskazati sa:

(35) $$\text{rang } Q_o(k_o,k_f) = n ,$$

gde je

(36) $$Q_o(k_o,k_f) = \| C^T(k_o) \; \Phi^T(k_o+1,k_o)C^T(k_o+1) \; \ldots \; \Phi^T(k_f,k_o)C^T(k_f) \|$$

budući da važi

$$(37)\qquad \begin{Vmatrix} y(k_o) \\ \vdots \\ y(k_f) \end{Vmatrix} = Q_o^T(k_o,k_f)x(k_o), \qquad M(k_o,k_f) = Q_o(k_o,k_f)Q_o^T(k_o,k_f).$$

Uslovi observabilnosti (35) poprimaju veoma jednostavnu algebarsku formu za slučaj stacionarnog sistema (matrice E i C su konstantne u modelu $x(k+1) = Ex(k)$ i $y(k) = Cx(k)$):

$$(38)\qquad \text{rang } \|C^T\ E^TC^T\ \ldots\ (E^T)^{k_f-k_o}\ C^T\| = n$$

Dimenzije matrica su takve, da je za vremenski invarijantan sistem rang $Q_o(0,k)$ = rang $Q_c(0,n)$ za svako $k \geq n$. Kako u opštem slučaju može važiti rang $Q_o(0,k)$ $\leq$ rang $Q_o(0,n)$ za $k \geq n$, izraz (38) je potrebno razmatrati samo za slučaj $k_f-k_o = n$, odnosno

$$(39)\qquad \text{rang } \|C^T\ E^TC^T\ \ldots\ (E^T)^{n-1}C^T\| = n$$

je ekvivalentan uslov observabilnosti linearnog stacionarnog sistema.

Naravno, analogno (39), jednostavno se dokazuje da su potrebni i dovoljni uslovi kontrolabilnosti linearnog stacionarnog sistema dati sa:

$$(40)\qquad \text{rang } \|B\ AB\ \ldots\ A^{n-1}B\| = n.$$

Na kraju, navedimo nekoliko osobina Gramove matrice $W(t_o,t_f)$ kontrolabilnosti i Gram matrice $M(t_o,t_f)$ observabilnosti:

1^o Matrice $W(t_o,t_f)$ i $M(t_o,t_f)$ su simetrične, najmanje pozitivno semidefinitne.

2^o Matrica $W(t,t_f)$ zadovoljava sledeće matrične jednačine:

$$(41)\qquad \frac{\partial W(t,t_f)}{\partial t} = A(t)W(t,t_f)+W(t,t_f)A^T(t)-B(t)B^T(t); \quad W(t_f,t_f) = 0,$$

$$(42)\qquad W(t_o,t_f) = W(t_o,t) + \Phi(t_o,t)W(t,t_f)\Phi^T(t_o,t).$$

3^o Matrica $M(t,t_f)$ zadovoljava sledeće matrične jednačine:

$$(43)\qquad \frac{\partial M(t,t_f)}{\partial t} = -A^T(t)M(t,t_f)-M(t,t_f)A(t)-C^T(t)C(t); \; M(t_f,t_f) = 0,$$

$$(44)\qquad M(t_o,t_f) = M(t_o,t) + \Phi^T(t_o,t)M(t,t_f)\Phi(t,t_o).$$

Iz gornjih jednačina neposredno proizilazi teorema dualnosti: Sistem $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ je kontrolabilan ako i samo ako je sistem $A^T(\cdot)$, $C^T(\cdot)$ observabilan.

Slične matrične relacije se mogu postaviti i za matrice $M(k_0,k_f)$ i $W(k_0,k_f)$.

3. Stabilnost. Matrična jednačine Ljapunova

Iz prethodnog izlaganja sledi da je analiza strukturnih svojstava sistema uslovljena analizom ispunjenja uslova kontrolabilnosti i observabilnosti. Prostor stanja sistema može biti prikazan kao direktna suma četiri podprostora koja sadrže, redom, kontrolabilna i observabilna, kontrolabilna i neobservabilna, nekontrolabilna i observabilna, i nekontrolabilna i neobservabilna stanja. Dekompozicija modela sistema ovog oblika je polazna u postavljanju kanoničnih struktura sistema i u rešavanju različitih zadataka upravljanja i regulacije.

Medjutim, od praktičnog interesa su sistemi koji, pored uslova kontrolabilnosti i observabilnosti, zadovoljavaju i uslove stabilnosti.

Koncept stabilnosti po Ljapunovu [3], [4] uvešćemo polazeći od vektorske diferencijalne jednačine stanja $\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t)$ nelinearnog sistema upravljanja. U tom smislu, važno je sagledati, da li rešenja diferencijalne jednačine stanja ovog sistema neograničeno rastu kada $t\to\infty$. Ovo osnovno svojstvo kretanja dinamičkog sistema, u cilju uprošćenja, razmotrićemo na modelu autonomnog sistema, tj. na sistemu u odsustvu ulaznog signala $u(t)$ ili, što je ekvivalentno, ulazni signal $u(t)$ je fiksirana vremenska funkcija. Na taj način, model sistema postaje $\dot{x}(t) = f(x(t),t)$. Uvedimo i nominalno rešenje $x_0(t)$ koje zadovoljava diferencijalnu jednačinu stanja $\dot{x}_0(t) = f(x_0(t),t)$. Poseban interes predstavlja slučaj, kada je $x_0(t)$ konstantan vektor x_e: tada x_e karakteriše ravnotežno stanje sistema.

<u>Definicija 1</u>. Nominalno rešenje $x_0(t)$ diferencijalne jednačine stanja $\dot{x}(t) = f(x(t),t)$ nelinearnog sistema je stabilno u smislu Ljapunova ili jednostavno stabilno, ako za ma koje t_0 i ma koje $\varepsilon > 0$ egzistira $\delta(\varepsilon,t_0) > 0$ (zavisi od ε i, moguće, od t_0), tako da $\|x(t_0)-x_0(t_0)\| \leq \delta$ implicira $\|x(t)-x_0(t)\| < \varepsilon$ za svako $t \geq t_0$.

Stabilnost u smislu Ljapunova garantuje da se stanje sistema suviše daleko ne udalji od nominalnog rešenja, pri početnom stanju dovoljno bliskom nominalnom rešenju. Budući da je ova forma stabilnosti često nezadovoljavajuća, koncept stabilnosti se može proširiti uvodjenjem asimptotske stabilnosti.

<u>Definicija 2</u>. Nominalno rešenje $x_0(t)$ diferencijalne jednačine stanja $\dot{x}(t) = f(x(t),t)$ nelinearnog sistema je asimptotski stabilno ako: (a) je ono stabilno u smislu Ljapunova, (b) za svako t_0 egzistira takvo $\rho(t_0) > 0$ (moguće da

zavisi od t_0), tako da $\|x(t_0)-x_0(t_0)\| < \rho$ implicira $\|x(t)-x_0(t)\| \to 0$ za $t \to \infty$.

Na taj način, asimptotska stabilnost, sa stabilnošću u smislu Ljapunova, garantuje približavanje kretanja sistema nominalnom rešenju, pretpostavljajući da su početna odstupanja definisana vektorskom nejednakošću $\|x(t_0)-x_0(t_0)\| < \rho$. Ipak, asimptotska stabilnost uvek ne daje informaciju pri velikim početnim devijacijama od nominalnog rešenja. Sledeća definicija vodi slučaju proizvoljnih početnih odstupanja.

Definicija 3. Nominalno rešenje $x_0(t)$ diferencijalne jednačine stanja $\dot{x}(t) = f(x(t),t)$ nelinearnog sistema je asimptotski stabilno u velikom ako: (a) je ono stabilno u smislu Ljapunova, (b) za ma koje $x(t_0)$ i ma koje t_0 $\|x(t) - x_0(t)\| \to 0$ za $t \to \infty$

Rešenje koje je asimptotski stabilno u velikom ima stoga osobinu da se sva druga rešenja njemu asimptotski približavaju u vremenu.

Gornje definicije se odnose na stabilnost rešenja diferencijalne jednačine stanja. Za nelinearne sisteme ovakav prilaz je neophodan usled složenosti karakteristika ovih sistema i kompleksnih fenomena koji mogu nastupiti. U slučaju linearnih sistema, ipak, situacija je jednostavnija, i celishodnije je govoriti o stabilnosti sistema, a ne o stabilnosti rešenja. Da bi smo učinili ovaj pristup jasnijim, neka je $x_0(t)$ proizvoljno nominalno rešenje diferencijalne jednačine stanja $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ linearnog autonomnog sistema, a $x(t)$ proizvoljno drugo rešenje ove jednačine. Budući da su $x_0(t)$ i $x(t)$ rešenja diferencijalne jednačine stanja linearnog sistema, $x(t)-x_0(t)$ je takodje njeno rešenje, tj.

(45) $\quad \dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) = A(t)\,(x(t)-x_0(t)).$

Očigledno je da se analiza stabilnosti nominalnog rešenja $x_0(t)$ može svesti na analizu stabilnosti trivijalnog rešenja, tj. rešenja $x(t) \equiv 0$. Ako je nulto rešenje stabilno u ma kojem smislu (po Ljapunovu, asimptotski ili asimptotski u velikom), ma koje drugo rešenje je takodje stabilno u tom smislu.

Pored toga što sva nominalna rešenja linearnog sistema poseduju iste osobine stabilnosti, za linearne sisteme ne treba činiti razliku izmedju asimtotske stabilnosti i asimptotske stabilnosti u velikom. Prethodno sledi iz činjenice da za linearne sisteme rešenja mogu biti srazmerno uvećana ili smanjena bez izmene njihovog ponašanja.

I na kraju, za linearne sisteme uvedimo definiciju eksponencijalne stabilnosti:

Definicija 4. Linearan sistem $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ je eksponencijalno stabilan ako egzistiraju pozitivne konstante α i β takve da je

(46) $\quad \|x(t)\| \leq \alpha\, e^{-\beta(t-t_o)}\, \|x(t_o)\|, \qquad t \geq t_o$

za svako početno stanje $x(t_o)$.

Eksponencijalno stabilan sistem se odlikuje osobinom da tekuće stanje sistema eksponencijalno konvergira nultom stanju, nezavisno od početnog stanja sistema.

3.1. Stabilnost i fundamentalna matrica. S obzirom da je rešenje $x(t) = \Phi(t,t_o)x(t_o)$ diferencijalne jednačine stanja $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ u potpunosti odredjeno matricom $A(t)$ stanja sistema, odnosno odgovarajućom fundamentalnom matricom $\Phi(t,t_o)$, analizom matrice $\Phi(t,t_o)$ se može rešiti pitanje stabilnosti. Razmotrimo četiri moguća slučaja.

1. Matrica $\Phi(t,t_o)$ je ograničena u intervalu $[t_o, +\infty)$, tj. egzistira takav broj M, da je

(47) $\quad \det \Phi_{ij}(t,t_o) \leq M \qquad (t \geq t_o, \quad i,j = 1,2,\ldots,n)$

U (47) sa $\phi_{ij}(t,t_o)$ je označen i,j-ti elemenat fundamentalne matrice. U tom slučaju, polazeći od rešenja $x(t) = \Phi(t,t_o)x(t_o)$ sledi:

(48) $\quad \|x(t)\| \leq n^2 M \max_i |x_i(t_o)|$

i uslovi stabilnosti su ispunjeni, ako se usvoji, na primer, $\delta < \varepsilon/n^2M$. Trivijalno rešenje $x(t) \equiv 0$ je stabilno.

2. Fundamentalna matrica zadovoljava $\lim_{t\to+\infty} \Phi(t,t_o) = 0$. Tada je matrica $\Phi(t,t_o)$ ograničena na intervalu $[t_o, +\infty)$ i zato, kako je već bilo dokazano, kretanje sistema je stabilno. Osim toga, iz oblika rešenja sledi: $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\Phi(t,t_o)x(t_o) = 0$ za ma koje $x(t_o)$. Kretanje sistema je asimptotski stabilno.

3. Fundamentalna matrica $\Phi(t,t_o)$ je neograničena u intervalu $[t_o,\infty)$. To znači da je, u krajnjem slučaju, jedan član fundamentalne matrice, na primer, $\Phi_{qp}(t,t_o)$ neograničen u datom vremenskom intervalu. Usvojimo sve početne uslove jednakim nuli, osim $x_{po} \neq 0$. Tada je $x_q(t) = \phi_{qp}(t,t_o)x_{po}$ neograničena funkcija, ma koliko da je po modulu x_{po} malo; sistem je nestabilan.

4. Na sličan način se može dokazati, da je linearan sistem eksponencijalno stabilan ako fundamentalna matrica zadovoljava

(49) $\quad \|\Phi(t,t_o)\| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_o)}, \qquad t \geq t_o,$

gde je sa $\|\phi\|$ označena norma matrice ϕ.

3.2. Stabilnost stacionarnih sistema. Budući da se fundamentalna matrica uvek ne može jednostavno odrediti, neophodno je analizu stabilnosti linearnog sistema, posebno stacionarnog, svesti na analizu spektra konstantne matrice A stanja sistema.

Teorema 1. (1) Linearan stacionaran sistem $\dot{x}(t) = Ax(t)$ je stabilan u smislu Ljapunova ako: (a) sve karakteristične vrednosti matrice A poseduju nepozitivne realne delove, (b) sve karakteristične vrednosti čiji su realni delovi jednaki nuli (ako takvih karakterističnih vrednosti ima) su jednostruke nule minimalnog polinoma matrice A, i nestabilan, ako bar jedan od uslova (a) i (b) nije zadovoljen.

(2) Linearan stacionaran sistem $\dot{x}(t) = Ax(t)$ je asimptotski stabilan ako i samo ako su realni delovi svih karakterističnih vrednosti matrice A negativni.

Dokažimo samo drugi deo teoreme, s obzirom da je asimptotska stabilnost sistema od praktičnog interesa. Dokaz prvog dela teoreme može se naći u [5]. Neka sve karakteristične vrednosti matrice A zadovoljavaju uslov Re $\lambda_i < 0$. Sličnom transformacijom $P^{-1}AP = Q$, matrica A se može svesti na trougaonu formu (na primer, gornju), tako da su na glavnoj dijagonali matrice Q postavljene karakteristične vrednosti matrice A: $q_{ii} = \lambda_i$, $i = 1,2,\ldots,n$. Posle zamene promenljivih stanja sistema $z(t) = P^{-1}x(t)$, gde je P nesingularna kvadratna matrica transformacije n-tog reda, model sistema u novom prostoru stanja $z(t)$ ima oblik:

$$\dot{z}(t) = P^{-1}APz(t) = Qz(t) \tag{50}$$

ili u skalarnoj formi

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1(t) &= q_{11}z_1(t) + q_{12}z_2(t) + \ldots + q_{1n}z_n(t); & z_1(0) &= z_{10},\\
\dot{z}_2(t) &= \qquad\qquad q_{22}z_2(t) + \ldots + q_{2n}z_n(t); & z_2(0) &= z_{20},\\
&\vdots & &\vdots\\
\dot{z}_n(t) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad q_{nn}z_n(t); & z_n(0) &= z_{no},
\end{aligned} \tag{51}$$

Iz poslednje jednačine u sistemu (51) sledi $z_n(t) = z_{no}\exp(q_{nn}t) \to 0$ za $t\to\infty$, pošto je po pretpostavci Re $q_{nn} < 0$. Smenom rešenja $z_n(t)$ u (n-1)-voj jednačini i njenim integraljenjem odredjujemo $z_{n-1}(t)$. Rešenja $z_n(t)$ i $z_{n-1}(t)$ postavimo u (n-2)-goj jednačini itd. Nastavljajući postupak, vidi se da je u svakom koraku potrebno rešiti skalarnu jednačinu oblika

$$\dot{z}_i(t) = q_{ii}z_i(t) + f(t); \qquad z_i(0) = z_{io}, \tag{52}$$

gde $f(t) \to 0$ za $t\to+\infty$. Rešenje poslednje jednačine je:

$$(53) \qquad z_i(t) = z_{io}\exp(q_{ii}t) + \exp(q_{ii}t)\int_{t_o}^{t}\exp(-q_{ii}\tau)f(\tau)d\tau,$$

odakle je evidentno da $z_i(t) \to 0$ za $t\to\infty$, s obzirom da je Re $q_{ii} < 0$. Dakle, $z_i(t) \to 0$, kada $t\to\infty$ za svako $i = 1,2,\ldots,n$: dovoljnost uslova teoreme su dokazani. Potrebnost uslova sledi ako se usvoji suprotna pretpostavka.

Naglasimo da se konstantna matrica A, čije sve karakteristične vrednosti poseduju negativne realne delove, naziva stabilnom matricom. Saglasno dokazanoj teoremi, stabilna matrica stanja definiše asimptotski stabilan sistem.

Za ma koju stabilnu matricu A, broj $\alpha > 0$, odredjen sa

$$(54) \qquad \max_i \text{Re}\,\lambda_i = -\alpha$$

definiše stepen stabilnosti linearnog stacionarnog sistema.

3.3. Linearne matrične jednačine. U prethodnom izlaganju postavljene su linearne diferencijalne matrične jednačine (3), (41) i (43), kojima su odredjene, redom, fundamentalna matrica, Gramova matrica kontrolabilnosti i Gramova matrica observabilnosti. Ove matrične jednačine, kao što će biti i pokazano u daljem izlaganju, imaju važnu ulogu u algebarskoj teoriji upravljanja linearnim dinamičkim sistemima.

U gornjem smislu, neka je potrebno proceniti veličinu integrala

$$(55) \qquad J = \int_{t_o}^{t_1} x^T(t)Q(t)x(t)dt,$$

gde je Q(t) kvadratna matrica n-tog reda čiji su članovi neprekidne funkcije vremena u intervalu $[t_o,t_1]$, duž ma koje trajektorije $x(t)$ sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

Integral J se može izraziti u funkciji početnog stanja $x(t_o)$, polazeći od rešenja (2) sistema:

$$(56) \qquad J = \int_{t_o}^{t_1} x^T(t_o)\Phi^T(t,t_o)Q(t)\Phi(t,t_o)x(t_o)dt \overset{\text{def}}{=} x^T(t_o)M(t_o,t_1)x(t_o)\ ,$$

gde je sa $M(t_o,t_1)$ označen integralni izraz

$$(57) \qquad M(t_o,t_1) = \int_{t_o}^{t_1} \Phi^T(t,t_o)Q(t)\Phi(t,t_o)dt$$

koji je identičan sa (34), definicionoj relaciji Gramove matrice observabilnosti.

Na taj način, polazni integral J je dat preko kvadratne forme početnog stanja $x(t_o)$ i $M(t_o,t_1)$, matrice te kvadratne forme. Ako je poznata fundamentalna matrica $\Phi(t,t_o)$, konstantna matrica $M(t_o,t_1)$ se može odrediti na osnovu (57). Medjutim, problem se može svesti na zadatak integracije linearne matrične diferencijalne jednačine. Smenom t_o sa t i diferenciranjem $M(t,t_1)$ po t, dobija se:

$$(58)\qquad \frac{dM(t,t_1)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_t^{t_1} \Phi^T(\tau,t)Q(\tau)\Phi(\tau,t)d\tau$$

$$= -A^T(t)M(t,t_1) - M(t,t_1)A(t) - Q(t).$$

Iz definicionog izraza za $M(t,t_1)$ sledi $M(t_1,t_1) = 0$. Poslednja jednačina je ekvivalentna sa (43).

Pridruživanjem graničnog uslova diferencijalnoj jednačini (58), definisan je direktan postupak sračunavanja integrala J. Primetimo da je (58) sa graničnim uslovom zadatim, ne u početnom trenutku t_o, nego u trenutku t_1 - u trenutku završetka prelaznog procesa sistema.

Slučaj konstantnih matrica A i Q je od posebne praktične važnosti. Diferencijalna jednačina (58) postaje stacionarna

$$(59)\qquad \frac{dM(t,t_1)}{dt} = -A^TM(t,t_1) - M(t,t_1)A - Q, \quad M(t_1,t_1) = 0$$

i njeno rešenje

$$(6)\qquad M(t,t_1) = M_1 - \exp(A^T(t_1-t))M_1\exp(A(t_1-t))$$

je prikazano u zatvorenom obliku, u uslovima egzistencije rešenja $M = M_1$ algebarske linearne matrične jednačine

$$(61)\qquad A^TM + MA + Q = 0.$$

Iz rešenja (60), u posebnom slučaju, sledi, da ako $\exp(A(t_1-t)) \to 0$ kada $t_1\to\infty$, procena vrednosti integrala J na polubeskonačnom intervalu $(t_o, +\infty)$ se svodi na rešavanje linearne algebarske matrične jednačine (61), tako da se J odredjuje po formuli $J = x^T(t_o)Mx(t_o)$.

Naravno, na sličan način se pokazuje da je integral

$$(62)\qquad \bar{J} = \int_{t_o}^{t_1} q^T(t)Q(t)q(t)dt,$$

gde je $q(t) = \Phi^T(t_o,t)q(0)$, kretanje stanja adjungovanog sistema

$$(63)\qquad \dot{q}(t) = -A^T(t)q(t), \quad q(0) = q_o$$

odredjen sa $\bar{J} = q^T(t_o)W(t_o,t_1)q(t_o)$. Ovde je $W(t,t_1)$ Gramova matrica kontrolabilnosti koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu (41) (u jednačini (41) treba t_f smeniti sa t_1, a proizvod matrica $B(t)B^T(t)$ matricom $Q(t)$).

3.4. Matrična jednačina Ljapunova. Osnovna svojstva algebarske matrične jednačine (61), poznate u literaturi kao matrična jednačina Ljapunova, su u tesnoj vezi sa uslovima stabilnosti linearnih stacionarnih dinamičkih sistema. Navedimo [5] sledeći osnovni rezultat:

Teorema 2. Matrična jednačina Ljapunova

$$AX + XA^T = -Q \tag{64}$$

ima jedinstveno rešenje pri ma kojoj realnoj matrici Q, ako i samo ako sve karakteristične vrednosti λ_i $(i = 1,2,\dots,n)$ matrice A zadovoljavaju $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ za svako i,j.

Slično postupku koji je korišćen u dokazu teoreme 1, za ma koju matricu A egzistira nesingularna matrica T, u opštem slučaju, kompleksna, takva da je $TAT^{-1} = B$ gornja trougaona matrica (svi elementi matrice B postavljeni ispod glavne dijagonale su jednaki nuli, a na glavnoj dijagonali se nalaze karakteristične vrednosti matrice A).

Množenjem (64) matricom T sa leve, a matricom T^T sa desne strane, dobija se:

$$\begin{aligned} T(AX+XA^T)T^T &= TAXT^T + TXA^TT^T \\ &= (TAT^{-1})(TXT^T) + (TXT^T)(T^{-T}A^TT^T) = -TQT^T \end{aligned} \tag{65}$$

Primetimo da je $T^{-T} = (T^T)^{-1}$. Definicijom $Z = TXT^T$ ima se:

$$BZ + ZB^T = -TQT^T, \tag{66}$$

gde je B trougaona matrica. Poslednja jednačina je, očigledno, ekvivalentna polaznoj. Ona se može prikazati u vidu sistema linearnih jednačina, a formiranjem kvadratne matrice reda n^2 takvog sistema, zaključuje se da je ona trougaona, na čijoj su dijagonali vrednosti $(\lambda_i + \lambda_j)$, za svako i,j. Determinanta matrice je jednaka proizvodu dijagonalnih elemenata, i ona je jednaka nuli ako i samo ako je $\lambda_i + \lambda_j = 0$, pri ma kakvim (može biti i jednakim) vrednostima $1 \leq i,j \leq n$.

Zahtev iskazan poslednjom teoremom može se jednostavno geometrijski interpretirati: karakteristične vrednosti matrice A u kompleksnoj s-ravni ne smeju biti postavljene simetrično koordinatnom početku i ne smeju biti jednake nuli. Stoga, na primer, kada su sve karakteristične vrednosti postavljene u levoj poluravni s-ravni - slučaj stabilne matrice A - jednačina $AM+MA^T=-Q$ poseduje jedinstveno rešenje. Pored toga, ako je Q simetrična matrica $(Q=Q^T)$, to je i rešenje M simetrična matrica.

U uslovima stabilne matrice A, jedinstveno rešenje M matrične jednačine (61), na osnovu izlaganja u 3.3, zadovoljava izraz:

$$(67) \qquad x^T(0)Mx(0) = \int_0^\infty x^T(t)Qx(t)dt,$$

u kome integral na desnoj strani, evidentno, konvergira. Budući da je za stacionaran sistem $x(t) = \exp(At)x(0)$, sledi

$$(68) \qquad x^T(0)Mx(0) = x^T(0)(\int_0^\infty \exp(A^Tt)\; Q \exp(At)dt)x(0).$$

Ovim je pokazano da je jedinstveno rešenje matrične jednačine (61), kada je matrica A stabilna, može prikazati u vidu konvergetnog integrala

$$(69) \qquad M = \int_0^\infty \exp(A^Tt)\; Q \exp(At)dt.$$

3.5. Drugi metod Ljapunova. Drugi ili direktan metod Ljapunova dopušta formiranje efikasnih dovoljnih uslova čije ispunjenje garantuje stabilnost rešenja diferencijalnih jednačina stanja sistema. Ovaj metod je primenljiv u analizi najrazličitijih sistema diferencijalnih jednačina: linearnih i nelinearnih, diskretnih i kontinualnih, običnih i parcijalnih. Pri analizi stabilnosti kretanja direktnom metodom Ljapunova, zadatak je sveden na izbor neke skalarne funkcije koordinata stanja i vremena - funkcije Ljapunova, analogno funkcijama energije u mehanici. Za linearne sisteme funkcija Ljapunova se može odabrati u vidu kvadratne forme promenljivih stanja sistema. Drugi metod Ljapunova primenimo, najpre, u analizi stabilnosti linearnih stacionarnih kontinualnih sistema. Potrebne i dovoljne uslove stabilnosti konstantne matrice A daje [6] sledeća teorema.

Teorema 3. Da bi matrica A bila stabilna, potrebno je i dovoljno da matrična jednačina Ljapunova $A^TM + MA = -Q$ poseduje pozitivno definitno rešenje M, pri ma kojoj pozitivno definitnoj matrici Q.

Neka je matrica M jedinstveno pozitivno definitno rešenje matrične jednačine Ljapunova $A^TM + MA = -Q$, gde je Q simetrična pozitivno definitna matrica (pretpostavka o simetričnosti matrice Q ne narušava opštost razmatranja). Uvedimo i $v(t) = x^T(t)Mx(t)$ i $w(t) = \dot{x}^T(t)Qx(t)$. Saglasno diferencijalnoj jednačini $\dot{x}(t) = Ax(t)$ kretanja stanja sistema, dobija se:

$$(70) \qquad \dot{v}(t) = \dot{x}^T(t)Mx(t) + x^T(t)M\dot{x}(t) = x^T(t)(A^TM+MA)x(t)$$
$$= -x^T(t)Qx(t) = -w(t)$$

Pošto su matrice Q i M simetrične i pozitivno definitne, za ma koji [5] n-vektor x važi (sa $\|x\|$ je označena norma vektora x):

(71a) $\quad \min\lambda(Q)\,\|x\|^2 \leq w(t) \leq \max\lambda(Q)\,\|x\|^2,$

(71b) $\quad \min\lambda(M)\,\|x\|^2 \leq v(t) \leq \max\lambda(M)\,\|x\|^2.$

Iz gornjih nejednakosti sledi

(72) $\quad -\dot{w}(t) \leq \frac{\min\lambda(Q)}{\max\lambda(M)}\, v(t) \quad$ ili $\quad \dot{v}(t) \leq -\alpha v(t), \quad \alpha = \frac{\min\lambda(Q)}{\max\lambda(M)} > 0,$

gde je $\min\lambda(Q)$ minimalna karakteristična vrednost matrice Q, a $\max\lambda(M)$ maksimalna karakteristična vrednost matrice M.

Integraljenjem poslednje diferencijalne nejednačina u intervalu $(0,+\infty)$:

(73) $\quad v(t) \leq v(0)\exp(-\alpha t) = x^T(0)Vx(0)\exp(-\alpha t),$

proizilazi da $v(t) \to 0$, kada $t \to \infty$, što je očigledno, moguće ako i samo ako $x(t) \to 0$, kada $t \to \infty$. Ovaj poslednji zahtev je ekvivalentan uslovu stabilnosti matrice A.

Obrnuto, neka je A stabilna matrica. Tada egzistira jedinstveno rešenje M matrične jednačine $A^TM + MA = -Q$, pri ma kojoj matrici Q. Pokažimo da je to rešenje pozitivno definitno ako je Q pozitivno definitna matrica.

Rešenje M matrične jednačine Ljapunova u uslovima stabilnosti matrice A je dato sa (69). Polazeći od tog rešenja:

$$(74) \quad x^T(0)Mx(0) = \int_0^\infty x^T(0)\exp(A^Tt)Q\exp(At)x(0)dt$$

$$= \int_0^\infty x^T(t)Qx(t)dt > 0$$

neposredno sledi ispunjenje uslova pozitivne definitnosti matrice M, kada je Q pozitivno definitna matrica.

Korišćenjem jednačine Ljapunova može se odrediti i stepen α stabilnosti linearnog stacionarnog sistema. Naime, iz uslova stabilnosti matrice $A-\alpha I$ (I je jednačina matrica, $\max_i \mathrm{Re}\lambda_i(A) = -\alpha,\ \alpha > 0$), proizilazi stepen α stabilnosti sistema, a jednačina Ljapunova poprima oblik:

(75) $\quad A^TM + MA - 2\alpha M = -Q.$

Takodje, uslovi teoreme 3 se mogu oslabiti zahtevom pozitivne semidefinitnosti matrice Q, ako duž bilo koje trajektorije sistema kvadratna forma promenljivih stanja $x^T(t)Qx(t)$ nije identički jednaka nuli, pri ma kojim nenultim početnim uslovima.

Analognim pristupom mogu se primenom druge metode Ljapunova postaviti uslovi stabilnosti stacionarnih diskretnih [7] i nestacionarnih sistema upravljanja [1], [3].

3.6. Funkcija Ljapunova i ocena kvaliteta prelaznog procesa

Neka je matrica A stanja sistema stabilna, a M pozitivno definitno simetrično rešenje matrične jednačine Ljapunova $A^TM+MA = -I$, gde je I jedinična matrica. Ako su $\min\lambda(M)$ i $\max\lambda(M)$ minimalna i maksimalna karakteristična vrednost matrice M, može se napisati nejednakost [11]:

$$\frac{x^T(t)Mx(t)}{\min\lambda(M)} \leq \|x(t)\|^2 \leq \frac{x^T(t)Mx(t)}{\max\lambda(M)} \tag{76}$$

S obzirom da je M rešenje matrične jednačine $A^TM+MA = -I$, važi:

$$\dot{v}(t) = \frac{d}{dt}(x^T(t)Mx(t)) = -\|x(t)\|^2, \tag{77}$$

tako da (76) ima oblik

$$-\frac{v(t)}{\min\lambda(M)} \leq \dot{v}(t) \leq -\frac{v(t)}{\max\lambda(M)}, \quad -\frac{dt}{\min\lambda(M)} \leq \frac{dv}{v} \leq -\frac{dt}{\max\lambda(M)} \tag{78}$$

Integracijom izvedene dvostruke nejednakosti dobija se:

$$v(0)\exp(-t/\min\lambda(M)) \leq v(t) < v(0)\exp(-t/\max\lambda(M)), \tag{79}$$

tako da se korišćenjem (76) dolazi do procene norme vektora x(t) duž trajektorije sistema:

$$\frac{v(0)}{\max\lambda(M)}\exp(-t/\min\lambda(M)) \leq \|x(t)\|^2 \leq \frac{v(0)}{\min\lambda(M)}\exp(-t/\max\lambda(M)). \tag{80}$$

Poslednja nejednakost omogućuje jednostavnu procenu vremena prelaza sistema iz ma kojeg početnog stanja x(0) u koordinatni početak prostora stanja. Na primer, neka je $x(0) = x_0$ i $\|x(t)\|^2 \leq \varepsilon^2$. Iz (80) sledi:

$$\varepsilon^2 \leq \frac{v(0)}{\min\lambda(M)}\exp(-t/\max\lambda(M)), \qquad t \leq -\max\lambda(M)\log\left(\frac{\min\lambda(M)}{x_0^T Mx_0}\varepsilon^2\right). \tag{81}$$

Dakle, ako je poznata funkcija Ljapunova $x^T(t)Mx(t)$, pri zadatom početnom stanju $x(0) = x_0$, ne rešavajući matričnu jednačinu stanja može se dati ocena kvaliteta prelaznog procesa, odnosno proceniti vreme prevodjenja sistema u koordinatni početak prostora stanja. Pored toga, ponovo naglasimo, da iz (67) sledi da se poznavanjem funkcije Ljapunova vrši, takodje, i procena srednjeg kvadratnog odstupanja trajektorije sistema od nule, ne rešavajući diferencijalnu jednačinu stanja.

U zaključku ovog dela rada istaknimo da je drugi metod Ljapunova efikasan instrument analize stabilnosti kretanja i karakteristika prelaznog procesa u linearnim dinamičkim sistemima upravljanja. U linearnom stacionarnom slučaju, problem je sveden na odredjivanje rešenja linearne matrične jednačine Ljapunova. Budući da funkcija Ljapunova ima jasan geometrijski smisao i, osim toga, pomoću nje se mogu sagledati kvalitativno osnovne karakteristike prelaznog procesa, zadatak projektovanja sistema željenih svojstava se može formulisati izborom strukture i njenih elemenata (na primer, kola povratne sprege po stanju ili vektoru izlaza), tako da rezultujući sistem poseduje zadatu funkciju Ljapunova.

4. Kvadratni indeks optimalnosti. Riccatijeva algebarska matrična jednačina

Neka je u linearnom stacionarnom sistemu koji je opisan matričnom diferencijalnom jednačinom stanja

$$(82)\qquad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad \begin{aligned} x(t) &= \| x_1(t)\ x_2(t)\ \dots\ x_n(t) \|^T \\ u(t) &= \| u_1(t)\ u_2(t)\ \dots\ u_m(t) \|^T \end{aligned}$$

potrebno odrediti asimptotski stabilan zakon upravljanja u povratnoj sprezi po stanju

$$(83)\qquad u(t) = -f(x(t)), \qquad f(x) = \| f_1(x)\ f_2(x)\ \dots\ f_m(x) \|^T$$

koji minimizira kvadratni indeks optimalnosti

$$(84)\qquad J = \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t))dt, \quad Q = Q^T \geq 0, \quad R = R^T > 0$$

S obzirom da se u uslovima pretpostavke o egzistenciji asimptotski stabilnog zakona upravljanja (83), koji minimizira (84), model sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi i indeks performanse mogu prikazati u obliku

$$(85)\qquad \dot{x} = Ax - Bf(x), \quad J = \int_0^\infty (x^TQx+f^T(x)Rf(x))\, dt,$$

rešenje postavljenog problema optimizacije odredićemo primenom direktne metode Ljapunova.

Usvojimo da je izvod po vremenu $\dot{v}$ pozitivno definitne funkcije Ljapunova v sistema (85) jednak sa negativnim znakom podintegralnoj funkciji u indeksu performanse J, pa se redom dobija:

(86a) $\dot{v}(x) = \frac{dv(x)}{dt} = -(x^TQx+f^T(x)Rf(x)),$

(86b) $\frac{1}{2}(\frac{\partial v(x)}{\partial x})^T \dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^T(\frac{\partial v(x)}{\partial x}) = -(x^TQx+f^T(x)Rf(x)),$

(86c) $J = \int_0^{\infty}(-\dot{v}(x))dt = -v(x)|_0^{\infty} = v(x_0) = \int_0^{x_0}(\frac{\partial v(x)}{\partial x})^T dx, \quad x(0) = x_0$

Budući da $u = -f(x)$ minimizira J, parcijalnim diferenciranjem J po f i iz uslova da formirani izraz mora biti zadovoljen za svako početno stanje $x(0) = x_0$, proizilazi:

(87) $0 = \frac{\partial J}{\partial f} = \int_0^{x_0}\frac{\partial}{\partial f}(\frac{\partial v(x)}{\partial x})^T dx, \qquad \frac{\partial}{\partial f}(\frac{\partial v(x)}{\partial x}) = 0$ za svako x_0.

Parcijalnim diferenciranjem (86b) po zakonu upravljanja f:

(88) $\frac{\partial}{\partial f}(\frac{\partial v(x)}{\partial x})^T(Ax-Bf(x)) - B^T\frac{\partial v(x)}{\partial x} = -2Rf(x)$

i korišćenjem druge relacije u (87), dobija se

(89) $f(x) = \frac{1}{2}R^{-1}B^T\frac{\partial v(x)}{\partial x}.$

Supstitucijom (89) u (86b) sledi

(90a) $\frac{1}{2}(\frac{\partial v(x)}{\partial x})^T(Ax - \frac{1}{2}BR^{-1}B^T\frac{\partial v(x)}{\partial x}) + \frac{1}{2}(x^TA^T - \frac{1}{2}(\frac{\partial v(x)}{\partial x})^TBR^{-1}B^T)\frac{\partial v(x)}{\partial x}$

(90b) $= -x^TQx - \frac{1}{4}(\frac{\partial v(x)}{\partial x})^T BR^{-1}B^T\frac{\partial v(x)}{\partial x}$

odnosno

(91) $\frac{1}{2}(\frac{\partial v(x)}{\partial x})^T Ax + \frac{1}{2}x^TA^T\frac{\partial v(x)}{\partial x} - \frac{1}{4}(\frac{\partial v(x)}{\partial x})^TBR^{-1}B^T\frac{\partial v(x)}{\partial x} + x^TQx = 0.$

Iz zahteva da jednačina (91) bude zadovoljena za svako x, vidi se da $\partial v(x)/\partial x$ treba da bude linearna funkcija stanja x:

(92) $\frac{\partial v(x)}{\partial x} = 2Px, \qquad v(x) = x^TPx,$

tako da iz (92) proizilazi da je pozitivno definitna realna simetrična matrica P rešenje Riccatijeve algebarske matrične jednačine

(93) $PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0.$

Linearan zakon upravljanja, model asimptotski stabilnog sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi i minimalna vrednost kvadratnog indeksa optimalnosti, redom, su dati sa:

(94) $u(t) = -R^{-1}B^{T}Px(t), \quad \dot{x}(t) = (A-BR^{-1}B^{T}P)x(t), \; J_{min}=v(x_0) = x^{T}(0)Px(0),$

gde je $P = P^{T} > 0$ rešenje matrične jednačine (93). Optimizacioni postupak ima smisla ako rezultuje u asimptotski stabilan sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi, odnosno ako sve karakteristične vrednosti matrice stanja $(A-BR^{-1}B^{T}P)$ projektovanog sistema poseduju negativne realne delove.

4.1. Karakteristike stacionarnog rešenja. Osnovna svojstva gore postavljenog stacionarnog rešenja optimizacije, kao i uslove egzistencije rešenja Riccatijeve algebarske matrične jednačine, formulisaćemo polazeći od modela sistema

(95a) $\dot{x}(t)= Ax(t) + Bu(t),$

(95b) $y(t) = Dx(t), \; D^{T}D = Q$

i njemu pridruženog kvadratnog indeksa performanse u konačnom vremenskom intervalu $(t_1 - t_0)$:

$$(96) \qquad J = \int_{t_0}^{t_1} (x^{T}(t)Qx(t) + u^{T}(t)Ru(t))dt + x^{T}(t_1)P_1x(t_1)$$

$$Q = Q^{T} \geq 0, \quad R = R^{T} > 0, \quad P_1 = P_1^{T} \geq 0$$

Odgovarajuća, sada, diferencijalna matrična Riccatijeva jednačina je oblika [4]

(97) $-\dot{P}(t) = P(t)A + A^{T}P(t) - P(t)BR^{-1}B^{T}P(t) + Q$

sa graničnim uslovom $P(t_1) = P_1$.

(a) Neka je $P_1 = 0$. Tada za $t_1 \to \infty$ rešenje diferencijalne matrične Riccati jednačine (97) teži konstantnoj stacionarnoj vrednosti $\bar{P}$ ako i samo ako sistem (95) ne poseduje istovremeno nestabilne, nekontrolabilne i observabilne polove.

(b) Ako je sistem (95) stabilizibilan i detektibilan {par (A,B) je stabilizibilan ako su nestabilne karakteristične vrednosti matrice A kontrolabilne; par (A,D), gde je $D^{T}D = Q$, je detektibilan ako su nestabilne karakteristične vrednosti matrice A observabilne}, rešenje diferencijalne matrične Riccati jednačine (97) teži jedinstvenoj vrednosti $\bar{P}$ kada $t_1 \to \infty$ za svako $P_1 \geq 0$.

(c) Ako matrica $\bar{P}$ egzistira, tada je ona pozitivno semidefinitno simetrično rešenje ($\bar{P} = \bar{P}^T \geq 0$) algebarske matrične Riccati jednačine (93). Ako je sistem (95) stabilizibilan i detektibilan, $\bar{P}$ je jedinstveno pozitivno semidefinitno simetrično rešenje algebarske matrične jednačine (93).

(d) Ako rešenje $\bar{P}$ egzistira, tada je ono pozitivno definitno ako i samo ako je sistem (95) observabilan.

(e) Ako rešenje $\bar{P}$ egzistira, zakon upravljanja u povratnoj sprezi po stanju

$$u(t) = -R^{-1}B^T\bar{P}x(t) \overset{def}{=} -\bar{G}x(t) \tag{98}$$

je asimptotski stabilan ako i samo ako je sistem (95) stabilizibilan i detektibilan.

(f) Ako je sistem (95) stabilizibilan i detektibilan, zakon upravljanja (98) minimizira kriterijum (96) (kada $t_1 \to \infty$) za svako $P_1 \geq 0$. Minimalna vrednost kriterijuma je $x^T(t_0)\,\bar{P}x(t_0)$.

Iz tačaka (b) i (c) sledi da su uslovi stabilizibilnosti i detektibilnosti sistema (95) istovremeno i dovoljni uslovi konvergencije rešenja diferencijalne matrične Riccati jednačine jedinstvenoj matrici $\bar{P}$ za svako $P_1 \geq 0$, kao i da algebarska matrična Riccati jednačina poseduje jedinstveno pozitivno semidefinitno rešenje. Naglasimo da su ovi uslovi samo dovoljni, ali ne i potrebni.

Osim toga, moguć je i slučaj da, mada $\bar{P}$ ne egzistira, egzistira matrica $\bar{G} = \lim\limits_{t_1 \to \infty} R^{-1}B^TP(t)$.

Nije teško zaključiti da zakon upravljanja (98), ako egzistira, menja položaj u s-ravni samo onih polova sistema u otvorenoj sprezi koji su istovremeno i kontrolabilni i observabilni. Neželjena situacija može nastupiti kada sistem poseduje nekontrolabilne i neobservabilne polove, posebno, ako su ti polovi i nestabilni. Nažalost, obično je nemoguće izmeniti strukturu sistema i učinite nekontrolabilne polove kontrolabilnim. Ako sistem poseduje neobservabilne polove sa neželjenim lokacijama u s-ravni, u većini slučajeva je moguće izvršiti izbor novih kontrolisanih (izlaznih) promenljivih tako da sistem ne poseduje više neobservabilne polove.

4.2. <u>Numeričko rešenje algebarske Riccatijeve matrične jednačine Newton-Raphsonovim metodom.</u> Razmotrimo algoritam rešenja algebarske Riccati matrične jednačine (93), koji je zasnovan na sledećem iteracionom postupku:

Neka je formirana matrična funkcija

$$F(X) = A^TX + XA + Q - XSX, \quad S = BR^{-1}B^T. \tag{99}$$

Zadatak se sastoji u odredjivanju pozitivno definitne (semidefinitne) realne simetrične matrice $X = \bar{X}$, takve da je $F(\bar{X}) = 0$.

Pretpostavimo da je u k-tom koraku dobijeno rešenje X_k koje se neznatno razlikuje od traženog rešenja $\bar{X}$: $\bar{X} = X_k + \bar{\bar{X}}$. Ako je $\bar{\bar{X}}$ malo, $F(\bar{X})$ se može aproksimirati izostavljenjem kvadratnog člana $\bar{\bar{X}}S\bar{\bar{X}}$:

(100a) $F(\bar{X}) = A^T(X_k+\bar{\bar{X}}) + (X_k+\bar{\bar{X}})A + Q - (X_k+\bar{\bar{X}})S(X_k+\bar{\bar{X}})$

(100b) $\approx A^T(X_k+\bar{\bar{X}}) + (X_k+\bar{\bar{X}})A + Q - X_kSX_k - X_kS\bar{\bar{X}} - \bar{\bar{X}}SX_k.$

Suština primene Newton-Raphsonovog metoda se sastoji u proceni $\bar{\bar{X}}$, kada se desna strana izraza (100b) približava nuli. Ako na taj način formiranu procenu $\bar{\bar{X}}$ označimo sa $\bar{\bar{X}}_k$:

(101) $X_{k+1} = X_k + \bar{\bar{X}}_k, \qquad k = 0,1,2,\ldots$

i izjednačavanjem desne strane izraza (100b) sa nulom, nalazimo

(102) $0 = (A-SX_k)^TX_{k+1} + X_{k+1}(A-SX_k) + Q + X_kSX_k, \qquad k = 0,1,2,\ldots$

Na taj način, formiran je sledeći algoritam:

(a) Izvršiti izbor odgovarajuće matrice X_0 i usvojiti indeks iteracije $k = 0$,

(b) Odrediti X_{k+1} iz matrične jednačine (102),

(c) Ako je uslov konvergencije ispunjen, rešenje je odredjeno; u protivnom, povećati indeks k za jedan i vratiti se na (b).

U [12] je pokazano da ako algebarska matrična Riccatijeva jednačina (93) ima jedinstveno pozitivno semidefinitno rešenje, tada X_k i X_{k+1} zadovoljavaju

(103) $X_{k+1} \leq X_k, \qquad k = 0,1,2,\ldots \quad \text{i} \quad \lim_{k\to\infty} X_k = \bar{X}$

u uslovima izbora početne aproksimacije X_0 tako da je $A-SX_0$ stabilna matrica. Drugim rečima, konvergentnost rešenja je odredjena korektnim izborom X_0.

Ako je izbor X_0 nekorektan, algoritam može konvergirati nekom proizvoljnom rešenju algebarske matrične jednačine (93), ili se uslov konvergencije ne može postići. Za stabilnu matricu A, celishodan izbor je $X_0 = 0$. U uslovima nestabilne matrice A, izbor X_0 nije bez prisutnih poteškoća. Jedan od načina izbora X_0 je primena algoritma [3] sinteze stabilnog regulatora u povratnoj sprezi po stanju sistema.

Medjutim, naglasimo da se osnovni problem iznalaženja numeričkog rešenja ogleda u broju linearnih jednačina koje treba rešiti u svakoj iteraciji i koji se izvanredno brzo povećava sa povećanjem dimenzije sistema (za $n = 15$, broj jednačina je $n(n+1)/2 = 120$). Uspešna primena Newton-Raphsonovog metoda je prezentirana u literaturi [3], [4], [8] za $n \leq 15$.

5. Zaključak

Osnovna ideja ovog priloga je da se ukaže na deo primene matrične algebre u teoriji upravljanja linearnim dinamičkim sistemima. I pored toga što je teško zamisliti teoriju upravljanja bez funkcija prenosa i frekvencijskih metoda koje imaju jasan fizički smisao i čija se primenljivost višestruko potvrdila u projektovanju realnih sistema, formirajući jedinstven, formalan, strogo matematički prilaz tipičnim problemima, savremena algebarska teorija je omogućila da se na potpuno prirodan način primeni aparat i metodika matrične algebre, teorije diferencijalnih jednačina i numeričke analize u rešavanju najvažnijih problema analize i sinteze sistema upravljanja. Matrični metodi, savršeno formalnim putem, omogućavaju elegantna i matematički jasna rešenja zadataka projektovanja sistema sa unapred zadatim dinamičkim karakteristikama. Treba primetiti da slična postavka zadataka projektovanja nije bila dostupna u okvirima klasične teorije regulacije.

6. Literatura

1. L.A.Zadeh, C.A.Desoer, Linear System Theory: The State Space Approach, McGraw-Hill, New York, 1963.
2. R.E.Kalman, On the general theory of control systems, Proc. 1th IFAC Congress, Moscow, Butterworths, London, 1960.
3. Ю.Н. Андреев, Управление конечномерными линейными объектами, Наука, Москва, 1976.
4. H. Kwakernaak, R. Sivan, Linear Optimal Control Systems, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1972.
5. Ф.Р. Гантмахер, Теория матриц, Наука, Москва, 1967.
6. M.R. Stojić, Kontinualni sistemi automatskog upravljanja, Naučna knjiga, Beograd, 1985.
7. T.B. Petrović, Sistemi automatskog upravljanja, Zbirka rešenih zadataka II, Zavod za udžbenike, Beograd, 1985.
8. B.D.O. Anderson, J.B. Moore, Linear Optimal Control, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.
9. G.T. Chen, Linear System Theory and Design, Holt, Rinehart and Winston, N.Y., 1984.
10. H.H. Rosenbrock, State Space and Multivariable Theory, Nelson, London, 1970.
11. J.H. Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Glarendon Press, Oxford, 1967.
12. S. Barnett, Matrices in Control Theory, Van Nostrand, New York, 1971.

LISTA SIMBOLA

Poglavlje 1

$G = (X, V, f)$ graf

C_n kontura dužine n

K_n potpun graf sa n čvorova

K_{n_1, n_2} bikompletan graf

$K_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ k-kompletan graf

V_n^k broj varijacija k-te **klase** skupa od n elemenata

P_n broj permutacija skupa od n elemenata

$\bar{V}_n^k$ broj varijacija sa ponavljanjem k-te klase skupa od n elemenata

$G = (X, \cdot)$ grupoid

$\odot$ množenje po modulu p

$GF(n)$ polje Galoisa sa n elemenata

(V, S) vektorski prostor

$x + y$ zbir vektora x i y

αx proizvod elementa α nekog polja i vektora x

(x, y) skalarni proizvod vektora x i y

$\dim V$ dimenzija prostora V

$\|x\|$ norma vektora x

$U_1 + U_2$ zbir potprostora U_1 i U_2

$U_1 \oplus U_2$ direktan zbir potprostora U_1 i U_2

Poglavlje 2

$$A = \|a_{ij}\|_{m,n} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

matrica tipa $m \times n$

$A = \|a_{ij}\|_1^n$ kvadratna matrica reda n

tr A   trag matrice A

$A_{i_1,i_2,\dots,i_r}^{k_1,k_2,\dots,k_s} = A_I^K$ submatrica matrice A

A + B   zbir matrica A i B

αA proizvod elementa α nekog polja i matrice A

A - B   razlika matrica A i B

-A   suprotna matrica matrice A

AB   proizvod matrica A i B

G(A)   Königov digraf matrice A

$\alpha G(A)$ proizvod broja α i digrafa G(A)

$G_1 + G_2$ zbir digrafova G_1 i G_2

$G_1 * G_2$ kompozicija digrafova G_1 i G_2

$G_1 \cdot G_2$ proizvod digrafova G_1 i G_2

O, $O_{m,n}$, O_n nula matrica

I, I_n jedinična matrica

δ_{ij} Kroneckerov simbol

A^T transponovana matrica matrice A

$\mathrm{diag}(d_1,d_2,\dots,d_n)$ dijagonalna matrica sa elementima $d_1,d_2,\dots,d_n$ na glavnoj dijagonali

$$\left\|\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1\nu} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2\nu} \\ \vdots & & & \\ A_{\mu 1} & A_{\mu 2} & & A_{\mu\nu} \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{c|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right\|$$

matrice razbijene na blokove

$A \otimes B$ Kroneckerov proizvod matrica A i B

$G_1 \otimes G_2$ Kroneckerov proizvod digrafova G_1 i G_2

$A \circ B$ Hadamardov proizvod matrica A i B

$G_1 \cup G_2 = G_1 \dotplus G_2$ unija (ili direktna suma) grafova ili digrafova G_1 i G_2

$[A,B]$ komutator matrica A i B

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \end{Vmatrix}$$

Ako neki elementi matrice nisu označeni, smatra se da su jednaki nuli.

Poglavlje 3

A^n n-ti stepen kvadratne matrice A

G^A digraf pridružen matrici A

$\overline{V}_n^k(A)$ broj varijacija sa ponavljanjem k-te klase skupa od n elemenata sa matricom dopustivih parova A

sum Y zbir svih elemenata matrice Y

Poglavlje 4

G_A digraf pridružen matrici A ili Coatesov digraf matrice A

det A = |A| determinanta kvadratne matrice A

Poglavlje 5

adj A adjungovana matrica matrice A

A^{-1} inverzna matrica matrice A

V(i→j) veza čvora i sa čvorom j

Poglavlje 6

G' digraf dobijen od digrafa G na taj način što je prenos svake petlje digrafa G umanjen za 1

$\Delta_C(G)$ Coatesova determinanta digrafa G

$\Delta_M(G)$ Masonova determinanta digrafa G

rang A rang matrice A

$\cong$ ekvivalentnost matrica

Poglavlje 7

$P_A(\lambda)$	karakteristični polinom matrice A
$\sim$	sličnost matrica
$P_G(\lambda)$	karakteristični polinom grafa G
$\bar{A}$	konjugovana matrica matrice A
A^H, A^*	konjugovano-transponovana (ili hermitski spregnuta) matrica matrice A
$(x\|y)$	skalarni proizvod kompleksnih vektora

Poglavlje 10

per A = $\dagger A \dagger$	permanent matrice A
par K	parnost 1-faktora (ili separacije) K
$\eta(G)$	višestrukost broja 0 u spektru grafa G
Pf A	pfafijan koso-simetrične matrice A

Poglavlje 11

$\nu(G)$	ciklomatički broj (ili nultost) grafa G
$r(G)$	rang grafa G
$U(0 \to j)$	modifikovana veza čvora 0 sa čvorom j
$D(G)$	broj stabala grafa G
$\bar{G}$	komplement grafa G
$G_1 \nabla G_2$	potpuni proizvod grafova G_1 i G_2
NEPS	nepotpuna proširena p-suma
$G_1 \times G_2$	proizvod grafova G_1 i G_2
$G_1 + G_2$	zbir grafova G_1 i G_2
$C^\perp$	dualni kod koda C

Poglavlje 13

(q)	matrica-vrsta sa koordinatama q_i
$\{q\}$	matrica-kolona sa koordinatama q_i

Dodatak

$\|A\|$	norma matrice A
$\frac{dA}{dt}$	izvod matrice
$C_r(A)$	r-ta adjungovana matrica matrice A

PREDMETNI INDEKS

Primedba. U indeks su uneseni , sa manjim izuzetkom, samo matematički pojmovi definisani u ovoj knjizi.