MATEMATIČKI INSTITUT

KLASIČNI NAUČNI SPISI

NOVA SERIJA

Knjiga 2 (17)

RICHARD DEDEKIND

NEPREKIDNOST I IRACIONALNI BROJEVI

ŠTA SU I ČEMU SLUŽE BROJEVI?

GEORG CANTOR

O PROŠIRENJU JEDNOG STAVA IZ TEORIJE TRIGONOMETRIJSKIH REDOVA

BEOGRAD
1976

KLASIČNI NAUČNI SPISI

NOVA SERIJA

Knjiga 2 (17)

Izdaje: Matematički institut — Beograd, Knez-Mihailova 35

Štampa: Beogradski grafičko-izdavački zavod, Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17

INSTITUT MATHÉMATIQUE

OEUVRES CLASSIQUES

NOUVELLE SÉRIE

TOME 2 (17)

RICHARD DEDEKIND

STETIGKEIT UND IRRATIONALZAHLEN

WAS SIND UND WAS SOLLEN DIE ZAHLEN?

GEORG CANTOR

ÜBER DIE AUSDEHNUNG EINES SATZES AUS DER THEORIE DER TRIGONOMETRISCHEN REIHEN

BEOGRAD
1976

MATEMATIČKI INSTITUT

KLASIČNI NAUČNI SPISI

NOVA SERIJA

Knjiga 2 (17)

RICHARD DEDEKIND

NEPREKIDNOST I IRACIONALNI BROJEVI
ŠTA SU I ČEMU SLUŽE BROJEVI?

GEORG CANTOR

O PROŠIRENJU JEDNOG STAVA IZ TEORIJE TRIGONOMETRIJSKIH REDOVA

S nemačkog preveo

Z. P. MAMUZIĆ

BEOGRAD

1976

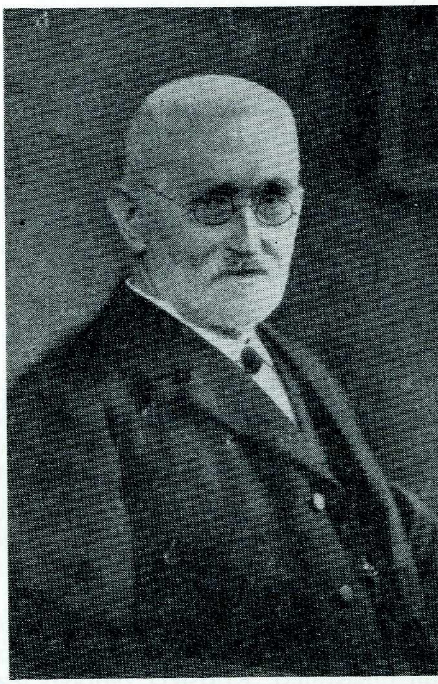
U r e d n i k
akademik TATOMIR P. ANĐELIĆ

Primljeno na 83. sednici Naučnog veća Matematičkog instituta 28. oktobra 1974. godine i 87. sednici od 30. juna 1975. godine.

Republička zajednica nauke SR Srbije učestvovala je u troškovima izdavanja ove publikacije.

Prema mišljenju Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije ova publikacija je oslobođena poreza na promet.

SADRŽAJ



R. Dedekind

Sledećih nekoliko podataka treba da posluže čitaocu samo kao obaveštenje o vremenu pojave prvenstveno Dedekindovih ovde prevedenih dveju rasprava kao i njihovom mestu u matematici. Njegova sabrana matematička dela pod naslovom Richard Dedekind, Gesammelte mathematische Werke, pripremili su i sa komentarima izdali Robert Fricke (Braunschweig), Emmy Noether (Göttingen), i Öystein Ore (New Haven), Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt. — Ges., Braunschweig, 1930—1932. Bibliografiju za svestraniji uvid o Dedekindu i njegovom stvaralaštvu može čitalac naći u biografsko-literarnom priručniku egzaktnih prirodnih nauka J. C. Poggendorff, Band VIIa, Supplement, Akademie — Verlag, Berlin, 1971, str. 148. S druge strane, kako u predgovoru prve od pomenutih rasprava Dedekind pominje i jedan Kantorov rad, u kome je takođe data definicija realnih brojeva, drukčija od Dedekindove, preveo sam i taj rad, vrlo značajan za dalji razvitak matematike.

Julius Wilhelm Richard Dedekind, ili, kako je sam pojednostavio, Richard Dedekind, rođen je 6. oktobra 1831. godine u Braunchweigu. Od matematičara imao je za učitelja M. A. Sterna (1807—1894) i K. F. Gaussa (1777—1855), svoga meštanina, jer je i Gauss rođen u Braunschweigu. Doktorsku disertaciju pod naslovom »Über die Elemente der Theorie der Eulerschen Integrale« (O elementima teorije Eulerovih integrala) odbranio je 1852. godine kod Gaussa. Zanimljivo je da je otprilike u to vreme kod Gaussa odbranio svoju doktorsku disertaciju i B. Riemann (1826—1866) pod naslovom »Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse« (Osnove za opštu teoriju funkcija jedne promenljive kompleksne veličine). Dedekind i Riman bili su prijatelji i o prerano preminulom Rimanu postoje Dedekindove biografske beleške. Poglede koji leže u osnovi njegovih najvažnijih ostvarenja, posebno u aritmetici, izložio je Dedekind već u njegovoj habilitacionoj besedi 1854. godine, prilikom postavljenja za privatnog docenta u Göttingenu (videti njegov predgovor raspravi „Šta su i čemu služe brojevi?“). Slično tome je Riman u svojoj habilitacionoj besedi izložio nove poglede na geometriju, fundamentalne za njen dalji razvitak. Obe habilitacione besede održane su pred Gausom koji ih je visoko cenio osećajući njihov značaj u matematici. Dedekind je 1858. godine postao redovnim profesorom Politehničke škole u Zürichu, a od 1862. pa sve do 1894. godine radio je u Tehničkoj Velikoj Školi u Braunschweigu. Godine 1894. povukao se u penziju, ali je intenzivno istraživao u matematici sve do pred kraj svoga života, koji je nastupio 12. februara 1916. godine, takođe u Braunschweigu.

Dedekind je istraživao u raznim oblastima matematike, između ostalog i u računu verovatnoće. Štaviše, iz njegova dva rada, publikovana po njegovoj smrti, vidi se da je bio na tragu zasnivanja skupovno-teorijske topologije. To su radovi: »Allgemeine Sätze über Räume« (Opšti stavovi o prostorima) i »Beweis und Anwendungen eines Satzes über mehrfach ausgedehnte Gebiete« (Dokaz i primene jednog opšteg stava o višestruko rasprostranjenim neprekidnim oblastima). Koristeći zapravo rezultate radova koji su u ovoj knjižici prevedeni, Dedekind je u drugoj od navedenih rasprava dao tačan dokaz stava da realna funkcija definisana i neprekidna na datom segmentu, mora bar jednom proći kroz nulu ako ona na tom segmentu uzima i pozitivne i negativne vrednosti. Dokaz toga stava koji je dao B. Bolzano (1781—1848) nije bio ispravan, a nije to ni mogao biti, jer Bolzano nije imao na raspoloženju definiciju realnih brojeva koja je data docnije. Utemeljivačem topologije smatra se Riman, ali je Dedekind, koji je dobro poznavao delo Rimana, u jednom pismu G. Cantoru (1845—1918), datiranom 19. januara 1879. godine, nagovestio publikovanje jedne rasprave u kojoj bi se od početka razvila teorija oblasti (Gebietslehre) bez uvlačenja geometrijskih predstava. Naravno, bez teorije skupova to nije bilo mogućno, pa je, kako u gore navedenim tako i u nekim od ostalih njegovih radova, među kojima i u ovde prevedenim, specijalno u radu „Šta su i čemu služe brojevi?“ — Dedekind često primoran da prethodno raščišćava sa pojmovima i definicijama iz teorije skupova. A upravo u drugoj polovini devetnaestog veka tu je teoriju sa novim, iznenađujućim rezultatima razvio njegov savremenik i prijatelj G. Cantor.

Međutim, Dedekindovi prilozi neprolazne vrednosti pripadaju aritmetici. To su, između ostalog, njegova definicija iracionalnih brojeva posredstvom preseka u skupu racionalnih brojeva, izložena u ovde prevedenoj raspravi »Neprekidnost i iracionalni brojevi«, i njegova definicija ideala sa novim prilozima teoriji algebarskih brojeva. U oba navedena priloga pojam beskonačnog shvaćen je u aktualnom smislu. Zanimljivo je primetiti da je L. Kronecker (1823—1891) takođe dao niz priloga teoriji algebarskih brojeva, među kojima i analognih Dedekindovim, no koji, kao što beleži istorija matematike, pojam beskonačnog u aktualnom smislu nije prihvatao. Kronecker je takvim shvatanjem izložio sumnji čitavu matematičku analizu, što nije bilo mnogo pravo jednom od njenih najboljih graditelja u devetnaestom veku, njegovom savremeniku i kolegi K. Weierstrassu (1815—1897), kao što se može zaključiti iz jednog Weierstrassovog pisma Sonji Kovalevskoj (1850—1891).

Iz Dedekindovog predgovora raspravi »Neprekidnost i iracionalni brojevi« vidi se da ga je baš potreba za strogim zasnivanjem matematičke analize dovela 1858. godine do strogog zasnivanja sistema realnih brojeva. Dedekind je uveo aksiomu kojom se postulira neprekidnost prave, a onim njegovim presecima u skupu racionalnih brojeva koji ne proizvode racionalne brojeve, definisao je iracionalno brojeve i time ostvario neprekidnost sistema realnih brojeva. Istu je aksiomu postulirao i Kantor u svojoj definiciji realnih brojeva. Valja ovde istaći da je, polazeći od nekih gledišta Aristotela (oko 384—322 pre naše ere), već R. J. Bošković (1711—1787) postulirao neprekidnost prave. Štaviše, on je iskazao i zamisao o neprekidnosti sistema realnih brojeva kao što se može videti iz sledećeg citata; „Ako se zamisle svi brojevi koji bi mogli postojati, bilo da nastaju putem nepravih razlomaka bilo putem korenskih izraza, ili putem drugih transcendentno iracionalnih znakova, postojaće i kod njih kontinuirani niz; sve što se upravo u geometriji dešava, biva po nama već poznatim linijama, a u konačnoj ili infinitezimalnoj algebri biva preko simbola i znakova“. — Detaljnije o razmatranjima Ruđera Boškovića može čitalac naći u njegovoj raspravi „O zakonu kontinuiteta i njegovim posledicama u odnosu na osnovne elemente materije i njihove sile“, koju je sa latinskog prevela Darinka Nevenić-Grabovac, stručno redigovao i komentarima propratio Ernest Stipanić, a publikivao Matematički institut u Beogradu, kao knjigu 1 (16) u novoj seriji klasičnih naučnih spisa, 1975. godine. Gornji citat nalazi se na 81. strani te knjige. — S druge strane, Pitagora (oko 570—496 pre naše ere), sigurno nije bio malo iznenađen kada je uvideo da dijagonala kvadrata nije samerljiva sa stranom, tj. da odnos dijagonale i strane kvadrata nije racionalan. U stvari, to je bio jedan od prvih sudara sa iracionalnim brojevima koji će precizno biti definisani tek posle više od dve hiljade godina. Zato su antički matematičari, uključujući i Euklida (oko 300. god. pre naše ere), dokaze mnogih stavova izvodili geometrijski, koristeći teoriju proporcija koja potiče od Eudoksa (oko 408—355 pre naše ere). Za samerljive veličine Euklid je teoriju proporcionalnih veličina izložio u njegovoj petoj knjizi Elemenata, a za nesamerljive u desetoj (vid. Euklidovi elementi, u prevodu A. Bilimovića, koje je izdao Matematički institut SANU, u intervalu vremena 1949—1957, Beograd). Evo Eudoksove definicije jednakosti dveju razmera (vid. petu definiciju pete knjige Elemenata) koja je inspirisala i Dedekinda: »Kaže se da su veličine u *istoj razmeri*, prva prema drugoj kao treća prema četvrtoj, ako su bilo koji jednakostruki multiplumi prve i treće u isto vreme ili veći, ili jednaki, ili manji od bilo kojih multipluma druge i četvrte, svaki prema svakom uzeti u odgovarajućem poretku«. U antičkih matematičara razmere nisu bili brojevi. Aritmetizaciju geometrije izvršio je Legendre (1752—1834), ali je ona dobila strogu naučnu osnovu tek posle strogog zasnivanja definicije realnih brojeva. Mada inspirisan antičkom teorijom proporcija i geometrijskim rasuđivanjima, Dedekind definiše realne brojeve ne uvlačeći geometrijske predstave, u skladu sa gledištem da su geometrijske predstave strane aritmetici i da su brojevi slobodne tvorevine čovekova uma.

Dedekindova rasprava »Neprekidnost i iracionalni brojevi« postala je klasična već dugo još za njegova života. Ona je tako besprekorno pisana da se kao uvod može staviti u svaki današnji udžbenik matematičke analize. Danas se Dedekindovim nazivaju preseci koji se Dedekindovim postupkom definišu i u drugim oblastima matematike. Štaviše, postoje postupci da se ideja preseka za definiciju brojeva iskoristi već i ranije, a ne tek pošto su definisani racionalni brojevi.

Kao što to biva, često puta više autora dolazi do istih velikih otkrića u raznim oblastima čovekove delatnosti, pa i u matematici. Dedekind i sam navodi da su gotovo u isto vreme, ali na drukčiji način, realne brojeve definisali i G. Cantor, H. E. Heine (1821—1881) i K. Weierstrass, kojima treba priključiti i Ch. Meray-a (1835—1911). I njihove definicije mogu se naći po raznim udžbenicima matematike pa ih ovde nećemo navoditi.

Tako je proces stvaranja realnih brojeva proširivanjem pojma broja, polazeći od prirodnih, preko celih i racionalnih, okončan u drugoj polovii devetnaestog veka uvođenjem iracionalnih brojeva. Matematičari su se dakle sukobili sa problemom kako definisati prirodne brojeve, jer, u krajnjoj liniji, oni predstavljaju bazu čitave aritmetike. Tome pitanju je, u stvari, Dedekind posvetio ovde prevedenu raspravu pod naslovom »Šta su i čemu služe brojevi?«.

Saglasno njegovom shvatanju da je analiza jedna grana logike, Dedekind u ovoj raspravi postavlja logičke osnove za definiciju prirodnih i, dalje, transfinitnih brojeva. Kao što se može videti i iz komentara koji je na kraju ove rasprave dala E. Noether (1882—1935), Dedekindova istraživanja, koja čine sadržaj te rasprave, bitno su uticala na aksiomatski razvitak teorije skupova pa, s tim u vezi, na preispitivanje i dalji polet u razvijanju osnova matematike. E. Zermelo (1871—1953) je u svojim radovima u aksiomatici teorije skupova neposredno bio inspirisan Dedekindovim rezultatima. Kao primer Dedekindove uloge u teoriji skupova, navešću ovde njegovu kratku raspravu »Ähnliche (deutliche) Abbildung und ähnliche Systeme« (Slično (razgovetno) preslikavanje i slični sistemi), datiranu 7. 11. 1887. godine, u kojoj, pre Kantora i Bernštajna (F. Bernstein, 1878—1956), Dedekind daje dokaz osnovnog stava teorije skupova, koji nosi ime Kantor-Bernštajna, a koji glasi da su dva skupa ekvivalentna ako je svaki ekvivalentan pravom delu drugog od njih. Za dokaz tog stava Dedekind koristi jedan pomoćni stav koji je, u stvari, stav 63 iz § 4 njegove druge ovde prevedene rasprave. Zanimljiv komentar Dedekindova dokaza Kantor-Bernštajnova stava dala je E. Noether. Dedekindova rasprava »Šta su i čemu služe brojevi?« sadrži i elemente aksiomatskog zasnivanja definicije prirodnih brojeva, koju je docnije ponovo zahvatio G. Peano (1858—1932). Aksiomatskom zasnivanju definicije prirodnih brojeva prilazili su i drugi autori od kojih ću ovde pomenuti samo N. I. Lobačevskog (1792—1856), jednog od osnivača neeuklidske geometrije.

Inicijativom i podsticajem D. Hilberta (1862—1943) došlo je u prvoj polovini dvadesetog veka do intenzivnog preispitivanja osnova matematike koje se i dalje nastavlja. Rad u tome pravcu doveo je već i do sada do krupnih saznanja kao što pokazuju, na primer, radovi K. Gödela (1906—) i P. J. Cohena (1934—). Specijalno je to slučaj sa aritmetikom. Sigurno je da Dedekind ne bi bio malo iznenađen kada bi saznao za samo ova dva rezultata, dobivena otprilike za nepunih sto godina posle njegovih predavanja matematičke analize na Politehničkoj Školi u Zürichu: 1. (Nepotpunost aritmetike): Ne postoji algoritam pomoću kojeg se mogu izvesti svi istiniti aritmetički iskazi. 2. (Neodlučivost aritmetike): Ne postoji algoritam pomoću kojeg se za svaki aritmetički iskaz može u konačno mnogo koraka odlučiti da li je istinit ili neistinit. (Vid. Hermes, Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit, Springer-Verlag, drugo izdanje, 1971, str. 177). Isto bi to bio slučaj sa saznanjem da izračunljivih realnih brojeva ima samo prebrojivo mnogo, ili, još više, da se, pored analize koju je on tako valjano predavao studentima, paralelno razvija tako zvana rekurzivna analiza koja priznaje samo konstruktivne dokaze i u svojim osnovama ne sadrži pojam beskonačnog u aktualnom smislu.

Prevođenje u ovoj knjižici publikovanih Dedekindovih rasprava vršeno je iz trećeg toma sabranih Dedekindovih dela, koja sam naveo na početku ovog predgovora. Sem toga imao sam pred sobom i drugo Dedekindovo izdanje rasprave »Neprekidnost i iracionalni brojevi«. Nastojao sam da prevod bude materijalno tačan. Autorov stil, termine i oznake, specijalno one koje se odnose na skupove (sisteme), ostavio sam neizmenjene, da bi čitalac bolje osetio vreme u kome su te rasprave pisane.

Koristim i ovu priliku da zahvalim dr Tatomiru Anđeliću, direktoru Matematičkog instituta i dr Slobodanu Aljančiću, predsedniku Naučnog veća Matematičkog instituta, koji su pregledali rukopis prevoda u ukazali na niz omaški čijim je odstranjivanjem prevod postao bolji i adekvatniji.

dr Zlatko P. Mamuzić
profesor Univerziteta u Beogradu

Beograd, aprila 1975. godine.

Richard Dedekind

NEPREKIDNOST I IRACIONALNI BROJEVI

Posvećeno

mome dragom ocu

tajnom dvorskom savetniku profesoru, doktoru prava,

JULIUSU LEVINU ULRICHU DEDEKINDU

u

Braunšvajgu

povodom njegove pedesetgodišnjice rada
26. aprila 1872.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Razmatranja koja čine predmet ovog malog spisa potiču od jeseni 1858. godine. Kao profesor federalne politehničke škole u Zirihu, prvi put našao sam se onda u situaciji da moram predavati elemente diferencijalnog računa i primetio sam pri tome, jače no ikad ranije, nedostatak istinski naučnog zasnivanja aritmetike. Kod opisa približavanja promenljive veličine određenoj graničnoj vrednosti, a posebno kod dokaza stava da svaka veličina, koja stalno raste, ali ne neograničeno, sigurno mora težiti nekoj graničnoj vrednosti, pribegavao sam geometrijskim očiglednostima. Ja i sada smatram takvo unošenje geometrijskog posmatranja, pri prvom učenju diferencijalnog računa, sa didaktične tačke gledišta, izvanredno korisnim, štaviše, neophodnim, ako čovek ne želi da izgubi i suviše mnogo vremena. Ali, niko neće osporavati da takav način uvođenja diferencijalnog računa ne može polagati pravo na naučnost. Za mene je tada to osećanje nezadovoljstva bilo tako snažno, da sam doneo čvrstu odluku, da toliko dugo razmišljam, dok ne nađem sasvim strogo zasnivanje principa infinitezimalne analize. Tako se često govori da se diferencijalni račun bavi neprekidnim veličinama, pa ipak nigde se ne daje objašnjenje te neprekidnosti, pa i najstroža izlaganja diferencijalnog računa ne zasnivaju dokaze na neprekidnosti, nego ili apeluju, manje ili više svesno, na predstave koje su geometrijske ili su geometrijom motivisane, ili se pak oslanjaju na takve stavove koji ni sami nikada čisto aritmetički nisu dokazani. Njima pripada, na primer, gore pomenuti stav, a brižljivije istraživanje uverilo me je da se taj, ili svaki njemu ekvivalentni stav, u izvesnoj meri može smatrati kao dovoljna osnova infinitezimalne analize. Ostalo je još samo da se otkrije njegovo pravo poreklo u elementima aritmetike, a time da se istovremeno dobije definicija suštine neprekidnosti. To mi je uspelo 24. novembra 1858. godine, a nekoliko dana posle toga saopštio sam rezultat moga razmišljanja mome vernom prijatelju Durègeu, što je dovelo do dugog i živog razgovora. Te misli o naučnom zasnivanju aritmetike sam docnije, doduše, izlagao ovom ili onom od mojih učenika, štaviše, ovde u Braunšvajgu (Braunschweig) održao sam i jedno predavanje o tome predmetu u naučnom udruženju profesora, ali se zapravo nisam mogao odlučiti na pravo publikovanje, jer, prvo, izlaganje nije sasvim lako, a, sem toga, sama stvar je tako malo plodna. Međutim, već sam se upola bio odlučio da tu temu izaberem kao predmet spisa za ovu priliku, kad je pre nekoliko dana, 14. marta, u moje ruke dospela rasprava »Elementi teorije funkcija« od E. Hajnea (Heine) (Crelle-ov žurnal, Tom 74), dobrotom njenog visoko cenjenog autora, i učvrstila me u mojoj odluci. Doduše, ja se potpuno slažem sa sadržajem tog rada, što se tiče suštine, ali, otvoreno ću priznati, čini mi se da je moje izlaganje po formi jednostavnije i pravo jezgro stvari preciznije ističe. I baš dok pišem ovaj predgovor (20. mart 1872), primam zanimljivu raspravu »O proširenju jednog stava iz teorije trigonometrijskih redova« od G. Kantora (Cantor) (Math. Annalen od Klebša (Clebsch) i Nojmana (Neumann), Tom 5), za koju izražavam moju najlepšu zahvalnost oštroumnom autoru. Koliko uočavam pri brzom čitanju, aksioma u §2 te rasprave, bez obzira na spoljašnje oblikovanje, potpuno se poklapa sa onim što ja u §3. označujem suštinom neprekidnosti. Ali, kakvu će korist doneti, pa makar samo pojmovno razlikovanje realnih brojnih veličina još više vrste, to nisam još u stanju da razaznam baš zbog mog shvatanja o potpunosti realnog brojnog područja u samom sebi.

§ 1

Osobine racionalnih brojeva

Mada se ovde pretpostavlja poznavanje razvitka aritmetike racionalnih brojeva, ipak smatram da će biti dobro da bez diskusije istaknem nekoliko glavnih momenata, tek toliko da unapred ukažem na stanovište koje zauzimam u onome što sledi. Čitavu aritmetiku smatram kao nužnu, ili bar prirodnu posledicu najjednostavnijeg aritmetičkog akta, brojanja, a samo brojanje nije ništa drugo do sukcesivno stvaranje beskonačnog niza celih pozitivnih brojeva, u kome se svaki individuum definiše posredstvom neposredno prethodnog; najjednostavniji akt je prelaz od jednog već stvorenog individuuma na sledeći kojeg treba stvoriti. Već sam po sebi lanac tih brojeva čini čovekovom duhu veoma korisno oruđe i pruža neiscrpno bogatstvo čudesnih zakona, do kojih se dospeva uvođenjem četiri osnovne aritmetičke operacije. Sabiranje je sažimanje proizvoljnog ponavljanja gore navedenog najjednostavnijeg akta u jedan jedini akt, a množenje na isti način nastaje od sabiranja. Dok su te dve operacije uvek izvodljive, obrnute operacije, oduzimanje i deljenje, pokazuju se samo ograničeno izvodljivim. Ma šta da je bio prvi povod, i koja su upoređenja ili analogije sa iskustvom, intuicijom dovela do toga, neka ostane postrani; no, baš ta ograničenost izvodljivosti obratnih operacija bila je svakog puta pravi razlog jednog novog akta stvaranja; tako su čovekovim umom stvoreni negativni brojevi i razlomci, a u sistemu svih racionalnih brojeva dobijen je instrument beskonačno mnogo veće savršenosti. Taj sistem, koji ću označiti sa R, poseduje pre svega potpunost i zatvorenost, koje sam na jednom drugom mestu* označio kao odliku b r o j n o g t e l a, a koja se sastoji u tome što su četiri osnovne operacije sa po dve individue iz R uvek izvodljive, tj. rezultat tih operacija je uvek ponovo jedan određeni individuum iz R, ako se izuzme jedini slučaj deljenja nulom.

Ali je za naš sledeći cilj još važnije jedno drugo svojstvo sistema R, koje možemo iskazati tako što sistem R predstavlja dobro uređeno područje od jedne dimenzije, beskonačno na dve uzajamno suprotne strane. Šta je time zamišljeno, dovoljno je naznačeno izborom izraza, koji su pozajmljeni iz geometrijskih rasuđivanja; utoliko je neophodnije istaći odgovarajuće čisto arit-

*) Predavanja iz teorije brojeva, od P.G. Lejeune Dirichlet-a, drugo izdanje, § 159.

metičke osobenosti kako, čak, ni prividno ne bi izgledalo kao da su aritmetici potrebna takva njoj strana rasuđivanja.

Ako treba iskazati da oznake a i b znače jedan isti racionalan broj, onda se stavlja bilo $a=b$ bilo $b=a$. Da su dva racionalna broja a, b različita iskazuje se time što razlika $a-b$ ima ili pozitivnu ili negativnu vrednost. U prvom slučaju je a veće od b, b je manje od a, što se takođe opisuje i oznakama $a>b$, $b<a$.* Kako u drugom slučaju pozitivnu vrednost ima $b-a$, to je $b>a$, $a<b$. S obzirom na tu dvostruku mogućnost u načinu razlikovanja racionalnih brojeva, važe tada sledeći zakoni.

I. Ako je $a>b$ i $b>c$ onda je $a>c$. Svaki put kada su a, c dva različita (ili nejednaka) broja, i kada je b veći od jednog, a manji od drugog, mi ćemo to, bez straha od prizivanja geometrijskih predstava, kratko iskazati: b leži između brojeva a, c.

II. Ako su a, c dva različita broja, tada uvek postoji beskonačno mnogo različitih brojeva b koji leže između a, c.

III. Ako je a neki određeni broj, tada se svi brojevi sistema R raspadaju u dve klase, A_1 i A_2, od kojih svaka sadrži beskonačno mnogo individuuma: prva klasa A_1 obuhvata sve brojeve a_1 koji su $<a$, druga klasa A_2 obuhvata sve brojeve a_2 koji su $>a$; sam broj a može povolji biti pridodat bilo prvoj bilo drugoj klasi i, korespondentno tome, on je tada ili najveći broj prve ili najmanji broj druge klase. U svakom slučaju je razlaganje sistema R u dve klase A_1, A_2 tako da je svaki broj prve klase A_1 manji od svakog broja druge klase A_2.

§ 2

Upoređivanje racionalnih brojeva sa tačkama prave

Maločas istaknute osobine racionalnih brojeva podsećaju na uzajamne odnose između tačaka neke prave L. Ako se sa »desno« i »levo« budu na njoj razlikovala dva postojeća suprotna smera, i ako su p, q dve različite tačke, tada ili p leži desno od q, a q u isti mah levo od p, ili, obrnuto, q je desno od p, a p u isti mah levo od q. Ako su tačke p, q zaista različite, treći slučaj je nemoguć. U vezi sa tim različitim položajima postoje sledeći zakoni.

I. Ako p leži desno od q, a q leži desno od r, onda i p leži desno od r; kaže se da tada q leži između tačaka p i r.

II. Ako su p, r dve različite tačke tada ima beskonačno mnogo tačaka q koje leže između p i r.

III. Ako je p određena tačka u L, tada se sve tačke u L razlažu u dve klase P_1, P_2 od kojih svaka ima beskonačno mnogo individuuma; prva klasa P_1 obuhtava sve tačke p_1, koje leže levo od p, a druga klasa P_2 obuhvata sve

*) Ukoliko reč »apsolutno« ne bude dodata, u sledećem će se, dakle, misliti uvek na tako zvano »algebarski« veće i manje.

tačke p_2, koje leže desno od p; sama tačka p može biti povolji dodeljena prvoj ili drugoj klasi. U svakom slučaju je razlaganje prave L na dve klase ili dela P_1, P_2 takvo da svaka tačka prve klase P_1 leži levo od svake tačke druge klase P_2.

Kao što je poznato, ta analogija između racionalnih brojeva i tačaka prave postaje stvarna uzajamna korespondencija, kada se na pravoj izaberu jedna određena nulta tačka ili početak O i jedna određena dužinska jedinica za merenje duži. Pomoću te jedinice se za svaki racionalan broj a može konstruisati odgovarajuća duž, pa ako se ona nanese na pravoj nadesno ili nalevo od tačke O, već prema tome da li je a pozitivno ili negativno, dobiće se tako jedna određena krajnja tačka p, koju možemo označiti kao tačku koja odgovara broju a; racionalnom broju nula odgovara tačka O. Na taj način, svakom racionalnom broju a, tj. svakom individuumu u R, odgovara, jedna i samo jedna tačka p, tj. jedan individuum na L. Ako brojevima a, b odgovaraju respektivno tačke p, q i ako je $a>b$, tada tačka p leži desno od q. Zakoni I, II, III ovoga paragrafa potpuno odgovaraju zakonima I, II, III prethodnog.

§ 3

Neprekidnost prave

Međutim, od najveće važnosti je sada činjenica da na pravoj L ima beskonačno mnogo tačaka koje ne odgovaraju nijednom racionalnom broju. Ako naime tačka p odgovara racionalnom broju a, onda je kao što je poznato, duž Op samerljiva sa stalnom dužinskom jedinicom, koja se kod konstrukcije koristi, tj. postoji treća duž, tzv. zajednička mera, čiji su celi višekratnici te obe duži. Međutim, već su stari Grci znali i dokazali da postoje duži koje su nesamerljive sa datom dužinskom jedinicom, na primer, dijagonala kvadrata, čija je stranica uzeta za dužinsku jedinicu. Nanese li se jedna takva duž od tačke O, na pravu, dobiće se tako jedna krajnja tačka koja ne odgovara nijednom racionalnom broju. Kako se dalje lako može dokazati da ima beskonačno mnogo duži nesamerljivih sa dužinskom jedinicom, to možemo tvrditi: Prava L je beskonačno mnogo bogatija u tačkama-individuumima no što je područje R racionalnih brojeva kao brojeva-individuuma.

Hoćemo li sada, a to je naša želja, da sve pojave na pravoj propratimo aritmetički, to racionalni brojevi ne dosežu u tu svrhu, pa je zato neminovno nužno da se oruđe R, koje je konstruisano stvaranjem racionalnih brojeva, učini bitno finijim stvaranjem novih brojeva, tako da područje brojeva dobije istu savršenost, ili, kako ćemo odmah da kažemo, istu n e p r e k i d n o s t, kao i prava.

Dosadašnja razmatranja su svima tako poznata i laka da će njihovo ponavljanje mnogi smatrati sasvim suvišnim. Ipak sam taj pregled smatrao neophodnim da bih valjano pripremio glavno pitanje. Naime, do sada uobičajeno uvođenje iracionalnih brojeva oslanja se upravo na pojam ekstenzivnih veličina — ali koji ni sam nigde strogo nije definisan — i broj objašnjava kao rezultat merenja jedne takve veličine pomoću jedne druge istovrsne veličine. *)

Umesto toga tražim da aritmetika bude razvijena iz same sebe. Da su takva povezivanja sa nearitmetičkim predstavama bila najbliži povod za proširenje pojma broja, u opštem slučaju može biti i prihvaćeno (ipak, kod uvođenja kompleksnih brojeva to nasigurno nije bio slučaj); ali, u tome sasvim sigurno ne leži razlog da se ta tuđa razmatranja uvedu i u samu aritmetiku, u nauku o brojevima. Kao što se negativni i razlomljeni racionalni brojevi moraju i mogu obrazovati slobodnim stvaranjem, i kao što se zakoni računanja tim brojevima moraju i mogu svesti na zakone računanja sa celim pozitivnim brojevima, isto tako treba težiti tome da se i iracionalni brojevi definišu jedino racionalnim brojevima. Ostaje samo pitanje kako?

Gornje upoređenje područja R racionalnih brojeva sa jednom pravom dovelo je do saznanja o rupičavosti, nepotpunosti ili prekidnosti tog područja, dok pravoj pripisujemo potpunost, nerupičavost ili neprekidnost. U čemu se zapravo sastoji ta neprekidnost? U odgovoru na to pitanje mora se sadržati sve, i njime će se dobiti naučna osnova za istraživanje s v i h neprekidnih područja. Naravno, ništa se ne postiže nejasnim pričanjem o neprekinutoj vezi u najmanjim delovima; radi se o tome da se pruži precizna odlika neprekidnosti koja se može upotrebiti za istinita zaključivanja. O tome sam dugo vremena uzaludno razmišljao, ali sam na kraju našao što sam tražio. Možda će o tome pronalasku različita lica različito prosuđivati, ipak, mislim da će većina naći da je njegov sadržaj trivijalan. On se sastoji u sledećem. U prethodnim paragrafima skrenuta je pažnja na to da svaka tačka p prave proizvodi podelu iste na dva komada, tako da svaka tačka jednog komada leži levo od svake tačke drugog. Nalazim da je suština neprekidnosti u inverziji, dakle, u sledećem principu:

»Ako se sve tačke prave podele u dve klase, tako da svaka tačka jedne klase leži levo od svake tačke druge klase, tada postoji jedna i samo jedna tačka koja proizvodi tu podelu svih tačaka u dve klase, to rasecanje prave na dva komada«.

Kao što je već rečeno, mislim da se neću prevariti ako budem tvrdio da će svako odmah prihvatiti istinitost toga tvrđenja; mnogi od mojih čitalaca biće veoma razočarani kada shvate da tajna neprekidnosti treba da bude otkrivena tom trivijalnošću. Na to primećujem sledeće. Vrlo mi je drago, ako svako nalazi da je gornji princip tako jasan i tako u skladu sa njegovim predstavama o nekoj liniji; jer, ja nisam u stanju da iznesem neki dokaz o njegovoj tačnosti, i niko nije u stanju da tako šta učini. Prihvatanje tog svojstva linije nije ništa drugo do jedna aksioma kojom liniji priznajemo njenu neprekidnost, kojom mi liniji misaono unosimo neprekidnost. Ako uopšte prostor ima realno po-

---

*) Prividno preimućstvo opštosti te definicije odmah iščezava kada se misli na kompleksne brojeve. Obrnuto, po mome shvatanju pojam odnosa između dve istovrsne veličine može se razviti jasno tek tada kada se uvedu iracionalni brojevi.

stojanje, on ne mora nužno biti neprekidnan; mnoge od njegovih osobina ostale bi iste kada bi on bio i prekidan. I, ako bismo zacelo znali da je prostor prekidan, niko nas ne bi mogao sprečiti u tome da ga, ako nam se tako dopadne, ispunjavanjem njegovih šupljina u mislima načinimo neprekidnim; ali bi se to popunjavanje sastojalo u stvaranju novih tačaka-individuuma i imalo bi da se vrši saobrazno gornjem principu.

§ 4

Stvaranje iracionalih brojeva

Poslednjim rečima je već dovoljno nagovešteno na koji se način prekidno područje R racionalnih brojeva mora upotpuniti do nekog neprekidnog. U § 1 istakli smo, (III), da svaki racionalan broj a proizvodi jedno razlaganje sistema R u dve klase A_1, A_2 tako da je svaki broj a_1 prve klase A_1 manji od svakog broja a_2 druge klase A_2; broj a je ili najveći broj klase A_1 ili najmanji broj klase A_2. Ako je sada data neka podela sistema R na dve klase A_1, A_2 koja ima samo tu karakterističnu osobinu da je svaki broj a_1 u A_1 manji od svakog broja a_2 iz A_2, tada ćemo, kratkoće radi, takvu podelu zvati presek i označiti sa (A_1, A_2). Možemo tada kazati da svaki racionalan broj a proizvodi jedan, ili zapravo dva preseka, no koje nećemo smatrati bitno različitim; sem toga taj presek ima osobinu da ili među brojevima prve klase postoji najveći, ili među brojevima druge klase postoji najmanji. I obrnuto, ako neki presek poseduje i tu osobinu, onda je on proizveden tim najvećim ili najmanjim racionalnom brojem.

Međutim, lako je uveriti se da postoji beskonačno mnogo preseka koje ne proizvode racionalni brojevi. Najbliži primer je sledeći.

Ako je D ceo pozitivan broj, ali koji nije kvadrat nekog celog broja, tada postoji ceo pozitivan broj λ takav da je

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2.$$

Ako u drugu klasu A_2 uzmemo svaki pozitivni broj a_2 čiji je kvadrat veći od D, a u klasu A_1 sve ostale racionalne brojeve, ta podela čini presek (A_1, A_2), tj. svaki broj a_1 manji je od svakog broja a_2. Ako je naime $a_1 = 0$ ili negativno, tada je a_1 već iz tog razloga manje od svakog broja a_2, jer je ovaj pozitivan po samoj definiciji; no ako je a_1 pozitivno, tada je njegov kvadrat $\leqslant D$, pa je prema tome a_1 manje od svakog pozitivnog broja a_2 čiji je kvadrat $>$ D.

Ali, taj presek nije proizveden nijednim racionalnim brojem. Za dokaz toga, mora se pre svega pokazati da nema nijednog racionalnog broja čiji je kvadrat $= D$. Mada je to poznato iz prvih elemenata teorije brojeva. neka ipak ovde nađe mesta sledeći indirektan dokaz. Ako postoji racionalan broj čiji je kvadrat $= D$, tada takođe postoje dva pozitivna cela broja t, u koja zadovoljavaju jednačinu

$$t^2 - Du^2 = 0,$$

i može se pretpostaviti da je u najmanji pozitivan, ceo broj koji ima tu osobinu da se množenjem njegovog kvadrata sa D dobija kvadrat celog broja t. Kako je očevidno

$$\lambda u < t < (\lambda + 1) u,$$

to je broj

$$u' = t - \lambda u$$

pozitivan, ceo broj, i to manji od u. Stavi li se dalje

$$t' = Du - \lambda t,$$

to t' postaje takođe pozitivan, ceo broj, i proizilazi da je

$$t'^2 - Du'^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0,$$

što je u protivurečnosti sa pretpostavkom o broju u.

Prema tome, kvadrat svakog racionalnog broja x ili je $< D$ ili je $> D$. Odatle lako sledi da niti u klasi A_1 postoji najveći, niti u klasi A_2 postoji najmanji broj. Stavi li se naime

$$y = \frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D},$$

to je

$$y - x = \frac{2x(D - x^2)}{3x^2 + D}.$$

i

$$y^2 - D = \frac{(x^2 - D)^3}{(3x^2 + D)^2}.$$

Uzme li se ovde za x neki pozitivan broj iz klase A_1, biće $x^2 < D$, i, prema tome, $y > x$, i $y^2 < D$, dakle y takođe pripada klasi A_1. Međutim, ako se za x uzme neki broj iz klase A_2, biće $x^2 > D$ i, prema tome, $y < x$, $y > 0$, i $y^2 > D$, dakle y takođe pripada klasi A_2. Taj presek stoga nije proizveden nijednim racionalnim brojem.

U toj osobini, da nisu svi preseci proizvedeni racionalnim brojevima, sastoji se nepotpunost ili prekidnost područja R svih racionalnih brojeva.

Svaki put dakle kada pred sobom budemo imali presek (A_1, A_2), koji nije proizveden nijednim racionalnim brojem, stvorićemo jedan novi, jedan iracionalan broj α, koji ćemo smatrati potpuno definisanim tim presekom (A_1, A_2); kazaćemo da broj α odgovara tom preseku, ili da on taj presek proizvodi. Prema tome, od sada pa nadalje, jednom određenom preseku odgovara jedan i samo jedan racionalan ili iracionalan broj i dva broja smatraćemo različitim ili nejednakim, tada i samo tada kada oni odgovaraju bitno različitim presecima.

Da bismo sada dobili osnovu za uređenje svih realnih, tj. svih racionalnih i iracionalnih brojeva, moramo najpre istražiti odnose između bilo koja dva preseka (A_1, A_2) i (B_1, B_2), koje proizvode bilo koja dva broja α i β. Očigledno je presek (A_1, A_2) već potpuno određen kada je poznata jedna od dve klase, na primer, prva A_1, jer se druga klasa A_2, sastoji od svih racionalnih brojeva koji nisu sadržani u A_1, i karakteristična osobina jedne takve prve klase A_1 leži u tome da ona sadrži i sve brojeve manje od a_1, kada je u njoj sadržan broj a_1. Uporede li se sada dve takve prve klase A_1, B_1 između sebe, tada može biti, prvo, da su one obe potpuno identične, tj. da je svaki u klasi A_1 sadržani broj a_1 takođe i u klasi B_1, i da je svaki u klasi B_1 sadržani broj b_1 takođe i u klasi A_1. U tome slučaju je tada nužno i A_2 identično sa B_2, oba preseka su potpuno identična, što ćemo u znacima označiti sa $\alpha = \beta$ ili $\beta = \alpha$.

Ako međutim dve klase A_1, B_1 nisu identične, tada postoji u jednoj, na primer u A_1, neki broj $a_1' = b_2'$, koji nije sadržan u drugoj B_1, i koji se, prema tome, nalazi u B_2; zato su sigurno svi brojevi b_1 koji su sadržani u B_1, manji od tog broja $a_1' = b_2'$, pa su dakle svi brojevi b_1 takođe sadržani u A_1.

Ako je sada, drugo, taj broj a_1' jedini u klasi A_1 koji nije sadržan u B_1, to je u B_1 sadržan svaki broj a_1 koji je sadržan u A_1 i zato manji od a_1', tj. a_1' je najveći među svim brojevima a_1, prema tome presek (A_1, A_2) je proizveden racionalnim brojem $\alpha = a_1' = b_2'$. O drugom preseku (B_1, B_2) već znamo da su svi brojevi b_1 iz B_1 takođe i u A_1 i manji su od broja $a_1' = b_2'$, koji je sadržan u B_2; međutim, svaki broj b_2 koji je sadržan u B_2, mora biti veći od b_2', jer bi inače bio manji od a_1', pa bi bi dakle bio u A_1, a zato i u B_1; prema tome je b_2' najmanji među svim brojevima sadržanim u B_2, pa je zato i presek (B_1, B_2) proizveden istim racionalnim brojem $\beta = b_2' = a_1' = \alpha$. Zato su ta dva preseka samo nebitno različita.

Ako međutm, treće, u klasi A_1 ima bar dva različita broja $a_1' = b_2'$ i $a_1'' = b_2''$, koji nisu sadržani u klasi B_1, tada takvih ima i beskonačno mnogo, jer brojevi koji leže između a_1' i a_1'', kojih ima beskonačno mnogo, (§ 1. II), očigledno su sadržani u A_1, ali ne i u B_1. U tome slučaju kazaćemo da su brojevi α i β, koji odgovaraju tim bitno različitim presecima (A_1, A_2) i (B_1, B_2), takođe međusobom različiti, i to da je α veće od β, da je β manje od α, što ćemo u znacima iskazati kako sa $\alpha > \beta$ tako i sa $\beta < \alpha$. Pri tome treba istaći da se ta definicija potpuno poklapa sa prethodnom kada su oba broja α, β racionalna.

Preostali mogućni slučajevi su još ovi. Ako je 4) u klasi B_1 sadržan jedan i samo jedan broj $b_1' = a_2'$, koji nije sadržan i u klasi A_1, tada su oba preseka (A_1, A_2) i (B_1, B_2) samo nebitno različita i proizveden i su jednim istim racionalnim brojem $\alpha = a_2' = b_1' = \beta$. Ako međutim 5) u klasi

B_1 ima dva različita broja, koja nisu sadržana u klasi A_1, tada je $\beta > \alpha$, $\alpha < \beta$.

Kako su time iscrpljeni svi slučajevi, to proizilazi da od dva različita broja nužno jedan mora biti veći, a drugi manji, što sadrži dve mogućnosti. To je doduše već ležalo u izboru komparativa (veći, manji) za označavanje odnosa između α, β; ali je taj izbor tek sada naknadno opravdan. Upravo kod takvih istraživanja mora se čovek najbrižljivije čuvati, pa čak i pri najboljoj želji da bude korektan, da brzopletim izborom izraza, pozajmljenim iz drugih već razvijenih izlaganja, ne bude zaveden da preduzima nedozvoljena prenošenja iz jedne oblasti u drugu.

Osmotrimo li sada još jednom tačno slučaj $\alpha > \beta$, to proizilazi da manji broj β, kada je racionalan, zaista pripada klasi A_1; kako naime u klasi A_1 ima jedan broj $a_1' = b_2'$ koji pripada klasi B_2, to je broj β zacelo $\leqslant a_1'$, pa bio on najveći broj u B_1 ili najmanji broj u B_2, pa je zato sadržan u A_1. Isto tako iz $\alpha > \beta$ proizilazi da veći broj α, kada je racionalan, zacelo pripada klasi B_2, jer je $\alpha \geqslant a_1'$. Objedine li se oba razmatranja dobija se sledeći rezultat: Ako je presek (A_1, A_2) proizveden brojem α, tada bilo koji racionalan broj pripada klasi A_1 ili klasi A_2, već prema tome da li je manji ili veći od α; ako je sâm broj α racionalan, tada on može pripadati jednoj ili drugoj klasi.

Odatle kanačno proizilazi još sledeće. Ako je $\alpha > \beta$, ako dakle ima beskonačno mnogo brojeva u A_1, koji nisu sadržani u B_1, tada ima takođe beskonačno mnogo takvih brojeva koji su istovremeno različiti od α i β: svaki takav racionalan broj c je $< \alpha$, jer je sadržan u klasi A_1, i on je u isti mah $> \beta$, jer je sadržan u klasi B_2.

§ 5

Neprekidnost područja realnih brojeva

Na osnovu upravo utvrđenih razlikovanja, sistem $\mathfrak{R}$ svih realnih brojeva čini potpuno uređenu oblast jedne dimenzije; o tome nećemo dalje ništa govoriti, osim da važe sledeći zakoni.

I. Ako je $\alpha > \beta$ i $\beta > \gamma$, tada je i $\alpha > \gamma$. Kazaćemo da broj β leži između brojeva α, γ.

II. Ako su α, γ dva različita broja, tada ima beskonačno mnogo različitih brojeva β, koji leže između α, γ.

III. Ako je α neki određeni broj, tada se svi brojevi sistema $\mathfrak{R}$ raspadaju na dve klase $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$, od kojih svaka sadrži beskonačno mnogo individuuma; prva klasa $\mathfrak{A}_1$ obuhvata sve brojeve α_1 koji su $< \alpha$, druga klasa $\mathfrak{A}_2$ obuhvata sve brojeve α_2 koji su $> \alpha$; sâm broj α može povolji biti pridodat prvoj ili drugoj klasi i, sledstveno tome, on je tada najveći broj prve klase ili najmanji broj druge klase. U svakom slučaju je razlaganje sistema $\mathfrak{R}$ na dve klase $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ takvo, da je svaki broj prve klase $\mathfrak{A}_1$ manji od svakog broja druge klase $\mathfrak{A}_2$, i mi kažemo da je to razlaganje proizvedeno brojem α.

Kratkoće radi i da ne bih zamarao čitaoca, izostaviću dokaze tih stavova, koji neposredno slede iz definicija prethodnog paragrafa.

Ali sem tih svojstava, poseduje oblast $\mathfrak{R}$ i n e p r e k i d n o s t, tj. važi sledeći stav:

IV. Razloži li se sistem $\mathfrak{R}$ svih realnih brojeva na dve klase $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ tako da je svaki broj α_1 prve klase $\mathfrak{A}_1$, manji od svakog broja α_2 druge klase $\mathfrak{A}_2$, tada postoji jedan i samo jedan broj α, kojim je to razlaganje proizvedeno.

D o k a z. Razlaganjem ili presekom sistema $\mathfrak{R}$ na dve klase $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{A}_2$ je istovremeno dat presek (A_1, A_2) sistema R svih racionalnih brojeva, koji je definisan time što A_1 sadrži sve racionalnie brojeve klase $\mathfrak{A}_1$, a A_2 sadrži sve ostale racionalne brojeve, tj. sve racionalne brojeve klase $\mathfrak{A}_2$. Neka je α potpuno određeni broj koji proizvodi taj presek (A_1, A_2). Ako je sada β bilo koji od α različiti broj, tada uvek ima beskonačno mnogo racionalnih brojeva c, koji leže između α i β. Ako je $\beta<\alpha$, tada je $c<\alpha$; prema tome, c pripada klasi A_1 pa zato i klasi $\mathfrak{A}_1$, pa kako je u isti mah $\beta<c$, to i β pripada istoj klasi $\mathfrak{A}_1$, jer je svaki broj u $\mathfrak{A}_2$ veći od svakog broja c u klasi $\mathfrak{A}_1$. Međutim, ako je $\beta>\alpha$, tada je $c>\alpha$; prema tome, c pripada klasi A_2 pa zato i klasi $\mathfrak{A}_2$, a kako je u isti mah $\beta>c$, to i β pripada istoj klasi $\mathfrak{A}_2$, jer je svaki broj klase $\mathfrak{A}_1$ manji od svakog broja c u klasi $\mathfrak{A}_2$. Prema tome, svaki broj β, različit od α, pripada klasi $\mathfrak{A}_1$ ili klasi $\mathfrak{A}_2$, već prema tome da li je $\beta<\alpha$ ili $\beta>\alpha$; pa je zato sâm broj α ili najveći broj u klasi $\mathfrak{A}_1$ ili najmanji broj u klasi $\mathfrak{A}_2$, tj. α je jedan i, očigledno, jedini broj kojim je proizvedeno razlaganje sistema $\mathfrak{R}$ u klase $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, što je trebalo dokazati.

§ 6

Računanja sa realnim brojevima

Da bi se neki račun sa dva realna broja α, β sveo na računanja sa racionalnim brojevima, treba samo da se od preseka (A_1, A_2) i (B_1, B_2), koji odgovaraju brojevima α i β u sistemu R, definiše presek (C_1, C_2) koji treba da odgovara rezultatu računanja γ. Ovde ću se ograničiti na izvođenje najjednostavnijeg primera, sabiranja.

Ako je c neki racionalan broj, stavićemo ga u klasu C_1, ako u klasi A_1 ima neki broj a_1 i u klasi B_1 ima neki broj b_1 tako da je njihova suma $a_1+b_1\geqslant c$; sve ostale racionalne brojeve uzećemo u klasu C_2. Ta podela svih racionalnih brojeva na dve klase C_1, C_2 očegledno stvara presek, jer je svaki broj c_1 u klasi C_1 manji od svakog broja c_2 u klasi C_2. Ako su sada oba broja α, β racionalna, tada je svaki u klasi C_1 sadržani broj $c_1 \leqslant \alpha+\beta$, jer je $a_1 \leqslant \alpha$, $b_1 \leqslant \beta$, pa je dakle i $a_1+b_1 \leqslant \alpha+\beta$; ako bi dalje u klasi C_2 bio sadržan broj $c_2 < \alpha+\beta$, dakle $\alpha+\beta=c_2$, gde je p pozitivan racionalan broj, bilo bi

$$c_2=(\alpha-(1/2)p)+(\beta-(1/2)p),$$

što je u protivurečnosti sa definicijom broja c_2, jer je $\alpha-(1/2)p$ neki broj klase A_1, a $\beta-(1/2)p$ je neki broj klase B_1; prema tome je svaki u klasi C_2 sadržani broj $c_2 \geqslant \alpha+\beta$. Zato je u tome slučaju presek (C_1, C_2) proizveden sumom $\alpha+\beta$. Zato se nećemo ogrešiti o definiciju koja važi u aritmetici racionalnih brojeva, kada pod s u m o m $\alpha+\beta$ dva proizvoljna realna broja α, β, u svim slučajevima budemo podrazumevali onaj broj γ kojim je proizveden presek (C_1, C_2). Ako je dalje samo jedan od oba broja α, β racionalan, na primer, α, tada je lako uveriti se da na sumu $\gamma=\alpha+\beta$ nema nikakvog uticaja da li se broj α uzima u klasu A_1 ili u klasu A_2.

Isto kao i sabiranje, mogu se definisati i ostale operacije tzv. elementarne aritmetike, naime, formiranje razlika, proizvoda, količnika, stepena, korena, logaritama, pa se na taj način dolazi do ispravnih dokaza stavova (kao na primer $\sqrt{2}\ \sqrt{3}=\sqrt{6}$), koji, koliko ja znam, do sada nikada nisu dokazani. Preopširnosti, koje se mogu očekivati kod složenijih operacija, leže delimično u prirodi stvari, ali najvećim delom mogu se izbeći. S tim u vezi je vrlo koristan pojam i n t e r v a l a, tj. jednog skupa A racionalnih brojeva koji poseduje sledeće karakteristično svojstvo: ako su a i a' brojevi skupa A, onda su u skupu A sadržani i svi racionalni brojevi koji leže između a i a'. Sistem R svih racionalnih brojeva, kao i obe klase svakog preseka, su intervali. Ali ako postoji neki racionalan broj a_1, koji je manji, i neki racionalan broj a_2, koji je veći od svakog broja intervala A, tada ćemo A zvati konačan interval; očigledno tada ima beskonačno mnogo brojeva istih osobina kao i a_1, i beskonačno mnogo brojeva istih osobina kao i a_2; celo područje R raspada se na tri dela A_1, A, A_2, i pojavljuju se dva sasvim određena racionalna ili iracionalna broja α_1, α_2 koje respektivno možemo zvati donja i gornja (ili, manja i veća) m e đ a intervala A; donja međa α_1 određenja je onim presekom kod kojeg prvu klasu formira skup A_1, a gornja međa α_2 određena je onim presekom kod kojeg drugu klasu formira skup A_2. Za svaki racionalan ili iracionalan broj α, koji leži između α_1 i α_2, može se kazati da leži u intervalu A. Ako su svi brojevi nekog intervala A takođe brojevi nekog intervala B, onda ćemo A zvati delom od B.

Čini se da su na pomolu još veće opširnosti kada se želi preći na prenošenje bezbrojnih stavova artimetike racionalnih brojeva (kao na primer, $(a+b)\,c=ac+bc$) na proizvoljne realne brojeve. Međutim, to nije tako; brzo se uveravamo da se ovde sve svodi na to da se dokaže da i sâme aritmetičke operacije imaju izvesnu neprekidnost. Ono što pod time podrazumevam, izložiću u obliku jednog opšteg stava:

„Ako je λ rezultat nekog računa koji treba izvršiti sa brojevima $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, i ako λ leži u intervalu L, tada se mogu odrediti intervali $A, B, C, \ldots$, u kojima leže brojevi $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, tako da rezultat istog računa, u kome su brojevi $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, zamenjeni proizvoljnim brojevima iz intervala $A, B, C, \ldots$, bude uvek neki broj koji leži intervalu L." Međutim, zastrašujuća nezgrapnost, koja prati iskaz jednog takvog stava, uverava nas da se tu nešto mora preduzeti da se pomogne izražavanju; to se zaista može postići na najsavršeniji način kada se uvedu pojmovi promenljivih veličina, funkcija, graničnih vrednosti i, štaviše, biće najcelishodnije da se na tim pojmovima zasnuju već definicije najjednostavnijih arimetičkih operacija, što se ipak ovde dalje ne može izvoditi.

§ 7
Infinitezimalna analiza

Ovde ćemo na kraju još samo rasvetliti odnos koji postoji između naših dosadašnjih razmatranja i izvesnih glavnih stavova infinitezimalne analize.

Kaže se da neka promenljiva veličina x, koja prolazi sukcesivnim, određenim brojnim vrednostima, teži nekoj stalnoj graničnoj vrednosti α, ako se u toku procesa x konačno uvek pojavi između svaka dva broja među kojima leži i sâmo α, ili, što je isto, ako razlika $x-\alpha$ po apsolutnoj vrednosti konačno bude manja od svake od nule različite vrednosti.

Jedan od najvažnijih stavova glasi ovako: „Ako neka veličina raste stalno, ali ne neograničeno, onda ona teži nekoj graničnoj vrednosti".

Dokazaću ga na sledeći način. Prema pretpostavci, postoji jedan, pa prema tome, i beskonačno mnogo, brojeva α_2 takvih, da stalno ostaje $x<\alpha_2$; sa $\mathfrak{A}_2$ označimo skup svih tih brojeva α_2, sa $\mathfrak{A}_1$ skup svih ostalih brojeva α_1; svaki od poslednjih brojeva ima tu osobinu da u toku procesa konačno postaje $x>\alpha_1$, prema tome je svaki broj α_1 manji od svakog broja α_2, pa zato postoji neki broj α koji je ili najveći u klasi $\mathfrak{A}_1$, ili najmanji u klasi $\mathfrak{A}_2$ (§ 5, IV). Kako x nikad ne prestaje da raste, prvo ne može biti slučaj, pa je dakle α najmanji broj u klasi $\mathfrak{A}_2$. Ma koji broj α_1 sada uzeli, konačno će postati $\alpha_1<x<\alpha$, tj. x teži graničnoj vrednosti α.

Taj je stav ekvivalentan principu neprekidnosti, tj. on prestaje da važi čim budemo smatrali da u području $\mathfrak{R}$ nije prisutan ma i jedan realan broj; ili, drukčije rečeno: ako je tačan taj stav, onda je tačan i stav IV u § 5.

Drugi, sa tim takođe ekvivalentni stav infinitezimalne analize, koji se još češće javlja u primeni, glasi ovako: „Ako se u toku procesa menjanja neke veličine x, za svaki dati positivan broj δ može odrediti odgovarajuće mesto od kojeg se pa nadalje x menja za manje od δ, tada x teži nekoj graničnoj vrednosti".

Taj obrat stava, koji je lako dokazati, da se svaka promenjiva veličina, koja teži nekoj graničnoj vrednosti, konačno menja za manje od bilo koje date pozitivne veličine, može se izvesti kako iz prethodnog stava, tako i neposredno iz principa neprekidnosti. Ja ću poći ovim drugim putem. Ako je δ jedna proizvoljna pozitivna veličina (tj. $\delta > 0$), to će, prema pretpostavci, nastupiti trenutak od koga će se nadalje x menjati za manje od δ, tj. ako x u tome trenutku ima vrednost a, to će posle stalno biti $x > a - \delta$ i $x < a + \delta$. Sada ću privremeno napustiti prvobitnu pretpostavku i zadržaću samo maločas dokazanu činjenicu da sve potonje vrednosti promenjive x leže između naznačljivih, konačnih vredosti. Na tome zasnivam jednu dvostruku podelu svih realnih brojeva. U skup $\mathfrak{A}_2$ uzeću broj α_2 (na primer, $a + \delta$), ako u toku procesa konačno postaje $x \leqslant \alpha_2$; u skup $\mathfrak{A}_1$ uzeću svaki broj koji nije sadržan u skupu $\mathfrak{A}_2$; ako je α_1 takav broj, to će još beskonačno često puta nastupiti da bude $x > \alpha_1$, ma koliko daleko da je proces odmakao. Kako je svaki broj α_1 manji od svakog broja α_2, to postoji neki potpuno određeni broj α, koji proizvodi taj presek $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ sistema $\mathfrak{R}$, a koji ću zvati gornja granična vrednost promenljive x koja stalno ostaje konačna. Isto tako se ponašanjem promenljive x proizvodi drugi presek $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$ sistema $\mathfrak{R}$: neki broj β_1 (na primer, $a - \delta$) staviće se u $\mathfrak{L}_1$, ako u toku procesa konačno postaje $x \geqslant \beta_1$; svaki ostali broj β_2 koji treba staviti u $\mathfrak{L}_2$, ima tu osobinu da nikada nije konačno $x \geqslant \beta_2$, dakle, još uvek beskonačno mnogo puta postaje $x < \beta_2$; broj β, proizveden tim presekom, nazovimo donja granična vrednost promenjive x. Ta dva broja očigledno su karakterisana i sledećom osobinom: ako je ε proizvoljno mala pozitivna veličina, to uvek konačno postaje $x < \alpha + \varepsilon$ i $x > \beta - \varepsilon$, ali nikada ne postaje konačno $x < \alpha - \varepsilon$, i nikada konačno ne postaje $x > \beta + \varepsilon$. Sada su mogućna dva slučaja. Ako su α i β međusobom različiti, to nužno mora biti $\alpha > \beta$, jer je stalno $\alpha_2 \geqslant \beta_1$; promenljiva x osciluje i, ma koliko da je proces odmakao, dobiva još uvek takve promene, čiji iznos premašuje vrednost $(\alpha - \beta) - 2\varepsilon$, gde ε označuje proizvoljno malu pozitivnu veličinu. Međutim sa tom posledicom je u protivurečnosti pretpostavka, na koju se tek sada vraćam; zato ostaje još samo drugi slučaj $\alpha = \beta$; pa kako je već dokazano da uvek konačno postaje $x < \alpha + \varepsilon$ i $x > \beta - \varepsilon$, pa ma koliko mala bila pozitivna veličina ε, to x teži graničnoj vrednosti α, što je trebalo dokazati.

Neka ti primeri budu dovoljni za izlaganje odnosa između principa neprekidnosti i infinitezimalne analize.

Richard Dedekind

ŠTA SU I ČEMU SLUŽE BROJEVI?

’Αεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίξει,

Sa srdačnom ljubavlju posvećeno

mojoj sestri

JULIJI

i mome bratu

ADOLFU

doktoru prava, višem savetniku zemaljskog suda u Braunšvajgu

SADRŽAJ

PREDGOVOR PRVOM IZDANJU

U nauci ne treba verovati bez dokaza u ono što se može dokazati. Ma kako taj zahtev izgledao ubedljiv, ipak, kako ja mislim, on se još uvek ne može nipošto smatrati zadovoljenim, ni kod zasnivanja najjednostavnije nauke, naime onog dela logike, koji obrađuje učenje o brojevima, pa čak i prema najnovijim izlaganjima.*)

Kada aritmetiku (algebru, analizu) nazivam samo jednim delom logike, time već iskazujem da pojam broja smatram sasvim nezavisnim od predstava ili intuicija prostora i vremena, da ga naprotiv smatram neposrednim rezultatom čistih zakona mišljenja. Moj glavni odgovor na pitanje postavljeno u naslovu ovog spisa glasi: brojevi su slobodne tvorevine čovekovog uma, oni služe kao sredstvo da jasnije i oštrije shvatimo raznolikost stvari. Tek čisto logičnom izgradnjom nauke o brojevima i u njoj dobivenim neprekidnim područjem brojeva, dovodimo sebe u stanje da tačno proučimo naše predstave o prostoru i vremenu, kada uspostavimo vezu između njih i područja brojeva, stvorenog u našem umu.*) Pratimo li tačno šta činimo kod brojanja skupa ili mnoštva stvari, bićemo dovedeni na posmatranje sposobnosti uma da stvari dovodi u vezu sa stvarima, da jednoj stvari dodeli jednu stvar, ili da jednu stvar predstavi jednom stvari, bez koje mogućnosti uopšte nikakvo mišljenje nije mogućno. Po mome shvatanju, kako sam to već takođe izjavio*) pri jednoj najavi ovog spisa, čitava nauka o brojevima mora se izgraditi na toj jedinoj, a i inače neophodnoj osnovi. Već prilikom izdanja moga spisa o neprekidnosti ja sam se odlučio na takvo izlaganje, ali sam tek posle pojave istog i posle mnogih prekida, prouzrokovanih povećanim službenim poslovima i ostalim nužnim radovima, napisao prvu skicu na nekoliko listova, u godinama između

*) Od meni poznatih spisa, pomenuću odlični »Udžbenik aritmetike i algebre« od E. Schröder-a (Lajpcig, 1873), u kome se takođe nalazi spisak literature, i, sem toga, rasprave od Kronecker-a i Helmholtz-a o pojmu broja i o brojanju i merenju (u kolekciji filozofskih članaka u čast E. Zeller-a, Lajpcig 1887). Pojava tih rasprava je povod koji me je podstakao da sada i ja istupim sa mojim shvatanjem, u izvesnim pogledu sličnim, pa ipak u njegovom zasnivanju različitim, koje sam izgradio već pre mnogo godina i to bez uticaja sa bilo koje strane.

*) Uporediti § 3 moje rasprave: Neprekidnost i iracionalni brojevi (Braunšvajg, 1872).

*) Dirichlet-ova Predavanja iz teorije brojeva, treće izdanje, 1879, § 163, primedba na str. 470.

1872. i 1878, koju je tada videlo više matematičara i delimično sa mnom o tome razgovaralo. Ona ima isti naslov i, mada ne na najbolji način sređeno, sadrži ipak sve bitne osnovne misli ovog mog rada, koji daje samo njeno brižljivo izlaganje; kao takve glavne tačke pomenuću ovde oštro razlikovanje konačnog od beskonačnog (64), pojam broja stvari (161), dokaz da je način dokazivanja, poznat pod imenom matematičke indukcije (ili zaključivanja od n na $n+1$), zaista snažno dokazno sredstvo (59, 60, 80), i da je definicija indukcijom (ili rekurzijom) takođe određena i neprotivurečna.

Ovaj spis može shvatiti svako ko poseduje ono što se naziva zdravim čovekovim razumom; tome nisu ni najmanje potrebna filozofska ili matematička znanja iz škole. Ali vrlo dobro znam da će možda poneko jedva prepoznati njegove brojeve, koji su ga kroz ceo život pratili kao verni i pouzdani prijatelji, u senovitim oblicima koje mu predstavljam: on će se uplašiti dugim redom prostih zaključaka, koji odgovaraju osobenosti našeg razuma da deluje postepeno, on će se uplašiti trezvenog raščlanjivanja toka misli na kome počivaju zakoni brojeva, i postaće nestrpljiv što mora pratiti dokaze istina koje mu, prema njegovom tobožnjem unutrašnjem shvatanju, unapred izgledaju jasne i pouzdane. Naprotiv, baš u mogućnosti da se takve istine svode na druge, jednostavnije, pa ma koliko red zaključaka bio još uvek dug i prividno izveštačen, vidim ubedljiv dokaz da njihovo posedovanje, ili verovanje u njih, nikada nije dato neposredno unutrašnjom intuicijom, već se uvek stiče samo sa više ili manje potpunim opetovanjem pojedinačnih zaključaka. Tu misaonu delatnost, koju je zbog brzine njenog odvijanja teško pratiti, uporedio bih sa onom koju vrši pri čitanju jedan savršeno izvežbani čitalac; i to čitanje ostaje uvek više ili manje potpuno ponavljanje pojedinačnih koraka, koje početnik izvodi mučnim sricanjem; ali, za izvežbanog čitaoca dovoljan je vrlo mali deo istih, pa zato i vrlo mali rad ili napor uma, da sazna pravu, istinitu reč, dakako samo sa vrlo velikom verovatnoćom; jer, kao što je poznato, i najuvežbanijem korektoru se dešava s vremena na vreme da propusti neku štamparsku grešku, tj. da pogrešno čita, što bi bilo nemoguće kada bi potpuno ponovio misaoni lanac koji odgovara čitanju slovo po slovo. Tako smo već i od našeg rođenja skloni da stalno i u sve jačoj meri uspostavljamo vezu između stvari i stvari, a time da uvežbavamo onu sposobnost uma na kojoj počiva i stvaranje brojeva; tim neprestanim mada i nenamernim vežbanjem koje pada već u naše prve godine života, a sa time povezanim izgrađivanjem sudova i toka zaključivanja, stičemo i riznicu pravih aritmetičkih istina, na koje se docnije naši prvi učitelji pozivaju kao na nešto jednostavno, samo po sebi razumljivo, u našem unutrašnjem pojimanju dato, i tako se dešava da pogrešno kao jednostavni važe poneki, zapravo vrlo složeni pojmovi (kao na primer, broj stvari).

U tom smislu, koji ću označiti rečima, prema jednoj poznatoj izreci, ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίξει (čovek uvek aritmetizira), neka listovi koji slede, kao pokušaj da se nauka o brojevima izgradi na jedinstvenoj osnovi, nađu blagonakloni prijem i neka podstaknu ostale matematičare, da duge nizove zaključaka svedu na skromniju, prijatniju meru.

Saobrazno cilju ovog spisa ograničiću se na posmatranje niza takozvanih prirodnih brojeva. Na koji način treba docnije izvršiti postepeno proširivanje pojma broja, stvaranje nule, negativnih, racionalnih, iracionalnih i kompleksnih brojeva, stalnim svođenjem na ranije pojmove, i to bez ikakvog unošenja tuđih predstava (kao na primer onih o merljivim veličinama), koje, po mome shvatanju, mogu biti izgrađene do potpune jasnoće tek pomoću nauke o brojevima, to sam pokazao bar na primeru iracionalnih brojeva, u mome ranijem radu o neprekidnosti (1872); na sasvim sličan način daju se lako obraditi ostala proširenja, kao što sam to na istom mestu (§ 3) već izjavio, i za sebe zadržavam nameru da tome predmetu posvetim jednu povezanu raspravu. Upravo sa takvim shvatanjem izlazi kao nešto samo po sebi razumljivo i baš ništa novo da se svaki stav algebre i više analize, ma koliko daleko u njima ležao, može iskazati kao neki stav o prirodnim brojevima, tvrđenje, koje sam takođe čuo i iz usta D i r i c h l e t -a. Međutim, nikako ne vidim nešto korisno — a to je i Dirichlet-u bilo sasvim daleko — u tome, da čovek stvarno preduzme takvo mučno opisivanje i da ne želi da koristi i prizna druge brojeve, izuzev prirodnih. Naprotiv, najveća i najplodnija dostignuća u matematici i ostalim znanostima ostvarena su prvenstveno stvaranjem i uvođenjem novih pojmova, na šta je primoralo učestalo navraćanje složenih pojava, kojima se samo na mučan način moglo ovladati pomoću starih pojmova. O tome predmetu imao sam da održim jedno predavanje na Filozofskom fakultetu u leto 1854. prilikom moje habilitacije za privatnog docenta u Getingenu, čiji je sadržaj odobravao i Gaus; međutim, nije ovde mesto da u to podrobnije ulazim.

Koristim ovu priliku da, umesto toga, dam još nekoliko primedbi koje se odnose na moj raniji, gore pomenuti rad o neprekidnosti i iracionalnim brojevima. U njemu izložena, sjeseni 1858. pronađena, teorija iracionalnih brojeva zasniva se na onoj pojavi (§ 4), koja se javlja u području racionalnih brojeva, koju sam označio imenom preseka i koju sam najpre istražio; i ona se završava dokazom neprekidnosti novog područja realnih brojeva (§ 8. IV). Čini mi se da je ona nešto jednostavnija, rekao bih mirnija, no što su to obe, od nje i međusobom različite teorije, koje su izložili W e i e r s t r a s s i G. C a n t o r, a koja takođe poseduje potpunu strogost. Nju je docnije bez bitne promene U. Dini uzeo u Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reale (Piza, 1878); ali okolnost, da moje ime u toku tog izlaganja nije pomenuto kod opisa čisto aritmetičke pojave preseka, već slučajno upravo tamo gde se radi o egzistenciji merljive veličine koja preseku odgovara, lako bi mogla dovesti do pretpostavke da se moja teorija oslanja na posmatranje takvih veličina. Ništa netačnije ne bi moglo biti; naprotiv, u § 3 moga rada naveo sam različite razloge zbog čega potpuno odbacujem unošenje merljivih veličina, a što se tiče njihove egzistencije, na kraju sam naročito primetio, da za veliki deo nauke o prostoru neprekidnost njegovih tvorevina uopšte nije neophodna pretpostavka, bez obzira na to što se ona, doduše, u delima o geometriji po imenu uzgred svakako pominje, ali nikada nije jasno definisana, pa, prema tome, ni za dokaze pristupačnom učinjena. Da to još podrobnije objasnim, napomenuću primerice sledeće. Izaberemo li povolji tri tačke A, B, C koje ne leže na jednoj pravoj, sa jedinim ograničenjem da odnosi njihovih rastojanja AB, AC, BC budu algebarski *) brojevi, i smatramo li prisutnim u prostoru samo one tačke M, za koje su odnosi AM, BM, CM prema AB takođe algebarski brojevi, to je, kao što je lako videti, prostor koji se sastoji iz svih tih tačaka M, svuda prekidan; ali uprkos prekidnosti, šupljikavosti toga prostora, u njemu su, koliko ja vidim, takođe tačno izvodljive sve konstrukcije, koje se javljaju u Euklidovim Elementima, kao i u potpuno neprekidnom prostoru; zato se u Euklidovoj nauci prekidnost toga prostora ne bi ni primetila, ni osetila. Međutim, kada mi neko kaže da prostor drukčije ne bismo mogli ni zamisliti do neprekidnim, posumnjao bih u to i skrenuo bih pažnju na to koliko je daleko razvijena, utančana naučna izgradnja potrebna, da se samo jasnije spozna suština neprekidnosti, i da se shvati da se sem racionalnih veličinskih odnosa, mogu zamisliti takođe iracionalni, sem algebarskih takođe transcendentni. Utoliko mi se čini lepšim da se čovek može uzvinuti do stvaranja čistog, nepredidnog područja brojeva bez ikakve predstave o merljivim veličinama, i to konačnim sistemom jednostavnih misaonih koraka; i, po mome shvatanju, tek to pomoćno sredstvo omogućuje mu da jasno izgradi predstavu o neprekidnom prostoru.

Ista, na pojavi preseka zasnovana teorija iracionalnih brojeva, nalazi se takođe izložena u Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, od J. Tannery-a (Pariz, 1886). Ako ispravno shvatam jedno mesto iz predgovora toga dela, autor je tu teoriju pronašao nezavisno, dakle u vreme, kad mu je bio još nepoznat ne samo moj spis, nego ni u ovom predgovoru pomenuto delo Fondamenti od Dini-a; to slaganje mi se čini prijatnim dokazom za to da je moje shvatanje prirode stvari ispravno, što su priznali i drugi matematičari, na primer M. Pasch u njegovom Uvodu u diferencijalni i integralni račun (Lajpcig, 1883). Naprotiv, ne mogu se bez daljeg složiti sa Tannery-em kada on tu teoriju naziva razvijanjem jedne misli koja potiče od J. Bertrand-a, koja je sadržana u njegovom delu Traité d'arithmétique i sastoji se u tome da se iracionalan broj definiše naznačivanjem svih racionalnih brojeva koji su manji i svih onih koji su veći od broja koji treba definisati. Na tu izjavu, koju je ponovio O. Stolz — kako izgleda, bez bližeg proveravanja — u predgovoru drugog dela njegovih Predavanja o opštoj aritmetici (Lajpcig, 1886), dozvoljavam sebi da primetim sledeće. Da jedan iracionalan broj zaista treba smatrati potpuno određenim upravo opisanim naznačivanjem, to je uverenje bez sumnje i pre Bertrand-a oduvek bilo zajedničko dobro svih matematičara, koji su se zanimali pojmom iracionalnog; svakom onom ko približno izračunava iracionalni koren neke jednačine, lebdi pred očima baš taj način njegovog određivanja; i ako se iracionalan broj shvata kao odnos merljivih veličina, kako to Bertrand isključivo čini u njegovom delu (predamnom je osmo izdanje iz 1885. godine), onda je taj način njegovog određivanja najjasnije iskazan već u čuvenoj definiciji koju je Euklid (Elementi, V, 5) postavio za jednakost odnosa. Baš to prastaro ubeđenje zacelo je bilo izvor moje teorije, kao i one Bertrand-ove — i ponekih drugih, manje ili više uspelih pokušaja, da se na čvrstu osnovu po-

*) Dirichlet-ova Predavanja o teoriji brojeva, § 159. drugog § 160. trećeg izdanja.

stavi uvođenje iracionalnih brojeva u aritmetiku. Međutim, ako će se čovek sa Tannery-em dotle potpuno saglasiti, ipak se pri jednom istinskom ispitivanju odmah mora primetiti da Bertrand-ovo izlaganje, u kome se pojava preseka u svojoj logičnoj čistoti ne pominje ni jedan jedini put, sa mojim baš nikakve sličnosti nema, ukoliko se u njemu odmah pribegava egzistenciji merljivih veličina, što sasvim odbacujem iz gore opisanih razloga; i nezavisno od te okolnosti, čini mi se da to izlaganje i u docnijim, na pretpostavci te egzistencije zasnovanim definicijama i dokazima, sadrži još nekoliko tako bitnih nedostataka, da ja smatram opravdanim tvrđenje, iskazano u mome spisu (§ 6), da stav $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$ još nigde nije strogo dokazan, pa ni u ovom u ponekom drugom pogledu odličnog dela.

Harcburg, 5. oktobar 1887. R. Dedekind

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

Priloženi rad je ubrzo po njegovom objavljivanju naišao i na nepovoljne ocene, pored povoljnih, štaviše prebačene su mu grdne greške. Nisam se mogao uveriti u ispravnost tih prebacivanja, pa ostavljam sada da se, od nedavna rasprodati spis, za čiju javnu odbranu nemam vremena, bez ikakve promene štampa, dok ću prvom predgovoru dodati samo nekoliko primedbi.

Svojstvo, koje sam koristio kao definiciju (64) beskonačnog sistema, istakao je još pre pojave moga rada, G. Cantor (Prilog nauci o mnoštvima, Crelles-ov Journal, Tom 84, 1878), štaviše to je istakao već Bolzano (Paradoksi beskonačnog, § 20, 1851). Ali nijedan od pomenutih pisaca nije pokušao da to svojstvo uzvisi na definiciju beskonačnosti i da na toj osnovi strogo logički izgradi nauku o brojevima, a baš u tome se sastoji sadržaj moga mukotrpnog rada koji sam u svemu bitnom bio završio već više godina pre pojave rasprave G. Cantora i u vreme kada mi je delo Bolzano-a čak i po imenu bilo sasvim nepoznato. Primetiću još sledeće za one koji pokazuju interesovanje i razumevanje za teškoće jednog takvog poduhvata. Može se postaviti jedna sasvim drukčija definicija konačnog i beskonačnog, koja izgleda prostija utoliko što se u njoj uopšte ne pretpostavlja sličnost jednog preslikavanja, naime:

»Sistem S je konačan, ako se može preslikati u sebe sama (36) tako da se nijedan pravi deo (6) od S ne preslikava u sebe sama; u protivnom slučaju S je beskonačan sistem«.

Pokušajmo sada da na toj osnovi podignemo zgradu! Ubrzo ćemo naići na velike teškoće i mislim da smem tvrditi da čak i dokaz potpune saglasnosti te i prethodne definicije uspeva samo tada (a tada i lako), ako se niz prirodnih brojeva može smatrati već razvijenim i zaključno posmatranje u (131) uzeti u pomoć; pa ipak o svim tim stvarima nema govora ni u prvoj ni u drugoj definiciji! Pri tome će se uvideti koliko je velik broj misaonih koraka potreban za takvo prepravljanje jedne definicije.

Otprilike godinu dana posle objavljivanja moga rada upoznao sam G. F r e g e-ove Osnove aritmetike, publikovane već u 1884. godini. Ma koliko da je u tome delu postavljeno gledište o suštini broja i različito od mojega, ipak sadrži ono, osobito od § 79. pa nadalje, i vrlo bliske dodirne tačke sa mojim spisom, naročito sa mojom definicijom (44). Dakako, zbog različitog načina izražavanja, to slaganje nije lako prepoznati; ali već određenost, sa kojom se pisac izražava o načinu zaključivanja sa n na $n+1$ (na strani 93 dole), jasno pokazuje da on tu stoji sa mnom na istom tlu.

U međuvremenu su (1890—1891) gotovo potpuno publikovana E. S c h r ö d e r-ova Predavanja o algebri logike. U značaj toga veoma sugestivnog dela, kome odajem moje najveće priznanje, nemogućno je ovde bliže ulaziti; naprotiv, želeo bih se ovde samo izviniti što sam, i pored na strani 253. prvog dela učinjene primedbe, ipak zadržao svoje nešto glomazne oznake (8) i (17); ne zahteva se da one budu opšte usvojene već im je uloga da jedino služe ciljevima ovog aritmetičkog spisa, za što su one, po mome mišljenju, pogodnije od znakova za sumu i proizvod.

Harcburg, 24. avgusta, 1893. R. Dedekind

PREDGOVOR TREĆEM IZDANJU

Kada je otprilike pre osam godina od mene zatraženo da tada već rasprodato drugo izdanje ovoga rada obnovim trećim, dvoumio sam se da u to zalazim, jer su se u međuvremenu uvrežile sumnje u pouzdanost važnih osnova moga shvatanja. I danas su mu poznati značaj i delimično opravdanje tih sumnji. Ali moje poverenje u unutrašnju harmoniju naše logike nije time uzdrmano; verujem da će strogo izučavanje stvaralačke moći uma da iz određenih elemenata stvara novi, njihov sistem, koji je nužno različit od tih elemenata, zacelo dovesti do toga da se osnovi moga spisa uobliče besprekorno. Međutim, sprečen sam drugim poslovima da jedno tako teško istraživanje privedem kraju, pa zato molim za obzir ako se ovaj spis i po treći put ipak javlja u nepromenjenom obliku, što se da opravdati samo time što se interesovanje za njega još nije ugasilo, kao što to pokazuje trajna potražnja.

Braunšvajg, 30. septembar 1911. R. Dedekind

§ 1
Sistemi elemenata

1. U sledećem ću pod pojmom s t v a r i podrazumevati svaki predmet našeg mišljenja. Da bismo udobnije mogli govoriti o stvarima, obeležavaćemo ih znacima, na primer, slovima i dozvolićemo sebi da kratko govorimo o stvari a ili štaviše o a, pri čemu uistinu mislimo na stvar označenu sa a, nikako na samo slovo a. Jedna stvar je potpuno određena svim onim što o njoj može biti iskazano ili zamišljeno. Stvar a je isto što i b (identična sa b), i b je isto što i a, ako sve ono, što može biti zamišljeno za a, može biti zamišljeno i za b, i ako sve ono što vredi za b, može biti zamišljeno i za a. Da su a i b samo znaci ili imena za jednu i istu stvar, opisivaćemo znakom $a=b$, a takođe i sa $b=a$. Ako je sem toga $b=c$, ako je, dakle, c takođe kao i a, neki znak za stvar označenu sa b, to je i $a=c$. Ako gornje podudaranje stvari označene sa a sa stvari označenom sa b ne postoji, tada se te stvari a i b nazivaju različitim, a je neka druga stvar no što je b, b je neka druga stvar no što je a: jpostoji neko svojstvo koje jednoj pripada, drugoj ne pripada.

2. Vrlo često se dešava da se iz nekog razloga različite stvari $a, b, c, \ldots$, obuhvate jednim zajedničkim gledištem, da se u umu one združuju, i tada se kaže da one obrazuju jedan s i s t e m S; stvari $a, b, c, \ldots$, zovu se e l e m e n t i sistema S, one su s a d r ž a n e u S; obratno, S se s a s t o j i iz tih elemenata. Jedan takav sistem (ili jedna skupina, jedno mnoštvo, jedan skup) je kao predmet našeg mišljenja takođe neka stvar (1); on je potpuno određen čim je za svaku stvar određeno da li je ona element od S ili nije.*) Stoga je sistem S isto što i sistem T, u oznakama $S=T$, ako je svaki element od S takođe element od T a svaki element od T je takođe element od S. Za jednoobraznost načina izražavanja je korisno dopustiti i poseban slučaj da se sistem S sastoji iz jednog j e d i n o g (iz jednog i samo jednog) elementa, a,tj. da

*) Na koji način se to određivanje odvija i da li mi znamo neki put da o tome odlučuemo, za sve što dalje sledi je potpuno svejedno; zajednički zakoni koje treba razviti od toga uopšte ne zavise, oni vrede pod svim okolnostima. To napominjem izričito zbog toga, jer je pre kratkog vremena (u tomu 99. Crelle's Journal, strana 334. do 336) Kronecker hteo da postavi izvesna ograničenja slobodnom stvaranju pojmova u matematici, koja ne priznajem kao opravdana; no izgleda da se u to može bliže zalaziti tek onda kada ugledni matematičar bude objavio svoje razloge za neophodnost ili bar za svrsishodnost tih ograničenja.

je stvar a element od S, ali nijedna stvar različita od a nije element od S. Naprotiv, iz izvesnih razloga ćemo ovde potpuno isključiti prazan sistem koji uopšte ne sadrži nijedan element, mada za druga istraživanja može biti udobno da se takav sistem zamisli.

3. Definicija. Sistem A je deo sistema S, ako je svaki element od A takođe element od S. Kako će u sledećem često biti govora o tom odnosu između nekog sistema A i nekog sistema S, to ćemo ga kratkoće radi iskazivati oznakom $A \prec S$. Zbog jasnoće i jednostavnosti potpuno ću izbegavati obratni znak $S \succ A$, kojim bi mogla biti označena ista činjenica, ali ću u nedostatku bolje reči katkada reći da je S nadskup od A, čime dakle, treba da bude iskazano da se među elementima od S nalaze takođe svi elementi od A. Kako se dalje prema 2. svaki element s nekog sistema S i sam može shvatiti kao sistem, to i ovde možemo primeniti označavanje $s \prec S$.

4. Stav. Prema 3. je $A \prec A$.

5. Stav. Ako je $A \prec B$ i $B \prec A$ tada je $A = B$.

Dokaz sledi iz 3, 2.

6. Definicija. Sistem A se zove pravi deo od S, ako je A deo od S, ali je različit od S. Prema 5. tada S nije deo od A, tj. (3) postoji u S neki element koji nije element od A.

7. Stav. Ako je $A \prec B$ i $B \prec C$, što se takođe može kratko označiti sa $A \prec B \prec C$, to je $A \prec C$, i to A je sigurno pravi deo od C ako je A pravi deo od B, ili ako je B pravi deo od C.

Dokaz sledi iz 3, 6.

8. Definicija. Pod sistemom složenim iz nekih sistema $A, B. C, \ldots$, koji će biti označen sa $\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$, podrazumevaće se onaj sistem čiji su elementi određeni sledećim propisom: jedna stvar važi kao element od $\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$, tada i samo tada kada je ona element nekog od sistema $A, B, C, \ldots$, tj. kada je ona element od A, ili B, ili $C, \ldots$. Dopuštamo i slučaj da je prisutan samo jedan jedini sistem A; tada je očigledno $\mathfrak{M}(A) = A$. Primetićemo dalje da sistem $\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$, složen od $A, B, C, \ldots$, treba dobro razlikovati od onog sistema čiji su elementi sâmi sistemi $A, B, C, \ldots$.

9. Stav. Sistemi $A, B, C, \ldots$, su delovi od $\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$.

Dokaz sledi iz 8, 3.

10. Stav. Ako su $A, B, C, \ldots$, delovi nekog sistema S, to je $\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots) \prec S$.

Dokaz sledi iz 8, 3.

11. S t a v. Ako je P deo nekog od sistema $A, B, C, \ldots$, to je $P \prec \mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$.

Dokaz sledi iz 9, 7.

12. S t a v. Ako je svaki od sistema $P, Q, \ldots$, deo nekog od sistema $A, B, C, \ldots$, to je $\mathfrak{M}(P, Q, \ldots) \prec \mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$.

Dokaz sledi iz 11, 10.

13. S t a v. Ako je A složen od nekih od sistema $P, Q, \ldots$, to je $A \prec \mathfrak{M}(P, Q, \ldots)$.

D o k a z. Svaki element od A je prema 8. element nekog od sistema $P, Q, \ldots$, pa je prema 8. takođe od $\mathfrak{M}(P, Q, \ldots)$, odakle sledi stav prema 3.

14. S t a v. Ako je svaki od sistema $A, B, C, \ldots$, složen iz nekih od sistema $P, Q, \ldots$, to je

$$\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots) \prec \mathfrak{M}(P, Q, \ldots).$$

Dokaz sledi iz 13, 10.

15. S t a v. Ako je svaki od sistema $P, Q, \ldots$, deo nekog od sistema $A, B, C, \ldots$, i ako je svaki od poslednjih složen iz nekih od prvih, tada je

$$\mathfrak{M}(P, Q, \ldots) = \mathfrak{M}(A, B, C, \ldots).$$

Dokaz sledi iz 12, 14, 5.

16. S t a v. Ako je $A = \mathfrak{M}(P, Q)$ i $B = \mathfrak{M}(Q, R)$, tada je $\mathfrak{M}(A, R) = \mathfrak{M}(P, B)$.

D o k a z. Jer, prema prethodnom stavu 15. je kako $\mathfrak{M}(A, R)$ tako i $\mathfrak{M}(P, B) = \mathfrak{M}(P, Q, R)$.

17. D e f i n i c i j a. Stvar g je z a j e d n i č k i element sistema $A, B, C, \ldots$, ako je sadržana u svakom od tih sistema (dakle u A i u B i u $C, \ldots$). Isto tako je sistem T z a j e d n i č k i d e o od $A, B, C, \ldots$, ako je T deo svakog od tih sistema, a pod z a j e d n i š t v o m sistema $A, B, C, \ldots$, podrazumevaćemo potpuno određeni sistem $\mathfrak{G}(A, B, C, \ldots)$, koji se sastoji od svih zajedničkih elemenata g od $A, B, C, \ldots$, i prema tome je takođe zajednički deo istih sistema. Opet dopuštamo slučaj kada je prisutan samo jedan sistem A; tada treba stavitt $\mathfrak{G}(A) = A$. Ali može nastupiti i slučaj da sistemi $A, B, C, \ldots$, uopšte nemaju zajedničkog elementa, dakle ni zajednički deo, zajediništvo; oni se tada nazivaju sistemi b e z zajedničkog dela i oznaka $\mathfrak{G}(A, B, C, \ldots)$ je besmislena (uporedi zaključak od 2) Međutim, mi ćemo skoro uvek prepustiti čitaocu da kod stavova o zajedništvima u mislima pridoda uslov njihove egzistencije i da pronađe pravo tumačenje tih stavova i u slučaju ne-egzistencije.

18. S t a v. Svaki zajednički deo od $A, B, C, \ldots$, je deo od $\mathfrak{G}(A, B, C \ldots)$.

Dokaz sledi iz 17.

19. S t a v. Svaki deo od $\mathfrak{G}(A, B, C, \ldots)$ je zajednički deo od $A, B, C, \ldots$.

Dokaz sledi iz 17, 7.

20. S t a v. Ako je svaki od sistema $A, B, C, \ldots$, nadskup (3) nekog od sistema $P, Q, \ldots$, tada je

$$\mathfrak{G}(P, Q, \ldots) \prec \mathfrak{G}(A, B, C, \ldots).$$

D o k a z. Svaki element od $\mathfrak{G}(P, Q, \ldots)$ je zajednički element od $P, Q, \ldots$, dakle, takođe je zajednički element od $A, B, C, \ldots$, što je trebalo dokazati.

§ 2

Preslikavanje sistema

21. D e f i n i c i j a.*) Pod prislikavanjem φ sistema S podrazumeva se neki zakon po kome svakom određenom elementu s p r i p a d a jedna određena stvar, koja se zove s l i k a od s i označuje sa $\varphi(s)$; kažemo takođe da $\varphi(s)$ o d g o v o r a elementu s, da $\varphi(s)$ n a s t a j e ili da se p r o i z v o d i iz s, da s preslikavanjem φ prelazi u $\varphi(s)$. Ako je sada T neki deo od S, to je u preslikavanju φ sistema S u isti mah sadržano određeno preskavanje dela T, koje, jednostavnosti radi, svakako može biti označeno istom oznakom φ, i koje se sastoji u tome što svakom elementu t sistema T odgovara ista slika $\varphi(t)$ koju t poseduje kao element od S; sistem, koji se sastoji od svih slika $\varphi(t)$, biće u isti mah nazvan s l i k o m sistema T i biće označen sa $\varphi(T)$, čime je objašnjeno i značenje oznake $\varphi(S)$. Kao primer preslikavanja jednog sistema treba smatrati već i snabdevanje njegovih elemenata određenim znacima ili imenima. Najjednostavnije preslikavanje nekog sistema je ono kod kojeg svaki od njegovih elementa prelazi u sebe sâma; ono će se zvati i d e n t i č n o preslikavanje sistema. Udobnosti radi, mi ćemo u sledećim stavovima 22, 23, 24, koji se odnose na proizvoljno preslikavanje φ proizvoljnog sistema S, sa s' i T' označavati slike elemenata s odnosno delova T; sem toga, saglasićemo se da mala i velika slova latinice bez crte, uvek treba da znače elemente i delove sistema S.

22. S t a v.**) Ako je $A \prec B$ tada je $A' \prec B'$.

*) Uporedi D i r i c h l e t-ova „Predavanja iz teorije brojeva", treće izdanje, 1879, §163.

**) Uporedi stav 27.

D o k a z. Jer, svaki element od A' je slika nekog elementa sadržanog u A, dakle i u B, pa je zato element od B', što je trebalo dokazati.

23. S t a v. Slika od $\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$ je $\mathfrak{M}(A', B', C', \ldots)$.

D o k a z. Označi li se sistem $\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$, koji je prema 10. takođe deo od S, sa M, to je svaki element njegove slike M' slika m' njegovog elementa m od M; kako je sada, prema 8, m takođe element nekog od sistema $A, B, C, \ldots$, pa je zato m' element nekog od sistema $A', B', C', \ldots$, dakle, prema 8, takođe element od $\mathfrak{M}(A', B', C', \ldots)$, to je, prema 3,

$$M' \prec \mathfrak{M}(A', B', C', \ldots).$$

S druge strane, kako su $A, B, C, \ldots$, prema 9, delovi od M, dakle $A', B', C', \ldots$, prema 22, delovi od M', to je prema 10. takođe

$$\mathfrak{M}(A', B', C', \ldots) \prec M',$$

a odatle u vezi sa gornjim prema 5. sledi stav koji treba dokazati:

$$M' = \mathfrak{M}(A', B', C', \ldots).$$

24. S t a v.*) Slika svakog zajedničkog dela od $A, B, C, \ldots$, dakle i zajedništva $\mathfrak{G}(A, B, C, \ldots)$, jeste deo od $\mathfrak{G}(A', B', C', \ldots)$.

D o k a z. Naime, isto je prema 22. zajednički deo od $A', B', C', \ldots$, odakle sledi stav prema 18.

25. D e f i n i c i j a i s t a v. Ako je φ preslikavanje sistema S, a ψ preslikavanje slike $S' = \varphi(S)$, tada odatle uvek proizilazi jedno iz φ i ψ s l o ž e n o**) preslikavanje θ sistema S, koje se sastoji u tome da svakom elementu s iz S odgovara slika

$$\theta(s) = \psi(s') = \psi(\varphi(s)),$$

gde je opet stavljeno $\varphi(s) = s'$. To preslikavanje θ može biti kratko označeno oznakom $\psi \cdot \varphi$ ili $\psi\varphi$, a slika $\theta(s)$ sa $\psi\varphi(s)$, pri čemu treba dobro paziti na položaj oznaka φ, ψ, jer je oznaka $\varphi\psi$ u opštem slučaju besmislena, a ima smisla samo tada kada je $\varphi(S') \prec S$. Ako sada χ označuje preslikavanje sistema $\psi(S') = \psi\varphi(S)$, a η iz ψ i χ složeno preslikavanje $\chi\psi$ sistema S', to je $\chi\theta(s) = \chi\psi(s') = \eta(s') = \eta\psi(s)$, dakle, složena preslikavanja $\chi\theta$ i $\eta\varphi$ poklapaju se za svaki element s iz S, tj. važi $\chi\theta = \eta\varphi$. Prema značenju θ i η, taj stav može biti podesno iskazan sa

$$\chi \cdot \psi\varphi = \chi\psi \cdot \varphi,$$

i to iz φ, ψ, χ složeno preslikavanje, može kratko biti označeno sa $\chi\psi\varphi$.

*) Uporedi stav 29.

**) Ne treba se plašiti brkanja ovog slaganja preslikavanja sa onim koje se odnosi na sisteme elemenata (8).

§ 3

Sličnost preslikavanja. Slični sistemi

26. Definicija. Preslikavanje φ sistema S je slično (ili razgovetno), ako različitim elementima a, b sistema S uvek odgovaraju različite slike $a'=\varphi(a)$, $b'=\varphi(b)$. Kako u tome slučaju obratno iz $s'=t'$ uvek sledi $s=t$, to je svaki element sistema $S'=\varphi(S)$ slika s' jednog jedinog, popuno određenog elementa s sistema S, pa se zato preslikavanju φ može suprotstaviti, recimo sa $\bar{\varphi}$ označeno obrnuto preslikavanje sistema S', koje se sastoji u tome što svakom elementu s' iz S' odgovara slika $\bar{\varphi}(s')=s$, i, očigledno, takođe je slično. Jasno je da je $\bar{\varphi}(S')=S$, da je dalje φ preslikavanje obratno preslikavanju $\bar{\varphi}$ i da je, prema 25, iz φ i $\bar{\varphi}$ složeno preslikavanje $\bar{\varphi}\varphi$ identično preslikavanje sistema S (21). U isto vreme proizilaze sledeće dopune za § 2. zadržavajući tamošnje oznake.

27. Stav.*) Ako je $A' \prec B'$ onda je $A \prec B$.

Dokaz. Jer ako je a neki element od A, to je a' neki element od A', dakle i od B', prema tome $=b'$, gde je b neki element od B; ali kako iz $a'=b'$ uvek sledi $a=b$, to je svaki element a od A takođe element od B, što je trebalo dokazati.

28. Stav. Ako je $A'=B'$ to je $A=B$.

Dokaz sledi iz 27, 4, 5.

29. Stav.**) Ako je $G=\mathfrak{G}(A, B, C, \ldots)$ onda je $G'=\mathfrak{G}(A', B', C', \ldots)$.

Dokaz. Svaki element od $\mathfrak{G}(A', B', C', \ldots)$ je svakako sadržan u S', dakle, slika je g' nekog u S sadržanog elementa g; ali kako je g' zajednički element za A', B', C', ..., to prema 27, g mora biti zajednički element za $A, B, C, \ldots$, dakle, takođe element od G; prema tome, svaki element od $\mathfrak{G}(A', B', C' \ldots)$ je slika nekog elementa g iz G, dakle, element je od G', tj. važi $\mathfrak{G}(A', B', C', \ldots) \prec G'$, a odatle sledi naš stav s obzirom na 24, 5.

30. Stav. Identično preslikavanje nekog sistema uvek je slično preslikavanje.

31. Stav. Ako je φ slično preslikavanje sistema S, a ψ slično preslikavanje sistema $\varphi(S)$, onda je iz φ i ψ složeno preslikavanje sistema S takođe slično i odgovarajuće obrnuto preslikavanje $\overline{\psi\varphi}$ je $=\bar{\varphi}\bar{\psi}$.

*) Uporedi stav 22.

**) Uporedi stav 24.

D o k a z. Jer, različitim elementima a, b iz S odgovaraju različite slike $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$, a ovima ponovo odgovaraju različite slike $\psi(a') = \psi\varphi(a)$, $\psi(b') = \psi\varphi(b)$, dakle, $\psi\varphi$ je slično preslikavanje. Sem toga, preslikavanjem $\overline{\psi}$ prelazi svaki element $\psi\varphi(s) = \psi(s')$ sistema $\psi\varphi(S)$ u $s' = \varphi(s)$, a taj element preslikavanjem $\overline{\varphi}$ prelazi u s, dakle, preslikavanjem $\overline{\varphi}\overline{\psi}$ prelazi element $\psi\varphi(s)$ u s, što je trebalo dokazati.

32. D e f i n i c i j a. Sistemi R, S su s l i č n i, ako postoji takvo slično preslikavanje φ sistema S da je $\varphi(S) = R$, dakle i $\overline{\varphi}(R) = S$. Očigledno je prema 30. svaki sistem sličan samom sebi.

33. S t a v. Ako su R, S slični sistemi, to je svaki sa R slični sistem Q sličan i sa S.

D o k a z. Jer, ako su φ, ψ takva slična preslikavanja sistema S, R da je $\varphi(S) = R$, $\psi(R) = Q$, to je (prema 31) $\psi\varphi$ jedno takvo slično preslikavanje sistema S, da je $\psi\varphi(S) = Q$, što je trebalo dokazati.

34. D e f i n i c i j a. Zato se svi sistemi mogu podeliti u k l a s e, ako se u jednu određenu klasu stave svi oni i samo oni sistemi $Q, R, S, \ldots$, koji su slični nekom određenom sistemu R, p r e d s t a v n i k u klase; prema prethodnom stavu 33, klasa se ne menja ako se za predstavnika izabere neki drugi njoj pripadajući sistem S.

35. S t a v. Ako su R, S slični sistemi to je svaki deo od S takođe sličan nekom delu od R, svaki pravi deo od S takođe je sličan nekom pravom delu od R.

D o k a z. Jer, ako je φ slično preslikavanje sistema S, $\varphi(S) = R$, a $T \prec S$, to je, prema 22, sa T slični sistem $\varphi(T) \prec R$; ako je dalje T pravi deo sistema S, a s neki element od S koji nije sadržan u T, to u R sadržani element $\varphi(s)$, prema 27, ne može biti sadržan u $\varphi(T)$; prema tome je $\varphi(T)$ pravi deo od R, što je trebalo dokazati.

§ 4

P r e s l i k a v a n j e s i s t e m a u s e b e s a m a

36. D e f i n i c i j a. Ako je φ jedno preslikavanje sistema S, slično ili ne, a $\varphi(S)$ deo sistema Z, to φ nazivamo preslikavanjem sistema S u Z, S se sa φ preslikava u Z. Zato φ nazivamo preslikavanjem sistema S u s e b e s a m a, ako je $\varphi(S) \prec S$, i u ovom paragrafu ćemo proučiti opšte zakone takvog preslikavanja. Pri tome ćemo se poslužiti istim oznakama kao i u § 2, pošto ponovo stavljamo $\varphi(s) = s'$, $\varphi(T) = T'$. Prema 22, 7, sada su te slike s', T' ponovo elementi ili delovi od S, kao sve stvari označene slovima latinice.

37. Definicija. K se zove lanac, ako je $K' \prec K$. Izričito napominjemo da to ime ne pripada samom delu K sistema S, već se dodeljuje samo u odnosu na određeno preslikavanje φ; u odnosu na neko drugo preslikavanje sistema S u sebe sama, K zacelo može i ne biti lanac.

38. Stav. S je lanac.

39. Stav. Slika K' lanca K je lanac.

Dokaz. Jer, iz $K' \prec K$ prema 22. sledi i $(K')' \prec K'$, što je trebalo dokazati.

40. Stav. Ako je A deo lanca K tada je i $A' \prec K$.

Dokaz. Jer, iz $A \prec K$ sledi (prema 22) $A' \prec K'$, a kako je (prema 37) $K' \prec K$, to sledi (prema 7) $A' \prec K$, što je trebalo dokazati.

41. Stav. Ako je slika A' deo nekog lanca L, tada postoji lanac K koji ispunjava uslove $A \prec K$, $K' \prec L$; naime, $\mathfrak{M}(A, L)$ je neki takav lanac.

Dokaz. Zaista, stavi li se $K = \mathfrak{M}(A, L)$, to je prema 9. prvi uslov $A \prec K$ ispunjen. Kako je dalje, prema 23, $K' = \mathfrak{M}(A', L')$ i po pretpostavci $A' \prec L$, $L' \prec L$, to je, prema 10, ispunjen i drugi uslov $K' \prec L$, a odatle sledi i $K' \prec K$, jer je, (prema 9) $L \prec K$, tj. K je lanac, što je trebalo dokazati.

42. Stav. Sistem M, složen od samih lanaca $A, B, C, \ldots$, jeste lanac.

Dokaz. Kako je (prema 23) $M' = \mathfrak{M}(A', B', C', \ldots)$ i po pretpostavci $A' \prec A$, $B' \prec B$, $C' \prec C, \ldots$, to sledi (prema 12) $M' \prec M$, što je trebalo dokazati.

43. Stav. Zajedništvo G samih lanaca $A, B, C, \ldots$, jeste lanac.

Dokaz. Kako je G prema 17. zajednički deo od $A, B, C, \ldots$, dakle, G' je prema 22. zajednički deo od $A', B', C', \ldots$, a po pretpostavci $A' \prec A$, $B' \prec B$, $C' \prec C, \ldots$, to je (prema 7) G' takođe deo od $A, B, C, \ldots$, i zato, prema 18, takođe deo od G, što je trebalo dokazati.

44. Defininicija. Ako je A neki deo od S, sa A_0 označićemo zajedništvo svih onih lanaca (na primer S) čiji je deo A; to zajedništvo postoji (uporedi 17), jer je sâm A zajednički deo svih tih lanaca. Kako je dalje, prema 43, A_0 lanac, to ćemo A_0 zvati lanac sistema A, ili kratko lanac od A. I ova definicija odnosi se na određeno osnovno preslikavanje φ sistema S u sebe sama, i kada jasnoće radi docnije bude bilo potrebno, to ćemo umesto A_0 radije staviti oznaku $\varphi_0(A)$, a takođe ćemo lanac od A, koji odgovara nekom drugom preslikavanju ω, označiti sa $\omega_0(A)$. Za taj vrlo važan pojam važe sada sledeći stavovi.

45. Stav. Važi $A \prec A_0$.

D o k a z. Jer, A je zajednički deo svih onih lanaca, čije je zajedništvo A_0, odakle sledi stav prema 18.

46. S t a v. Važi $(A_0)' \prec A_0$.

D o k a z. Jer, prema 44, A_0 je lanac (37).

47. S t a v. Ako je A deo lanca K, onda je i $A_0 \prec K$.

D o k a z. Jer, A_0 je zajedništvo i zato takođe zajednički deo svih onih lanaca čiji je deo A.

48. N a p o m e n a. Lako je uveriti se da je u 44. definisani pojam lanca A_0 potpuno karakterisan prethodnim stavovima 45, 46, 47.

49. S t a v. Važi $A' \prec (A_0)'$.

Dokaz sledi iz 45, 22.

50. S t a v. Važi $A' \prec A_0$.

Dokaz sledi iz 49, 46, 7.

51. S t a v. Ako je A lanac, onda je $A_0 = A$.

D o k a z. Kako je A deo lanca A, to je prema 47. i $A_0 \prec A$, odakle sledi stav prema 45, 5.

52. S t a v. Ako je $B \prec A$ onda je $B \prec A_0$.

Dokaz sledi iz 45, 7.

53. S t a v. Ako je $B \prec A_0$ onda je $B_0 \prec A_0$, i obratno.

D o k a z. Kako je A_0 lanac, to prema 47. iz $B \prec A_0$ sledi i $B_0 \prec A_0$; obratno, ako je $B_0 \prec A_0$, tada, prema 7. sledi i $B \prec A_0$, jer je (prema 45) $B \prec B_0$.

54. S t a v. Ako je $B \prec A$ tada je $B_0 \prec A_0$.

Dokaz sledi iz 52, 53.

55. S t a v. Ako je $B \prec A_0$ onda je i $B' \prec A_0$.

D o k a z. Jer, prema 53. je $B_0 \prec A_0$, a kako je (prema 50) $B' \prec B_0$, to iz 7. sledi stav koji treba da se dokaže. Kao što je lako videti, isto se dobija iz 22, 46, 7 ili takođe iz 40.

56. S t a v. Ako je $B \prec A_0$ tada je $(B_0)' \prec (A_0)'$.

Dokaz sledi iz 53, 22.

57. Stav i definicija. Važi $(A_0)' = (A')_0$, tj. slika lanca od A je istovremeno lanac slike sistema A. Zato se taj sistem može kratko označiti sa A_0' i po volji zvati lanac-slika ili slika-lanac od A. Prema u 44. datom jasnijem označavanju, stav bi mogao biti iskazan i sa $\varphi(\varphi_0(A)) = \varphi_0(\varphi(A))$.

Dokaz. Ako ukratko stavimo $(A')_0 = L$, to je L lanac (44) i prema 45. je $A' \prec L$, dakle, prema 41. postoji lanac K, koji ispunjava uslove $A \prec K$, $K' \prec L$; odatle prema 47. sledi takođe $A_0 \prec K$, dakle $(A_0)' \prec K'$, pa zato prema 7. takođe $(A_0)' \prec L$, tj.

$$(A_0)' \prec (A')_0.$$

Kako je dalje prema 49. $A' \prec (A_0)'$, a $(A_0)'$ je prema 44, 39. lanac, to je prema 47. takođe

$$(A')_0 \prec (A_0)',$$

odakle, kad se objedini sa gornjim rezultatom, sledi (5) stav koji treba dokazati

58. Stav. Važi $A_0 = \mathfrak{M}(A, A_0')$, tj. lanac od A je složen iz A i slike-lanca od A.

Dokaz. Stavimo li opet ukratko

$$L = A_0' = (A_0)' = (A')_0 \quad \text{i} \quad K = \mathfrak{M}(A, L),$$

to je (prema 45) $A' \prec L$ i kako je L lanac, to isto važi prema 41. za K; kako je (9) dalje $A \prec K$, to prema 46 takođe sledi

$$A_0 \prec K.$$

S druge strane, kako je (prema 45) $A \prec A_0$, a prema 46. i $L \prec A_0$, to je prema 10. takođe

$$K \prec A_0,$$

odakle, objedinjeno sa gornjim rezultatom, sledi (5) stav $A_0 = K$ koji je trebalo dokazati.

59. Stav potpune indukcije. Za dokaz da je lanac A_0 deo nekog sistema Σ — pa bio ovaj deo od S ili ne — dovoljno je pokazati:

ρ. da je $A \prec \Sigma$ i

σ. da je slika svakog zajedničkog elementa od A_0 i Σ takođe element od Σ.

Dokaz. Jer, ako je ρ istinito, onda svakako postoji prema 45. zajedništvo $G = \mathfrak{G}(A_0, \Sigma)$, naime (prema 18) je $A \prec G$; kako je sem toga, prema 17,

$$G \prec A_0,$$

to je G takođe deo našeg sistema S, koji φ preslikava u sebe sama, a u isti mah prema 55. takođe sledi $G' \prec A_0$. Ako je sada σ takođe istinito, tj. ako je $G' \prec \Sigma$, tada, kao zajednički deo sistema A_0, Σ, prema 18, mora G' biti deo njihovog zajedništva G, tj. G je lanac (37) i kako je, kao što je gore već pomenuto, $A \prec G$, to prema 47. sledi takođe

$$A_0 \prec G,$$

a odatle, objedinjeno sa gornjim rezultatom, $G = A_0$, dakle je, prema 17, takođe $A_0 \prec \Sigma$, što je trebalo dokazati.

60. Kao što će se docnije pokazati, prethodni stav čini naučnu osnovu za način dokazivanja poznat pod imenom potpuna indukcija (zaključivanje od n na $n+1$), a može se iskazati takođe na sledeći način: Za dokaz da svi elementi lanca A_0 poseduju izvesno svojstvo $\mathfrak{E}$ (ili da jedan stav $\mathfrak{S}$, u kome je reč o nekoj neodređenoj stvari n, stvarno važi za sve elemente n lanca A_0), dovoljno je pokazati:

ρ. da svi elementi a sistema A poseduju svojstvo $\mathfrak{E}$ (ili da $\mathfrak{S}$ važi za sve a), i

σ. da slici n' svakog, takvog elementa n iz A_0, koji poseduje svojstvo $\mathfrak{E}$, pripada isto svojstvo $\mathfrak{E}$ (ili da, čim važi za neki element n iz A_0, onda stav $\mathfrak{S}$ mora zacelo važiti i za njegovu sliku n').

Zaista, označimo li sa Σ sistem svih stvari koje poseduju svojstvo $\mathfrak{E}$ (ili za koje važi stav $\mathfrak{S}$), neposredno postaje jasno potpuno slaganje sadašnjeg načina izražavanja stava sa onim koji je upotrebljen u 59.

61. Stav. Lanac od $\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$ je $\mathfrak{M}(A_0, B_0, C_0, \ldots)$.

Dokaz. Označimo li sa M prvi, a sa K drugi sistem, to je, prema 42. K lanac. Kako je sada svaki od sistema $A, B, C, \ldots$ prema 45. deo nekog od sistema $A_0, B_0, C_0, \ldots$, dakle je (prema 12) $M \prec K$, to prema 47. sledi takođe

$$M_0 \prec K.$$

S druge strane, kako je prema 9. svaki od sistema $A, B, C, \ldots$ deo od M, dakle prema 45, 7, takođe deo lanca M_0, to, prema 47, mora i svaki od sistema $A_0, B_0, C_0, \ldots$, biti deo od M_0, stoga, prema 10,

$$K \prec M_0,$$

odakle, objedinjeno sa gornjim, sledi (5) stav koji treba dokazati, $M_0 = K$.

62. Stav. Lanac od $\mathfrak{G}(A, B, C, \ldots)$ je deo od $\mathfrak{G}(A_0, B_0, C_0, \ldots)$.

Dokaz. Označimo li sa G prvi, sa K drugi sistem, to je K prema 43. lanac. Kako je sada svaki od sistema $A_0, B_0, C_0, \ldots$, prema 45, nadskup nekog od sistema $A, B, C, \ldots$, to jest (prema 20) $G \prec K$, to iz 47. sledi stav koji treba dokazati, $G_0 \prec K$.

4*

63. Stav. Ako je $K' \prec L \prec K$, dakle, K je lanac, onda je i L lanac. Ako je isti pravi deo od K, a U sistem svih onih elemenata iz K, koji nisu sadržani u L, ako je dalje U_0 pravi deo od K, a V sistem svih onih elemenata iz K, koji nisu sadržani U_0, to je $K = \mathfrak{M}(U_0, V)$ i $L = \mathfrak{M}(U_0', V)$. Ako je najzad $L = K'$, to je $V \prec V'$.

Dokaz toga stava, koji nećemo koristiti (kao ni prethodna dva), neka bude prepušten čitaocu.

§ 5

Konačno i beskonačno

64. Definicija.*) Sistem S je beskonačan, ako je sličan nekom svom pravom delu (32); u protivnom slučaju, S je konačan sistem.

65. Stav. Svaki sistem koji se sastoji od jedinog elementa, jeste konačan.

Dokaz. Jer, takav sistem uopšte nema nijednog dela (2, 6).

66. Stav. Postoje beskonačni sistemi.

Dokaz.**) Moj misaoni svet, tj. ukupnost S stvari koje mogu biti predmet moga mišljenja, jeste beskonačan. Jer, ako s znači neki element iz S, to je i sâma pomisao s', da s može biti predmet moga mišljenja, element iz S. Smatramo li isti slikom $\varphi(s)$ elementa s, onda, zbog toga, time određeno preslikavanje φ sistema S ima svojstvo da je slika S' deo od S; štaviše, S' je pravi deo od S, jer ima u S elemenata (na primer, moje sopstveno Ja), koji su različiti od svake takve misli s' i zato nisu sadržani u S. Naposletku, jasno je da, ako su a, b različiti elementi iz S, onda su i njihove slike a', b' različite, da je dakle preslikavanje φ razgovetno (slično), (26). Prema tome, S je beskonačan, što je trebalo dokazati.

67. Stav. Ako su R, S slični sistemi, onda je sistem R konačan ili beskonačan već prema tome da li je sistem S konačan ili beskonačan.

---

*) Ako nećemo da koristimo pojam sličnih sistema (32), to moramo reći: S je beskonačan, ako postoji (6) neki pravi deo od S, u koji se S može razgovetno (slično) preslikati (26, 36). Definiciju beskonačnog, koja čini jezgro čitavog mog istraživanja, ja sam u tome obliku saopštio G. Cantoru u septembru 1882, a već više godina pre toga, takođe Schwarz-u i Weber-u. Svi ostali meni poznati pokušaji, da se beskonačno razdeli od konačnog, čine mi se tako malo uspelim, da mislim da se smem odreći kritike istih.

**) Slično razmatranje nalazi se u § 13. knjige Paradoksi beskonačnog, od Bolzano-a, (Lajpcig, 1851).

D o k a z. Ako je S beskonačan, dakle sličan nekom svom sopstvenom pravom delu, to prema 33. mora S' biti sličan sa R, jer su R i S slični. pa prema 35. istovremeno mora biti sličan sa nekim pravim delom od R, koji je dakle, prema 33, i sâm sličan sa R; prema tome je R beskonačan, što je trebalo dokazati.

68. S t a v. Svaki sistem S, koji poseduje neki beskonačni deo T, takođe je beskonačan; ili, drugim rečima, svaki deo konačnog sistema je konačan.

D o k a z. Ako je T beskonačan, ako dakle postoji takvo slično preslikavanje ψ sistema T, da je $\psi(T)$ neki pravi deo od T, onda, kad je T deo od S, ovo preslikavanje ψ može biti prošireno na preslikavanje φ sistema S kada se, za neki element s iz S, stavi $\varphi(s)=\psi(s)$ ili $\varphi(s)=s$, već prema tome da li je s element sistema T ili nije. To preslikavanje φ je slično; ako naime a, b znače različite elemente iz S, onda je, kada su oni istovremeno sadržani u T, slika $\varphi(a)=\psi(a)$ različita od slike $\varphi(b)=\psi(b)$, jer je ψ slično preslikavanje; ako je dalje a sadržano u T, a b nije sadržano u T, onda je $\varphi(a)=\psi(a)$ različito od $\varphi(b)=b$, jer je $\psi(a)$ sadržano u T; ako najzad u T nije sadržano ni a ni b, onda je takođe $\varphi(a)=a$ različito od $\varphi(b)=b$, što je trebalo da se pokaže. Kako je dalje $\psi(T)$ deo od T, dakle, prema 7, takođe deo od S, to je jasno $\varphi(S) \prec S$. Kako je najzad $\psi(T)$ pravi deo od T, to ima u T, dakle i u S, neki element t, koji nije sadržan u $\psi(T)=\varphi(T)$; kako je sada slika $\varphi(s)=s$, za svaki element s koji nije sadržan u T, dakle je i od t različita, to t uopšte ne može biti sadržano u $\varphi(S)$; zato je $\varphi(S)$ pravi deo od S, pa je S beskonačan, što je trebalo dokazati.

69. S t a v. Svaki sistem, koji je sličan nekom delu konačnog sistema, i sâm je konačan.

Dokaz sledi iz 67, 68.

70. S t a v. Ako je a neki element iz S i ako je skup T svih od a različitih elemenata iz S konačan, onda je i S konačan.

D o k a z. Kada je φ neko slično preslikavanje sistema S u sebe sama, imamo da pokažemo (prema 64) da slika $\varphi(S)$ ili S' nikad nije pravi deo od S nego je uvek $=S$. Očigledno je $S=\mathfrak{M}(a, T)$ i, prema 23, je $S'=\mathfrak{M}(a', T')$, kad slike opet označimo crtama, zbog sličnosti preslikavanja φ, i a' nije sadržano (26) u T'. Kako je dalje, po pretpostavci, $S' \prec S$, to mora a' i isto tako svaki element iz T', biti ili $=a$ ili neki element iz T. Ako zato a nije u T' — slučaj koji želimo najpre obraditi — onda mora biti $T' \prec T$ i zato $T'=T$, jer je φ slično preslikavanje, a T konačan sistem; a kako a', kao što je primećeno, nije u T', tj. nije sadržano u T, to mora biti $a'=a$, pa je zato u ovom slučaju zaista $S'=S$, kao što je tvrđeno. U protivnom slučaju, kada je a sadržano u T, pa je zato slika b' nekog u T sadržanog elementa b, sa U ćemo označiti skup svih onih elemenata iz T koji su različiti od

b; tada je $T = \mathfrak{M}(b, U)$ i (prema 15) $S = \mathfrak{M}(a, b, U)$, dakle $S' = \mathfrak{M}(a', a, U')$. Definisaćemo sada jedno novo preslikavanje ψ sistema T kad stavimo $\psi(b) = a'$ i, uopšte, $\psi(u) = u'$, čime (prema 23) nastaje $\psi(T) = \mathfrak{M}(a', U')$. Očigledno je ψ slično preslikavanje, jer je φ bilo takvo i jer a nije sadržano u U, pa dakle ni a' u U'. Kako su dalje a i svaki element u različiti od b, to moraju (zbog sličnosti preslikavanja φ) i a' i svaki element u' biti različiti od a i zato sadržani u T; prema tome je $\psi(T) \prec T$, a kako je T konačan, to mora biti $\psi(T) = T$, dakle $\mathfrak{M}(a', U') = T$. No odatle sledi (prema 15)

$$\mathfrak{M}(a', a, U') = \mathfrak{M}(a, T),$$

tj. na osnovi gornjeg, $S' = S$. Prema tome, i u ovome slučaju je izveden traženi dokaz.

§ 6

Prosto beskonačni sistemi. Niz prirodnih brojeva

71. Definicija. Sistem N je prosto beskonačan, ako postoji takvo slično preslikavanje φ sistema N u sebe sâma, da se N javlja lancem (44) nekog elementa koji nije sadržan u $\varphi(N)$. Ovaj element, koji ćemo u sledećem označiti simbolom 1, zvaćemo osnovni element sistema N i kazaćemo u isti mah da je beskonačni sistem N tim preslikavanjem ψ uređen. Zadržimo li ranija pogodna označavanja za slike i lance (§ 4), onda se, dakle, suština jednog prosto beskonačnog sistema N sastoji u postojanju nekog preslikavanja φ sistema N i nekog elementa 1, koji ispunjavaju sledeće uslove α, β, γ, δ:

α. $N' \prec N$.

β. $N = 1_0$.

γ. Element 1 nije sadržan u N'.

δ. Preslikavanje φ je slično.

Iz α, γ, δ očigledno sledi da je svaki prosto beskonačni sistem N zaista beskonačan sistem (64), jer je sličan jednom svom pravom delu N'.

72. Stav. U svakom beskonačnom sistemu S je kao deo sadržan neki prosto beskonačan sistem N.

Dokaz. Prema 64. postoji takvo slično preslikavanje φ sistema S da $\varphi(S)$ ili S' postaje pravi deo od S; postoji dakle neki element 1 u S koji nije sadržan u S'. Lanac 1_0, koji odgovara tom preslikavanju φ sistema S u sebe sâma (44), jeste prosto beskonačan, preslikavanjem φ uređen sistem; jer, očigledno su ispunjeni svi uslovi α, β, γ, δ u 71.

73. Definicija. Ako se pri posmatraju nekog prosto beskonačnog, preslikavanjem φ uređenog sistema N, potpuno zanemari posebna osobina elemenata, a jedino zadrži mogućnost razlikovanja i u obzir uzmu samo odnosi u koje ih međusobom stavlja uređujuće preslikavanje φ, onda se ti elementi zovu prirodni brojevi ili redni brojevi, ili takođe prosto brojevi, i osnovni element 1 zove se osnovni broj brojnog niza N. S obzirom na to oslobađanje elemenata od bilo kog drugog sadržaja (apstrakciju), s pravom možemo brojeve zvati slobodnom tvorevinom čovekovog uma. Odnosi ili zakoni, koji se potpuno izvode iz uslova α, β, γ, δ u 71. i stoga su uvek isti u svim uređenim prosto beskonačnim sistemima, pa ma kako glasila imena prigodno data pojedinim elementima, (uporedi 134), čine prvi predmet nauke o brojevima ili aritmetike. Od opštih pojmova i stavova u § 4. o preslikavanju jednog sistema u sebe samog, neposredno ćemo uzeti najpre sledeće osnovne stavove, pri čemu ćemo pod $a, b, \ldots, m, n, \ldots$, stalno podrazumevati elemente iz N, dakle brojeve, pod $A, B, C, \ldots$, delove od N, pod $a', b', \ldots, m', n', \ldots, A', B', C', \ldots$, odgovarajuće slike koje stvara uređujuće preslikavanje φ a koje su uvek ponovo elementi ili delovi od N; slika n' nekog broja n zove se takođe i broj koji neposredno dolazi posle n.

74. Stav. Svaki broj n je prema 45. sadržan u njegovom lancu n_0 i, prema 53, uslov $n \prec m_0$ ekvivalentan je sa $n_0 \prec m_0$.

75. Stav. Zbog 57. je $n_0' = (n_0)' = (n')_0$.

76. Stav. Zbog 46. je $n_0' \prec n_0$.

77. Stav. Zbog 58. je $n_0 = \mathfrak{M}(n, n_0')$.

78. Stav. Važi $N = \mathfrak{M}(1, N')$, dakle, svaki od osnovnog broja 1 različiti broj je element iz N', tj. slika je nekog broja.

Dokaz sledi iz 77 i 71.

79. Stav. N je jedini brojni lanac u kome nije sadržan osnovni broj 1.

Dokaz Jer, ako je 1 element nekog lanca K, prema 47. tada je njegov lanac $N \prec K$, dakle, $N = K$, jer je, razume se, $K \prec N$.

80. Stav potpune indukcije (zaključak od n na n'). Za dokaz da neki stav važi za sve brojeve nekog lanca m_0, dovoljno je pokazati:

ρ. da on važi za $n = m$, i

σ. ako stav važi za neki broj n lanca m_0, onda on vazda važi i za sledeći broj n'.

To neposredno sledi iz opštijeg stava 59 ili 60. Najčešće će nastupiti slučaj kada je $m = 1$, dakle, kada je m_0 čitav brojni niz N.

§ 7

Veći i manji brojevi

81. Stav. Svaki broj n je različit od neposredno za njim sledećeg broja n'.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer:

ρ. Stav je tačan za broj $n=1$, jer ovaj nije sadržan u N' (71), dok je sledeći broj $1'$, kao slika u N sadržanog broja 1, element od N'.

σ. Ako je stav istinit za neki broj n, i ako se stavi sledeći broj $n'=p$, to je n različito od p, odakle, prema 26. sledi da je n', dakle, p, različito od p', zbog sličnosti (71) uređujućeg preslikavanja φ. Prema tome, stav važi i za broj p koji neposredno sledi iza n, što je trebalo dokazati.

82. Stav. U slici-lancu n_0' nekog broja n, sadržana je, doduše, (prema 74, 75), njegova slika n', ali ne i sâm broj n.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer:

ρ. Stav je istinit za $n=1$, jer je $1_0'=N'$, i jer, prema 71, osnovni broj 1 nije sadržan u N'.

σ. Ako je stav istinit za neki broj n, i stavimo li ponovo $n'=p$, onda n nije sadržano u p_0, dakle, različito je od svakog u p_0 sadržanog broja q, odakle, zbog sličnosti preslikavanja φ, sledi da je n', dakle p, različito od svakog u p_0' sadržanog broja q', pa zato nije sadržano u p_0'. Prema tome, stav važi i za broj p koji dolazi neposredno iza n, što je trebalo dokazati.

83. Stav. Slika-lanac n_0' je pravi deo lanca n_0.

Dokaz sledi iz 76, 74, 82.

84. Stav. Iz $m_0=n_0$ sledi $m=n$.

Dokaz. Kako je (prema 74) m sadržano u m_0 i (77)

$$m_0=n_0=\mathfrak{M}(n, n_0'),$$

to, kada bi stav bio pogrešan, kada bi dakle m bilo različito od n, m bi moralo biti sadržano u n_0', pa prema 74. takođe $m_0 \prec n_0'$, tj. $n_0 \prec n_0'$; kako se to protivi stavu 83, to je naš stav dokazan.

85. Stav. Ako broj n nije sadržan u brojnom lancu K, onda je $K \prec n_0'$.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer:

ρ. Stav je prema 78. istinit za $n=1$.

σ. Ako je stav istinit za neki broj n, onda važi on i za neposredno sledeći broj $p=n'$; jer, ako p nije sadržano u brojnom lancu K, to prema 40. ni n ne može biti sadržano u K, pa je zato, prema našoj pretpostavci, $K \prec n_0'$; kako je sada (prema 77) $n_0'=p_0=\mathfrak{M}(p, p_0')$, dakle $K \prec \mathfrak{M}(p, p_0')$, a p nije sadržano u K, to mora biti $K \prec p_0'$, što je trebalo dokazati.

86. S t a v. Ako u brojnom lancu K nije sadržan broj n već njegova slika n', onda je $K=n_0'$.

D o k a z. Kako n nije sadržano u K, to je (prema 85) $K \prec n_0'$, a kako je $n' \prec K$, to je, prema 47, takođe $n_0' \prec K$, odakle $K=n_0'$, što je trebalo dokazati.

87. S t a v. U svakom brojnom lancu K postoji jedan i (prema 79) samo jedan broj k čiji je lanac $k_0=K$.

D o k a z. Ako je u K sadržan osnovni broj 1, onda je (prema 79) $K=N=1_0$. U protivnom slučaju, neka je Z sistem svih brojeva koji nisu sadržani u K; kako je osnovni broj 1 sadržan u Z, a Z je samo pravi deo brojnog niza N, to (prema 79) Z ne može biti lanac, tj. Z' ne može biti deo od Z; zato u Z postoji neki broj n, čija slika n' nije sadržana u Z, dakle nasigurno je sadržana u K; kako je dalje n sadržano u Z, dakle ne u K, to je (prema 86) $K=n_0'$, dakle $k=n'$, što je trebalo dokazati.

88. S t a v. Ako su m, n različiti brojevi, tada je (prema 83, 84) jedan i samo jedan od lanaca $m_0\, n_0$ pravi deo drugog, naime, ili je $n_0 \prec m_0'$ ili je $m_0 \prec n_0'$.

D o k a z. Ako je n sadržano u m_0, dakle je prema 74. takođe $n_0 \prec m_0$, onda m ne može biti sadržano u lancu n_0 (jer bi inače prema 74. bilo i $m_0 \prec n_0$, dakle $m_0=n_0$, prema 84. i $m=n$), a odatle prema 85. sledi da je $n_0 \prec m_0'$. U protivnom slučaju, kada n nije sadržano u lancu m_0, mora (prema 85) biti $m_0 \prec n_0'$, što je trebalo dokazati.

89. D e f i n i c i j a. Broj m je m a n j i od broja n, a u isti mah je n v e ć i od m, u oznakama,

$$m<n \quad \text{i} \quad n>m,$$

ako je ispunjen uslov

$$n_0 \prec m_0',$$

koji se, prema 74, može izraziti i sa

$$n \prec m_0'.$$

90. S t a v. Ako su m, n bilo koji brojevi onda se dešava jedan i samo jedan od sledećih slučajeva λ, μ, ν:

$$\lambda.\ m=n, \quad n=m, \quad \text{tj.}\quad m_0=n_0,$$

$$\mu.\ m<n, \quad n>m, \quad \text{tj.}\quad n_0 \prec m_0',$$

$$\nu.\ m>n, \quad n<m, \quad \text{tj.}\quad m_0 \prec n_0'.$$

D o k a z. Jer, ako se desi λ (84), onda ne može nastupiti ni μ ni ν, jer, prema 83, nikada nije $n_0 \prec n_0'$. Ali ako se ne desi λ, onda, prema 88, nastupa jedan i samo jedan od slučajeva μ, ν, što je trebalo dokazati.

91. S t a v. Važi $n<n'$.

D o k a z. Jer, uslov za slučaj ν u 90. biva ispunjen za $m=n'$.

92. D e f i n i c i j a. Za opis da je m ili $=n$ ili $<n$, dakle da nije $>n$ (90), upotrebljava se označavanje

$$m \leqq n \quad \text{ili takođe} \quad n \geqq m,$$

i kaže se da je m n a j v i š e j e d n a k o n, i da je n b a r jednako m.

93. S t a v. Svaki od uslova

$$m \leqq n, \quad m<n', \quad n_0 \prec m_0,$$

ekvivalentan je svakom od preostala dva.

D o k a z. Jer ako je $m \leqq n$, onda iz λ, μ u 90. uvek sledi $n_0 \prec m_0$, jer (prema 76) je $m_0' \prec m_0$. Obratno, ako je $n_0 \prec m_0$, dakle, prema 74, takođe $n \prec m_0$, onda iz $m_0 = \mathfrak{M}(m, m_0')$ sledi da je ili $n=m$ ili $n \prec m_0'$, tj. $n>m$. Prema tome je uslov $m \leqq n$ ekvivalentan sa $n_0 \prec m_0$. Sem toga, iz 22, 27, 75, sledi opet da je taj uslov $n_0 \prec m_0$ ekvivalentan sa $n_0' \prec m_0'$, tj. (prema μ u 90) sa $m<n'$, što je trebalo dokazati.

94. S t a v. Svaki od uslova

$$m' \leqq n, \quad m'<n', \quad m<n,$$

ekvivalentan je sa svakim od preostala dva.

Dokaz sledi neposredno iz 93, ako se tamo umesto m' stavi m, i iz μ u 90.

95. S t a v. Ako je $1<m$ i $m \leqq n$, ili, ako je $1 \leqq m$ i $m<n$, onda je $1<n$. Ali ako je $1 \leqq m$ i $m \leqq n$, onda je $1 \leqq n$.

D o k a z. Jer, iz (prema 89, 93) odgovarajućih uslova $m_0 \prec 1_0'$ i $n_0 \prec m_0$ sledi (prema 7) $n_0 \prec 1_0'$, a isto sledi takođe iz uslova $m_0 \prec 1_0$ i $n_0 \prec m_0'$, jer je zbog prvog takođe $m_0' \prec 1_0'$. Konačno iz $m_0 \prec 1_0$ i $n_0 \prec m_0$ sledi i $n_0 \prec 1_0$, što je trebalo dokazati.

96. S t a v. U svakom delu T od N postoji jedan i samo jedan n a j m a n j i broj k, tj. neki broj k koji je manji od svakog ostalog u T sadržanog broja. Sastoji li se T iz jednog jedinog broja, onda je on i najmanji broj u T.

D o k a z. Kako je T_0 lanac (44), to postoji, prema 87, neki broj k čiji je lanac $k_0 = T_0$. Kako odatle (prema 45, 77) sledi $T \prec \mathfrak{M}(k, k_0')$, to mora najpre k biti sadržano u T (jer, inače bi bilo $T \prec k_0'$, dakle, prema 47, takođe $T_0 \prec k_0'$, tj. $k_0 \prec k_0'$, što je prema 83 nemogućno), i, sem toga, svaki od k različiti broj sistema T mora biti sadržan u k_0', tj. veći od k (89), odakle u isti mah prema 90. sledi da u T postoji samo jedan jedini najmanji broj, što je trebalo dokazati.

97. S t a v. Najmanji broj lanca n_0 je n, a osnovni broj 1 je najmanji među svim brojevima.

D o k a z. Jer, prema 74, 93, uslov $m \prec n_0$ ekvivalentan je sa $m \geqq n$. Ili, naš stav neposredno sledi takođe iz dokaza prethodnog stava, jer, ako se tamo uzme $T = n_0$, očigledno postaje $k = n$ (51).

98. D e f i n i c i j a. Ako je n neki broj, sa Z_n označićemo sistem svih brojeva koji n i s u veći od n, dakle n i s u sadržani u n_0'. Uslov

$$m \prec Z_n$$

je prema 92, 93 očigledno ekvivalentan sa svakim od sledećih uslova:

$$m \leqq n, \quad m < n', \quad n_0 \prec m_0.$$

99. S t a v. Važi $1 \prec Z_n$ i $n \prec Z_n$.

Dokaz sledi iz 98 ili takođe iz 71 i 82.

100. S t a v. Svaki od, prema 98, ekvivalentnih uslova

$$m \prec Z_n, \quad m \leqq n, \quad m < n', \quad n_0 \prec m_0,$$

takođe je ekvivalentan sa uslovom

$$Z_m \prec Z_n.$$

D o k a z. Jer, ako je $m \prec Z_n$, dakle $m \leqq n$, i ako je $l \prec Z_m$, dakle $l \leqq m$, to je prema 95 i $l \leqq n$, tj. $l \prec Z_n$; ako je dakle $m \prec Z_n$, tada je svaki element l sistema Z_m takođe element sistema Z_n, tj. $Z_m \prec Z_n$. Obratno, ako je $Z_m \prec Z_n$, to prema 7 takođe mora biti $m \prec Z_n$, jer je (prema 99) $m \prec Z_m$, što je trebalo dokazati.

101. S t a v. Uslovi za slučajeve λ, μ, ν u 90 daju se prikazati i na sledeći način:

$$\lambda.\ m=n,\quad n=m,\quad Z_m=Z_n,$$

$$\mu.\ m<n,\quad n>m,\quad Z_{m'}\prec Z_n,$$

$$\nu.\ m>n,\quad n<m,\quad Z_{n'}\prec Z_m.$$

Dokaz sledi neposredno iz 90, ako se uzme u obzir da su prema 100 uslovi $n_0 \prec m_0$ i $Z_m \prec Z_n$ ekvivalentni.

102. S t a v. Važi $Z_1=1$.

D o k a z. Jer, prema 99 osnovni broj 1 je sadržan u Z_1, i svaki od 1 različiti broj je prema 78 sadržan u $1_0'$, dakle, prema 98 nije sadržan u Z_1, što je trebalo dokazati.

103. S t a v. Usled 98 je $N=\mathfrak{M}(Z_n, n_0')$.

104. S t a v. Važi $n=\mathfrak{G}(Z_n, n_0)$, tj. n je jedini zajednički element sistema Z_n i n_0.

D o k a z. Iz 99 i 74 sledi da je n sadržano u Z_n i n_0; ali, svaki od n različiti element lanca n_0 je prema 77 sadržan u n_0', dakle, prema 98, nije sadržan u Z_n, što je trebalo dokazati.

105. S t a v. Usled 91, 98 broj n' nije sadržan u Z_n.

106. S t a v. Ako je $m<n$, onda je Z_m pravi deo od Z_n i obratno.

D o k a z. Ako je $m<n$, to je (prema 100) $Z_m \prec Z_n$, a kako prema 99 u Z_n sadržani broj n na osnovi 98 ne može biti sadržan u Z_m, jer je $n>m$, to je Z_m pravi deo od Z_n. Obratno, ako je Z_m pravi deo od Z_n, to je (prema 100) $m \leqq n$, a kako m ne može biti $=n$ jer bi inače bilo i $Z_m=Z_n$, to mora biti $m<n$, što je trebalo dokazati,

107. S t a v. Z_n je pravi deo od $Z_{n'}$.

Dokaz sledi iz 106, jer je (prema 91) $n<n'$.

108. S t a v. $Z_{n'}=\mathfrak{M}(Z_n, n')$.

D o k a z. Jer, svaki u Z_n' sadržani broj je (prema 98) $\leqq n'$, dakle ili je $=n'$ ili je $<n'$ i zato prema 98 element od Z_n; prema tome je zacelo $Z_{n'} \prec \mathfrak{M}(Z_n, n')$. Kako je obratno (prema 107) $Z_n \prec Z_{n'}$ i (prema 99) $n' \prec Z_{n'}$ to (prema 10) sledi

$$\mathfrak{M}(Z_n, n') \prec Z_{n'},$$

odakle prema 5 proizilazi naš stav.

109. S t a v. Slika Z_n' sistema Z_n je pravi deo sistema $Z_{n'}$.

D o k a z. Jer, svaki u Z_n' sadržani broj je slika m' nekog u Z_n sadržanog broja m, a kako je $m \leqq n$, dakle (prema 94) $m' \leqq n'$, to (prema 98) sledi $Z_n' \prec Z_{n'}$. Kako dalje prema 99 broj 1 jeste sadržan u $Z_{n'}$, ali prema 71 ne može biti sadržan u slici Z_n', to je Z_n' pravi deo od $Z_{n'}$, što je trebalo dokazati.

110. S t a v. $Z_{n'} = \mathfrak{M}(1, Z_n')$.

D o k a z. Svaki od 1 različiti broj sistema $Z_{n'}$ je prema 78 slika m' nekog broja m, a ovaj mora biti $\leqq n$, dakle prema 98 mora biti sadržan u Z_n (jer inače bi bilo $m > n$, dakle prema 94 i $m' > n'$, pa zato, prema 98, m' ne bi bilo sadržano u $Z_{n'}$); no iz $m \prec Z_n$ sledi $m' \prec Z_n'$ i zato je sigurno

$$Z_{n'} \prec \mathfrak{M}(1, Z_n').$$

Kako je obratno (prema 99) $1 \prec Z_{n'}$ i (prema 109) $Z_n' \prec Z_{n'}$, to (prema 10) sledi $\mathfrak{M}(1, Z_n') \prec Z_{n'}$, a odatle sledi naš stav prema 5.

111. D e f i n i c i j a. Ako u nekom sistemu E brojeva postoji neki element g, koji je veći od svakog ostalog broja, onda se g zove n a j v e ć i broj sistema E, a očigledno prema 90 može u E postojati samo jedan takav najveći broj. Ako se neki sistem sastoji samo od jednog jedinog broja, onda je sam taj broj najveći broj sistema.

112. S t a v. Prema 96 je n najveći broj sistema Z_n.

113. S t a v. Ako u E postoji najveći broj g, onda je $E \prec Z_g$.

D o k a z. Jer, svaki u E sadržani broj je $\leqq g$, stoga, prema 98, sadržan u Z_g, što je trebalo dokazati.

114. S t a v. Ako je E deo nekog sistema Z_n, ili, što je isto, ako postoji neki broj n takav, da su svi u E sadržani brojevi $\leqq n$, onda E poseduje najveći broj g.

D o k a z. Sistem svih brojeva p, koji ispunjavaju uslov $E \prec Z_p$ — a prema našoj pretpostavci takvih ima –, jeste lanac (37), jer iz 107, 7 sledi i $E \prec Z_{p'}$, pa je zato (prema 87) $= g_0$, gde g znači najmanji od tih brojeva (96, 97). Zato je takođe $E \prec Z_g$, prema tome (98) je svaki u E sadržani broj $\leqq g$, pa imamo samo da dokažemo još da je i sam broj g sadržan u E. To je neposredno jasno kada je $g = 1$, jer se tada (prema 102) Z_g, pa prema tome i E, sastoji iz jednog jedinog broja 1. Ali ako je g različito od 1 i zato prema 78 slika f' nekog broja f, to je (prema 108) $E \prec \mathfrak{M}(Z_f, g)$; ako sada g ne bi bilo sadržano u E, to bi moralo biti $E \prec Z_f$, i među brojevima p postojao bi neki broj f koji je (prema 91) $< g$, što protivureči gornjem; zato je g sadržano u E, što je trebalo dokazati.

115. D e f i n i c i j a. Ako je $l < m$ i $m < n$, kazaćemo da broj m l e ž i i z m e đ u l i n (takođe između n i l).

116. Stav. Nema nijednog broja koji leži između n i n'.

Dokaz. Jer, čim je $m<n'$, dakle (prema 93) $m \leqq n$, onda prema 90 ne može biti $n<m$, što je trebalo dokazati.

117. Stav. Ako je t neki broj u T, ali ne najmanji (96), onda u T postoji jedan i samo jedan sledeći manji broj s, tj. neki broj s takav, da je $s<t$, i da u T ne postoji broj koji leži između s i t. Isto tako, ako t nije najveći broj u T (111), postoji u T uvek jedan i samo jedan sledeći veći broj u, tj. neki broj u takav, da bude $t<u$, i da u T ne postoji nijedan broj koji leži između t i u. U isti mah u T je t sledeći veći broj od s i sledeći manji broj od u.

Dokaz. Ako t nije najmanji broj u T, neka E bude sistem svih onih brojeva u T koji su $<t$; tada je (prema 98) $E \prec Z_t$ i zato (114) u E postoji najveći broj s, koji očigledno poseduje u stavu navedena svojstva i jedini je takav broj. Ako dalje t nije najveći broj u T, onda prema 96 među svim brojevima od T, koji su $>t$, zacelo postoji najmanji broj u, koji, i to jedini, poseduje svojstva navedena u stavu. Isto tako je jasna i tačnost zaključne napomene stava.

118. Stav. U N je broj n' sledeći veći od n, i n je sledeći manji od n'.

Dokaz sledi iz 116, 117.

§ 8

Konačni i beskonačni delovi brojnog niza

119. Stav. Svaki sistem Z_n u 98 je konačan.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer

ρ. stav je tačan za $n=1$ zbog 65, 102.

σ. Ako je konačno Z_n, onda iz 108 i 70 sledi da je konačno i $Z_{n'}$, što je trebalo dokazati.

120. Stav. Ako su m, n različiti brojevi, onda sistemi Z_m, Z_n nisu slični.

Dokaz. Simetričnosti radi, prema 90 smemo pretpostaviti da je $m<n$; tada je, prema 106, Z_m pravi deo od Z_n, a kako je, prema 119, Z_n konačno, to (prema 64) Z_m i Z_n ne mogu biti slični, što je trebalo dokazati.

121. Stav. Svaki deo E brojnog niza N, koji poseduje (111) najveći broj, jeste konačan.

Dokaz sledi iz 113, 119, 68.

122. S t a v. Svaki deo U brojnog niza N, koji ne poseduje najveći broj, jeste prosto beskonačan (71).

D o k a z. Ako je u neki broj u U, tada prema 117 postoji u U jedan i samo jedan sledeći broj veći od u, koji ćemo označiti sa $\psi(u)$ i smatrati slikom od u. Time potpuno određeno preslikavanje ψ sistema U očigledno ima osobinu

$$\alpha.\ \psi(U) \prec U,$$

tj. U se sa ψ preslikava u sebe sama. Ako su dalje u, v različiti brojevi u U, onda zbog simetrije prema 90 smemo pretpostaviti da je $u < v$; tada, prema 117, iz definicije preslikavanja ψ sledi da je $\psi(u) \leqq v$ i $v < \psi(v)$, dakle (prema 95) $\psi(u) < \psi(v)$; zato su prema 90 slike $\psi(u)$, $\psi(v)$ različite, tj.

$$\delta.\ \text{preslikavanje } \psi \text{ je slično.}$$

Znači li dalje u_1 najmanji broj (96) sistema U, to je svaki u U sadržani broj $u \geqq u_1$, a kako je uopšte $u < \psi(u)$, to je (prema 95) $u_1 < \psi(u)$, dakle, u_1 je prema 90 različito od $\psi(u)$, tj.

$$\gamma.\ \text{element } u_1 \text{ iz } U \text{ nije sadržan u } \psi(U).$$

Prema tome je $\psi(U)$ pravi deo od U pa je zato U prema 64, beskonačni sistem. U skladu sa 44, označimo li sada, kad je V neki deo od U, sa $\psi_0(V)$ preslikavanju ψ odgovarajući lanac od V, pokazaćemo najzad još da je

$$\beta.\ U = \psi_0(u_1).$$

Zaista, kako je svaki takav lanac $\psi_0(V)$ prema njegovoj definiciji (44) neki deo preslikavanjem ψ u sebe sama preslikanog sistema U, samo po sebi je razumljivo da je $\psi_0(u_1) \prec U$; obratno, iz 45 proizilazi najpre da u U sadržani element u_1 jeste zacelo sadržan u $\psi_0(u_1)$; no pretpostavimo li da ima elemenata u U koji nisu sadržani u $\psi_0(u_1)$, onda prema 96 među njima mora biti neki broj w, a kako je isti prema rečenom različit od najmanjeg broja u_1 sistema U, to prema 117 mora u U postojati neki broj v, koji je sledeći manji od w, odakle u isti mah sledi da je $w = \psi(v)$; kako je sada $v < w$, to v zbog definicije w zacelo mora biti sadržano u $\psi_0(u_1)$; ali prema 55 odatle sledi da i $\psi(v)$, dakle w, mora biti sadržano u $\psi_0(u_1)$, a kako to stoji u suprotnosti sa definicijom w, to je naša gornja pretpostavka nedopuštena; prema tome je $U \prec \psi_0(u_1)$ i zato $U = \psi_0(u_1)$, kako je tvrđeno. Iz α, β, γ, δ prema 71 proizilazi da je U preslikavanjem ψ uređeni prost beskonačan sistem, što je trebalo dokazati.

123. S t a v. Na osnovi 121, 122, neki deo T brojnog niza N je konačan ili prosto beskonačan, već prema tome da li u T postoji ili ne postoji najveći broj.

§ 9

Definicija preslikavanja brojnog niza indukcijom

124. I ubuduće ćemo sa malim slovima latinice označavati brojeve i uopšte zadržati sve oznake prethodnih § 6 do 8, dok će Ω značiti proizvoljan sistem čiji elementi ne moraju nužno biti sadržani u N.

125. Stav. Ako je dato proizvoljno (slično ili ne) preslikavanje θ nekog sistema Ω u sebe sama i, sem toga, jedan određeni element ω u Ω, onda svakom broju n odgovara jedno i samo jedno preslikavanje ψ_n odgovarajućeg sistema Z_n, definisanog u 98, koje ispunjava uslove*)

I. $\psi_n(Z_n) \prec \Omega$,

II. $\psi_n(1) = \omega$,

III. $\psi_n(t') = \theta\psi_n(t)$, ako je $t < n$, gde oznaka $\theta\psi_n$ ima značenje navedeno u 25.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer:

ρ. Stav je tačan za $n = 1$. Naime, u tome slučaju sastoji se Z_n prema 102 iz jedinog broja 1 i preslikavanje ψ_1 je zato već sa II potpuno definicano i to tako da je I ispunjeno, dok III sasvim otpada.

σ. Ako je stav istinit za neki broj n, pokazaćemo da tada on važi i za sledeći broj $p = n'$, i, štaviše, počećemo sa dokazom da može postojati samo jedno jedino odgovarajuće preslikavanje ψ_p sistema Z_p. Zaista, ispunjava li neko preslikavanje ψ_p uslove

I'. $\psi_p(Z_p) \prec \Omega$,

II'. $\psi_p(1) = \omega$,

III'. $\psi_p(m') = \theta\psi_p(m)$, kad je $m < p$, onda je u njemu, prema 21, sadržano i neko preslikavanje sistema Z_n, jer je $Z_n \prec Z_p$ (107), koje očigledno ispunjava iste uslove I, II, III kao i ψ_n pa se zato sa ψ_n potpuno poklapa; za sve brojeve sadržane u Z_n, dakle (98) za sve brojeve m, koji su $< p$, tj. $\leqq n$, mora zato biti

$$\psi_p(m) = \psi_n(m), \qquad (m)$$

odakle kao specijalan slučaj sledi takođe

$$\psi_p(n) = \psi_n(n); \qquad (n)$$

*) Jasnoće radi sam ovde i u sledećem stavu 126 posebno naveo uslov I, mada je on zapravo već posledica od II i III.

kako je dalje p prema 105, 108 jedini broj sistema Z_p koji nije sadržan u sistemu Z_n, i kako prema III′ i (n) takođe mora biti

$$\psi_p(p) = \theta\psi_n(n), \qquad (p)$$

to proizilazi tačnost našeg gornjeg tvrđenja, da može postojati samo jedno jedino preslikavanje ψ_p sistema Z_p koje ispunjava uslove I′, II′, III′, jer ψ_p je upravo izvedenim uslovima (m) i (p) potpuno svedeno na ψ_n. Imamo samo da pokažemo da, obratno, to sa (m) i (p) potpuno određeno preslikavanje ψ_p sistema Z_p, zaista ispunjava uslove I′, II′, III′. Očigledno, I′ proizilazi iz (m) i (p) s obzirom na I i na to da je $\theta(\Omega) \prec \Omega$. Isto tako, II′ sledi iz (m) i II, jer je broj 1 prema 99 sadržan u Z_n. Tačnost za III′ sledi najpre, za one brojeve m koji su $< n$, iz (m) i III, a za još jedini preostali broj $m = n$, proizilazi ona iz (p) i (n). Time je potpuno ustanovljeno da iz tačnosti našeg stava za broj n uvek sledi i njegova tačnost za sledeći broj p, što je trebalo dokazati.

126. Stav o definiciji indukcijom. Ako su dati neko proizvoljno (slično ili ne) preslikavanje θ nekog sistema Ω u sebe sama i, sem toga, neki određeni element ω u Ω, tada postoji jedno i samo jedno preslikavanje ψ brojnog niza N koje zadovoljava uslove

I. $\psi(N) \prec \Omega$,

II. $\psi(1) = \omega$,

III. $\psi(n') = \theta\psi(n)$, gde n znači svaki broj.

Dokaz. Ako zaista takvo preslikavanje ψ postoji, kako je, prema 21, u njemu sadržano i neko preslikavanje ψ_n sistema Z_n, koje zadovoljava uslove I, II, III, navedene u 125, to mora biti

$$\psi(n) = \psi_n(n),$$

jer uvek postoji jedno i samo jedno takvo preslikavanje ψ_n. Kako je time ψ potpuno određeno, to sledi takođe da može postojati samo jedno jedino takvo preslikavanje (uporedi zaključak od 130). Da, obratno, sa (n) određeno preslikavanje ψ zadovoljava i našim uslovima I, II, III sa lakoćom sledi iz (n) s obzirom na svojstva I, II i (p) dokazana u 125, što je trebalo dokazati.

127. Stav. Pod učinjenim pretpostavkama u prethodnom stavu je

$$\psi(T') = \theta\psi(T),$$

gde T znači proizvoljan deo brojnog niza N.

Dokaz. Jer, ako t znači bilo koji broj sistema T, onda se $\psi(T)$ sastoji od svih elemenata $\psi(t')$, a $\theta\psi(T)$ od svih elemenata $\theta\psi(t)$; odatle sledi naš stav, jer je $\psi(t') = \theta\psi(t)$ (prema III u 126).

128. S t a v. Zadrže li se iste pretpostavke i sa θ_0 označe lanci (44), koji odgovaraju preslikavanju θ sistema Ω u sebe sama, tada je

$$\psi(N) = \theta_0(\omega).$$

D o k a z. Pokazaćemo najpre potpunom indukcijom (80) da je

$$\psi(N) \prec \theta_0(\omega),$$

tj. da je svaka slika $\psi(n)$ takođe element od $\theta_0(\omega)$. Zaista,

ρ. taj stav je istinit za $n=1$, jer je (prema 126, II) $\psi(1)=\omega$ i jer je (prema 45) $\omega \prec \theta_0(\omega)$.

σ. Ako je stav istinit za neki broj n, ako je dakle $\psi(n) \prec \theta_0(\omega)$, to je prema 55 takođe $\theta(\psi(n)) \prec \theta_0(\omega)$, tj. (prema 126, III) $\psi(n') \prec \theta_0(\omega)$, dakle, stav važi i sa sledeći broj m', što je trebalo dokazati.

Da dokažemo dalje da je svaki element ν lanca $\theta_0(\omega)$ sadržan u $\psi(N)$, da je dakle

$$\theta_0(\omega) \prec \psi(N),$$

primenićemo takođe potpunu indukciju, naime stav 59 prenet na Ω i preslikavanje θ. Zaista,

ρ. element ω je $=\psi(1)$, dakle sadržan je u $\psi(N)$.

σ. Ako je ν zajednički element lanca $\theta_0(\omega)$ i sistema $\psi(N)$, to je $\nu = \psi(n)$, gde n znači neki broj, a odatle sledi (prema 126, III) $\theta(\nu) = \theta\psi(n) = \psi(n')$, prema tome je i $\theta(\nu)$ sadržano u $\psi(N)$, što je trebalo dokazati.

Iz dokazanih stavova $\psi(N) \prec \theta_0(\omega)$ i $\theta_0(\omega) \prec \psi(N)$ sledi (prema 5) $\psi(N) = \theta_0(\omega)$, što je trebalo dokazati.

129. S t a v. Pod istim pretpostavkama je uopšte

$$\psi(n_0) = \theta_0(\psi(n)).$$

Dokaz potpunom indukcijom 80. Jer

ρ. zbog 128 stav važi za $n=1$, jer je $1_0 = N$ i $\psi(1)=\omega$.

σ. Ako je stav istinit za neki broj n, to sledi

$$\theta(\psi(n_0)) = \theta(\theta_0(\psi(n)));$$

kako je sada prema 127, 75

$$\theta(\psi(n_0)) = \psi(n_0{}')$$

i prema 57, 126. III

$$\theta(\theta_0(\psi(n))) = \theta_0(\theta\psi(n))) = \theta_0(\psi(n')),$$

to proizilazi

$$\psi(n_0') = \theta_0(\psi(n')),$$

tj. stav važi i za broj n' koji sledi iza n, što je trebalo dokazati.

130. Primedba. Pre no što pređemo na najvažnije primene (§ 10 do 14) stava o definiciji indukcijom, dokazanog u 126, vredno je uložiti truda da se ukaže na jednu okolnost kojom se isti bitno razlikuje od stava o dokazu indukcijom, dokazanom u 80, ili ranije već u 59, 60, ma kako blisko i izgledalo da je srodstvo onog i ovog. Naime, dok stav 59 važi sasvim uopšte za svaki lanac A_0, gde je A neki deo nekog sistema S preslikanog u sebe sama nekim preslikavanjem φ (§ 4), sasvim je drukčije sa stavom 126, koji trvdi samo egzistenciju neprotivurečnog (ili jednoznačnog) preslikavanja ψ prosto beskonačnog sistema 1_0. Kada bi se u poslednjem stavu (zadržavajući pretpostavke o Ω i θ) htelo na mesto brojnog niza 1_0 staviti proizvoljan lanac A_0 iz nekog takvog sistema S, pa definisati neko preslikavanje ψ lanca A_0 u Ω na sličan način kao u 126, II, III, tako da

ρ. svakom elementu a iz A odgovara jedan određeni iz Ω izabrani element $\psi(a)$, i

σ. za svaki u A_0 sadržani element n i njegovu sliku $n' = \varphi(n)$ treba da važi uslov $\psi(n') = \theta\psi(n)$,

to bi vrlo često nastupio slučaj da takvo preslikavanje ψ uopšte ne postoji, jer ti uslovi ρ, σ mogu dospeti međusobno u protivurečnost čak i onda, kada se, saobrazno uslovu σ, i u uslovu ρ sadržana sloboda izbora unapred ograniči. Jedan primer biće dovoljan da se u to uverimo. Preslikamo li preslikavanjem φ u sebe sama sistem S koji se sastoji iz dva različita elementa a i b tako da je $a' = b$, $b' = a$, to je očigledno $a_0 = b_0 = S$; neka je dalje sistem Ω, koji se sastoji iz različitih elemenata α, β i γ, preslikavanjem θ preslikan u sebe sama tako da bude $\theta(\alpha) = \beta$, $\theta(\beta) = \gamma$, $\theta(\gamma) = \alpha$; traži li se sada takvo preslikavanje ψ sistema a_0 u Ω da bude $\psi(a) = \alpha$ i, sem toga, da je uvek $\psi(n') = \theta\psi(n)$ za svaki u a_0 sadržani element n, to se dolazi do protivurečnosti, jer se, za $n = a$ dobija $\psi(b) = \theta(\alpha) = \beta$, a odatle sledi, za $n = b$, da bi moralo biti $\psi(a) = \theta(\beta) = \gamma$, a bilo je $\psi(a) = \alpha$.

Ali, ako postoji neko preslikavanje ψ sistema A_0 u Ω koje bez protivurečnosti zadovoljava gornje uslove ρ, σ, onda iz 60 lako sledi da je ono potpuno određeno; jer, ako preslikavanje χ zadovoljava iste uslove, to je uopšte $\chi(n) = \psi(n)$, jer taj stav zbog ρ važi za sve elemente $n = a$ sadržane u A, i zato, što kad važi za neki element n iz A_0, zbog σ mora važiti i za njegovu sliku n'.

131. Da rasvetlimo dalekosežnost našeg stava 126, dodaćemo ovde jedno razmatranje koje je korisno i za druga istraživanja, na primer, za takozvanu teoriju grupa.

Posmatraćemo jedan sistem Ω čiji elementi dopuštaju izvesno povezivanje tako da iz jednog elementa ν dejstvom nekog elementa ω uvek ponovo nastaje jedan određeni element istog sistema Ω, koji možemo označiti sa $\omega \cdot \nu$ ili $\omega\nu$ i koji uopšte treba razlikovati od $\nu\omega$. To se može shvatiti i tako da svakom elementu ω odgovara jedno određeno, recimo sa $\dot{\omega}$ označeno preslikavanje sistema Ω u sebe sama, ukoliko svaki element ν daje određenu sliku $\dot{\omega}(\nu) = \omega\nu$. Ako na taj sistem Ω i njegov element ω primenimo stav 126, dok u isti mah tamo sa θ označeno preslikavanje zamenimo sa $\dot{\omega}$, to svakom broju n odgovara jedan određeni, u Ω sadržani, element $\psi(n)$, koji se sada može označiti oznakom ω^n i ponekad se n-ti stepen od ω; taj je pojam potpuno definisan uslovima kojima je podvrgnut

$$\text{II. } \omega^1 = \omega,$$

$$\text{III. } \omega^{n'} = \omega\omega^n,$$

i njegova egzistencija je osigurana dokazom stava 126.

Ako je sem toga gornje povezivanje takvo da za proizvoljne elemente μ, ν, ω stalno važi $\omega(\nu\mu) = (\omega\nu)\mu$, tada važe stavovi

$$\omega^{n'} = \omega^n\omega, \quad \omega^m\omega^n = \omega^n\omega^m,$$

čiji se dokazi mogu lako izvesti potpunom indukcijom (80), pa se mogu prepustiti čitaocu.

Prethodno opšte razmatranje mogućno je neposredno primeniti na sledeći primer. Ako je S sistem proizvoljnih elemenata, a Ω odgovarajući sistem čiji su elementi sva preslikavanja sistema S u sebe sama (36), to se prema 25 ova preslikavanja daju slagati, jer je $\nu(S) \prec S$, a iz takvih preslikavanja ν i ω složeno preslikavanje $\nu\omega$ je i samo opet element od Ω. Sada ćemo istaći jednu jednostavnu vezu koja postoji između tog pojma i pojma lanca $\omega_0(A)$, definisanog u 44, gde A opet znači neki deo od S. Ako se kratkoće radi sa A_n označi slika $\omega^n(A)$ proizvedena preslikavanjem ω^n, tada iz III, 25 sledi da je $\omega(A_n) = A_{n'}$. Odatle lako proizilazi potpunom indukcijom (80), da su svi ti sistemi A_n delovi lanca $\omega_0(A)$; jer

ρ. to tvrđenje važi prema 50 za $n = 1$, i

σ. ako ono važi za jedan određeni broj n, tada iz 55 i $A_{n'} = \omega(A_n)$ sledi da ono važi i za sledeći broj n', što je trebalo dokazati. Kako je dalje prema 45 i $A \prec \omega_0(A)$, to iz 10 proizilazi da je i iz A i svih slika A_n sastavljeni sistem K deo od $\omega_0(A)$. Obratno, kako se (prema 23) $\omega(K)$ sastoji iz $\omega(A) = A_1$ i iz svih sistema $\omega(A_n) = A_{n'}$, dakle (prema 78) iz svih sistema A_n, to je (prema 10) $\omega(K) \prec K$, tj. K je lanac (37), a kako je (prema 9) $A \prec K$, biće, prema 47, i $\omega_0(A) \prec K$. Prema tome je $\omega_0(A) = K$, tj. postoji sledeći stav: Ako je ω neko preslikavanje nekog sistema S u sebe sama i ako je A neki deo od S, tada se lanac od A, koji odgovara preslikavanju ω, sastoji od A i od svih slika $\omega^n(A)$, koje nastaju ponavljanjem preslikavanja ω. Čitaocu preporučujeme da se sa ovim shvatanjem lanca vrati ranijim stavovima 57, 58.

§ 10

Klasa prosto beskonačnih sistema

132. Stav. Svi prosto beskonačni sistemi su slični brojnom nizu N i stoga (proma 33) i između sebe.

Dokaz. Neka je prosto beskonačni sistem Ω uređen (71) preslikavanjem θ, i neka je ω osnovni element od Ω koji se pri tome javlja; označimo li ponovo sa θ_0 lance koji odgovaraju preslikavanju θ (44), to prema 71 važi sledeće:

α. $\theta(\Omega) \prec \Omega$.

β. $\Omega = \theta_0(\omega)$.

γ. ω nije sadržano u $\theta(\Omega)$.

σ. Preslikavanje θ je slično.

Ako sada ψ označuje u 126 definisano preslikavanje brojnog niza N, tada iz β i 128 sledi najpre

$$\psi(N) = \Omega,$$

i zato prema 32 imamo samo da pokažemo još da je ψ jedno slično preslikavanje, tj. (26) da različitim brojevima m, n odgovaraju i različite slike $\psi(m)$, $\psi(n)$. Simetrije radi smemo prema 90 pretpostaviti da je $m > n$, dakle $m \prec n_0'$, pa se stav koji treba dokazati svodi na to da $\psi(n)$ nije sadržano u $\psi(n_0')$, dakle (prema 127) nije sadržano u $\theta\psi(n_0)$. To ćemo za svaki broj n dokazati potpunom indukcijom. Zaista,

ρ. prema γ taj stav važi za $n = 1$, jer je $\psi(1) = \omega$ i $\psi(1_0) = \psi(N) = \Omega$.

σ. Ako je stav instinit za neki broj n, onda važi on i za sledeći broj n'; jer, ako bi $\psi(n')$, tj. $\theta\psi(n)$, bilo sadržano u $\theta\psi(n_0')$, to bi (prema δ i 27) moralo i $\psi(n)$ biti sadržano u $\psi(n_0')$, dok naša pretpostavka tvrdi upravo suprotno, što je trebalo dokazati.

133. Stav. Svaki sistem koji je sličan jednom prosto beskonačnom sistemu a zato (prema 132, 33) i brojnom nizu N, jeste prosto beskonačan.

Dokaz. Ako je Ω neki sistem sličan brojnom nizu N, tada prema 32 postoji jedno slično preslikavanje ψ sistema N takvo, da bude

$$\text{I. } \psi(N) = \Omega;$$

tada ćemo staviti

$$\text{II. } \psi(1) = \omega.$$

Označimo li prema 26 sa $\overline{\psi}$ obratno, takođe slično, preslikavanje sistema Ω, tada svakom elementu ν iz Ω odgovara jedan određeni broj $\overline{\psi}(\nu)=n$, naime onaj čija je slika $\psi(n)=\nu$. Kako sada tome broju n odgovara jedan određeni sledeći broj $\varphi(n)=n'$, a ovome ponovo odgovara jedan određeni element $\psi(n')$ u Ω, to svakom elementu ν sistema Ω odgovara takođe jedan određeni element $\psi(n')$ istog sistema, koji ćemo označiti sa $\theta(\nu)$ kao sliku od ν. Time je potpuno određeno jedno preslikavanje θ sistema Ω u sebe sama,*) i, da dokažemo naš stav, pokazaćemo da je sa θ sistem Ω uređen (71) kao prosto beskonačan sistem, tj. da su svi u dokazu stava 132 navedeni uslovi α, β, γ, δ ispunjeni. Najpre je jasno da α neposredno izlazi iz definicije za θ. Kako dalje svakom broju n odgovara jedan element $\nu=\psi(n)$, za koji postaje $\theta(\nu)=\psi(n')$, to je uopšte

$$\text{III.}\quad \psi(n')=\theta\psi(n),$$

a odatle, u vezi sa I, II, α, proizilazi da preslikavanja θ, ψ ispunjavaju sve uslove stava 126; prema tome, β sledi iz 128 i I. Prema 127 i I je dalje

$$\psi(N')=\theta\psi(N)=\theta(\Omega),$$

a odatle u vezi sa II i sličnošću preslikavanja ψ sledi γ, jer bi inače $\psi(1)$ moralo biti sadržano u $\psi(N')$, dakle, (prema 27), broj 1 morao bi biti sadržan u N', što (prema 71. γ) nije slučaj. Ako su naposletku μ, ν elementi iz Ω, a m, n znače odgovarajuće brojeve čije su slike $\psi(m)=\mu$, $\psi(n)=\nu$, to prema gornjem iz pretpostavke $\theta(\mu)=\theta(\nu)$ sledi da je $\psi(m')=\psi(n')$, a odatle, zbog sličnosti preslikavanja ψ, φ da je $m'=n'$, $m=n$, dakle, da je i $\mu=\nu$; prema tome, važi i δ, što je trebalo dokazati.

134. Primedba. Zbog oba prethodna stava 132, 133, svi prosto beskonačni sistemi čine jednu klasu u smislu definicije 34. S obzirom na 71, 73, u isto vreme je jasno da svaki stav o brojevima, tj. o elementima n, preslikavanjem φ uređenog prosto beskonačnog sistema N, i to svaki takav stav, u kome se sasvim apstrahuje posebno svojstvo elemenata n a reč je samo o takvim pojmovima koja proizilaze iz uređenja φ, zadržava opštu važnost i za svaki drugi preslikavanjem θ uređeni prosto beskonačni sistem Ω i njegove elemente γ, i da se dešava prenošenje sa sistema N na sistem Ω (na primer, prevođenje nekog aritmetičkog stava sa jednog jezika na drugi) preslikavanjem ψ posmatranim u 132, 133, koje svaki element n iz N pretvara u jedan element ν iz Ω, naime u $\psi(n)$. Taj element ν može se nazvati n-tim elementom sistema Ω, pa je time n-ti broj brojnog niza N sam broj n. Isto značenje, koje poseduje preslikavanje φ za zakone u području N, ukoliko za svakim elementom n sledi određeni element $\varphi(n)=n'$, pripada preslikavanju θ, posle posredstvom preslikavanja ψ izvršene transformacije, za iste zakone u području Ω, ukoliko za elementom $\nu=\psi(n)$, nastalim transformacijom elementa n, dolazi element $\theta(\nu)=\psi(n')$, koji je

*) Očigledno je θ, prema 25, preslikavanje $\psi\varphi\overline{\psi}$, složeno iz $\overline{\psi}$, φ, ψ.

nastao transformacijom elementa n'; zato se s pravom može reći da se φ posredstvom ψ pretvara u θ, što se u oznakama izražava sa $\theta = \psi\varphi\bar{\psi}$, $\varphi = \bar{\psi}\theta\psi$. Tim primedbama je, kako mislim, u 73 postavljena definicija pojma brojeva potpuno opravdana. Prelazimo sada na dalje primene stava 126.

§ 11

Sabiranje brojeva

135. Definicija. Pojmljivo je da u stavu 126 izloženu definiciju preslikavanja ψ brojnog niza N ili ovim određenu funkciju $\psi(n)$, primenimo na slučaj kada je tamo sa Ω označeni sistem, u kojem treba da bude sadržana slika $\psi(N)$, sam brojni niz N, jer za ovaj sistem Ω već postoji preslikavanje θ sistema Ω u sebe sama, naime ono preslikavanje φ, kojim je N uređen kao prosto beskonačni sistem (71, 73). Tada je dakle $\Omega = N$, $\theta(n) = \varphi(n) = n'$, prema tome

$$\text{I.}\quad \psi(N) \prec N,$$

pa za potpuno određivanje preslikavanja ψ ostaje samo još da se povolji izabere element ω iz Ω, tj. iz N. Uzmemo li $\omega = 1$, to ψ očevidno postaje identično preslikavanje (21) sistema N, jer su uopšte sa $\psi(n) = n$ zadovoljeni uslovi

$$\psi(1) = 1, \quad \psi(n') = (\psi(n))'.$$

Treba li dakle da proizvedemo neko drugo preslikavanje ψ sistema N, to se za ω mora izabrati neki od 1 različiti broj m' koji je prema 78 sadržan u N', gde i samo m znači neki broj; kako preslikavanje ψ očevidno zavisi od izbora tog broja m, to ćemo sa oznakom $m+n$ označiti sliku $\psi(n)$ proizvoljnog broja n i taj broj ćemo zvati suma, koja se od broja m dobiva sabiranjem broja n, ili, kratko, suma brojeva m, n. Ona je zato prema 126 potpuno određena uslovima*)

$$\text{II.}\quad m + 1 = m',$$

$$\text{III.}\quad m + n' = (m + n)'.$$

136. Stav. Važi $m' + n = m + n'$.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer

---

*) Gornja definicija sabiranja, zasnovana neposredno na stavu 126, čini mi se da je najjednostavnija. Ali ako se pozovemo na pojmove razvijene u 131, možemo sumu $m+n$ definisati i sa $\varphi^n(m)$ ili takođe sa $\varphi^m(n)$, gde φ opet ima gornje značenje. Da dokažemo potpuno poklapanje ovih definicja sa gornjim, treba samo da pokažemo da su ispunjeni uslovi $\psi(1) = m'$, $\psi(n') = \varphi\psi(n)$, ako sa $\psi(n)$ označimo $\varphi^n(m)$ ili $\varphi^m(n)$, što uz pomoć potpune indukcije (80) i pozivanjem na 131 lako uspeva.

ρ. stav je istinit za $n=1$, jer je (prema 135. II)

$$m'+1=(m')'=(m+1)'$$

i (prema 135. III) $(m+1)'=m+1'$.

σ. Ako je stav istinit za neki broj n, i ako se stavi sledeći broj $n'=p$, to je $m'+n=m+p$, dakle $(m'+n)'=(m+p)'$ odakle sledi (prema 135. III) $m'+p=m+p'$; prema tome, stav važi i za sledeći broj p, što je trebalo dokazati.

137. Stav. Važi $m'+n=(m+n)'$.

Dokaz sledi iz 136 i 135. III.

138. Stav. Važi $1+n=n'$.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer

ρ. prema 135. II stav je istinit za $n=1$.

σ. Ako stav važi za neki broj n, i ako se stavi $n'=p$, to je $1+n=p$, dakle i $(1+n)'=p'$, pa zato (prema 135. III) $1+p=p'$, tj. stav važi i za sledeći broj p, što je trebalo dokazati.

139. Stav. Važi $1+n=n+1$.

Dokaz sledi iz 138 i 135. II.

140. Stav. Važi $m+n=n+m$.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer

ρ. prema 139 stav je istinit za $n=1$.

σ. Važi li stav za neki broj n, to odatle sledi i $(m+n)'=(n+m)'$, tj. (prema 135. III) $m=n'=n+m'$, dakle (prema 136) $m+n'=n'+m$; zato stav važi i za sledeći broj n', što je trebalo dokazati.

141. Stav. Važi $(l+m)+n=l+(m+n)$.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer

ρ. stav je istinit za $n=1$, jer je (prema 135. II, III. II) $(l+m)+1=$ $=(l+m)'=l+m'=l+(m+1)$.

σ. Važi li stav za neki broj n, to odatle sledi i $((l+m)+n)'=(l+$ $+(m+n))'$, tj. (prema 135. III)

$$(l+m)+n'=l+(m+n)'=l+(m+n'),$$

dakle stav važi i za sledeći broj n', što je trebalo dokazati.

142. Stav. Važi $m+n>m$.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer

ρ. prema 135. II i 91 stav je istinit za $n = 1$.

σ. Važi li stav za neki broj n, to prema 95 važi on i za sledeći broj n', jer je (prema 135. III i 91)

$$m + n' = (m + n)' > m + n,$$

što je trebalo dokazati.

143. Stav. Uslovi $m > a$ i $m + n > a + n$ jesu ekvivalentni.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer,

ρ. stav važi za $n = 1$ zbog 135. II i 94.

σ. Ako stav važi za neki broj n, onda važi on i za sledeći broj n', jer je uslov $m + n > a + n$ prema 94 ekvivalentan sa $(m + n)' > (a + n)'$, pa zato i sa

$$m + n' > a + n'$$

prema 135. III, što je trebalo dokazati.

144. Stav. Ako je $m > a$ i $n > b$ tada je i

$$m + n > a + b.$$

Dokaz. Jer iz naših pretpostavki sledi (prema 143) $m + n > a + n$ i $n + a > b + a$, ili, što je prema 140 isto, $a + n > a + b$, odakle prema 95 proizilazi stav.

145. Stav. Ako je $m + n = a + n$, onda je $m = a$.

Dokaz. Jer, ako m nije $= a$, dakle prema 90 ili je $m > a$ ili je $m < a$, onda je prema 143, saobrazno tome, ili $m + n > a + n$ ili $m + n < a + n$, dakle (prema 90) zacelo ne može biti $m + n = a + n$, što je trebalo dokazati.

146. Stav. Ako je $l > n$, onda postoji jedan i (prema 145) samo jedan broj m koji zadovoljava uslov $m + n = l$.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer

ρ. stav je istinit za $n = 1$. Zaista, ako je $l > 1$, tj. (89) ako l jeste sadržano u N', dakle je slika m' nekog broja m, to iz 135. II sledi da je $l = m + 1$, što je trebalo dokazati.

σ. Ako stav važi za neki broj n, pokazaćemo da on važi i za sledeći broj n'. Zaista, ako je $l > n'$, tada je prema 91, 95 takođe $l > n$, pa stoga postoji broj k koji zadovoljava uslov $l = k + n$; kako je prema 138 isti različit od l (jer bi inače bilo $l = n'$), to je on prema 78 slika m' nekog broja m, pa je zato $l = m' + n$, dakle prema 136 i $l = m + n'$, što je trebalo dokazati.

§ 12

Množenje brojeva

147. Definicija. Pošto smo u prethodnom § 11 našli beskonačan sistem novih preslikavanja brojnog niza N u sebe sama, prema 126 možemo svako od tih preslikavanja opet upotrebiti da nanovo proizvedemo nova preslikavanja ψ sistema N. Kad tu stavimo $\Omega = N$ i $\theta(n) = m + n = n + m$, gde je m neki određeni broj, svakako je opet

$$\text{I. } \psi(N) \prec N,$$

pa za potpuno određivanje preslikavanja ψ ostaje samo još da se povolji izabere element ω iz N. Najjednostavniji slučaj nastupa onda kada taj izbor dovedemo u izvesnu saglasnost sa izborom preslikavanja θ, kad stavimo naime $\omega = m$. Kako time potpuno određeno preslikavanje ψ zavisi od toga broja m, to ćemo odgovarajuću sliku $\psi(n)$ proizvoljnog broja n označiti simbolom $m \times n$ ili $m \cdot n$ ili mn, i taj broj zvati proizvod, koji iz m nastaje množenjem brojem n, ili kratko proizvod brojeva m, n. Zato je on prema 126 potpuno određen uslovima

$$\text{II. } m \cdot 1 = m,$$

$$\text{III. } mn' = mn + m.$$

148. Stav. Važi $m'n = mn + n$.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer

ρ. stav je istinit za $n = 1$ prema 147. II i 135. II.

σ. Važi li stav za neki broj n, to sledi

$$m'n + m' = (mn + n) + m'$$

a odatle (prema 147. III, 141, 140, 136, 141, 147. III)

$$m'n' = mn + (n + m') = mn + (m' + n') =$$

$$= mn + (m + n') = (mn + m) + n' = mn' + n';$$

stav važi dakle i za sledeći broj n', što je trebalo dokazati.

149. Stav. Važi $1 \cdot n = n$.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer

ρ. stav je istinit za $n = 1$, prema 147. II.

σ. Važi li stav za neki broj n, to sledi $1 \cdot n + 1 = n + 1$, tj. (prema 147. III, 135. II) $1 \cdot n' = n'$, dakle stav važi i za sledeći broj n', što je trebalo dokazati.

150. Stav. Važi $mn = nm$.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer

ρ. prema 147. II, 149 stav važi za $n = 1$.

σ. Važi li stav za neki broj n, to sledi

$$mn + m = nm + m,$$

tj. (prema 147. III, 148) $mn' = n'm$, dakle stav važi i za sledeći broj n', što je trebalo dokazati.

151. Stav. Važi $l(m+n) = lm + ln$.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer

ρ. stav je istinit prema 135. II, 147. III, 147. II za $n = 1$.

σ. Važi li stav za neki broj n, to sledi

$$l(m+n) + l = (lm + ln) + l;$$

međutim, prema 147. III, 135. III jeste

$$(lm + ln) + l = l(m+n)' = l(m+n'),$$

a prema 141, 147. III je

$$(lm + ln) + l = lm + (lm + l) = lm + ln',$$

prema tome je $l(m+n') = ln + ln'$, tj. stav važi i za sledeći broj n', što je trebalo dokazati.

152. Stav. Važi $(m+n)l = ml + nl$.

Dokaz sledi iz 151, 150.

153. Stav. Važi $(lm)n = l(mn)$.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer

ρ. prema 147. II stav važi za $n = 1$.

σ. Ako stav važi za neki broj n, to sledi

$$(lm)n + lm = l(mn) + lm,$$

tj. (prema 147. III, 151, 147. III)

$$(lm)n' = l(mn + m) = l(mn'),$$

dakle, važi stav i za sledeći broj n', što je trebalo dokazati,

154. Primedba. Ako se u 147 ne bi prihvatila nikakva veza između ω i θ, nego bi se stavilo $\omega = k$, $\theta(n) = m + n$, tada bi prema 126 odatle nastalo jedno manje jednostavno preslikavanje ψ brojnog niza N; za broj 1 bilo bi $\psi(1) = k$, a za svaki drugi, dakle u obliku n' sadržani broj, bilo bi $\psi(n') = mn + k$; jer time biva ispunjen uslov $\psi(n') = \theta\psi(n)$, tj. $\psi(n') = m + \psi(n)$ za sve brojeve n, u što je lako se uveriti kad se u obzir uzmu prethodni stavovi.

§ 13

Stepenovanje brojeva

155. Definicija. Ako se u stavu 126 ponovo stavi $\Omega = N$, dalje $\omega = a$, $\theta(n) = an = na$, to nastaje jedno preslikavanje ψ sistema N koje opet ispunjava uslov

$$\text{I. } \psi(N) \prec N;$$

odgovarajuću sliku $\psi(n)$ proizvoljnog broja n označićemo simbolom a^n i zvati taj broj stepen osnove a, dok se n naziva izložilac tog stepena od a. Zato je taj pojam potpuno određen uslovima

$$\text{II. } a^1 = a,$$

$$\text{III. } a^{n'} = a \cdot a^n = a^n \cdot a.$$

156. Stav. Važi $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer

ρ. stav važi sa $n = 1$, prema 135. II, 155. III, 155. II.

σ. Važi li stav za neki broj n, to sledi

$$a^{m+n} \cdot a = (a^m \cdot a^n)\, a;$$

prema 155. III, 135. III je međutim $a^{m+n} \cdot a = a^{(m+n)'}$, a prema 153, 155. III je $(a^m \cdot a^n)\, a = a^m (a^n \cdot a) = a^m \cdot a^{n'}$; prema tome je $a^{m+n'} = a^m \cdot a^{n'}$, tj. stav važi i za sledeći broj n', što je trebalo dokazati.

157. Stav. Važi $(a^m)^n = a^{mn}$.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer

ρ. prema 155. II, 147. II stav važi za $n = 1$.

σ. Važi li stav za neki broj n, to sledi

$$(a^m)^n \cdot a^m = a^{mn} \cdot a^m;$$

međutim je prema 155. III, $(a^m)^n \cdot a^m = (a^m)^{n'}$, a prema 156, 147. III, $a^{mn} \cdot a^m = a^{m+n} = a^{mn'}$; prema tome je $(a^m)^{n'} = a^{mn'}$, tj. stav važi i za sledeći broj n', što je trebalo dokazati.

158. Stav. Važi $(ab)^n = a^r \cdot b^n$.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer

ρ. prema 155. II, stav važi za $n = 1$.

σ. Važi li stav za neki broj n, to prema 150, 153, 155. III sledi takođe $(ab)^n \cdot a = a\,(a^n \cdot b^n) = (a \cdot a^n)\,b^n = a^{n'} \cdot b^n$, a odatle $((ab)^n \cdot a)\,b = (a^{n'} \cdot b^n)\,b$; prema 153, 155. III je međutim $((ab)^n \cdot a)\,b = (ab)^n \cdot (ab) = (ab)^{n'}$ pa zato

$$(a^{n'} \cdot b^n)\,b = a^{n'} \cdot (b^n \cdot b) = a^{n'} \cdot b^{n'};$$

prema tome je $(ab)^{n'} = a^{n'} \cdot b^{n'}$, tj. stav važi i za sledeći broj n', što je trebalo dokazati.

§ 14

Broj elemenata nekog konačnog sistema

159. Stav. Ako je Σ beskonačni sistem, onda se svaki od u 98 definisanih sistema Z_n može slično (tj. slično nekom delu od Σ) preslikati u Σ i obratno.

Dokaz. Ako je sistem Σ beskonačan, to prema 72 sigurno postoji neki deo T od Σ koji je prosto beskonačan, dakle, prema 132 sličan brojnom nizu N, pa je zato prema 35 svaki sistem Z_n kao deo od N takođo sličan nekom delu od T, dakle nekom delu o Σ, što je trebalo dokazati.

Ma koliko obrat izgledao jasan, — njegov dokaz je zametniji. Ako se svaki sistem Z_n može slično preslikati u Σ, onda svakom broju n odgovara neko takvo slično preslikavanje α_n sistema Z_n da je $\alpha_n(Z_n) \prec \Sigma$. Iz egzistencije takvog, kao datog smatranog niza preslikavanja α_n, ali o kome ništa dalje nije pretpostavljeno, izvešćemo najpre pomoću stava 126 egzistenciju jednog novog niza takvih istih preslikavanja ψ_n, koji ima posebno svojstvo, da svaki put, kada je $m \leqslant n$, dakle (prema 100) kada je $Z_m \prec Z_n$, preslikavanje ψ_m dela Z_m jeste (21) sadržano u preslikanju ψ_n dela Z_n, tj. da se sva preslikavanja ψ_m i ψ_n potpuno poklapaju za sve brojeve sadržane u Z_m, da dakle stalno bude i

$$\psi_m(m) = \psi_n(m).$$

Da bismo saobrazno tome cilju upotrebili pomenuti stav, pod Ω podrazumevaćemo onaj sistem, čiji su elementi sva uopšte mogućna slična preslikavanja svih sisiema Z_n u Σ, i pomoću datih, takođe u Ω sadržanih elementa α_n, definisaćemo na sledeći način jedno preslikavanje θ sistema Ω u sebe sama. Ako je β neki element iz Ω, dakle, na primer, jedno slično preslikavanje određenog sistema Z_n u Σ, tada sistem $\alpha_{n'}(Z_{n'})$ ne može biti deo sistema $\beta(Z_n)$, jer bi inače sistem $Z_{n'}$, prema 35, bio sličan nekom delu od $Z_{n'}$ dakle, prema 107, nekom pravom delu sebe samog, pa bi zato bio beskonačan, što bi protivurečilo stavu 119; zato u $Z_{n'}$ zacelo postoji neki broj ili postoje različiti brojevi p tako, da $\alpha_{n'}(p)$ nije sadržano u $\beta(Z_n)$; od tih brojeva p uvek ćemo birati—samo da bismo nešto određeno utvrdili—najmanji broj k (96) i, kako se, prema 108, $Z_{n'}$ sastoji iz Z_n i n', definisaćemo jedno preslikavanje γ sistema $Z_{n'}$ time što za sve u Z_n sadržane brojeve m, slika $\gamma(m)$ treba da bude $=\beta(m)$, i, sem toga, $\gamma(n')=$ $=\alpha_{n'}(k)$; to, očigledno, slično preslikavanje γ sistema $Z_{n'}$ u Σ, smatraćemo sada kao sliku $\theta(\beta)$ preslikavanja β, pa je time potpuno definisano jedno preslikavanje θ sistema Ω u sebe sama. Pošto smo u 126 pominjane stvari Ω i θ odredili, za sa ω označeni element iz Ω izabraćemo najzad dato preslikavanje α_1, time je prema 126 određeno jedno preslikavanje ψ brojnog niza N u sistem Ω koje ispunjava uslove

$$\text{II. } \psi_1 = \alpha_1,$$

$$\text{III. } \psi_{n'} = \theta(\psi_n),$$

ako odgovarajuću sliku proizvoljnog broja n ne označimo sa $\psi(n)$ već sa ψ_n. Potpunom indukcijom (80) proizilazi najpre da je ψ_n jedno slično preslikavanje sistema Z_n u Σ; jer

ρ. to je zbog II tačno za $n=1$, i

σ. ako je to tvrđenje tačno za neki broj n, to iz III i načina kojim je više opisan prelaz θ sa β na γ, sledi da tvrđenje važi i za sledeći broj n', što je trebalo dokazati. Posle ovoga takođe ćemo dokazati potpunom indukcijom (80) da, kad je m neki broj, gore nagovešteno svojstvo

$$\psi_n(m) = \psi_m(m)$$

zaista pripada svim brojevima n koji su $\geqq m$, pa zato prema 93, 74 pripadaju lancu m_0; zaista,

ρ. to je neposredno jasno za $n=m$, i

σ. ako to svojstvo pripada nekom broju n, to iz III i sklopa preslikavanja θ ponovo sledi da ono pripada i broju n', što je trebalo dokazati. Pošto je i ta posebna osobna našeg novog niza preslikavnja ψ_n ustanovljena, možemo lako dokazati naš stav. Definisaćemo jedno preslikavanje χ brojnog niza N na taj način što ćemo za svaki broj n uzeti kao njegovu sliku $\chi(n)=\psi_n(n)$; očigledno su (prema 21) u tom jednom preslikavanju χ sadržana sva preslikavanja ψ_n. Kako je ψ_n bilo jedno preslikavanje sistema Z_n u Σ, to sledi najpre da se brojni niz N preslikavanjem χ takođe preslikava u Σ, da je dakle $\chi(N) \prec \Sigma$. Ako su dalje m, n različiti brojevi, to se prema 90 sme pretpostaviti da je $m<n$; prema gornjem je tada $\chi(m)=\psi_m(m)=\psi_n(m)$ i $\chi(n)=\psi_n(n)$; ali kako je ψ_n bilo jedno slično preslikavanje sistema Z_n u Σ, a m, n su različiti elementi iz Z_n, to je $\psi_n(m)$ različito od $\psi_n(n)$, dakle i $\chi(m)$ je različito od $\chi(n)$, tj. χ je slično preslikavanje sistema N. Kako je dalje N beskonačan sistem (71), to prema 67 isto važi za njemu sličan sistem $\chi(N)$, a kako je $\chi(N)$ deo od Σ, prema 68 važi to i za Σ, što je trebalo dokazati.

160. S t a v. Sistem Σ je konačan ili beskonačan već prema tome da li postoji ili ne postoji neki njemu sličan sistem Z_n.

D o k a z. Ako je Σ konačno, onda prema 159 postoje sistemi Z_n koje nije mogućno slično preslikati u Σ; kako se prema 102 sistem Z_1 sastoji iz jedinog broja 1 pa se zato može slično preslikati u svaki sistem, to mora postojati najmanji broj k (96), različit od 1, daklo (prema 78) $=n'$, kome odgovara neki sistema Z_k koji nije mogućno slično preslikati u Σ, a kako je $n<n'$ (91), to postoji neko slično preslikavanje ψ sistema Z_n u Σ; ako bi sada slika $\psi(Z_n)$ bilo samo pravi deo sistema Σ, kad bi, dakle postojao neki element α u Σ koji nije sadržan u $\psi(Z_n)$, moglo bi se, kako je (108) $Z_{n'}=\mathfrak{M}(Z_n, n')$, to preslikavanje ψ proširiti na neko slično preslikavaje ψ sistema $Z_{n'}$ u Σ na taj način što se stavi $\psi(n')=\alpha$, dok međutim prema našoj pretpostavci sistem $Z_{n'}$ nije mogućno slično preslikati u Σ. Prema tome je $\psi(Z_n)=\Sigma$, tj. Z_n i Σ su slični sistemi. Obratno, ako je neki sistem Σ sličan nekom sistemu Z_n, onda je prema 119, 67 sistem Σ konačan, što je trebalo dokazati.

161. D e f i n i c i j a. Ako je Σ neki konačan sistem, onda prema 160 postoji jedan, a prema 120, 33, i samo jedan jedini broj n, kome odgovara neki sistem Z_n sličan sistemu Σ; taj broj n zove se b r o j elemenata sadržanih u sistemu Σ (ili takođe g r a d sistema Σ), i kaže se da se sistem Σ sastoji od n elemenata, ili da je to sistem od n elemenata, ili da broj n pokazuje k o l i k o je elemenata sadržano u Σ.*) Kada se brojevi upotrebaljavaju da tačno iskažu to određeno svojstvo konačnih sistema, onda se oni zovu k a r d i n a l n i b r o j e v i. Čim je izabrano jedno određeno slično preslikavanje ψ sistema Z_n kojim nastaje $\psi(Z_n)=\Sigma$, onda svakom u Z_n sadržanom broju m (tj. svakom broju m koji je $\leqq n$) odgovara jedan određeni element $\psi(m)$ sistema Σ, i unazad, svakom elementu iz Σ posredstvom obratnog preslikavanja $\overline{\psi}$ odgovara prema 26 jedan određeni broj m iz Z_n. Vrlo često se svi elementi iz Σ označuju jednim jedinim slovom, na primer, sa α, kojem se kao indeksi dopisuju različiti brojevi m, tako da se $\psi(m)$ označuje sa α_m. Kaže se takođe da se ti elementi broje i da se preslikavanjem ψ na određen način u r e đ u j u, i α_m se zove m-ti

*) Zbog jasnoće i jednostavnosti, ograničićemo u sledećem pojam broja samo na konačne sisteme; kad zato budemo govorili o nekom broju izvesnih stvari, tada time treba da bude već iskazano da je sistem, čiji su elementi te stvari, konačan.

element sistema Σ; ako je $m<n$, onda se $\alpha_{m'}$ zove element koji **dolazi neposredno za** elementom α_m a α_n se zove poslednji element. Zato se pri ovom brojanju elemenata, brojevi m opet javljaju kao redni brojevi (73).

162. S t a v. Svi sistemi slični nekom konačnom sistemu poseduju isti broj elemenata.

Dokaz sledi neposredno iz 33, 161.

163. S t a v. Broj u Z_n sadržanih, tj. onih brojeva koji su $\leqq n$, jeste n.

D o k a z. Jer, prema 32 je Z_n sličan samom sebi.

164. S t a v. Ako se neki sistem sastoji iz jednog jedinog elementa, onda je broj njegovih elemenata $= 1$, i obratno.

Stav sledi neposredno iz 2, 26, 32, 102, 161.

165. S t a v. Ako je T pravi deo nekog konačnog sistema Σ, onda je broj elemenata iz T manji od broja elemenata iz Σ.

D o k a z. Prema 68 je T konačan sistem, dakle sličan nekom sistemu Z_m, gde m znači broj elemenata iz T; ako je dalje n broj elemenata iz Σ, dakle Σ je sličan sa Z_n, onda je prema 35 sistem T sličan jednom pravom delu E od Z_n, i prema 33 su Z_m i E takođe međusobom slični; ako bi sada bilo $n \leqq m$, dakle $Z_n \prec Z_m$, to bi, prema 7, E takođe bio pravi deo od Z_m, pa bi zato Z_m bio jedan beskonačan sistem, što protivureči stavu 119; prema tome je (prema 90) $m<n$, što je trebalo dokazati.

166. S t a v. Ako je $\Gamma = \mathfrak{M}(B, \gamma)$, gde je B neki sistem od n elemenata a γ znači neki element iz Γ koji nije sadržan u B, onda se Γ sastoji od n' elemenata.

D o k a z. Jer, ako je $B = \psi(Z_n)$, gde ψ znači neko slično preslikavanje sistema Z_n, to se ono prema 105, 108 može proširiti na neko slično preslikavanje ψ sistema $Z_{n'}$, kad se stavi $\psi(n') = \gamma$, i tako nastaje $\psi(Z_{n'}) = \Gamma$, što je trebalo dokazati.

167. S t a v. Ako je γ jedan element nekog sistema Γ koji se sastoji od n' elemenata, onda je n broj svih ostalih elemenata iz Γ.

D o k a z. Jer ako B znači skup svih od γ različitih elemenata iz Γ, to je $\Gamma = \mathfrak{M}(B, \gamma)$; ako je sada b broj elemenata konačnog sistema B, onda je prema prethodnom stavu b' broj elemenata iz Γ, dakle $= n'$, odakle prema 26 sledi takođe $b = n$, što je trebalo dokazati.

168. S t a v. Sastoji li se A od m, a B od n elemenata, i A i B nemaju zajedničkog elementa, onda se $\mathfrak{M}(A, B)$ sastoji od $m+n$ elemenata.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer,

ρ. stav je istinit za $n=1$ zbog 166, 164, 135. II.

σ. Važi li taj stav za neki broj n, onda važi on i za sledeći broj n'. Zaista, ako je Γ neki sestem od n' elemenata, onda se (prema 167) može staviti $\Gamma = \mathfrak{M}(B, \gamma)$, gde je γ neki element, a B sistem od n drugih elemenata iz Γ. Ako je sada A neki sistem od m elemenata od kojih nijedan nije sadržan u Γ, pa dakle ni u B, i ako se stavi $\mathfrak{M}(A, B) = \Sigma$, onda je prema našoj pretpostavci $m+n$ broj elemenata sistema Σ, pa kako γ nije sadržano u Σ, to je prema 166 broj u sistemu $\mathfrak{M}(\Sigma, \gamma)$ sadržanih elemenata $=(m+n)'$, dakle (prema 135, III) $= m+n'$; no kako je, prema 15, očigledno $\mathfrak{M}(\Sigma, \gamma) = \mathfrak{M}(A, B, \gamma) = \mathfrak{M}(A, \Gamma)$, to je $m+n'$ broj elemenata sistema $\mathfrak{M}(A, \Gamma)$, što je trebalo dokazati.

169. S t a v. Ako su A, B konačni sistemi koji se respektivno sastoje od m, n elemenata, onda je $\mathfrak{M}(A, B)$ konačan sistem i broj njegovih elemenata je $\leqq m+n$.

D o k a z. Ako je $B \prec A$, onda je $\mathfrak{M}(A, B) = A$ i broj m elemenata toga sistema je (prema 142) $< m+n$, kako je tvrđeno. Ali, ako B nije deo od A, i T je sistem svih onih elemenata iz B koji nisu sadržani u A, onda je prema 165 njihov broj $p \leqq n$, pa kako je očigledno

$$\mathfrak{M}(A, B) = \mathfrak{M}(A, T),$$

to je prema 143 broj $m+p$ elemenata toga sistema $\leqq m+n$, što je trebalo dokazati.

170. S t a v. Svaki sistem sastavljen od nekog broja n konačnih sistema je konačaan.

Dokaz potpunom indukcijom (80). Jer,

ρ. stav je prema 8 za $n=1$ sam po sebi razumljiv.

σ. Važi li stav za neki broj n, i ako je Σ sastavljen iz n' konačnih sistema, to neka je A jedan od tih sistema a B neka bude sastavljen od svih ostalih; kako je njihov broj (prema 167) $=n$, to je prema našoj pretpostavci sistem B konačan sistem. Kako je sad očigledno $\Sigma = \mathfrak{M}(A, B)$, to odatle i iz 169 sledi da je i Σ konačan sistem, što je trebalo dokazati.

171. S t a v. Ako je ψ neko preslikavanje nekog konačnog sistema Σ od n elemenata koje nije slično, onda je broj elemenata slike $\psi(\Sigma)$ manji od n.

D o k a z. Izaberemo li od svih onih elemenata iz Σ, koji imaju jednu i istu sliku, uvek samo po jedan jedini, onda je sistem T svih tih izabranih elemenata očigledno neki pravi deo od Σ, jer preslikavanje ψ sistema Σ nije slično (26). Međutim je u isto vreme jasno da (prema 21) u ψ sadržano preslikavanje toga dela T jeste slično, i da je $\psi(T) = \psi(\Sigma)$; prema tome je sistem $\psi(\Sigma)$ sličan nekom pravom delu T od Σ, a odatle sledi naš stav prema 162, 165.

172. Zaključna primedba. Mada je upravo dokazano da je broj m elemenata sistema $\psi(\Sigma)$ manji od broja n elemenata sistema Σ, ipak se u nekim slučajevima rado govori da broj elemenata sistema $\psi(\Sigma)$ iznosi n. Naravno, tada se reč broj upotrebljava u jednom drugom smislu nego do sada (161); ako je naime α neki element iz Σ, i a broj svih onih elemenata iz Σ koji imaju jednu i istu sliku $\psi(\alpha)$, to se ista ipak često shvata još kao predstavnik od a elemenata, koji se bar po svom poreklu mogu smatrati kao međusobom različiti, i saobrazno tome se broji kao a-tostruki element od $\psi(\Sigma)$. Na taj način dolazi se do u mnogim slučajevima korisnog pojma sistema u kojima je svaki element snabdeven izvesnim brojem učestalosti, koji pokazaje koliko puta treba isti računati kao element sistema. U gornjem slučaju bi se kazalo na primer, da je n broj u ovome smislu brojanih elemenata iz $\psi(\Sigma)$, dok se broj m stvarno različitih elemenata toga sistema poklapa sa brojem elemenata iz T. Slična odstupanja od izvornog značenja nekog stručnog izraza, koja nisu ništa drugo do proširenja izvornih pojmova, vrlo često se javljaju u matematici; međutim, nije svrha ovog rada da u to bliže ulazimo.

OBJAŠNJENJA UZ PRETHODNU RASPRAVU

Rasprava «Šta su i čemu služe brojevi?« postala je začetnička u dva pravpravca, za istraživanje osnova i za aksionatičku nauku o mnoštvima. Na značaj za istraživanje osnova nedavno je Hilbert ponovo ukazao (Math. Ann. 104); detaljna analiza spisa koja potiče od E. Zermelo-a, nalazi se u posmrtnom slovu od Landau-a (Gött. Nachr. 1917). Koliko je snažno Dedekind uticao na aksiomatičku nauku o mnoštvima, pokazuje poređenje sa Zermelovim aksiomima (Math. Ann. 65), koji su delimično neposredno preuzeti iz Dedekindovih »definicija« (§ 1 spisa). Poznato je da je pri tome »aksioma o beskonačnom« morala biti postulirana jer Dedekindov (66) pokušaj dokaza počiva na protivurečnom pojmu »mnoštva svega zamišljivog«; isto tako je poznato da se u Dedekind-ovim razmišljanjima pojavljuje aksioma izbora (159). I drugi Zermelov dokaz stava o dobrom uređenju može se smatrati kao prenošenje na transfinitnu indukciju ovde datog dokaza za mogućnost potpune indukcije; pri tome je svakako morala u transfinitnom već ovde biti pridcdata aksioma o izboru ostalim aksiomama, koje je Dedekind implicitno upotrebljavao. Za običnu potpunu indukciju Dedekind je mogao to zaobići time što je na raspolaganju imao preslikavanje koje ulazi u definiciju beskonačnog. Stav o »definiciji« potpunom indukcijom (126), koji prevazilazi »dokaz« potpunom indukcijom, za transfinitno je strogo razradio J. v. Neumann (Math. Ann. 99). Stav ima naročito primene u algebri beskonačnih područja, korespondentno tome kako Dedekind dobija pravila za računanje sa celim brojevima pomoću definicije potpunom indukcijom.

Noether

MATH. ANNALEN VON CLEBSCH UND NEUMANN
Br. 5/1871., p. 123-132.

G. Kantor iz Halea

(G. Cantor in Halle a. S.)

O PROŠIRENJU JEDNOG STAVA IZ TEORIJE TRIGONOMETRIJSKIH REDOVA

U ovome što sledi saopštiću izvesno proširenje stava da su predstavljanja u obliku trigonometrijskih redova jednoznačna.

Da dva trigonometrijska reda:

$$\frac{1}{2} b_0 + \Sigma (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

$$\frac{1}{2} b_0' + \Sigma (a_n' \sin nx + b_n' \cos nx),$$

koji za svaku vrednost x konvergiraju i imaju istu sumu, imaju jednake i sve odgovarajuće koeficijente, pokušao sam da dokažem u »Journal für die reine und angewandte Mathematik« (Žurnal za čistu i primenjenu matematiku) Tom 72, str. 139; u jednoj beleški koja se odnosi na taj rad pokazao sam dalje na navedenom mestu, da taj stav ostaje na snazi i kada se za konačan broj vrednosti x odustane bilo od konvergencije bilo od poklapanja suma redova.

Ovde najavljeno proširenje sastoji se u tome da se od konvergencije ili poklapanja suma redova odustane za *beskonačno* mnogo vrednosti x u intervalu $(0,2\pi)$, a da stav ostane i dalje u važnosti.

U tu svrhu primoran sam, međutim, da prethodno, makar i samo nagoveštajem, izložim razmatranja koja mogu poslužiti da se rasvetle okolnosti koje se redovno javljaju čim su brojne veličine date u konačnom ili beskonačnom broju; pri tome ću doći do izvesnih definicija, koje se ovde navode samo radi što sažetije formulacije najavljenog stava, čiji je dokaz dat u § 3.

§ 1.

Racionalni brojevi čine osnovu za ustanovljivanje šireg pojma brojne veličine; ja ću ih nazvati područjem A (uključujući nulu).

Kada govorim o brojnoj veličini u širem smislu, onda je to u prvom redu za slučaj kada imamo nekim zakonom dat beskonačan niz racionalnih brojeva:

(1) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

koji ima osobinu da razlika a_{n+m}—a_n sa rastućim n postaje beskonačno mala, ma šta bio pozitivan ceo broj m, ili, drugim rečima, da za povolji uzeto (pozitivno, racionalno) ε postoji ceo broj n_1 tako da je $(a_{n+m}-a_n)<\varepsilon$, čim je $n \geqq n_1$, pri čemu je m bilo koji pozitivan ceo broj.

Tu osobinu niza (1) iskazaću sledećim rečima: »Niz ((1) ima određenu granicu b. Ove reči, dakle, nemaju isprva nikakav drugi smisao do da iskažu gornju osobinu niza; okolnost, što za niz (1) vezujemo poseban znak b, povlači da za različite takve nizove treba stvoriti i različite oznake $b, b', b'', \dots$.

Ako je dat drugi niz:

$$(1') \qquad a_1', a_2', \dots, a_n', \dots$$

koji ima određenu granicu b', onda nalazimo da između nizova (1) i (1') uvek postoji jedna od tri veze koje se uzajamno isključuju: 1. ili a_n-a_n' postaje beskonačno malo kad n raste; 2. ili a_n-a_n' postaje, počev od izvesnog n, stalno veće od jedne pozitivne (racionalne) veličine ε; 3. ili a_n-a_n' ostaje, počev od izvesnog n, stalno manje od jedne negativne (racionalne) veličine $-\varepsilon$.

Ako nastupi prva veza, staviću

$$b=b',$$

kod druge veze staviću $b>b'$, a kod treće $b<b'$,

Isto tako nalazimo da niz (1), koji ima granicu b, poseduje samo jednu od sledeće 3 veze sa racionalnim brojem a:

1. Ili a_n-a postaje beskonačno malo kad n raste; 2. ili a_n-a ostaje, počev od izvesnog n, uvek veće od jedne pozitivne (racionalne) veličine ε; 3. ili a_n-a ostaje, počev od izvesnog n, uvek manje od jedne negativne (racionalne) veličine $-\varepsilon$.

Da bismo iskazali postojanje tih veza, stavićemo redom:

$$b=a, \qquad b>a, \qquad b<a.$$

Iz tih, i definicija koje odmah slede, dobija se kao posledica, da ako je b granica niza (1), onda $b-a_n$ postaje beskonačno malo kad n raste; ovim, pored toga, naziv »granica niza (1)« za b dobija izvesno opravdanje.

Označimo sa B skup brojnih veličina b.

Pomoću gornjih postavki mogućno je proširiti elementarne operacije, koje se izvode sa racionalnim brojevima, na oba područja A i B uzeta zajedno.

Ako su naime, b, b', b'' tri brojne veličine iz B, onda formule

$$b \pm b' = b'', \quad bb' = b'', \quad b/b' = b''$$

iskazuju da među nizovima

$$a_1, a_2, \dots,$$

$$a_1', a_2', \dots,$$

$$a_1'', a_2'', \dots,$$

koji odgovaraju redom brojevima b, b', b'', postoje veze

$$\lim\,(a_n \pm a_n' - a_n'') = 0,$$

$$\lim\,(a_n\, a_n' - a_n'') = 0,$$

$$\lim\,(a_n / a_n' - a_n'') = 0,$$

gde, prema prethodnom, nema potrebe da bliže ulazim u značenje oznake lim. Slične definicije uvcde se u slučajevima kada jedan ili dva cd tri broja pripadaju pcdručju A.

Na taj način će, u opštem slučaju, svaka pomoću konačno mncgo elementarnih operacija formirana jednačina

$$F\,(b, b'\, b'', \ldots, b^{(\rho)}) = 0$$

izražavati neku određenu vezu koja postoji među nizovima preko kojih su date brojne veličine $b, b', b'', \ldots, b^{(\rho)}$.*)

Područje B nastalo je iz područja A; na sličan način, ono, zajedno sa pcdručjem A, proizvcdi novo pcdručje C.

Ako je naime

(2) $$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$$

beskonačan niz brojnih veličina iz pcdručja A i B, koje ne leže sve u području A, i ako taj niz ima osobinu da b_{n+m}—b_n postaje beskcnačno malo kada n raste, ma šta bilo m, osobinu, koja je prema prethcdnim definicijama pojmovno nešto sasvim cdređeno, onda ću za taj niz kazati da ima cdređenu granicu c.

Brojne veličine c obrazuju pcdručje C.

Definicije jednakog, većeg i manjeg, kao i elementarnih operacija kako među veličinama c, tako i između njih i veličina iz područja B i A, daju se. analogno prethodnom.

Iako se time područja B i C donekle uzajamno poklapaju, bitno je u ovde izloženoj teoriji (u kojoj se brojna veličina, isprva nestvarna sama po sebi, javlja samo kao sastavni deo stvarnih stavova, na primer, stava da cdgcvarajući niz ima za granicu tu brojnu veličinu) čvrsto se držati pojmovne razlike između pcdručja B i C, jer već izjednačavanje dveju brojnih zveličina b, b' iz B ne uključuje njihovu identičnost već izražava samo jednu cdređenu relaciju koja postoji među nizovima na koje se one cdnose.

---

*) Ako na primer, neka jednačina μ-tog stepena sa celim koeficijentima: $f(x) = 0$, ima realan koren ω, onda to u opštem slučaju ne znači *ništa drugo* nego da imamo niz

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

oblika niza (1), za čiju smo granicu izabrali oznaku ω, koji sem toga ima osobinu da je

$$\lim f(a_n) = 0.$$

Iz područja C i prethcdnih na analogan način proizilazi neko područje D, iz ovoga E, itd.; posredstvom λ takvih prelaza (ako se prelaz od A na B smatra kao prvi) dospeva se do nekog područja L brojnih veličina. Ako zamislimo da je od područja do područja sproveden lanac definicija za jednako, veće, manje i za elementarne operacije, tada se područje L ponaša prema prethodnim, isključujući A, tako da se brojna veličina l uvek može izjednačiti sa nekom brojnom veličinom $k, i, \ldots, c, b$ i obrnuto.

Na oblik takvih izjednačavanja mogućno je svesti rezultate analize (izuzev malog broja poznatih slučajeva), iako (što ovde neka bude dotaknuto samo s obzirom na one izuzetke) pojam broja, kako je ovde razvijen, nosi u sebi klicu za nužno i apsolutno beskonačno proširenje.

Kada je u području L data brojna veličina, izgleda korisno da se poslužimo izrazom: *ona je data kao brojna veličina, vrednost ili granica* λ*-te vrste* odakle je jasno da se rečima *brojna vrednost*, *veličina* ili *granica* uopšte služim sa jednakim značenjem.

Prema ovde nagoveštenoj teoriji, strogo uzevši, neka jednačina $F(l, l', \ldots, l^{(\rho)})=0$, formirana posredstvom konačno mnogo elementarnih operacija od brojeva $l, l', \ldots, l^{(\rho)}$ izražava određeni odnos između $\rho+1$, *u opštem slučaju* λ*-tostrukih beskonačnih nizova racionalnih brojeva*; to su nizovi koji proizilaze iz jednostruko beskonačnih nizova na koje se veličine $l, l', \ldots l^{(\rho)}$ najpre odnose, kad se u njima elementi zamene njihovim odgovavajućim nizovima, zatim se na isti način postupi sa tako nastalim u opštem slučaju dvostruko beskonačnim nizovima i taj se postupak nastavlja tako dugo dok se ne pojave samo racionalni brojevi.

Za sebe zadržavam da se drugom prilikom vratim iscrpnije na sve ove okolnosti. Isto tako nije ovde mesto da zalazim u to *kako* u ovome § izložene definicije i operacije mogu korisno poslužiti infinitezimalnoj analizi. Pa i ovo što sledi, gde se izlaže veza brojnih veličina sa geometrijom prave linije, ograničava se gotovo samo na nužne stavove, iz kojih, ako se ne varam, sve ostalo može biti izvedeno posredstvom čisto logičkog izvođenja dokaza. Radi poređenja sa § 1 i § 2 neka bude pomenuta 10. knjiga »Euklidovih elemenata«, koja je merodavna za predmet koji se u tim paragrafima obrađuje.

§ 2.

Tačke prave linije određuju se pojmovno tako što se, pošto je utvrđena jedinica mere, daju njihova rastojanja, apscise, od jedne utvrđene tačke O prave linije, sa znakom $+$ ili $-$, već prema tome da li uočena tačka leži u (unapred utvrđenim) pozitivnom ili negativnom delu prave u odnosu na tačku O.

Ima li to odstojanje racionalan odnos prema jedinici mere, onda se ono izražava brojnom veličinom iz područja A; u protivnom slučaju, kada je recimo tačka *poznata* posredstvom neke konstrukcije, uvek je mogućno navesti niz

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

koji ima u § 1 opisanu osobinu, a prema dotičnom rastojanju takav odnos da se tačke prave, kojima pripadaju rastojanja $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, sa rastućim n beskonačno blizu primiču tački koju treba odrediti.

To izražavamo na taj način što kažemo: *Rastojanje od tačke O tačke koju treba odrediti jednako je b, gde je b brojna veličina koja odgovara nizu* (1).

Potom se dokazuje da su veće, manje i jednako kod poznatih rastojanja u skladu sa u § 1. definisanim većim, manjim i jednakim kod odgovarajućih brojnih veličina, koje ta rastojanja određuju.

Da sada isto tako i brojne veličine iz područja $C, D, \ldots$ mogu određivati poznata rastojanja, sleduje bez teškoće. Međutim, da bismo načinili potpunom u ovom § izloženu vezu područja u § 1 definisanih brojnih veličina sa geometrijom prave linije, moramo pridodati još jednu *aksiomu* koja se prosto sastoji u tome što i obrnuto svakoj brojnoj veličini odgovara jedna određena tačka prave, čija je koordinata jednaka toj brojnoj veličini i to jednaka u onom smislu koji je u ovom § objašnjen*).

Nazivam taj stav aksioma jer u njegovoj prirodi je da se uopšte ne može dokazati.

Njome, naknadno, brojne veličine dobijaju izvesnu stvarnost, od koje su one, ipak, sasvim nezavisne.

Prema gornjem izlaganju, jednu tačku prave smatraću određenom, kada je njeno rastojanje od O, snabdeveno pripadajućim znakom, dato kao brojna veličina, vrednost ili granica λ-te vrste.

Pristupajući bliže našem pravom predmetu, sada ćemo razmotriti odnose koji nastaju čim su brojne veličine date u konačnom ili beskonačnom broju.

Prema prethodnom možemo zamisliti da su brojne veličine dodeljene tačkama neke prave. Očiglednosti radi (a ne što bi to za stvar bilo bitno), u sledećem ćemo se poslužiti tom predstavom i, kada budemo govorili o tačkama, stalno ćemo u oku imati vrednosti kojima su one date.

Dati konačan ili beskonačan broj brojnih veličina ću, kratkoće radi, zvati *skup vrednosti*, a shodno tome zvaću *skup tačaka* dati konačan ili beskonačan broj tačaka prave. Ono što će u sledećem biti rečeno o skupovima tačaka, može se prema kazanom neposredno preneti na skupove vrednosti.

Ako je u nekom konačnom intervalu dat skup tačaka, onda je sa tim u opštem slučaju dat drugi skup tačaka, sa ovim u opštem slučaju je dat treći, itd., koji su bitni za shvatanje prirode prvog skupa tačaka.

Za definiciju tih izvedenih skupova tačaka moramo najpre izložiti pojam *granične tačke skupa tačaka*.

---

*) Prema tome, svakoj brojnoj veličini odgovara jedna određena tačka, ali jednoj tački odgovara beskonačno mnogo jednakih brojnih veličina kao koordinate u gornjem smislu; jer, kao što je gore već nagovešteno, iz čisto logičnih razloga sleduje da jednakim brojnim veličinama *ne* mogu odgovarati različite tačke i da različitim brojnim veličinama kao koordinatama *ne* može odgovarati jedna i ista tačka.

Pod graničnom tačkom skupa P tačaka podrazumevam tačku prave sa takvim položajem da se u svakoj njenoj okolini nalazi beskonačno mnogo tačaka iz P, pri čemu se može desiti da, sem toga, ona takođe pripada tom skupu. Neka ovde pod okolinom neke tačke bude smatran svaki interval koji tu tačku sadrži u svojoj unutrašnjosti. Tada je lako dokazati da skup koji se sastoji od beskonačnog broja tačaka uvek ima bar jednu graničnu tačku.

Postoji sada određen odnos svake tačke prave prema datom skupu P u smislu da ona jeste ili nije granična tačka tog skupa, pa je zato za skup P pojmovno vezan skup njegovih graničnih tačaka, koji ćemo označiti sa P' i zvati *prvi izvodni skup* tačaka skupa P.

Ako se skup P' tačaka ne sastoji samo od konačnog broja tačaka, onda on takođe ima izvodni skup P'' tačaka, koji ću zvati *drugi izvod* skupa P. Posredstvom ν takvih prelaza dolazi do se pojma ν-tog izvodnog skupa $P^{(\nu)}$ skupa P.

Ako se na primer skup P sastoji iz svih tačaka prave koje imaju racionalne apscise između 0 i 1, uključujući ili isključujući te granice, onda se izvodni skup P' sastoji od svih tačaka intervala $(0, 1)$ uključujući granice 0 i 1. Ovde se sledeći skupovi $P'', P''', \ldots$, poklapaju sa P'. Ili, ako se skup P sastoji iz tačaka čije su apscise $1, {}^1/_2, {}^1/_3, \ldots, {}^1/_n, \ldots$, onda se skup P' sastoji iz jedne tačke 0 i sam nema izvoda.

Može se desiti, a to je slučaj koji nas ovde isključivo zanima, da se posle ν prelaza skup $P^{(\nu)}$ sastoji iz konačnog broja tačaka, dakle da ovaj nema izvodnog skupa; u tome slučaju nazvaćemo polazni skup P tačaka skup ν-te *vrste*, odakle sledi da su tada $P', P'', \ldots$, skupovi $(\nu-1)$-ve, $(\nu-2)$-ge, ..., vrste.

Pri takvom načinu shvatanja, područje svih skupova određene vrste smatra se kao poseban rod (genus) u okviru svih skupova tačaka koji se mogu zamisliti, a u tome rodu posebnu vrstu sačinjavaju skupovi ν-te vrste.

Primer skupa ν-te vrste pruža već jedna jedina tačka, ako je njena apscisa data kao brojna veličina ν-te vrste, koja ispunjava izvesne uslove koje je lako postaviti. Razložimo li naime tu brojnu veličinu na članove ((ν—1)-ve vrste) niza koji joj odgovara, a te članove ponovo razložimo na članove ((ν—2)-ge vrste) koji ih sačinjavaju, itd., dobićemo na kraju beskonačan broj racionalnih brojeva: zamislimo li skup tačaka koji odgovara tim brojevima, onda je to skup ν-te vrste*).

Posle tih priprema u stanju smo sada da u sledećem § ukratko izložimo i dokažemo najavljeni stav.

§ 3.

TEOREMA: *Ako je data jednačina oblika*

$$0 = C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \cdots, \tag{I}$$

*) Možda zaslužuje da još izričito bude istaknuto da to nije uvek slučaj. Skup koji na gornji način proizilazi iz jedne brojne veličine ν-te vrste, može u opštem slučaju biti kako niže tako i više od ν-te vrste ili čak i ne biti određene vrste.

gde je

$$C_0 = (1/2)\, d_0, \quad C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$$

za sve vrednosti x izuzev onih koje odgovaraju tačkama nekog u intervalu $(0,2\pi)$ *datog skupa P* ν*-te vrste, gde je* ν *povolji velik ceo broj, tada je*

$$d_0 = 0, \quad c_n = d_n = 0.$$

Dokaz. Kada je reč o skupu P, kao što će se videti iz toka izlaganja, u ovom dokazu mi imamo u vidu ne samo dati skup ν-te vrste iznimnih tačaka u intervalu $(0,2\pi)$, nego onaj skup koji periodičnim ponavljanjem toga skupa nastaje na čitavoj beskonačnoj pravoj.

Posmatrajmo sada funkciju

$$F(x) = C_0\, xx/2 - C_1 - C_2/4 - \cdot \cdot \cdot - C_n/nn - \cdot \cdot \cdot .$$

Iz prirode skupa ν-te vrste tačaka lako sleduje da mora postojati neki interval (α, β) u kojem ne leži nijedna tačka skupa P; zbog pretpostavljene konvergencije našeg reda (I) biće dakle za sve vrednosti x u tom intervalu:

$$\lim\, (c_n \sin nx + d_n \cos nx) = 0,$$

pa je prema jednom poznatom stavu (vidi Annalen, Bd. IV, strana 139):

$$\lim c_n = 0, \quad \lim d_n = 0.$$

Funkcija $F(x)$ ima zato sledeće osobine (vidi: Riman (Riemann), O mogućnosti predstavljanja funkcije trigonometrijskim redom, § 8):

1) Ona je neprekidna u blizini svake vrednosti za x.

2) Važi $\lim\, (F(x+\alpha) + F(x-\alpha) - 2\, F(x))/\alpha\alpha = 0$, kada je $\lim \alpha = 0$, za sve vrednosti x izuzev onih koje odgovaraju tačkama skupa P.

3) Važi $\lim F(x+\alpha) + F(x-\alpha) - 2\, F(x))/\alpha = 0$, kad je $\lim \alpha = 0$, za svaku vrednost x, bez izuzetka.

Pokazaću sada da je $F(x) = cx + c'$.

U tu svrhu posmatraću najpre neki interval (p, q) u kome leži samo konačan broj tačaka skupa P; neka te tačke budu označene sa $x_0, x_1, \ldots, x_r$ prema njihovom redosledu.

Tvrdim da je u intervalu (p, q) funkcija $F(x)$ linearna; jer, zbog osobina 1) i 2), $F(x)$ je linearna funkcija u svakom od intervala na koje se interval (p, q) deli tačkama $x_1, x_0, \ldots, x_r$; kako naime izuzetne tačke ne padaju u nijedan od tih intervala, to ovde važe zaključci primenjeni u na početku ovog članka citiranom radu (vidi Žurnal za čistu i primenjenu matematiku, Tom 72, str. 159); ostaje zato samo da se još dokaže identičnost tih linearnih funkcija.

To ću učiniti za po dve susedne i u tu svrhu izabraću one iz dva intervala (x_0, x_1) i (x_1, x_2).

U (x_0, x_1) neka je $F(x)=kx+l$.

U (x_1, x_2) neka je $F(x)=k' x+l'$.

Zbog (1) je $F(x_1)=kx_1+l$; za dovoljno male vrednosti α je dalje

$F(x_1+\alpha)=k'(x_1+\alpha)+l'$; $\quad F(x_1-\alpha)=k(x_1-\alpha)+l$.

Zbog (3) imamo dakle:

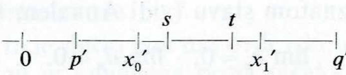
$\lim((k'-k)x_1+l'-l+\alpha(k'-k))/\alpha=0$, kad je $\lim\alpha=0$, što je mogućno samo kada je:

$$k=k', \quad l=l'.$$

Preglednosti radi taj ćemo rezultat posebno istaći:

(A) »*Ako je (p, q) neki interval u kome leži samo konačan broj tačaka skupa P, onda je funkcija $F(x)$ linearna na tome intervalu*«.

Posmatraću dalje neki interval (p', q') koji sadrži samo konačan broj tačaka $x_0', x_1', \ldots, x_r'$ prvog izvodnog skupa P'; i tvrdim najpre da je u svakom od pojedinih intervala-delova, na koje se interval (p, q) deli tačkama $x_0', x_1', \ldots$, na primer u intervalu (x_0', x_1'), funkcija $F(x)$ linearna.



Jer svaki od tih pojedinih intervala-delova sadrži doduše, u opštem slučaju, beskonačno mnogo tačaka iz P, tako da rezultat (A) ne može na njega neposredno da se primeni; umesto toga, svaki interval (s, t), koji potpuno pada u interval (x_0', x_1'), sadrži samo konačan broj tačaka iz P (jer bi inače između x_0', i x_1' bilo još drugih tačaka skupa P'), pa je dakle zbog (A) funkcija linearna na (s, t). Ali kako se krajnje tačke s i t povolji blizu mogu približiti tačkama x_0' i x_1', bez daljeg zaključujemo da neprekidna funkcija $F(x)$ jeste linearna i na (x_0', x_1').

Nakon što je to dokazano za svaki od intervala delova od (p', q'), istim onim zaključcima koji su doveli do rezultata (A), dobija se sledeće:

(A') «*Ako je (p', q') neki interval u kome leži samo konačan broj tačaka skupa P', onda je funkcija $F(x)$ linearna u tome intervalu*«.

Dokaz se dalje odvija u tome smislu. *Ako se naime jednom utvrdilo da je $F(x)$ linearna funkcija u nekom intervalu $(p^{(k)}, q^{(k)})$* koji *sadrži samo konačan broj tačaka iz k-tog izvodnog skupa $P^{(k)}$ skupa P, onda se dalje zaključuje isto tako kao kod prelaza od (A) na (A'), da je $F(x)$ linearna funkcija i na nekom intervalu $(p^{(k+1)}, q^{(k+1)})$ koji u sebi sadrži samo konačan broj tačaka $(k+1)$-og izvodnog skupa $P^{(k+1)}$.*

Posredstvom konačnog broja prelaza zaključujemo tako da je funkcija $F(x)$ linearna u svakom intervalu koji sadrži samo konačan broj tačaka skupa $P^{(\nu)}$. Međutim, kao što je pretpostavljeno, skup P je ν-te vrste, pa zato proizvoljno uzeti interval (a, b) na pravoj sadrži uopšte samo konačan broj tačaka iz $P^{(\nu)}$. Zato je funkcija $F(x)$ linearna na proizvoljno uzetom intervalu (a, b) i, kao što je lako videti, za $F(x)$ sledi odatle oblik: $F(x)=cx+c'$ za sve vrednosti x. Nakon što smo to uradili, dokaz dalje teče na isti način kao i u već dvaput citiranoj raspravi i to počev od onog trenutka kada je u toj raspravi za funkciju $F(x)$ takođe dokazan linearan oblik.

Ovde dokazanom stavu može se dati i sledeći oblik:

»*Prekidna funkcija* $f(x)$, *koja je različita od nule ili neodređena za sve vrednosti* x *koje odgovaraju tačkama nekog u intervalu* $(0,2\pi)$ *datog skupa* P ν*-te vrste, a za sve ostale vrednosti* x *je jednaka nuli, ne može se predstaviti trigonometrijskim redom*«.

Hale, 8. novembra 1871.

KLASIČNI NAUČNI SPISI

Knj. 1. — **Euklidovi elementi** — B. 1949. 8°, str. 66
Knj. 2. — **Euklidovi elementi** — B. 1950. 8°, str. 29
Knj. 3. — **Euklidovi elementi** — B. 1953. 8°, str. 48
Knj. 4. — **Euklidovi elementi** — B. 1953. 8°, str. 31
Knj. 5. — **Euklidovi elementi** — B. 1953. 8°, str. 58
Knj. 6. — **Euklidovi elementi** — B. 1955. 8°, str. 56
Knj. 7. — **Euklidovi elementi** — B. 1955. 8°, str. 58
Knj. 8. — **Euklidovi elementi** — B. 1955. 8°, str. 44
Knj. 9. — **Euklidovi elementi** — B. 1956. 8°, str. 48
Knj. 10. — **Euklidovi elementi** — B. 1956. 8°, str. 19
Knj. 11. — **Euklidovi elementi** — B. 1957. 8°, str. 64
Knj. 12. — **Euklidovi elementi** — B. 1957. 8°, str. 58
Knj. 13. — **Euklidovi elementi** — B. 1957. 8°, str. 80

Preveo i komentar dodao ANTON BILIMOVIĆ
Svih 13 knjiga povezano je u jednu knjigu.
Pogovor napisao ANTON BILIMOVIĆ.

Knj. 14. — **D. Hilbert,** Osnove geometrije. — B. 1957. 8°, str. 232
Preveo sa osmog nemačkog izdanja Ž. GARAŠANIN

Knj. 15. — **Lobačevski,** Geometrijska ispitivanja iz teorije paralelnih linija. — B. 1951. 8°, str. 81
Preveo i napomene dodao BRANISLAV PETRONIJEVIĆ

(drugo prošireno izdanje).

NOVA SERIJA

Knj. 1 (16) — **Ruđer Bošković,** O zakonu kontinuiteta i njegovim posledicama u odnosu na osnovne elemente materije i njihove sile. — B. 1975. 8°, str. 170
S latinskog prevela DARINKA NEVENIĆ-GRABOVAC
Predgovor i komentar napisao i prevod stručno redigovao

ERNEST STIPANIĆ

Tehnički urednik: Milan ČAVČIĆ