СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА III

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 3

ГЕОМЕТРИСКА ИСПИТИВАЊА ИЗ ТЕОРИЈЕ ПАРАЛЕЛНИХ ЛИНИЈА

ОД

Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГ

Превео и напомене додао
БРАНИСЛАВ ПЕТРОНИЈЕВИЋ

ДРУГО, ПРОШИРЕНО ИЗДАЊЕ

БЕОГРАД
1951

ACADÉMIE SERBE DES SCIENCES

OEUVRES CLASSIQUES

T. III

INSTITUT MATHÉMATIQUE

№ 3

RECHERCHES GÉOMÉTRIQUES SUR LA THÉORIE DES PARALLÈLES

par

N. I. LOBATCHEWSKI

Traduit et annoté

par

BRANISLAV PETRONIJEVITCH

Deuxième édition augmentée

УРЕДНИК

Академик JOBAH КАРАМАТА

Научна књига

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

Штампарија и књиговезница Српске академије наука

САДРЖАЈ

ТЕКСТ И НАПОМЕНЕ

Нашао сам у геометрији извесне несавршености, које држим за разлог што ова наука, уколико није анализа, до сада није могла учинити ни корака напред из оног стања у ком нам ју је Евклид оставио. У та несавршенства рачунам нејасност првих нојмова о геометриским количинама, начин на који се замишља мерење њихово, и напослетку важну празнину у теорији паралелних, коју нису били у стању до сада да испуне напори математичара. Покушаји Лежандрови нису ничега додали овој теорији, пошто је он био приморан, да остави једини строги пут, да скрене једним споредним путем и да прибегне помоћним ставовима, чију нужну аксиоматичност безразложно хоће да утврди.[1])

Први мој покушај о основима геометрије објавио сам у *„Казанском Веснику“* за 1829 год. У нади да сам одговорио свима захтевима, занимао сам се даље израдом те науке у целини, и објавио сам мој рад у појединим деловима у *„Ученим записцима казанског Универзитета“* за год. 1836, 1837, 1838 под насловом: *„Нови основи геометрије са потпуном теоријом паралелних“*.[2]) Можда обим овог последњег рада смета мојим земљацима да се баве једним таквим пред-

---

[1]) Лобачевски је неправедан према Лежандру кад тврди, да његова испитивања нису ничега додала теорији паралелних линија. Иако је Лежандр био при крају својих испитивања уверен, да је достигао циљ који је себи при почетку њиховом поставио, наиме да докаже пети постулат Евклидов (уверење чију је илузорност први Лобачевски увидео) ипак он је својим испитивањем дошао до ставова, без чије би помоћи тешко Лобачевски увидео илузорност тога уверења. О тим ставовима Лежандровим види примедбу 15 и 17.

[2]) Прва радња Лобачевског носи у оригиналу наслов: „О началахъ геометріи“, друга: „Новыя начала геометріи съ полной теоріей параллелныхъ“. Обе су преведене на немачки под насловом: Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefkij „Zwei geometrische Abhandlungen. Aus dem russischen übersetzt, mit

метом, који је изгубио свој интерес после Лежандра. Али држим, да теорија паралелних није смела изгубити пажњу геометара, и стога сам намеран да овде изложим оно што је битно у мојим истраживањима,[3]) примећујући унапред, да насупрот мишљењу Лежандровом све остале несавршe-

Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von Friedrich Engel. Leipzig 1898. Опширии коментар, који је Енгел додао своме преводу, јако олакшава студију Лобачевскове геометрије. Обе расправе изашле су и на руском у целокупном издању Лобачевских дела: „Полное собраніе сочиненій по геометріи Н. И. Лобачевскаго, Изданіе Императорскаго Казанскаго Университета“, 2 свеске 1883 и 1886, и то у првој свесци. А изашле су и у новом издању целокупних дела Лобачевскога, кога издаје совјетска Академија наука у Москви (у првом тому изашлом 1944).

[3]) Делце Лобачевсково, које овде доносимо у српском преводу, изашло је први пут год. 1840 у Берлину на немачком језику под насловом „*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Von Nicolaus Lobatschewsky, kaiserl. russ. wirkl. Staatsrathe und ord. Prof. der Mathematik bei der Universität Kasan*“ (друго факсимил издање Berlin, Mayer & Müller, 1887). Оно је прештампано у оригиналу у другој свесци казанског издања целокупних геометриских дела Лобачевскога.

У овоме спису хтео је Лобачевски на елементаран начин да изложи прве основе своје нове геометрије и да скрене пажњу страних математичара на своја нова истраживања. У овом последњем нажалост није успео, његова су испитивања остала непозната страном математичком свету све до седамдесетих година (Лобачевски је рођен 1793 а умро 1856: био је професор и дугогодишњи ректор универзитета у Казану). Само је „princeps matematicorum“ Гаус знао за истраживања Лобачевскога (и он сам био је дошао много раније од овога до сличних погледа, али своја испитивања није публиковао нити их је систематски развио; само кратке напомене налазе се у његовим писмима), али никада о њима није јавно проговорио. Специјално о овоме спису Лобачевскове Гаус се изразио врло похвално у једноме писму упућеном своме пријатељу Шумахеру: „*Ich habe kürzlich Veranlassung gehabt, das Werckhen von Lobatschefsky („Geometrische Untersuchungen etc...“) wieder durchzusehen. Es enthält die Grundzüge derjenigen Geometrie, die Statt finden müsste und strenge consequent Statt finden könnte, wenn die Euclidische nicht die wahre ist.... Sie wissen, dass ich schon seit 54 Jahren (seit 1792) dieselbe Überzeugung habe — — —. Materiell für mich Neues habe ich also im Lobatschefsky-schen Werke nicht gefunden, aber die Entwicklung ist auf anderen Wege gemacht als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von Lobatschefsky auf eine meisterhafte Art in ächt geometrischem Geiste. Ich glaube Sie auf das Buch aufmerksam machen zu müssen, welches Ihnen gewiss ganz exquisiten Genuss gewähren wird.*“

Готово у исто доба са Лобачевским пронашао је неевклидову геометрију мађарски математичар Јован Бољај (1802—1860); (био је официр

ности, на пр. дефиниција праве линије, овде немају места, и без икаквог су утицаја на теорију паралелних.

у аустријској војсци и син математичара Волфганга Бољаја, школског друга Гаусовог). Бољај је свој проналазак објавио као додатак уџбенику Математике, који је написао његов отац год. 1832. Тај његов кратки (и једини) спис носи наслов: „Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei a priori haud unquam decidenda, independentem: adiecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica“. Кад је његов отац послао овај спис Гаусу, Гаус је свој одговор отпочео речима, да спис његовог сина не може хвалити, али зато, што кад би га хвалио, сам би себе хвалио, пошто у њему налази резултате, до којих је и сам дошао. Али ни о Бољајевом спису није Гаус у јавности ништа проговорио.

Гаусово познавање дела Лобачевсковиx и Бољајевог, међутим, ипак је отргло ове из заборава. Кад је наиме год. 1860—63 публикована у целокупним делима Гаусовим кореспонденција његова са Шумахером, математички је свет први пут сазнао за неевклидову геометрију и њена два творца. Дела Лобачевскога и Бољаја убрзо после тога постала су позната, и литература о неевклидовој геометрији нагло је расла. Год. 1868 публикована је хабилитациона расправа Riemann-ова „Ueber die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen“, у којој је Риман изнео једну нову неевклидску геометрију; год. 1866 превео је француски математичар J. Hoüel овај спис Лобачевског на француски, а год. 1867 превео је и Бољајев спис под насловом „La science absolue de l'espace“ (ново издање A. Hermann. Paris, 1912); а год. 1868 изашла је у „Giornale di Matematica“ славна расправа талијанског математичара E. Beltrami-а „Saggio di interpretazione della geometria non euclidea“. Данас је вредност творевине Лобачевског и Бољаја потпуно призната.

Од новијих дела о неевклидовој геометрији треба поменути следећа:

1. H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, Sammlung Schubert, Bd. XLIX, 1905 (прво издање); 2-te Aufl., 1912; 3-te Aufl. 1923;

2. W. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, 2 Bde 1893-е i 98-е;

3. F. Klein, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, ново дефинитивно издање, 1928 (Клајн је увео тзв. пројективни правац у неевклидову геометрију; он је творац и геометрије елиптичке равни);

4. F. Schilling, Projektive und nichteuklidische Geometrie, 2 Bde, 1933;

5. M. Simon, Nichteuklidische Geometrie in elementarer Behandlung, 1925;

6. I. Frischauf, Absolute Geometrie nach I. Bolayi, 1872, (у овом делцету изложен је Бољајев Апендикс у преради);

7. P. Barbarin, La géometrie non-euclidienne. 2-ème ed. 1907; 3-e ed. (у колекцији „Scientia“, № 15);

8. D. M. Y. Sommerville, The Elements of noneuclidean Geometry, London, 1914.

Да небих замарао читаоце множином таквих ставова, чији докази не причињавају никакве тешкоће, ја ћу овде унапред изложити само оне, чије је знање потребно за оно што следује.

Историјски преглед постанка и развитка неевклидове геометрије даје талијански математичар

B. Bonola, Die nichteuklidische Geometrie, historisch-kritische Darstellung ihrer Entwickelung, 1908 (немачки превод од N. Liebmann-a),

На српско-хрватском писали су о неевклидовој геометрији:

1. V. Varićak, Prvi osnivači neeuklidske Geometrije, u „Radu jugoslavenske Akademije", knj. 109, 1907; и

2. К. Стојановић, Принципи нове геометрије, у „Наставнику" (рађено углавном по Фришауфу).

И на руском има неколико дела о неевклидовој геометрији. Од најновијих да поменем следећа два:

1. В. Ф. Каган, Лобачевский, Москва—Ленинград, 1944 (издање совјетске Академије, дело у коме писац излаже не само неевклидову геометрију него и живот и целокупну духовну делатност Лобачевскога) и

2. Каганов превод на руски овог Лобачевсковог дела под насловом:

Н. И. Лобачевский, Геометрические исследования по теории параллельных линий, перевод, комментарии, вступительные статьи и примечания професора В. Ф. Кагана, 1945 (посебно издање из прве свеске раније наведеног издање целокупних дела Лобачевског од стране совјетске Академије Наука).

Од нарочитог је значаја у Кагановом преводу његов опширни и исцрпни коментар, који се састоји из три врсте примедаба („сноске", које прате сам текст, „примъчания", којих има 38, и „приложенія", којих има VII).

У следећем коментару преводилац је свуда навео изворе који су му послужили за његово објашњење Лобачевсковог текста (он жали што му Каганов коментар руског превода није при томе био раније при руци). У тим се изворима често налазе само индиције за та објашњења. Преводилац је тежио да своја објашњења удеси тако да и читалац, који има само елементарна знања из математике, може разумети текст Лобачевскога (само при крају налазе се примедбе које претпостављају извесна виша знања). Осим тога треба напоменути, да се тригонометриске функције у Лобачевсковој геометрији не могу дефинисати као односи страна у правоуглом троуглу (или као односи координата круга), пошто у Лобачевсковој равни нема сличних фигура, већ да су њихове геометриске особине изведене из њихових аналитичких дефиниција (упор. прим. 94).

Год. 1928 преводилац је превео на српски и Бољајев Апендикс и додао му коментар (који међутим није тако детаљан као што је овај коментар Лобачевсковог дела). Оба коментара чине базу његове опсежне упоредне студије N. Lobatschewsky et I. Bolayi, Étude comparative d'un cas spécial d'inventeurs simultanés, публиковане (поводом стогодишњице прве публикације Лобачевскога) у „Revue philosophique", Sept.—Oct. 1929 (ова је студија била, у скраћеном облику, први пут публикована на српском 1914-е у „Radu jugoslovenske Akademije").

У овом другом издању преводилац је скратио неколике примедбе ранијег издања, али је садржину скраћенога систематски изложио у посебним додатцима (Додатак I—V) на крају књиге.

1. *Права линија поклапа се сама са собом у свима положајима.* Под овим разумем, да права линија при обртању површине не мења своје место, ако пролази кроз две непокретне тачке у површини.[4])

2. Две праве линије не могу се сећи у двема тачкама.[5])

3. Кад се права линија довољно продужи у оба правца, она мора прећи сваку границу, и дели, према томе, једну ограничену раван на два дела.

4. Две праве линије, које су управне на истој трећој, не секу се, па маколико се продужиле.[6])

5. Једна права линија увек сече другу, ако с једне стране њене прелази на другу.

---

[4]) Ова дефиниција праве линије поклапа се са појмом геодетске линије као линије најкраћег растојања између две тачке на површинама константне кривине. Доиста, таква једна линија не мења свој положај у одговарајућој површини позитивне, негативне или нулте кривине, ако се при томе површина обрће а остају непокретне две тачке, кроз које таква линија пролази. У „Neue Anfangsgründe" § 25. стр. 99 дефинише Лобачевски праву линију као линију „која се између две тачке поклапа у свима својим положајима".

Дефиниција равни, коју даје Лобачевски у „Neue Anfangsgründe" § 18, стр. 95, по којој је раван површина, у којој се секу две куглне површине описане истим полупречником око две сталне тачке, претставља circulus vitiosus, пошто егзистенција тродимензионалног простора, у коме су кугле, већ претпоставља егзистенцију равни.

Ми смо у Додатку I и овој примедби равном површином назвали како Евклидову типичну површину нулте кривине, тако и типичне површине Лобачевскове и Риманове геометрије. Према томе, израз „раван" има у општој геометрији шире значење него у обичној Евклидовој, где он означава само апсолутно хомогену површину нулте кривине.

[5]) Овај став не важи у Римановој геометрији, јер се на кугли два највећа круга секу у двема тачкама. Према томе, тај је став један постулат, који важи у Евклидовој и Лобачевсковој геометрији. Тај се постулат изражава друкчије и ставом, да је права линија бесконачна.

[6]) Овај став претставља један специјалан случај става 28-ог у I-ој књизи Евклидових елемената.

6. Унакрсни углови, код којих су стране једнога продужења страна другога, једнаки су. Ово важи како за равне праволиниске углове, тако и за равне површинске углове.

7. Две праве линије не могу се сећи, ако их трећа пресеца под истим угловима.[7])

8. У праволиниском троуглу леже наспрам једнаких углова једнаке стране, и обратно.

9. У праволиниском троуглу лежи према већој страни и већи угао. У правоуглом троуглу хипотенуза је већа од сваке катете и углови, који леже на њој, оштри су.

10. Праволиниски троугли су конгруентни, ако имају једнаке једну страну и два угла, или две стране и захваћени угао, или две стране и угао према највећој страни или ако су све три стране једнаке.

11. Ако је једиа права линија управна на другим двема које нису с њом у истој равни, онда је она управна на свима правим линијама, које се могу повући кроз заједничку тачку пресека у равни других двеју.[8])

12. Пресек кугле и равни је круг.

13. Права линнја, која је управна на пресеку двеју управних равни а лежи у једној од њих, управна је на другој равни.[9])

14. У сферном троуглу леже наспрам једнаких страна једнаки углови и обрнуто.[10])

15. Сферни троугли су конгруентни, ако имају једнаке две стране и захваћени угао, или једну страну и углове на њој.

Одавде остали ставови следују са њиховим објашњењима и доказима.

---

7) Овај став је идентичан са првим делом става I. 28 у Евклиду, од кога је став поменут у претходној примедби један специјалан случај.

8) Овом ставу треба да претходи став:

„Ако је једна права линија управна на једној равни, онда је и свака раван, у којој се та права налази, управна на датој равни“.

Ми ћемо га у следећем (в. прим. 53) цитирати као став 11a, док ће став 11 бити цитиран као став 11b.

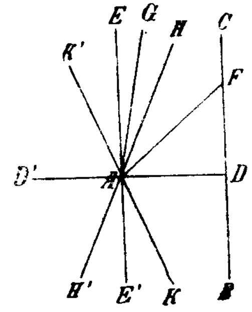
9) Овај став гласи у оригиналу погрешно: „Eine gerade Linie die perpendiculär auf dem Durchschnitt zweier Ebenen ist, und in einer der beiden schneidenden Ebenen liegt, ist senkrecht auf der anderen Ebene“.

Место „Durchschnitt zweier Ebenen“ треба да стоји „Durchschnitt zweier perpendiculärer Ebenen“.

10) Овај став важи само за сферне троугле чије су стране $< \pi$.

16. Све праве линије, које полазе у једној равни из једне тачке, могу се у односу на једну дату праву линију у истој равни поделити у две класе, и то у линије које се *секу* и линије које се *не секу*. *Гранична линија* између једне и друге класе тих линија назива се *паралелном датој линији*.

Нека је из тачке A (фиг. 1) на линију BC спуштена управна AD, на коју је опет повучена управна AE. У правом углу EAD или ће се све праве линије, које полазе из тачке A, сећи са линијом DC, као, на пр., AF, или се неке од њих слично управној AE, неће сећи са линијом DC. У неизвесности, да ли је управна AF једина линија, која се не сече са DC, ми ћемо претпоставити, да је могућно да има још других линија, на пр. AG, које се не секу са DC, ма колико биле продужене. При прелазу од линија AF, које се секу, ка линијама AG, које се не секу, морамо наићи на једну линију AH, која је паралелна са DC, на једну граничну линију, на чијој са једној страни ниједна од линија AG не сече са DC, док се на другој страни свака права линија AF сече са линијом DC. Угао HAD између паралелне HA и управне AD назива се *паралелним углом* (угао паралелизма) и њега ћемо овде обележити са $\Pi(p)$ за $AD = p$. Ако је $\Pi(p)$ прав угао, онда ће продужење AE' управне AE бити такође паралелно продужењу DB линије DC. Уз то ћемо још приметити, да у односу на четири права угла, која у тачки A чине управне AE и AD и њихова продужења AE' und AD', свака права линија, која полази из тачке A, или сама, или бар у своме продужењу, лежи у једноме од два права угла, што се налазе наспрам BC, тако да осим паралелне EE' све остале, ако се с обе стране довољно продуже, морају сећи линију BC.



Фиг. 1.

Ако је $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$ онда ће на другој страни управне AD а под истим углом $DAK = \Pi(p)$ лежати још једна линија AK паралелна са продужењем DB линије DC, тако да код ове претпоставке морамо разликовати још *страну паралелизма*. Све остале линије или њихова продужења, у оквиру два права угла што леже наспрам BC, спадају у линије које се секу, ако у оквиру угла $HAK = 2\,\Pi(p)$ леже између паралелних; напротив оне спадају у линије AG које се не секу, ако се налазе на другој страни паралелних AH и AK у отвору углова $EAH = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$, $E'AK = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$ између паралелних и управне EF' на AD. На другој страни управне EE' биће на сличан начин продужења AH' и AK' такође паралелна са BC; остале линије спадају у углу $K'AH'$ у линије које се секу, а у угловима $K'AE$, $H'AE$ у линије које се не секу.[11])

---

[11]) Став, да се две праве линије управне на трећој не секу, независан је од Евклидовог V-ог постулата. Кад се пође од тог става и негације овог постулата, онда с логичком нужношћу следује горња претпоставка Лобачевског о линијама које се секу и не секу. У ставу 24-ом (види у тексту даље ниже) доказује Лобачевски, да се паралелне линије све више приближују једна другој на страни њиховог паралелизма што се више на тој страни продужују, а из става 33 закључује, да се оне секу у бесконачности, одн. да су асимтотичне.

Ставу о конвергенцији паралелних линија одговара став о дивергенцији линија које се не секу, који гласи:

Две праве линије, које се не секу и које нису паралелне, имају једну заједничку управну од које почев све се више удаљују једна од друге што се више продужују.

Овај став налази се доказан код Лобачевског у „Neue Anfangsgründe" § 108, а доказао га је много раније претходник Лобачевског Сахери у своме делу „Euclides ab omni naevo vindicatus" 1733 (превод овог дела изашао је у Fr. Engel и P. Stäckel, „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie". Leipzig 1895). Осим овог налази се код Сахериа доказан и следећи важан став (н. н. м. стр. 104, Lehrsatz XXX):

Права линија, која полази из једне тачке ван једне праве и стоји управно на управној ове праве, унутрашња је граница на једној страни паралелизма свих правих линија, које се не секу и нису паралелне а које са датом правом имају једну заједничку управну на истој страни паралелизма.

Тако у фиг. 1 права линија EE', која је $\perp$ на AD, унутрашња је граница на десној страни паралелизма за све праве AG које на тој страни не секу AB и нису с њом паралелне а имају заједничку управну са њом на тој десној страни паралелизма. Тако исто та је управна унутрашња граница сличних правих линија на левој страни паралелизма.

Ако наведена два става о линијама које се не секу и нису паралелне доведемо у везу са горњим ставом Лобачевског и поменутим допунским

Према томе при претпоставци $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ линије могу бити само или линије које се секу или паралелне; ако се пак претпостави да је $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$ онда се морају допустити две парелелне, једна на једној друга на другој страни; осим тога морају се остале линије разликовати у линије које се не секу и у линије које се секу. У обема претпоставкама ознака паралелизма је у томе, што линија при најмањем отступању на оној страни, на којој се налази паралелна, постаје линијом која се сече, тако да, ако је AH паралелно са DC свака линија AF сече DC ма како мали био угао HAF.[12])

ставом 24-им, онда можемо све праве линије, које у фиг. 1 полазе из тачке A ван праве BC, поделити у следећих шест група:

1. Линије коју праву *BC секу у крајнем* отстојању од тачке D (подножне тачке управне AD, као што су линије AF;
2. Линије које се не секу са правом BC али *конвергирају* са њом (то су *паралелне* HH' и KK');
3. Линије које се не секу са правом BC али ***дивергирају*** са њом (њих има бескрајно много, таква је AG у фиг. 1, оне леже између управне EE' и паралелие HH');
4. Линија која се не сече са правом BC, која ***дивергира*** са њом на обе страие паралелизма: то је управна EE';
5. Линије које се ***не секу*** са правом BC и које на датој страни паралелизма само ***дивергирају*** са њом, али на другој страни паралелизма најпре ***конвергирају*** па затим ***дивергирају*** имајући заједничку управну иа овој другој страни: то је права KK'; и
6. Линије које ***дивергирају*** са правом BC на датој страни паралелизма, а *секу се* са њом на другој страни.

У Евклидовој равни постоје само две групе одговарајућих линија, пошто у њој групе 2, 3, 4 и 5 падају уједно, чине групу линије која се не сече са правом BC.

[12]) На основу ових извођења дају се разликовати две дефиниције паралелних код Лобачевског:

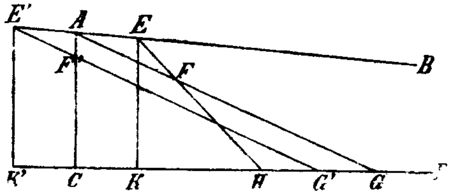
1. Права линија која је граница линија, које се са датом правом секу и не секу, паралелна је са том правом.

2. Једна права линија поралелна је са датом правом, ако свака друга права, која полази из исте тачке, при најмањем угаоном отступању на страни дате праве сече ову праву.

Прва дефиниција је очевидно ужа, јер она важи само за паралелне у Лобачевсковој равни, пошто је у Евклидовој равни паралелна ***једина*** права.

17. *Права линија задржава ознаку паралелизма у свима својим тачкама.*

Нека је AB паралелна са CD, на којој је AC управна. Ми ћемо посматрати две тачке, које су узете произвољно на линији AB и њеном продужењу на другој страни управне.



Фиг. 2

Нека тачка E лежи на оној страни управне, на којој се сматра да је AB паралелно са CD. Нека се из тачке E спусти управна EK на CD, затим нека се повуче EF тако да пада у оквир угла BEK. Нека се тачке A и F споје једном правом линијом, чије продужење мора сећи CD негде у G (16. став). Тиме се добија троугао ACG у који улази линија EF; пошто ова последња не може сећи AC на основу конструкције, а тако исто ни AC и EK по други пут (став. 2.), то ће она морати сећи CD негде у H (став 3.).

Нека је сада E' тачка на продужењу линије AB и $E'K'$ управна на продужењу линије CD, нека се повуче линија $E'F'$ под тако малим углом $AE'F'$ да сече AC негде у F', затим, нека се под истим углом са AB повуче из A још линија AF, чије ће продужење сећи CD у G (16. став). На тај начин добија се троугао ACG, у који улази продужење линије $E'F'$; пошто ова линија ће сече по други пут AE, али не може сећи ни AG јер је угао $BAG = BE'G'$ (7. став), то ће она морати сећи CD негде у G'.

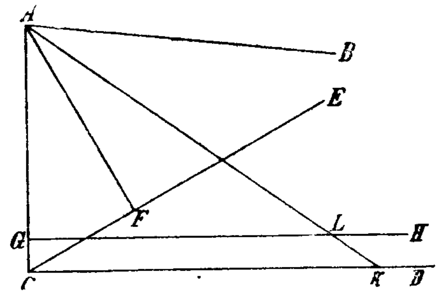
која дату праву не сече. Друга дефиниција међутим општија је, она обухвата и Евклидов случај. Осим тога само се на основу ове друге дефиниције да увидети оправданост назива паралелних за одговарајуће две праве у Лобачевсковој равни, иначе би прва дефиниција сама за себе била без икаквог дубљег оправдања и морали бисмо тврдити, да из једне тачке ван једне праве има *бесконачно много* паралелних у Лобачевсковој равни, као што се то доиста и чини од стране многих математичара, који мало воде рачуна о горњим Лобачевсковим дефиницијама паралелних.

Интересантно је споменути, да је и Гаус дошао до друге дефиниције паралелних и увидео њен општи значај. Види В. Bonola, н. н. м. стр. 71.

Ма од којих тачака, дакле, полазиле линије EF и $E'F'$ и ма како мало отступале од линије AB, оне ће ипак сећи CD, са којом је AB паралелна.[13])

10. *Две су линије увек узајамно паралелне.*

Нека је AG управна на CD (фиг. 3), са којом је AB паралелна, нека се из C повуче линија CE под ма каквим оштрим углом ECD са CD, и нека се из A спусти управна AF на CE, па ће се добити правоугли троугао ACF, у коме је хипотенуза AC већа од катете AF (9-ти став). Начинимо $AF = AG$ и положимо AF на AG, па ће линије AB и FE доћи у положај линија AK и GH, тако да је угао $BAK = FAC$, према томе мора AK сећи линију DC негде у K (16-ти став), чиме постаје троугао AKC, у коме се управна GH сече са линијом AK у L (3-ћи став) и тиме одређује даљину AL тачке пресека линија AB и CE на линији AB од тачке A.



Фиг. 3

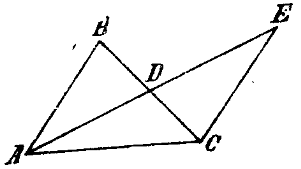
Одавде следује, да ће CE увек сећи AB, ма како мали био угао ECD, према томе је CD паралелно са AB (16-ти став)[14]).

[13]) На основу Лобачевскове друге дефиниције паралелних очевидно је, да горњи став важи и за паралелизам у Евклидовој равни. Пошто су пак паралелне линије у овој последњој равни апсолутно идентичне са линијама које се не секу (упор. примедбу 11), пошто се дакле паралелне линије у овом случају могу дефинисати као линије које се не секу (тако их је с правом Евклид дефинисао, в. превод првих шест књига Евклидових „Елемената“ од M. Simona, „Euklid und die sechs planimetrischen Bücher, 1901, стр. 24), то није потребно њихов паралелизам доказивати за сваку тачку посебице.

[14]) Ни овај став није, из истог разлога као ни пређашњи, потребно нарочито доказивати у Евклидовом случају, јер ако је права AB паралелна са CD с тога што се с њом не сече, онда је очевидно да је и ова друга с првом паралелна. Пошто пак паралелизам и особина несечења не падају уједно у геометрији Лобачевскога, то је горњи доказ Лобачевског очевидно непотпун утолико уколико најпре треба утврдити, да се CD не сече са AB па тек онда доказивати, да је она прва паралелна са овом другом. Да се пак CD не сече са AB следује непосредно из тога што је AB паралелно са CD.

19. *У праволиниском троуглу сума његова три угла не може бити већа од два права.*

Претпоставимо да је у троуглу ABC (фиг. 4) сума његова три угла $\pi + \alpha$, изаберимо у случају неједнакости страна најмању BC, преполовимо је у D, повуцимо из A кроз D линију AD, и начинимо продужење њено DE једнаким са AD, затим спојимо тачку E правом линијом EC са тачком C. У конгруентним је троуглима ADB и CDE угао $ABD = DCE$ и $BAD = DEC$ (6-ти и 10-ти став); одавде следује, да и у троуглу ACE сума његова три угла мора бити једнака $\pi - \alpha$, осим тога најмањи угао BAC (9-ти став) троугла ABC прешао је у нови троугао ACE, при чему је разломљен у два дела EAC и AEC. Продужујући на овај начин, тиме што ћемо увек преполовљавати страну која лежи наспрам најмањег угла, на послетку морамо доћи до једног троугла, у коме је збир његова три угла $\pi + \alpha$, али у коме се налазе два угла, од којих је сваки по својој апсолутној величини мањи од $\frac{1}{2}\alpha$; пошто пак трећи угао не може бити већи од π, то α мора бити или нула или негативно.[15])



Фиг. 4

[15]) Да се половљењем најмање стране у троуглу може на показани начин доћи до једног троугла у коме ће углови, који одговарају угловима A и E у троуглу AEC, бити $< \frac{1}{2}\alpha$, следује из такозваног Архимедовог постулата који гласи:

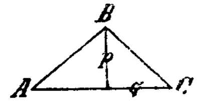
„Ако су a и b две једнородне количине и $a < b$, увек се може наћи један цео број n тако да је $a \cdot n > b$".

Да један угао у троуглу не може бити већи од π следује непосредно из дефиниције троугла и дефиниције угла π (2R).

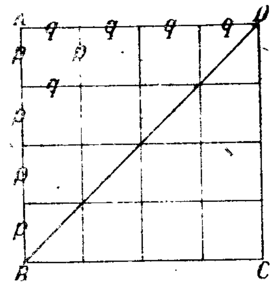
Овај је доказ формулисао први Лежандр у 12-ом издању свога чувеног дела „Eléments de Géometrie" Paris 1823, одакле га је узео Лобачевски (в. његове „Neue Anfangsgründe" § 90, с. 161). У трећем издању својих Елемената изашлом 1800 год. Лежандр је дао један други доказ истог става. који се налази репродуциран код Лобачевског у „Neue Anfangsgründe" § 90, с. 162. (Упор. и B. Bonola, н. н. м. стр. 59).

20. *Ако је ма у коме праволиниском троуглу сума његова три угла једнака два права, онда је то случај и у сваком другом троуглу.*

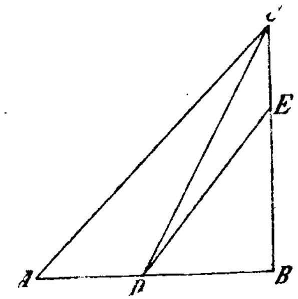
Нека је у праволиниском троуглу ABC (фиг. 5) сума његова три угла $= \pi$, тада морају бар два његова угла A и C бити оштри. Спустимо ли из темена трећег угла B на супротну страну управну p, та ће управна раставити троугао ABC у два правоугла, у којима ће сума три угла морати такође износити π, да неби у једноме од њих била већа од π а у сложеном мања од π.[16]) На тај начин добија се један правоугли троугао, чије су катете p и q, а одатле један четвороугао, чије су супротне стране једнаке а стране p и q, које су једна поред друге, управне (фиг. 6). Понављањем овога четвороугла може се саставити сличан четвороугао са странама np и q, и напослетку четвороугао $ABCD$ са странама, које су управне једна на другој, тако да је $AB = np$, $AD = mq$, $DC = np$, $BC = mq$, где су m и n произвољни цели бројеви. Такав, четвороугао подељен је дијагоналом BD у два конгруентна правоугуа троугла BAD и BCD, у којима је сума њихова три угла $= \pi$. Бројеви n и m могу се узети тако велики, да правоугли троугао ABC (фиг. 7), чије су катете $AB = np$, $BC = mq$, садржи у себи један други дати троугао BDE, чим се прави углови поклопе. Ако се повуче линија DC, добиће се уз то правоугли троугли, од којих све по два што следују један за другим имају једну заједничку страну. Троугао ABC постаје спајањем троуглова ACD и DCB, у којима сума три угла не може бити већа од π; она према



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

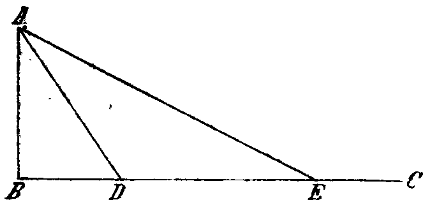
[16]) Простији је доказ овај: ако би претпоставили, да суме углова у делимичним троуглима нису π, онда би сума у једном од њих морала бити мања а у другоме већа од π, да би у целоме троуглу била π. По прет

томе мора бити једнака π, да би ова сума могла у сложеном троуглу износити π. На исти начин састоји се троугао BDC уз троуглова DEC и DBE, према томе мора у DBE сума његова три угла износити π, и то мора уопште бити случај у сваком троуглу, пошто се сваки да раставити у два правоугла троугла.

Одавде следује, да су допуштене само две претпоставке: или је сума три угла у свима праволиниским троуглима једнака π, или је ова сума у свима мања од π.[17])

21. *Из једне дате тачке може се увек повући једна права линија тако, да она са датом правом заклапа неодређено мали угао.*

Нека се из дате тачке A (фиг. 8) спусти управна AB на дату праву BC, нека се узме на BC произвољно тачка D, повуче линија AD, начини $DE = AD$ и повуче AE. Ако је у правоуглом троуглу ABD угао $ADB = \alpha$, онда мора у равнокраком троуглу ADE угао AED бити или једнак или мањи од $\frac{1}{2}\alpha$ (став 8, 20.). Продужујући на тај начин доћиће се напослетку до једног таквог угла AEB, који је мањи него ма који дати,[18])



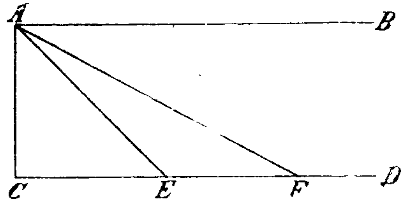
Фиг. 8

ходном ставу пак сума углова у троуглу не може већа од π; према томе, она мора бити и у сваком од делимичних троуглова једнака π (од збира њихових углова треба одузети два права код подножне тачке управне, да би се добио збир углова целог троугла).

[17]) Први део горњег става (став 20) налази се доказан први пут у Лежандровој расправи „Réflexions sur différentes manières de démontrer la theorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle" у Мемоарима париске Академије наука" вол. XII, п. 371. Лобачевски тврди (в. „Neue Anfangsgründe", Einleitung, стр. 69), да је дошао самостално до доказа истога става у својој првој нештампаној расправи о принципима нове геометрије из год. 1826. У овоме доказу Лежандр спомиње и други део горњег става (ако је сума углова у једном троуглу *мања* од два права, онда то важи за све троуглове), али он хоће да докаже да је претпоставка, по којој у троуглу сума углова може бити мања од 2 R, погрешна. На ту по-

22. *Ако су две управне на истој правој линији међу собом паралелне, онда је сума трију углова у праволиниским троуглима једнака π.*

Нека су линије AB и CD (фиг. 9) паралелне међу собом и управне на AC. Повуцимо из A линије AE и AF према тачкама E и F, које су узете на линији CD у произвољним остојањима $FC > FC$ од тачке C. Ако претпоставимо, да је у правоуглом троуглу ACE сума његова три угла једнака $\pi-\alpha$, у троуглу AEF једнака $\pi-\beta$, онда ће она у троуглу ACFморати бити једнака $\pi-\alpha-\beta$, где α и β не могу бити негативни. Ако је дакле угао $BAF = a$, $AFC = b$, онда је $\alpha + \beta = a - b$.[19]); ако учинимо да се линија AF удаљава све више од управне AC, може се угао a између AF и паралелне AB учинити произвољно малим, тако исто да се и угао b смањити, према томе, углови α и β не могу имати другу величину до $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.[20])



Фиг. 9

грешност он закључује из тога, што би у случају важења те претпоставке дужина линија била апсолутна, што је по Лежандру немогућно. Упор. R. Bonola, н. н. м., стр. 60.

[18]) Доказ и овог става налази се код Лежандра. При доказивању његовом, као и у доказивању става 19 (в. примедбу 15), игра Архимедов постулат главну улогу.

[19]) Пошто је збир углова у троуглу AFC једнак $\pi - (\alpha+\beta)$, то је $BAF - AFC = \alpha+\beta$. Из фиг. 9 види се наиме да је:

$$CAF + BAF = \frac{1}{2}\pi,$$

$$CAF + AFC = \frac{1}{2}\pi - (\alpha + \beta).$$

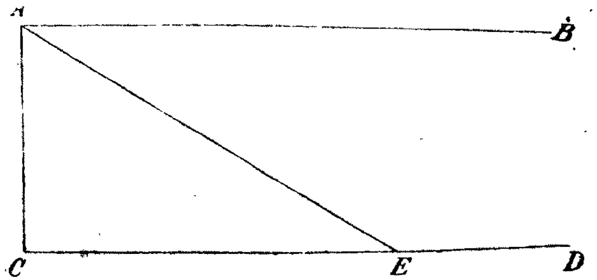
Кад се друга једначина одузме од прве излази

$$BAF - AFC = \alpha + \beta.$$

[20]) Доказ обрнутог става: ***ако је сума углова у троуглу једнака π, то су две праве, које стоје на трећој управно, међусобом паралелне,*** налази се код Лежандра (доказом тога става хтео је Лежандр доказати пети постулат Евклидов). Тај је доказ репродуциран код Лобачевског у „Neue Anfangsgründe" § 101, стр. 173, где се налази нешто друкчији доказ и горњег става, и гласи овако.

Према томе, или је у свима праволиниским троуглима сума њихова три угла π и у исто доба паралелни угао $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ за сваку линију p, или је ова сума за све троугле $< \pi$ па према томе и $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$.

Нека су AB и CD (фиг. 1′) управне на правој AC. Ако крајњу тачку ове последње A спојимо са једном тачком E на CD, биће збир оба оштра



Фиг. 1′

угла у троуглу ACE једнак $\frac{1}{2}\pi$, осим тога је и $\sphericalangle\, CAE + EAB = \frac{1}{2}\pi$, према томе, $BAE = AEC$. Пошто се пак на основу става 21 може угао AEC учинити мањим од сваког датог угла, то ће права AE сећи праву CD увек па ма како мало било њено угаоно отступање. Према томе AB је (по другој Лобачевсковој дефиницији паралелних) паралелно са CD.

Да би се потпуно разумео смисао овог доказа, навешћемо овде пети постулат Евклидов онако како га је Евклид формулисао (в. M. Simon „Euklid und die sechs planimetrischen Bücher“, стр. 30):

Ако једна права сече друге две праве тако да је збир унутрашњих углова, које она с њима склапа на истој страни, мањи од два права, онда ће се те две праве, продужене у бесконачност, сећи на оној страни на којој су углови, чији је збир мањи од два права.

Ако се пети постулат претпостави као истинит, онда се из њега да извести следећи став:

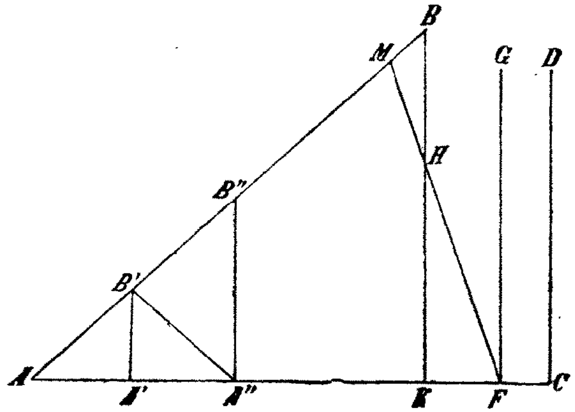
Из једне тачке ван једне праве дâ се повући само једна паралелна у односу на ову праву.

Овај став, који се налази имплиците изражен у пропозицији I, 31 Евклидових Елемената, и који се обично назива *аксиом паралелних,* или се дâ доказати на основу пропозиције I, 29, у којој се пети постулат претпоставља као истинит, или ће се претпоставити као доказан став, да је збир углова у троуглу једнак 2R, па ће се одатле извести истинитост петог постулата Евклидовог, из кога затим, на основу друге Лобачевскове дефиниције паралелних, следује непосредно „аксиом“ паралелних.

Прва претпоставка служи за подлогу *обичне геометрије и равне тригонометрије.* Друга се претпоставка може такође допустити а да се не дође у резултатима ни до каквих противречности, и чини основ једне нове геометриске доктрине, коју сам назвао *„имагинарном геометријом“*, и коју намеравам овде да изложим до извођења једначина, које постоје између страна и углова код праволиниских и сферних троуглова.

23. *За сваки дати угао* α *може се наћи једна линија* p, *тако да је* $\Pi(p) = \alpha$.

Нека су AB и AC (фиг. 10) две праве линије, које у тачки пресека A склапају оштар угао α; узмимо на AB произвољно тачку B', из ове спустимо управну $B'A'$ на AC,



Фиг. 10

начинимо $A'A'' = AA'$, подигнимо у A'' управну $A''B''$ и продужимо тако док не дођемо до једне управне CD, која се више не сече са AB. Ово мора нужним начином једном бити, јер ако је у троуглу $AA'B'$ сума сва три угла једнака $\pi - \alpha$, онда ће она у троуглу $AB'A''$ бити једнака $\pi - 2\alpha$, у троуглу $AA''B''$ мања од $\pi - 2\alpha$ (20. став), и тако даље, док напослетку не постане негативном и тиме не покаже немогућност образовање троугла.[21]) Управна CD може бити идентична са управ-

---

[21]) Како је $\Delta\, AA'B' \cong A'A''B'$ (став 10-ти), то ће, ако је збир углова у троуглу $AA'B'$ једнак $\pi - \alpha$, тај збир у троуглу $AB'A''$ бити $\pi - 2\alpha$, у троуглу $AA''B''$ мањи од $\pi - 2\alpha$, у једном даљем троуглу два пута већем

ном, од које почев све линије ближе тачки A секу AB; у сваком случају мора егзистирати једна таква управна при прелазу од линија које секу линијама које не секу. Повуцимо сада из тачке F линију FH, која са FG заклапа оштри угао HFG, и то на оној страни на којој се налази тачка A. Из ма које тачке H линије FH спустимо на AC управну HK, чије ће продужење, према томе, морати сећи AB негде у B, и на тај начин постаће троугао AKB, у који улазн продужење линије FH, које стога мора сећи хипотенузу AB негде у M. Пошто је угао GFH произвољан и може се учинити по вољи малим, то је FG паралелно са AB и $AF = p$ (16-ти и 18-ти став).

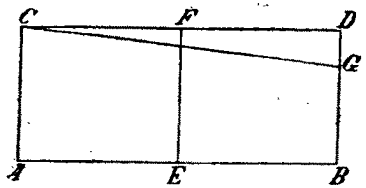
Лако се увиђа, да са смањивањем линије p расте угао α и да се за $p = 0$ приближује вредности $\frac{1}{2}\pi$; са рашћењем линије p смањује се угао α и приближује се све више 0 за $p = \infty$. Пошто је сасвим свеједно, који ће се угао подразумевати под знаком $\Pi(p)$, ако се линија p изрази негативним бројем, то ћемо узети да је

$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi$$

једначина, која треба да важи за све вредности од p, како позитивне тако и негативне и за $p = 0$.

24. *Што се па алелне линије више продужују на страни њиховог паралелизма, тим се више приближују једна другој.*

Нека су на линији AB (фиг. 11) подигнуте две управне $AC = BD$ и њихове крајње тачке C и D спојене једном правом линијом; тада ће четвороугао $CABD$ у A и B имати два права, у C и D пак два оштра угла (22. став), који су међусобно једнаки, о чему се лако можемо уверити ако четвороугао положимо тако на самог себе, да линија BD падне на AC а линија AC на BD. Преполовимо AB и подигнимо у тачки полољења E управну



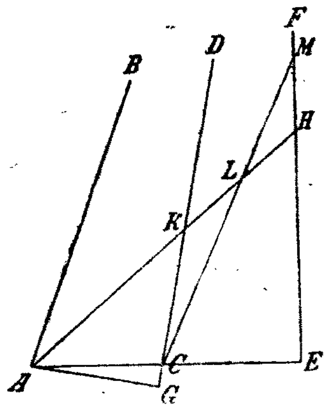
Фиг. 11

од $AA''B''$ (као што је троугао $AA''B'$ два пута већи од $\Delta AA'B'$) тај би збир био мањи од $\pi - 4\alpha$, тако да бисмо напослетку морали доћи до једног троугла у коме би збир углова био мањи од $\pi - 2^n\alpha$, где је n позитиван цео број, што значи немогућност таквог троугла, односно немогућност да се одговарајућа управна AC сече са правом AB. Упор. „Neue Anfangsgründe“ § 102, стр. 174.

EF на AB, која мора у исто доба бити управна и на CD, пошто се четвороугли $CAEF$ и $FEBD$ поклапају кад се тако положе један на други, да линвја EF остане у истом положају. Према томе, линија CD не може бити паралелна са AB, већ ће паралелна са овом последњом за тачку C, наиме линија CG, скренути на ону страну на којој је AB (16. став) и отсећи од управне BD део $BG < CA$[22]). Пошто је тачка C произвољна у линији CG, то из тога следује, да се линија CG, што се више продужује, тим више приближује линији AB.

25. *Две праве линије, које су паралелне с трећом, паралелне су и међу собом.*

Најпре ћемо узети, да те три линије AB, CD, EF (фиг. 12) леже у једној равни. Ако су две од њих, по реду AB и CD, паралелне са крајњом EF, овда су и AB и GD паралелне међу собом. Да би ово доказали, спустимо из ма које тачке A крајње линије AB на другу крајњу линију EF управну AE, која ће средњу линију CD сећи вегде у тачки C (3-ћи став) под углом $DCE < \frac{1}{2}\pi$ на страни линије EF паралелне са линијом CD (22-ти став). Управна AG спуштена из исте тачке A на CD мора се налазити у отвору оштрог угла ACG (9-ти став), а свака друга линија AH повучена из A у оквиру угла BAC мора сећи линију EF паралелну са AB негде у H, ма како мали био угао BAH[23]), према томе ће CD у троуглу AEH сећи линију AH негде у K, пошто је немогућно да се сече са EF[24]). Ако би AH полазило из тачке A у оквиру



Фиг. 12

[22]) Како је $CD \perp EF$, то се CD нити може (по ставу 4-ом) сећи са AB нити може (по ставу 16-ом) бити паралелна са AB. Из тога следује, да тачка пресека паралелне CG из тачке C са DB мора лежати између тачака D и B, пошто (по ставу 16-ом) паралелна мора лежати између управне CD и линија које полазећи из тачке C секу AB.

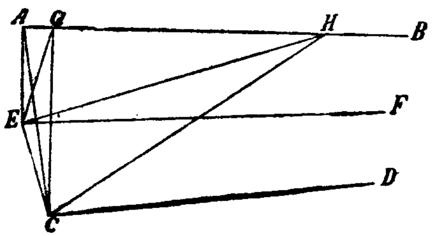
[23]) Ово следује из друге Лобачевскове дефиниције паралелних.

[24]) Са којом је паралелна.

угла CAG, она би морала сећи продужење линије CD између тачака C и G у троуглу CAG. Одавде следује, да су AB и CD паралелне[25]) (16. и 18. став).

Ако се узме, да су обе крајње линије AB и EF паралелне средњој CD, онда ће свака линија AK повучена из тачке A у оквиру угла BAE сећи линију CD негде у тачки K, макако мали био угао BAK. Узмимо на продужењу од AK макоју тачку L и спојимо је линијом CL са тачком C, која мора сећи EF негде у M, чиме постаје троугао MCE. Продужење линије AL у оквиру троугла MCE не може сећи ни AC ни CM по други пут, према томе, оно мора сећи EF негде у H, према томе су AB и EF узајамно паралелне.[26])

Нека сада паралелне AB и CD (фиг. 13) леже у две равни, чији је пресек линија EF. Спустимо из макоје тачке E на овој последњој управну EA на једну од паралелних, на пр. на AB, затим спустимо из A, подножне тачке управне EA, једну нову управну AC на другу паралелну CD и спојимо крајње тачке E и C тих управних линијом EC. Угао BAC мора бити оштар (22-ги став), према томе пашће управна CG, спуштена из C на AB, у тачку G на ону страну од CA, на којој се сматра да су линије AB и CD паралелне. Свака линија EH, ма како мало отступала од EF, припада са линијом EC једној равни, која раван паралелних AB и CD мора сећи дуж неке линије CH. Ова последња линија сече негде AB и то у истој тачки H, заједничкој свим трима равнима, кроз коју нужним начином пролази и линија EH: према томе је



Фиг. 13

[25]) Овај је доказ утолико непотпун, уколико треба најпре утврдити да се AB и CD не могу међу собом сећи, да би се могло доказивати, да су оне паралелне. Да се AB и CD не секу следује непосредно из тога, што су оне по претпоставци обе паралелне са EF: кад би се секле, онда би из једне тачке ван једне праве постојале *две* паралелне на *истој* страни паралелизма, а то је (по ставу 16-ом) немогућно. Упор. Bolyai J., „Appendix" § 7, 2 у вези са § 3 и § 1.

[28]) И овде треба најпре доказати, да се AB и EF не секу. Доказ је исти као и у претходном случају.

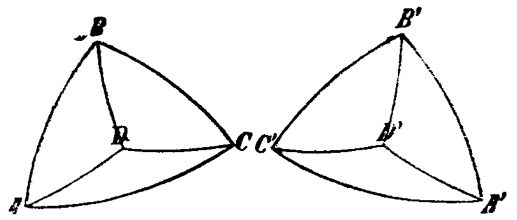
EF паралелно са AB. На сличан начин да се доказати и паралелизам линија EF и CD.[27])

Према томе, претпоставка, да је једна линија EF паралелна са једном од друге две AB и CD, које су међу собом паралелне, не значи ништа друго до то, да се EF има сматрати као пресек оних равни, у којима леже две паралелне AB, CD. Према томе, две су линије паралелне међу собом кад су паралелне са трећом и онда кад леже у различним равнима.[28]) Последњи став може се и овако изразити: *три се равни секу у линијама, које су све међу собом паралелне, чим се претпостави паралелизам двеју од ових.*

26. *Троугли, који на површини кугле леже један наспрам другог, једнаки су по површини.*

Под супротним троуглима овде подразумевамо троугле, које склапају пресеци куглине површине са три равни на обе стране средишта; стога у таквим троуглима стране и углови имају супротан правац.

У супротним су троуглима ABC и $A'B'C'$ (фиг. 14), (где се један од њих има да сматра да је претстављен у обрнутом положају), стране $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, тако исто једнаки су и одговарајући углови у тачкама A, B, C угловима у другоме троуглу у тачкама A', B', C'. Замислимо једну раван положену кроз тачке A, B, C и управну спуштену на њу из средишта кугле, чија ће продужења на обе стране сећи супротне тро-



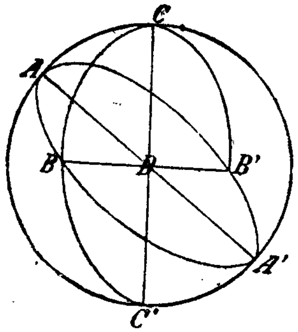
Фиг. 14

[27]) Овде (фиг. 13) доказује Лобачевски став, *да су две паралелне праве паралелне са трећом, која претставља пресек двеју равни положених кроз те две праве* (в. „Neue Anfangsgründe" § 97. стр. 169). Доказ је непотпун, јер треба најпре доказати, да се EF и AB односно EF и CD не секу.

[28]) У горњем примеру имамо с једне стране $EF \parallel AB$, $CD \parallel AB$; EF има се дакле сматрати као пресек равни $ABEF$ и $CDEF$, с друге стране $EF \parallel CD$ и $AB \parallel CD$, где је EF опет пресек равни $CDEF$ и $ABEF$. У првом случају има да се докаже да је $EF \parallel CD$, у другом да је $EF \parallel AB$, што је доказано ставом претходне примедбе. Доказ овог последњег става у исто је доба, дакле, доказ и става 25-ог, у случају, кад праве AB, CD и EF не леже у једној равни.

угле у тачкама D и D' куглине површине. Отстојања тачке D од тачака A, B, C мерена на сфери луцима највећих кругова, морају бити једнака (12. став) како међу собом тако и са отстојањима $D'A'$, $D'B'$, $D'C'$ у другом троуглу (6. став), према томе су равнокраки троугли око тачака D и D' у оба сферна троугла ABC и $A'B'C'$ конгруентни.

Да бисмо уопште могли судити о једнакости двеју површина, следећи став узимам за основу тога суђења: *две су површине једнаке, ако постају спајањем или одвајањем једнаких делова.*[29])



Фиг. 15

27. *Тространи рогаљ једнак је половини суме површинских углова мање једном правом.*[30])

У сферном троуглу ABC (фиг. 15), у коме је свака страна $< \pi$, означимо углове са A, B, C, продужимо страну AB тако да постане један цео круг $ABA'B'A$, који ће куглу поделити на два једнака дела. Продужимо у оној половини, у којој се налази троугао ABC, и друге две стране његове кроз њихову заједничку тачку пресека C

[29]) Лобачевски прави разлику између једнакости (конгруенције) и еквиваленције површина, и за критеријум ове последње узима суму и диференцију конгруентних делова. Новија испитивања показала су, да се мора правити разлика и између једнакости величине (Inhaltsgleichheit) и еквиваленције фигура, пошто се две по величини једнаке праволиниске фигуре дају раставити у један исти број конгруентних делова само ако се при томе претпостави важење Архимедовог постулата (упор. прим. 15). За полиедре та се разлика мора учинити и кад се претпостави важење овог последњег, пошто се не може поставити као опште правило, да се два полиедра исте запремине дају раставити у један исти број конгруентних делова. О овим врло важним питањима упор. чланак U. Amaldi-a „Über die Lehre von der Aequivalenz (Gleichheit)“ у „Fragen der Elementargeometrie“ hgb. v. F. Enriques, I-er Bd. 1911, стр. 151—202 и D. Hilbert, „Grundlagen der Geometrie“ 4-te Aufl. 1913, стр. 53—63.

[30]) Величина телесног угла или рогља пропорционална је површини одговарајућег многоугла на површини кугле, чије се средиште налази у темену рогља. Ако се површина кугле, чији је полупречник јединица, означи са 2π (а не са 4π), као што то чини Лобачевски (упор. „Neue Anfangsgründe“ § 44, стр. 117), онда горњи став значи, да је мерни број телесног рогља једнак разлици између половине суме мерних бројева површинских углова (углова између равни) и мерног броја правог угла.

толико, да се оне секу са кругом у A' и B'. На тај начин биће та половина кугле подељена у четири троугла ABC, ACB', $B'CA'$, $A'BC$, чије величине нека су P, X, Y, Z. Јасно је да су овде[31])

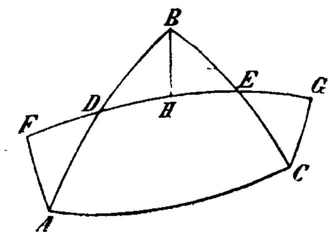
$$P+X=B,$$
$$P+Z=A.$$

Величина сферног троугла Y једнака је величини супротног троугла ABC', који има заједничку страну AB са троуглом P и чији трећи угао C' лежи на крајњој тачки оног пречника кугле који полази од C и пролази кроз средиште њено D (26-ти став). Одавде следује, да је $P+Y=C$ и, пошто је $P+X+Y+Z=\pi$, имамо такође[32]):

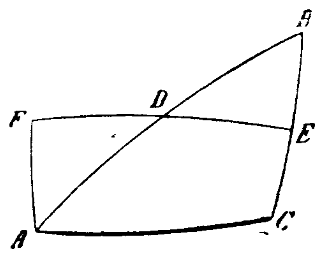
$$P=\frac{1}{2}(A+B+C-\pi).$$

До истог закључка може се доћи и другим путем, ослањајући се само на горњи став о једнакости површина (26. став).

У сферном троуглу ABC (фиг. 16) преполовимо стране AB и BC, положимо кроз средишње тачке D и E један највећи круг



Фиг. 16



Фиг. 17

и спустимо на овај из тачака A, B, C управне AF, BH и CG. Ако управна из B и H пада између D и E, онда ће троугао BDH

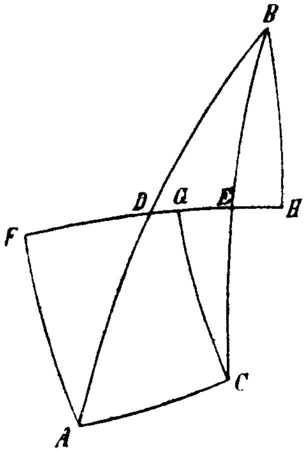
[31]) У једначинама $P+X=B$ и $P+Z=A$, B и A означавају двоугле $BCB'AB$ односно $ABA'CA$ у фиг. 15.

[32]) Како је збир $P+X+Y+Z$ једнак половини куглине површине, чија је величина 2π (в. прим. 30), то је тај збир једнак π. Кад се од збира једначина

$$P+X=B,$$
$$P+Z=A,$$
$$P+Y=C,$$

тј. од једначине $3P+X+Y+Z=A+B+C$ одузме једначина $P+X+Y+Z=\pi$ излази $P=\frac{A+B+C}{2}-\frac{\pi}{2}$.

бити једнак AFD и BHE једнак EGC (6. и 15. став), из чега следује, да је површина ABC једнака површини четвороугла $AFGC$ (26. став).[33]) Ако се тачка H поклапа са средњшњом тачком E стране BC (фиг. 17), онда ће постојати само два једнака правоугла троугла AFD и BDE, чијом се изменом места доказује једнакост површина троугла ABC и четвороугла $AFEC$. Ако напослетку тачка H пада ван троугла ABC (фиг. 18) и управна CG иде кроз троугао, онда ћемо прећи од троугла ABC четвороуглу $AFGC$ ако додамо троугао $FAD = DBH$, па затим одузмемо троугао $CGE = EBH$. Ако у четвороуглу $AFGC$ замислимо кроз тачке A и G, као и кроз тачке F и C положене највеће кругове, луци њихови између AG и FC биће једнаки (15. став), према томе, биће конгруентни троугли FAC и ACG (15. став) и угао FAC једнак углу ACG.[34])



Фиг. 18

Одавде следује, да је у свима претходним случајевима сума сва три угла у сферном троуглу једнака суми оба једнака угла у четвороуглу који нису прави. Према томе, може се сваком сферном троуглу, у коме је сума његова три угла S, наћи четвороугао с истом површином, у коме се налазе два права угла и две једнаке управне стране и у коме је сваки од друга два угла једнак $\frac{1}{2}S$.

---

[33]) Да је четвороугао $AFGC$ = троуглу ABC следује из идентитета:

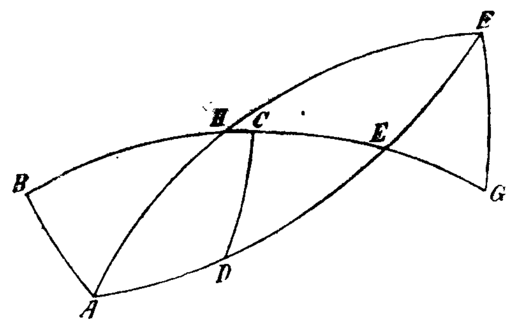
$$ADCE + AFD + CEG = AFGC$$

и

$$ADCE + DBH + HBE = ABC.$$

[34]) Једнакост лукова AG и FC следује из конгруенције сферних троуглова AGF и FCG, који су по ставу 15-ом конгруентни стога што имају једнаке две стране и захваћени угао ($FG = FG$, $AF = GC$ и угао $AFG = CGF = R$). Троугли FAC и ACG, из чије конгруенције следује једнакост углова FAC и ACG, конгруентни су (по ставу 15-ом) такође стога што имају једнаке две стране и захваћени угао ($FC = AG$, $AF = GC$ и $\sphericalangle AFC = \sphericalangle AGC$).

Нека је сада $ABCD$ (фиг. 19) сферни четвороугао, у коме су стране $AB = DC$ управне на BC[35]) и углови у A и D сваки $\frac{1}{2}S$. Продужимо стране AD и BC тако да се оне секу у E и продужимо их и даље од E, начинимо $DE = EF$ и спустимо на продужење линије BC управну FG. Цео лук BG преполовимо и спојимо средишњу тачку H луцима највећег круга са A и F. Троугли EFG и DCE конгруентни су (15. став), према томе је $FG = DC = AB$. Троугли ABH и HGF такође су конгруентни, јер су правоугли и имају једнаке катете, према томе, AH и HF[36]) припадају *једном* кругу, лук AHF једнак је π, $ADEF$ такође је $= \pi$, угао $HAD = HFE = \frac{1}{2}S - BAH = \frac{1}{2}S - HFG = \frac{1}{2}S - HFE - EFG = \frac{1}{2}S - HAD - \pi + \frac{1}{2}S$. Према томе је: угао $HFE = \frac{1}{2}(S - \pi)$, или, што је исто: једнак величини исечка $AHFDA$[37]). Величина овог једнака је опет четвороуглу $ABCD$, што се лако види ако се од једног пређе на други додајући најпре троугао EFG и BAH а затим одузимајући троугле DCE и HFG, који су им једнаки. Према томе је $\frac{1}{2}(S - \pi)$ величина четвороугла $ABCD$ и у исто доба величина и сферног троугла, у коме је сума сва три угла једнака S.



Фиг. 19

28. *Ако се три равни секу у паралелним линијама, сума њихова три површинска угла износи два права.*

Нека су AA', BB', CC' (фиг. 20) три паралелне линије које постају пресецањем трију равни (25. став). Узмимо на

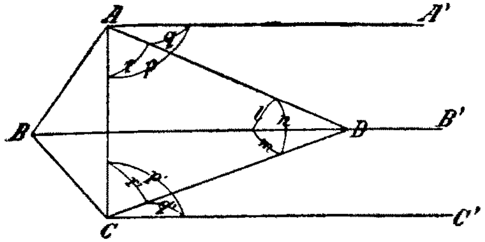
---

[35]) У оригиналу стоји AB, што је очевидно штампарска погрешка.

[36]) У оригиналу стоји погрешно AF.

[37]) *Луци* AH и HF припадају једном кругу стога што су углови AHB и GHF једнаки, што следује из конгруенције правоуглих троуглова ABH и

њима три произвољне тачке A, B, C и замислимо кроз њих положену једну раван,



Фиг. 20

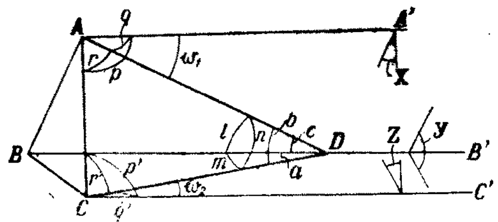
која ће према томе сећи равни паралелних у правим линијама AB, AC, BC. Даље положимо кроз линију AC и ма коју тачку D на линији BB' још једну раван, чији ће пресеци са равнима паралелних AA', BB' и CC', BB' бити линије AD и DC, и чији ћемо нагиб према трећој равни паралелних AA' и CC' означити са w (у фиг. 2' са w_1 и w_2). Углове између равни, у којима се налазе паралелне линије, означићемо са X, Y, Z на линијама AA', BB' и CC' (фиг. 2'); напослетку нека су линеарни углови $BDC = a$, $ADC = b$, $ADB = c$. Замислимо око A као средишта описану једну куглину површину, на којој пресеци њени са правама AC, AD и AA' одређују сферни троугао, чије стране нека су p, q, r а површина α, а чији су углови: w наспрам стране q, X наспрам стране r и према томе $\pi + 2\alpha - w - X$ [38]) наспрам стране p (27. став). На исти начин секу CA, CD, CC' куглину површину око средишта C и одређују троугао ве-

GFH. Лук AHF једнак је π стога што је $AH = \frac{\pi}{2}$ и $HF = \frac{\pi}{2}$. Угао HFE једнак је $\frac{1}{2}(S - \pi)$ стога што је $HFE = \frac{1}{2}S - HFE - \pi + \frac{1}{2}S$, а једначина $\frac{1}{2}S - HFE - EFG = \frac{1}{2}S - HAD - \pi + \frac{1}{2}S$ следује отуда што је $HFE = HAD$ и $EFG = CDE = \pi - \frac{1}{2}S$. Како је угао HFE угао двоугла $AHFDA$, то је мерни број његове величине једнак мерном броју површине овог последњег.

[38]) У сферноме троуглу, чије су стране p, q и r, лежи наспрам стране q сферни угао, чија је величина једнака величини нагибног угла између равни $ACA'C'$ и ACD, тј. једнака величини угла w_1. На исти начин одговара страни r нагибни угао између равни $AA'CC'$ и $AA'B'B$, тј. угао X, и страни p нагибни угао између равни $ADA'B'$ и ADC, чија је величина по ставу 27-ом једнака $\pi + 2\alpha - w - X$.

личине β са странама p', q', r' и угловима: w наспрам q', Z наспрам r' и према томе $\pi + 2\beta - w - Z$ [39]) наспрам p'. Напослетку пресеци куглине површине око D са линијама DA, DB, DC одређују сферни троугао, чије су стране l, m, n а супротни углови $w + Z - 2\beta$, $w + X - 2\alpha$ и Y, чија је површина, према томе, $\delta = \frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi) - \alpha - \beta + w$ [40]). Кад w опада опадају и површине троуглова α и β тако, да $\alpha + \beta - w$ може постати мање од сваког датог броја. У троуглу δ' могу се стране l и m смањити такође до у бесконачност (21. став), према томе може се троугао δ' једном од својих страна l или m положити на највећи круг кугле колико се хоће пута а да тиме половина кугле не буде испуњена, према томе δ ишчезава у исто доба са w; из чега следује да је нужним начином $X + Y + Z = \pi$. [41])

[39]) У сферноме троуглу, чије су стране p', q' и r', лежи наспрам стране q сферни угао, који је једнак нагибном углу између равни $ACA'C'$ и ACD, тј. углу w, наспрам стране r', сферни угао, који је једнак нагибном углу између равни $AA'C'C$ и $BB'C'C$, тј. углу Z, према томе, наспрам стране p' сферни угао, који је једнак нагибном углу између равни $CDB'C'$ и CDA, чија је величина по ставу 27-ом једнака $\pi + 2\beta - w - Z$.



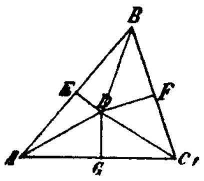
Фиг. 2'

[40]) У сферном троуглу, чије су стране l, m и n, лежи наспрам стране l сферни угао, који је једнак нагибном углу између равни BDC и ADC, чији је збир са нагибним углом између равни $CDB'C'$ и CDA једнак π (пошто равни BDC и $CDB'C'$ леже обе у равни $BB'CC'$). Како је овај последњи нагибни угао (види претходну примедбу) једнак $\pi + 2\beta - w - Z$, то је први једнак $w + Z - 2\beta$. На исти начин је угао, који одговара страни m, једнак $w + X - 2\alpha$. Ако се са δ означи површина тога сферног троугла, биће по ставу 27-ом $\delta = \frac{1}{2}(w + Z - 2\beta + w + X - 2\alpha + Y - \pi) = \frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi) - \alpha - \beta + w$.

[41]) Што год будемо тачку D више удаљавали од тачке B у правцу паралелизма, нагибни угао w, луци q и q', као и луци l и m (односно одговарајући сферни троугли) постајаће све мањи, према томе, при прелазу ка граници количине w, δ, α и β постаће једнаке нули, па ћемо имати $\frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi) = 0$, одакле следује $X + Y + Z = \pi$.

29. *У праволиниском троуглу или се управне подигнуте у срединама страна не секу или се све три секу у једној тачки.*

Претпоставимо да се у троуглу ABC (фиг. 21) две управне ED и DF, подигнуте на странама AB и BC у њиховим средишњим тачкама E и F, секу у тачки D, и повуцимо у оквиру углова троуглових линије DA, DB, DC.



Фиг. 21

У конгруентним је троуглима ADE и BDE (10. став) $AD = BD$, тако исто следује да је и $BD = CD$; троугао ADC је, према томе, равнокрак и управна спуштена из темена D на основицу AC пашће у њену средишњу тачку G.

Доказ остаје исти и кад тачка пресека управних ED и FD лежи у линији AC или кад пада ван троугла.

У случају, дакле, кад се претпостави, да се две од оних управних не секу, не може се ни трећа са њима сећи.[42])

[42]) У Евклидовој равни увек се управне у срединама страна (симетрале страна) троугловнх секу у једној тачки. У Лобачевсковој равни то не мора да буде случај, и ту важи став:

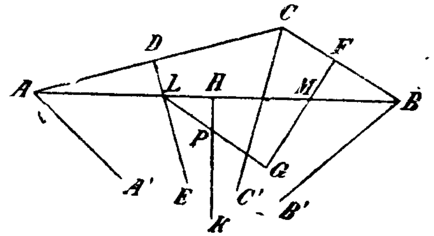
Симетрале страна троуглових или се секу у једној тачки или дивергирају или су паралелне.

(Упор. „Neue Anfangsgründe“ § 111, стр. 182 и д.).

Важно је напоменути, да, у случају кад симетрале страна троуглових дивергирају, све три симетрале имају једну исту заједничку управну (упор. примедбу 11-у), и да су у томе случају темена троуглова подједнако удаљена од те заједничке управне, другим речима да она леже на такозваној *линији једнаког отстојања,* која је геометриско место свих тачака, које су подједнако удаљене од једне дате праве (упор. H. Liebmann, „Nichteuklidische Geometrie“ 2-te Aufl. 1912, стр. 44). У својим списима спомиње Лобачевски само на једноме месту ту линију (упор. „Über die Aufgangsgründe der Geometrie“ § 24, стр. 34 и примедбу Енгелову на стр. 265), док се Бољај њоме служи за многа своја извођења (упор. „Appendix“ § 27, § 32, § 39 и др.). Као што је на кугли линија једнаког отстојања мали круг, дакле крива линија, тако је исто и линија једнаког отстојања у Лобачевсковој равни крива линија. Линијама једнаког отстојања одговарају у простору *површине једнаког отстојања,* за које важи геометрија Лобачевскога (упор. H. Liebmann, н. н. м. стр. 59), тј. у троуглу, чије су стране линије једнаког отстојања, збир углова мањи је од 2R. Напротив, као што је показао Бољај (в. „Appendix“ § 39), збир углова у троуглу у Бољај-Лобачевсковој равни, чија је једна страна линија једнаког отстојања, износи 2R, одакле се непо-

30. *Управне подигнуте у срединама страна праволиниског троугла морају све три бити паралелне, ако се претпостави паралелизам двеју од њих.*

Нека су у троуглу ABC (фиг. 22) линије DE, FG, HK управне на странама у њиховим средишњим тачкама D, F, H. Ми ћемо најпре претпоставити, да су управне DE и FG паралелне, да оне линију AB секу у L M, и да се управна HK налази између њих. У оквиру угла BLE повуцимо произвољно праву линију LG, која ће морати



Фиг. 22

FG сећи негде у G ма како мали био угао отступања GLE (16. став). Пошто се у троуглу LGM управна HK не може сећи са MG (29. став)[43]), она мора сећи LG негде у P, одакле следује, да HK мора бити паралелна са DE (16. став) и MG (18. и 25. став).[44])

Ако се стави страна $BC = 2a$, $AC = 2b$, $AB = 2c$ и углови супротни овим странама означе са A, B, C, онда имамо у горњем случају

$$A = \Pi(b) - \Pi(c),$$
$$B = \Pi(a) - \Pi(c),$$
$$C = \Pi(a) + \Pi(b),$$

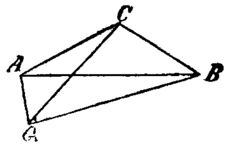
о чему се лако уверавамо помоћу линија AA', BB', CC', које су из тачака A, B, C повучене паралелно управној HK и које су, према томе, паралелне и са друге две управне DE и FG (23. и 25. став).

средно да закључити, да збир тих углова у троуглу те равни, чије су три стране праве линије, мора бити мањи од 2R (упор. и V. Varićak, „Prvi osnivači neeuklidske geometrije“, 1907, стр. 157 и д.).

[43]) Пошто је MG део праве FG, а FG и DE као паралелне не секу се, то се ни HK не може по ставу 29-ом сећи са њима, према томе, MG и HK не секу се.

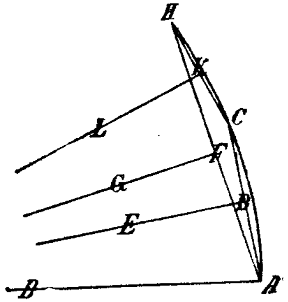
[44]) HK мора бити паралелно са DE на основу друге Лобачевскове дефиниције паралелних линија (в. прим. 12), а како су по претпоставци MG и DE паралелне међу собом, то је по ставу 25-ом HK паралелно и са MG

Нека су сада управне HK и FG међу собом паралелне, трећа управна DE тада их неће сећи (29. став), према томе, она је или паралелна са њима или сече AA'. Последња претпоставка не значи друго до да је угао $C > \Pi(a) + \Pi(b)$. Смањи ли се овај угао тако, да постане једнак $\Pi(a) + \Pi(b)$, што ће бити ако се линији AC дâ нов положај CQ (фиг. 23), и дужина треће стране BQ означи са $2c'$, онда мора угао CBQ у тачки B, који је постао већи, према ономе што је горе доказано, бити једнак $\Pi(a) - \Pi(c') > \Pi(a) - \Pi(c)$ одакле следују $c' > c$ (23. став). Али у троуглу ACQ углови у A и Q су једнаки, према томе мора у троуглу ABQ угао код Q бити већи од угла у тачки A, према томе је $AB > BQ$ (9. став); што значи да је $c > c'$.[45])



Фиг. 23

31. *Граничном линијом (орициклом) називамо ону криву линију у равни, код које су све управне подигнуте у средишњим тачкама тетива међу собом паралелне.*



Фиг. 24

У сагласности са овом дефиницијом можемо произвођење граничне линије замислити на тај начин, што ћемо на датој правој AB из једне од њених тачака A повлачити под

[45]) Кад би управна DE секла $AA' \parallel CC'$ онда би подножна тачка њена D лежала ближе тачки A него тачки C (јер би угао DAA' у том случају био мањи од угла паралелизма), према томе, угао DCC' био би угао паралелизма за линију већу од b, одакле следује да је угао $C > \Pi(b) + \Pi(a)$. Ова претпоставка, међутим, доводи до резултата, по коме је $c' > c$, који стоји у противречности са резултатом по коме је $c' < c$. Према томе не може DE сећи AA', мора дакле бити паралелно са HK.

Овај доказ Лобачевсков непотпун је међутим утолико уколико се може закључити да је $c' < c$ (што следује из $2c' < 2c$) само ако се претпостави, да је $AC > BC$, као што је учињено у фиг. 22 (ову је замерку Лобачевсковом доказу учинио још Гаус — види примедбу Engel-ову у „Zwei geometrische Abhandlungen etc." на стр. 453). Ако је $AC < BC$, онда угао ACQ треба учинити једнаким $\Pi(a) + \Pi(b)$ и $CQ = CB$ и даље доказивати као у тексту. Ако је пак $AC = BC$, треба опет ACQ направити једнаким $\Pi(a) + \Pi(b)$, $CQ = AC = BC$ и доказивати даље као у тексту.

разним угловима $CAB = \Pi(a)$ тетиве $AC = 2a$[46]); крај C једне такве тетиве лежаће на граничној линији, чије тачке можемо постепено одредити на тај начин. Управна DE на тетиви AC у њеној средини D биће паралелна са линијом AB, коју ћемо назвати *осом граничне линије*. Исто тако биће и свака друга управна подигнута у средишњој тачки ма које тетиве AH паралелна са AB, према томе, ова особина мора припадати и свакој другој управној KL уопште, која је подигнута у средишњој тачки K ма које тетиве CH, која је повучена између макојих тачака C и H на граничној линији (30. став).[47]) Такве управне морају се дакле такође без разлике као и AB назвати *осама граничне линије*.

32. *Круг, чији полупречник расте, прелази у граничну линију.*

Нека је AB (фиг. 25) тетива граничне линије, повуцимо из њених крајњих тачака: A и B две осе AC и BD, које ће, према томе, склапати са тетивом два једнака угла $BAC = ABD = \alpha$ (31. став). На једној од ових оса AC узмимо ма где тачку E за средиште једног круга и повуцимо лук AF од почетне тачке A осе AC до његове тачке пресека F са другом осом BD. Полупречник FE круга, који одговара тачки F, склапаће

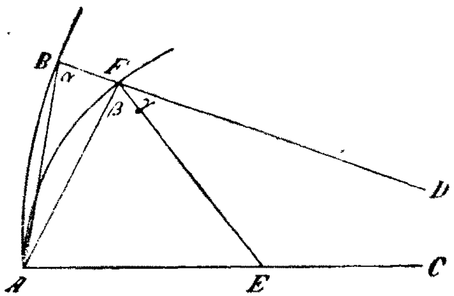
[46]) Конструкција тетиве $2a$, која склапа дати угао са правом AB, не значи ништа друго до конструкцију управне a, која одговара датоме углу као углу паралелизма [углу $\Pi(a)$]. Како се ова конструкција може извести (као и обрнута конструкција угла паралелизма $\Pi(a)$ за дату дужину a, односно паралелне са једном датом правом), о томе упореди Engel — Lobatschewsky, н. н. м. стр. 242 и 256, B. Bonola, н. н. м. стр. 109 и V. Varićak, н. н. м. стр. 137—138.

Кад смо конструисали тетиву $AC = 2a$, онда сама конструкција показује, да ће права повучена из C паралелно управној DE бити паралелна и са правом AB и да ће бити $\sphericalangle BAC$ једнак одговарајућем углу код C.

Горње две конструкције у Лобачевсковој равни не могу се практично извести, пошто је искуствени простор евклидске природе. Њихов значај је чисто теориски, оне показују егзистенцију паралелних у Лобачевсковој равни. И Евклид у својим „Елементима" употребљава конструкције само у теориском смислу, као теореме којима се доказује егзистенција фигура.

[47]) У троуглу AHC, наиме, имамо $FG \perp AH$, $KL \perp HC$ и $DE \perp AC$, према томе је по ставу 30-ом $FG \parallel KL \parallel DE$. Како је пак $DE \parallel AB$, то су и $FG \parallel AB$ и $KL \parallel AB$.

на једној страни са тетивом AF угао $AFE = \beta$ а на другој страни са осом BD угао $EFD = \gamma$. Излази да је угао између обе тетиве $BAF = \alpha - \beta < \beta + \gamma - \alpha$ (22. став), одакле следује: $\alpha - \beta < \frac{1}{2}\gamma$.[48])

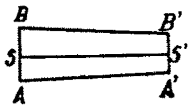


Фиг. 25

Пошто се пак угао γ смањује до нуле како кретањем средишта E у правцу AC, при чему F остаје непромењено (21. став), тако и приближавањем тачке F тачки B, при чему средиште E остаје у своме положају (22. став), то следује, да таквим смањивањем угла γ ишчезава и угао $\alpha - \beta$, односно узајамни нагиб тетива AB и AF, па према томе и отстојање тачке B на граничној линији од тачке F на кругу.[49]) Према томе може се гранична линија назвати и *кругом са бесконачно великим полупречником.*

33. Нека су $AA' = BB' = x$ (фиг. 26), две линије паралелне међу собом на страни идући од A ка A', осе граничних лукова (лукова на двема граничним линијама) $AB = s$, $A'B' = s'$, тада је

$$s' = s\,e^{-x},$$



Фиг. 26

где је e независно од лукова s, s' и праве x, која претставља отстојање лука s од s'.

---

[48]) У равнокраком троуглу AFE углови код A и F су једнаки, како је пак $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD = \alpha$, то је $\sphericalangle BAF = \alpha - \beta$. У праволиниском троуглу ABF збир углова је по ставу 22-ом мањи од $2R$, тј. $\alpha + (\alpha - \beta) + AFB < 2R$; како је пак $AFB + \beta + \gamma = 2R$, то је $2\alpha - \beta < \beta + \gamma$, дакле $\alpha - \beta < \frac{\gamma}{2}$.

[49]) У првом случају, наиме, кад тачка F остаје непромењена а полупречник FE бива све већи, тачка A помера се у правцу паралелизма, али увек за све мање коначно отстојање од првобитног положаја. Према томе

Да бисмо ово доказали претпоставимо, да је однос лука s према луку s' једнак односу два цела броја n и m. Између оса AA', BB' повуцимо трећу осу CC', која ће на тај начин отсецати од лука AB део $AC = t$ и од лука $A'B'$ на истој страни део $A'C' = t'$. Нека је однос између t и s једнак односу два цела броја p и q, тако да је

$$s = \frac{n}{m}\,s', \qquad t = \frac{p}{q}\,s.$$

Поделимо сада s осама у nq једнаких делова тако, да ће таквих делова бити mq на s и np на t. Како ови једнаки делови на s и t одговарају тако исто једнаким деловима на s' и t' имамо[50]):

$$\frac{t'}{t} = \frac{s'}{s}.$$

Ма где дакле узели луке t и t' између оса AA' и BB', увек ће њихов однос остати исти, докле год отстојање њихово x остаје исто. Ако се стога за $x = 1$ стави $s = e s'$ онда ће за свако x морати бити

$$s' = s e^{-x}.$$

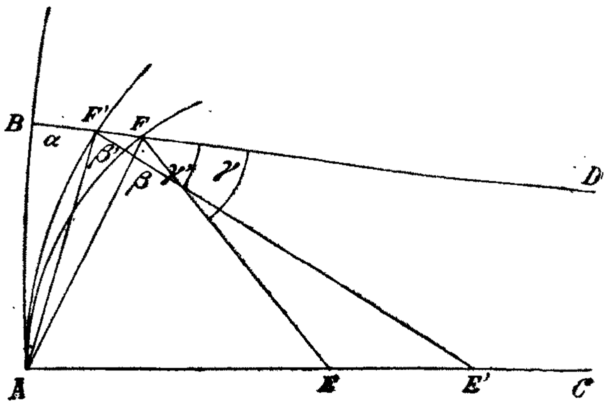
помера се и гранична линија (при чему осе BD и AC остају исте), којој се на овај начин све више приближује круг, што му полупречник постаје већи, тако да ће круг, кад му полупречник постане бесконачно велики, пасти уједно са граничном линијом, која пролази кроз тачку F. Гранична линија може се дакле сматрати за круг са бесконачно великим полупречником, чији су полупречници идентични са осама граничне линије, које су све међу собом паралелне. У Евклидовој равни, у којој паралелне свуда подједнако отстоје једна од друге, круг са бесконачно великим полупречником пада уједно са правом линијом; у Лобачевсковој равни, где паралелне (по ставу 24-ом) конвергирају на страни паралелизма и могу се према томе сматрати као линије које се секу у бесконачности, круг са бесконачним полупречником није идентичан са правом линијом, већ претставља једну специјалну криву линију (граничну линију), којој у Евклидовој равни не одговара никаква специјална линија, баш као што је и линија једнаког отстојања (в. примедбу 42) једна специјална крива линија Лобачевскове равни, којој не одговара никаква специјална линија у Евклидовој равни.

Да гранична линија претставља границу, којој се приближује круг повећавањем његовог полупречника, Лобачевски изводи у „Neue Anfangs-

Пошто је e непознат број а подлежи само услову $e > 1$ и пошто се даље јединица дужине за x може узети произвољно, то је можемо ради рачунског упрошћавања тако изабрати, да се под e разуме основа Неперових логаритама.[51])

---

gründe“ § 114, стр. 187 на један начин, при коме нема померања граничне линије, као што је то случај у фиг. 25. Ако, наиме, (фиг. 3) при повећавању



Фиг. 3′

полупречника FE тачка F мења свој положај, она ће бити све ближа тачки B, угао γ биће све мањи, према томе и угао $\alpha - \beta$, и кад FE постане бесконачно велико, круг AF прећи ће у граничну линију $AЗ$.

Из саме дефиниције граничне линије излази, да је тангента њена у датој тачки управна на оси њеној у истој тачки и да гранична линија стоји управно на свима својим осама.

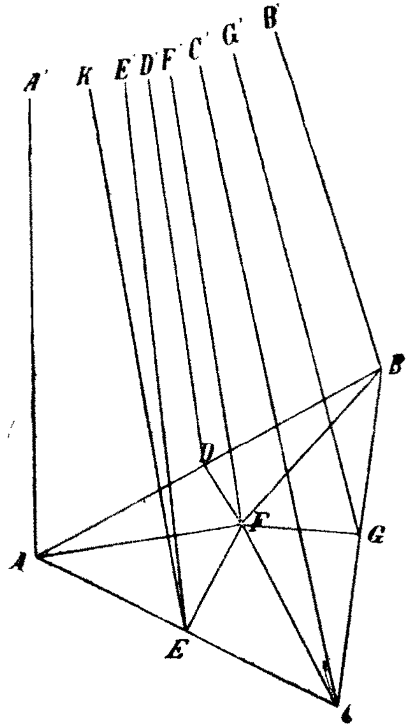
[50]) У „Neue Anfangsgründe“ § 117, стр. 189—190 простији је доказ става, *да је однос лукова двеју граничних линија константан за исто отстојање тих линија.* Ако лук s поделимо у nq једнаких делова, од којих ће np лежати на делимичном луку t (пошто је по претпоставци $s : t = q : p$), па из одговарајућих тачака повучемо осе и продужимо их до s', онда ће оне поделити и луке s' и t' на nq и np једнаких делова (само што у овом случају ови делови неће бити једнаки са одговарајућим деловима на луку s), одакле непосредно следује да је $\frac{t}{t'} = \frac{s}{s'}$.

[51]) Једначина $s' = se^{-x}$ (или $s = s'e^{x}$), да̂ се овако извести (упор. „Neue Anfangsgründe“ н. н. м.). Ако се отстојање AA' граничних линија AB и $A'B'$ подели на x једнаких делова, повуку луци граничних линија из

Још се овде може приметити, да је за $x = \infty$, $s' = 0$, према томе, не само што се смањује отстојање између две паралелне (24. став), него оно напослетку сасвим ишчезава при продужењу паралелних на страни паралелизма. Паралелне линије имају дакле карактер асимптота.

34. *Гранична површина* (орисфера) *назива се она* површина која постаје обртањем граничне линије око једне од њених оса, која ће заједно са свима осталима осама граничне линије бити оса и граничне површине.

Тетива склапа једнаке углове са осама повученим кроз њене крајне тачке, па ма где да се узму на граничној површини ове две крајне тачке.



Фиг. 27

Нека су A, B, C (фиг. 27) три тачке на граничној површини, AA' оса обртања, BB' и CC' две друге осе, према томе AB и AC тетиве које са осама склапају једнаке углове $A'AB = B'BA$, $A'AC = C'CA$ (31. став); осе BB', CC' повучене кроз крајне тачке треће тетиве BC такође су паралелне и

поделних тачака између оса AA' и BB', и ти луци означе редом слева надесно са $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{x-1}$, биће:

$$s : s_1 = e, \quad s_1 : s_2 = e, \quad s_2 : s_3 = e, \ \ldots, \ s_{x-1} : s' = e.$$

Множењем ових једначина добијамо:

$$\frac{s}{s_1} \cdot \frac{s_1}{s_2} \cdot \frac{s_2}{s_3} \cdots \frac{s_{x-1}}{s'} = e^{x},$$

леже у једној равни (25. став). Управа DD' подигнута у средини D тетиве AB и у равни паралелних AA', BB' мора бити паралелна са осама AA', BB', CC' (23. и 25. став); иста таква управна EE' на тетиви AC у равни паралелних AA', CC' биће паралелна са осама AA', BB', CC' и управном DD'. Угао између равни, у којој су паралелне AA' и BB', и равни троугла ABC означићемо са $\Pi(a)$, где a може бити позитивно, негативно или нула. Ако је a позитивно, повуцимо $FD = a$, у троуглу ABC и равни његовој, управно на тетиву AB из њене средишње тачке D; ако је a негативан број, FD се мора повући ван троугла на другој страни тетиве AB; ако је $a = 0$, тачка F поклапа се са тачком D. У свима овим случајевима постају два конгруентна правоугла троугла AFD и DFB, према томе је $FA = FB$. Подигнимо сада у F линију FF' управно на раван троугла ABC.

Пошто је угао $D'DF = \Pi(a)$, $DF = a$, то је FF' паралелно са DD' и линијом EE', са којом лежи у једној истој равни, која је управна на равни троугла ABC.[52] Замислимо сада да је у равни паралелних EE', FF' подигнута на EF управна EK, та ће управна стајати управно и на равни троугла ABC (13. став) и на линији AE која лежи у тој равни (11.

дакле:

$$s = s' e^x .$$

Да је $e > 1$ следује непосредно из претпоставке, да је $e = \frac{s}{s_1}$, а $s > s_1$. Јединица дужине за отстојање x два лука (односно отстојање лукова s и s_1, s_1 и s_2 итд.) може се, пошто је произвољна, узети тако да e буде једнако броју 2,7182818 . . . , тј. бази природних логаритама. Ако се узме у обзир параметар Лобачевскове равни и тај параметар означи са k (види Додатак I), онда се дâ показати да је, кад се јединица дужине стави $= k$ однос $\frac{s}{s_1}$ једнак e, и, према томе, $s = s' e^{\frac{x}{k}}$. То следује посредно из Бољајевог доказа, да је, кад је у формули $Y = J^{\frac{y}{i}}$, (где Y означава однос два гранична лука за отстојање $y > i$, а J тај однос за отстојање i) $i = \frac{r}{tg z}$, [где r означава полупречник граничног круга, чија је тетива $2y$, а z угао $\frac{\pi}{2} - \Pi(y)$], $J = e$ (Упор. „Appendix" § 30 у вези за § 27 и 24).

[52]) По ставу 11а, пошто је FF' управно на равни троугла ABC.

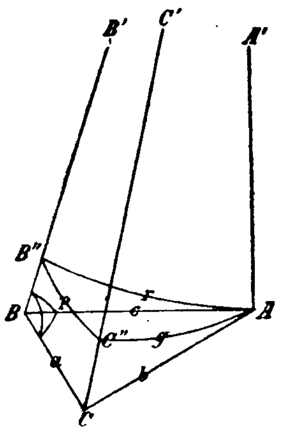
став), према томе мора AE, која је управна на EK и EE', бити у исто доба управна и на FE (11. став). Троугли AEF и FEC су конгруентни, пошто су правоугли и имају једнаке катете, према томе је $AF = FC = FB$. Управна спуштена из темена F равнокраког троугла BFC на основицу BC пролази кроз њену средишну тачку G; раван положена кроз ову управну FG и линију FF' мора бити управна на равни троугла ABC и сећи раван паралелних BB', CC' у линији GG', која је такође паралелна са BB' и CC' (25. став); пошто је пак CG управно на FG, па према томе у исто доба и на GG', то је и угао $C'CG = B'BG$ (23. став).

Одавде следује, да се свака оса може сматрати за обртну осу граничне површине.

Главном равни назваћемо сваку раван која је положена кроз једну осу граничне површине. Према томе, свака *главна раван* сече граничну површину у граничној линији, док је за сваки други положај пресецајуће равни овај пресек круг[53]). Три главне равни[54]), које се узајамно секу, скла-

[53]) Да свака главна раван сече граничну површину у граничној линији следује из дефиниције граничне површине, (упор. J. Bolyai „Appendix" § 11). Тако исто следује из дефиниције граничне површине, да свака раван, која је управна на једној од оса њених, сече граничну површину у кругу. Да је тај пресек круг и у случају, кад раван сече косо осу граничне површине, следује непосредно из горњег Лобачевсковог доказа за став, да се свака од оса граничне површине може сматрати за обртну осу њену. Јер ако узмемо једну четврту тачку L на линији пресека равни ABC и граничне површине, онда ће оса ове последње из тачке L бити паралелна са управном FF' и према томе отстојање LF биће једнако отстојањима AF, BF и CF (до тог закључка лако ћемо доћи ако направимо троугао ALB). Упор. „Neue Anfangsgründe" § 119, стр. 191 и д.

Из горњег следује, да се круг на граничној површини својим обимом потпуно подудара са кругом у Лобачевсковој равни (тако ће у фиг. 27 круг на граничној површини, чије ће средиште бити тачка кроз коју пролази оса FF', својим обимом падати уједно са кругом у равни троугла ABC, чије је средиште F), онако исто као што круг на површини кугле пада својим обимом уједно са кругом у Евклидовој равни (са кругом равни која сече површину кугле). Као што је једна и иста кружна линија, кад се посматра као периферија круга у кугланој површини, по својој величини $= 2\pi R \sin \frac{l}{R}$, (где l означава полупречник круга на куглиној површини, односно лук одговарајућег највећег круга, а R полупречник кугле), а једнака $2\pi r$ (где r означава полупречник круга у Евклидовој равни) кад се пају међу собом углове чија је сума π (28. став). Ове ћемо углове сматрати за углове граничног троугла, чије су стране луци граничних линија, које су пресеци граничне површине са оним трима главним равнима. Код граничних троуглова постоји дакле иста зависност између углова и страна, каква се доказује у обичној геометрији за праволиниске троугле.[55])



Фиг. 28

35. У следећем означаваћемо величину линије једним писменом са додатим акцентом, на пр. x', да бисмо изразили, да њена величина стоји у једном односу са величином друге линије, која је обележена истим знаком x без акцента, који је изражен једначином

$$\Pi(x)+\Pi(x')=\frac{1}{2}\pi.$$

посматра као периферија круга у Евклидовој равни, тако исто једна и иста кружна линија, кад се посматра као периферија круга у Лобачевсковој равни, једнака је по својој величини (за полупречник r) $\pi k(e^{\frac{r}{k}}-e^{-\frac{r}{k}})$, а једнака $2\pi l$ (где l означава полупречник круга на граничној површини), кад се посматра као периферија круга у граничној површини.

Треба још напоменути, да су *права линија, гранична линија* (орицикл), *линија једнаког отстојања* (еквидистанта или хиперцикл) и *круг* четнри униформне линије у Лобачевсковој равни, док су *права линија и круг* две једине униформне линије у Евклидовој равни.

[54]) У оригиналу стоји „Hauptflächen".

[55]) Пошто главне равии пролазе кроз осе граничне површине, а све су осе ове последње међу собом паралелне, то ће се три главне равни увек сећи у линијама које су међу собом паралелне, према томе, збир нагибних углова тих равни биће по ставу 28-ом једнак π. Како је пак величина углова између лукова граничиих линија на граничној површини као кривој површини једнака величини нагибних углова одговарајућих равии (слично величини сфериих углова на површини кугле — упор. примедбу 38-у), то ће и збир углова у троуглу граничие површиие, чије су стране луци граничних линија, износити такође π. А како из става, да је збир углова у праволиниском троуглу једнак 2R, следује Евклидов V-ти постулат, то очевидио на граничној површини важи Евклидова геометрија.

Нека је сада ABC (фиг. 28) један праволиниски правоугли троугао, у коме је хипотенуза $AB=c$, катете $AC=b$, $BC=a$, а супротни углови $BAC=\Pi(\alpha)$, $ABC=\Pi(\beta)$. Подигнимо у тачки A управну AA', на раван троугла ABC и из тачака B и C повуцимо BB' и CC' паралелно са AA'. Равни, у којима леже ове три паралелне, склапају међу собом углове: $\Pi(\alpha)$ на ивици AA', прав угао на ивици CC' (11. и 13. став), према томе $\Pi(\alpha')$, на ивици BB' (28. став).[56])

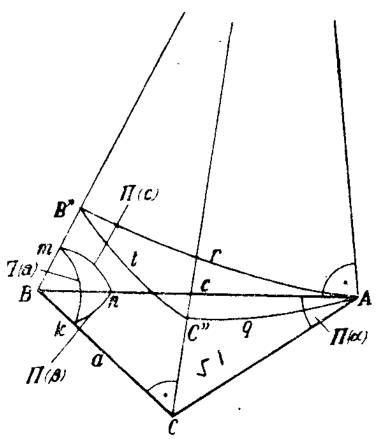
Пресеци линија BA, BC, BB' са површином кугле, која је описана око тачке B као средишта, одређују сферни троугао, у коме је страна $mn=\Pi(c)$, $kn=\Pi(\beta)$, $mk=\Pi(a)$ а супротни углови $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$.[57]).

---

[56]) Да је нагибни угао између равни $AA'BB'$ и $AA'CC'$ једнак $\Pi(\alpha)$ следује из тога што, пошто је AA' управио на раван троугла ABC, AA' стоји управно и иа AB и AC, а угао је $BAC=\Pi(\alpha)$. Нагибни угао између равни $CC'AA'$ и $CC'BB'$ једнак је $^1/_2\pi$ стога, што је прво $a\perp CC'AA'$ (b је пресек равни $CC'AA'$ и равни ABC и које су, по ставу 11а, управие једна на другу), а a је $\perp b$, према томе је по ставу 13-ом $a\perp CC'AA'$), и друго стога што је $a\perp CC'$, (пошто CC' лежи у равни $CC'AA'$). Нагибни угао између равни $BB'CC'$ и $BB'AA'$ мора бити по ставу 28-ом једнак $^1/_2\pi-\Pi(\alpha)$ и, сходио једначини $\Pi(x)+\Pi(x')={}^1/_2\pi$, једнак $\Pi(\alpha')$.

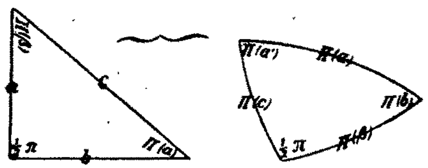
[57]) Ако се теме сфериог троугла, које лежи на правој BB', означи са m, теме на правој BA са n, а теме иа правој BC са k (в. фиг. 4′) онда страии mn одговара у равни $B'BA$, која пролази кроз куглиио средиште B угао $B'BA=\Pi(c)$, страни nk у равни ABC угао $ABC=\Pi(\beta)$, страни mk у равни $B'BC$ угао $B'BC=\Pi(a)$, ово последње стога што је $a\perp CC'$ (в. претходну примедбу). Према томе је $mn=\Pi(c)$, $kn=\Pi(\beta)$, $mk=\Pi(a)$.

У самоме сферном троуглу mnk наспрам стране mn лежи сферни угао mkn, који је по величини једнак иагибном углу између равни $BCB'C'$ и BAC, а овај је угао једиак углу $C'CA$ у равни $C'CAA'$ (и то стога што је $C'C\perp a$ и $b\perp a$), који је опет $=\Pi(b)$. Наспрам стране nk лежи сферни угао kmn, који је једнак нагибном углу између равни $B'BAA'$ и $B'BCC'$, а овај је угао, као што смо видели у претходној примедби, једнак $\Pi(\alpha')$. Страии mk одговара сферни угао mnk, који је једиак нагибном углу између равни $BAA'B'$ и BAC, а овај је угао једиак $^1/_2\pi$ и то стога што је по претпоставци $AA'\perp BAC$.



Фиг. 4′

Према томе егзистенција једног праволиниског троугла са странама a, b, c, и супротним угловима $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $^1/_2\pi$ повлачи за собом егзистенцију једног сферног троугла (фиг. 29) са странама $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ и супротним угловима $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $^1/_2\pi$. Али и обрнуто, егзистенција датог сферног троугла условљава егзистенцију једног новог праволиниског троугла, чије су стране α, α', β а супротни углови $\Pi(b')$, $\Pi(c)$, $^1/_2\pi$.[58]).



Фиг. 29

[58]) Да једном истом сферном троуглу одговарају *два* праволиниска, изводи Лобачевски у „Pangeometrie“ стр. 14 овако.

Праволиниском троуглу ABC (фиг. 28) са странама:

$$a,\ b,\ c$$

и супротним угловима:

$$\Pi(\alpha),\ \Pi(\beta),\ \frac{\pi}{2}$$

одговара сферни троугао (фиг. 29) са странама:

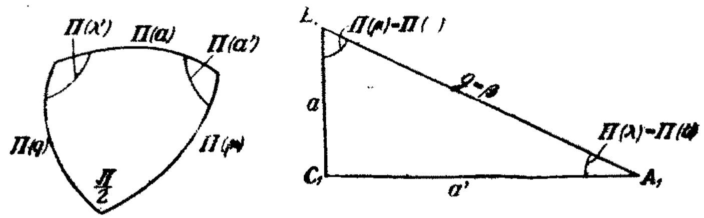
$$\Pi(\alpha),\ \Pi(\beta),\ \Pi(a),$$

и супротним угловима:

$$\Pi(b),\ \Pi(\alpha'),\ \frac{\pi}{2}.$$

Нацртајмо један други праволиниски троугао $A_1B_1C_1$ (фиг. 5') чије ће стране бити

$$a,\ \alpha'\ g$$



Фиг. 5'

а супротни углови:

$$\Pi(\lambda),\ \Pi(\mu),\ \frac{\pi}{2}.$$

Ако на исти начин као у фиг. 28 за троугао ABC будемо потражили сферни троугао, који одговара овоме праволиниском троуглу, наћићемо (фиг. 5') да му одговара сферни троугао са странама:

$$\Pi(g),\ \Pi(\mu),\ \Pi(a),$$

и угловима:

$$\Pi(\alpha'),\ \Pi(\lambda'),\ \frac{\pi}{2}.$$

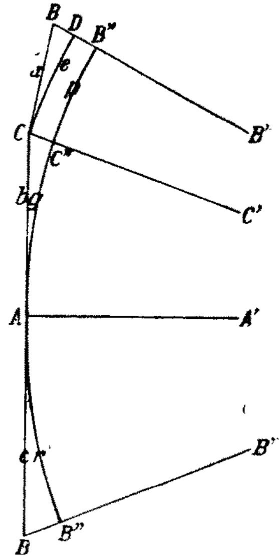
Ако овај сферни троугао упоредимо са оним пређашњим (из фигура 29 и 4'), видимо, да оба имају једнаку хипотенузу $\Pi(a)$ и један угао, $\Pi(\alpha')$,

Према томе може се од a, b, c, α, β прећи на b, a, c, β, α, као и на a, α', β, b' c.[59])

Замислимо да је кроз тачку A (фиг. 28) положена гранична површина са осом AA', површина која друге две осе BB', CC' сече у B'' и C'', и чији пресеци са равнима паралелних склапају гранични троугао, чије су стране $B''C''=p$, $C''A=q$, $B''A=r$ а супротни углови $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$, и где је према томе (34. став):

$$p = r\sin\Pi(\alpha),\qquad q = r\cos\Pi(\alpha).$$ [60])

Ако сада спој дате три равни расклопимо дуж линије BB' (фиг. 30) и те равни развијемо тако, да оне са свима својим линијама дођу у једну раван, тада ће се очевидно луци p, q, r спојити у један једини лук једне граничне линије, која ће пролазити кроз тачку A и имати AA' за осу. Осим тога налазиће се на једној страни AA': луци q и p, страна b троугла, која је у A управна на AA', оса CC', која полази из крајње тачке линије b



Фиг. 30

на њој, а пошто су то правоугли троугли они су конгруентни. Према томе, $g=\beta$, $\mu=c$, $\lambda'=b$, из чега очевидно следује, да праволиниском троуглу:

$$a,\ b,\ c$$

$$\Pi(\alpha),\ \Pi(\beta),\ \frac{\pi}{2}$$

одговара (фиг. 5') праволиниски троугао:

$$a,\ \alpha',\ \beta$$

$$\Pi(b'),\ \Pi(c),\ \frac{\pi}{2}.$$

Како се до истог резултата може доћи без помоћи тродимензионалног простора, само употребом фигура у Лобачевсковој равни, показао је H. Liebmann (упор. „Nichteuklidische Geometrie“ стр. 37—51).

[59]) У праволиниском правоуглом троуглу:

$$a,\ b,\ c$$

$$\Pi(\alpha),\ \Pi(\beta),\ \frac{\pi}{2},$$

можемо, наиме, или претворити a у b, b у a, α у β и β у α или, задржавајући a, претворити b у α', c у β, α у b' и β у c.

[60]) Пошто по ставу 34-ом на граничној површини важи Евклидова геометрија, то се у њој могу дефинисати тригонометриске функције на исти

паралелно са AA' и иде кроз додирну тачку C'' линија p и q, страна a управно на CC' у тачки C, и из крајне тачке њене оса BB' паралелна са AA', која пролази кроз крајну тачку B'' лука p. На другој страни од AA' налазиће се: страна c управна на AA' у тачки A, и оса BB' паралелна са AA', која полази из крајње тачке линије c и иде кроз крајну тачку B'' лука r. Величина линије CC'' зависи од b, и ту ћемо зависност означити са $CC'' = f(b)$. На исти начин биће $BB'' = f(c)$. Ако се са CC' као осом опише једна нова гранична линија из тачке C па до пресека њеиог D са осом BB' и лук CD означи са t,[61]) биће $BD = f(a)$; $BB'' = BD + DB'' = BD + CC''$, према томе:

$$f(c) = f(a) + f(b).$$

Осим тога видимо да је (33 став);[62])

$$t = p\, e^{f(b)} = r \sin \Pi(\alpha)\,.\, e^{f(b)}.$$

Да је место у тачки A подигнута управна у тачки B на раван троугла ABC линије c и r остале би исте, али луци q и t претворили би се у t и q, праве a и b у b и a и угао $\Pi(\alpha)$ у $\Pi(\beta)$, према томе имали бисмо

$$q = r \sin \Pi(\beta)\,.\, e^{f(a)},$$ [63])

начнн као и у Евклндовој равни. Према томе је у правоуглом граничном троуглу $AB''C''$ са правим углом код C'':

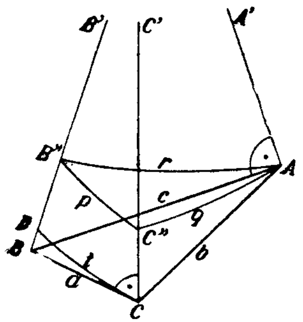
$$p = r \sin \Pi(\alpha); \quad q = r \cos \Pi(\alpha).$$

На основу тригонометрије на граничној површини изводи Лобачевски даље тригонометрију равни и сферну тригонометрију у неевклидовом простору негативне кривине.

[61]) Као што је то учињено у фиг. 6′

[62]) По формули $s = s' e^x$ (в. прим. 51), наиме, имаћемо:

$$t = p\, e^{f(b)}.$$



Фиг. 6′

[63]) Ако, наиме, на равни троугла ABC подигнемо управну у тачки B (фиг. 7′) и повучемо на исти начин као у фиг. 28 гранични троугао $A''BC''$, биће страна BA'' једнака страни $B''A = r$ у фиг. 28, пошто је c остало исто (јер је $BB' \parallel AA'$ у оба случаја а прав угао код B одговара правом углу код A у фиг. 28). Осим тога угао $A''BC''$ биће сада $= \Pi(\beta)$, док је одговарајући угао у фиг. 28 био $= \Pi(\alpha)$. Ако сада расклопимо равни фиг. 7′ као у ранијем случају, добићемо фиг. 8′, из које је очевидно, да су c и r остали исти као у фиг. 28, да је се

одакле следује, кад се место q стави његова вредност,

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta)\,.\, e^{f(a)},$$ [64])

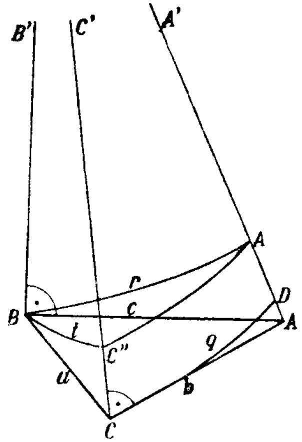
а кад се место α и β ставе b' и c

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c)\,.\, e^{f(a)},$$ [65])

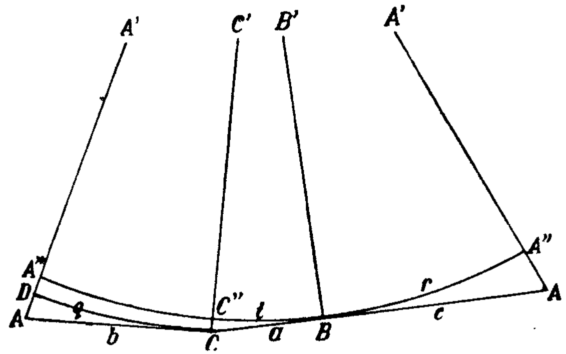
и даље множењем са $e^{f(b)}$

$$\sin \Pi(b)\,.\, e^{f(b)} = \sin \Pi(c)\,.\, e^{f(c)}\,.$$

a претворило у b а b у a (пошто су равни $AA'CC'$ и $BB'CC'$ промениле места у односу на праву CC') и да је се q претворило у t а t у q (из истог разлога).



Фиг. 7′



Фиг. 8′

По формули $s = s' e^x$ биће и овде:

$$CD = A''C''\,.\, e^{f(a)}\,,$$

а како је у граничном троуглу у фиг. 7′ $A''C'' = r \sin \Pi(\beta)$, то ћемо имати:

$$q = r \sin \Pi(\beta)\,.\, e^{f(a)}.$$

[64]) Кад се вредности за q:

$$q = r \cos \Pi(\alpha)$$

и

$$q = r \sin \Pi(\beta)\,.\, e^{f(a)}$$

упореде, излази:

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta)\,.\, e^{f(a)}.$$

[65]) Овде Лобачевски чини употребу од праволиниских троуглова,

Одавде следује да је и:

$$\sin \Pi(a) \,.\, e^{f(a)} = \sin \Pi(b) \,.\, e^{f(b)} \,.\,^{66})$$

Пошто су пак праве a и b независне једна од друге, и осим тога $f(b) = 0$, $\Pi(b) = \frac{\pi}{2}$ за $b = 0$, то је за сваку

који одговарају једном и истом сферном троуглу (в. прим. 58-у и 59-у), па пошто је

$$\Pi(b) + \Pi(b') = \frac{\pi}{2},$$

то је $\cos \Pi(b') = \sin \Pi(b)$, према томе, једначина

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta) \,.\, e^{f(a)},$$

прелази, претварањем α у b' и β у c, у једначину:

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) \,.\, e^{f(a)}.$$

66) Кад се једначина:

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) \cdot e^{f(a)}$$

помножи са $e^{f(b)}$ постаје, пошто је $f(c) = f(a) + f(b)$, једначина:

$$\sin \Pi(b) \,.\, e^{f(b)} = \sin \Pi(c) \cdot e^{f(c)} \,.$$

Као што за праволиниски троугао ABC у фиг. 28 важи једначина:

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta) \cdot e^{f(a)},$$

тако исто за праволиниски троугао ABC у фиг. 5' важи једначина:

$$\cos \Pi(\beta) = \sin \Pi(\alpha) \cdot e^{f(b)},$$

(ова последња следује из једначина: $t = r \cos \Pi(\beta)$ и (фиг. 30) $t = r \sin \Pi(\alpha) \,.\, e^{f(b)}$).

Како пак праволиниском троуглу:

$$a,\ b,\ c,$$

$$\Pi(\alpha),\ \Pi(\beta),\ \frac{\pi}{2},$$

одговара праволиниски троугао:

$$a,\ \alpha',\ \beta,$$

$$\Pi(b')\ \Pi(c),\ \frac{\pi}{2}$$

то ће (упор. прим. 59-у) праволиниском троуглу:

$$b,\ a,\ c$$

$$\Pi(\beta'),\ \Pi(\alpha),\ \frac{\pi}{2},$$

одговарати праволиниски троугао:

$$b,\ \beta',\ \alpha$$

$$\Pi(a'),\ \Pi(c),\ \frac{\pi}{2}\,.$$

Претварањем β у a' и α у c у једначини

$$\cos \Pi(\beta) = \sin \Pi(\alpha) \cdot e^{f(b)},$$

праву линију a

$$e^{-f(a)} = \sin \Pi(a),\,^{67})$$

према томе:

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b),$$

$$\sin \Pi(\beta) = \cos \Pi(\alpha) \sin \Pi(a).\,^{68})$$

Одавде се још добија изменом писмена:

$$\sin \Pi(\alpha) = \cos \Pi(\beta) \sin \Pi(b),$$

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\alpha),$$

$$\cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta)\,.\,^{69})$$

добићемо (упор. прим. 59-у) једначину:

$$\sin \Pi(\alpha) = \sin \Pi(c) \cdot e^{f(b)},$$

а множењем обе стране са $e^{f(a)}$ једначину:

$$\sin \Pi(a) \cdot e^{f(a)} = \sin \Pi(c) \cdot e^{f(c)}\,.$$

Кад се напослетку ова последња једначина упореди са једначином:

$$\sin \Pi(b) \cdot e^{f(b)} = \sin \Pi(c) \cdot e^{f(c)}$$

излази једначина:

$$\sin \Pi(a) \cdot e^{f(a)} = \sin \Pi(b) \cdot e^{f(b)}\,.$$

(Упор. и V. Varićak, н. и. м. стр. 148 и д.).

67) Из једначине:

$$\sin \Pi(a) \cdot e^{f(a)} = \sin \Pi(b) \cdot e^{f(b)}$$

следује, за $b = 0$, најпре једначина:

$$e^{f(a)} \sin \Pi(a) = 1\,,$$

а одавде једначина:

$$e^{-f(a)} = \sin \Pi(a)\,.$$

68) Из једначине:

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) \cdot e^{f(a)}$$

следује, на основу једначине $e^{-f(a)} = \sin \Pi(a)$ једначина:

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) \frac{1}{\sin \Pi(a)},$$

а одатле:

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b).$$

Ако се у овој последњој једначини претвори b у α' а c у β (упор прим. 59-у) добићемо једначину:

$$\sin \Pi(\beta) = \cos \Pi(\alpha) \sin \Pi(a).$$

69) Ако се у једначини:

$$\sin \Pi(a) \,.\, e^{f(a)} = \sin \Pi(b) \cdot e^{f(b)}$$

Ако се у сферном правоуглом троуглу (фиг. 29) стране $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ означе писменима a, b, c а супротни углови $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$ писменима A, B, онда ће нађене једначине добити форму оних једначина, које се, као што је познато, изводе у сферној тригонометрији за правоугле троугле, наиме:

$$\sin a = \sin c \ \sin A,$$

$$\sin b = \sin c \ \sin B,$$

$$\cos A = \cos a \ \sin B,$$

$$\cos B = \cos b \ \sin A,$$

$$\cos c = \cos a \cos b,$$

са којих се једначина може прећи на једначине за све сферне троугле уопште.[70])

стави $a = 0$ (в. прим. 66-у) добићемо једначину:

$$e^{f(b)} = \frac{1}{\sin \Pi(b)}\,.$$

Кад се у једначини (в. прим. 65):

$$\cos \Pi(\beta) = \sin \Pi(\alpha) \cdot e^{f(b)}$$

замени ова вредност од $e^{f(b)}$ добиће се једначина:

$$\sin \Pi(\alpha) = \cos \Pi(\beta) \ \sin \Pi(b)\,.$$

Кад се у овој последњој једначини (в. прим. 59-у) претвори α у b, b у α' а β у c, добићемо једначину:

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \ \cos \Pi(\alpha).$$

Ако се пак у овој једначини место b стави a, а место α стави β (в. прим. 59-у) добићемо једначину:

$$\cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \ \cos \Pi(\beta).$$

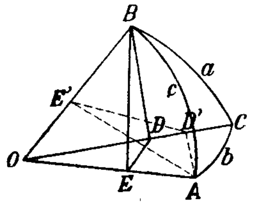
(За ову и претходну примедбу упор. „Neue Anfangsgründe" § 137, стр. 213 и Varićak, н. н. м. стр. 149).

[70]) Да би се разумела веза коју на овај начин поставља Ловачевски између тригонометрије равни и тригонометрије сфере, која постоји у тродимензионалном простору негативне кривине, као и идентитет сферних тригонометрија у Евклидовом и неевклидовом тродимензионалном простору, ми ћемо овде извести тригонометриске формуле за правоугле сферне троугле у Евклидовом простору.

Нека су стране a, b, c и углови A, B у правоуглом сферном троуглу ABC (фиг. 9') мањи од $\frac{\pi}{2}$. Ако из B спустимо управну BD на OC и $BE \perp OE$, и спојимо E и D, биће (по 13-ом ставу) BD управно на раван

Према томе, сферна тригонометрија не зависи од тога,

троугла AOC (пошто је раван $OBC \perp AOC$), стога $BD \perp DE$, $DE \perp OA$ и $\sphericalangle BED = \sphericalangle A$. Стави ли се полупречник кугле $= 1$, имаћемо у правоуглом троуглу BDE:



Фиг. 9'

$$\sin A = \frac{BD}{BE} = \frac{\sin a}{\sin c}\,;$$

(пошто је у правоуглом троуглу OBD, $BD = \sin BOD = \sin a$, а у правоуглом троуглу OBE, $BE = \sin BOE = \sin c$) дакле:

$$\sin a = \sin c \sin A.$$

На исти начин следује, ако се направи $AD' \perp OC$ и $AE' \perp OB$, из правоуглог троугла $AE'D$:

$$\sin b = \sin c \sin B.$$

Пошто је у троуглу OED:

$$\frac{OE}{OD} = \cos b,$$

у троуглу OBE, $OE = \cos c$, а у троуглу OBD, $OB = \cos a$, то је

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Даље је у троуглу ED:

$$\cos A = \frac{ED}{EB} = \frac{OE \operatorname{tg} b}{OE \operatorname{tg} c} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}\,.$$

Ако у једначини $\cos A = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$ заменимо $\operatorname{tg} b$ и $\operatorname{tg} c$ са њиховим вредностима $\frac{\sin b}{\cos b}$ и $\frac{\sin c}{\cos c}$ и $\sin b$ заменимо његовом вредношћу $\sin c \ \sin B$, а $\cos c$ његовом вредношћу $\cos a \ \cos b$ добићемо

$$\cos A = \cos a \ \sin B.$$

На исти начин следује из

$$\cos B = \frac{E'D'}{E'A} = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$$

једначина:

$$\cos B = \cos b \sin A\,.$$

Из ових пет формула за правоугле троугле, чије су стране $< \frac{\pi}{2}$, дају се извести све остале тригонометриске формуле за ове и за правоугле сферне троугле уопште. А како се сваки оштроугли сферни троугао да раставити на два правоугла, то се из њих дају извести и све тригонометриске формуле за оштроугле сферне троугле.

Прелаз од одговарајућих пет формула за праволиниске правоугле троугле у равни негативне кривине на формуле за правоугле сферне троугле у тродимензионалном простору негативне кривине, које су идентичне да ли је збир углова у праволинискоме троуглу једнак двама правима или не.[71])

36. Сада ћемо понова посматрати правоугли праволиниски троугао ABC (фиг. 31), у коме су стране a, b, c а супротни углови $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$. Продужимо хипотенузу c преко тачке B и начинимо $BD=\beta$; у тачки D подигнимо управну DD' на BD, која ће према томе бити паралелна са BB', тј. с продужењем стране a на другу страну од тачке B. Из тачке A повуцимо још паралелну AA' са DD', која је у исто доба паралелна и са CB' (25. став), са чега је угáо $A'AD=\Pi(c+\beta)$, $A'AC=\Pi(b)$ дакле:

$$\Pi(b)=\Pi(\alpha)+\Pi(c+b).$$

са формулама за правоугле сферне троугле у обичном Евклидовом простору, изводи Лобачевскн на основу кореспонденције, која постоји између праволиниског правоуглог троугла (фиг. 29 у вези са фиг. 28):

$$a,\ b,\ c$$

$$\Pi(\alpha),\ \Pi(\beta),\ \frac{\pi}{2}$$

и сферног правоуглог троугла:

$$\Pi(c),\ \Pi(\beta),\ \Pi(a)$$

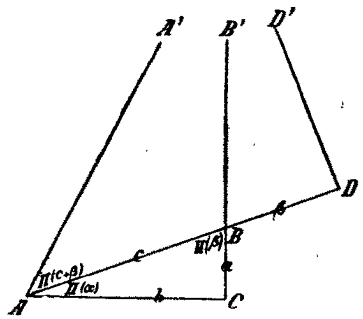
$$\Pi(b),\ \Pi(\alpha'),\ \frac{\pi}{2},$$

означујући стране овог последњег редом са a, b, c, а углове са A и B.

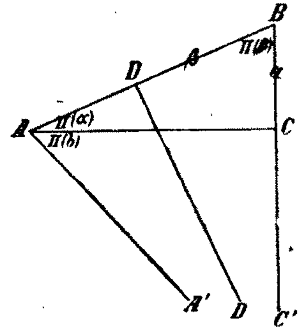
Формуле за правоуглн сферни троугао могу се у Лобачевском простору нзвести и директно из фиг. 9' ако се претпостави, да је описана кугла кугла у простору негатнвне кривине, да су, дакле, правоугли праволиниски троугли DEB, $AE'D'$ итд. праволиниски троугли у Лобачевској равнн. То се, међутим, не може извести без помоћи такозваних хиперболних функција, с којнма се стога иајпре морамо упознати. (в. Додатак II).

[71]) У претходној примедби (упореди и Додатке III и IV) видели смо, да важе исте тригонометрнске формуле за сферне троугле како на површини кугле у Евклндовом тако и на површнни кугле у Лобачевском простору. У Рнмановом сферичном простору, којн није ништа друго до граница кугле у четирдимензионалном Евклидовом простору (као што је површина кугле граница кугле у тродимензионалном Евклидовом простору), површина кугле идентична је *као шаква* са површином кугле у Евклидовом простору. Према томе, сферна тригонометрнја ие завнси нн уколико од петог Евклндовог постулата, одиосно од егзистенције и неегзнстеицнје паралелиих и суме углова у троуглу. Она вреди, као што се изражава Бољај *аисолушно*, тј. вреди подједнако у сва три система геометрије.

Ако пренесемо дужину β на хипотенузу c из тачке B, затим у крајњој тачки њеној D (фиг. 32) подигнемо управну DD' на AB у оквиру троугла, и из тачке A повучемо пара-



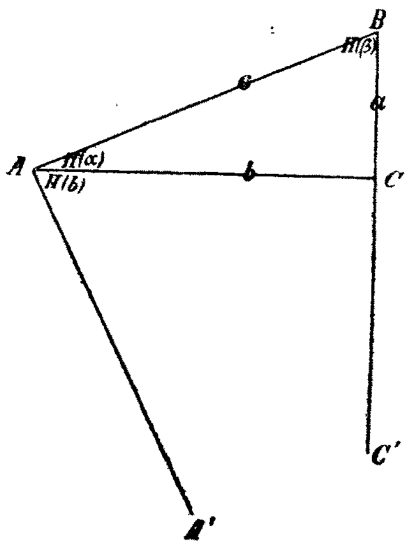
Фиг. 31



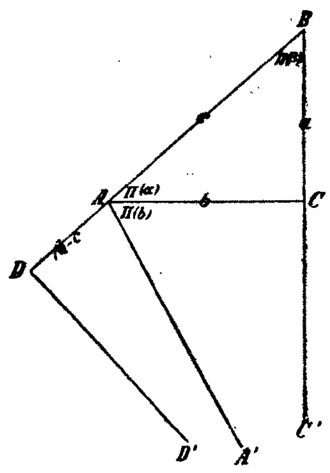
Фиг. 32

лелну AA' са DD', онда ће BC бити са својим продужењем CC' трећа паралелна: тада је: угао $CAA'=\Pi(b)$, $DAA'=$ $=\Pi(c-\beta)$, према томе,

$$\Pi(c-\beta)=\Pi(\alpha)+\Pi(b).$$



Фиг. 33



Фиг. 34

Ова последња једначииа важи и оида када је $c=\beta$ нли $c<\beta$. Ако је $c=\beta$ (фиг. 33), онда је управна AA' подигнута у тачки A на AB паралелна страни $BC = a$ са њеним продужењем CC', према томе је $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \frac{1}{2}\pi$, док је такође $\Pi(c-\beta) = \frac{1}{2}\pi$ (23. став)[72]. Ако је $c < \beta$, крај од β пада на другу страну тачке A у D (фиг. 34) на продужење хипотенузе AB. На AD подигнута управна DD' из A биће и овде паралелна страни $BC = a$ са њеним продужењем CC'. Овде је угао $DAA' = \Pi(\beta - c)$, према томе, $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c) = \Pi(c - \beta)$ (23. став).

Спајањем обе нађене једначине добија се

$$2\,\Pi(b) = \Pi(c-\beta) + \Pi(c+\beta),$$
$$2\,\Pi(\alpha) = \Pi(c-\beta) - \Pi(c+\beta),$$

одакле следује

$$\frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(\alpha)} = \frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) + \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}.$$

Заменили се овде вредност (35. став)

$$\frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(\alpha)} = \cos\Pi(c),$$

онда се добија,

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(c) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c+\beta).$$ [73]

---

[72]) Дакле опет је $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \Pi(c-\beta)$.

[73]) Из:

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) + \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]},$$

$$\cos\Pi(c) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(c)}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(c)},$$

(ова последња формула следује из формуле $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, а ова опет из формула: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$) и

Пошто је овде β произвољан број, јер се угао $\Pi(\beta)$, који се налази на једној страни од c може узети произвољно између граница 0 и $\frac{\pi}{2}$, према томе β између граница 0 и ∞[74]), то ћемо закључити, ако ставимо редом $\beta = c, 2c, 3c$ итд., да је за сваки позитиван број n

$$\operatorname{tang}^n\frac{1}{2}\Pi(c) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(nc)$$ [75]).

$$\frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) + \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]} = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)},$$

(ова последња формула следује из формуле $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, која опет следује из формуле $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$, кад се сви чланови на десној страни њеној поделе са $\cos\alpha\cos\beta$) следује:

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(c)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(c)} = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)},$$

а одавде:

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(c) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c+\beta).$$

[74]) По 23-ем ставу, наиме, имамо $\Pi(0) = \frac{\pi}{2}$, $\Pi(\infty) = 0$.

[75]) Стави ли се $\beta = c$, имаћемо:

$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(c) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(2c)$, пошто је $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(0)$, односно $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

За $\beta = 2c$ имаћемо:

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(c) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(-c)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(3c),$$

а пошто је

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(-c) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}[\pi - \Pi(c)] = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\Pi(c) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)}$$

биће:

$$\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}\Pi(c) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(3c),$$

Ако се n сматра за однос двеју линија x и c и ако се претпостави да је

$$\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \Pi(c) = e^c,$$

онда се налази за сваку линију x уопште, па било да је она позитивна или негативна

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x},$$ [76])

где e може бити сваки могућни број већи од један, пошто је за

$$x = \infty, \ \Pi(x) = 0.$$

Пошто је произвољна линија којом се мере линије, то се под e може подразумевати и основа Неперових логаритама.

37. Од горе нађених једначина (35. став) довољно је познавати следеће две

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \ \sin \Pi(b),$$
$$\sin \Pi(\alpha) = \sin \Pi(b) \ \cos \Pi(\beta),$$

ако се при томе ова последња примени на обе катете a и b, па да се њиховим спајањем изведу остале две (35. став) без двосмислености алгебарских знакова, пошто су овде сви углови оштри. На сличан начин долази се до следећих двеју једначина [77])

(1) $$\operatorname{tang} \Pi(c) = \sin \Pi(\alpha) \operatorname{tg} \Pi(\alpha),$$
(2) $$\cos \Pi(\alpha) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta).$$

према томе биће уопште:

$$\operatorname{tg}^n \frac{1}{2} \Pi(c) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(nc).$$

(Упор. V. Varićak, н. н. м. стр. 152).

[76]) Ако се стави $n = \frac{x}{c}$ и $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \Pi(c) = e^c$, односно $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c) = e^{-c}$, једначина $\operatorname{tg}^n \frac{1}{2} \Pi(c) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(nc)$ прелази у једначину:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}.$$

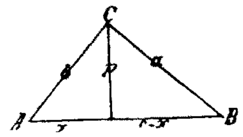
[77]) Из једначине:

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)$$

следује:

$$\cos^2 \Pi(b) = 1 - \sin^2 \Pi(b) = 1 - \frac{\sin^2 \Pi(c)}{\sin^2 \Pi(a)}.$$

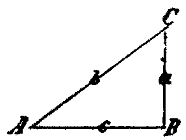
Сад ћемо посматрати један праволиниски троугао чије су стране a, b, c, (фиг. 35) а супротни углови A, B, C. Ако су A и B оштри углови, управна p спуштена из темена угла C у троуглу пада на страну c и дели је у два дела, и то у део x на страни угла A и $c - x$ на страни угла B. На тај начин постају два правоугла троугла, за које се применом једначине (1) добија:



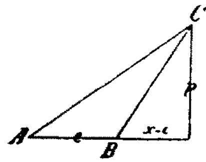
Фиг. 35

$$\operatorname{tang}\Pi(a) = \sin B \operatorname{tang}\Pi(p),$$
$$\operatorname{tang}\Pi(b) = \sin A \operatorname{tang}\Pi(p),$$

једначине које остају непромењене и кад је један од углова,



Фиг. 36



Фиг. 37

на пр. B прав (фиг. 36) или туп (фиг. 37). Према томе имамо уопште за сваки троугао

(3) $$\sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(b)$$ [78])

Из једначине:

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(\alpha) \cos \Pi(c)$$

следује

$$\cos^2 \Pi(b) = \cos^2 \Pi(\alpha) \cos^2 \Pi(c).$$

Према томе је

$$\cos^2 \Pi(\alpha) = \frac{\sin^2 \Pi(a) - \sin^2 \Pi(c)}{\sin^2 \Pi(a) \cos^2 \Pi(c)} = \frac{\cos^2 \Pi(c) - \cos^2 \Pi(a)}{\sin^2 \Pi(a) \cos^2 \Pi(c)},$$

одакле следује

$$\sin^2 \Pi(\alpha) = 1 - \cos^2 \Pi(\alpha) = \frac{\cos^2 \Pi(\alpha) \sin^2 \Pi(c)}{\sin^2 \Pi(a) \cos^2 \Pi(c)} = \operatorname{cotg}^2\Pi(a) \operatorname{tg}^2\Pi(c),$$

или

$$\sin \Pi(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \Pi(a)} \operatorname{tg} \Pi(c),$$

или напослетку

$$\operatorname{tg} \Pi(c) = \sin\Pi(\alpha) \operatorname{tg}\Pi(a).$$

(Упор. „Neue Anfangsgründe“ § 141, стр. 221).

[78]) Из

$$\operatorname{tg} \Pi(p) = \frac{\operatorname{tg} \Pi(a)}{\sin B},$$

За троугао са оштрим угловима A, B, (фиг. 35) имамо још и (2-га једначина):

$$\cos \Pi(x) = \cos A \cos \Pi(b),$$
$$\cos \Pi(c-x) = \cos B \cos \Pi(a),$$

једначине које се односе и на троугле у којима је један од углова A или B прав или туп. На пример, мора се за $B = \frac{1}{2}\pi$ (фиг. 36) узети да је $x = c$, тада прва једначина прелази у горе нађену (2-гу једначину), а друга је сама собом дата. За $B > \frac{1}{2}\pi$ (фиг. 37) прва једначина остаје непромењена, а место друге морамо писати одговарајућу:

$$\cos \Pi(x-c) = \cos(\pi - B) \cos \Pi(a),$$

али је $\cos \Pi(x-c) = -\cos \Pi(c-x)$ (23. став) а и $\cos(\pi - B) = -\cos B$.

Ако је A прав или туп угао, онда се мора место x и $c-x$ ставити $c-x$ и x, да би се овај случај свео на прећашњи.

Да бисмо елиминисали x из обе једначине, приметићемо да је [79]) (36. став)

$$\operatorname{tg} \Pi(p) = \frac{\operatorname{tg} \Pi(b)}{\sin A}$$

следује

$$\sin A \operatorname{tg}\Pi(a) = \sin B \operatorname{tg}\Pi(b).$$

[79]) На основу једначине (в. прим. 73-у):

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha},$$

следује:

$$\cos \Pi(c-x) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\Pi(c-x)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\Pi(c-x)}.$$

$$\cos \Pi(c-x) = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\Pi(c-x)}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\Pi(c-x)}$$
$$= \frac{1 - e^{2x-2c}}{1 + e^{2x-2c}}$$
$$= \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\Pi(c) \cot^2 \frac{1}{2}\Pi(x)}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\Pi(c) \cot^2 \frac{1}{2}\Pi(x)}$$
$$= \frac{\cos \Pi(c) - \cos \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)}. \text{ [80])}$$

[80]) На основу фундаменталне формуле става 36-ог:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x},$$

следује

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\Pi(c-x)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\Pi(c-x)} = \frac{1 - e^{2x-2c}}{1 + e^{2x-2c}},$$

одакле поново на основу те исте формуле следује

$$\frac{1 - e^{2x-2c}}{1 + e^{2x-2c}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\Pi(c) \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2}\Pi(x)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\Pi(c) \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2}\Pi(x)}.$$

Кад се на десној страни ове једначине стави:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Pi(c) = \frac{\sin \Pi(c)}{1 + \cos \Pi(c)} \quad \text{и} \quad \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\Pi(x) = \frac{1 + \cos \Pi(x)}{\sin \Pi(x)}$$

(на основу формуле $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$), и место $\sin^2 \Pi(x)$ његова вредност $1 - \cos^2 \Pi(x)$, место $\sin^2 \Pi(c)$, $1 - \cos^2 \Pi(c)$, добиће се напослетку:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\Pi(c) \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2}\Pi(x)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\Pi(c) \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2}\Pi(x)} = \frac{[\cos \Pi(c) - \cos \Pi(x)]\,[2 + 2\cos \Pi(c) + 2\cos \Pi(x) - 2\cos \Pi(c)\cos \Pi(x)]}{[1 - \cos \Pi(c)\cos \Pi(x)]\,[2 + 2\cos \Pi(c) + 2\cos \Pi(x) - 2\cos \Pi(c)\cos \Pi(x)]} = \frac{\cos \Pi(c) - \cos \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(c)\cos \Pi(x)}.$$

Ако се овде замени израз за $\cos \Pi(x)$, $\cos\Pi(c-x)$ добија се:

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(a) \cos B + \cos \Pi(b) \cos A}{1 + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos A \cos B},$$

одакле следује

$$\cos \Pi(a) \cos \Pi(b) = \frac{\cos \Pi(c) - \cos A \cos \Pi(b)}{1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)},$$ [81])

и напослетку:

$$\sin^2 \Pi(c) = [1 - \cos B \cos \Pi(c) \cos \Pi(a)] . [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)].$$ [82])

На сличан начин мора бити и:

(4) $\sin^2 \Pi(a) = [1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)] \cdot [1 -$
$- \cos B \cos \Pi(c) \cos \Pi(a)].$

$$\sin^2 \Pi(b) = [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)] . [1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)].$$

---

[81]) Кад се у једначинии:

$$\cos \Pi(c-x) = \frac{\cos \Pi(c) - \cos \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)},$$

замени $\Pi(x)$ са $\cos A \cos \Pi(b)$, а $\cos \Pi(c-x)$ са $\cos B \cos \Pi(a)$ следује одмах једначина:

$$\cos \Pi(a) \cos B = \frac{\cos \Pi(c) - \cos A \cos \Pi(b)}{1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)}.$$

Према тексту, међутим, требало би из ове једначине најпре извести ону која јој у тексту претходи, па из ове последње поново ону прву.

[82]) Из последње једначине у претходној примедби следује

$$\cos \Pi(c) - \cos A \cos \Pi(b) = \cos \Pi(a) \cos B -$$
$$- \cos \Pi(a) \cos B \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c).$$

Кад се обе стране ове једначине помноже са $\cos \Pi(c)$ биће:

$$\cos^2 \Pi(c) + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos^2 \Pi(c) \cos A \cos B - \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B -$$
$$- \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A = 0,$$

или

$$1 - \sin^2 \Pi(c) = \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B + \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A -$$
$$- \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos^2 \Pi(c) \cos A \cos B,$$

одакле следује даље:

$$\sin^2 \Pi(c) = 1 + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos^2 \Pi(c) \cos A \cos B -$$
$$- \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A =$$
$$= [1 - \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B] - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A\, [1 -$$
$$- \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B],$$

дакле, напослетку:

$$\sin^2 \Pi(c) = [1 - \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B]\, [1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A].$$

(Упор. N. Lobatschefskij „Pangeometrie" превод од H. Liebmann-a у Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, стр. 28).

Из ове три једначине налази се још:

$$\frac{\sin^2 \Pi(b) \sin^2 \Pi(c)}{\sin^2 \Pi(a)} = [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)].$$ [83])

Одавде следује без двосмислености знакова:

(5) $$\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1.$$ [84])

Ако се овде замени вредност од $\sin \Pi(c)$ у сагласности са једначином (3),

$$\sin \Pi(c) = \frac{\sin A}{\sin C} \operatorname{tang} \Pi(a) \cos \Pi(c)$$ [85])

добија се

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(a) \sin C}{\sin A \sin \Pi(b) + \cos A \sin C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)},$$

или, ако се овај израз за $\cos \Pi(c)$ замени у једначини (4),

(6) $$\operatorname{cotg} A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}.$$ [86])

---

[83]) Кад се једначине:

$$\sin^2 \Pi(c) = [1 - \cos B \cos \Pi(c) \cos \Pi(a)]\, [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)],$$
$$\sin^2 \Pi(b) = [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)]\, [1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)],$$

помноже међу собом, па се њихов продукт подели једначином:

$$\sin^2 \Pi(a) = [1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)]\, [1 - \cos B \cos \Pi(c) \cos \Pi(a)],$$

добиће се једначина:

$$\frac{\sin^2 \Pi(b) \sin^2 \Pi(c)}{\sin^2 \Pi(a)} = [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)]^2.$$

(Упор. Neue Anfangsgründe" стр. 224).

[84]) Простије извођење ове једначине налази се у „Pangeometrie", стр. 26—27.

[85]) Једначини (3):

$$\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi(b)$$

одговара једначина:

$$\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin C \operatorname{tg} \Pi(c)$$

или

$$\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin C \frac{\sin \Pi(c)}{\cos \Pi(c)},$$

одакле следује:

$$\sin \Pi(c) = \frac{\sin A}{\sin C} \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(c).$$

[86]) Кад се у једначини:

$$\sin^2 \Pi(b) = [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)]\, [1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)]$$

изврши множење на десној страни и $\sin^2 \Pi(b)$ замени са $1 - \cos^2 \Pi(b)$ па

Елиминацијом $\sin \Pi(b)$ помоћу једначине (3) излази:

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} \cos C = 1 - \frac{\cos A}{\sin B} \sin C \sin \Pi(a), \text{ [87]}$$

Једначина (6) даје, међутим, променом писмена

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} = \operatorname{cotg} B \sin C \sin \Pi(a) + \cos C. \text{ [88]}$$

Из последње две једначине следује:

$$(7) \qquad \cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}. \text{ [89]}$$

Све четири једначине за зависност страна a, b, c у праволиниском троуглу биће према томе [идентичне са (3), (5), (6), (7)]:

тако добијени израз подели са $\cos \Pi(b)$, добиће се (упор. примедбу 82-у):

$$\cos \Pi(b) + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A \cos C - \cos \Pi(a) \cos C - \cos \Pi(c) \cos A = 0.$$

Кад се овде замени $\cos \Pi(c)$ из горње једиачине у тексту добиће се:

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)} = \operatorname{cotg} A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C.$$

(Упор. „Pangeometrie", стр. 30).

[87]) Кад се у једначини претходне примедбе замени $\sin \Pi(b)$ његовом вредношћу

$$\sin \Pi(b) = \frac{\operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(b) \sin A}{\sin B}$$

из једначииа (3), добиће се једначина:

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)} = \frac{\cos C}{1 - \frac{\cos A}{\sin B} \sin C \sin \Pi(a)},$$

а одатле:

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} \cos C = 1 - \frac{\cos A}{\sin B} \sin C \sin \Pi(a).$$

[88]) Ако се у једначини (6) a замени са b, b са a, а A са B добиће се горња једначина у тексту (в. „Neue Anfangsgründe" стр. 225).

[88]) Ако се из поменутих двеју једначина у тексту елиминира $\cos \Pi(b)$, па се обе стране тако добијеног израза, пошто се $\cos^2 C$ замени са $1 - \sin^2 C$, поделе са $\cos \Pi(a) \sin C \sin \Pi(a)$ и помноже са $\sin B$, добиће се једначина:

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}.$$

(Упор. „Neue Anfangsgründe", стр. 225).

$$(8) \quad \begin{cases} \sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(b), \\ \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \dfrac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1, \\ \cos A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \dfrac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}, \\ \cos A + \cos B \cos C = \dfrac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}. \text{ [90]} \end{cases}$$

Ако су стране a, b, c троугла врло мале, можемо се задовољити приближним вредностима (36. став)

$$\operatorname{cotg} \Pi(a) = a,$$

$$\sin \Pi(a) = 1 - \frac{1}{2} a^2,$$

$$\cos \Pi(a) = a, \text{ [91]}$$

---

[90]) Ако се горње четири једиачине за праволиниски троугао изразе помоћу хиперболних фуикција (в. Додатак III) имаћемо:

$$\sin A \sinh b = \sin B \sinh a,$$

$$\cos A \sinh b \sinh c + \cosh a = \cosh b \cosh c,$$

$$\operatorname{cotg} A \sin C + \cos C \cosh b = \sinh b \operatorname{cotgh} a,$$

$$\cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C \cosh a.$$

Прва једначииа претставља случај, када су у троуглу дате *две стране* (a, b) *и супротни углови* (A, B). Друга претставља случај кад су дате *три стране* (a, b, c) и *један угао* (A). Трећа претставља случај кад су дате *две стране* (a, b) *један захваћени* (C) и *један супротни угао* (A), а четврта случај кад су дата *сва три угли* (A, B, C) и *једна страна* (a).

У Евклидовој равни четврти случај не постоји, јер је он овде искључен егзистенцијом *сличних* фигура, којих у Лобачевсковој равни нема. Првим трима случајевнма одговарају у Евклидовој тригоиометрији једначине:

$$b \sin A = a \sin B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\frac{b}{a} = \cos C + \sin C \operatorname{cotg} A.$$

По себи се разуме, да у свакоме од наведеиих случајева постоје по неколико једиачина за одговарајуће комаде троугла. Таквнх једиачина има за праволиниске троугле у Лобачевсковој равни *петнаест*, у Евклидовој равни *дванаест* (упор. „Neue Anfangsgründe", § 138—9, стр. 218 и д.)

[91]) Ако се изрази (в. Додатак III):

$$\sin \Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

$$\cos \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

и на сличан начин и за друге стране b и c. Једначине (8) прелазе за такве троугле у следеће:

$$b \sin A = a \sin B,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$a \sin (A + c) = b \sin A,$$
$$\cos A + \cos (B + c) = 0.$$

Прве две од ових једначина претпоставља обична геометрија; из друге две следује, узимајући у помоћ прве две, закључак:

$$A + B + C = \pi.^{92)}$$

развију у бескрајне редове, при чему је

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

па се занемаре чланови вишег степена, биће

$$\sin \Pi(x) = 1 - \frac{x^2}{2},$$

$$\cos \Pi(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right), \quad \text{или} = x,$$

одакле следује да је

$$\sin \Pi(a) = 1 - \frac{a^2}{2},$$
$$\cos \Pi(a) = a,$$

$$\operatorname{tg} \Pi(a) = \frac{1 - \frac{a^2}{2}}{a}, \quad \text{или} = \frac{1}{a},$$

$$\operatorname{cotg} \Pi(a) = \frac{a}{1 - \frac{a^2}{2}}, \quad \text{или} = a.$$

[92]) Кад се горње вредности од $\sin \Pi(a)$, $\sin \Pi(b)$ итд. из ових једначина замене у једначинама (8) и при томе занемаре чланови вишег степена, прећи ће једначине (8) у једначине:

$$b \sin A = a \sin B,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$a \sin (A + C) = b \sin A,$$
$$\cos A + \cos (B + C) = 0.$$

Прве две међу овим једначинама идентичне су са првим двема једна-

Према томе, имагинарна геометрија прелази у обичну кад се претпостави, да су стране праволиниског троугла врло мале.[93])

чинама за праволиниске троугле у Евклидовој геометрији (види 90-ту примедбу).

Да из других двеју у вези са првом следује претпоставка $A+B+C=\pi$, дâ се показати на следећи начин.

На основу формуле:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

биће очевидно:

$a \sin(A+B+C) = a \sin(A+C)\cos B + a \cos(A+C)\sin B =$
$=$ (по трећој једначини) $= b \sin A \cos B + a \sin B \cos(A+C) =$
$=$ (по првој једначини) $= b \sin A\,[\cos B + \cos(A+C)] =$
$=$ [по једначини $\cos B + \cos(A+C)] = 0$, која одговара четвртој једначини) $= 0$.

Према томе је

$$\sin(A+B+C) = 0,$$

дакле,

$$A+B+C = \pi.$$

(Упор. Frischauf, „Absolute Geometrie“, стр. 55).

[93]) Строго узев ово је случај само кад су стране праволиниског троугла бесконачно мале. Ако у горње једначине за праволиниски троугао, пошто их изразимо у хиперболним функцијама (упор. примедбу 83) уведемо константу k, те ће једначине добити облик:

$$\sin A \sinh\frac{b}{k} = \sin B \sinh\frac{a}{k},$$

$$\cos A \sinh\frac{b}{k}\cosh\frac{c}{k} + \cosh\frac{a}{k} = \cosh\frac{b}{k}\cosh\frac{c}{k}$$

$$\cos A \sin C + \cosh\frac{b}{k}\cos C = \operatorname{cotgh}\frac{a}{k}\sin\frac{b}{k},$$

$$\cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C \cosh\frac{a}{k}.$$

Из њих следују једначине претходне примедбе за троугле у Евклидовој геометрији, кад односи $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$ постану бесконачно мали, што ће бити, или, кад саме стране a, b, c постану бесконачно мале, или, кад константа k за крајње вредности од a, b, c постане бесконачно велика. Како је ова константа идентична са параметром Лобачевскове равни (в. прим. 51-у), то друга претпоставка води резултату, да се Евклидова геометрија има схватити као један специјалан (односно као гранични случај) Лобачевскове геометрије. Из прве претпоставке пак следује, да Евклидова геометрија важи за бесконачно мале регионе Лобачевскове равни (Упор. Frischauf, н. н. м. стр. 55).

О мерењу кривих линија, равних фигура, површина и запремина тела, као и о примени имагинарне геометрије на анализу, објавио сам неколико испитивања у „Ученим записцима Универзитета казанског". [94])

Једначине (8) пружају већ саме собом довољну подлогу, да се претпоставка имагинарне геометрије може сматрати за могућну. Према томе, астрономска посматрања су једино средство, да би се могло судити о тачности прорачуна обичне геометрије. Ова се тачност простире врло далеко, као што сам то показао једном од својих расправа, тако да, на пр. у троуглима, чије су стране још приступачне нашим мерењима, збир њихова три угла није различан од два права ни за стоти део једне секунде. [95])

Још је вредно истаћи, да оне четири једначине (8) равне геометрије прелазе у једначине за сферне троугле, ако се место страна a, b, c стави: $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$, али са овом променом мора се очевидно ставити и да је:

$$\sin \Pi(a) = \frac{1}{\cos a},$$

$$\cos \Pi(a) = \sqrt{-1}\ \operatorname{tang} a,$$

$$\operatorname{tang} \Pi(a) = \frac{1}{\sin a\sqrt{-1}},$$

Интересантно је споменути, да је Гаус обрнуто пошао од ове последње претпоставке при извођењу формула неевклидовске геометрије. Упор. B. Bonola, и. и. м. прим. на стр. 93 и H. Liebmann, и. и. м. стр. 83.

[94]) Од резултата ових Лобачевскових испитивања споменућемо као најважније егзистенцију троугла *максималне* површине у његовој равни (чије су стране паралелне линије — асимптоте — а збир углова $= 0$), чија је површина $p = \pi$ на основу опште формуле за површину троугла:

$$p = \pi - (A+B+C),$$

у којој A, B и C означавају углове, а разлика $\pi - (A+B+C)$ тзв. *дефект* троугла (који одговара *ексцесу* $A+B+C-\pi$ сферног троугла), као и да је површина троугла уопште пропорционална овоме дефекту.

Површина круга једнака је:

$$\pi\left(e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}}\right)^2,$$

$$\text{или} = 4\pi \operatorname{cotg}^2 \Pi\left(\frac{r}{2}\right) = 4\pi \sin h^2 \frac{r}{2} \text{ итд.}$$

(Упор. „Über die Anfangsgründe" стр. 33 и д.).

[95]) Види Додатак V.

и на сличан начин и за стране b и c. На тај начин прелази се од једначина (8) на следеће: [96])

---

[96]) Да бисмо разумели горње прелазе потребно је познавати аналитичке дефиниције тригонометриских функција. Те дефиниције (за прве четири функције) гласе:

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{i}\,\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}}; \qquad \operatorname{cotg} x = i\,\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{e^{xi} - e^{-xi}},$$

где је $i = \sqrt{-1}$.

На основу формула (види Додатак III):

$$\sin \Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}; \qquad \cos \Pi(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

$$\operatorname{tg} \Pi(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}; \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

и горњих дефиниција лако је увидети да је:

$$\sin \Pi(xi) = \frac{2}{e^{xi} + e^{-xi}} = \frac{1}{\cos x}; \qquad \cos \Pi(xi) = \frac{e^{xi} - e^{xi}}{e^{xi} + e^{-xi}} = i \operatorname{tg} x;$$

$$\operatorname{tg} \Pi(xi) = \frac{2}{e^{xi} - e^{-xi}} = \frac{2i}{e^{xi} - e^{-xi}}\ \frac{1}{i} = \frac{1}{i \sin x}; \quad \operatorname{cotg} \Pi(xi) = i \sin x.$$

На основу ових последњих формула пак лако се изводи да једначина:

$$\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi(b),$$

кад се у њој место a стави ai и место b стави bi, прелази у једначину:

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a.$$

На сличан начин прелази једначина:

$$\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1$$

у једначину:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A;$$

једначина:

$$\operatorname{cotg} A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}$$

у једначину:

$$\operatorname{cotg} A \sin C + \cos C \cos b = \sin b \operatorname{cotg} a,$$

и једначина:

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}$$

у једначину:

$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C.$$

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a,$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

Једначине за оштроугли троугао у Лобачевсковој равни прелазе дакле на овај начин у једначине за сферни оштроугли троугао.

Али и обрнуто, можемо поћи од ових једначина за сферни оштроугли троугао и, замењујући у њима стране a, b, c странама ai, bi, ci, добити једначине за оштроугли троугао у Лобачевсковој равни. Тај обрнути прелаз дâ се извести овако.

Из аналитичких дефиниција тригонометриских фукција следује да је:

$$\sin(xi) = \frac{(e^{x} - e^{-x})\, i}{2}\,; \qquad \cos(xi) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\,;$$

$$\operatorname{tg}(xi) = \frac{(e^{x} - e^{-x})\, i}{e^{x} + e^{-x}}\,; \qquad \operatorname{cotg}(xi) = \frac{(e^{-x} + e^{x})\, i}{e^{-x} - e^{-x}}\,.$$

Кад се у једначини:

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a$$

замени a са ai и b са bi биће:

$$\sin A\, \frac{e^{b} - e^{-b}}{2} = \sin B\, \frac{e^{a} - e^{-a}}{2}\,,$$

одакле, на основу аналитичке дефиниције хиперболног синуса (види Додатак III) следује да је:

$$\sin A \sinh b = \sin B \sinh a.$$

Кад се у једначини:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

замени a са ai, b са bi и c са ci биће:

$$\frac{e^{a} + e^{-a}}{2} = \frac{e^{b} + e^{-b}}{2} \cdot \frac{e^{c} + e^{-c}}{2} - \cos A \cdot \frac{e^{b} - e^{-b}}{2} \cdot \frac{e^{c} - e^{-c}}{2}\,,$$

или:

$$\cosh a = \cosh b \cdot \cosh c - \cos A \sinh b \cdot \sinh c.$$

Кад се у једначини:

$$\operatorname{cotg} A \sin C + \cos C \cos b = \sin b \operatorname{cotg} a$$

замени b са bi и a са ai и, зарад лакшег рачунања, стави:

$$\operatorname{cotg}(xi) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{(e^{x} - e^{-x})\, i}\,,$$

биће:

$$\operatorname{cotg} A \sin C \cos C \cdot \frac{e^{b} + e^{-b}}{2} = \frac{e^{b} - e^{-b}}{2} \cdot \frac{e^{a} + e^{-a}}{e^{a} - e^{-a}}\,,$$

или:

$$\operatorname{cotg} A \sin C + \cos C \cosh b = \sinh b \operatorname{cotgh} a.$$

$$\operatorname{cotg} A \sin C + \cos C \cos b = \sin b \operatorname{cotg} a,$$
$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C.\ ^{97})$$

Кад се напослетку у једначини:

$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C$$

замени a са ai, биће:

$$\cos A = \frac{e^{a} + e^{-a}}{2} \sin B \sin C - \cos B \cos C\,,$$

или:

$$\cos A = \cosh a \sin B \sin C - \cos B \cos C.$$

[97]) Четири добивене једначине идентичне су са једначинама за оштроугли троугао Лобачевскове равни у примедби 90. Да се из њих добију једначине (8), у којима на место хиперболних функција страна стоје тригонометријске функције углова паралелизма (упор. Додатак II), требало би доказати да је

$$\sinh x = \frac{1}{\operatorname{tg} \Pi(x)}\,,$$

односно да је

$$e^{-x} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\, \Pi(x).$$

Ми тај доказ овде нећемо изводити (види о томе H. Liebmann-а, н. н. м. стр. 80 у вези са стр. 75—78), напоменућемо само, да је Лобачевски у својој расправи „Воображаемая геометрія“ 1835, преведеној 1904 г. на немачки од H. Liebmann-а, указао на начин којим би се, идући овим обрнутим путем, могли извести ставови његове геометрије (упор. „Imaginäre Geometrie“ стр. 9—12). Са логичког и философског гледишта, међутим, овај обрнути пут важан је утолико, што се њиме на евидентан начин утврђује непротивречност и унутрашња логичка могућност неевклидске геометрије. Ако се неевклидска тригонометрија да извести из сферне тригонометрије и ако се из неевклидске тригонометрије дају извести сви остали ставови неевклидске геометрије, онда из тога следује — и ту конзеквенцију наглашује Лобачевски на више места у својим списима — да је неевклидска геометрија исто тако непротивречна као и сферна тригонометрија, јер се изводи из Евклидове геометрије, у чију се непротивречност не сумња.

Осим тога овај обрнути пут има још један логички и опште-геометриски значај. Ако у формулама за сферни оштроугли троугао ставимо место страна a, b, c односе $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$, тј. ако у њих уведемо константу k, односно полупречник кривине кугличне површине (што можемо учинити, пошто је дужина лука највећег круга, који пролази кроз две сталне тачке у простору, обрнуто сразмерна полупречнику кугле), онда те формуле прелазе у одговарајуће формуле Лобачевскове геометрије (упор. примедбу 93-у) или на тај начин, што ће се у $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$ место a, b, c ставити ai, bi, ci или што ће се у њима место k ставити ik. Стога Лобачевскова раван претставља једну „имагинарну куглу“, тј. једну криву површину, чија кривина зависи од полупречника k исто тако као и куглина површина. Према томе, као што се раван позитивне кривине јавља у бесконачно много егземплара, тако је то исто случај и са Лобачевсковом равни (упор. Додатак I).

ДОДАЦИ

ДОДАТАК I

ИНТЕРПРЕТАЦИЈА НЕЕВКЛИДОВИХ ГЕОМЕТРИЈА У ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТОРУ

Површина, на којој важи Лобачевскова геометрија безизузетно и у целини, бесконачна је и апсолутно хомогена као и Евклидова раван (тј. да̂ се, као и ова, продужити у бесконачност и свуда је иста).

Од површина у Евклидовом тродимензионом простору површина кугле једина је површина која безизузетно и у целини реализира Риманову геометрију, док постоје неколике површине које непотпуно и делимице реализирају Лобачевскову геометрију. Да би се то увидело треба изложити разлику која постоји између површина *позитивне* и *негативне* кривине као површина *константне* и *варијабилне* кривине.

Кривина једне криве линије Евклидове равни у једној датој тачки једнака је кривини круга који се у тој тачки највећма додирује са кривом линијом: реципрочна вредност полупречника тога круга *(круга кривине)* мера је кривине дате криве линије. Кривина једне криве површине Евклидовог простора у једној датој тачки зависи од кривине геодетских линија које кроз ту тачку пролазе (геодетске линије су линије *најкраћег* отстојања између две тачке), и мера те кривине по Гаусу је реципрочна вредност продукта полупречника кривине оних двеју геодетских линија чије кривине претстављају максималну и минималну вредност (те су две линије управне једна на другу у датој тачки; ако се њихови полупречници кривине означе са ρ_1 и ρ_2 и кривина површине са K, биће $K = \dfrac{1}{\rho_1 \rho_2}$). Ако полупречници кривине ρ_1 и ρ_2 имају исти правац (односно леже на истој страни површине), њихов продукт биће позитиван и одговарајућа површина је површина *позитивне* кривине; ако им је пак правац различан, њихов продукт биће негативан и одговарајућа површина је површина *негативне* кривине. Ако је K за сваку тачку површине исто, одговарајућа површина је површина *константне* кривине; ако је различна, површина је *варијабилне* кривине.

Овај Гаусов појам кривине проширио је Риман на n-димензионални простор и на тај начин дошао до појмова n-димензионалних простора позитивне, негативне и нулте кривине (ови последњи су Евклидовске природе).

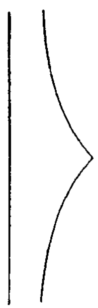
Најважније разлике међу поменутим трима геометријама дводимензионалног простора су ове. Док се у површини нулте кривине (Евклидовој равни) може из једне тачке ван једне праве повући само једна паралелна, дотле се у Лобачевској равни могу кроз такву тачку повући две паралелне и бесконачно много правих које се са датом правом не секу (упор. прим. 9 и 10), а у Римановој површини позитивне кривине није могућно повући *ниједну* паралелну. Даље, док је збир углова у троуглу у Евклидовој равни *једнак* 180°, дотле је тај збир у Лобачевсковој равни *мањи*, а у Римановој *већи* од 180°. Правим линијама на кривим површинама називају се њихове геодетске линије, које су праве само у *релативном* смислу, тј. то су праве само у површини у којој се налазе.

Из Гаусовог појма кривине површине следују извесне последице од фундаменталне важности за однос геометрија на кривим површинама према овим трима геометријама, при чему ћемо се овде ограничити само на површине константне кривине (пошто има многих математичара, који само такве површине сматрају за дводимензионалне просторе; упор. напр. B. Russel, „An essay on the foundations of geometry", 1897, стр. 149 и д.). Ако се у изразу за кривину $K=\dfrac{1}{\rho_1 \rho_2}$ било један било оба полупречника кривине ставе $=\infty$, K ће бити $=0$. Према томе не само што ће Евклидова раван, у којој су све праве, које полазе из једне тачке, праве у истом смислу, бити површина нулте кривине, него и оне површине код којих геодетске линије, које полазе из једне

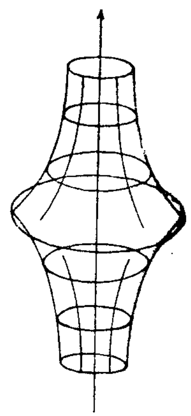
тачке, нису све праве у истом смислу, претстављаће такве површине (тако напр. на површини цилиндра кроз једну тачку пролази само једна права у Евклидовом смислу, док су остале геодетске линије само за површину цилиндра праве, с погледом на околни простор пак криве; површина цилиндра је дакле површина нулте кривине). Ако је K позитивно или негативно, његова константност може произлазити или из тога, што су оба полупречника кривине за сваку тачку и за све тачке једнаки ($\rho_1 = \rho_2$), или ти полупречници могу за разне тачке бити различни, али њихов продукт увек исти ($\rho_1 \rho_2 = \text{const.}$). У првом случају добијамо површине које су исто тако свуда *апсолутно хомогене* као што је то Евклидова раван; у другом случају добијају се површине позитивне и негативне кривине, које нису апсолутно хомогене. На основу Гаусовог појма кривине дâ се поставити општи став, *да се све површине, које имају исту сталну кривину, дају развити једна на другу.* За две површине каже се да се могу развити једна на другу, ако се једна од њих дâ *савијањем* или *одвијањем без истезања и раскидања* тако положити на другу, да се обе површине потпуно поклопе (при чему дужине геодетских линија и углови међу њима остају исти). Тако, напр., цилиндар се дâ одвијањем положити на Евклидову раван тако да се његова површина потпуно поклапа са овом; и обрнуто, раван се дâ савијањем положити око цилиндра тако, да се поклопи са његовом површином (при чему се она бесконачно пута обавија око њега). На исти начин дâ се свака површина позитивне кривине развити на површину кугле и обрнуто, и свака површина негативне кривине на Лобачевскову раван. Како при развијању остају дужине геодетских линија непромењене и углови међу њима исти, то очевидно све површине једне исте сталне кривине имају исту геометрију.

Али овај идентитет геометрија на разним површинама исте сталне кривине није апсолутан: док се, напр., у Евклидовој равни из сваке тачке могу повући геодетске линије, које су све квалитативно једнаке и свака се да продужити у бесконачност, дотле геодетске линије, које се на површини цилиндра из једне тачке дају повући, нису све квалитативно једнаке (има их три врсте: Евклидова права, Евклидова кружна линија и спиралне линије), нити се све дају продужити у бесконачност. Стога, кад се цилиндрична површина развије у раван, она покрива само један ограничен део њен; и обрнуто, само се једним ограниченим делом својим дâ раван развити на цилиндричну површину. Цилиндрична површина реализира дакле само *делимично* (делимично и у квантитативном и у квалитативном смислу) геометрију Евклидове равни, а то исто важи и за све остале површине нулте кривине. На исти начин дало би се показати и да ниједна од површина позитивне кривине осим кугле и ниједна од површина негативне кринине не реализирају потпуно Риманову и Лобачевскову геометрију. Стога Евклидова раван, површина кугле и Лобачевскова раван претстављају *типичне* површине у односу на одговарајуће геометрије, све остале површине имају се сматрати само као разни *облици* тих површина.

Од површина негативне кривине, које у Евклидовом простору реализирају Лобачевскову геометрију, најважнија је тзв. *псевдосфера*. То је ротациона површина, која постаје кретањем криве линије зване *трактрикс* око своје ротационе осе (фиг. 10′); трактрикс је крива линија, код које је део тангенте од тачке додира до ротационе осе — асимптоте — стална количина). Али псевдосфера (в. фиг. 11′) није идентична са типичном Лобачевсковом равни, јер: 1) геодетске линије псевдосфере, које полазе из једне тачке, не секу се само у њој, већ и у бесконачно много других тачака, 2) кроз две тачке псевдосфере пролазе бесконачно много геодетских линија, док у равни Лобачевског пролази само једна, 3) геодетске линије псевдосфере прекидају се у сингуларним тачкама њеним, док таквих прекида у Лобачевсковој равни нема, 4) полупречници кривине псевдосфере варирају од једне тачке до друге, што није случај код Лобачевскове равни (упор. G. Lechalas, „Introduction à la géométrie générale“, 1904. стр. 53). Лобачевскова типична раван има да се замисли као раван, која је у свим правцима бесконачна и која није ни у коме правцу затворена, док су све површине негативне кривине у Евклидовом тродимензионалном простору затворено-отворене површине, и могу, према томе, реализирати само један део Лобачевскове равни. Али не само да ниједна од површина негативне кривине у Евклидовом простору није идентична са типичном површином Лобачевсковом, него, као што је показао Хилберт (упор. D. Hilbert, „Grundlagen der Geometrie“, 4-te Aufl. 1913, стр. 232) и ниједна од њих није без сингуларитета, тј. ниједна од њих не може се *потпуно* развити на типичну Лобачевскову раван. Ова последња је дакле као таква потпуно независна од Евклидовог простора, док се типична површина Риманове геометрије (површина кугле) дâ конструисати у Евклидовом простору.



Фиг. 10′



Фиг. 11′

Поред површине кугле постоји, међутим, још једна површина позитивне кривине, тзв. елиптична раван, за коју важи Риманова геометрија. Та се површина, међутим, разликује од свих до сада поменутих површина у томе што је то површина која има само *једну* страну, док су оне прве *двостране*. Док се на површини кугле две геодетске линије (два највећа круга) секу увек у двема тачкама, дотле две геодетске линије елиптичке површине имају само једну заједничку тачку; и док права линија на површини кугле (и на свима раније поменутим површинама) дели ту површину на два одвојена дела, дотле елиптична површина није правом линијом подељена на два одвојена дела (тј. она претставља тзв. једнострану површину).

ДОДАТАК II

ХИПЕРБОЛНЕ ФУНКЦИЈЕ

Хиперболне функције означавају се са sinh, cosh, tangh, cotgh, sech, cosech, а њихове аналитичке дефиниције гласе:

$$1.\ \sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2},$$

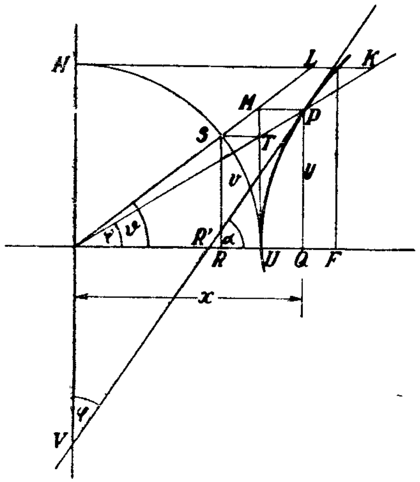
$$2.\ \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$

$$3.\ \operatorname{tangh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$

$$4.\ \operatorname{cotgh} u = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}},$$

$$5.\ \operatorname{sech} u = \frac{2}{e^u + e^{-u}},$$

$$6.\ \operatorname{cosech} u = \frac{2}{e^u - e^{-u}}.$$



Фиг. 12′

Као што су тригонометриске функције, функције кружног лука (односно одговарајућег угла и одговарајућег двоструког кружног сектора), тако су хиперболне функције, функције двоструког сектора који одговара луку равностране хиперболе $x^2 - y^2 = 1$[1]). Као што (фиг. 12′) кружном луку

[1]) Ово следује из аналитичких дефиниција хиперболних функција. Доиста, $\sinh^2 u - \cosh^2 u = \frac{e^{2u} - 2e^u \cdot e^{-u} + e^{-2u}}{4} - \frac{e^{2u} + 2e^u \cdot e^{-u} + e^{-2u}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$, одакле следује $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$, или (ако се стави $\cosh u = x$, $\sinh u = y$) $x^2 - y^2 = 1$ (в. фиг. 12′).

$SU = v$, односно углу $SOU = \vartheta$ (односно двострукој површини кружног сектора OSU) одговарају тригонометриске функције:

$$\sin\vartheta = SR, \quad \cos\vartheta = OR,$$
$$\operatorname{tg}\vartheta = MU, \quad \operatorname{cotg}\vartheta = NL,$$
$$\sec\vartheta = OM, \quad \operatorname{cosec}\vartheta = OL,$$

тако двострукој површини хиперболног сектора OPU (коју означавамо са u) одговарају (пошто је $OU = 1$) хиперболне функције:

$$\sinh u = PQ = y, \quad \cosh u = OQ = x,$$
$$\operatorname{tgh} u = UT^{2)}, \quad \operatorname{cotgh} u = NK^{3)},$$
$$\operatorname{sech} u = OR'^{4)}, \quad \operatorname{cosech} u = OV^{5)}.$$

[2]) Из (фиг. 12′)

$$\Delta\, OUT \sim \Delta\, OQP$$

следује

$$TU : OU = PQ : OQ = y : x$$

а одавде (пошто је $OU = 1$):

$$TU = \frac{y}{x} = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \operatorname{tgh} u.$$

[3]) Из $\Delta\, ONK \sim \Delta\, OPQ$ (пошто је $\sphericalangle NKO = \sphericalangle POQ$) следује:

$$NK : ON = OQ : PQ = x : y,$$

а одавде (за $ON = 1$):

$$NK = \frac{x}{y} = \frac{\cosh u}{\sinh u} = \operatorname{cotgh} u.$$

[4]) Тангента хиперболе у тачки P одређена је изразом

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{x^2-1}}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{y} = \text{(ако се } \sphericalangle POQ \text{ означи са } \varphi) =$$

$$= \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

одакле следује

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Из

$$\Delta\, R'QP \sim \Delta\, OPQ$$

следује

$$R'Q : PQ = PQ : OQ,$$

а одавде

$$R'Q = \frac{PQ^2}{OQ} = \frac{y^2}{x}.$$

Из конструкције фигуре следује даље да је:

$\sinh u = \operatorname{tg} \vartheta$ (пошто је по претпоставци $MP \parallel OQ$),

$\cosh u = \sec \vartheta$ (пошто је $x = \sqrt{1+y^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \vartheta} = \dfrac{1}{\cos \vartheta} = \sec \vartheta$),

$\operatorname{tgh} u = \sin \vartheta$ (пошто је $\operatorname{tgh} u = \dfrac{\sinh u}{\cosh u} = \operatorname{tg} \vartheta \cos \vartheta = \sin \vartheta$),

одакле следује да је $ST \parallel OQ$),

$\operatorname{sech} u = \cos \vartheta$ (пошто је $\operatorname{sech} u = \dfrac{1}{\cosh u} = \dfrac{1}{\sec \vartheta} = \operatorname{cosec} \vartheta$),

$\operatorname{cotgh} u = \operatorname{cosec} \vartheta$ (пошто је $\operatorname{cotgh} u = \dfrac{1}{\operatorname{tgh} u} = \dfrac{1}{\sin \vartheta} = \operatorname{cosec} \vartheta$),

$\operatorname{cosech} u = \operatorname{cotg} \vartheta$ (пошто је $\dfrac{1}{\sinh u} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \vartheta} = \operatorname{cotg} \vartheta$).

Напослетку, из фигуре се види и да је (пошто је угао хиперболног сектора POQ означен са φ):

$$\operatorname{tg} \varphi = UT = \operatorname{tgh} u.$$

Како је

$$O'R = OQ' - R'Q = x - \frac{y^2}{x} = \frac{x^2-y^2}{x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cosh u},$$

то је

$$OR' = \operatorname{sech} u.$$

[5]) Из

$$\Delta\, OR'V = \Delta\, OPQ$$

следује

$$OV : OR' = OQ : PQ = x : y,$$

а одавде

$$OV = \frac{OR' \cdot x}{y} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sinh u},$$

дакле,

$$OV = \operatorname{cosech} u.$$

ДОДАТАК III

ПРИМЕНА ХИПЕРБОЛНИХ ФУНКЦИЈА У ТРИГОНОМЕТРИСКИМ ФОРМУЛАМА ЗА ПРАВОЛИНИСКИ ПРАВОУГЛИ ТРОУГАО ЛОБАЧЕВСКОВЕ РАВНИ

Да бисмо тригонометриске формуле за праволиниски правоугли троугао у Лобачевској равни:

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b),$$
$$\sin \Pi(\beta) = \cos \Pi(\alpha) \sin \Pi(a),$$
$$\sin \Pi(\alpha) = \cos \Pi(\beta) \sin \Pi(b),$$
$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\alpha),$$
$$\cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta),$$

у којима су изражени само односи међу угловими [угловима троугловим $\Pi(\alpha)$, $\Pi(b)$, $\dfrac{\pi}{2}$ и угловима паралелизма $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ који одговарају троугловим странама a, b, c] претворили у формуле у којима ће место тригонометриских функција углова паралелизма доћи хиперболне функције самих троуглових страна, потребно је претходно изразити тригонометријске функције углова паралелизма хиперболним функцијама (при чему ћемо се ограничити на прве четири од тих функција). На основу фундаменталне формуле у ставу 36-ом

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$$

биће (на основу тригонометриских једначина

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}\Bigg):$$

$$\sin \Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \cos \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

па према томе и

$$\operatorname{tg} \Pi(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \quad \operatorname{cotg} \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Кад се десне стране последње четири једначине упореде са аналитичким дефиницијама хиперболних функција излази да је

$$\sin \Pi(x) = \frac{1}{\cosh x}, \qquad \cos \Pi(x) = \operatorname{tgh} x,$$

$$\operatorname{tg} \Pi(x) = \frac{1}{\sinh x}, \qquad \operatorname{cotg} \Pi(x) = \sinh x.$$

На основу прве од ових једначина претвориће се [ако при томе још ставимо $\Pi(\alpha) = A$, $\Pi(\beta) = B$] прве три од горњих формула за праволиниски правоугли троугао у формуле:

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b,$$
$$\cos A = \cosh a \cdot \sin B,$$
$$\cos B = \cosh b \cdot \sin A,$$

а на основу друге од тих једначина претвориће се и друге две од горњих формула у формуле:

$$\operatorname{tgh} b = \operatorname{tgh} c \cdot \cos A,$$
$$\operatorname{tgh} a = \operatorname{tgh} c \cdot \cos B.$$

Осим тога, из прве три формуле и друге једначине, дају се извести и ове две формуле:

$$\sinh b = \sinh c \cdot \sin B,$$
$$\sinh a = \sinh c \cdot \sin A.$$

ДОДАТАК IV

ДОКАЗ ПОМОЋУ ХИПЕРБОЛНИХ ФУНКЦИЈА, ДА ЈЕ СФЕРНА ТРИГОНОМЕТРИЈА ЛОБАЧЕВСКОВОГ ПРОСТОРА ИДЕНТИЧНА СА СФЕРНОМ ТРИГОНОМЕТРИЈОМ ЕВКЛИДОВОГ ПРОСТОРА

На основу изведених формула у претходном Додатку дају се из фиг. 9′ директно извести одговарајуће формуле за сферни правоугли троугао у Лобачевсковом тродимензионалном простору, и то на следећи начин: [1])

На основу формуле за праволиниски правоугли троугао

$$\sin A = \frac{\sinh a}{\sinh c}$$

имаћемо у правоуглом троуглу OBD:

$$\sin BOD = \sin a = \frac{\sinh BD}{\sinh OB},$$

у правоуглом троуглу BED:

$$\sin BED = \sin A = \frac{\sinh BD}{\sinh BE},$$

и у правоуглом троуглу OBE:

$$\sin BOE = \sin c = \frac{\sinh BE}{\sinh OB},$$

одакле следује да је

$$\sin a = \sin A \cdot \sin c,$$

дакле, иста једначина која постоји за a, A и c у Евклидовој сферној тригонометрији. На сличан начин дале би се извести и остале формуле, које су такође идентичне са одговарајућим формулама у обичној сферној тригонометрији.

---

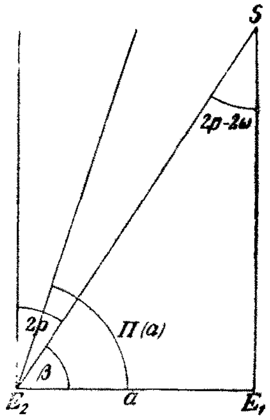
[1]) Види о томе детаљније код R. B o n o l a, Über die Parallelentheorie und über die nichteuklidischen Geometrien, у „Fragen der Elementargeometrie“ hgb. von F. E n r i q u e s, I-er Th. 1911, § 41, стр. 338.

ДОДАТАК V

ПИТАЊЕ О ГЕОМЕТРИСКОЈ ПРИРОДИ СТВАРНОГ ПРОСТОРА

У „Über die Anfangsgründe“, § 15, стр. 22 и д. *Лобачевски* на два начина даје одговор на ово питање, мерењем јединице дужине помоћу паралаксе некретница и мерењем углова у троуглу. Ми ћемо овде гонорити опширније само о првом начину.

Годишња паралакса једне некретнице, то је угао под којим би се видео пречник Земљине путање гледан са те звезде. Ако претпоставимо да права лииија, која претставља отстојање звезде S од Земље у тачки E_1 (фиг. 13′), стоји управио иа пречнику a Земљине путање, а да права линија, која спаја S са тачком E_2, склапа оштар угао β са тим пречником, и ако угао $\frac{\pi}{2} - \beta$ означимо са $2p$, онда ће у Евклидовом простору бити паралакса $E_2SE_1 = 2p$, док ће у нееклидовом простору негативне кривине та парилакса бити $< 2p$ (ако дефект троугла означимо са 2ω, тај ће угао бити $2p - 2\omega$). Како се директно може мерити само угао $2p$ (односно угао β), то је, у случају да је стварни простор нееклидски, стварна паралакса увек мања од измерене. У томе случају дâ се из правоуглог троугка у фиг. 13′ јединица дужине (односно доња граница њене велнчине) израчунати на следећи начин.



Фиг. 13′

Из фиг. 13′ следује непосредно да је

$$\Pi(a) > \frac{\pi}{2} - 2p\,,$$

пошто је $\beta = \frac{\pi}{2} - 2p$. Према томе је

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(a) > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - p\right).$$

Како је пак на основу познате формуле:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

очевидно:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - p\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}p}{1 + \operatorname{tg}p}$$

и како је

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(a) = e^{-\frac{a}{k}}\,,$$

то је

$$e^{\frac{a}{k}} < \frac{1 + \operatorname{tg}p}{1 - \operatorname{tg}p}\,.$$

Из ове последње неједначине следује:

$$\frac{a}{k} < \ln\left(\frac{1 + \operatorname{tg}p}{1 - \operatorname{tg}p}\right),$$

а одавде, на основу формуле:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right),$$

следује неједначина:

$$\frac{a}{k} < 2\left(\operatorname{tg}p + \frac{\operatorname{tg}^3 p}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 p}{5} + \cdots\right).$$

Како је даље, на основу формуле:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}\,,$$

$$\operatorname{tg}2p = \frac{2\operatorname{tg}p}{1 - \operatorname{tg}^2 p} = 2(\operatorname{tg}p + \operatorname{tg}^3 p + \operatorname{tg}^5 p + \cdots),$$

то ће (пошто је паралакса $2p$ врло мала количина, тако да се чланови $\frac{\mathrm{tg}^3 p}{3}, \frac{\mathrm{tg}^5 p}{5}$ итд. у одговарајућим бескрајним редовима могу занемарити) напослетку бити:

$$\frac{a}{k} < \mathrm{tg}\, 2p.$$

Ако се $2p$ стави на Сиријус $= 1,''24$, као што чини Лобачевски, онда је:

$$\frac{a}{k} < 0{,}000\,006\,012,$$

тј. природна јединица дужине била би већа од 167 060 пречника Земљине путање (односно овај пречник мањи од шест милионитих делова те јединице). Ако се $2p$ стави $= 0,''1$, добија се, да је k веће од милиона тих пречника.

Кад би стварни простор био евклидски, k би било бескрајно велико и некретнице би могле имати произвољно малу паралаксу. Ако је пак простор неевклидски, тј. ако k има одређену крајњу вредност, постоји једна минимална вредност паралаксе, коју паралаксе некретница не могу прекорачити. Наравно ови закључци вреде само под претпоставком, да је стварни простор бесконачан.

Што се тиче збира углова у троуглу, на који се позива Лобачевски у тексту, он у „Über die Anfangsgründe", стр. 23 (упор. и примедбу Енгелову на стр. 249—50) показује, да је, кад се дефект троугла означи, као у фиг. 9', са 2ω, у равнокраком правоуглом троуглу астрономских димензија: $\mathrm{tg}\,\omega < \mathrm{tg}^2 p$.

Кад би се узео правоугли троугао, чије су стране једнаке пречнику Земљине путање, и p ставило $= 0,''62$ (половина Сиријусове паралаксе по Лобачевском), онда би на основу ове формуле изашло, да би дефект таквог троугла био мањи од $0,''000\,003\,727$. Пошто је пак дефект троугла све мањи што је мања његова површина, то ће за троугле Земаљских димензија тај дефект бити тако мали, да се неће дати констатовати; или, друкчије речено, у области обичног искуства важиће Евклидова геометрија.

Али, додаје Лобачевски (н. н. м. стр. 24), ако се претпостави да је васиона бесконачна, није немогућно да Евклидова претпоставка не вреди више ван области нашег звезданог система (система млечне путање), иако је опет с друге стране тешко претпоставити једну такву везу ствари у природи, која би тако различне количине, као што су углови и стране, учинила зависним једне од других. Стога је — и то је крајњи закључак Лобачевског — врло вероватно, да је стварни простор у апсолутном смислу евклидски, иако се то по њему никада неће моћи доказати.

(Упор. и B. Bonola, н. н. м. стр. 98—100).

Питање о кривини стварног простора расправљали су, на основу новијих података о паралаксама некретница, у последње време астрономи K. Schwarzschild (у расправи „Über das zulässige Krümmungsmass des Raumes" у „Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft" 1910) и P. Harzer (у расправи „Die Sterne und der Raum" у „Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung" 1908).