MATEMATIČKI INSTITUT

Savremena računska tehnika i njena primena

Knjiga 7

V. Vujčić, M. Ašić i N. Miličić

Matematičko programiranje

BEOGRAD

1980

MATEMATIČKI INSTITUT

Savremena računska tehnika i njena primena

Knjiga 7

V. Vujčić, M. Ašić i N. Miličić

Matematičko programiranje

BEOGRAD
1980

Savremena računska tehnika nalazi sve širu primenu u različitim oblastima čovečije delatnosti. Ovo za sobom povlači potrebu upoznavanja širokog kruga ljudi sa načinom rada i mogućnostima računara, kao i sa matematičkim metodama za rešavanje složenih zadataka pomoću računara. Za ovo je neophodno postojanje odgovarajuće literature. I serija Matematičkog instituta

SAVREMENA RAČUNSKA TEHNIKA I NJENA PRIMENA

ima osnovni zadatak da na potrebnom teorijskom i praktičnom nivou upozna čitaoca sa dostignućima u ovoj oblasti.

Ova publikacija nije periodična.

Rukopise opremljene za štampu slati na adresu: Matematički institut, 11000 Beograd, Knez Mihailova 35.

Izdaje: Matematički institut, 11000 Beograd, Knez Mihailova 35

MATEMATIČKI INSTITUT

Savremena računska tehnika i njena primena

Knjiga 7

V. Vujčić, M. Ašić i N. Miličić

Matematičko programiranje

BEOGRAD
1980

R e c e n z e n t i:

Petrić dr Jovan, redovni profesor FON-a u Beogradu
Prešić dr Marica, docent PMF u Beogradu

Primljeno za štampu na sednici Redakcionog odbora od 11. juna 1979. godine

Republička zajednica nauke SR Srbije učestvovala je u troškovima izdavanja ove publikacije.

Prema mišljenju republičkog sekretara za kulturu SR Srbije ova publikacija je oslobodjena poreza na promet.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

U toku poslednjih godina se u Matematičkom institutu u Beogradu održava Seminar iz primenjene matematike na kome je i potekla ideja da se napiše ova knjiga. Razlozi da se odabere oblast matematičkog programiranja su višestruki. U prvom redu malo je knjiga na našem jeziku koje se bave ovom oblašću, dok se u svetu ona veoma brzo razvija. S druge strane, primene matematičkog programiranja su mnogobrojne, što ga čini zanimljivim ne samo za matematičare nego i za inženjere, ekonomiste, vojne stručnjake itd. Imajući sve ovo u vidu, nastojali smo da tekst bude dostupan što širem krugu čitalaca. Obim znanja koji se stiče u okviru kurseva matematike I i II dovoljan je da bi se knjiga u celini mogla pratiti.

Knjiga se po sadržaju može podeliti na dva dela: prvi koji čine glave I, II i III je isključivo teorijskog karaktera i čini zasebnu celinu. U njemu se razvija neophodan matematički aparat pomoću koga se dokazuju svi rezultati u preostalim glavama. Čitalac koji je zainteresovan više za metode a manje za teoriju matematičkog programiranja može da čita samo drugi deo (glave IV, V, VI i VII). Da bismo ovakvo čitanje olakšali, sve metode smo izložili algoritamski. U uvodu su navedene neke primene matematičkog programiranja.

Pri izradi knjige konstultovana je obimna literatura. U izboru materijala i načinu dokazivanja trudili smo se da olakšamo čitanje knjige, a da istovremeno zainteresovanom čitaocu omogućimo da bez većih teškoća nastavi proučavanje ove materije iz drugih izvora. Uvod i glave I, II, III, IV, VII zajednički su pisali dr Miroslav Ašić i dr Vera Vujčić. Glave V i VI pisala je dr Nada Miličić, a u konačnom uobličavanju teksta ovih dveju glava učestvovala su i ostala dva autora. Na kraju napomenimo da su mnogi dokazi, dati u knjizi, originalni.

Dr Vera V. Vujčić
Dr Nada I. Đuranović-Miličić
Dr Miroslav D. Ašić

UVOD

Matematičko programiranje, kao oblast, počinje da se razvija posle drugog svetskog rata mada su neki pionirski radovi objavljeni mnogo ranije. Oblast matematičkog programiranja može se grubo podeliti na linearno, nelinearno, diskretno i stohastičko programiranje i teoriju igara. Zajednička osobina ovih oblasti je da se traži tačka u nekom vektorskom prostoru koja zadovoljava neka ograničenja, a u kojoj data funkcija (funkcija cilja) dostiže ekstremnu vrednost. Matematičko programiranje isključivo razmatra probleme u konačnodimenzionim prostorima dok su ekstremalni problemi u beskonačno dimenzionim prostorima predmet drugih matematičkih disciplina (varijacioni račun, optimalno upravljanje i dr.). Ekstremalni problemi se vrlo često javljaju u praksi, što će se videti iz primera koje ćemo navesti u daljem tekstu. O ovim i drugim primerima primene matematičkog programiranja više detalja čitalac može naći npr. u Petrić [P.2], Dantzig [D.3].

Linearno programiranje je najrazvijenija i najčešće primenjivana oblast matematičkog programiranja. Atribut „linearno" potiče iz činjenice da su kod tih problema i funkcija cilja i ograničenja linearne funkcije. Navešćemo sada nekoliko problema iz raznih oblasti čiji se matematički modeli mogu svesti na problem linearnog programiranja.

1. Transportni problem

Proizvođači $P_1, \ldots, P_k$ proizvode artikal A koji treba dopremiti korisnicima $K_1, \ldots, K_m$. Neka je

p_i,	$i = 1, \ldots, k$	količina proizvoda kojom raspolaže proizvođač P_i, $i = 1, \ldots, k$
q_j,	$j = 1, \ldots, m$	količina proizvoda koja je potrebna korisniku K_j, $j = 1, \ldots, m$
c_{ij},	$i = 1, \ldots, k$ $j = 1, \ldots, m$	cena prevoza jedinice artikla A od proizvođača P_i do korisnika K_j $i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, m$

Pretpostavićemo da je ukupna potražnja jednaka ukupnoj ponudi, tj.

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = \sum_{i=1}^{k} p_i.$$

Treba odrediti količinu $x_{ij} \geq 0$ artikla A koji treba prevesti od proizvođača P_i do korisnika K_j, $i = 1, ..., k$; $j = 1, ..., m$, tako da ukupna cena transporta bude minimalna. Matematički model opisanog problema se može napisati kao:

$$\min \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

(U.1)
$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = p_i, \; i = 1, ..., k$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_{ij} = q_j, \; j = 1, ..., m$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, ..., k$$
$$j = 1, ..., m$$

Dobijen je problem u $k \cdot m$ dimenzionom prostoru $R^{k \cdot m}$ sa linearnom funkcijom cilja i linearnim ograničenjima. Napominjemo da je problem koji smo naveli unekoliko uprošćen. Naime, može se desiti da je

$$\sum_{j=1}^{m} q_j \neq \sum_{i=1}^{k} p_i .$$

U tom slučaju se uvodi fiktivni proizvođač (kada je potražnja veća od ponude) ili fiktivni potrošač (kada je ponuda veća od potražnje), s tim što se za odgovarajuće cene prevoza uzima da su jednake nuli. Osim navedenih ograničenja, u realnim problemima javljaju se i druga ograničenja (propusna moć saobraćajnice od P_i do K_j, mogućnost prevoza raznim prevoznim sredstvima po raznim cenama itd.). Problem (U.1) ima specijalnu strukturu te za njegovo rešavanje osim metoda koje ćemo izložiti u ovoj knjizi postoje i efikasnije metode (videti Petrić [P.2], Dantzig [D.3]).

2. Problem dijete

Na raspolaganju je n različitih prehrambenih proizvoda, $P_1, ..., P_n$. Neka su $K_1, ..., K_m$ sastojci tih proizvoda neophodni u ishrani. Poznati su sledeći podaci

a_{ij},	$i = 1, ..., m$ $j = 1, ..., n$	količina sastojka K_i u jedinici proizvoda P_j, $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$
c_j,	$j = 1, ..., n$	cena jedinice proizvoda P_j, $j = 1, ..., n$
b_i,	$i = 1, ..., m$	minimalna dnevna potreba sastojka K_i koju propisuje dijeta, $i = 1, ..., m$.

Treba odrediti količinu x_i proizvoda P_i u dnevnoj ishrani tako da ishrana bude što jeftinija a da pritom budu zadovoljene sve dnevne potrebe u sastojcima $K_1, ..., K_m$ koje dijeta propisuje. Matematički model je:

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \; i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geqslant 0, \; j = 1, \ldots, n$$

Dobijen je ponovo problem linearnog programiranja.

3. Problem optimalnog rasporeda radne snage

Neka je dato n mašina $M_1, \ldots, M_n$ na koje treba rasporediti n radnika $R_1, \ldots, R_n$. Poznato je da radnik R_i na mašini M_j dnevno donese dobit od c_{ij} novčanih jedinica. Radnike treba tako rasporediti da preduzeće ima maksimalnu dnevnu zaradu. Neka je

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ako je radnik } R_i \text{ raspoređen na mašinu } M_j \\ 0 & \text{u ostalim slučajevima} \end{cases}$$

Tada se problem može napisati u obliku

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \; i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, n$$

Zbog poslednjeg uslova ovaj problem spada u klasu problema diskretnog programiranja. Međutim, uslovi $x_{ij} \in \{0,1\}$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$ mogu se zameniti uslovima $x_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, \ldots, n$. Na taj način se dobija novi problem – problem linearnog programiranja. Pokazuje se da se sva optimalna rešenja starog problema sadrže među optimalnim rešenjima novog problema, a primena simpleks metode* na novi problem daje baš rešenje koje zadovoljava uslove $x_{ij} \in \{0,1\}$, $i,j = 1, \ldots, n$.

Napomenimo uzgred da se problem praktično ne može rešavati ispitivanjem svih mogućnosti (ima ih n!) jer je broj tih mogućnosti ogroman čak i za relativno malo n (npr. $10! = 3628800$), dok je za $n \geqslant 30$ taj broj tako veliki da ispitivanje svih mogućnosti prevazilazi mogućnosti današnjih elektronskih računara.

4. Izbor borbenih sredstava

Neka se za uništenje neke grupe ciljeva koristi m tipova sredstava naoružanja $S_1, \ldots, S_m$. Neka je dalje

* Simpleks metoda je najpoznatija metoda za rešavanje problema linearnog programiranja. Ova metoda je izložena u glavi IV.

c_j,	$j = 1, \ldots, m$	srednja vrednost broja uništenih ciljeva jednim borbenim sredstvom S_j, $j = 1, \ldots, m$
v_j,	$j = 1, \ldots, m$	vrednost jednog borbenog sredstva tipa S_j, $j = 1, \ldots, m$
b_j,	$j = 1, \ldots, m$	maksimalna dozvoljena vrednost borbenog sredstva tipa S_j koja se može upotrebiti
d		maksimalna ukupna vrednost borbenih sredstava koja se može upotrebiti.

Ako sa x_j označimo broj upotrebljenih borbenih sredstava tipa S_j, $j = 1, \ldots, m$ matematički model problema maksimizacije srednjeg broja uništenih ciljeva je

$$\max \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} v_j x_j \leq d$$

$$v_j x_j \leq b_j, \qquad j = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, m$$

Dve najvažnije metode za rešavanje problema linearnog programiranja navedene su u glavi IV. Druge metode zainteresovani čitalac može naći npr. u Dantzig [D.3], Simonnard [S.1]. S obzirom da su modeli realnih problema obično velikih razmera (više stotina promenljivih i/ili ograničenja) posebno skrećemo pažnju na metode specijalno konstruisane za ovakve probleme (videti npr. Lasdon [L.1]).

Problem nelinearnog programiranja, kod koga su funkcija cilja i/ili funkcije ograničenja nelinearne, zanimljiv je ne samo sa teoretskog nego i sa praktičnog stanovišta. Naime, u mnogim pojavama je zavisnost među promenljivim nelinearna te se odgovarajući matematički modeli mogu adekvatno izraziti jedino kao problemi nelinearnog programiranja. Sledeći primeri ilustruju ovakve situacije.

1. Problem pakovanja proizvoda.

Svakog meseca treba upakovati i poslati 100 m^3 neke hemikalije. Hemikalija se transportuje u 100 jednakih kontejnera oblika pravouglog parelepipeda dužine x, širine y i visine z. Bočne stranice i dno kontejnera prave se od materijala čija se cena može zanemariti, ali koga na raspolaganju ima samo 400 m^2. Materijal za prednju i zadnju stranu košta 100 dinara po m^2, a materijal za vrh 150 dinara po m^2. Ovih materijala ima u neograničenim količinama. Treba odrediti optimalne dimenzije kontejnera. Matematički model glasi:

$$\min 150\,xy + 200\,xz$$

$$xyz = 1$$

$$xy + 2yz \leqslant 4$$
$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, z \geqslant 0.$$

Dobijeni problem nelinearnog programiranja spada u klasu problema tzv. geometrijskog programiranja. Za ovu klasu postoje posebne metode rešavanja (videti npr. Duffin, Peterson, Zener [D.8]). Naravno, za rešavanje ovog problema mogu se upotrebiti i opšte metode nelinearnog programiranja opisane u ovoj knjizi.

2. Diskretni problem optimalnog upravljanja

Neka u nekoj hemijskoj reakciji koja se odvija u toku jednog časa učestvuje n supstanci $S_1, \ldots, S_n$. Svakih 5 minuta se na reakciju može uticati izmenom temperature i pritiska u reaktoru. Označimo sa $x_i(t_j)$ koncentraciju supstance S_i u momentu $t_j = t_o + 5j$, gde je $i = 1, \ldots, n$; $j = 0, \ldots, 12$. Pretpostavimo da se koncentracija supstance S_i ponaša prema diferencijskoj jednačini

$$x_i(t_{j+1}) = G_i(x_1(t_j), \ldots, x_n(t_j), \theta_j, p_j),$$

gde su sa θ_j i p_j označeni temperatura i pritisak u vremenskom intervalu od t_j do t_{j+1}. Pritom mora biti

$$a \leqslant \theta_j \leqslant b \quad i \quad c \leqslant p_j \leqslant d .$$

Neka je c_i cena jedinice supstance S_i. Po završetku procesa dobit iznosi

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i(t_{12}) - x_i(t_o)) .$$

Matematički model optimalnog upravljanja ovim hemijskim procesom je

$$\begin{aligned} &\max \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i(t_{12}) - x_i(t_o)) \\ &x_i(t_{j+1}) = G_i(x_1(t_j), \ldots, x_n(t_j), \theta_j, p_j), \quad i = 1, \ldots, n \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j = 0, \ldots, 11 \\ &a \leqslant \theta_j \leqslant b \quad j = 0, \ldots, 11 \\ &c \leqslant p_j \leqslant d \quad j = 0, \ldots, 11 . \end{aligned}$$

Pretpostavlja se da su $x_i(t_o)$, $i = 1, \ldots, n$ date veličine. Dobijen je problem nelinearnog programiranja sa $24 + 12n$ promenljivih i isto toliko ograničenja.

Napomenimo da se u stvarnosti procesi obično opisuju direrencijalnim jednačinama. No ukoliko se koncentracije ne menjaju suviše brzo, proces se može na zadovoljavajući način opisati i diferencijskim jednačinama.

3. Problem planiranja proizvodnje

Neka su $x_1, \ldots, x_n$ količine proizvoda $P_1, \ldots, P_n$, respektivno, koje će fabrika F proizvesti. Porastom količine proizvoda na tržištu njegova cena opada. Jednostavnosti radi uzećemo da na tu količinu utiče isključivo fabrika F i da je pomenuta zavisnost linearna, tj. da je cena c_j jedinice proizvoda P_j data sa $a_j - b_j x_j$, $j = 1, \ldots, n$. Pretpostavimo takođe da se za proizvodnju koristi m sirovina $S_1, \ldots, S_m$ i da je

d_{ij},	$i = 1, \ldots, m$ $j = 1, \ldots, n$	količina sirovine S_i koja je potrebna za proizvodnju jedinice proizvoda P_j
e_i,	$i = 1, \ldots, m$	ukupna raspoloživa količina sirovine S_i.

Problem nalaženja optimalnog plana proizvodnje može se izraziti matematičkim modelom

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (a_j - b_j x_j) x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j \leqslant e_i, \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, n$$

Dobijeni problem spada u klasu tzv. problema kvadratnog programiranja (funkcija cilja je kvadratna a ograničenja su linearna). Za ovakve probleme postoje posebne metode (npr. Künzi-Krelle [K.9], Boot [B.7]), a mogu se primeniti i opšte metode nelinearnog programiranja.

Metode za rešavanje problema nelinearnog programiranja opisane su u glavama V, VI i VII. Druge metode mogu se naći npr. u Polak [P.4], Zoutendijk [Z.5].

Kako bismo upotpunili sliku o problemima matematičkog programiranja navešćemo po jedan primer iz oblasti diskretnog programiranja, stohastičkog programiranja i teorije igara, iako u ovoj knjizi nisu obrađene osobine i način rešavanja ovih problema.

1. Problem izbora projekata

Predloženo je n projekata $P_1, \ldots, P_n$. Usvajanje projekta P_j donelo bi dobit c_j. Za realizaciju projekata potrebno je m profila stručnjaka. Neka je

b_i,	$i = 1, \ldots, m$	ukupan broj raspoloživih stručnjaka i-tog profila
a_{ij},	$i = 1, \ldots, m$ $j = 1, \ldots, n$	broj stručnjaka i-tog profila potrebnih za realizaciju projekta P_j.
$x_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$		ako je P_j usvojen u suprotnom

Matematički model izbora projekta koji treba usvojiti je

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \; i = 1, \ldots, m$$
$$x_j \in \{0,1\}, \; j = 1, \ldots, n$$

Navedeni problem spada u klasu problema celobrojnog programiranja. Ovi problemi karakterišu se time što neke (a možda i sve) promenljive uzimaju vrednosti iz nekog diskretnog skupa. Za rešavanje ovih problema razrađene su mnoge metode koje se po koncepciji veoma razlikuju od metoda izloženih u ovoj knjizi. Videti npr. Hu [H.6], Geoffrion [G.2], Korbut–Finkeljštajn [K.4].

Navedimo sada jedan jednostavan problem iz stohastičkog programiranja.

2. Problem oročavanja novca u banci

Neka osoba raspolaže sa 10000 dinara i očekuje račun čiji iznos neće biti veći od 8000 dinara ni manji od 5000 dinara. Osoba želi da oroči u banci izvesnu sumu novca koja joj donosi 10% kamate, no ako u trenutku plaćanja računa ne bude imala dovoljno novca mora ga pozajmiti uz kamatu od 20%. Koliko novca osoba treba da oroči ako je poznato da su svi iznosi računa između 5000 i 8000 jednako verovatni? Neka je x ostatak novca, b iznos računa, $y = (|x-b| + x-b)/2$ a $z = (|b-x| + b-x)/2$. Jasno je da y, odnosno z označavaju „prebačaj", odnosno „podbačaj" u proceni iznosa računa. Matematički model je

$$\min \frac{1}{10}y + \frac{1}{5}z = \frac{3}{20}|x-b| + \frac{1}{20}(b-x)$$

pod uslovom

$$0 \leqslant x \leqslant 10000$$
b ima uniformnu raspodelu na [5000, 8000]

S ozbirom da b nije poznato sve dok račun ne stigne, a da x treba odrediti pre toga, jasno je da je ovo problem nove vrste i da zahteva drukčiji pristup od problema nelinearnog programiranja. Više primera ove vrste, kao i metode za rešavanje čitalac može naći u Judin [J.1].

Teorija igara je zasebna grana optimizacije. Naime, u svim ranijim primerima je u okviru datih ograničenja trebalo naći „najbolje" rešenje. U teoriji igara igrač treba da odredi opet „najbolje" rešenje ali pritom treba da vodi računa ne samo o ograničenjima nego i o mogućim postupcima ostalih igrača čiji su interesi često u suprotnosti sa njegovim. Sa ove tačke gledišta, raniji optimizacioni problemi bi mogli da se shvate kao igre sa jednim igračem. Razume se, za teoriju igara, stricto sensu, su od značaja slučajevi kada postoje bar dva igrača. Sledeći primer, iako jednostavan, ilustruje rečeno, a istovremeno ukazuje i na mogućnosti primene teorije igara.

3. Problem iz vojne strategije

Dve zaraćene strane, Crveni i Plavi, raspolažu redom sa 6, odnosno 5 vojnih jedinica. Borbe se vode oko dva vojna objekta A i B. Zaposedanje objekta A donosi 30 jedinica korisnosti onom ko ga osvoji, a –30 protivniku, dok zaposedanje objekta B „vredi" 25 jedinica. Objekt osvaja onaj protivnik koji na njega uputi veći broj vojnih jedinica (u slučaju istog broja smatra se da objekt ostaje neosvojen). Kako Crveni treba da raspodeli svoje vojne jedinice na objekte A i B da bi dobio što je više moguće jedinica korisnosti? Razume se, slično pitanje se može postaviti i za Plavog. Pretpostavlja se da do početka borbe Crveni i Plavi ne znaju ništa o odluci protivnika.

Da bismo formulisali matematički model ovog problema primetimo najpre da Crveni ima sedam tzv. „čistih strategija": I: da na A uputi svih 6 vojnih jedinica, II: da na A uputi 5, na B jednu vojnu jedinicu; ..., VII: da na B uputi svih 6 vojnih jedinica. Slično ovome, Plavi ima 6 „čistih" strategija I', II', ..., VI'. Sada se dobit Crvenog može prikazati tablično na sledeći način

		PLAVI					
		I'	II'	III'	IV'	V'	VI'
CRVENI	I	30	5	5	5	5	5
	II	25	30	5	5	5	5
	III	–5	25	30	5	5	5
	IV	–5	–5	25	30	5	5
	V	–5	–5	–5	25	30	5
	VI	–5	–5	–5	–5	25	30
	VII	–5	–5	–5	–5	–5	25

Već na prvi pogled vidi se da Crveni može da obezbedi dobit od bar 5 jedinica korisnosti, ma kako postupio Plavi: dovoljno je da odabere čistu strategiju I ili II. Međutim, na taj način on ne bi mogao da postigne dobit veću od 5 (jer Plavi, pretpostavljajući ovo rezonovanje, može da odabere npr. čistu strategiju III'). Na sličan način se vidi da nikakvo logičko zaključivanje ne može Crvenom sugerisati neku čistu strategiju, jer bi Plavi, stavljajući se u položaj Crvenog, mogao da ponovi to zaključivanje i tako sazna koju čistu strategiju ovaj namerava da upotrebi i da mu tako onemogući dobitak veći od 5. Da bi ovo izbegao, Crveni može da čiste strategije I, II, ..., VII bira na slučajan način, sa verovatnoćama $x_1, ..., x_7$ respektivno.

Naravno, slično rasuđivanje se može izvesti i za Plavog pa će i on svoje čiste strategije I', ..., VI' birati slučajno, sa verovatnoćama $y_1, ..., y_6$ respektivno. Matematički model će biti (za Crvenog)

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x,y)$$

gde je $x = (x_1, ..., x_7)$, $y = (y_1, ..., y_6)$,

$$X = \{ (x_1, ..., x_7) \in R^7 \mid x_1 \geqslant 0, ..., x_7 \geqslant 0, x_1 + ... + x_7 = 1 \}$$

(skup tzv. mešovitih strategija Crvenog)

$$Y = \{ (y_1, ..., y_6) \in R^6 \mid y_1 \geqslant 0, ..., y_6 \geqslant 0, y_1 + ... + y_6 = 1 \}$$

(skup mešovitih strategija Plavog)

i $\quad F(x,y) = \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{6} a_{ij} x_i y_j$ (matematičko očekivanje dobiti Crvenog)

a a_{ij} su odgovarajući elementi tablice. (Ovakva tablica se obično zove matrica igre, te se slične igre često zovu matrične igre.) Slučaj kada se bira jedna jedina čista strategija je ovde takođe uključen: dovoljno je uzeti da je odgovarajuća komponenta mešovite strategije jednaka 1, a ostale nuli. Matematički model (za Plavog) glasi, kao što je lako videti

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x,y)$$

Važno je napomenuti da je

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x,y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x,y)$$

(po teoremi J. von Neumann-a; videti npr. Owen [O.1], Raghavan-Parthasarathy [P.1]). Vektori $\hat{x}$ i $\hat{y}$ za koje se ova jednakost postiže zovu se optimalne mešovite strategije za Crvenog, odnosno Plavog.

Zanimljivo je da se problem nalaženja optimalnih strategija u slučaju matričnih igara može svesti na rešavanje problema linearnog programiranja (videti McKinsey [M.2]) te se mogu upotrebiti metode opisane u glavi IV ove knjige.

Teoriji igara je posvećen veliki broj članaka i monografija; spomenućemo ovde samo neke: McKinsey [M.2], von Neumann, Morgenstern [V.2], Morgenstern [M.4], Owen [O.1], Raghavan, Parthasarathy [P.1], Burger [B.8], Karlin [K.2] i drugi. Teorija igara (i njene metode) imaju primene i u matematičkoj statistici, videti Blackwell, Girschick [B.6], Wald [W.1], McKinsey [M.2]. U ovim knjigama će čitalac naći i mnoge druge primene teorije igara.

Na kraju reč-dve o oznakama koje su korišćene u knjizi. Lista svih korišćenih oznaka bi zacelo bila dugačka. Stoga ćemo izostaviti objašnjenja za oznake čije je značenje jasno ili koje su opšte prihvaćene.

– R^n euklidski prostor dimenzije n

– $\langle x,y \rangle$ skalarni proizvod vektora x i y. U ovoj knjizi koristimo samo skalarni proizvod definisan sa $\langle x,y \rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$, gde je $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$

– $\|x\|$ norma vektora x definisana sa $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$

– $\|A\|$ norma matrice A. Iz konteksta će uvek biti jasno koja se od matričnih normi koristi

– U matričnim formulama vektor shvatamo kao matricu sa jednom kolonom

– A^T Matrica dobijena transponovanjem matrice A

– $x \geqslant y$ ako je $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ navedena oznaka znači $x_1 \geqslant y_1$, ..., $x_n \geqslant y_n$

– $\mathring{C}$ unutrašnjost skupa C

– $\overline{C}$ adherencija (zatvorenje) skupa C

– ∂C granica skupa C

– ∇f gradijent funkcije f, tj $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

– $f \mid X$ restrikcija funkcije f na skup X

– (x_n) niz čiji je n-ti član x_n, $n = 1, 2, ...$

– Hesijan funkcije f: $R^n \to R$ u tački x je kvadratna matrica reda n: $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]$

GLAVA I
ELEMENTI KONVEKSNE ANALIZE

Cilj ove glave je da uvede neke neophodne pojmove o konveksnim skupovima i funkcijama. Biće reči samo o pojmovima i teoremama koji će se koristiti u daljem izlaganju. Stoga će biti izostavljene mnoge činjenice koje su od značaja u konveksnoj analizi. Čitalac može naći opširnije izlaganje elemenata konveksne analize u Valentine [V.1], Rockafellar [R.4].

1.1. Konveksni skupovi

DEFINICIJA 1.1.1. Skup $C \subseteq R^n$ naziva se konveksnim ako i samo ako za svaki $x,y \in C$ i $\lambda \in [0,1]$ važi $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.

Drugim rečima, konveksan skup sa svake dve svoje tačke sadrži i duž koja ih spaja. Iz definicije se neposredno može zaključiti da je prazan skup konveksan. Trivijalni primeri konveksnih skupova su takođe jednočlan skup $\{x\}$ i čitav prostor R^n. Lako je dokazati da je npr. skup rešenja sistema linearnih jednačina i nejednačina

$$Ax \geqslant b, Cx = d$$

konveksan. Ovaj primer će biti od značaja u daljem izlaganju.

TEOREMA 1.1.1. Presek proizvoljne familije konveksnih skupova je konveksan skup.

DOKAZ: Neka su $C_i, i \in I$ konveksni skupovi i neka $x,y \in \bigcap_{i\in I} C_i$. Tada za svaki $\lambda \in [0,1]$ i svaki $i \in I$ važi $\lambda x + (1-\lambda)y \in C_i$ (zbog konveksnosti C_i). No tada je $\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap_{i\in I} C_i$.♦

TEOREMA 1.1.2. Neka su C i D konveksni skupovi a λ i μ realni brojevi. Tada je skup $\lambda C + \mu D = \{\lambda x + \mu y \mid x \in C, y \in D\}$ konveksan.

Dokaz sledi neposredno iz definicije konveksnog skupa.

DEFINICIJA 1.1.2. Kažemo da je tačka $b \in R^n$ konveksna kombinacija tačaka $x_1, ..., x_m \in R^n$ ako i samo ako postoje realni brojevi $\lambda_1, ..., \lambda_m$ takvi da je

$$b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\,; \qquad \lambda_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\,; \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\,.$$

TEOREMA 1.1.3. Skup $C \subseteq R^n$ je konveksan ako i samo ako sadrži sve konveksne kombinacije svojih tačaka.

DOKAZ: Ako skup sadrži sve konveksne kombinacije svojih tačaka, onda specijalno sadrži i sve kombinacije oblika

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\,;\ \lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0; \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1; \qquad x_1, x_2 \in C\,,$$

pa je na osnovu definicije 1.1.1. konveksan.

Neka je C konveksan skup. Indukcijom ćemo pokazati da C tada sadrži sve konveksne kombinacije svojih tačaka. Za $m = 2$ iz konveksnosti C sledi da konveksna kombinacija

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C \qquad \text{ako} \qquad x_1, x_2 \in C\,.$$

Pretpostavimo da sve konveksne kombinacije ne više od $m-1$ tačaka skupa C pripadaju C. Neka je

$$b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$$

konveksna kombinacija tačaka $x_i \in C$, $i = 1, \ldots, m$. Ako je $\lambda_m = 0$, iz induktivne pretpostavke sledi $b \in C$. Ako je $\lambda_m = 1$, onda $b = x_m \in C$. Pretpostavimo da je $0 < \lambda_m < 1$. Tada važi

$$b = (1-\lambda_m) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_m)} x_i + \lambda_m x_m\,.$$

Kako je

$$\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_m)} \geqslant 0 \ \text{ i } \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_m)} = 1\,,$$

to na osnovu induktivne pretpostavke sledi da $\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_m)} x_i \in C$, pa $b \in C$ kao konveksna kombinacija dve tačke iz C.♦

DEFINICIJA 1.1.3. Neka je $A \subseteq R^n$. Presek svih konveksnih skupova iz R^n koji sadrže A nazivamo konveksni omotač skupa A i označavamo sa conv A.

TEOREMA 1.1.4. Konveksni omotač skupa A jednak je skupu svih konveksnih kombinacija tačaka iz A.

DOKAZ: Označimo skup svih konveksnih kombinacija tačaka iz A sa C. Jasno je da je conv A konveksan i da $A \subseteq$ conv A. Na osnovu teoreme 1.1.3. sledi da conv A sadrži sve konveksne kombinacije svojih tačaka a tim pre sve konveksne kombinacije tačaka iz A. Dakle $C \subseteq$ conv A. Dokažimo i obratnu inkluziju. Dokažimo najpre da je C konveksan skup. Zaista, neka $x_1, x_2 \in C$. Tada:

$$x_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i; \quad \alpha_i \geq 0,\ a_i \in A,\ i = 1, \dots, m; \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

$$x_2 = \sum_{i=1}^{p} \beta_i b_i; \quad \beta_i \geq 0,\ b_i \in A,\ i = 1, \dots, p; \quad \sum_{i=1}^{p} \beta_i = 1 .$$

Za proizvoljan $\lambda \in [0,1]$ tačka

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{p} (1-\lambda)\beta_i b_i$$

pripada C kao konveksna kombinacija tačaka $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_p \in A$. Dakle, C je konveksan skup i sadrži A. Prema tome važi conv $A \subseteq C$.♦

TEOREMA 1.1.5. Unutrašnjost i adherencija konveksnog skupa su konveksni skupovi.

DOKAZ: Neka je C konveksan skup i $\mathring{C}$ njegova unutrašnjost. Ako je $\mathring{C} = \emptyset$ tvrđenje je trivijalno. Neka je $\mathring{C} \neq \emptyset$ i $y, z \in \mathring{C}$. Tada postoji $\epsilon > 0$ tako da su kugle

$$B_\epsilon(y) = \{ x \in R^n \mid \|x-y\| \leq \epsilon \} \quad , \ B_\epsilon(z) = \{ x \in R^n \mid \|x-z\| \leq \epsilon \}$$

podskupovi skupa C. Neka $\lambda \in [0,1]$. Dokažimo da je $B_\epsilon(\lambda y + (1-\lambda)z) \subseteq C$. Ako je $x \in B_\epsilon(\lambda y + (1-\lambda)z)$ onda je $x = \lambda y + (1-\lambda)z + \eta e$, gde je $\eta \in [0,\epsilon]$ a $\|e\| = 1$. S obzirom da $y + \eta e \in B_\epsilon(y) \subseteq C$ i $z + \eta e \in B_\epsilon(z) \subseteq C$ i da je C konveksan skup sledi da

$$x = \lambda(y + \eta e) + (1-\lambda)(z + \eta e) \in C$$

Dakle, $B_\epsilon(\lambda y + (1-\lambda)z) \subseteq C$, tj. $\lambda y + (1-\lambda)z \in \mathring{C}$.

Neka je C konveksan skup i $\overline{C}$ njegova adherencija. Neka su $y, z \in \overline{C}$. Tada postoje nizovi (y_n) i (z_n) tačaka skupa C koji konvergiraju tačkama y i z, respektivno. Neka je $\lambda \in [0,1]$. Tada niz $(\lambda y_n + (1-\lambda)z_n)$ konvergira ka $\lambda y + (1-\lambda)z$ pa $\lambda y + (1-\lambda)z \in \overline{C}$.♦

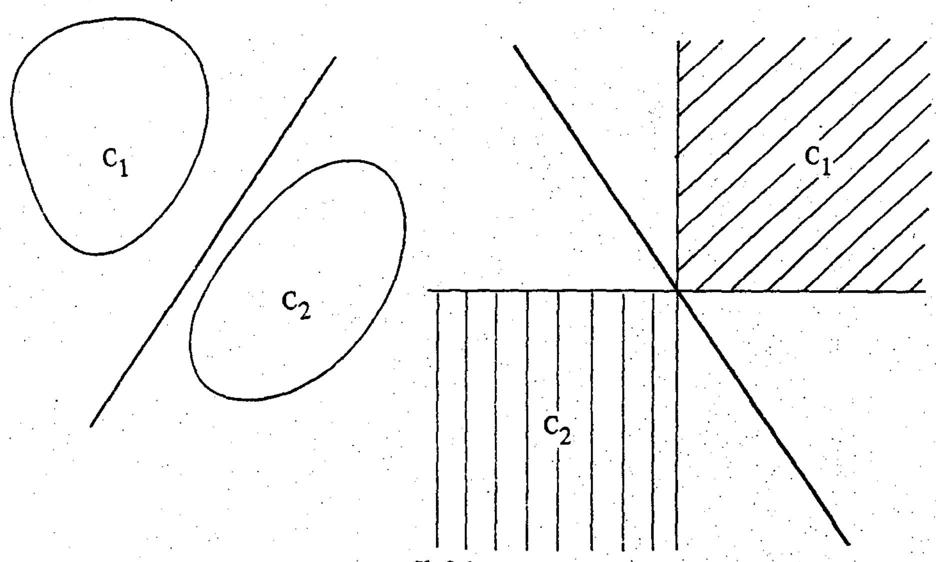
TEOREMA 1.1.6. Neka je C zatvoren konveksan skup i $\mathring{C} \neq \emptyset$. Tada je $\overline{\mathring{C}} = C$.

DOKAZ: S obzirom da je $\mathring{C} \subseteq C$, svakako je $\overline{\mathring{C}} \subseteq \overline{C} = C$. Neka $x \in C$ i neka $y \in \mathring{C}$. Slično kao u dokazu prethodne teoreme može se pokazati da tačke oblika $\lambda y + (1-\lambda)x$ pripadaju $\mathring{C}$ za $\lambda \in (0,1)$. No, tada tačke niza $(\frac{1}{n} y + (1 - \frac{1}{n})x)$ pripadaju $\mathring{C}$ a niz konvergira ka x. Sledi da $x \in \overline{\mathring{C}}$ pa važi i $C \subseteq \overline{\mathring{C}}$.♦

1.2. Teoreme o razdvajanju

U daljem izlaganju koristićemo neke pojmove iz n-dimenzione geometrije koji predstavljaju prirodna uopštenja pojmova dobro poznatih iz analitičke geometrije.

Skup $H = \{ x \in R^n \mid \langle c,x \rangle = d,\ c \in R^n,\ c \neq 0 \}$ nazivamo hiperravan a skupove $\{ x \in R^n \mid \langle c,x \rangle \leq d \}$ i $\{ x \in R^n \mid \langle c,x \rangle \geq d \}$ nazivamo poluprostorima određenim hiperravni H. Intuitivno je jasno da se između dva disjunktna konveksna skupa može postaviti bar jedna hiperravan (sl. 2.1.).



Sl. 2.1.

U ovom odeljku ćemo to i dokazati. Sledeća teorema nam je potrebna za dokaz teoreme o razdvajanju tačke i skupa (teorema 1.2.2), koja ima važnu ulogu u dokazu ostalih teorema o razdvajanju.

TEOREMA 1.2.1. Neka je $C \neq \emptyset$ zatvoren konveksan skup i $x \notin C$. Tada postoji jedna i samo jedna tačka $u \in C$ takva da je

$$\|x-u\| = \inf_{y \in C} \|x-y\| \tag{2.1}$$

DOKAZ: Neka $v \in C$. Skup $V = \{ z \mid \|z-x\| \leqslant \|v-x\|,\ z \in C \}$ je ograničen i zatvoren, prema tome kompaktan. Neprekidna funkcija $\varphi(z) = \|z-x\|$ dostiže stoga svoj infinimum na skupu V, recimo u tački u. Neka je y proizvoljna tačka skupa C. Ako $y \in V$, onda je $\|u-x\| \leqslant \|y-x\|$. Ukoliko $y \notin V$, onda je $\|y-x\| > \|v-x\| \geqslant \|u-x\|$. Dakle, pokazali smo da tačka koja zadovoljava (2.1) postoji. Pokažimo da ne mogu postojati dve različite tačke koje zadovoljavaju (2.1). Pretpostavimo suprotno: neka su u' i u" elementi skupa C i neka je

$$\|x-u'\| = \|x-u''\| = \inf_{y \in C} \|x-y\|. \tag{2.2}$$

Imamo:

$$2\|x-u'\|^2 = \|x-u'\|^2 + \|x-u''\|^2 =$$

$$= \left(x - \frac{u'+u''}{2} + \frac{u''-u'}{2},\ x - \frac{u'+u''}{2} + \frac{u''-u'}{2}\right) +$$

$$+ \left(x - \frac{u'+u''}{2} + \frac{u'-u''}{2},\ x - \frac{u'+u''}{2} + \frac{u'-u''}{2}\right) =$$

$$= 2\langle x - \frac{u'+u''}{2}, x - \frac{u'+u''}{2}\rangle + 2\langle \frac{u'-u''}{2}, \frac{u'-u''}{2}\rangle =$$

$$= 2\|x - \frac{u'+u''}{2}\|^2 + 2\|\frac{u'-u''}{2}\|^2 > 2\|x - \frac{u'+u''}{2}\|^2 .$$

Znači, važi

(2.3) $$\|x - \frac{u'+u''}{2}\| < \|x-u'\| .$$

No kako zbog konveksnosti skupa C tačka $\frac{u'+u''}{2}$ pripada C, nejednakost (2.3) protivreči relaciji (2.2).♦

TEOREMA 1.2.2. (O razdvajanju tačke i skupa.) Neka je C zatvoren konveksan skup i $\hat{x} \notin C$. Tada postoji $c \in R^n$ tako da je

$$\langle c,\hat{x}\rangle < \langle c,y\rangle \text{ za svaki } y \in C .$$

DOKAZ: Neka je $u \in C$ tačka za koju važi

$$\|\hat{x}-u\| = \inf_{y \in C} \|\hat{x}-y\| .$$

Dokažimo najpre da je za proizvoljan $y \in C$

(2.4) $$\langle u-\hat{x},y\rangle \geqslant \langle u-\hat{x},u\rangle .$$

Neka je $z = \lambda y + (1-\lambda)u$, gde je $\lambda \in (0,1]$. Budući da je C konveksan skup, $z \in C$. Dalje je

$$\|\hat{x}-z\|^2 = \lambda^2 \|u-y\|^2 + 2\lambda\langle u-\hat{x}, y-u\rangle + \|\hat{x}-u\|^2 .$$

Kako je $\|\hat{x}-z\|^2 \geqslant \|\hat{x}-u\|^2$, sledi da je

$$\lambda\|u-y\|^2 + 2\langle u-\hat{x}, y-u\rangle \geqslant 0 \quad \text{za svaki } \lambda \in (0,1].$$

Ukoliko bi bilo $\langle u-\hat{x}, y-u\rangle < 0$, onda bi za $\lambda \in (0,1]$ dovoljno blisko nuli bilo $\lambda\|u-y\|^2 + 2\langle u-\hat{x}, y-u\rangle < 0$, što je kontradikcija. Dakle, $\langle u-\hat{x}, y-u\rangle \geqslant 0$ pa je (2.4) dokazano. Dalje je zbog (2.4) i zbog $u \neq \hat{x}$, za svaki $y \in C$

$$\langle u-\hat{x}, y\rangle \geqslant \langle u-\hat{x}, u\rangle > \langle u-\hat{x}, \hat{x}\rangle ,$$

te je dovoljno uzeti $c = u-\hat{x}$. ♦

Geometrijski, prethodna teorema može se tumačiti na sledeći način: Kroz svaku tačku $\hat{x}$ izvan zatvorenog konveksnog skupa C može se postaviti hiperravan $H = \{ x \in R^n \mid \langle c,x\rangle = d \}$ koja nema zajedničkih tačaka sa C. Pritom se c može izabrati kao u dokazu prethodne teoreme, a može se npr. uzeti $d = \langle c,\hat{x}\rangle$.

TEOREMA 1.2.3. Neka je $\hat{x}$ granična tačka konveksnog skupa C. Tada postoji $c \in R^n$, $c \neq 0$, tako da je

$$\langle c,\hat{x}\rangle \leqslant \langle c,y\rangle \quad \text{za svaki } y \in C.$$

DOKAZ: S obzirom da je $\hat{x}$ granična tačka skupa C to postoji niz tačaka (x_j), $x_j \to \hat{x}$, $j \to \infty$, i $x_j \in R^n \setminus \bar{C}$ za sve $j \in N$. Prema prethodnoj teoremi za svaki $j \in N$ postoji tačka $c_j \in R^n$ tako da je

$$(2.5) \qquad \langle c_j, x_j \rangle < \langle c_j, y \rangle \qquad \text{za svaki } y \in \bar{C}.$$

Bez umanjenja opštosti možemo uzeti da je $\|c_j\| = 1$, $j = 1, 2, \ldots$. No tada postoji konvergentan podniz (c_j), $j \in J \subseteq N$. Neka $c_j \to c$, $j \to \infty$, $j \in J$. Jasno je da je $c \neq 0$. Ako u (2.5) uzmemo $j \to \infty$, $j \in J$ dobijamo

$$\langle c, \hat{x} \rangle \leqslant \langle c, y \rangle \qquad \text{za svaki } y \in \bar{C},$$

a tim pre to važi za svaki $y \in C$. ♦

Geometrijski, ova teorema kaže da u svakoj graničnoj tački konveksnog skupa postoji bar jedna hiperravan koja sadrži tu tačku, a čitav skup C se nalazi u jednom od dva zatvorena poluprostora određena tom hiperravni. Takva hiperravan se obično naziva hiperravan oslonca; njena jednačina (uz oznake iz prethodnog dokaza) se može napisati u obliku $\langle c, x \rangle = \langle c, \hat{x} \rangle$.

TEOREMA 1.2.4. (O razdvajanju dva skupa.) Neka su C i D neprazni disjunktni konveksni skupovi. Tada postoji $c \in R^n$, $c \neq 0$ tako da je

$$\langle c, x \rangle \leqslant \langle c, y \rangle \qquad \text{za svaki } x \in C, y \in D.$$

DOKAZ: Uočimo skup $E = \{ z \mid z = y - x, x \in C, y \in D \}$. Taj skup je konveksan (videti teoremu 1.1.2). Kako je $C \cap D = \emptyset$ zaključujemo da $0 \notin E$. Ukoliko je 0 spoljašnja tačka za skup E, tj. $0 \in R^n \setminus \bar{E}$, tada prema teoremi 1.2.2 postoji $c \in R^n$ tako da je $\langle c, 0 \rangle < \langle c, z \rangle$ za svaki $z \in E$ i, znači

$$\langle c, x \rangle < \langle c, y \rangle \qquad \text{za svaki } x \in C, y \in D.$$

Ako je pak 0 granična tačka skupa E, tada na osnovu teoreme 1.2.3. sledi da postoji $c \in R^n$, $c \neq 0$ tako da je za svaki $z \in E$ ispunjeno $\langle c, 0 \rangle \leqslant \langle c, z \rangle$, dakle kao i malopre sledi da je

$$\langle c, x \rangle \leqslant \langle c, y \rangle \qquad \text{za svaki } x \in C, y \in D. \; ♦$$

Geometrijski, ovo znači da za svaka dva disjunktna konveksna skupa C i D postoji hiperravan (sa jednačinom $\langle c, x \rangle = d$) takva da su skupovi C i D sadržani u različitim poluprostorima koje ona određuje. Za d se može uzeti npr. $d = \sup_{x \in C} \langle c, x \rangle$.

TEOREMA 1.2.5. Neka su C i D neprazni konveksni skupovi i neka je $\mathring{C} \neq \emptyset$ i $\mathring{C} \cap D = \emptyset$. Tada postoji $c \in R^n$, $c \neq 0$ tako da je

$$\langle c, x \rangle \leqslant \langle c, y \rangle \qquad \text{za svaki } x \in C, y \in D.$$

DOKAZ: Na osnovu teoreme 1.1.5. skup $\mathring{C}$ je konveksan, pa na osnovu prethodne teoreme postoji $c \in R^n$, $c \neq 0$ tako da je

$$\langle c,x\rangle \leqslant \langle c,y\rangle \qquad \text{za svaki } x \in \mathring{C},\ y \in D.$$

No tada će ova nejednakost važiti i za svaki $x \in C$, $y \in D$ zbog neprekidnosti skalarnog proizvoda. ♦

Teoreme o razdvajanju koristiće se često u daljem izlaganju. Napomenimo još da se mogu dokazati i znatno opštije teoreme o razdvajanju konveksnih skupova (npr. u topološkim vektorskim prostorima) koje su od velikog značaja u raznim oblastima matematike. Videti Dunford-Schwarz [D.9], Girsanov [G.3].

1.3. Farkas-ova lema

TEOREMA 1.3.1. (Farkas-ova lema). Neka svako rešenje sistema

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant 0\\ \vdots \qquad\qquad &\quad \vdots\\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant 0 \end{aligned}$$

zadovoljava i nejednačinu

$$(3.2)\qquad b_1x_1 + \ldots + b_nx_n \leqslant 0\,.$$

Tada postoje nenegativni brojevi $y_1, \ldots, y_m$ takvi da je

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m &= b_1\\ \vdots \qquad\qquad &\quad \vdots\\ a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m &= b_n\,. \end{aligned}$$

DOKAZ: Dokaz ćemo izvršiti indukcijom po broju nepoznatih. Bez umanjenja opštosti pretpostavićemo da sistem (3.1) ne sadrži nejednačinu

$$0x_1 + \ldots + 0x_n \leqslant 0\,.$$

Slučaj $n = 1$ je trivijalan. Pretpostavićemo da tvrđenje važi za sistem sa najviše $n-1$ nepoznatih. Neka je U potprostor prostora R^{m+1} koji razapinju kolone matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\\ -b_1 & \cdots & -b_n \end{bmatrix}$$

i neka je $V \subset R^{m+1}$ definisano sa $V = (-\infty, 0]^m \times (-\infty, 0)$. Skupovi U i V su neprazni i konveksni. Takođe je i $U \cap V = \emptyset$, jer bi inače postojalo rešenje sistema (3.1) koje ne zadovoljava (3.2). Prema teoremi 1.2.4 postoji hiperravan koja razdvaja U i V; neka je njena jednačina

$$\langle c,x\rangle = d,$$

gde je $c = (c_1, ..., c_{m+1})$, i neka je npr.

$$c_1z_1 + \ldots + c_mz_m + c_{m+1}z_{m+1} \leqslant d \qquad \text{za svaki } (z_1, ..., z_{m+1}) \in U,$$

$$c_1z_1 + \ldots + c_mz_m + c_{m+1}z_{m+1} \geqslant d \qquad \text{za svaki } (z_1, ..., z_{m+1}) \in V.$$

Uzimajući specijalno $z' = (0, ..., 0) \in U$ i $z'' = (0, ..., 0, -\epsilon) \in V$, gde je $\epsilon > 0$, i stavljajući $\epsilon \to 0$, zaključujemo da je $d = 0$. Stavljajući $z = (-1, 0, ..., 0, -\epsilon) \in V$, gde je $\epsilon > 0$ u drugu nejednačinu i uzimajući da $\epsilon \to 0$, zaključujemo $c_1 \leqslant 0$, i, na sličan način, $c_2 \leqslant 0, ..., c_{m+1} \leqslant 0$.

Dokažimo sada da hiperravan $\langle c,x\rangle = 0$ sadrži skup U. Zaista, kako za svaki $z \in U$ sledi $-z \in U$, zamenjujući z, a zatim $-z$ u nejednačinu

$$\langle c,z\rangle \leqslant 0$$

zaključujemo

$$c_1z_1 + \ldots + c_mz_m + c_{m+1}z_{m+1} = 0 \qquad \text{za svaki } (z_1, ..., z_{m+1}) \in U.$$

U daljem ćemo koristiti činjenicu da kolone matrice A zadovoljavaju jednačinu hiperravni koja razdvaja skupove U i V.

Razlikovaćemo dva slučaja:

1° $c_{m+1} < 0$. Zamenjujući kolone matrice A u jednačinu hiperravni dobijamo

$$c_1a_{1j} + \ldots + c_ma_{mj} - c_{m+1}b_j = 0, j = 1, ..., n.$$

Dovoljno je uzeti

$$y_1 = \frac{c_1}{c_{m+1}}, ..., \qquad y_m = \frac{c_m}{c_{m+1}}$$

i tvrđenje teoreme sledi.

2° $c_{m+1} = 0$. Bar jedan od $c_1, ..., c_m$ mora biti različit od nule. Neka je npr. $c_1 < 0$. Sistem (3.1) i nejednačinu (3.2) napišimo kratkoće radi u vektorskom obliku

(3.1') $$\langle a_i,x\rangle \leqslant 0, \quad i = 1, ..., m$$

(3.2') $$\langle b,x\rangle \leqslant 0$$

gde je $a_i = (a_{i1}, ..., a_{in})$, $i = 1, ..., m$ a $b = (b_1, ..., b_n)$.

Kako je $c_{m+1} = 0$, zamenjujući kolone matrice A u jednačinu hiperravni dobijamo

$$\sum_{i=1}^{m} c_ia_i = 0, \quad \text{ili} \quad -a_1 = \sum_{i=2}^{m} \frac{c_i}{c_1} a_i.$$

Posmatrajmo sistem

$$(3.3) \qquad \langle a_i, x\rangle \leq 0, \qquad i = 1, \dots, m$$

$$\langle -a_1, x\rangle \leq 0 .$$

Kako je vektor $-a_1$ nenegativna linearna kombinacija vektora $a_1, \dots, a_m$ sistemi (3.1') i (3.3) su ekvivalentni. Bar jedna komponenta vektora a_1 različita je od 0; neka je to npr. n-ta komponenta. Množeći bilo nejednačinu $\langle a_1, x\rangle \leq 0$, bilo nejednačinu $\langle -a_1, x\rangle \leq 0$ pogodnim nenegativnim brojem može se nepoznata x_n eliminisati iz preostalih nejednačina sistema (3.3). Dobićemo ekvivalentan sistem oblika

$$(3.4) \qquad \begin{aligned} &\langle a_1, x\rangle \leq 0 \\ &\langle -a_1, x\rangle \leq 0 \\ &\langle \bar{a}_i, x\rangle \leq 0 \qquad i = 2, \dots, m \end{aligned}$$

gde je $\bar{a}_i = (\bar{a}_{i1}, \dots, \bar{a}_{i,n-1}, 0)$. Slično se iz nejednačine $\langle b, x\rangle \leq 0$ može eliminisati x_n; imaćemo

$$(3.5) \qquad \langle \bar{b}, x\rangle \leq 0 ,$$

gde je $\bar{b} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{n-1}, 0)$. Lako je videti da se za svako rešenje $(x_1, \dots, x_{n-1})$ sistema

$$\langle \bar{a}_i, x\rangle \leq 0, \qquad i = 2, \dots, m$$

može odrediti x_n tako da ceo sistem (3.4) bude zadovoljen, a stoga i sistem (3.3), pa i sistem (3.1'). No tada $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ zadovoljava (3.2') a stoga $(x_1, \dots, x_{n-1})$ zadovoljava (3.5). Prema induktivnoj pretpostavci vektor $\bar{b}$ se može napisati u obliku

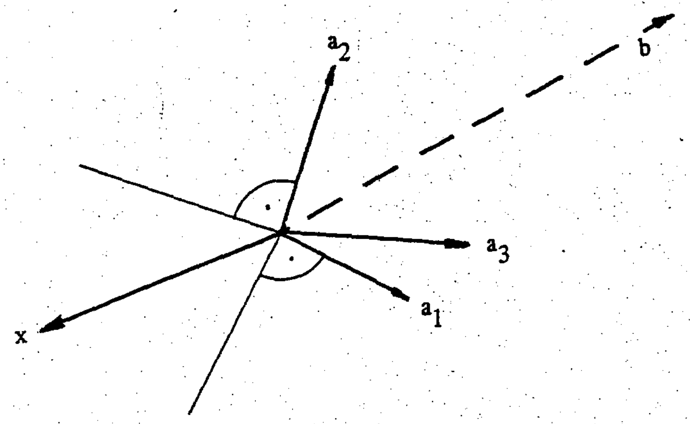
$$\bar{b} = \sum_{i=2}^{m} \lambda_i \bar{a}_i .$$

No kako je svaki od vektora $\bar{a}_i$ nenegativna kombinacija vektora $a_1, \dots, a_m$ i kako se vektor b može dobiti iz vektora $\bar{b}$ i jednog od vektora a_1, $-a_1$ nenegativnim linearnim kombinovanjem, to se dakle vektor b može dobiti kao nenegativna linearna kombinacija vektora $a_1, \dots, a_m$, tj.

$$b = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i, \qquad y_i \geq 0, \qquad i = 1, \dots, m ,$$

što je i trebalo dokazati. ♦

Farkas-ova lema potiče iz 1903. godine i od ključnog je značaja u teoriji sistema linearnih nejednačina, linearnom i nelinearnom programiranju. Njen geometrijski smisao se sastoji u sledećem: Ako svaki vektor koji zaklapa tup ugao sa vektorima $a_1, \dots, a_m$ zaklapa tup ugao i sa vektorom b, tada se vektor b može prikazati kao nenegativna linearna kombinacija vektora $a_1, \dots, a_m$. (sl. 3.1).



Sl. 3.1.

Sledeća teorema se lako izvodi iz Farkas-ove leme.

TEOREMA 1.3.2. Pretpostavimo da sistem

$$(3.6)\qquad \begin{matrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \end{matrix}$$

ima rešenja i da svako njegovo rešenje zadovoljava i nejednačinu

$$(3.7)\qquad c_1x_1 + \ldots + c_nx_n > d\,.$$

Tada postoje nenegativni brojevi $y_1, \ldots, y_m$ tako da je

$$\begin{matrix} a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m = c_1 \\ \vdots \\ a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m = c_n \\ b_1y_1 + \ldots + b_my_m > d \end{matrix}$$

DOKAZ: Uočimo sledeći pomoćni sistem nejednačina:

$$(3.8)\qquad \begin{matrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1z \geqslant 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n - b_mz \geqslant 0 \\ -c_1x_1 - \ldots - c_nx_n + dz \geqslant 0\,. \end{matrix}$$

Pokažimo da svako rešenje sistema (3.8) zadovoljava nejednačinu $-z \geqslant 0$. U suprotnom bi postojalo rešenje sistema (3.8) $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{z})$ sa $\bar{z} > 0$. No onda bi i $(\bar{x}_1/\bar{z}, \ldots, \bar{x}_n/\bar{z}, 1)$ bilo rešenje za (3.8) pa bi $(\bar{x}_1/\bar{z}, \ldots, \bar{x}_n/\bar{z})$ bilo rešenje za (3.6) koje ne zadovoljava (3.7).

Primenjujući Farkas-ovu lemu na sistem (3.8) i nejednačinu $-z \geqslant 0$ zaključujemo da postoje nenegativni brojevi $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$ tako da je

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{m1}\lambda_m - c_1\lambda_{m+1} & = & 0 \\
\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \\
a_{1n}\lambda_1 + \ldots + a_{mn}\lambda_m - c_n\lambda_{m+1} & = & 0 \\
-b_1\lambda_1 - \ldots - b_m\lambda_m + d\,\lambda_{m+1} & = & -1
\end{array}
\tag{3.9}
$$

Pokažimo da je $\lambda_{m+1} > 0$. Zaista, ukoliko bi bilo $\lambda_{m+1} = 0$, onda bi se množenjem nejednačina sistema (3.6) redom sa $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ i sabiranjem dobila nejednačina

$$0x_1 + \ldots + 0x_n \geqslant 1$$

što protivreči pretpostavci da sistem (3.6) ima rešenja.

Deljenjem nejednakosti (3.9) sa λ_{m+1} i sređivanjem dobijamo

$$
\begin{array}{l}
a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m = c_1 \\
\vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\
a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m = c_n \\
b_1y_1 + \ldots + b_my_m = d + \dfrac{1}{\lambda_{m+1}} > d\,,
\end{array}
$$

gde je $y_i = \lambda_i/\lambda_{m+1}$, $i = 1, \ldots, m$, a to je i trebalo dokazati.♦

Teoreme 1.3.1 i 1.3.2 spadaju među takozvane teoreme alternative za sisteme linearnih nejednačina. Razne druge teoreme alternative mogu se naći npr. u Mangasarian [M.1], Kuhn [K.8]. Napomenimo još i da se ove (i neke druge) teoreme alternative mogu dokazati i u slučaju proizvoljnog uređenog polja a ne samo polja realnih brojeva.

1.4. Konveksne funkcije

DEFINICIJA 1.4.1. Neka je $C \subseteq R^n$ konveksan skup. Funkcija $f\colon C \to R$ se naziva konveksnom na C ako i samo ako za svaki $x,y \in C$ i svaki $\lambda \in [0,1]$ važi

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\,.$$

Funkcija $g\colon C \to R$ se naziva konkavnom na C ako i samo ako je funkcija $-g$ konveksna.

Lako je proveriti da su npr. funkcije $f_1(x) = \langle c,x \rangle$ (c – konstantan vektor) i $f_2(x) = \|x\|$ konveksne na R^n.

DEFINICIJA 1.4.2. Neka je $C \subseteq R^n$ konveksan skup. Funkcija $f\colon C \to R$ se naziva strogo konveksnom na C ako i samo ako za svaki $x,y \in C$, $x \neq y$ i svaki $\lambda \in (0,1)$ važi

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\,.$$

Funkcija g: $C \to R$ se naziva strogo konkavnom na C ako i samo ako je funkcija $-g$ strogo konveksna.

Jednostavno je proveriti da je svaka strogo konveksna funkcija i konveksna; međutim, funkcije f_1 i f_2 su konveksne ali nisu strogo konveksne. Funkcija $f(x) = \langle x,Ax\rangle$, gde je A simetrična pozitivno definitna matrica, je strogo konveksna. Zaista,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda^2\langle x,Ax\rangle + 2\lambda(1-\lambda)\langle x,Ay\rangle + (1-\lambda)^2\langle y,Ay\rangle =$$

$$= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + 2\lambda(1-\lambda)\langle x,Ay\rangle - \lambda(1-\lambda)\langle x,Ax\rangle - \lambda(1-\lambda)\langle y,Ay\rangle =$$

$$= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)\langle x-y,A(x-y)\rangle < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

ukoliko je $\lambda \in (0,1)$ i $x \neq y$. Ukoliko bi se za matricu A pretpostavilo samo da je simetrična i pozitivno semidefinitna, funkcija f bi bila konveksna, ali ne i strogo konveksna.

TEOREMA 1.4.1. (Jensen-ova teorema). Neka je funkcija f: $C \to R$ konveksna na konveksnom skupu C i neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $m \geqslant 2$ nenegativni brojevi takvi da je $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$. Tada za proizvoljne $x_1, \ldots, x_m \in C$ važi

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_m f(x_m).$$

DOKAZ: Za $m = 2$ tvrđenje se svodi na definiciju konveksne funkcije. Pretpostavimo da ono važi za m tačaka. Tada za $m+1$ tačku imamo

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m + \lambda_{m+1}x_{m+1}) =$$

$$= f((1-\lambda_{m+1})(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{m+1}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_m}{1-\lambda_{m+1}} x_m) + \lambda_{m+1}x_{m+1}) \leqslant$$

$$\leqslant (1-\lambda_{m+1})\, f(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{m+1}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_m}{1-\lambda_{m+1}} x_m) + \lambda_{m+1} f(x_{m+1}) \leqslant$$

$$\leqslant (1-\lambda_{m+1})\,(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{m+1}} f(x_1) + \ldots + \frac{\lambda_m}{1-\lambda_{m+1}} f(x_m)) + \lambda_{m+1} f(x_{m+1}) =$$

$$= \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_m f(x_m) + \lambda_{m+1} f(x_{m+1}).$$

U prethodnom izvođenju korišćene su redom konveksnost funkcije f i induktivna pretpostavka. Gornji dokaz važi samo ukoliko je $\lambda_{m+1} \neq 1$. Ako je $\lambda_{m+1} = 1$, tada je $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$ pa je tvrđenje trivijalno ispunjeno.♦

TEOREMA 1.4.2. Neka su $f_1, \ldots, f_m$ konveksne funkcije na konveksnom skupu $C \subseteq R^n$, i neka su brojevi $c_1, \ldots, c_m$ nenegativni. Tada je funkcija $f = c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m$ konveksna na C.

DOKAZ: Na osnovu definicije 1.4.1 za svaki $x,y \in C$ i svaki $\lambda \in [0,1]$ imamo

$$f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f_i(x) + (1-\lambda)f_i(y), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Množenjem ovih nejednakosti redom sa c_i i sabiranjem dobijamo

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

pa je funkcija f po definiciji konveksna.♦

TEOREMA 1.4.3. Neka je C konveksan skup. Neka je f: C x S → R konveksna na C za svaki $y \in S$ i neka za svaki $x \in C$ postoji konačan

$$\sup_{y \in S} f(x,y).$$

Tada je funkcija

$$\varphi(x) = \sup_{y \in S} f(x,y)$$

konveksna na C.

DOKAZ: Neka su $x,z \in C$ i $\lambda \in [0,1]$. Tada je

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)z) = \sup_{y \in S} f(\lambda x + (1-\lambda)z,y) \leqslant \sup_{y \in S} [\lambda f(x,y) + (1-\lambda) f(z,y)] \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \sup_{y \in S} f(x,y) + (1-\lambda) \sup_{y \in S} f(z,y) = \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(z).♦$$

POSLEDICA: Ako su g(x) i h(x) konveksne funkcije na konveksnom skupu C, tada je funkcija $\varphi(x) = \max \{ g(x), h(x) \}$ konveksna na C.

DOKAZ: Dovoljno je uzeti $S = \{1,2\}$ i definisati

$$f(x,1) = g(x), \quad f(x,2) = h(x).♦$$

TEOREMA 1.4.4. Neka je f: R → R neopadajuća konveksna funkcija i neka je g: C → R konveksna na konveksnom skupu $C \subseteq R^n$. Tada je funkcija $\varphi(x) = f(g(x))$ konveksna na C.

DOKAZ: Neka $x,y \in C$ i $\lambda \in [0,1]$. Imamo

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(g(\lambda x+(1-\lambda)y)) \leqslant f(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda f(g(x)) + (1-\lambda)f(g(y)) = \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y).♦$$

POSLEDICA: Neka je g konveksna nenegativna funkcija na konveksnom skupu C. Tada je i funkcija $\varphi(x) = [g(x)]^2$ konveksna na C.

DOKAZ: Neka je f: R → R definisana sa

$$f(t) = \{ \begin{array}{l} t^2, t \geqslant 0 \\ 0, t < 0 \end{array}$$

Lako je dokazati da je f konveksna i neopadajuća na R pa je funkcija f(g(x)) konveksna. No, kako je $g(x) \geqslant 0$ za svako x, to je $f(g(x)) = [g(x)]^2$.♦

Dokaz ove posledice lako je izvesti i neposredno iz definicije konveksne funkcije.

TEOREMA 1.4.5. Neka je funkcija $f\colon C \to R$ konveksna na konveksnom skupu C. Tada je skup $K_a = \{x \in C \mid f(x) \leqslant a\}$ konveksan za svaki $a \in R$.

DOKAZ: Ako je $K_a = \emptyset$ tvrđenje je tačno. Pretpostavimo $K_a \neq \emptyset$. Neka je $y, z \in K_a$ i neka $\lambda \in [0,1]$. Imamo

$$f(\lambda y + (1-\lambda)z) \leqslant \lambda f(y) + (1-\lambda) f(z) \leqslant \lambda a + (1-\lambda)a = a$$

pa i $\lambda y + (1-\lambda)z \in K_a$. Znači, K_a je konveksan. ♦

Iz ove teoreme i teoreme 1.1.1 sledi da je skup $X = \{x \in R^n \mid g_i(x) \leqslant 0, i=1,\dots,m\}$ konveksan ukoliko su funkcije g_i, $i = 1, \dots, m$ konveksne na R^n.

TEOREMA 1.4.6. Neka je f konveksna funkcija na konveksnom skupu $C \subseteq R^n$. Tada je f neprekidna u svakoj unutrašnjoj tački skupa C.

DOKAZ: Neka je $z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ unutrašnja tačka skupa C. Neka je $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$; pokažimo da je funkcija $f(x) = f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ neprekidna po prvoj promenljivoj ξ_1 u tački z. Pošto je z unutrašnja tačka skupa C, to postoji interval $I = [\zeta_1 - \eta, \zeta_1 + \eta]$ takav da $\{\xi_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \mid \xi_1 \in I\} \subseteq C$. Pretpostavimo da $f(\xi_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ nije neprekidna u z. Tada postoji monoton niz (ξ_1^j) koji konvergira ka ζ_1, $j \to \infty$ i $\xi_1^j \in I$ takav da je $| f(\xi_1^j, \zeta_2, \dots, \zeta_n) - f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) | \geqslant c > 0$. Neka je npr. $f(\xi_1^j, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \geqslant f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) + c$ za $j \in J$, gde je J beskonačan skup prirodnih brojeva. (Ukoliko je J konačan, onda je $f(\xi_1^j, \zeta_2, \dots, \zeta_n) < f(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) - c$ za $j \in N \setminus J$, a taj slučaj se analogno razmatra).

Pretpostavimo, određenosti radi, da je niz (ξ_1^j) monotono opadajući; slučaj kada je niz monotono rastući se tretira na analogan način. Budući da je f konveksna funkcija i

$$\frac{\zeta_1 + \eta - \xi_1^j}{\eta} > 0, \quad \frac{\xi_1^j - \zeta}{\eta} > 0, \quad \frac{\zeta_1 + \eta - \xi_1^j}{\eta} + \frac{\xi_1^j - \zeta}{\eta} = 1,$$

imaćemo

$$f(\xi_1^j, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = f\Big(\frac{\zeta_1 + \eta - \xi_1^j}{\eta}(\zeta_1, \dots, \zeta_n) + \frac{\xi_1^j - \zeta_1}{\eta}(\zeta_1 + \eta, \zeta_2, \dots, \zeta_n)\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\zeta_1 + \eta - \xi_1^j}{\eta} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) + \frac{\xi_1^j - \zeta_1}{\eta} f(\zeta_1 + \eta, \zeta_2, \dots, \zeta_n),$$

odnosno, s obzirom da je za $j \in J$ ispunjeno

$$f(\xi_1^j, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \geqslant f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) + c,$$

dalje je

$$\frac{\xi_1^j - \zeta_1}{\eta} f(\zeta_1 + \eta, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \geqslant f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) + c - \frac{\zeta_1 + \eta - \xi_1^j}{\eta} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n).$$

Odavde

$$f(\zeta_1+\eta,\zeta_2,\dots,\zeta_n)\geqslant -f_j(\zeta_1,\dots,\zeta_n)+\frac{\eta}{\xi_1^j-\zeta_1}c\to+\infty$$

pri $j\to\infty$, $j\in J$. Ovo je kontradikcija, jer $(\zeta_1+\eta,\zeta_2,\dots,\zeta_n)\in C$, a f je definisana na C. Slično se dokazuje da je funkcija f neprekidna po ostalim promenljivim u tački z.

Neka je ϵ proizvoljan pozitivan broj. S obzirom da je f neprekidna po svakoj promenljivoj u z, postojaće $\mu>0$ takvo da je

$$f(\zeta_1+\tau,\zeta_2,\dots,\zeta_n)\leqslant f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)+\epsilon,$$
$$f(\zeta_1,\zeta_2+\tau,\dots,\zeta_n)\leqslant f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)+\epsilon,\dots,$$
$$f(\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n+\tau)\leqslant f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)+\epsilon$$

za svako $\tau\in[-\mu,\mu]$. Označimo tačke $(\zeta_1+\mu,\zeta_2,\dots,\zeta_n),\dots,(\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n+\mu)$; $(\zeta_1-\mu,\zeta_2,\dots,\zeta_n),\dots,(\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n-\mu)$ redom sa $p_1,\dots,p_n;q_1,\dots,q_n$. Primetimo da se svaka tačka iz skupa $K=\{(\xi_1,\dots,\xi_n)\mid|\xi_1-\zeta_1|+|\xi_2-\zeta_2|+\dots+|\xi_n-\zeta_n|\leqslant\mu\}$ može prikazati kao konveksna kombinacija tačaka $p_1,\dots,p_n;\ q_1,\dots,q_n$. Zaista, tačku $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ možemo prikazati u obliku

$$(\xi_1,\dots,\xi_n)=\sum_{i=1}^n\bar\lambda_ip_i+\sum_{i=1}^n\hat\lambda_iq_i+\kappa z,$$

gde je

$$\bar\lambda_i=\begin{cases}(\xi_i-\zeta_i)/\mu, & \text{za } \xi_i\geqslant\zeta_i\\ 0, & \text{za } \xi_i<\zeta_i\end{cases};\qquad \hat\lambda_i=\begin{cases}0 & \text{za } \xi_i\geqslant\zeta_i\\ -(\xi_i-\zeta_i)/\mu, & \text{za } \xi_i<\zeta_i\end{cases}$$

dok je $\kappa=1-\sum_{i=1}^n\bar\lambda_i-\sum_{i=1}^n\hat\lambda_i$. Kako je $z=p_1/2+q_1/2$ dobijamo traženi prikaz.

Koristeći Jensen-ovu nejednakost (teorema 1.4.1) nalazimo

$$\begin{aligned}f(\xi_1,\dots,\xi_n)&=f(\sum_{i=1}^n\bar\lambda_ip_i+\sum_{i=1}^n\hat\lambda_iq_i+\kappa z)\leqslant\\ &\leqslant\sum_{i=1}^n\bar\lambda_if(p_i)+\sum_{i=1}^n\hat\lambda_if(q_i)+\kappa f(z)\leqslant(\sum_{i=1}^n\bar\lambda_i+\sum_{i=1}^n\hat\lambda_i+\kappa)(f(z)+\epsilon)=\\ &=f(z)+\epsilon\end{aligned}\tag{4.1}$$

za svako $(\xi_1,\dots,\xi_n)\in K$.

S druge strane je, zbog konveksnosti funkcije f

$$f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\leqslant\frac12f(\xi_1,\dots,\xi_n)+\frac12f(2\zeta_1-\xi_1,\dots,2\zeta_n-\xi_n)$$

pa je, s obzirom da $(2\zeta_1-\xi_1,\dots,2\zeta_n-\xi_n)\in K$,

$$\begin{aligned}f(\xi_1,\dots,\xi_n)&\geqslant2f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)-f(2\zeta_1-\xi_1,\dots,2\zeta_n-\xi_n)\geqslant\\ &\geqslant2f(z)-f(z)-\epsilon=f(z)-\epsilon,\end{aligned}\tag{4.2}$$

za svaki $(\xi_1, ..., \xi_n) \in K$. Pošto K sadrži kuglu sa centrom u z poluprečnika μ/n, iz nejednakosti (4.1) i (4.2) sledi tvrđenje.♦

Primetimo da funkcija ne mora biti neprekidna u graničnim tačkama skupa C. Uzmimo npr. funkciju $f: [0,1] \to R$ definisanu sa

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } t = 0 \\ 0 & \text{za } t \in (0,1] \end{cases}$$

Lako se proverava da je f konveksna na [0,1] a prekidna u nuli.

U sledećim teoremama daćemo neke osobine diferencijabilnih konveksnih funkcija.

TEOREMA 1.4.7. Neka je f konveksna na konveksnom skupu C i diferencijabilna na nekom otvorenom skupu koji sadrži C. Tada je $f(x_2) - f(x_1) \geq \langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle$ za ma koji par tačaka $x_1, x_2 \in C$.

DOKAZ: Neka je x_1, x_2 proizvoljan par tačaka skupa C. Zbog konveksnosti funkcije f imamo

$$f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) \leq \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1)$$

za svaki $\lambda \in (0,1]$. Ova nejednakost se može napisati u sledećem obliku

$$f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) - f(x_1) \leq \lambda (f(x_2) - f(x_1)).$$

Deljenjem sa λ i prelaskom na graničnu vrednost kad $\lambda \to 0$ dobijamo

$$\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \leq f(x_2) - f(x_1),$$

što je i trebalo dokazati. ♦

Dokazana nejednakost je karakteristično svojstvo diferencijabilnih konveksnih funkcija, što se vidi iz sledeće teoreme.

TEOREMA 1.4.8. Neka je f diferencijabilna funkcija na otvorenom skupu U i neka je $C \subseteq U$ konveksan skup. Ako za svaki par tačaka $x_1, x_2 \in C$ važi nejednakost

$$\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle \leq f(x_2) - f(x_1)$$

tada je f konveksna na C.

DOKAZ: Neka je $x_1, x_2 \in C$ i $\lambda \in [0,1]$. Označimo sa $\tilde{x}$ tačku $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Kako $\tilde{x} \in C$, imamo

$$\langle \nabla f(\tilde{x}), x_1 - \tilde{x} \rangle \leq f(x_1) - f(\tilde{x})$$

$$\langle \nabla f(\tilde{x}), x_2 - \tilde{x} \rangle \leq f(x_2) - f(\tilde{x}),$$

ili

$$(1-\lambda) \langle \nabla f(\tilde{x}), x_1 - x_2 \rangle \leq f(x_1) - f(\tilde{x})$$

$$\lambda \langle \nabla f(\tilde{x}), x_2 - x_1 \rangle \leq f(x_2) - f(\tilde{x}).$$

Množenjem prve nejednačine sa λ, druge sa $(1-\lambda)$ i sabiranjem dobijamo

$$0 \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - f(\tilde{x})$$

tj.

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

te je f konveksna na C. ♦

Napomenimo da se na sličan način može pokazati da je funkcija strogo konveksna ako za $x_1, x_2 \in C, x_1 \neq x_2$ važi $\langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle < f(x_2) - f(x_1)$.

TEOREMA 1.4.9. Neka je f dvaput diferencijabilna funkcija na otvorenom konveksnom skupu C; tada je f konveksna na C ako i samo ako je

$$H(x) = \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \, \partial x_j} \right]$$

pozitivno semidefinitna matrica za svako $x \in C$.

DOKAZ: Neka je f konveksna na C i neka $x, y \in C$. Na osnovu Taylor-ove teoreme pri $y \to x$ imamo

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \frac{1}{2} \langle y-x, H(x)(y-x) \rangle + o(\|y-x\|^2).$$

Na osnovu teoreme 1.4.7 iz prethodne jednakosti sledi

$$\langle y-x, H(x)(y-x) \rangle + o(\|y-x\|^2) \geqslant 0,$$

tj.

$$\langle z, H(x) z \rangle + o(1) \geqslant 0,$$

gde je $z = (y-x)/\|y-x\|$. S obzirom da je $\|z\| = 1$, za $y \neq x$ pri $y \to x$ dobijamo da je

$$\langle z, H(x) z \rangle \geqslant 0.$$

S obzirom da je $y \in C$ proizvoljno a C je otvoren skup, ova nejednakost važi za svaki jedinični vektor z te je matrica H(x) pozitivno semidefinitna.

Neka je sada H(x) pozitivno semidefinitna za svako $x \in C$. Neka su $y, z \in C$ proizvoljni. Na osnovu Taylor-ovog razvoja sa ostatkom u Lagrange-ovom obliku je

$$f(y) = f(z) + \langle \nabla f(z), y-z \rangle + \frac{1}{2} \langle y-z, H(\xi)(y-z) \rangle,$$

gde je ξ neka tačka između y i z. Dalje je

$$f(y) - f(z) - \langle \nabla f(z), y-z \rangle \geqslant 0$$

zbog pozitivne semidefinitnosti matrice $H(\xi)$. Na osnovu teoreme 1.4.8 iz poslednje nejednakosti sledi da je f konveksna na C. Primetimo da u ovom delu dokaza nije korišćen uslov da je C otvoren skup. ♦

Napomenimo da, ukoliko C nije otvoren skup, funkcija f može biti konveksna iako H(x) nije pozitivno semidefinitna. Npr. neka je f: $R^2 \to R$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ i $C = \{ (x_1, 0) \mid x_1 \in R \}$. Tada je f konveksna na C a $H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ nije pozitivno semidefinitna.

TEOREMA 1.4.10. Neka je f dvaput diferencijabilna funkcija na otvorenom skupu U i neka je $C \subseteq U$ proizvoljan konveksan skup. Ako je matrica

$$H(x) = \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \, \partial x_j} \right]$$

pozitivno definitna za svako $x \in C$, tada je f strogo konveksna funkcija na C.

DOKAZ: Kao u dokazu prethodne teoreme dokazuje se da je f konveksna. Pokažimo da je f strogo konveksna. U suprotnom postoji par tačaka $x_1, x_2 \in C$, $x_1 \neq x_2$ i $\lambda \in (0,1)$ tako da je

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) .$$

Tada je za svaki $\mu \in [0,1]$

$$f(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) = \mu f(x_1) + (1-\mu) f(x_2) .$$

Zaista, neka je npr. $0 < \lambda < \mu$ (slučaj $\mu < \lambda$ se analogno razmatra) i neka je $\tilde{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $\bar{x} = \mu x_1 + (1-\mu)x_2$. Tada je

$$\tilde{x} = \frac{\lambda}{\mu} \bar{x} + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) x_2 ,$$

pa je zbog konveksnosti funkcije f

$$f(\tilde{x}) \leq \frac{\lambda}{\mu} f(\bar{x}) + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) f(x_2) ,$$

ili

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \leq \frac{\lambda}{\mu} f(\bar{x}) + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) f(x_2) .$$

Rešavanjem po $f(\bar{x})$ dobijamo

$$f(\bar{x}) \geq \mu f(x_1) + (1-\mu) f(x_2) .$$

Obrnuta nejednakost sledi iz konveksnosti funkcije f.

Uvedimo funkciju φ: $[0,1] \to R$,

$$\varphi(t) = (1-t) f(x_1) + t f(x_2) .$$

Iz prethodnog vidimo da je $\varphi(t) = f(x_1 + t(x_2 - x_1))$. S obzirom da je φ linearna funkcija, $\varphi''(t) = 0$. S druge strane je

$$\varphi''(t) = \langle x_2 - x_1, H(x_1 + t(x_2 - x_1)) (x_2 - x_1) \rangle .$$

Ovo protivreči pozitivnoj definitnosti matrice H(x). ♦

Dokaz ove teoreme se mogao izvesti slično kao drugi deo dokaza teoreme 1.4.9, uz korišćenje napomene uz teoremu 1.4.8.

Napomenimo da iz stroge konveksnosti funkcije f ne sledi pozitivna definitnost matrice H(x). Zaista, dovoljno je uzeti $f: R \to R$, $f(x) = x^4$. Funkcija je strogo konveksna ali matrica H nije pozitivno definitna u nuli.

Na kraju napomenimo da je za svaku teoremu ovog paragrafa moguće formulisati analognu teoremu koja se odnosi na konkavne funkcije.

ZADACI:

1. Dokazati da je jedinična lopta $B = \{ x \in R^n \mid \|x\| \leq 1 \}$ konveksan skup.

2. Neka je C konveksan skup u R^n i neka su λ_1 i λ_2 realni nenegativni brojevi. Dokazati da je tada $(\lambda_1+\lambda_2)C = \lambda_1 C + \lambda_2 C$.

3. Neka je $A: R^m \to R^n$ linearno preslikavanje, C konveksan skup u R^m i D konveksan skup u R^n. Tada su skupovi

$$AC = \{ Ax \mid x \in C \}$$

i

$$A^{-1}D = \{ x \in R^m \mid Ax \in D \}$$

konveksni.

4. Neka je $C \subseteq R^n$ konveksan skup, $p \in R^n$, $q \in R$ i neka je skup

$$C \cap \{ x \in R^n \mid \langle p,x \rangle = q \}$$

neprazan i ograničen. Tada je za svako $r \in R$ skup

$$C \cap \{ x \in R^n \mid \langle p,x \rangle = r \}$$

ograničen. Dokazati!

5. Neka je $X = \{ x \in R^n \mid x \geq 0 \}$ i $Y = \{ x \in R^n \mid x \leq 0 \}$. Opisati sve hiperravni koje razdvajaju X i Y.

6. Neka je A antisimetrična realna matrica. Dokazati da sistem $Ax \geq 0$, $x \geq 0$ ima netrivijalno rešenje. (Uputstvo: koristiti Farkas-ovu lemu).

7. Neka je A realna matrica dimenzije m x n. Dokazati da samo jedan od sistema

$$Ax > 0$$

i

$$A^T y = 0, y \geq 0, y \neq 0$$

ima rešenje.

8. Neka je $\varphi: R^n \to R$ istovremeno konveksna i konkavna funkcija. Dokazati da je φ linearna funkcija.

9. Koristeći Jensen-ovu nejednakost dokazati da je za svakih m pozitivnih brojeva $x_1, \dots, x_m$

$$(x_1 x_2 \cdots x_m)^{1/m} \leqslant (x_1 + x_2 + \dots + x_m)/m \, .$$

10. Dokazati da je funkcija f: $R^n \to R$ konveksna ako i samo ako je skup $\{ (x,y) \mid x \in R^n, y \in R, y \geqslant f(x) \}$ konveksan.

11. Neka je f: $R^n \to R$ konveksna funkcija. Dokazati da postoji familija linearnih funkcija $\{ g_i, i \in I \}$ tako da je za svako $x \in R^n$, $f(x) = \sup\limits_{i \in I} g_i(x)$.

12. Neka je f: $R^n \to R$. Dokazati da su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(i) Ako je $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, onda je za svako $\lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leqslant f(x_2) \, .$$

(ii) Za svako $a \in R$ je skup

$$K_a = \{ x \in R^n \mid f(x) \leqslant a \}$$

konveksan.

Navesti primer funkcije koja zadovoljava ove uslove a nije konveksna.

13. Ispitati da li su sledeće funkcije konveksne na označenim skupovima:

$f: X \to R$, $f(\xi_1, \dots, \xi_n) = -(\xi_1 \cdots \xi_n)^{1/n}$, $X = [0,+\infty)^n$;

$g: Y \to R$, $f(\xi, \eta) = \eta^2/\xi$, $Y = \{ (\xi,\eta) \in R^2 \mid \xi > 0 \}$

$h: Z \to R$, $h(\xi,\eta) = \exp(-(\xi\eta)^{1/2})$, $Z = \{ (\xi, \eta) \in R^2 \mid \xi \geqslant 0, \eta \geqslant 0 \}$

14. Neka je $C \subseteq R^n$ konveksan i zatvoren skup. Dokazati da postoji konveksna funkcija $f: R^n \to R$ tako da je

$$C = \{ x \in R^n \mid f(x) \leqslant 0 \} \, .$$

GLAVA II

TEORIJA NELINEARNOG PROGRAMIRANJA

U ovj glavi ćemo razmatrati problem minimizacije funkcije $\varphi: R^n \to R$ na skupu $X = \{x \in R^n \mid f_i(x) \leqslant 0, i = 1, ..., m\}$. Uvodeći funkciju $f: R^n \to R^m$ definisanu sa $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$, taj problem ćemo kratko zapisivati u obliku

$$\min_{x \in X} \varphi(x), X = \{x \in R^n \mid f(x) \leqslant 0\}. \tag{0.1}$$

Skup X naziva se skup dopustivih tačaka ili dopustivi skup, funkcije $f_i(x)$, $i = 1, ..., m$ zovu se funkcije ograničenja, dok se funkcija φ naziva funkcija cilja. Ograničenje $f_i(x) \leqslant 0$ je aktivno u tački $\tilde{x}$ ako i samo ako je $f_i(\tilde{x}) = 0$. Tačka $x^* \in X$ je optimalna za problem (0.1) ako i samo ako je $\varphi(x^*) \leqslant \varphi(x)$ za svako $x \in X$. Optimalna tačka se često naziva i globalni optimum. Tačka $\overline{x} \in X$ je lokalni optimum problema (0.1) ako i samo ako je $\varphi(\overline{x}) \leqslant \varphi(x)$ za svaku dopustivu tačku x iz neke okoline tačke $\overline{x}$. Cilj ove glave je formulacija neophodnih i dovoljnih uslova za optimalnost date tačke. Ograničićemo se uglavnom na slučaj kada su funkcija cilja i funkcije ograničenja konveksne funkcije. Napomenimo još da se problem maksimizacije funkcije $\varphi: R^n \to R$ na skupu X svodi na problem minimizacije posmatranjem funkcije $\psi(x) = -\varphi(x)$ na istom skupu, pa je dovoljno razmatrati problem minimizacije.

2.1. Problem konveksnog programiranja

Pod problemom konveksnog programiranja podrazumeva se problem nelinearnog programiranja kod koga su funkcija cilja i funkcije ograničenja konveksne. Drugim rečima, problem konveksnog programiranja se može zapisati u obliku

$$\min_{x \in X} \varphi(x), \quad X = \{x \in R^n \mid f_i(x) \leqslant 0, i = 1, ..., m\}, \tag{1.1}$$

gde su funkcije f_i, $i = 1, ..., m$ i funkcija φ konveksne. Problem konveksnog programiranja ima mnogo osobina koje, uopšte uzev, nisu ispunjene u nekonveksnom slučaju; u ovom odeljku ćemo navesti neke od njih.

TEOREMA 2.1.1. Neka je φ: $X \to R$ konveksna na konveksnom skupu X i neka je $\bar{x} \in X$ lokalni optimum problema

$$\min_{x \in X} \varphi(x)$$

Tada je $\bar{x}$ globalni optimum ovog problema.

DOKAZ: Neka je, suprotno tvrđenju, $\varphi(\tilde{x}) < \varphi(\bar{x})$ za neko $\tilde{x} \in X$. Tada za svako $\lambda \in (0,1)$ tačka $\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\tilde{x}$ pripada X i

$$\varphi(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\tilde{x}) \leqslant \lambda\varphi(\bar{x}) + (1-\lambda)\varphi(\tilde{x}) < \varphi(\bar{x}).$$

Uzimajući $\lambda \to 1$ dobija se protivrečnost sa definicijom lokalnog optimuma. ♦

TEOREMA 2.1.2. Neka je φ: $X \to R$ strogo konveksna na konveksnom skupu X i neka je $\bar{x} \in X$ lokalni optimum problema

$$\min_{x \in X} \varphi(x)$$

Tada je $\bar{x}$ jedinstveni globalni optimum ovog problema.

DOKAZ: Iz prethodne teoreme sledi da je $\bar{x}$ globalni optimum. Pretpostavimo da nije jedinstven, tj. da postoji $\tilde{x} \in X$, $\tilde{x} \neq \bar{x}$ za koje je $\varphi(\bar{x}) = \varphi(\tilde{x})$. No tada $(\bar{x}+\tilde{x})/2 \in X$ i zbog stroge konveksnosti funkcije φ važi

$$\varphi\left(\frac{\bar{x}+\tilde{x}}{2}\right) < \frac{\varphi(\bar{x})+\varphi(\tilde{x})}{2} = \varphi(\bar{x}),$$

što je protivrečnost. ♦

N a p o m e n a: U slučaju kada je funkcija φ konveksna, ali ne strogo konveksna, optimum ne mora biti jedinstven. Međutim, lako je videti da je skup svih optimalnih tačaka konveksan.

DEFINICIJA 2.1.1. Neka je $X = \{x \in R^n \mid f_i(x) \leqslant 0, i = 1, ..., m\}$. Rećićemo da funkcije ograničenja f_i, $i = 1, ..., m$, zadovoljavaju Slater-ov uslov ako i samo ako postoji tačka x^* takva da je $f_i(x^*) < 0$, $i = 1, ..., m$.

Slater-ov uslov će u daljim razmatranjima igrati značajnu ulogu. Sledeća teorema olakšava proveru Slater-ovog uslova u konveksnom slučaju.

TEOREMA 2.1.3. Neka je $X = \{x \in R^n \mid f_i(x) \leqslant 0, i = 1, ..., m\}$ i neka su f_i, $i = 1, ..., m$ konveksne funkcije. Neka za svako $i = 1, ..., m$ postoji tačka $x_i \in X$ takva da je $f_i(x_i) < 0$. Tada funkcije ograničenja f_i, $i = 1, ..., m$, zadovoljavaju Slater-ov uslov.

DOKAZ: Dovoljno je uzeti

$$x^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i .$$

Zbog Jensen-ove nejednakosti (teorema 1.4.1) za svako $j = 1, ..., m$ važi

$$f_j(x^*) = f_j\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i\right) \leqslant \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f_j(x_i) < 0. \blacklozenge$$

TEOREMA 2.1.4. Neka je $X = \{x \in R^n \mid f_i(x) \leqslant 0, i = 1, ..., m\}$ i neka su funkcije ograničenja f_i, $i = 1, ..., m$ konveksne na R^n i zadovoljavaju Slater-ov uslov. Tada je

$$\mathring{X} = \{x \in R^n \mid f_i(x) < 0, i = 1, ..., m\}$$

i

$$\partial X = \{x \in R^n \mid f_i(x) = 0, \text{za bar jedan } i \in \{1, ..., m\}\}$$

DOKAZ: Neka x^* zadovoljava $f_i(x^*) < 0$, $i = 1, ..., m$. Kako su funkcije f_i, $i = 1, ..., m$ konveksne na R^n i stoga neprekidne (teorema 1.4.6) postojeće okoline V tačke x^* takva da za svaki $x \in V$ i svaki $i \in \{1, ..., m\}$ važi

$$f_i(x) < 0, \quad \text{tj. } V \subseteq X,$$

pa je $x^* \in \mathring{X}$.

Neka sada $\bar{x} \in \mathring{X}$. Pošto funkcije ograničenja f_i, $i = 1, ..., m$ zadovoljavaju Slater-ov uslov postoji tačka $\tilde{x}$ tako da je

$$f_i(\tilde{x}) < 0, i = 1, ..., m.$$

Kako je $\bar{x} \in \mathring{X}$ postoji $\epsilon > 0$ tako da tačka

$$\hat{x} = \tilde{x} + (1+\epsilon)(\bar{x} - \tilde{x}) \in X$$

Stoga je $f_i(\hat{x}) \leqslant 0$, $i = 1, ..., m$. S obzirom da je

$$\bar{x} = \frac{1}{1+\epsilon}\hat{x} + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\tilde{x}$$

biće

$$f_i(\bar{x}) \leqslant \frac{1}{1+\epsilon} f_i(\hat{x}) + \frac{\epsilon}{1+\epsilon} f_i(\tilde{x}) < 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Pošto je X zatvoren skup (jer su f_i, $i = 1, ..., m$ neprekidne) imamo

$$\partial X = X \setminus \mathring{X},$$

odakle sledi drugi deo tvrđenja. ♦

Iz sledećeg primera vidi se da je Slater-ov uslov bitan za važenje prethodnog tvrđenja:

Neka je $f: R \to R$ dato sa

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - 1, & |t| \geqslant 1 \\ 0, & |t| < 1 \end{cases}$$

Tada je $X = \{ t \mid f(t) \leqslant 0 \} = [-1,1]$, $\mathring{X} = (-1,1)$, dok je skup $\{ t \mid f(t) < 0 \}$ prazan.

2.2. Lagrange-ova funkcija

Posmatrajmo problem nelinearnog programiranja zapisan u obliku

(2.1) $$\min_{x \in X} \varphi(x), \quad X = \{ x \in R^n \mid f(x) \leqslant 0 \}$$

gde $\varphi : R^n \to R$, $f : R^n \to R^m$. Označimo sa R_+^m skup $\{ x \in R^m \mid x \geqslant 0 \}$.

DEFINICIJA 2.2.1. Funkcija $L: R^n X R_+^m \to R$ definisana sa

$$L(x,y) = \varphi(x) + \langle y, f(x) \rangle, \quad x \in R^n, y \in R_+^m$$

naziva se Lagrange-ova funkcija pridružena problemu (2.1).

DEFINICIJA 2.2.2. Tačka $(x^*, y^*) \in R^n X R_+^m$ se naziva sedlasta tačka Lagrange-ove funkcije $L(x,y)$ ako i samo ako za svaki $x \in R^n$, $y \in R_+^m$ važi

$$L(x^*, y) \leqslant L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*)$$

TEOREMA 2.2.1. Neka je $(x^*, y^*) \in R^n X R^m$ sedlasta tačka Lagrangeove funkcije pridružene problemu (2.1). Tada je x^* globalni optimum problema (2.1).

DOKAZ: Dokažimo najpre da je x^* dopustiva tačka problema (2.1). Iz nejednakosti $L(x^*, y) \leqslant L(x^*, y^*)$ dobijamo

(2.2) $$\langle y - y^*, f(x^*) \rangle \leqslant 0 \quad \text{za svaki } y \in R_+^m .$$

Neka je $y^* = (y_1^*, ..., y_m^*)$ i neka je $y = (y_1^*+1, y_2^*, ..., y_m^*)$; nejednakost (2.2) postaje $f_1(x^*) \leqslant 0$. Slično se dokazuje da je $f_2(x^*) \leqslant 0, ..., f_m(x^*) \leqslant 0$, pa je x^* dopustiva tačka.

Stavljajući $y = 0$ iz (2.2) nalazimo

$$\langle y^*, f(x^*) \rangle \geqslant 0 .$$

No, kako je $y^* \geqslant 0$ i $f(x^*) \leqslant 0$, takođe je $\langle y^*, f(x^*) \rangle \leqslant 0$, pa je $\langle y^*, f(x^*) \rangle = 0$ te stoga nejednakost $L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*)$ postaje

$$\varphi(x^*) \leqslant \varphi(x) + \langle y^*, f(x) \rangle .$$

S obzirom da je $\langle y^*, f(x) \rangle \leqslant 0$ za svaki $x \in X$, imamo

$$\varphi(x^*) \leqslant \varphi(x) \quad \text{za svaki } x \in X ,$$

tj. x^* je globalni optimum problema (2.1). ♦

Ovu teoremu ilustrujemo sledećim primerom:

PRIMER 2.2.1. Neka je dat problem

$$\min_{x \in X} (-\cos x), \quad X = \{ x \in R \mid x^4 - 12x^2 \leqslant 0 \}.$$

Lagrange-ova funkcija je u ovom slučaju

$$L(x,y) = -\cos x + y(x^4 - 12x^2),\ y \geqslant 0\,.$$

S obzirom da je $(0,1/24)$ sedlasta tačka funkcije $L(x,y)$, jer je $L(0,y) = -1$, $L(0,1/24) = -1$, $L(x,1/24) = -\cos x + x^4/24 - x^2/2$, zaključujemo da funkcija $-\cos x$ pri uslovu $x \in X$ postiže minimum u nuli.

2.3. Uslovi optimalnosti – konveksan slučaj

Naredne teoreme igraju centralnu ulogu u matematičkom programiranju, a odnose se na potrebne i dovoljne uslove optimalnosti. U razmatranjima ćemo se ograničiti na slučaj konveksnog programiranja.

TEOREMA 2.3.1. (Kuhn, Tucker). Neka je dat sledeći problem nelinearnog programiranja:

$$\min_{x\in X} \varphi(x),\quad X = \{\, x \mid x \in R^n,\ f_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m \,\} \tag{3.1}$$

pri čemu su $\varphi(x), f_i(x), i = 1, \ldots, m$, konveksne funkcije, a uz to funkcije $f_i(x), i = 1, \ldots, m$ zadovoljavaju Slater-ov uslov. Potreban i dovoljan uslov da x^* bude optimalno rešenje problema (3.1) je da postoji $y^* \geqslant 0$ takvo da je (x^*, y^*) sedlasta tačka Lagrange-ove funkcije pridružene problemu (3.1).

DOKAZ: Iz teoreme 2.2.1 sledi da je uslov dovoljan. Pokažimo da je i potreban. Neka je x^* optimalno rešenje problema (3.1). Uočimo skupove $P, Q \subseteq R^{m+1}$, gde je

$$P = \{\, (z_0,z) \mid z_0 \in R,\ z \in R^m,\ z_0 \leqslant \varphi(x^*),\ z \leqslant 0 \,\};$$

$$Q = \bigcup_{x\in R^n} Q(x),\quad Q(x) = \{\, (z_0,z) \mid z_0 \in R,\ z \in R^m,\ z_0 \geqslant \varphi(x),\ z \geqslant f(x) \,\}\,.$$

P je očigledno konveksan skup. Konveksnost skupa Q se može dokazati na sledeći način: Neka su (z_0',z') i (z_0'',z'') ma koje tačke iz Q. Po definiciji skupa Q postoje tačke x' i x'' tako da je $(z_0',z') \in Q(x')$ i $(z_0'',z'') \in Q(x'')$. Neka je $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ i

$$(z_0,z) = \lambda(z_0',z') + (1-\lambda)(z_0'',z'')$$

Pokažimo da je $(z_0, z) \in Q(\lambda x' + (1-\lambda)x'')$. S obzirom da su funkcije $\varphi(x)$ i $f_i(x)$ konveksne biće

$$\varphi(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \leqslant \lambda\varphi(x') + (1-\lambda)\varphi(x'') \leqslant \lambda z_0' + (1-\lambda)z_0'' = z_0$$

i

$$f(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \leqslant \lambda f(x') + (1-\lambda)f(x'') \leqslant \lambda z' + (1-\lambda)z'' = z,$$

pa $(z_0,z) \in Q(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \subseteq Q$.

Skupovi $\overset{\circ}{P} = \{ (z_0, z) \mid z_0 < \varphi(x^*), z < 0 \}$ i Q su disjunktni. Zaista, za svako $x \in X$ je $\varphi(x) \geqslant \varphi(x^*)$ te $(z_0, z) \in Q(x)$ ne može pripadati $\overset{\circ}{P}$. Za $x \notin X$ postoji $i \in \{ 1, 2, ..., m \}$ takvo da je $f_i(x) \geqslant 0$ te $(z_0, z) \in Q(x)$ ne može pripadati $\overset{\circ}{P}$.

Pošto su skupovi $\overset{\circ}{P}$ i Q konveksni i disjunktni postojaće prema teoremi 1.2.5 hiper-ravan koja ih razdvaja, tj. postoji $(u_0, u) \in R^{m+1}$, $(u_0, u) \neq 0$ tako da je

(3.2) $$u_0 z_0 + \langle u, z\rangle \geqslant u_0 v_0 + \langle u, v\rangle$$

za sve $(z_0, z) \in Q$ i $(v_0, v) \in \overset{\circ}{P}$. S obzirom da komponente vektorâ koji pripadaju P nisu odozdo ograničene, iz (3.2) zaključujemo da je $(u_0, u) \geqslant 0$. Nejednakost (3.2) važi i za tačke skupa P zbog neprekidnosti skalarnog proizvoda. Neka je x proizvoljna tačka iz R^n i neka je $z_0 = \varphi(x)$, $z = f(x)$, $v_0 = \varphi(x^*)$, $v = 0$. Zamenom u (3.2) dobijamo

(3.3) $$u_0\varphi(x) + \langle u, f(x)\rangle \geqslant u_0\varphi(x^*), \text{ za sve } x \in R^n .$$

Pokažimo da je $u_0 > 0$. Zaista, ukoliko bi bilo $u_0 = 0$ imali bismo

(3.4) $$\langle u, f(x)\rangle \geqslant 0 \text{ za sve } x \in R^n .$$

Pošto je $u \geqslant 0$ i $(u_0, u) \neq 0$ postoji $i \in \{ 1, ..., m \}$ tako da je $u_i > 0$. S obzirom da je $f(x) \leqslant 0$ za $x \in X$, iz (3.4) sledi da je $f_i(x) = 0$ za svako $x \in X$, što protivreči Slater-ovom uslovu.

Neka je $y^* = 1/u_0$, $u \geqslant 0$. Tada (3.3) postaje

$$\varphi(x^*) \leqslant \varphi(x) + \langle y^*, f(x)\rangle \quad \text{za sve } x \in R^n .$$

Pri $x = x^*$ imamo $\langle y^*, f(x^*)\rangle \geqslant 0$. Kako je $y^* \geqslant 0$ a $f(x^*) \leqslant 0$, sledi $\langle y^*, f(x^*)\rangle = 0$. Uz to za svaki $y \geqslant 0$ imamo $\langle y, f(x^*)\rangle \leqslant 0$. Iz ovih nejednakosti dobijamo

$$\varphi(x^*) + \langle y, f(x^*)\rangle \leqslant \varphi(x^*) + \langle y^*, f(x^*)\rangle \leqslant \varphi(x) + \langle y^*, f(x)\rangle \text{ za } y \geqslant 0, x \in R^n$$

tj.

$$L(x^*, y) \leqslant L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*). \blacklozenge$$

Sledeći primer pokazuje da iskaz teoreme ne mora važiti u slučaju kada Slater-ov uslov nije ispunjen.

PRIMER 2.3.1. Neka su funkcije $\varphi: R \to R$ i $f: R \to R$ definisane sa

$$\varphi(x) = e^{-x}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Dopustivi skup je $X = \{ x \in R \mid x \leqslant 0 \}$. Kako je za sve $x \in X$ ispunjeno $f(x) = 0$, Slater-ov uslov nije ispunjen. Lagrange-ova funkcija je

$$L(x,y) = e^{-x} + yf(x) .$$

Nije teško videti da $\varphi(x)$ svoj minimum na skupu X dostiže u tački $x^* = 0$. Međutim, nejednakost $L(0,y^*) \leqslant L(x,y^*)$ nije ispunjena ni za jedan $y^* \geqslant 0$ jer je $L(0, y^*) = 1$, $L(x, y^*) < 1$, $x > 0$ i dovoljno malo $((\partial L/\partial x)|_{(0,y^*)} = -1)$.

U slučaju kad su sva ograničenja linearna Slater-ov uslov se može izostaviti, kao što pokazuje sledeća teorema. Napominjemo da se linearna ograničenja $\langle a_i, x\rangle - b_i \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$ mogu pisati u matričnom obliku $Ax \leqslant b$.

TEOREMA 2.3.2. Neka je dat sledeći problem nelinearnog programiranja

$$\min_{x \in X} \varphi(x), \qquad X = \{x \in R^n \mid Ax \leqslant b\}, \tag{3.5}$$

pri čemu je $\varphi(x)$ konveksna funkcija. Potreban i dovoljan uslov da x^* bude optimalno rešenje problema (3.5) je da postoji $y^* \geqslant 0$ takvo da je (x^*, y^*) sedlasta tačka Lagrange-ove funkcije pridružene problemu (3.5).

DOKAZ: Iz teoreme 2.2.1 sledi da je uslov dovoljan. Dokažimo da je i potreban. Neka je x^* optimalno rešenje problema (3.5). Uočimo skupove

$$U = \{(y,s) \mid y \in R, s \in R^n, y \geqslant \varphi(x^*+s) - \varphi(x^*)\}$$

i

$$V = \{(y,s) \mid y \in R, s \in R^n, A(x^*+s) \leqslant b, y \leqslant 0\}.$$

Lako je proveriti da su skupovi U i V konveksni. Skupovi

$$V_0 = \{(y,s) \mid y \in R, s \in R^n, A(x^*+s) \leqslant b, y < 0\}$$

i U su disjunktni. Zaista, za svaki $x^*+s \in X$ je $\varphi(x^*+s) - \varphi(x^*) \geqslant 0$ pa ako $(y,s) \in U$ mora biti $y \geqslant 0$, te $(y,s) \notin V_0$. Ukoliko $x^*+s \notin X$ onda $(y,s) \notin V_0$. Prema teoremi 1.2.5 postoji $(c_0, c) \in R^{n+1}$ tako da je za $(y_1, s_1) \in U$, $(y_2, s_2) \in V_0$ ispunjeno

$$c_0 y_1 + \langle c, s_1\rangle \leqslant c_0 y_2 + \langle c, s_2\rangle. \tag{3.6}$$

S obzirom da je V adherencija od V_0, nejednakost (3.6) važiće i za $(y_2, s_2) \in V$. Pokažimo da je $c_0 < 0$. Pretpostavimo da je $c_0 \geqslant 0$. Jasno je da za svaki $s \in R^n$ postoji $y > 0$ tako da $(y, s) \in U$. Ako je $c_0 = 0$ onda je $c \neq 0$ pa je funkcija $\langle c, s\rangle$ neograničena odozgo. Stoga je i funkcija $c_0 y + \langle c, s\rangle$ neograničena, što se protivi nejednakosti (3.6). Ako je pak $c_0 > 0$ opet je funkcija $c_0 y + \langle c, s\rangle$ neograničena, što se protivi (3.6). Dakle, $c_0 < 0$. Ako (3.6) podelimo sa c_0 i stavimo $d = c/c_0$ dobićemo

$$y_1 + \langle d, s_1\rangle \geqslant y_2 + \langle d, s_2\rangle \text{ za svaki } (y_1, s_1) \in U, (y_2, s_2) \in V. \tag{3.7}$$

Specijalno, za $s_1 = s$, $y_1 = \varphi(x^*+s) - \varphi(x^*)$, $s_2 = 0$, $y_2 = 0$ imamo

$$\varphi(x^*+s) - \varphi(x^*) + \langle d, s\rangle \geqslant 0,$$

odnosno

$$\langle d, x^*+s\rangle + \varphi(x^*+s) \geqslant \langle d, x^*\rangle + \varphi(x^*) \text{ za svaki } s \in R^n. \tag{3.8}$$

Ako u (3.7) stavimo $y_1 = 0$, $s_1 = 0$, $y_2 = 0$, $s_2 = s$, gde s zadovoljava $A(x^*+s) \leqslant b$ dobićemo

$$\langle d,s\rangle \leqslant 0 \ . \tag{3.9}$$

Označimo i-tu vrstu matrice A sa a_i. Ne umanjujući opštost možemo pretpostaviti da je

$$\begin{aligned} \langle a_i,x^*\rangle &= b_i, \qquad i = 1, ..., k \\ \langle a_i,x^*\rangle &< b_i, \qquad i = k+1, ..., m\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pokažimo da je za svako s za koje je $\langle a_i,s\rangle \leqslant 0$, $i = 1, ..., k$, ispunjeno i $\langle d,s\rangle \leqslant 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\overline{s}$ za koje je $\langle a_i, \overline{s}\rangle \leqslant 0$, $i = 1, ..., k$, i $\langle d, \overline{s}\rangle > 0$. Tada zbog (3.10) postoji $\lambda > 0$ tako da je $A(x^*+\lambda \overline{s}) \leqslant b$. No tada je zbog (3.9) $\langle d,\lambda \overline{s}\rangle \leqslant 0$, tj. zbog $\lambda > 0$, $\langle d, \overline{s}\rangle \leqslant 0$, što je suprotno pretpostavci.

Prema Farkas-ovoj lemi postoji $y^* = (y_1^*, ..., y_k^*, 0, ..., 0) \geqslant 0$ takvo da je $A^T y^* = d$, pa je $\langle d,x\rangle = \langle y^*,Ax\rangle$ za svaki $x \in R^n$. Na osnovu (3.8) važi

$$\varphi(x^*) + \langle y^*,Ax^*-b\rangle \leqslant \varphi(x) + \langle y^*,Ax-b\rangle,\ x = x^*+s \in R^n\ . \tag{3.11}$$

Pošto je $\langle y^*,Ax^*-b\rangle = 0$, $Ax^*-b \leqslant 0$ važi i

$$\varphi(x^*) + \langle y,Ax^*-b\rangle \leqslant \varphi(x^*) + \langle y^*,Ax^*-b\rangle \quad \text{za } y \geqslant 0. \tag{3.12}$$

Iz (3.11) i (3.12) sledi da je (x^*,y^*) sedlasta tačka Lagrange-ove funkcije pridružene problemu (3.5). ♦

Teoremu 2.3.2. ilustrujemo sledećim primerom:

PRIMER 2.3.2. Neka je funkcija cilja φ: $R \to R$ u problemu (3.5) data sa $\varphi(x) = e^{-x}$ i neka je dato jedno linearno ograničenje $x \leqslant 0$. Lagrange-ova funkcija je $L(x,y) = e^{-x}+xy$. Nije teško proveriti da je tačka $x^* = 0$ optimalna i da je tačka $(0,1)$ sedlasta tačka Lagrangeove funkcije.

Zanimljivo je zapaziti da su funkcije cilja u primerima 2.3.1 i 2.3.2 jednake i da se minimizuju nad istim dopustivim skupom $X = \{ x \in R \mid x \leqslant 0 \}$, dok se odgovori o egzistenciji sedlaste tačke razlikuju. Ovo pokazuje da pitanje egzistencije sedlaste tačke bitno zavisi od načina opisivanja dopustivog skupa, a ne od samog skupa. To je prirodno, jer definicija Lagrange-ove funkcije zavisi od načina opisivanja dopustivog skupa.

2.4. Uslovi optimalnosti – diferencijabilan slučaj

U prethodnim paragrafima nije pretpostavljena diferencijabilnost funkcije cilja i funkcija ograničenja. Sada ćemo pokazati kako se mogu izraziti uslovi optimalnosti i uslovi za sedlastu tačku u slučaju kada su te funkcije diferencijabilne.

TEOREMA 2.4.1. Neka je data Lagrange-ova funkcija

$$L(x,y) = \varphi(x) + \langle y, f(x) \rangle, \qquad x \in R^n, y \in R^m_+ .$$

Ako su funkcije $\varphi(x)$ i $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ konveksne i diferencijabilne onda je (x^*, y^*) sedlasta tačka funkcije L ako i samo ako su ispunjeni uslovi

(4.1) $$\frac{\partial L^*}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$

(4.2) $$\frac{\partial L^*}{\partial y_j} \leq 0, \qquad j = 1, \ldots, m$$

(4.3) $$y_j^* \frac{\partial L^*}{\partial y_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, m$$

(4.4) $$y_j^* \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, m$$

gde je $\frac{\partial L^*}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}\Big|_{\substack{x=x^*\\ y=y^*}}$, $i = 1, \ldots, n$; $\frac{\partial L^*}{\partial y_j} = \frac{\partial L}{\partial y_j}\Big|_{\substack{x=x^*\\ y=y^*}}$, $j = 1, \ldots, m$.

DOKAZ: Pretpostavićemo da postoji (x^*, y^*), $y^* \geq 0$ tako da je

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*), x \in R^n, y \in R^m, y \geq 0.$$

Tada funkcija $L(x,y^*)$ dostiže minimum u tački x^* pa je uslov (4.1) potreban. S obzirom da je

$$\frac{\partial L^*}{\partial y_j} = f_j(x^*), \qquad j = 1, \ldots, m$$

potrebnost uslova (4.2), (4.3) i (4.4) sledi na sličan način kao u teoremi 2.2.1.

Pokažimo da su uslovi (4.1), (4.2), (4.3) i (4.4) i dovoljni. Pošto su funkcije $\varphi(x)$ i $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ konveksne, a $y^* \geq 0$, na osnovu teoreme 1.4.2 biće i $L(x,y^*)$ konveksna po x, pa je prema teoremi 1.4.7

$$L(x,y^*) \geq L(x^*, y^*) + \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^*) \frac{\partial L^*}{\partial x_j} \quad \text{za sve } x \in R^n.$$

Zbog uslova (4.1) biće

$$L(x,y^*) \geq L(x^*, y^*), \quad x \in R^n .$$

S obzirom na uslove (4.2) i (4.3) je

$$f_j(x^*) \leq 0, y_j^* f_j(x^*) = 0, \; j = 1, \ldots, m ,$$

te za $y_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$, sledi

$$\varphi(x^*) + \sum_{j=1}^{m} y_j f_j(x^*) \leq \varphi(x^*) + \sum_{j=1}^{m} y_j^* f_j(x^*)$$

i (x^*, y^*) je zaista sedlasta tačka funkcije $L(x,y)$. ♦

Iz teorema 2.4.1 i 2.3.1 neposredno sledi sledeća

TEOREMA 2.4.2. (Kuhn-Tucker). Neka su u problemu konveksnog programiranja

$$\min_{x \in X} \varphi(x), \quad X = \{ x \in R^n \mid f_i(x) \leqslant 0, i = 1, ..., m \}$$

funkcije $\varphi(x)$ i $f_i(x)$, $i = 1, ..., m$, diferencijabilne i neka funkcije f_i zadovoljavaju Slater-ov uslov. Da bi x^* bila optimalna tačka potrebno je i dovoljno da postoje realni brojevi $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tako da je

(4.1') $\quad \nabla\varphi(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla f_j(x^*)$

(4.2') $\quad f_j(x^*) \leqslant 0, \qquad j = 1, ..., m$

(4.3') $\quad \lambda_j f_j(x^*) = 0, \qquad j = 1, ..., m$

(4.4') $\quad \lambda_j \leqslant 0, \qquad j = 1, ..., m$

DOKAZ: Dovoljno je uzeti $\lambda_j = -y_j^*$, $j = 1, ..., m$ i primeniti teoreme 2.4.1 i 2.3.1. ♦

Iz teorema 2.3.2 i 2.4.1 neposredno sledi sledeća

TEOREMA 2.4.3. (Kuhn-Tucker). Neka je u problemu

$$\min_{x \in X} \varphi(x), \quad X = \{ x \mid Ax \leqslant b \}$$

funkcija $\varphi(x)$ konveksna i diferencijabilna. Da bi x^* bilo optimalna tačka potrebno je i dovoljno da postoje realni brojevi $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tako da je

(4.1") $\quad \nabla\varphi(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j$

(4.2") $\quad \langle a_j, x^* \rangle - b_j \leqslant 0, \qquad j = 1, ..., m$

(4.3") $\quad \lambda_j (\langle a_j, x^* \rangle - b_j) = 0, \qquad j = 1, ..., m$

(4.4") $\quad \lambda_j \leqslant 0, \qquad j = 1, ..., m$

gde su $a_1, ..., a_m$ vrste matrice A.

DOKAZ: Kao i u prethodnoj teoremi dovoljno je uzeti $\lambda_j = -y_j^*$, $j = 1, ..., m$, i primeniti teoreme 2.4.1 i 2.3.2. ♦

PRIMER 2.4.1. Neka je dat problem

$$\min_{x \in X} e^{x_1 + x_2}, \quad X = \{ x \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - 1 \leqslant 0 \}.$$

Funkcije cilja i ograničenjâ su konveksne i Slater-ov uslov je ispunjen. Uslovi (4.1'), (4.2'), (4.3') i (4.4') teoreme 2.4.2 postaju

$$e^{x_1^*+x_2^*} = 2\lambda x_1^*$$

$$e^{x_1^*+x_2^*} = 2\lambda x_2^*$$

$$x_1^{*2} + x_2^{*2} - 1 \leqslant 0$$

$$\lambda(x_1^{*2} + x_2^{*2} - 1) = 0$$

$$\lambda \leqslant 0 .$$

Kako je $e^{x_1^*+x_2^*} \neq 0$ sledi da je $\lambda \neq 0$, tj. $\lambda < 0$, pa je $x_1^{*2} + x_2^{*2} = 1$ i $x_1^* = x_2^*$, odakle je

$$x_1^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda = -\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} .$$

Na osnovu teoreme 2.4.2 tačka $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ je optimalna.

U slučaju kada funkcija cilja i/ili funkcije ograničenja nisu konveksne teoreme 2.4.2 i 2.4.3 se ne mogu primeniti za ispitivanje optimalnosti, i to iz više razloga:

– uslovi iz ovih teoremâ ne mogu biti dovoljni jer funkcija cilja može na dopustivom skupu imati više (čak i beskonačno mnogo) lokalnih optimumâ;

– za dokaz obe teoreme koristi se teorema 2.4.1 u kojoj se koristi konveksnost funkcije cilja i funkcijâ ograničenjâ;

– dokaz teoreme 2.4.2 se zasniva i na teoremi 2.3.1 u kojoj se bitno koristi konveksnost funkcijâ ograničenjâ i Slater-ov uslov.

Međutim, moguće je pokazati da su uslovi (4.1'), (4.2'), (4.3') i (4.4') potrebni za optimalnost i u nekonveksnom slučaju, pri čemu se umesto Slater-ovog uslova koristi neki od takozvanih uslovâ regularnosti, npr. da su gradijenti funkcijâ ograničenjâ aktivnih u tački x^* linearno nezavisni. Važi, naime, sledeća teorema:

TEOREMA 2.4.4. Neka je dat problem nelinearnog programiranja

$$\min_{x \in X} \varphi(x), \; X = \{x \in R^n \mid f_i(x) \leqslant 0, i = 1, \ldots, m\}$$

i neka je x^* lokalni optimum ovog problema. Neka su, dalje, funkcije φ i f_i, $i = 1, \ldots, m$ diferencijabilne u tački x^* i neka su gradijenti funkcijâ ograničenjâ aktivnih u x^* linearno nezavisni. Tada postoje realni brojevi $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tako da su zadovoljeni uslovi (4.1'), (4.2'), (4.3') i (4.4').

DOKAZ: Bez umanjenja opštosti možemo uzeti da je

$$f_1(x^*) = 0, \ldots, f_k(x^*) = 0, f_{k+1}(x^*) < 0, \ldots, f_m(x^*) < 0.$$

Kako su $\nabla f_1(x^*), \ldots, \nabla f_k(x^*)$ linearno nezavisni, sistem

$$\langle s, \nabla f_i(x^*)\rangle = -1, \quad i = 1, \ldots, k$$

ima rešenjâ; neka je $\hat{s}$ jedno od njih. Neka je sada s proizvoljan vektor za koji važi

$$\langle s, \nabla f_i(x^*)\rangle < 0, \quad i = 1, \ldots, k;$$

tada su za $\eta > 0$ dovoljno malo, tačke $x^*+\alpha s$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \eta$, dopustive, jer funkcije $f_1, \ldots, f_k$ lokalno opadaju u pravcu s, a funkcije $f_{k+1}, \ldots, f_m$, zbog neprekidnosti, ostaju negativne u dovoljno maloj okolini tačke x^*. No za takvo s mora važiti i

$$\langle s, \nabla \varphi(x^*)\rangle \geqslant 0$$

jer bi u suprotnom postojao vektor $\bar{s}$ i pozitivan broj ρ tako da je $x^*+\alpha\bar{s} \in X$ i

$$\varphi(x^*+\alpha\bar{s}) < \varphi(x^*) \qquad \text{za } 0 < \alpha < \rho,$$

što se protivi pretpostavci da je x^* lokalni optimum.

Neka je sada d proizvoljan vektor za koji je

$$\langle d, \nabla f_i(x^*)\rangle \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, k;$$

dokažimo da je $\langle d, \nabla\varphi(x^*)\rangle \geqslant 0$. Zaista, za $0 < \lambda_j \leqslant 1$ vektor $s_j = \lambda_j \hat{s} + (1-\lambda_j)d$ zadovoljava uslov

$$\langle s_j, \nabla f_i(x^*)\rangle < 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

a stoga i

$$\langle s_j, \nabla\varphi(x^*)\rangle \geqslant 0.$$

Uzimajući $\lambda_j \to 0$, $j \to \infty$, imamo $s_j \to d$, te je zbog neprekidnosti skalarnog proizvoda

$$\langle d, \nabla\varphi(x^*)\rangle \geqslant 0.$$

No, to znači da svako d koje zadovoljava sistem

$$\langle d, \nabla f_i(x^*)\rangle \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, k$$

zadovoljava i nejednakost

$$\langle d, -\nabla\varphi(x^*)\rangle \leqslant 0.$$

Prema Farkas-ovoj lemi postoje nenegativni brojevi $\mu_1, \ldots, \mu_k$ tako da je

$$-\nabla\varphi(x^*) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \nabla f_i(x^*).$$

Uzimajući $\lambda_1 = -\mu_1, \ldots, \lambda_k = -\mu_k, \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_m = 0$, dobijamo uslove (4.1'), (4.3') i (4.4'), dok je uslov (4.2') trivijalno ispunjen. ♦

U slučaju linearnih ograničenja dokaz gornjeg tvrđenja se može izvesti i bez pretpostavke o linearnoj nezavisnosti gradijentâ aktivnih ograničenjâ. Dobar pregled drugih uslova regularnosti i odgovarajućih teorema može se naći u Mangasarian [M.1]; videti takođe Zangwill [Z.3] i Karmanov [K.3].

S obzirom na važnost koju imaju uslovi (4.1'), (4.2'), (4.3') i (4.4'), odnosno (4.1"), (4.2"), (4.3") i (4.4") uvodimo sledeću definiciju:

DEFINICIJA 2.4.1. Tačka x^* se naziva stacionarna za problem

$$\min_{x\in X} \varphi(x), \quad X = \{x \in R^n \mid f_i(x) \leqslant 0, i = 1, \dots, m\}$$

ako i samo ako zadovoljava takozvane Kuhn-Tucker-ove uslove:

$$\nabla\varphi(x^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla f_j(x^*)$$

$$f_j(x^*) \leqslant 0, \qquad j = 1, \dots, m$$

$$\lambda_j f_j(x^*) = 0, \qquad j = 1, \dots, m$$

$$\lambda_j \leqslant 0, \qquad j = 1, \dots, m.$$

Primetimo da se u slučaju problema bez ograničenja

$$\min_{x\in X} \varphi(x)$$

Kuhn-Tucker-ovi uslovi svode na uslov $\nabla\varphi(x^*) = 0$.

2.5. Dualnost

Neka je dat problem nelinearnog programiranja

$$\min_{x\in X} \varphi(x), \quad X = \{x \in R^n \mid f_i(x) \leqslant 0, i = 1, \dots, m\} \tag{5.1}$$

gde su φ i $f_1, \dots, f_m$ diferencijabilne funkcije. Neka je $\psi(x,u) = \varphi(x) + \langle u, f(x)\rangle$, gde je $u = (u_1, \dots, u_m) \in R^m$ i $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$.

DEFINICIJA 2.5.1. Problem nelinearnog programiranja

$$\max_{(x,u)\in Y} \psi(x,u), \qquad Y = \{(x,u) \in R^n \times R^m \mid \nabla\varphi(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla f_i(x) = 0, u \geqslant 0\} \tag{5.2}$$

nazivamo dualnim problemom problema (5.1).

Zapazimo da je funkcija cilja problema (5.2) upravo Lagrange-ova funkcija pridružena problemu (5.1).

TEOREMA 2.5.1. (slaba teorema dualnosti). Neka je $\bar{x}$ dopustivo rešenje problema (5.1), neka je $(\hat{x},\hat{u})$ dopustivo rešenje problema (5.2) i neka su funkcije φ i $f_1,\dots,f_m$ konveksne. Tada je $\varphi(\bar{x}) \geqslant \psi(\hat{x},\hat{u})$.

DOKAZ: Prema teoremi 1.4.7 je

$$\varphi(\bar{x}) \geqslant \varphi(\hat{x}) + \langle \nabla\varphi(\hat{x}), \bar{x}-\hat{x}\rangle,$$

$$f_i(\bar{x}) \geqslant f_i(\hat{x}) + \langle \nabla f_i(\hat{x}), \bar{x}-\hat{x}\rangle, \qquad i = 1,\dots,m.$$

Zbog dopustivosti tačke $(\hat{x},\hat{u})$ važi

$$\nabla\varphi(\hat{x}) = -\sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i \nabla f_i(\hat{x}) \ \text{ i } \ \hat{u} \geqslant 0,$$

a zbog dopustivosti tačke $\bar{x}$ je $f(\bar{x}) \leqslant 0$, te je

$$\varphi(\bar{x}) \geqslant \varphi(\hat{x}) + \langle \nabla\varphi(\hat{x}), \bar{x}-\hat{x}\rangle = \varphi(\hat{x}) - \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i \langle \nabla f_i(\hat{x}), \bar{x}-\hat{x}\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \varphi(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i (f_i(\hat{x}) - f_i(\bar{x})) \geqslant \varphi(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i f_i(\hat{x}) = \psi(\hat{x},\hat{u}),$$

što je i trebalo dokazati. ♦

TEOREMA 2.5.2. (teorema dualnosti). Neka je $\bar{x}$ optimalno rešenje problema (5.1), neka su φ i f_i, $i = 1,\dots,m$, konveksne funkcije i neka je ispunjen Slater-ov uslov za problem (5.1). Tada postoji $\bar{u} \in R^m$ tako da par $(\bar{x},\bar{u})$ predstavlja optimalno rešenje problema (5.2) i $\varphi(\bar{x}) = \psi(\bar{x},\bar{u})$.

DOKAZ: Po teoremi 2.4.2 postoji $\bar{u} \in R^m$ tako da par $(\bar{x},\bar{u})$ zadovoljava uslove

$$\nabla\varphi(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i \nabla f_i(\bar{x}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i f_i(\bar{x}) = 0$$

$$f(\bar{x}) \leqslant 0$$

$$\bar{u} \geqslant 0.$$

Prema tome je $(\bar{x},\bar{u})$ dopustivo rešenje za problem (5.2). Neka je (x,u) proizvoljna dopustiva tačka problema (5.2). Prema prethodnoj teoremi je $\varphi(\bar{x}) \geqslant \psi(x,u)$ za svako $(x,u) \in Y$, te je

$$\psi(\bar{x},\bar{u}) = \varphi(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i f_i(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}) \geqslant \psi(x,u)$$

za svako $(x,u) \in Y$. Odavde sledi da je $(\bar{x},\bar{u})$ optimalno rešenje problema (5.2) i uz to važi $\varphi(\bar{x}) = \psi(\bar{x},\bar{u})$. ♦

U slučaju kada su sva ograničenja linearna Slater-ov uslov se može izostaviti, tj. važi sledeća

TEOREMA 2.5.3. Neka je $\overline{x}$ rešenje problema (5.1), $f = Ax-b$ i φ je konveksna funkcija. Tada postoji $\overline{u} \in R^m$ tako da par $(\overline{x},\overline{u})$ predstavlja optimalno rešenje dualnog problema i $\varphi(\overline{x}) = \psi(\overline{x},\overline{u})$.

DOKAZ: Dokaz se izvodi kao i dokaz teoreme 2.5.2 s tim što se koristi teorema 2.4.3.

Dobar pregled dualnosti u konveksnom programiranju čitalac može naći u Rockafellar [R.4].

ZADACI:

1. Pokazati da je skup optimalnih rešenja problema konveksnog programiranja konveksan.

2. Naći sedlastu tačku Lagrange-ove funkcije pridružene problemu nelinearnog programiranja

$$\min_{(x,y)\in X} x^4 + y^4, \quad X = \{(x,y) \mid x \geq 1, x \leq 2, y \geq 1, y \leq 2\}.$$

3. Neka je φ: $R^2 \to R$ strogo konveksna funkcija i neka funkcija $\varphi(0,y)$ dostiže minimum za $y = 0$, a funkcija $\varphi(x,0)$ za $x = 0$. Da li $\varphi(x,y)$ u $(0,0)$ ima minimum?

4. Proveriti da li je tačka $(0,1)$ rešenje problema

$$\min_{(x,y)\in X} 4x^2+y^2+2xy-x-2y+4, \quad X = \{(x,y) \mid 2x+y \leq 5,\ x+y \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

5. Neka je φ: $R^n \to R$ konkavna funkcija i neka je $C \subseteq R^n$ kompaktan konveksan skup. Neka je $\hat{x}$ rešenje problema $\min_{x\in C} \varphi(x)$. Pokazati da $\hat{x}$ nije unutrašnja tačka skupa C ukoliko funkcija φ nije konstanta. Pokazati takođe da je $\hat{x}$ ekstremna tačka skupa C ukoliko je φ strogo konkavna funkcija.

6. Koristeći prethodni zadatak pokazati da je konveksan kompaktan skup u R^n konveksni omotač svojih ekstremnih tačaka.

7. Pokazati da se svaki problem nelinearnog programiranja može svesti na drugi problem nelinearnog programiranja kod koga je funkcija cilja linearna.

8. Neka je φ: $R^n \to R$ konveksna funkcija i neka je $\hat{x}$ jedinstveno rešenje problema $\min_{x\in R^n} \varphi(x)$. Mora li φ biti strogo konveksna?

9. a) U R^n je dato k tačaka $x_1, \ldots, x_k$. Dokazati da uvek postoji tačka $\hat{x}$ takva da je za svaki $x \in R^n$

$$\sum_{i=1}^{k} \|x-x_i\| \geq \sum_{i=1}^{k} \|\hat{x}-x_i\|.$$

b) Ukoliko tačke $x_1, ..., x_k$ nisu kolinearne takva tačka je jedinstvena. Dokazati!

10. Skup C zadat je sa $C = \{(x,y) \mid x^4+y^4 \leq 1, (x-2)^2+(y-2)^2 \leq r^2\}$. Odrediti vrednosti parametra r za koje je

a) $C \neq \emptyset$

b) ograničenja koja definišu skup C zadovoljavaju Slater-ov uslov.

GLAVA III

TEORIJA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

U ovoj glavi ćemo dati najvažnije teoreme i definicije koje se odnose na slučaj kada su sve funkcije ograničenjâ i funkcija cilja problema matematičkog programiranja linearne. Pritom ćemo u znatnoj meri koristiti rezultate prethodne glave, mada će biti i teoremâ koje nisu analogoni niti posebni slučajevi teoremâ koje se odnose na nelinearan slučaj.

3.1. Postavka problema

Opšti oblik problema linearnog programiranja je sledeći (podsećamo da se problem maksimizacije svodi na problem minimizacije množenjem funkcije cilja sa -1):

$$\begin{aligned}
\min \{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\Big|\; & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, k; \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \geqslant 0, \quad i = k+1, \ldots, s; \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i = 0, \quad i = s+1, \ldots, m; \\
& x_1 \geqslant 0, \ldots, x_r \geqslant 0 \} .
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Primetimo odmah da se može pretpostaviti da je za sve promenljive nametnut uslov nenegativnosti (tj. da je $r=n$); zaista, svaku promenljivu x_j, $r < j \leqslant n$, možemo zameniti u svim ograničenjima i funkciji cilja sa $x_j - x_{j+n-r}$, pri čemu je $x_j \geqslant 0$ i $x_{j+n-r} \geqslant 0$. Na taj način se od problema (1.1) sa n promenljivih dobija problem sa $r+2(n-r)$ nenegativnih promenljivih.

Osim toga, svako ograničenje oblika

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, k$$

se može pomnožiti sa -1, što daje ekvivalentno ograničenje

$$\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j + b_i \geqslant 0 .$$

Najzad, svako ograničenje tipa

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i = 0, \quad i = s+1, \ldots, m$$

može se ekvivalentno zameniti sa dve nejednačine

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij})x_j + b_i \geq 0.$$

Ako se izvrše sve navedene zamene, problem (1.1) postaje

$$\text{(1.2)} \qquad \min \{ \sum_{j=1}^{n'} c'_j x_j \mid \sum_{j=1}^{n'} a'_{ij}x_j - b'_i \geq 0, i = 1, \ldots, m'; x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n' \}$$

Ovaj oblik problema linearnog programiranja zvaćemo simetričan oblik.

S druge strane, svaku nejednačinu

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \leq 0, \quad i = 1, \ldots, k$$

možemo zameniti jednačinom

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} - b_i = 0,$$

uz uslov $x_{n+i} \geq 0$. Novouvedena promenljiva x_{n+i} naziva se izravnavajuća promenljiva. Sem toga svaku nejednačinu

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \geq 0, \quad i = k+1, \ldots, s$$

možemo zameniti jednačinom

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} - b_i = 0,$$

uz uslov $x_{n+i} \geq 0$.

Ako izvršimo navedene zamene i na ranije opisani način na sve promenljive nametnemo uslov nenegativnosti, problem (1.1) dobija takozvani standardni oblik

$$\text{(1.3)} \qquad \min \{ \sum_{j=1}^{n''} c''_j x_j \mid \sum_{j=1}^{n''} a''_{ij}x_j - b''_i = 0, i = 1, \ldots, m''; x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n'' \},$$

gde su koeficijenti uz izravnavajuće promenljive u funkciji cilja jednaki nuli.

Gornja razmatranja pokazuju da se ne gubi na opštosti ako se umesto problema (1.1) posmatra problem (1.2) ili (1.3). Mi ćemo u daljem problem linearnog programiranja uzimati u simetričnom ili standardnom obliku rukovodeći se isključivo njihovom pogodnošću za razmatranja koja imamo u vidu. Oblik (1.2) pokazuje da je problem linearnog programiranja specijalan slučaj problema nelinearnog programiranja koji smo razmatrali u prethodnoj glavi. Problemi (1.2) i (1.3) se mogu kraće zapisati korišćenjem matrične notacije na sledeći način:

(1.2') $\min \{ \langle c',x\rangle \mid A'x \geqslant b', x \geqslant 0 \}$

odnosno

(1.3') $\min \{ \langle c'',x\rangle \mid A''x = b'', x \geqslant 0 \}.$

3.2. Dualnost u linearnom programiranju

Ne umanjujući opštost razmatraćemo problem linearnog programiranja u obliku

(2.1) $\min \{ \langle c,x\rangle \mid Ax \geqslant b, x \geqslant 0 \}$

Označimo vrste matrice A sa a_i, $i = 1, ..., m$, a vrste jedinične matrice n-tog reda sa a_i, $i = m+1, ..., m+n$. Neka je $b_i = 0, i = m+1, ..., m+n$. Problem (2.1) postaje

$$\min \{ \langle c,x\rangle \mid -\langle a_i,x\rangle + b_i \leqslant 0, i = 1, ..., m+n \}$$

Po definiciji 2.5.1 dualni problem je

$$\max \{ \langle c,x\rangle + \sum_{i=1}^{m+n} u_i(-\langle a_i,x\rangle + b_i) \;\Big|\; c - \sum_{i=1}^{m+n} u_i a_i = 0, u_i \geqslant 0, i = 1, ..., m+n \}$$

S obzirom da je

$$\langle c,x\rangle + \sum_{i=1}^{m+n} u_i(-\langle a_i,x\rangle) = 0$$

i da ograničenja sadrže samo promenljive $u_1, ..., u_{m+n}$, problem postaje

$$\max \{ \sum_{i=1}^{m+n} b_i u_i \;\Big|\; c - \sum_{i=1}^{m+n} u_i a_i = 0, u_i \geqslant 0, i = 1, ..., m+n \}.$$

Vodeći računa o definiciji vektorâ a_i, $i = m+1, ..., m+n$ i skalarâ b_i, $i = m+1, ..., m+n$, vidimo da je gornji problem ekvivalentan sa problemom

(2.2) $\max \{ \langle b,v\rangle \mid A^T v \leqslant c, \; v \geqslant 0 \},$

gde je $v = (u_1, ..., u_m) \in R^m$. Napominjemo da je skalarni proizvod u R^n i R^m označen na isti način: iz konteksta je uvek jasno o kom je prostoru reč. Lako se može dokazati da je problem dualan problemu (2.2) ekvivalentan sa (2.1).

TEOREMA 3.2.1. Neka je dat par uzajamno dualnih problemâ (2.1) i (2.2). Ako je $X = \{ x \in R^n \mid Ax \geqslant b, x \geqslant 0 \}$ i $V = \{ v \in R^m \mid A^T v \leqslant c, v \geqslant 0 \}$ onda važi:

(i) Ako je $x \in X$ i $v \in V$ onda je $\langle c,x\rangle \geqslant \langle b,v\rangle$.

(ii) $\overline{x} \in X$ je optimalno rešenje problema (2.1) ako i samo ako postoji $\overline{v} \in V$ tako da je $\langle c,\overline{x}\rangle = \langle b,\overline{v}\rangle$.

(iii) $\overline{x} \in X$ je optimalno rešenje problema (2.1) ako i samo ako postoji $\overline{v} \in V$ tako da je $\langle \overline{x}, A^T\overline{v}-c\rangle = 0$ i $\langle \overline{v}, A\overline{x}-b\rangle = 0$.

DOKAZ: (i) Sledi iz teoreme 2.5.1.

(ii) Neka postoji $\overline{v} \in V$ tako da je $\langle c,\overline{x}\rangle = \langle b,\overline{v}\rangle$. Prema (i) je za proizvoljno $x \in X$ ispunjeno

$$\langle c,x\rangle \geqslant \langle b,\overline{v}\rangle = \langle c,\overline{x}\rangle ,$$

pa je $\overline{x}$ optimalno rešenje problema (2.1).

Neka je $\overline{x}$ optimalno rešenje problema (2.1). Prema teoremi 2.5.3 i s obzirom da je problem (2.2) dualan problemu (2.1), postojaće $\overline{v} \in V$ tako da je $\langle c,\overline{x}\rangle = \langle b,\overline{v}\rangle$.

(iii) Neka je $\overline{x} \in X$, $\overline{v} \in V$ i

$$\langle \overline{v}, A\overline{x}-b\rangle = 0 \quad i \quad \langle \overline{x}, A^T\overline{v}-c\rangle = 0;$$

tada je

$$\langle \overline{v}, A\overline{x}\rangle - \langle \overline{v},b\rangle = \langle \overline{x}, A^T\overline{v}\rangle - \langle \overline{x},c\rangle .$$

S obzirom da je $\langle \overline{v}, A\overline{x}\rangle = \langle \overline{x}, A^T\overline{v}\rangle$ sledi da je $\langle c,\overline{x}\rangle = \langle b,\overline{v}\rangle$ pa iz (ii) sledi optimalnost $\overline{x}$.

Neka je $\overline{x}$ optimalno rešenje problema (2.1). Prema (ii) postoji $\overline{v} \in V$ tako da je $\langle c,\overline{x}\rangle = \langle b,\overline{v}\rangle$. Oduzimajući ovu jednakost od jednakosti $\langle \overline{x}, A^T\overline{v}\rangle = \langle \overline{v}, A\overline{x}\rangle$ dobijamo

$$\langle \overline{x}, A^T\overline{v}-c\rangle = \langle \overline{v}, A\overline{x}-b\rangle . \tag{2.3}$$

S obzirom da je $\overline{x} \in X$, $\overline{v} \in V$ sledi da je $\overline{x} \geqslant 0$, $\overline{v} \geqslant 0$, $A^T\overline{v}-c \leqslant 0$, $A\overline{x}-b \geqslant 0$, pa je

$$\langle \overline{x}, A^T\overline{v}-c\rangle \leqslant 0, \quad \langle \overline{v}, A\overline{x}-b\rangle \geqslant 0$$

i iz (2.3) sledi

$$\langle \overline{x}, A^T\overline{v}-c\rangle = \langle \overline{v}, A\overline{x}-b\rangle = 0. \ \blacklozenge$$

N a p o m e n a: Iz činjenice da se problem dualan problemu (2.2) može napisati u obliku (2.1) sledi da je $\overline{v}$ koje zadovoljava uslove u tački (ii) odnosno (iii) optimalno rešenje problema (2.2).

PRIMER 3.2.1. Posmatrajmo par dualnih problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 12v_2-2v_3- v_4 \\ & 4v_1 +7v_2-4v_3-2v_4 \leqslant 3 \\ & -8v_1 +2v_2- v_3 +3v_4 \leqslant 9 \\ & -3v_1 +5v_2 +2v_3 + v_4 \leqslant 7 \\ & v_1 \geqslant 0, v_2 \geqslant 0, v_3 \geqslant 0, v_4 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$
(2.5)\qquad
\begin{aligned}
\min\ & 3x_1+9x_2+7x_3\\
& 4x_1-8x_2-3x_3 \geqslant 0\\
& 7x_1+2x_2+5x_3 \geqslant 12\\
& -4x_1-\ x_2+2x_3 \geqslant -2\\
& -2x_1+3x_2+\ x_3 \geqslant -1\\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Tačka $\overline{x} = (1,0,1)$ je optimalno rešenje problema (2.5) jer postoji dopustivo rešenje problema (2.4) $\overline{v} = (0,1,0,2)$ tako da su funkcije cilja jednake; uz to je $\overline{v}$ optimalno rešenje problema (2.4). Tačka $(0,1,1,0)$ je takođe optimalno rešenje problema (2.4) jer su za $\overline{x} = (1,0,1)$ ispunjeni uslovi iz (iii) prethodne teoreme. Iz ovog primera vidimo da optimalno rešenje ne mora biti jedinstveno.

TEOREMA 3.2.2. Ako je $X \neq \emptyset$ i $V \neq \emptyset$ onda problemi (2.1) i (2.2) imaju optimalna rešenja.

DOKAZ: Neka je $\tilde{v} \in V$; tada po teoremi 3.2.1 (i) za svako $x \in X$ važi $\langle c,x\rangle \geqslant \langle b,\tilde{v}\rangle$ tj. funkcija $\langle c,x\rangle$ je ograničena odozdo na X. Kako je $X \neq \emptyset$ postoji

$$\lambda = \inf_{x\in X} \langle c,x\rangle .$$

Prema tome, svako rešenje sistema

$$Ax \geqslant b,\ x \geqslant 0$$

zadovoljava i nejednačinu

$$\langle c,x\rangle \geqslant \lambda .$$

Pretpostavimo da problem (2.1) nema optimalno rešenje. Tada je $\langle c,x\rangle > \lambda$ za svako $x \in X$. Prema teoremi 1.3.2 postoji $\overline{u} \geqslant 0$ tako da je

$$[A^T, I]\,\overline{u} = c \quad \text{i} \quad \langle [b,0], \overline{u}\rangle > \lambda .$$

Uvodeći vektor $\overline{v} = (\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m)$ dobijamo

$$A^T\overline{v} \leqslant c, \overline{v} \geqslant 0$$

pa je $\overline{v} \in V$ i pritom je $\langle b,\overline{v}\rangle > \lambda$. Kako, prema teoremi 3.2.1 (i), za svako $x \in X$ važi

$$\langle c,x\rangle \geqslant \langle b,\overline{v}\rangle > \lambda$$

dobija se protivrečnost sa definicijom λ. Prema tome problem (2.1) ima optimalno rešenje. Slično se dokazuje da problem (2.2) ima optimalno rešenje. ♦

TEOREMA 3.2.3. Neka je $X \neq \emptyset$; tada je $V = \emptyset$ ako i samo ako je $\inf_{x\in X} \langle c,x\rangle = -\infty$

DOKAZ: Neka je $X \neq \emptyset$ i $\inf_{x \in X} \langle c,x \rangle = -\infty$. Ako bi postojalo $v \in V$, prema teoremi 3.2.1 (i) bi bilo $\langle c,x \rangle \geq \langle b,v \rangle$ za svako $x \in X$, što je nemoguće zbog $\inf_{x \in X} \langle c,x \rangle = -\infty$.

Neka je sada $X \neq \emptyset$ i $V = \emptyset$. Pretpostavimo da je $\inf_{x \in X} \langle c,x \rangle = \lambda > -\infty$. Pretpostavka da je za svako $x \in X$ ispunjeno $\langle c,x \rangle > \lambda$ vodi protivrečnosti: kao u dokazu prethodne teoreme moguće je tada naći $\overline{v} \in V$; međutim $V = \emptyset$. Ukoliko postoji $\overline{x} \in X$ takvo da je $\langle c,\overline{x} \rangle = \lambda$ onda problem (2.1) ima optimalno rešenje, pa na osnovu teoreme 3.2.1 (ii) sledi da postoji $\overline{v} \in V$; međutim $V = \emptyset$. ♦

TEOREMA 3.2.4. Neka je $V \neq \emptyset$; tada je $X = \emptyset$ ako i samo ako je $\sup_{v \in V} \langle b,v \rangle = +\infty$.

DOKAZ: Dokaz je analogan dokazu prethodne teoreme. ♦

Primetimo da je slučaj $X = V = \emptyset$ mogućan, što pokazuje sledeći primer:

PRIMER 3.2.2. Posmatrajmo sledeći par dualnih problema:

$$\begin{array}{ll} \min & -4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ & -2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 3 \\ & 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 \geq 8 \\ & x_1 + 4x_2 + 7x_3 \geq 9 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \tag{2.7}$$

$$\begin{array}{ll} \max & 3v_1 + 8v_2 + 9v_3 \\ & -2v_1 + 3v_2 + v_3 \leq -4 \\ & 2v_1 - 3v_2 + 4v_3 \leq 2 \\ & -v_1 - 5v_2 + 7v_3 \leq 6 \\ & v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0 \end{array} \tag{2.8}$$

Skup X dopustivih rešenja problema (2.7) je prazan. Zaista, ako prvu nejednačinu u (2.7) pomnožimo sa 3 a drugu sa 2 i saberemo dobićemo nejednačinu

$$-13x_3 \geq 25,$$

što protivreči uslovu $x_3 \geq 0$.

Skup V dopustivih rešenja problema (2.8) takođe je prazan. Zaista, ako saberemo prve dve nejednačine u (2.8) dobićemo nejednačinu

$$5v_3 \leq -2,$$

što protivreči uslovu $v_3 \geq 0$.

3. Ekstremne tačke i optimalnost

Ovaj paragraf posvećen je izučavanju nekih geometrijskih osobina skupa dopustivih i skupa optimalnih tačaka za problem linearnog programiranja. Svojstva koja ćemo navesti bitno zavise od linearnosti funkcijâ ograničenjâ i funkcije cilja razmatranog problema.

Posmatraćemo problem linearnog programiranja u standardnom obliku

$$\min \{ \langle c,x\rangle \mid x \in X\}, \quad X = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geqslant 0\} \tag{3.1}$$

Bez umanjenja opštosti možemo smatrati da je rang matrice A jednak broju jednačina (m); odatle odmah sledi da je $m \leqslant n$.

DEFINICIJA 3.3.1. Neka je $C \subseteq R^n$. Tačku $x \in C$ nazivamo ekstremnom ako i samo ako ne postoji par tačaka $x' \in C$, $x'' \in C$, $x' \neq x''$, takvih da je $x = (1/2)(x'+x'')$.

Pre iskaza sledeće teoreme koja daje algebarsku karakterizaciju ekstremne tačke skupa X primetimo da se skup X može predstaviti u obliku

$$X = \{x \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} x_j a_j = b, x \geqslant 0\}$$

gde su a_j, $j = 1, ..., n$ kolone matrice A. Kolonu a_j zvaćemo pratećom kolonom tačke $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) \in X$ ako i samo ako je $\bar{x}_j > 0$.

TEOREMA 3.3.1. Tačka $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) \in X$ je ekstremna tačka ako i samo ako su prateće kolone tačke $\bar{x}$ linearno nezavisne.

DOKAZ: Neka je $\bar{x} \in X$ ekstremna tačka. Bez umanjenja opštosti možemo uzeti $\bar{x}_1>0, ..., \bar{x}_k>0, \bar{x}_{k+1} = 0, ..., \bar{x}_n = 0$. Ako je $k = 0$ onda je skup pratećih kolona prazan pa je uslov trivijalno ispunjen. Zaključak o linearnoj nezavisnosti je trivijalan i u slučaju $k = 1$. Pretpostavićemo stoga da je $k \geqslant 2$. Ako pretpostavimo suprotno, tj. da su kolone $a_1, ..., a_k$ linearno zavisne, onda se jedna od tih kolona može predstaviti kao linearna kombinacija ostalih; neka je to npr. kolona a_1:

$$a_1 = \sum_{j=2}^{k} \lambda_j a_j .$$

Za dovoljno malo $\epsilon > 0$, tačke

$$x' = (\bar{x}_1+\epsilon, \bar{x}_2-\epsilon\lambda_2, ..., \bar{x}_k-\epsilon\lambda_k, \bar{x}_{k+1}, ..., \bar{x}_n)$$

i

$$x'' = (\bar{x}_1-\epsilon, \bar{x}_2+\epsilon\lambda_2, ..., \bar{x}_k+\epsilon\lambda_k, \bar{x}_{k+1}, ..., \bar{x}_n)$$

pripadaju X i očigledno je $\bar{x} = (x'+x'')/2$, $x' \neq x''$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $\bar{x}$ ekstremna tačka.

Pretpostavimo sada da su prateće kolone tačke $\bar{x}$ linearno nezavisne. Bez umanjenja opštosti možemo uzeti da su prateće kolone $a_1, ..., a_k$. Skup $\{a_1, ..., a_k\}$ možemo kolonama matrice A dopuniti do baze prostora R^m, jer je rang $A = m$. Neka je dobijena baza npr. $\{a_1, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_m\}$. Prema tome, sistem $Ax = b$ možemo napisati u obliku

$$x_i = \alpha_i + \sum_{j=m+1}^{n} \beta_{ij} x_j, \quad i = 1, ..., m. \tag{3.2}$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\bar{x} = (x'+x'')/2$, $x' \neq x''$, $x' \in X$, $x'' \in X$. Poslednjih $n-k$ komponenata vektora x' i x'' moraju biti jednake nuli jer je

$$0 = \bar{x}_i = \frac{1}{2}x_i' + \frac{1}{2}x_i'', \quad x_i' \geq 0, x_i'' \geq 0, i = k+1, ..., n.$$

Tim pre je

$$x_i' = x_i'' = 0, \quad i = m+1, ..., n.$$

No, pošto x' i x'' zadovoljavaju (3.2),biće i

$$x_i' = x_i'', \quad i = 1, ..., m,$$

što je u suprotnosti sa $x' \neq x''$. ♦

Prethodna teorema daje kriterijum za ispitivanje da li je dopustiva tačka skupa X ekstremna. Ekstremne tačke skupa X nazivaćemo i baznim dopustivim rešenjima problema (3.1).

TEOREMA 3.3.2. Ako je $X \neq \emptyset$ tada X ima ekstremnu tačku.

DOKAZ: Posmatrajmo sledeći niz problema linearnog programiranja: Naći

$$(P_1) \qquad \lambda_1 = \min_{x \in X} x_1$$

$$(P_2) \qquad \lambda_2 = \min_{\substack{x \in X \\ x_1 = \lambda_1}} x_2$$

$$(P_n) \qquad \lambda_n = \min_{\substack{x \in X \\ x_1 = \lambda_1, ..., x_{n-1} = \lambda_{n-1}}} x_n$$

Primetimo da problemi $(P_1), ..., (P_n)$ imaju optimalna rešenja jer je $X \neq \emptyset$ i optimalno rešenje problema (P_i) je dopustivo rešenje problema (P_{i+1}), a funkcije cilja koje se minimiziraju su ograničene odozdo (videti dokaz teoreme 3.2.2). Dokažimo da je $\bar{x} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ ekstremna tačka skupa X. Jasno je da je $\bar{x} \in X$. Pretpostavimo da je

$$\bar{x} = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x'', \quad x' \neq x'', \quad x' \in X, \quad x'' \in X.$$

Neka je k najmanji indeks za koji je $x'_k \neq x''_k$; tada je $x'_1 = x''_1 = \lambda_1, \ldots, x'_{k-1} = x''_{k-1} = \lambda_{k-1}$, $x'_k \neq \lambda_k \neq x''_k$ i s obzirom da je

$$\lambda_k = \frac{1}{2}x'_k + \frac{1}{2}x''_k,$$

mora biti bar jedan od x'_k, x''_k manji od λ_k; neka je to x'_k. Tada je x' dopustivo rešenje problema (P_k) a funkcija cilja problema (P_k) ima u x' manju vrednost nego u $\bar{x}$, što je u suprotnosti sa definicijom λ_k. ♦

POSLEDICA: Ako problem (3.1) ima optimalno rešenje onda on ima i optimalno rešenje koje je ekstremna tačka skupa X.

DOKAZ: Neka je λ optimalna vrednost funkcije $\langle c,x \rangle$ pri $x \in X$. Posmatrajmo skup

$$Y = \{ x \mid Ax = b, \langle c,x \rangle = \lambda, x \geqslant 0 \}$$

Prema pretpostavci $Y \neq \emptyset$ i na osnovu teoreme 3.3.2 sledi da postoji $\bar{x}$ koje je ekstremna tačka skupa Y. Dokažimo da je $\bar{x}$ istovremeno ekstremna tačka skupa X. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\bar{x} = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x'', \quad x' \neq x'', \quad x' \in X, \quad x'' \in X.$$

Imamo

$$\langle c,x \rangle = \frac{1}{2}\langle c,x' \rangle + \frac{1}{2}\langle c,x'' \rangle$$

a kako je $\langle c,x' \rangle \geqslant \lambda$, $\langle c,x'' \rangle \geqslant \lambda$, $\langle c,\bar{x} \rangle = \lambda$, sledi da je $\langle c,x' \rangle = \langle c,x'' \rangle = \lambda$, tj. $x' \in Y$, $x'' \in Y$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je $\bar{x}$ ekstremna tačka skupa Y. ♦

Na osnovu teoreme 3.3.1 sledi da skup X nema više od $\binom{n}{m}$ ekstremnih tačaka, a na osnovu posledice teoreme 3.3.2 sledi da je bar jedna od tih tačaka optimalna, pod pretpostavkom da problem (3.1) ima optimalno rešenje. Ovo nam u principu omogućuje da svaki problem linearnog programiranja rešimo u konačnom broju koraka.

ZADACI:

1. Svesti na standardni oblik sledeće probleme linearnog programiranja

a)
$$\begin{aligned} \min \; & 3x_1 - 2x_2 \\ & 2x_1 - x_2 \geqslant 1 \\ & -x_1 + x_2 \geqslant 0 \\ & x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \max \; & x_1 - x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ & -2x_1 + x_2 \geqslant -1 \\ & x_1 - x_2 \geqslant 3 \\ & x_1 \geqslant 0 \end{aligned}$$

2. Svesti na simetričan oblik sledeće probleme linearnog programiranja

a)
$$\begin{aligned} \min\ & -x_1 - x_2 + x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \leqslant -2 \\ & x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \max\ & x_2 - x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 \leqslant 5 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

3. Pokazati da su dati problemi uzajamno dualni

a)
$$\begin{aligned} \min\ & \langle c,x \rangle \\ & Ax = b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max\ & \langle b,y \rangle \\ & A^T y \leqslant c \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \max\ & \langle b,y \rangle \\ & A^T y \leqslant c \\ & y \geqslant 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min\ & \langle c,x \rangle \\ & Ax \geqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

4. Naći dualne probleme problemâ iz zadataka 1. i 2.

5. Neka problem

$$\begin{aligned} \min\ & \langle c,x \rangle \\ & Ax \geqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

ima optimalno rešenje. Dokazati da funkcija cilja problema

$$\begin{aligned} \min\ & \langle c,x \rangle \\ & Ax \geqslant b' \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

ne može biti neograničena ni za koji vektor b'.

6. Neka je vektor $b \geqslant 0$ i neka matrica A ima bar jednu vrstu u kojoj su svi elementi pozitivni. Dokazati da problem linearnog programiranja

$$\begin{aligned} \max\ & \langle c,x \rangle \\ & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

ima optimalno rešenje.

7. Rešiti sledeći problem linearnog programiranja

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n \\ & x_1 + x_2 + \ldots + x_i \geqslant i, \quad i = 1, \ldots, n \\ & x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

8. Izvesti Farkas-ovu lemu koristeći teoriju dualnosti u linearnom programiranju.

9. Navesti primere parova dualnih problema sa sledećim svojstvima:
a) oba imaju jedinstveno rešenje;
b) jedan ima jedinstveno rešenje a drugi beskonačno mnogo optimalnih rešenja;
c) oba imaju beskonačno mnogo optimalnih rešenja.

10. Ispitati optimalnost datog rešenja sledećih problema:

a)
$$\begin{aligned} &\max \; x_1 + 3x_2 + x_3 \\ &4x_1 + 11x_2 + 3x_3 = 7 \\ &x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ &x_i \geqslant 0,\, i = 1,2,3 \\ &\bar{x} = (1,0,1) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} &\max \; x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ &x_1 - x_2 - x_3 \leqslant 1 \\ &x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 1 \\ &x_1 \geqslant 0,\, i = 1,2,3 \\ &\bar{x} = (1,1,1) \end{aligned}$$

11. Neka je $L(x,y)$ Lagrange-ova funkcija problema

$$\begin{aligned} &\min \langle c,x \rangle \\ &Ax \geqslant b \\ &x \geqslant 0 \end{aligned}$$

i neka je $\bar{L}\,(y,x)$ Lagrange-ova funkcija dualnog problema. Dokazati da je za sve $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$ ispunjeno $L(x,y) + \bar{L}(y,x) = 0$.

12. Naći sve ekstremne tačke skupa

$$X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\, x_i \geqslant 0,\, i = 1, \ldots, n\}$$

13. Dokazati da su tačke $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$, $(-1,0,0,0)$, $(0,-1,0,0)$, $(0,0,-1,0)$, $(0,0,0,-1)$ jedine ekstremne tačke skupa

$$\{(x,y,z,t) \in R^4 \mid |x| + |y| + |z| + |t| \leqslant 1\}.$$

14. Naći sve ekstremne tačke skupa

$$B = \{x \in R^n \mid \|x\| \leqslant 1\}.$$

15. Kvadratne matrice reda n se mogu shvatiti kao tačke u n^2 dimenzionom prostoru. Matrica $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ naziva se dvostruko stohastičkom ako i samo ako je

$$a_{ij} \geqslant 0,\, i,j = 1, \ldots, n; \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,\, j = 1, \ldots, n; \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1,\, i = 1, \ldots, n.$$

Neka je K skup svih dvostruko stohastičkih matrica reda n; dokazati da je K konveksan skup i da su sve ekstremne tačke skupa K permutacione matrice (matrice koje u svakoj vrsti i svakoj koloni imaju po jednu jedinicu, a ostalih n^2-n elemenata su nule).

GLAVA IV

METODE LINEARNOG PROGRAMIRANJA

U ovoj glavi prelazimo na izlaganje metodâ za rešavanje problema linearnog programiranja. Pritom se podrazumeva da je problem rešen ako je pronađeno bar jedno optimalno rešenje ili je ustanovljeno da je funkcija cilja neograničena na dopustivom skupu. U prethodnoj glavi smo videli da se pri traženju optimalnog rešenja problema linearnog programiranja možemo ograničiti na ispitivanje ekstremnih tačaka dopustivog skupa. Na toj ideji bazira se takozvana simpleks metoda. Metodu je predložio 1947. G. B. Dantzig [D.2]. Zbog svoje efikasnosti metoda je od velikog praktičnog značaja. Do danas je razrađeno više metoda zasnovanih na istoj ideji i prilagođenih različitim praktičnim potrebama. Osim simpleks metode izložićemo takozvanu dualnu simpleks metodu koja se zasniva na sličnim principima kao i simpleks metoda. Metodu je predložio Lemke [L.2]. Dobri pregledi ovih i raznih drugih metoda (revidirana simpleks metoda, metode za rešavanje transportnog problema, metode za probleme velikih dimenzija, metode za probleme optimalnog rasporeda itd.) mogu se naći npr. u Dantzig [D.3], Gass [G.1], Hu [H.6], Lasdon [L.1], Hadley [H.3], Simonnard [S.1].

4.1. Teorijske osnove simpleks metode

Posmatrajmo problem linearnog programiranja

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

(1.1)
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, \dots, n$$

Bez umanjenja opštosti možemo uzeti da je rang matrice $A = [a_{ij}]$ jednak m. U narednim definicijama ćemo okarakterisati neka od rešenja sistema jednačina

(1.2)
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Svakom skupu od m linearno nezavisnih kolona matrice A pridružujemo jedno rešenje sistema (1.2), takozvano bazično rešenje.

DEFINICIJA 4.1.1. Bazičnim rešenjem koje odgovara datom skupu od m linearno nezavisnih kolona matrice A nazivamo rešenje koje se dobija kada se promenljive koje odgovaraju ostalim kolonama izjednače sa nulom a sistem se reši po preostalih m promenljivih. Tih m promenljivih nazivamo bazičnim promenljivim.

DEFINICIJA 4.1.2. Bazično rešenje kod koga su sve komponente nenegativne nazivamo bazičnim dopustivim rešenjem.

DEFINICIJA 4.1.3. Bazično dopustivo rešenje koje ima tačno m pozitivnih komponenata zovemo nedegenerisanim.

TEOREMA 4.1.1. Svako bazično dopustivo rešenje sistema (1.2) je ekstremna tačka skupa X dopustivih rešenja problema (1.1).

DOKAZ: Neka bazično dopustivo rešenje $\overline{x}$ odgovara linearno nezavisnim kolonama $j_1, \ldots, j_m$ matrice A. S obzirom da je po definiciji $\overline{x}_j = 0$ za $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_m\}$ prateće kolone tačke $\overline{x}$ su neke od kolona $j_1, \ldots, j_m$ (i to upravo one za koje su odgovarajuće komponente tačke $\overline{x}$ veće od nule). Kako su te kolone linearno nezavisne, na osnovu teoreme 3.3.1 sledi da je $\overline{x}$ ekstremna tačka skupa X. ♦

U narednim teoremama ćemo radi jednostavnijeg izražavanja pretpostaviti da su prvih m kolona matrice A linearno nezavisne, što ne umanjuje opštost zaključivanja jer je, s obzirom da je rang A = m, prenumeracijom promenljivih to uvek moguće postići. Tada se elementarnim transformacijama sistem (4.2) može dovesti na oblik

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a'_{ij} x_j = b'_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1.3}$$

Primetimo da se iz (1.3) direktno mogu dobiti komponente bazičnog rešenja koje odgovara kolonama 1, ..., m. Ako to rešenje obeležimo sa $\overline{x}$, po definiciji je $\overline{x}_i = 0$, $i = m+1, \ldots, n$, pa iz (1.3) sledi da je $\overline{x}_i = b'_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Koristeći (1.3) možemo da eliminišemo promenljive $x_1, \ldots, x_m$ iz linearne forme

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

Formule za eliminaciju su

$$x_i = b'_i - \sum_{j=m+1}^{n} a'_{ij} x_j , \qquad i = 1, \ldots, m$$

a novi oblik forme je

$$z = z'_0 + \sum_{j=m+1}^{n} c'_j x_j .$$

Prema tome, problem (1.1) se može napisati u ekvivalentnom obliku*

$$\min z = z'_0 + \sum_{j=m+1}^{n} c'_j x_j$$

(1.4) $$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a'_{ij} x_j = b'_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, n$$

TEOREMA 4.1.2. Pretpostavimo da je u (1.4) $b'_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$ i $c'_j \geqslant 0$, $j = m+1, \ldots, n$. Tada je bazično rešenje koje odgovara kolonama 1, ..., m optimalno rešenje problema (1.1).

DOKAZ: Obeležimo sa $\bar{x}$ bazično rešenje koje odgovara kolonama 1, ..., m. Tada je $\bar{x}=(b'_1, \ldots, b'_m, 0, \ldots, 0)$ i kako je $b'_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\bar{x}$ je bazično dopustivo rešenje, tj. $\bar{x} \in X$.

Neka je $\tilde{x} \in X$ i $\tilde{x} \neq \bar{x}$. Tada je $\tilde{x}_1 \geqslant 0, \ldots, \tilde{x}_n \geqslant 0$ i bar jedan od $\tilde{x}_{m+1}, \ldots, \tilde{x}_n$ je pozitivan (jer bi inače bilo $\tilde{x} = \bar{x}$). No, tada je

$$z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} c'_j \tilde{x}_j \geqslant z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} c'_j \bar{x}_j = z_0,$$

pa je $\bar{x}$ optimalno rešenje problema (1.4). Kako su problemi (1.4) i (1.1) ekvivalentni, sledi da je $\bar{x}$ optimalno rešenje problema (1.1). ♦

TEOREMA 4.1.3. Neka je u (1.4) $b'_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$ i neka je za neko $k \in \{m+1, \ldots, n\}$ ispunjeno

$$c'_k < 0 \text{ i } a'_{ik} \leqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Tada je funkcija cilja problema (1.1) neograničena odozdo na X.

DOKAZ: Neka je za dato $t \geqslant 0$ tačka $x(t)$ definisana sa

$$x_i(t) = b'_i - a'_{ik} t, \qquad i = 1, \ldots, m; \; x_k(t) = t$$

$$x_i(t) = 0, \qquad i = m+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n.$$

Lako je proveriti da je $x(t) \in X$ za $t \geqslant 0$. Vrednost funkcije cilja u tački $x(t)$ jednaka je $z'_0 + c'_k t \to -\infty$, pri $t \to +\infty$. Kako se vrednosti funkcija cilja problema (1.1) i (1.4) poklapaju na skupu X zaključujemo da je funkcija cilja problema (1.1) neograničena odozdo na X. ♦

---

* Ekvivalentnost problema (1.1) i (1.4) sastoji se u tome što je skup dopustivih rešenja isti u oba problema a vrednosti funkcija cilja se na tom skupu poklapaju (uporediti sa dokazom teoreme 4.2.3).

TEOREMA 4.1.4. Neka je u (1.4) $b_i' > 0, i = 1, \dots, m$ i neka je za neko $k \in \{m+1, \dots, n\}$ ispunjeno

$$c_k' < 0 \quad \text{i za neko} \quad s \in \{1, \dots, m\} \quad a_{sk}' > 0 .$$

Tada postoji bazično dopustivo rešenje problema (1.1) $\tilde{x}$ tako da je

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \tilde{x}_j < \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j ,$$

gde je $\bar{x}$ bazično rešenje problema (1.1) koje odgovara kolonama $1, \dots, m$.

DOKAZ: Primetimo najpre da je $\bar{x} = (b_1', \dots, b_m', 0, \dots, 0)$ pa je, s obzirom da po pretpostavci $b_i' > 0, i = 1, \dots, m$, $\bar{x}$ nedegenerisano bazično dopustivo rešenje. Neka je

$$\frac{b_r'}{a_{rk}'} = \min \left\{ \frac{b_i'}{a_{ik}'} \;\middle|\; a_{ik}' > 0 \right\} . \tag{1.5}$$

Na sistem jednačina (1.4) ćemo primeniti sledeće elementarne transformacije: i-toj jednačini daćemo r-tu jednačinu pomnoženu sa $-a_{ik}'/a_{rk}'$ za $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{r\}$; zatim ćemo r-tu jednačinu pomnožiti sa $1/a_{rk}'$. Dobija se ekvivalentan sistem oblika

$$\begin{aligned}
&x_i - \frac{a_{ik}'}{a_{rk}'} x_r + \sum_{j=m+1}^{n} \left(a_{ij}' - \frac{a_{ik}'}{a_{rk}'} a_{rj}'\right) x_j = b_i' - \frac{a_{ik}'}{a_{rk}'} b_r', \qquad i = 1, \dots, r-1.\\
&\frac{1}{a_{rk}'} x_r + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{a_{rj}'}{a_{rk}'} x_j = \frac{b_r'}{a_{rk}'}\\
&x_i - \frac{a_{ik}'}{a_{rk}'} x_r + \sum_{j=m+1}^{n} \left(a_{ij}' - \frac{a_{ik}'}{a_{rk}'} a_{rj}'\right) x_j = b_i' - \frac{a_{ik}'}{a_{rk}'} b_r', \qquad i = r+1, \dots, m.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Primetimo da su koeficijenti uz x_k u svim jednačinama osim r-te jednaki nuli; koeficijent uz x_k u r-toj jednačini jednak je jedan. Ako sistem u problemu (1.4) zamenimo ekvivalentnim sistemom (1.6) i iz funkcije cilja problema (1.4) eliminišemo promenljivu x_k pomoću r-te jednačine sistema (1.6) dobićemo problem

$$\begin{aligned}
&\min z = z_0'' + c_r'' x_r + \sum_{j=m+1}^{k-1} c_j'' x_j + \sum_{j=k+1}^{n} c_j'' x_j\\
&x_i + a_{ir}'' x_r + \sum_{j=m+1}^{k-1} a_{ij}'' x_j + 0 + \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}'' x_j = b_i'', \qquad i = 1, \dots, r-1\\
&a_{rr}'' x_r + \sum_{j=m+1}^{k-1} a_{rj}'' x_j + x_k + \sum_{j=k+1}^{n} a_{rj}'' x_j = b_r''\\
&x_i + a_{ir}'' x_r + \sum_{j=m+1}^{k-1} a_{ij}'' x_j + 0 + \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}'' x_j = b_i'', \qquad i = r+1, \dots, n\\
&x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n ,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

gde se a_{ij}'' i b_i'' mogu pročitati iz (1.6) a

$$z_0'' = z_0' + c_k' \frac{b_r'}{a_{rk}'} ,$$

$$c_j'' = c_j' - \frac{c_k'}{a_{rk}'} a_{rj}' , \qquad j = m+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n ,$$

$$c_r'' = - \frac{c_k'}{a_{rk}'} a_{rr}' .$$

S obzirom da su problemi (1.7) i (1.4) ekvivalentni, a problem (1.4) je ekvivalentan sa problemom (1.1) sledi da su problemi (1.7) i (1.1) ekvivalentni. Lako je videti da su kolone $1, \ldots, r-1, k, r+1, \ldots, m$ matrice koja odgovara problemu (1.7) linearno nezavisne, pa su i kolone $1, \ldots, r-1, k, r+1, \ldots, m$ matrice A linearno nezavisne. Neka je $\tilde{x}$ bazično rešenje koje odgovara ovim kolonama. Po definiciji bazičnog rešenja je $\tilde{x}_i = 0$, $i = m+1, \ldots, k-1, r, k+1, \ldots, n$ dok se ostale komponente jednoznačno dobijaju iz (1.7). Pokažimo da $\tilde{x}$ zadovoljava uslove teoreme. Zaista,

$$\tilde{x}_k = b_r'' = \frac{b_r'}{a_{rk}'} > 0$$

i za sve i za koje je $a_{ik}' \leqslant 0$ je

$$\tilde{x}_i = b_i'' = b_i' - \frac{a_{ik}'}{a_{rk}'} b_r' \geqslant 0 ,$$

jer su a_{rk}' i b_r' nenegativni. Za sve i za koje je $a_{rk}' > 0$ iz (1.5) sledi da je

$$\tilde{x}_i = b_i'' = b_i' - \frac{a_{ik}'}{a_{rk}'} b_r' \geqslant 0 .$$

Prema tome, $\tilde{x}$ je bazično dopustivo rešenje. Dalje, iz ekvivalentnosti problemâ (1.1), (1.4) i (1.7) i iz činjenice da je $\overline{x}_j = 0, j = m+1, \ldots, n, \tilde{x}_j = 0, j = m+1, \ldots, k-1, r, k+1, \ldots, n$ sledi

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \tilde{x}_j = z_0'' + c_r'' \tilde{x}_r + \sum_{j=m+1}^{k-1} c_j'' \tilde{x}_j + \sum_{j=k+1}^{n} c_j'' \tilde{x}_j =$$

$$= z_0'' = z_0' + c_k' \frac{b_r'}{a_{rk}'} < z_0' = z_0' + \sum_{j=m+1}^{n} c_j' \overline{x}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x}_j . \blacklozenge$$

N a p o m e n a: Ako se pretpostavka $b_i' > 0, i = 1, \ldots, m$ zameni sa $b_i' \geqslant 0, i = 1, \ldots, m$ onda se zaključak teoreme mora oslabiti na

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \tilde{x}_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x}_j .$$

Međutim, ukoliko se zadrži pretpostavka $b_r' > 0$, zaključak teoreme ostaje isti, kao što se vidi iz dokaza.

4.2. Simpleks metoda

Neka je dat problem linearnog programiranja

$$\min z = z_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

(2.1) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n.$$

Ovaj problem je pogodno zapisivati u obliku sledeće matrice

(2.2) $$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \\ \hline c_1 & c_2 & \ldots & c_n & -z_0 \end{array}$$

Ova matrica se dobija tako što se u prvih m vrsta i n kolona smešta matrica $A = [a_{ij}]$, u poslednju vrstu se upisuju koeficijenti iz funkcije cilja a u poslednju kolonu slobodni članovi iz jednačina. Prvih m vrsta zvaćemo osnovnim vrstama a prvih n kolona osnovnim kolonama. Na taj način svakoj od osnovnih vrsta odgovara jedna jednačina dok poslednjoj vrsti odgovara funkcija cilja. Mesto u donjem desnom uglu matrice je rezervisano za slobodni član u funkciji cilja ali sa promenjenim znakom.

Jasno je da se iz svake matrice oblika (2.2) može ponovo napisati problem linearnog programiranja kome ona odgovara. Prema tome, matrični zapis (2.2) problema (2.1) se može shvatiti i kao njegov sažetiji zapis. U daljem ćemo, ako se drukčije ne naglasi, smatrati da matrica problema linearnog programiranja ima m+1 vrstu i n+1 kolonu i zvaćemo je kratko LP-tablica, a njene elemente ćemo označavati kao u (2.2).

DEFINICIJA 4.2.1. Osnovnu kolonu LP-tablice nazivamo bazičnom ako i samo ako ona sadrži m nula i jednu jedinicu, pri čemu ta jedinica nije u poslednjoj vrsti.

DEFINICIJA 4.2.2. LP-tablicu nazivamo simpleks tablicom ako i samo ako ona sadrži m različitih bazičnih kolona i važi $b_1 \geqslant 0, \ldots, b_m \geqslant 0$. Za problem kome odgovara simpleks tablica kažemo da je u kanonskom obliku.

Napomenimo da se iz simpleks tablice (odnosno iz problema u kanonskom obliku) lako može odrediti jedno bazično dopustivo rešenje; dovoljno je promenljivim koje odgovaraju nebazičnim kolonama dati vrednost nula i zatim „pročitati“ vrednost preostalih

– baznih promenljivih. Za to bazično dopustivo rešenje reći ćemo da odgovara datoj simpleks tablici. Vrednost funkcije cilja u tom rešenju jednaka je z_0, što je lako videti.

U daljem ćemo pretpostaviti da je problem koji posmatramo u kanonskom obliku. Ova pretpostavka ne umanjuje opštost, jer ćemo kasnije dokazati da se svaki problem linearnog programiranja kod koga je skup dopustivih tačaka neprazan može svesti na problem u kanonskom obliku.

TEOREMA 4.2.1. Neka je data simpleks tablica u kojoj su $c_1 \geqslant 0, \ldots, c_n \geqslant 0$. Tada je bazično dopustivo rešenje koje odgovara toj tablici optimalno.

DOKAZ: Ova teorema je samo preformulisana teorema 4.1.2 koju smo dokazali u prethodnom odeljku. ♦

TEOREMA 4.2.2. Neka je data simpleks tablica u kojoj postoji bar jedna osnovna kolona takva da je poslednji ((m+1)–vi) element te kolone negativan a svi ostali elementi te kolone nepozitivni. Tada je funkcija cilja odgovarajućeg problema linearnog programiranja neograničena odozdo.

DOKAZ: Ova teorema je samo preformulisana teorema 4.1.3 koju smo dokazali u prethodnom odeljku. ♦

Za izlaganje simpleks metode potrebno je uvesti pojam elementarnih transformacija LP-tablice, što se čini sledećom definicijom.

DEFINICIJA 4.2.3. Pod elementarnim transformacijama LP-tablice podrazumevamo
a) množenje ma koje osnovne vrste brojem različitim od nule;
b) dodavanje i-toj vrsti $(i < m+1)$ j-te vrste $(j < m+1)$ pomnožene nekim brojem, pri čemu je $i \neq j$;
c) dodavanje poslednjoj ((m+1)-voj) vrsti ma koje osnovne vrste pomnožene nekim brojem.

Kao što se vidi, pojam elementarne transformacije LP-tablice je potpuno analogan pojmu elementarne transformacije poznatom iz matrične algebre i teorije sistema linearnih algebarskih jednačina. Jedina ograničenja su što se ovde ne dozvoljava da se poslednja vrsta (koja odgovara funkciji cilja) množi brojem ili dodaje nekoj osnovnoj vrsti, ni da se vrste permutuju.

TEOREMA 4.2.3. Neka je od LP-tablice elementarnim transformacijama dobijena neka druga LP-tablica. Tada su problemi linearnog programiranja kojima te tablice odgovaraju ekvivalentni.

DOKAZ: Ovo je očigledno za transformacije tipa a) ili b) jer se pritom funkcija cilja ne menja, a sistemi jednačina su ekvivalentni, kao što je poznato iz linearne algebre. (Razume se, uslovi nenegativnosti su u oba slučaja nametnuti na sve promenljive). Neka je u tablici izvršena transformacija tipa c), tj. neka je npr. poslednjoj vrsti dodata i-ta vrsta pomnožena sa λ. Vidi se odmah da je sistem jednačina ostao nepromenjen – promenila se jedino funkcija cilja. Ako je pre transformacije poslednja vrsta bila

$$c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n \quad -z_0$$

to znači da je funkcija cilja bila

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + z_0,$$

jer se slobodni član u funkciji cilja u tablicu upisuje sa promenjenim znakom. Funkcija cilja posle transformacije je

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j + \lambda a_{ij}) x_j + (z_0 - \lambda b_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + z_0 + \lambda \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \Big).$$

Kako je u svakoj tački skupa dopustivih tačaka ispunjeno

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

to se vidi da se funkcije cilja u oba problema poklapaju na skupu dopustivih tačaka, pa su problemi ekvivalentni.

Elementarne transformacije nam omogućuju da polazeći od date simpleks tablice konstruišemo konačan niz simpleks tablica, tako da bazično dopustivo rešenje koje odgovara poslednjoj tablici bude optimalno rešenje posmatranog problema. Detalji postupka se sadrže u sledećem algoritmu.

Neka je dat problem linearnog programiranja u kanonskom obliku i neka je simpleks tablica koja mu odgovara

$$\begin{array}{ccc|c}
a_{11}^0 & \dots & a_{1n}^0 & b_1^0 \\
\cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot \\
a_{m1}^0 & \dots & a_{mn}^0 & b_m^0 \\
\hline
c_1^0 & \dots & c_n^0 & -z_0^0
\end{array}$$

ALGORITAM 4.2.1. Stavimo $k = 0$; k-ti ciklus simpleks metode se sastoji od koraka:
Korak 1: Ispitati da li je $c_j^k \geqslant 0$ za sve $j = 1, \dots, n$. Ako jeste preći na korak 6.
Korak 2: Za svako j za koje je $c_j^k < 0$ ispitati da li je $a_{ij}^k \leqslant 0$ za sve $i = 1, \dots, m$. Ako takvo c_j^k postoji preći na korak 7.
Korak 3: Naći $r \in \{1, \dots, n\}$ za koje je $c_r^k < 0$. Naći $s \in \{1, \dots, m\}$ takvo da je

$$\frac{b_s^k}{a_{sr}^k} = \min \left\{ \frac{b_i^k}{a_{ir}^k} \;\middle|\; a_{ir}^k \geq 0 \right\}.$$

Korak 4: Dobiti (k+1)-vu simpleks tablicu sledećim elementarnim transformacijama k-te simpleks tablice:

podeliti s-tu vrstu sa a_{sr}^k (time dobijamo $a_{sr}^{k+1} = 1$);

ostalim vrstama, uključujući i poslednju, dodati s-tu vrstu pomnoženu odgovarajućim koeficijentima tako da se dobije

$$a_{ir}^{k+1} = 0 \text{ za } i \neq s \text{ i } c_r^{k+1} = 0.$$

Korak 5: Zameniti k sa k+1 i preći na korak 1.

Korak 6: Bazično rešenje koje odgovara k-toj tablici je optimalno; vrednost funkcije cilja je z_0^k. STOP.

Korak 7: Funkcija cilja je neograničena odozdo na skupu dopustivih tačaka. STOP.

N a p o m e n a: U literaturi se često sugeriše da se r u koraku 3 bira tako da važi

$$c_r^k = \min \{ c_1^k, \ldots, c_n^k \}.$$

Međutim, ovakav izbor ne mora uvek da ubrza dobijanje optimalnog rešenja.

Kao što vidimo, korak 1 algoritma ispituje optimalnost bazičnog rešenja koje odgovara k-toj tablici. Koristeći teoremu 4.2.2 korak 2 ispituje da li se na osnovu k-te simpleks tablice može zaključiti da je funkcija cilja neograničena odozdo. Koraci 3 i 4 omogućuju da se od jedne simpleks tablice dobije druga, kao što pokazuje sledeća

TEOREMA 4.2.4. Primenom elementarnih transformacija opisanih u koracima 3 i 4 se od simpleks tablice opet dobija simpleks tablica; pritom je $z_0^{k+1} \leq z_0^k$.

DOKAZ: Primenom ovih transformacija sve bazične kolone k-te tablice koje su u s-toj vrsti imale nulu ostaju nepromenjene, dakle bazične, i u (k+1)-voj tablici; r-ta kolona postaje bazična u novoj tablici umesto one bazične kolone stare tablice koja je sadržala jedinicu u r-toj vrsti. Znači da nova tablica ima m različitih bazičnih kolona. Nenegativnost brojeva b_i^{k+1}, $i = 1, \ldots, m$ i nejednakost $z_0^{k+1} \leq z_0^k$ pokazuju se kao u teoremi 4.1.4.♦

Primenu algoritma 4.2.1. ilustrovaćemo na sledećem primeru:

PRIMER 4.2.1. Naći $\max z = x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7$

pri ograničenjima

$$\begin{aligned}
3x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 \quad &= 6\\
x_2 + 2x_3 - x_4 \quad &= 10\\
x_1 \qquad - x_6 \quad &= 0\\
x_3 \qquad + x_6 + x_7 &= 6
\end{aligned}$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, 7$$

Tražimo minimum funkcije $w = -z = -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + x_6 + 3x_7$ pri datim ograničenjima. Problemu odgovara sledeća LP – tablica

$$\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\
0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 3 & -1 & 1 & 3 & 0
\end{array}$$

Iz ove LP-tablice transformacijama tipa c) (definicija 4.2.3) dobijamo prvu simpleks tablicu:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\
0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\
\hline
0 & 0 & -3 & 6 & 0 & -2 & 0 & -22
\end{array}$$

Bazično rešenje koje odgovara ovoj tablici je (0,10,0,0,6,0,6). Ovo rešenje nije optimalno; primenom koraka 4 algoritma 4.2.1 za $s = 1$, $r = 3$ dobijamo drugu simpleks tablicu:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 & \frac{-7}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & 0 & 6 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 8 & 1 & -1 & 0 & -16
\end{array}$$

Bazično rešenje koje odgovara ovoj tablici je (0,6,2,0,0,0,4). Rešenje nije optimalno; primenom koraka 4 za $s = 4$, $r = 6$ dobijamo treću simpleks tablicu:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\
0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 10 \\
1 & 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 6 \\
0 & 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 6 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 7 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -10
\end{array}$$

Bazično rešenje koje odgovara ovoj tablici je (6,10,0,0,0,6,0). Ovo rešenje je optimalno; optimalna vrednost funkcije w je 10. Prema tome, maksimalna vrednost funkcije z je −10. Primetimo da problem u ovom primeru nije bio u kanonskom obliku, ali se do tog oblika lako došlo jer je matrica problema sadržala 4 različite jedinične kolone. Ova primedba važi, razume se, i u opštem slučaju.

TEOREMA 4.2.5. (teorema o konačnosti simpleks metode). Neka je dat problem linearnog programiranja u kanonskom obliku. Pretpostavljajući da nijedno bazično dopustivo rešenje tog problema nije degenerisano, simpleks metodom se u konačnom broju ciklusa dolazi do optimalnog rešenja ili se zaključuje da je funkcija cilja neograničena odozdo.

DOKAZ: Simpleks metodom se dobija niz (x^k) bazičnih dopustivih rešenja kome odgovara niz vrednosti funkcije cilja (z_0^k). S obzirom na pretpostavku o nedegenerisanosti, iz teoreme 4.1.4 sledi da je

$$z_0^{k+1} < z_0^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Prema troremi 4.1.1 svako bazično dopustivo rešenje x^k je ekstremna tačka skupa X dopustivih tačaka. Kako skup X ima konačno mnogo ekstremnih tačaka, a nijedna se u nizu (x^k) ne može pojaviti dva ili više puta (zbog stroge monotonosti niza (z_0^k)) to se simpleks postupak mora završiti u konačnom broju koraka. ♦

Ako se odbaci pretpostavka o nedegenerisanosti nije moguće dokazati konačnost simpleks postupka. Odgovarajući kontraprimeri se lako mogu konstruisati (videti npr. Dantzig [D.3]). Simpleks postupak se može modifikovati tako da se završava u konačnom broju koraka bez obzira na pretpostavku o nedegenerisanosti. Suština jedne od takvih modifikacija sastoji se u sledećem: u (n+1)-dimenzioni prostor se uvodi relacija totalnog poretka (takozvani leksikografski poredak) i izbor r i s se vrši tako da se prilikom transformacija opisanih u koraku 4 algoritma 4.2.1 poslednja vrsta simpleks tablice strogo smanji (u smislu leksikografskog poretka – dokazuje se da je to uvek mogućno). Stoga se nijedna simpleks tablica ne može ponovo pojaviti i simpleks metoda završava rad u konačnom broju koraka. Podroban opis ove i nekih drugih modifikacija može se naći npr. u Dantzig [D.3] i Gass [G.1]. Međutim, praktična vrednost ovakvih modifikacija je mala jer se može pokazati, bez obzira na pretpostavku o nedegenerisanosti, da je verovatnoća beskonačnog kruženja simpleks metode jednaka nuli (razume se, uz pretpostavku da se r u koraku 3 bira na slučajan način).

4.3. Dvofazna modifikacija simpleks metode

Neka je dat problem nelinearnog programiranja

$$\min z = z_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$(3.1) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, \dots, n$$

Bez umanjenja opštosti možemo smatrati da je $b_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, m$ (u protivnom je dovoljno odgovarajuće jednačine pomnožiti sa -1). Ukoliko je problem (3.1) već u kanonskom obliku ili se na njega može lako svesti, mogućno je primeniti simpleks metodu opisanu u prethodnom odeljku i tako dobiti optimalno rešenje. Cilj ovog odeljka je da dâ opis postupka kojim se može rešiti i problem koji nije u kanonskom obliku.

Posmatrajmo pomoćni problem linearnog programiranja

$$\min w = \sum_{j=1}^{m} x_{n+j}$$

$$(3.2) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geqslant 0, \; j = 1, \dots, n+m.$$

Promenljive $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ zovemo veštačkim promenljivim. Problemu (3.2) odgovara sledeća LP-tablica

$$\begin{array}{cccccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 & b_m \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0
\end{array}$$

Ova LP-tablica nije simpleks tablica, ali se sledećim elementarnim transformacijama iz nje može dobiti simpleks tablica: poslednjoj vrsti dodajemo redom sve osnovne vrste pomnožene sa -1. Poslednjih m osnovnih kolona će sada biti bazične.

TEOREMA 4.3.1. Skup dopustivih tačaka X problema (3.1) je neprazan ako i samo ako je optimalna vrednost funkcije cilja problema (3.2) jednaka nuli.

DOKAZ: Pretpostavimo da je $X \neq \emptyset$ i neka je $x = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) \in X$. Tada je $\overline{y} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n, 0, \dots, 0)$ dopustiva tačka za problem (3.2), pri čemu je vrednost funkcije w jednaka nuli. Kako je, s obzirom na nenegativnost promenljivih $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$, $w \geqslant 0$ sledi da je $\overline{y}$ optimalno rešenje problema (3.2).

Neka je sada $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, \tilde{y}_{n+1}, ..., \tilde{y}_{n+m})$ optimalno rešenje problema (3.2) i neka je odgovarajuća vrednost funkcije $\tilde{w} = \tilde{y}_{n+1} + ... + \tilde{y}_{n+m} = 0$. No tada je $\tilde{x} = (\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n)$ dopustivo rešenje problema (3.1), pa je $X \neq \emptyset$. ♦

Gornja teorema je od osnovnog značaja za takozvanu dvofaznu modifikaciju simpleks metode:

I faza: Za problem (3.1) se obrazuje pomoćni problem oblika (3.2) koji se zatim na opisani način dovodi na kanonski oblik. Potom se primenjuje simpleks metoda opisana u prethodnom odeljku. Razlikovaćemo dva slučaja:

1^o Optimalna vrednost $w \neq 0$. Na osnovu teoreme 4.3.1 problem (3.1) nema dopustivih rešenja ($X = \emptyset$).

2^o Optimalna vrednost $w = 0$. Prelazimo na drugu fazu.

II faza:

Korak 1. Iz poslednje simpleks tablice dobijene u I fazi uklanjaju se sve nebazične kolone koje odgovaraju veštačkim promenljivim, a poslednja vrsta se zamenjuje vrstom

$$c_1 \ldots c_n \; 0 \ldots 0 \; -z_0$$

Ova vrsta ima $n+k+1$ element, pri čemu je k broj preostalih veštačkih promenljivih.

Korak 2. Sve elemente u poslednjoj vrsti koji odgovaraju baznim promenljivim treba učiniti jednakim nuli (korišćenjem elementarnih transformacija). Na taj način se ponovo dobija simpleks tablica. Na osnovu teoreme 4.3.1 sve komponente baznog dopustivog rešenja koje odgovaraju veštačkim promenljivim jednake su nuli.

Korak 3. Cilj ovog koraka je da se iz simpleks tablice eliminišu sve kolone koje odgovaraju preostalim veštačkim promenljivim. Ukoliko takvih kolona nema prelazi se na korak 4. Ukoliko ih ima, uočimo jednu od njih, koja odgovara npr. veštačkoj promenljivoj x_s. Radi jednostavnosti pisanja uzećemo da ta kolona ima jedinicu u prvoj vrsti (ostali elementi su nule). Kako je x_s veštačka promenljiva prvi element poslednje kolone jednak je nuli. Razlikovaćemo dva slučaja:

1^o Svi preostali elementi prve vrste jednaki su nuli. Tada se prva vrsta i s-ta kolona izostavljaju iz simpleks tablice; time se dobija nova „sažeta" simpleks tablica, a problem linearnog programiranja koji joj odgovara ne sadrži veštačku promenljivu x_s.

2^o Među preostalim elementima prve vrste ima različitih od nule; neka je npr. takav element u r-toj koloni. Jasno je da r-ta kolona ne može odgovarati veštačkoj baznoj promenljivoj. Učinimo sada r-tu kolonu baznom tako da jedinica bude u prvoj vrsti. Ovom transformacijom se ne menja ni jedan element poslednje kolone, a time ni vrednost funkcije cilja. Dobijena tablica je opet simpleks tablica u kojoj je s-ta kolona nebazna pa se može izostaviti jer odgovara veštačkoj promenljivoj.

Korak 3 se ponavlja sve dok se ne eliminišu sve kolone koje odgovaraju veštačkim promenljivim.

Korak 4. Dobijena simpleks tablica sadrži samo kolone koje odgovaraju promenljivim iz problema (3.1) pa na nju treba primeniti simpleks metodu opisanu u prethodnom odeljku.

Primenu dvofazne modifikacije simpleks metode ilustrovaćemo sledećim primerom:

PRIMER 4.3.1. Naći $\min z = 2x_1 + 3x_3 + x_4$

pri ograničenjima

$$\begin{aligned} -x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_3 + 4x_4 &= 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3, 4. & \end{aligned}$$

Kako problem nije u kanonskom obliku primenjujemo I fazu, tj. rešavamo problem

$$\begin{aligned} \min w = \quad & x_5 + x_6 + x_7 \\ -x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \quad &= 3 \\ 2x_1 + 2x_3 + 4x_4 + x_6 \quad &= 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_7 &= 3 \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, \dots, 7 & \end{aligned}$$

Problemu odgovara sledeća LP-tablica:

0	−1	−1	1	1	0	0	3
2	0	2	4	0	1	0	12
1	1	2	1	0	0	1	3
0	0	0	0	1	1	1	0

Iz ove tablice se odmah dobija simpleks tablica:

0	−1	−1	1	1	0	0	3
2	0	2	4	0	1	0	12
1	1	2	1	0	0	1	3
−3	0	−3	−6	0	0	0	−18

Primenom algoritma 4.2.1 dobijamo novu simpleks tablicu:

−1	−2	−3	0	1	0	−1	0
−2	−4	−6	0	0	1	−4	0
1	1	2	1	0	0	1	3
3	6	9	0	0	0	6	0

Iz tablice se vidi da je dobijeno rešenje (0,0,0,3,0,0,0) optimalno; optimalna vrednost funkcije w je nula, pa prelazimo na drugu fazu. S obzirom da je poslednja kolona prethodne tablice nebazična a odgovara veštačkoj promenljivoj uklanjamo je (videti korak 1). Dobija se tablica

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
-1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & -4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Primetimo da je poslednja vrsta izmenjena tako da odgovara funkciji cilja polaznog problema. Iz ove LP-tablice dobijamo simpleks tablicu:

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
-1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & -4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3
\end{array}
$$

S obzirom da je promenljiva x_5 veštačka i da u prvoj vrsti ima elemenata različitih od nule možemo npr. prvu kolonu učiniti bazičnom umesto pete (videti korak 3, slučaj 2^o). Dobija se simpleks tablica

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
\hline
0 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & -3
\end{array}
$$

Sada je promenljiva x_5 nebazična veštačka promenljiva, pa kolonu koja joj odgovara uklanjamo. Nova simpleks tablica je:

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\
\hline
0 & -3 & -2 & 0 & 0 & -3
\end{array}
$$

S obzirom da je promenljiva x_6 veštačka bazična promenljiva i da su svi preostali elementi druge vrste jednaki nuli izostavljamo drugu vrstu i kolonu koja odgovara promenljivoj x_6, u ovom slučaju petu kolonu (videti korak 3, slučaj 1^o). Dobijena simpleks tablica je:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & -3 & -2 & 0 & -3 \end{array}$$

S obzirom da su sada eliminisane sve veštačke promenljive možemo preći na korak 4, tj. na primenu algoritma 4.2.1. Dobija se sledeća simpleks tablica

$$\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \hline \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -3 \end{array}$$

Bazično rešenje koje odgovara ovoj tablici je (0,0,0,3) i ono je optimalno. Optimalna vrednost funkcije z je 3. Primetimo da pretposlednjoj i poslednjoj simpleks tablici odgovara isto bazično rešenje i samim tim ista vrednost funkcije cilja. Razlog ovome je degenerisanost, tj. prisustvo nula u poslednjoj koloni.

4.4. Dualna simpleks metoda

Neka je dat problem linearnog programiranja kome odgovara LP-tablica

$$(4.1) \qquad \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ \hline c_1 & c_2 & \cdots & c_n & -z_o \end{array}$$

DEFINICIJA 4.4.1. LP-tablicu (4.1) nazivamo dualnom simpleks tablicom ako i samo ako ona sadrži m različitih bazičnih kolona i važi $c_1 \geqslant 0, \ldots, c_n \geqslant 0$.

Ukoliko su i $b_1 \geqslant 0, \ldots, b_m \geqslant 0$ onda je dualna simpleks tablica i simpleks tablica, te na osnovu teoreme 4.1.2 sledi da je bazično dopustivo rešenje koje joj odgovara optimalno.

TEOREMA 4.4.1. Neka je u dualnoj simpleks tablici (4.1) za bar jedno $k \in \{1, ..., m\}$ $b_k < 0$ i $a_{k1} \geqslant 0, ..., a_{kn} \geqslant 0$. Tada je skup dopustivih rešenja odgovarajućeg problema linearnog programiranja prazan.

DOKAZ: U tablici (4.1) k-ta vrsta odgovara jednačini

$$a_{k1}x_1 + ... + a_{kn}x_n = b_k$$

koja,s obzirom na uslove teoreme,ne može imati nenegativnih rešenja. ♦

Detalji dualne simpleks metode sadrže se u sledećem algoritmu:

Neka datom problemu odgovara sledeća dualna simpleks tablica

$$\begin{array}{ccc|c} a^o_{11} & \cdots & a^o_{1n} & b^o_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a^o_{m1} & \cdots & a^o_{mn} & b^o_m \\ \hline c^o_1 & \cdots & c^o_n & -z^o_o \end{array}$$

ALGORITAM 4.4.1. Stavimo $k = 0$; k-ti ciklus dualne simpleks metode se sastoji od koraka:

Korak 1. Ispitati da li je $b^k_i \geqslant 0, i = 1, ..., m$. Ako jeste preći na korak 6.

Korak 2. Za svako i za koje je $b^k_i < 0$ ispitati da li je $a^k_{ij} \geqslant 0$ za sve $j = 1, ..., n$. Ako takvo b^k_i postoji preći na korak 7.

Korak 3. Odrediti $s \in \{1, ..., m\}$ za koje je $b^k_s < 0$. Naći $r \in \{1, ..., n\}$ takvo da je

$$\frac{c^k_r}{a^k_{sr}} = \max \left\{ \frac{c^k_j}{a^k_{sj}} \;\middle|\; a^k_{sj} < 0 \right\}.$$

Korak 4. Dobiti (k+1)-vu dualnu simpleks tablicu sledećim elementarnim transformacijama k-te dualne simpleks tablice:

podeliti s-tu vrstu sa a^k_{sr};

ostalim vrstama, uključujući i poslednju, dodati s-tu pomnoženu odgovarajućim koeficijentima tako da se dobije $a^{k+1}_{ir} = 0$ za $i \neq s$ i $c^{k+1}_r = 0$.

Korak 5. Zameniti k sa k+1 i preći na korak 1.

Korak 6. Dobijena dualna simpleks tablica je i simpleks tablica; bazično rešenje koje joj odgovara je optimalno, vrednost funkcije cilja je z^k_o. STOP.

Korak 7. Skup dopustivih rešenja posmatranog problema je prazan. STOP.

TEOREMA 4.4.2. Primenom elementarnih transformacija opisanih u koracima 3 i 4 se od dualne simpleks tablice opet dobija dualna simpleks tablica; pritom je $z^{k+1}_o \geqslant z^k_o$.

DOKAZ: Kao u teoremi 4.2.4 dokazuje se da nova tablica ima m različitih kolona. Dalje imamo

$$c_j^{k+1} = c_j^k - a_{sj}^k \frac{c_r^k}{a_{sr}^k} = a_{sj}^k \left(\frac{c_j^k}{a_{sj}^k} - \frac{c_r^k}{a_{sr}^k} \right) \geqslant 0 ,$$

ukoliko je $a_{sj}^k < 0$;

$$c_j^{k+1} = c_j^k - a_{sj}^k \frac{c_r^k}{a_{sr}^k} \geqslant c_j^k \geqslant 0 ,$$

ukoliko je $a_{sj}^k \geqslant 0$.

Prema tome, nova tablica je dualna simpleks tablica. S obzirom da je

$$b_s^k \frac{c_r^k}{a_{sr}^k} \geqslant 0$$

sledi da je

$$-z_o^{k+1} = -z_o^k - b_s^k \frac{c_r^k}{a_{sr}^k} \leqslant -z_o^k, \quad \text{tj.} \quad z_o^{k+1} \geqslant z_o^k. \ \blacklozenge$$

Dualnu simpleks metodu ilustrujemo sledećim primerom:

PRIMER 4.4.1. Naći min $9x_1 + x_2 + x_3$

uz uslove

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &\geqslant -1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &\geqslant 5 \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3 . \end{aligned}$$

Uvođenjem izravnavajućih promenljivih i dovođenjem na kanonski oblik dobijamo problem:

$$\begin{aligned} \min z &= 9x_1 + x_2 + x_3 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ -4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 &= -5 \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

Problemu odgovara sledeća dualna simpleks tablica:

−3	1	−2	1	0	1
−4	−2	1	0	1	−5
9	1	1	0	0	0

Primenom algoritma 4.4.1 dobijamo novu dualnu simpleks tablicu:

$$\begin{array}{ccccc|c}
-5 & 0 & \frac{-3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\
2 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{5}{2} \\
\hline
7 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2}
\end{array}$$

Ova dualna simpleks tablica nije simpleks tablica; dalja primena algoritma daje:

$$\begin{array}{ccccc|c}
\frac{10}{3} & 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & 1 \\
\frac{11}{3} & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & 3 \\
\hline
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4
\end{array}$$

Ova dualna tablica je i simpleks tablica; bazično dopustivo rešenje koje joj odgovara je (0,3,1,0,0); optimalna vrednost funkcije z je 4.

Iz izloženog se uočava velika sličnost simpleks i dualne simpleks metode. Osnovna razlika je u tome što svakoj simpleks tablici odgovara bazično dopustivo rešenje, dok ni jednoj dualnoj simpleks tablici (osim poslednje, koja je ujedno i simpleks tablica) ne odgovara bazično dopustivo rešenje. Zanimljivo je napomenuti da je rad dualne simpleks metode na polaznom problemu usko vezan sa radom simpleks metode na dualnom problemu.

Za ovako formulisanu dualnu simpleks metodu se konačnost ne može dokazati (odgovarajući kontraprimer se može naći u Beale [B.3]). No, kao i u slučaju simpleks metode mogućno je tako modifikovati dualnu simpleks metodu da ona uvek daje rešenje u konačnom broju koraka. Ovakve modifikacije dualne simpleks metode su od malog praktičnog značaja, jer se može dokazati tvrđenje analogno tvrđenju o verovatnoći beskonačnog „kruženja" simpleks metode.

Izložena dualna simpleks metoda pretpostavlja da je poznata neka dualna simpleks tablica (kao npr. u gornjem primeru). Ukoliko to nije slučaj može se primeniti jedna od metoda opisanih u Simonnard [S.1] za dobijanje početne dualne simpleks tablice.

Na kraju spomenimo da postoje i kombinovane „primalno-dualne" metode za rešavanje problema linearnog programiranja. Čitalac ih može naći npr. u Simonnard [S.1], Dantzig [D.3].

ZADACI:

1. Naći sva bazična dopustiva rešenja sistemâ:

a)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &= 5\\ x_1-x_2+x_3-x_4+x_5 &= 1\\ x_i\geqslant 0,\ i=1,\dots,5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+x_n &= n\\ x_2+\dots+x_{n-1}+x_n &= n-1\\ &\ \vdots\\ x_{n-1}+x_n &= 2\\ x_i\geqslant 0,\ i=1,\dots,n \end{aligned}$$

2. Rešiti simpleks metodom sledeće probleme linearnog programiranja

a)
$$\begin{aligned} \max\ & x_1-2x_2+x_3\\ & x_1+4x_2+x_3=5\\ & x_1-2x_2-x_3=-1\\ & x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \min\ & -x_1+3x_2+5x_3+x_4\\ & x_1+4x_2+4x_3+x_4=5\\ & x_1+7x_2+8x_3+2x_4=9\\ & x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4 \end{aligned}$$

znajući da su (1,1,0) i (1,0,1,0) bazična dopustiva rešenja tih problemâ.

3. Rešiti dvofaznom modifikacijom simpleks metode sledeće probleme linearnog programiranja

a)
$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1-3x_2\\ & 2x_1-x_2-x_3\geqslant 3\\ & x_1-x_2+x_3\geqslant 2\\ & x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \min\ & -x_1+2x_2\\ & 5x_1-2x_2\leqslant 3\\ & x_1+x_2\geqslant 1\\ & -3x_1+x_2\leqslant 3\\ & -3x_1-3x_2\leqslant 2\\ & x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \max\ & 5x_1-x_2+x_3-10x_4+7x_5\\ & 3x_1-x_2-x_3=4\\ & x_1-x_2+x_3+x_4=1\\ & 2x_1+x_2+2x_3+x_5=7\\ & x_i\geqslant 0,\ i=1,\dots,5 \end{aligned}$$

4. Formulisati dualne probleme problemâ iz prethodnog zadatka i rešiti ih simpleks metodom.

5. Rešiti dualnom simpleks metodom sledeće probleme linearnog programiranja:

a) $\min \; x_3$

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{5}{3}x_3 &= 1 \\ x_2 - \tfrac{4}{3}x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3$

b) $\min \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8$

$$\begin{aligned} x_1 - x_5 &= 1 \\ x_2 - x_6 &= -1 \\ x_3 - x_7 &= -1 \\ x_4 - x_8 &= -1 \end{aligned}$$

$x_i \geqslant 0,\ i = 1, \dots, 8$

c) $\min \; x_1 + x_2 + x_3$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 4x_3 &\leqslant -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &\leqslant 3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

$x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3$

GLAVA V

METODE BEZUSLOVNE OPTIMIZACIJE

5.1. Uvod

U ovom poglavlju razmatraćemo problem bezuslovne minimizacije neprekidno diferencijabilne funkcije φ: $R^n \to R$, odnosno, kratko zapisano

$$\min \{\varphi(x) \mid x \in R^n\}.$$

Algoritmi koje ćemo izlagati su iterativnog tipa. Pomoću njih se konstruiše niz tačaka (x_k) korišćenjem sledeće relacije:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.1}$$

gde je $s_k \in R^n$ vektor koji određuje pravac „kretanja" iz tačke x_k a $\alpha_k > 0$ broj koji određuje dužinu „koraka" u pravcu s_k.

Iteracioni proces (1.1) je definisan ako je definisan način konstruisanja vektora s_k i način izračunavanja veličine α_k u svakoj iteraciji. S obzirom da se radi o problemu minimizacije, prirodno je da se iz tačke x_k krene u pravcu opadanja funkcije, tj. da se s_k bira tako da važi

$$\langle \nabla\varphi(x_k), s_k \rangle < 0$$

Kada je određen pravac kretanja s_k ostaje da se odredi dužina kretanja u tom pravcu, odnosno, broj α_k. Mi ćemo se ograničiti na slučaj kada se α_k određuje rešavanjem problema

$$\min \{\varphi(x_k + \alpha s_k) \mid \alpha \geq 0\}, \tag{1.2}$$

što predstavlja problem minimizacije u R^1. O načinima rešavanja problema (1.2) biće posebno reči u odeljku 5.8. Drugi načini izbora α_k opisani su npr. kod Polak [P.4], Pšeničnij [P.12].

Jasno je da konvergencija (x_k) ka rešenju, brzina konvergencije i druge osobine zavise od izbora vektora s_k i broja α_k.

Brzina konvergencije, koju ćemo sada definisati, predstavlja jednu od najvažnijih karakteristika metoda bezuslovne optimizacije.

DEFINICIJA 5.1.1. Neka je $p \in N$ i neka niz (x_k) konvergira ka x^* kad $k \to \infty$.

(1) Ukoliko za dovoljno veliko k važi

$$\|x_{k+p}-x^*\| \leqslant q\|x_k-x^*\|, \quad 0 \leqslant q < 1,$$

konvergencija se naziva p-linearnom. Za p = 1 konvergencija se naziva linearnom.

(2) Ukoliko važi

$$\|x_{k+p}-x^*\| \leqslant q_k\|x_k-x^*\|, \quad \text{gde } q_k \to 0 \text{ pri } k \to \infty,$$

konvergencija se naziva p-superlinearnom. Za p=1 konvergencija se naziva superlinearnom.

(3) Ukoliko važi

$$\|x_{k+1}-x^*\| \leqslant C\|x_k-x^*\|^2,$$

konvergencija se naziva kvadratnom.

N a p o m e n a: Pojam kvadratne konvergencije se takođe može uopštiti, ali je za dalje izlaganje dovoljna gornja definicija.

Napomenimo da je superlinearna konvergencija specijalan slučaj linearne, a kvadratna specijalan slučaj superlinearne.

Eksperimentalna provera je još jedan važan kriterijum za ocenjivanje kvaliteta metodâ. Naime, postoje metode koje se u primeni sasvim dobro ponašaju (brzo konvergiraju, numerički su stabilne) a da njihova konvergencija uopšte nije dokazana.

Najpoznatije metode tipa (1.1) su sledeće (navedenim redom ćemo ih i izlagati):

– Cauchy-eva metoda ili metoda najbržeg spuštanja, koja je zasnovana na linearnoj aproksimaciji funkcije φ (Cauchy [C.3], Curry [C.7], Goldstein [G.4]). Iz ove metode je ponikla čitava klasa gradijentnih metoda (Poljak[P.6], Kantorovič i Akilov [K.1]).

– Newton-ova i modifikovana Newton-ova metoda, koje su zasnovane na kvadratnoj aproksimaciji funkcije φ (Poljak [P.4], Goldstein, [G.5], Ritter [R.1], Ritter i McCormick [R.2]).

– Metode konjugovanih gradijenata (Hestenes i Stiefel [H.5], Fletcher i Reeves [F.9], Polak i Ribière [P.5], Poljak [P.7], Wolfe [W.2]);

– Metode promenljive metrike (Davidon [D.4], Fletcher i Powell [F.8], Murtagh i Sargent [M.4], Barnes [B.2]).

Sve navedene metode traže izračunavanje izvoda, što u praksi može biti teško izvodljivo. Zbog toga je korisno znati i metode koje ne zahtevaju izvode. Takve metode su naprimer:

– Metoda lokalnih varijacija (Baničuk, Petrov i Černousko [B.1]);

– Powell-Zangwill-ova metoda (Powell [P.9], Zangwill [Z.2]).

5.2. Zajedničke osobine metoda

Razmatramo problem

(2.1) $$\min \{\varphi(x) \mid x \in R^n\},$$

gde je φ: $R^n \to R$ neprekidno diferencijabilna funkcija.

Pretpostavićemo da postoji takva tačka $x_o \in R^n$ da je skup

$$X(x_o) = \{x \in R^n \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_o)\}$$

ograničen. (Kako neprekidnost funkcije $\varphi(x)$ povlači zatvorenost skupa $X(x_o)$, odatle sledi kompaktnost skupa $X(x_o)$.)

Gotovo sve metode koje smo pomenuli u 5.1 konstruišu niz tačaka (x_k) sa sledećim osobinama:

(2.2) $$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

gde je s_k – vektor pravca koji zadovoljava uslov

(2.3) $$\langle \nabla\varphi(x_k), s_k \rangle \leq -\rho \|\nabla\varphi(x_k)\| \, \|s_k\|, \quad \rho > 0,$$

a $\alpha_k > 0$ – veličina koraka u pravcu određenom vektorom s_k, koja se određuje kao najmanje rešenje problema

(2.4) $$\min \{\varphi(x_k + \alpha s_k) \mid \alpha \geq 0\}.$$

Metode ovog tipa mogu se opisati sledećim iterativnim algoritmom:

ALGORITAM 5.2.1.

Korak 1. Naći tačku $x_o \in R^n$ tako da je skup $X(x_o) = \{x \in R^n \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_o)\}$ ograničen. Staviti $k = 0$.

Korak 2. Izračunati $\nabla\varphi(x_k)$. Ako je $\nabla\varphi(x_k) = 0$, STOP; inače ići na korak 3.

Korak 3. Izračunati vektor pravca s_k koji zadovoljava uslov (2.3).

Korak 4. Izračunati α_k – najmanje rešenje problema (2.4).

Korak 5. Staviti $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$; zameniti k sa k+1 i ići na korak 2.

Napomenimo da problem (2.4) ima rešenje zbog pretpostavke o kompaktnosti skupa $X(x_o)$.

Sledećom teoremom daju se osnovne osobine gornjeg algoritma.

TEOREMA 5.2.1. Neka je φ: $R^n \to R$ neprekidno diferencijabilna funkcija i neka je (x_k) niz generisan algoritmom 5.2.1. Tada je

(i) niz $(\varphi(x_k))$ monotono opadajući;

(ii) ili je $\nabla\varphi(x_m) = 0$ za neko m, ili svaka tačka nagomilavanja x^* niza (x_k) zadovoljava uslov $\nabla\varphi(x^*) = 0$;

(iii) ako je $\varphi(x)$ konveksna, svaka tačka nagomilavanja x^* niza (x_k) je tačka minimuma;

(iv) ako je $\varphi(x)$ strogo konveksna, niz (x_k) konvergira ka jedinstvenoj tački minimuma x^*.

DOKAZ: (i) Na osnovu Lagrange-ove teoreme imaćemo:

$$\varphi(x_k+\alpha s_k) = \varphi(x_k) + \alpha\langle\nabla\varphi(\xi_k), s_k\rangle\ ,$$

gde je $\xi_k = x_k + \theta\alpha s_k$, $\theta \in (0,1]$, $\alpha > 0$.

Na osnovu (2.3) je, zbog neprekidnosti $\nabla\varphi(x)$ i skalarnog proizvoda, za dovoljno malo $\hat{\alpha}$

$$\varphi(x_k+\alpha s_k) \leqslant \varphi(x_k) - \alpha\rho\|\nabla\varphi(x_k)\|\ \|s_k\|/2, \text{ pri } 0 < \alpha \leqslant \hat{\alpha}\ .$$

Ako x_k nije stacionarna tačka, tj. ako je $\nabla\varphi(x_k) \neq 0$, sledi da je

$$\varphi(x_k+\alpha s_k) < \varphi(x_k), \qquad 0 < \alpha \leqslant \hat{\alpha}\ .$$

Prema tome, tim pre je

$$\varphi(x_k+\alpha_k s_k) < \varphi(x_k),$$

gde je α_k rešenje problema (2.4). Dakle,

$$\varphi(x_{k+1}) < \varphi(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{2.5}$$

(ii) Kako se algoritam 5.2.1 (na koraku 2) zaustavlja kada izračuna tačku x_m takvu da je $\nabla\varphi(x_m) = 0$, prvi deo tvrđenja je trivijalan.

Niz tačaka (x_k) dobijenih algoritmom 5.2.1 se ne menja ako normiramo vektore pravca s_k, $k = 0, 1, \ldots$, pa ćemo se zato ograničiti na razmatranje jediničnih vektora pravaca $\bar{s}_k$, $\|\bar{s}_k\| = 1$, $k = 0, 1, \ldots$.

Kako niz tačaka (x_k), zbog (2.5), pripada kompaktnom skupu $X(x_o)$, postoji konvergentan podniz. Neka je

$$x_k \to x^*,\ k \to \infty\ ,\ k \in K \subset N$$

proizvoljan konvergentan podniz. Iz neprekidnosti $\nabla\varphi(x)$ sledi

$$\nabla\varphi(x_k) \to \nabla\varphi(x^*), k \to \infty\ ,\ k \in K\ .$$

Pretpostavićemo, suprotno tvrđenju, da je $\nabla\varphi(x^*) \neq 0$. Odgovarajući podniz vektora pravaca $(\bar{s}_k)$, $k \in K$, zbog pretpostavke o normiranosti, sadrži konvergentan podniz, tj.

$$\bar{s}_k \to \bar{s},\ k \to \infty\ ,\ k \in K_1 \subset K\ . \tag{2.6}$$

Iz neprekidnosti skalarnog proizvoda sledi:

$$\langle\nabla\varphi(x_k), \bar{s}_k\rangle \to \langle\nabla\varphi(x^*), \bar{s}\rangle, k \to \infty, k \in K_1\ .$$

Stavljajući u (2.3) $k \to \infty$, $k \in K_1$ dobijamo

$$\langle\nabla\varphi(x^*), \bar{s}\rangle \leqslant -\rho\|\nabla\varphi(x^*)\| < 0\ .$$

Iz neprekidnosti gradijenta $\nabla\varphi(x)$ i iz (2.6) sledi da postoji $\epsilon > 0$ takvo da za svako x za koje je $\|x-x^*\| < \epsilon$ i svako $k \in K_1$ dovoljno veliko važi

$$\langle \nabla\varphi(x), \bar{s}_k\rangle \leqslant -\frac{\rho}{2}\|\nabla\varphi(x^*)\| < 0\,.$$

Specijalno, za x_k za koje je $k \in K_1$ i $\|x_k - x^*\| < \epsilon/2$, imamo:

$$\varphi(x_k + \frac{\epsilon}{2}\bar{s}_k) - \varphi(x_k) = \frac{\epsilon}{2}\langle \nabla\varphi(x_k + \theta\frac{\epsilon}{2}\bar{s}_k), \bar{s}_k\rangle \leqslant -\frac{\rho}{2}\|\nabla\varphi(x^*)\|\frac{\epsilon}{2}\,,$$

gde je $0 < \theta < 1$. Tim pre je

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) \leqslant -\frac{\rho}{2}\|\nabla\varphi(x^*)\|\,\frac{\epsilon}{2}\,.$$

No to znači da $\varphi(x_k) \to -\infty$, $k \to \infty$, što je kontradikcija jer je neprekidna funkcija φ na kompaktnom skupu $X(x_o)$ ograničena. Prema tome, $\nabla\varphi(x^*) = 0$.

(iii) Kako je svaka tačka nagomilavanja stacionarna tačka iz konveksnosti funkcije sledi da je ona istovremeno tačka minimuma.

(iv) Tvrđenje sledi iz tvrđenja (iii) uz primenu teoreme 2.1.1. ♦

5.3. Cauchy-eva metoda

Ova metoda je najstarija i najpoznatija (1847). Vektor pravca s_k je definisan na sledeći način: $s_k = -\nabla\varphi(x_k)$. Uslov (2.3) je očigledno ispunjen jer je

$$\langle \nabla\varphi(x_k), s_k\rangle = -\langle \nabla\varphi(x_k), \nabla\varphi(x_k)\rangle = -\|\nabla\varphi(x_k)\|^2 < 0 \text{ za } \nabla\varphi(x_k) \neq 0,$$

pa se može uzeti da je $\rho = 1$.

Pravac antigradijenta $-\nabla\varphi(x_k)$, koji kod Cauchy-eve metode uzimamo za pravac kretanja, može da se interpretira kao posledica linearne aproksimacije funkcije $\varphi(x)$. Kako se, kao što je poznato*, najstrmije opadanje funkcije ostvaruje u pravcu antigradijenta, Cauchy-eva metoda se zove i metoda najbržeg spuštanja.

Pretpostavićemo da je $\varphi: R^n \to R$ neprekidno diferencijabilna funkcija. Algoritamski koraci će onda biti sledećeg oblika:

ALGORITAM 5.3.1. (Cauchy-ev algoritam)

Korak 1. Naći tačku $x_o \in R^n$ takvu da je skup $X(x_o) = \{x \in R^n \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_o)\}$ ograničen. Staviti $k = 0$.

Korak 2. Izračunati $\nabla\varphi(x_k)$. Ako je $\nabla\varphi(x_k) = 0$, STOP; inače ići na korak 3.

Korak 3. Staviti $s_k = -\nabla\varphi(x_k)$.

---

* Ako je $\nabla\varphi(x_k) \neq 0$, tada je rešenje sledećeg optimizacionog problema

$$\min_{\substack{s \\ \|s\| = \langle s,s\rangle^{1/2} \leqslant 1}} \langle s, \nabla\varphi(x_k)\rangle$$

vektor $s' = (-\nabla\varphi(x_k))/(\|\nabla\varphi(x_k)\|)$.

Korak 4. Izračunati α_k – najmanje rešenje problema (2.4).
Korak 5. Staviti $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$, zameniti k sa k+1 i ići na korak 2.

S obzirom da su ispunjeni svi uslovi teoreme 5.2.1, niz (x_k) ima sve osobine navedene u toj teoremi. Ocenu brzine konvergencije ove metode daje sledeća teorema.

TEOREMA 5.3.1. Neka je niz (x_k) generisan Cauchy-evom metodom, neka $x_k \to x^*$, $k \to \infty$, neka je funkcija φ dvaput neprekidno diferencijabilna u nekoj okolini V tačke x^* i neka je hesijan H(x) funkcije φ pozitivno definitan u x^*. Tada postoji prirodan broj p takav da niz (x_k) p-linearno konvergira.

DOKAZ: S obzirom da je $H(x^*)$ pozitivno definitna, zbog neprekidnosti drugih izvoda u V sledi da postoji konveksna okolina U tačke x^*, $U \subseteq V$, takva da za $x \in U$ važi

$$m\|y\|^2 \leqslant \langle H(x)y, y\rangle < M\|y\|^2$$

za neke pozitivne brojeve m i M i za svako $y \in R^n$.

Neka je $k_o \in N$ takav da $x_k \in U$ za $k \geqslant k_o$. S obzirom da se α_k bira minimizacijom duž pravca $s_k = -\nabla\varphi(x_k)$, imamo da je $\langle \nabla\varphi(x_{k+1}), s_k\rangle = 0$, odnosno $\langle \nabla\varphi(x_{k+1}), \nabla\varphi(x_k)\rangle = 0$.

Na osnovu Taylor-ove formule za $\nabla\varphi$ biće

$$\nabla\varphi(x_{k+1}) = \nabla\varphi(x_k) + \left(\int_o^1 H(x_k + t(x_{k+1}-x_k))dt\right)(x_{k+1}-x_k)$$

pa je

$$0 = \langle \nabla\varphi(x_k), s_k\rangle + \left\langle \left[\int_o^1 H(x_k + t(x_{k+1}-x_k))dt\right] s_k, s_k\right\rangle \alpha_k ,$$

odnosno

$$\alpha_k = \frac{\|\nabla\varphi(x_k)\|^2}{\left\langle \left[\int_o^1 H(x_k + t(x_{k+1}-x_k))dt\right] \nabla\varphi(x_k), \nabla\varphi(x_k)\right\rangle}$$

pa je za $k \geqslant k_o$ ispunjeno $\alpha_k \geqslant 1/m$.

Takođe je, na osnovu Taylor-ovog razvoja za φ

$$\varphi(x_k) - \varphi(x^*) = \langle x_k - x^*, \nabla\varphi(x^*)\rangle + \frac{1}{2}\langle x_k - x^*, H(\nu_k)(x_k - x^*)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\langle x_k - x^*, H(\nu_k)(x_k - x^*)\rangle$$

za neko ν_k između x_k i x^*, jer je $\nabla\varphi(x^*) = 0$. Stoga je

$$\frac{m}{2}\|x_k - x^*\|^2 \leqslant \varphi(x_k) - \varphi(x^*) \leqslant \frac{M}{2}\|x_k - x^*\|^2 .$$

Dalje je, opet na osnovu Taylor-ove formule za φ

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) = \langle x_{k+1}-x_k, \nabla\varphi(x_{k+1})\rangle + \frac{1}{2}\langle x_{k+1}-x_k, H(\eta_k)(x_{k+1}-x_k)\rangle =$$
$$= -\alpha_k\langle\nabla\varphi(x_k), \nabla\varphi(x_{k+1})\rangle + \frac{\alpha_k^2}{2}\langle\nabla\varphi(x_k), H(\eta_k)\nabla\varphi(x_k)\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\alpha_k^2 m}{2}\|\nabla\varphi(x_k)\|^2 \geqslant \frac{1}{2m}\|\nabla\varphi(x_k)\|^2,$$

gde je η_k između x_k i x_{k+1}.

Na osnovu Taylor-ovog razvoja za $\nabla\varphi$ je takođe

$$\nabla\varphi(x_k) = \left(\int_0^1 H(x^* + t(x_k - x^*))dt\right)(x_k - x^*).$$

Stoga je

$$\|\nabla\varphi(x_k)\|^2 = \langle\nabla\varphi(x_k), \nabla\varphi(x_k)\rangle \geqslant m^2\|x_k - x^*\|^2.$$

Ovde je korišćena činjenica da je m ujedno i donja granica svojstvenih vrednosti matrice

$$\int_0^1 H(x^* + t(x_k - x^*))dt$$

i da su svojstvene vrednosti kvadrata matrice kvadrati svojstvenih vrednosti polazne matrice. Prema tome

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2m}\|\nabla\varphi(x_k)\|^2 \geqslant \frac{m}{2}\|x_k - x^*\|^2 \geqslant \frac{m}{M}(\varphi(x_k) - \varphi(x^*)).$$

Znači da je za $k \geqslant k_o$

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*) \leqslant \left(1 - \frac{m}{M}\right)(\varphi(x_k) - \varphi(x^*)).$$

Stoga imamo

$$\varphi(x_{k+s}) - \varphi(x^*) \leqslant \left(1 - \frac{m}{M}\right)^s(\varphi(x_k) - \varphi(x^*)),\ s \in N.$$

Neka je $p \in N$ takav da je $(1 - \frac{m}{M})^p\frac{M}{m} < 1$. Za tako izabrano p je

$$m\|x_{k+p} - x^*\|^2 \leqslant \varphi(x_{k+p}) - \varphi(x^*) \leqslant \left(1 - \frac{m}{M}\right)^p(\varphi(x_k) - \varphi(x^*)) \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 - \frac{m}{M}\right)^p M\|x_k - x^*\|,$$

odnosno

$$\|x_{k+p} - x^*\| \leqslant \left(1 - \frac{m}{M}\right)^p \frac{M}{m}\|x_k - x^*\|,\ k \geqslant k_o.$$

Stavljajući $q = (1 - \frac{m}{M})^p\frac{M}{m}$ vidimo na osnovu definicije 5.1.1 da je konvergencija p-linearna. ♦

Iz upravo izloženog algoritma najbržeg spuštanja razvila se čitava klasa gradijentnih algoritama koji se često pominju i kao algoritmi minimizacije prvog reda. Ovde se za vektor pravca s_k uzima modifikovani vektor antigradijenta

$$s_k = -D\,\nabla\varphi(x_k),$$

gde je D – konstantna pozitivno definitna kvadratna matrica reda n.

Dokaz konvergencije se izvodi analogno prethodnim dokazima. Brzina konvergencije, uz odgovarajuće pretpostavke, je takođe p-linearna, odnosno, uz pogodan izbor koraka α_k čak i linearna. Inače, osobine ovih algoritama su sasvim bliske osobinama Cauchy-evog algoritma (videti Poljak [P.4], Goldstein [G.4]).

Iz gore izloženog vidimo da je za brzu konvergenciju Cauchy-eve i ostalih gradijentnih metoda neophodno da je količnik q mali. Količnik q kod metode najbržeg spuštanja biće dovoljno mali samo onda kada se brojevi m i M malo razlikuju. Ako su nivoske površi funkcije cilja (tj. površi $\varphi(x) = C$) izdužene, pravac $-\nabla\varphi(x)$ u većini tačaka odstupa od pravca prema minimumu. Može se pokazati da tada odnos m/M mora biti mali, što usporava konvergenciju, kao što se vidi iz sledećeg primera:

PRIMER 5.3.1. Naći

$$\min\,(x^2 + 99y^2),\ \text{uzimajući}\ x_0 = (99,1).$$

Primenom Cauchy-eve metode dobija se niz tačaka

$$x_k = \left(99\left(\frac{98}{100}\right)^k, (-1)^k\left(\frac{98}{100}\right)^k\right),\quad k = 1, 2, \ldots,$$

koji očigledno sporo konvergira ka rešenju (0,0). Veličina odnosa m/M je ovde u najboljem slučaju 1/99 jer je hesijan konstantan, tj.

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 198 \end{bmatrix},$$

pa je $m \leqslant 2$, a $M \geqslant 198$.

Spora konvergencija gradijentnih metoda otežava rešavanje složenih zadataka minimizacije. Zato su danas razrađene i razrađuju se metode minimizacije sa većom brzinom konvergencije. Gradijentne metode se često koriste u kombinaciji sa drugim, efikasnijim metodama, i to na početnom stadijumu rešavanja zadatka, kada se tačka x_k nalazi daleko od tačke minimuma i koraci duž antigradijenta dozvoljavaju da se postigne bitno opadanje funkcije. Ipak, nesumnjiva prednost ovih metoda leži u njihovoj jednostavnosti i mogućnosti korišćenja za minimizaciju široke klase funkcija.

5.4. Newton-ova metoda. Modifikovana Newton-ova metoda

Dok je osnova Cauchy-eve metode – najgrublja, linearna aproksimacija funkcije cilja, kod Newton-ove metode polazimo od kvadratne aproksimacije.

Pretpostavićemo da je $\varphi(x)$ dva puta neprekidno diferencijabilna. Kvadratnu aproksimaciju $q(x)$ funkcije $\varphi(x)$ možemo dobiti pomoću Taylor-ovog razvoja funkcije φ u okolini tačke x_k:

$$q(x) = \varphi(x_k) + \langle \nabla\varphi(x_k), x-x_k\rangle + \frac{1}{2}\langle x-x_k, H(x_k)(x-x_k)\rangle .$$

Diferenciranjem $q(x)$ i izjednačavanjem njenog gradijenta sa nulom, pod pretpostavkom da je $H(x_k)$ pozitivno definitna matrica, dobićemo tačku x_{k+1} koja minimizira funkciju $q(x)$:

$$0 = \nabla q(x) = \nabla\varphi(x_k) + H(x_k)(x-x_k) .$$

Odavde je $x_{k+1} = x_k - H(x_k)^{-1}\nabla\varphi(x_k)$, tj:

$$s_k = x_{k+1} - x_k = -H(x_k)^{-1}\nabla\varphi(x_k) .$$

Iterativnim procesom

(4.1) $$x_{k+1} = x_k - H(x_k)^{-1}\nabla\varphi(x_k),\ k = 0, 1, \ldots$$

definisana je Newton-ova metoda*.

Specijalno, u slučaju kada je $\varphi(x)$ oblika

(4.2) $$\varphi(x) = a + \langle b,x\rangle + \frac{1}{2}\langle x,Qx\rangle ,$$

gde je Q – pozitivno definitna matrica, imaćemo $H(x) = Q$, tj. hesijan je konstantna matrica. Ako je x_0 proizvoljna tačka iz R^n i x^* tačka minimuma od $\varphi(x)$, sledi $\nabla\varphi(x_0) = b + Qx_0$, kao i $0 = b + Qx^*$. Odavde je

$$x^* = x_0 - Q^{-1}\nabla\varphi(x_0) ,$$

tj. Newton-ova metoda daje rešenje u samo jednom koraku što nije slučaj sa Cauchy-evom metodom (videti primer 5.3.1).

Međutim, u opštem slučaju, vektor $-H(x_k)^{-1}\nabla\varphi(x_k)$ se ne poklapa sa pravcem prema tački minimuma x^*, a može se desiti i da je $\varphi(x_{k+1}) > \varphi(x_k)$, pa se zato umesto iterativnog postupka (4.1) uzima njegova modifikacija:

(4.3) $$x_{k+1} = x_k - \alpha_k H(x_k)^{-1}\nabla\varphi(x_k) ,\ \ k = 0, 1, \ldots ,$$

---

* Interesantno je da se Newton-ov vektor pravca mogao dobiti i rešavanjem zadatka analognog onome kod metode najbržeg spuštanja koristeći neeuklidsku normu:

$$\min_{\substack{s \\ \|s\|_k = \langle s, H(x_k)s\rangle \leq 1}} \langle s, \nabla\varphi(x_k)\rangle ,$$

Dobijeni vektor je kolinearan sa Newton-ovim vektorom pravca $-H(x_k)^{-1}\nabla\varphi(x_k)$.

gde je α_k rešenje problema:

(4.4) $$\min \{ \varphi(x_k - \alpha H(x_k)^{-1} \nabla\varphi(x_k)) \mid \alpha \geqslant 0 \}.$$

Modifikovana Newton-ova metoda definisana je sledećim algoritmom.

ALGORITAM 5.4.1. (Modifikovan Newton-ov algoritam)

Neka je φ dvaput neprekidno diferencijabilna funkcija sa pozitivno definitnim hesijanom.
Korak 1. Naći tačku $x_0 \in R^n$ tako da je skup $X(x_0) = \{ x \in R^n \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) \}$ ograničen. Staviti $k = 0$.
Korak 2. Izračunati $\nabla\varphi(x_k)$. Ako je $\nabla\varphi(x_k) = 0$, STOP; inače ići na korak 3.
Korak 3. Izračunati $H(x_k)$. Staviti $s_k = -H(x_k)^{-1} \nabla\varphi(x_k)$.
Korak 4. Izračunati α_k – najmanje rešenje problema (4.4).
Korak 5. Staviti $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$; zameniti k sa k+1 i ići na korak 2.

U daljim razmatranjima koristićemo sledeću lemu.

LEMA 5.4.1. Neka je funkcija φ: $R^n \to R$ dvaput neprekidno diferencijabilna i neka je hesijan $H(x)$ funkcije φ pozitivno definitan za $x \in K$, gde je $K \subseteq R^n$ kompaktan skup. Tada postoje pozitivni brojevi m, M, $\bar{m}$, $\bar{M}$, takvi da za svaki $x \in K$ i svaki $y \in R^n$ važi

$$m\|y\|^2 \leqslant \langle y, H(x)y \rangle \leqslant M\|y\|^2$$

i

$$\bar{m}\|y\|^2 \leqslant \langle y, H(x)^{-1}y \rangle \leqslant \bar{M}\|y\|^2 .$$

DOKAZ: Pošto je $H(x)$ pozitivno definitna matrica, matrica $H(x)^{-1}$ postoji i takođe je pozitivno definitna. Postojanje traženih pozitivnih brojeva sledi iz kompaktnosti skupa K. ♦

Kako je $H(x)$ neprekidna funkcija a skup $X(x_0)$ kompaktan, važiće

$$\bar{m}\|s\|^2 \leqslant \langle s, H(x)^{-1}s \rangle \leqslant \bar{M}\|s\|^2 \quad \text{za svaki } x \in X(x_0) \text{ i svaki } s \in R^n.$$

Odavde sledi da je

(4.5) $$\langle \nabla\varphi(x_k), s_k \rangle = -\langle \nabla\varphi(x_k), H(x_k)^{-1} \nabla\varphi(x_k) \rangle \leqslant -\bar{m}\|\nabla\varphi(x_k)\|^2 < 0,$$

za $\nabla\varphi(x_k) \neq 0$, gde je $0 < \rho = \bar{m}$. Prema tome, algoritam 5.4.1 je specijalan slučaj algoritma 5.2.1. Međutim, važi jači stav o konvergenciji jer funkcija φ zadovoljava dodatne uslove.

Konvergenciju modifikovanog Newton-ovog algoritma razmatra sledeća teorema:

TEOREMA 5.4.1. Neka je $x_0 \in R^n$ takva tačka da je skup $X(x_0)$ ograničen. Neka je φ: $R^n \to R$ dvaput neprekidno diferencijabilna funkcija i neka je hesijan $H(x)$ pozitivno definitan za $x \in X(x_0)$. Neka je niz tačaka (x_k) generisan algoritmom 5.4.1. Ukoliko je taj niz konačan, poslednja tačka je rešenje polaznog problema. Ako je niz (x_k) beskonačan tada konvergira ka jedinstvenom rešenju polaznog problema.

DOKAZ: Iz datih pretpostavki sledi da je funkcija strogo konveksna na $X(x_0)$(teorema 1.4.10) pa tvrđenje sledi iz teoreme 5.2.1. ♦

Ocenu brzine konvergencije daje sledeća teorema:

TEOREMA 5.4.2. Neka je niz (x_k) generisan modifikovanom Newton-ovom metodom, neka $x_k \to x^*$, $k \to \infty$, neka je funkcija cilja φ dvaput neprekidno diferencijabilna i neka je hesijan $H(x)$ funkcije φ pozitivno definitan u tački x^*. Tada:

(i) niz (x_k) superlinearno konvergira;

(ii) ako postoji realan broj L takav da je

$$\|H(x) - H(y)\| \leqslant L\,\|x-y\|$$

za svaki x i y iz neke okoline tačke x^*, tada niz (x_k) kvadratno konvergira.

DOKAZ: (i) Iz pretpostavki teoreme sledi da postoji konveksna okolina V tačke x^* takva da za svaki $x \in V$ i svaki $y \in R^n$ važi

$$m\|y\|^2 \leqslant \langle H(x)y, y\rangle \leqslant M\|y\|^2 .$$

Tada za matricu $H(x)^{-1}$ i za svaki $y \in R^n$ važe ocene

$$\bar{m}\,\|y\|^2 \leqslant \langle H(x)^{-1}y, y\rangle \leqslant \bar{M}\|y\|^2 .$$

Pokažimo najpre da $\alpha_k \to 1$, $k \to \infty$. Zaista, s obzirom da se α_k bira minimizacijom duž pravca $s_k = -H(x_k)^{-1}\,\nabla\varphi(x_k)$ imamo da je

$$\langle \nabla\varphi(x_{k+1}), s_k\rangle = 0 .$$

Na osnovu Taylor-ove formule je

$$\nabla\varphi(x_{k+1}) = \nabla\varphi(x_k) + H_k(x_{k+1}-x_k) ,$$

gde je

$$H_k = \int_0^1 H(x_k + t(x_{k+1}-x_k))dt, \quad \text{te je}$$

$$0 = \langle \nabla\varphi(x_k), s_k\rangle + \langle H_k\alpha_k s_k, s_k\rangle ,$$

odnosno

$$\alpha_k = \frac{-\langle \nabla\varphi(x_k), s_k\rangle}{\langle H_k s_k, s_k\rangle} = \frac{\langle H(x_k)^{-1}\,\nabla\varphi(x_k), \nabla\varphi(x_k)\rangle}{\langle H(x_k)^{-1}H_kH(x_k)^{-1}\,\nabla\varphi(x_k), \nabla\varphi(x_k)\rangle}$$

Dalje je

$$|\alpha_k-1| = \frac{|\langle H(x_k)^{-1}(I-H_kH(x_k)^{-1})\nabla\varphi(x_k), \nabla\varphi(x_k)\rangle|}{\langle H(x_k)^{-1}H_kH(x_k)^{-1}\,\nabla\varphi(x_k), \nabla\varphi(x_k)\rangle}$$

S obzirom da $H(x_k)^{-1}H_kH(x_k)^{-1} \to H(x^*)^{-1}$, $k \to \infty$, za dovoljno veliko k će biti

$$\langle H(x_k)^{-1}H_kH(x_k)^{-1}\nabla\varphi(x_k),\ \nabla\varphi(x_k)\rangle \geqslant \frac{\bar{m}}{2}\|\nabla\varphi(x_k)\|^2,$$

pa je

$$|\alpha_k-1| \leqslant \frac{2}{\bar{m}}|\langle H(x_k)^{-1}(H(x_k)-H_k)H(x_k)^{-1}\nabla\varphi(x_k),\ \nabla\varphi(x_k)\rangle|\frac{1}{\|\nabla\varphi(x_k)\|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\bar{m}}\|H(x_k)^{-1}\|^2\|H(x_k)-H_k\| \to 0,\quad k\to\infty. \tag{4.6}$$

S obzirom da $H(x_k)\to H(x^*)$, $H_k\to H(x^*)$ kad $k\to\infty$, sledi da $\alpha_k\to 1$, $k\to\infty$.

Sada imamo

$$x_{k+1}-x^* = x_k - x^* - \alpha_k H(x_k)^{-1}\nabla\varphi(x_k),$$

te je na osnovu Taylor-ove formule, zbog $\nabla\varphi(x^*)=0$,

$$x_{k+1}-x^* = x_k - x^* - \alpha_k H(x_k)^{-1}H_k^*(x_k-x^*),$$

gde je

$$H_k^* = \int_0^1 H(x^*+t(x_k-x^*))dt.$$

Dalje je

$$x_{k+1}-x^* = (I-\alpha_k H(x_k)^{-1}H_k^*)(x_k-x^*),$$

pa je

$$\|x_{k+1}-x^*\| \leqslant \|H(x_k)^{-1}(H(x_k)-\alpha_k H_k^*)\|\,\|x_k-x^*\| \leqslant$$

$$\leqslant \|H(x_k)^{-1}\|\,(\|(1-\alpha_k)H(x_k)\| + \alpha_k\|H(x_k)-H_k^*\|)\|x_k-x^*\|$$

S obzirom da $\alpha_k\to 1$, $H(x_k)\to H(x^*)$, $H(x_k)^{-1}\to H(x^*)^{-1}$, $H_k^*\to H(x^*)$, imamo $q_k = \|H(x_k)^{-1}\|\,(|1-\alpha_k|\,\|H(x_k)\| + \alpha_k\,\|H(x_k)-H_k^*\|)\to 0$, $k\to\infty$, te je konvergencija superlinearna.

(ii) Kao u dokazu pod (i) biće, s obzirom na (4.6),

$$q_k = \|H(x_k)^{-1}\|\,(|1-\alpha_k|\,\|H(x_k)\| + \alpha_k\,\|H(x_k)-H_k^*\|) =$$

$$= \|H(x_k)^{-1}\|\,\|H(x_k)\|\,|1-\alpha_k| + \alpha_k\,\|H(x_k)-H_k^*\|\,\|H(x_k)^{-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\bar{m}}\|H(x_k)^{-1}\|^3\|H(x_k)\|\,\|H(x_k)-H_k\| + \alpha_k\|H(x_k)-H_k^*\|\,\|H(x_k)^{-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\bar{m}}\|H(x_k)^{-1}\|^3\|H(x_k)\|\,L\,\|x_{k+1}-x_k\| + \alpha_k\,\|H(x_k)^{-1}\|\,L\,\|x_k-x\|,$$

jer je

$$\|H(x_k)-H_k\| = \|\int_0^1 (H(x_k)-H(x_k+t(x_{k+1}-x_k)))dt\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \|H(x_k)-H(x_k+t(x_{k+1}-x_k))\|dt \leqslant L\|x_{k+1}-x_k\|$$

$$\|H(x_k)-H_k^*\| = \|\int_0^1 (H(x_k)-H(x^*+t(x_k-x^*)))dt\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \|H(x_k)-H(x^*+t(x_k-x^*))\|\, dt \leqslant L\|x_k-x^*\| .$$

Zbog superlinearne konvergencije je $\|x_{k+1}-x^*\| \leqslant \|x_k-x^*\|$ za dovoljno veliko k i stoga je $\|x_{k+1}-x_k\| \leqslant 2\|x_k-x^*\|$. Znači da je za k dovoljno veliko

$$q_k \leqslant \left(\frac{4L}{m} \|H(x_k)^{-1}\|^3 \|H(x_k)\| + L\alpha_k \|H(x_k)^{-1}\|\right) \|x_k-x^*\| .$$

Izraz u zagradi je ograničen zbog konvergentnosti nizova $(H(x_k)^{-1})$ $(H(x_k))$ i (α_k), pa je, po definiciji 5.1.1, konvergencija kvadratna. ♦

PRIMER 5.4.1. Naći minimum funkcije

$$\varphi(x) = \frac{3}{2}\xi_1^2 + \frac{5}{2}\xi_2^2 - \xi_1\xi_2 - 5\xi_1 + 3, \; x = (\xi_1,\xi_2) \in R^2$$

Newton-ovom metodom.

Ovde je

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \nabla\varphi(x) = \begin{bmatrix} 3\xi_1 - \xi_2 - 5 \\ -\xi_1 + 5\xi_2 \end{bmatrix} \qquad Q^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Neka je $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Optimalna tačka x* će biti

$$x = x_0 - Q^{-1}\nabla\varphi(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{14} \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix} .$$

5.5. Metode konjugovanih gradijenata

Metode koje nalaze optimum kvadratne funkcije u konačnom broju koraka često imaju dobru konvergenciju i kada se primene na funkcije opšteg oblika. Ovo je posledica činjenice da strogo konveksna funkcija u okolini tačke minimuma ima osobine bliske osobinama pozitivno definitne kvadratne forme. Newton-ova metoda je očigledno jedna takva metoda, jer nalazi minimum kvadratne funkcije u samo jednom koraku. Metode konjugovanih pravaca takođe spadaju u tu klasu metoda. Pre nego što pređemo na izlaganje osnovnih osobina ovih metoda, definišimo konjugovane vektore.

DEFINICIJA 5.5.1. Za datu pozitivno definitnu matricu Q reda n, vektori s_0, s_1, ..., s_{m-1} $(m \leqslant n)$ nazivaju se konjugovanim (ili Q-konjugovanim) ako važi

$$\langle s_i, Qs_j\rangle = 0 \quad \text{za } i \neq j .$$

Primetimo da je ortogonalnost vektora specijalan slučaj konjugovanosti ($Q = I$).

LEMA 5.5.1. Nenulti vektori $s_o, \dots, s_{m-1}$, konjugovani u odnosu na pozitivno definitnu matricu Q su linearno nezavisni.

DOKAZ: Neka su λ_i, $i = 0, 1, \dots, m-1$ konstante takve da važi:

$$\lambda_o s_o + \dots + \lambda_{m-1} s_{m-1} = 0.$$

Ako pomnožimo ovu jednakost skalarno sa Qs_i, $i = 0, \dots, m-1$, dobićemo:

$$\lambda_i \langle s_i, Qs_i \rangle = 0, \ i = 0, 1, \dots, m-1$$

jer je $\langle s_i, Qs_j \rangle = 0$ za $i \neq j$. Odavde, zbog $\langle s_i, Qs_i \rangle > 0$, $i = 0, \dots, m-1$, sledi $\lambda_i = 0$, $i = 0, \dots, m-1$. ♦

Iz ove leme sledi da broj nenultih konjugovanih vektora u R^n ne može biti veći od dimenzije prostora n i da ma koji skup od n nenultih konjugovanih vektora obrazuje bazu prostora.

Korišćenjem linearne nezavisnosti konjugovanih vektora pokazaćemo da se funkcija oblika

$$\varphi(x) = a + \langle b, x \rangle + \frac{1}{2} \langle x, Qx \rangle \ , \tag{5.1}$$

gde je Q – pozitivno definitna matrica, minimizira u najviše n koraka duž konjugovanih pravaca.

TEOREMA 5.5.1. Neka su $s_o, \dots, s_{n-1}$ konjugovani pravci u odnosu na pozitivno definitnu matricu Q. Neka su tačke $x_1, \dots, x_n$ definisane sa

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k, \ k = 0, \dots, n-1,$$

gde je x_o – proizvoljna tačka iz R^n, a α_k – rešenje problema:

$$\min \{ \varphi(x_k + \alpha s_k) \mid \alpha \in R \}.$$

Tada se minimum funkcije $\varphi(x)$ zadate relacijom (5.1) dostiže u tački x_n.

DOKAZ: Iz uslova minimalnosti duž pravca s_k, $k = 0, \dots, n-1$, sledi

$$\langle s_k, \nabla\varphi(x_{k+1}) \rangle = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \tag{5.2}$$

Na osnovu definicije $\varphi(x)$ imamo

$$\nabla\varphi(x_n) = \nabla\varphi(x_k) + Q(x_n - x_k), \ k = 1, \dots, n-1. \tag{5.3}$$

Kako je, sem toga,

$$x_n - x_k = \sum_{j=k}^{n-1} \alpha_j s_j \ , \quad k = 1, \dots, n-1, \tag{5.4}$$

zamenom (5.4) u (5.3) dobijamo

$$\nabla\varphi(x_n) = \nabla\varphi(x_k) + \sum_{j=k}^{n-1} \alpha_j Q s_j, \quad k = 1, ..., n-1.$$

Skalarnim množenjem sa s_{k-1}, $k = 1, ..., n-1$, odavde se dobija

$$(5.5) \qquad \langle s_{k-1}, \nabla\varphi(x_n)\rangle = \langle s_{k-1}, \nabla\varphi(x_k)\rangle + \sum_{j=k}^{n-1} \alpha_j \langle s_{k-1}, Qs_j\rangle = 0, \quad k = 1, ..., n-1.$$

Sem toga je, zbog (5.2),

$$(5.6) \qquad \langle s_{n-1}, \nabla\varphi(x_n)\rangle = 0.$$

Iz (5.5) i (5.6) sledi da je $\nabla\varphi(x_n) = 0$ (jer je $\nabla\varphi(x_n)$ ortogonalan na n linearno nezavisnih vektora u R^n). Kako je $\varphi(x)$ konveksna funkcija, sledi da je x_n tačka minimuma. ♦

N a p o m e n a: Može se desiti da je $\nabla\varphi(x_m) = 0$ za neko $m < n$. Tada je $x_m = x_{m+1} = ... = x_n$.

Ovde ćemo se ograničiti na izlaganje jedne od najpoznatijih metoda konjugovanih pravaca, metode konjugovanih gradijenata (Polak i Ribière [P.5], Poljak [P.7]).

Pretpostavićemo da je φ: $R^n \to R$ neprekidno diferencijabilna.

ALGORITAM 5.5.1. (Polak-Ribière-Poljak-ov algoritam).

Korak 1. Izabrati $x_0 \in R^n$ tako da je skup $X(x_0) = \{ x \in R^n \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0) \}$ ograničen. Izračunati $\nabla\varphi(x_0)$. Ako je $\nabla\varphi(x_0) = 0$, STOP; inače ići na korak 2.

Korak 2. Staviti $k = 0$, $s_0 = -\nabla\varphi(x_0)$.

Korak 3. Naći $\alpha_k \geq 0$, gde je α_k rešenje problema

$$\min \{ \varphi(x_k + \alpha s_k) \mid \alpha \geq 0 \}.$$

Korak 4. Staviti $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$.

Korak 5. Izračunati $\nabla\varphi(x_{k+1})$. Ako je $\nabla\varphi(x_{k+1}) = 0$, STOP. Ako $k+1 \in \{ n, 2n, 3n, ... \}$ izračunati $s_{k+1} = -\nabla\varphi(x_{k+1})$; inače, izračunati

$$(5.7) \qquad s_{k+1} = -\nabla\varphi(x_{k+1}) + \beta_k s_k, \text{ gde je}$$

$$(5.8) \qquad \beta_k = \frac{\langle \nabla\varphi(x_{k+1}) - \nabla\varphi(x_k), \nabla\varphi(x_{k+1})\rangle}{\langle \nabla\varphi(x_k), \nabla\varphi(x_k)\rangle}$$

Zameniti k sa k+1 i ići na korak 3.

TEOREMA 5.5.2. Ako je $\varphi(x) = a + \langle b,x\rangle + (1/2)\langle x,Qx\rangle$ i Q pozitivno definitna matrica, tada se algoritmom 5.5.1 nalazi minimum funkcije $\varphi(x)$ za $m \leq n$ koraka i pri tom su pravci $s_0, ..., s_{m-1}$ konjugovani u odnosu na matricu Q.

DOKAZ: Dokažimo da je

$$\langle \nabla\varphi(x_j), s_i\rangle = 0,$$

$$\langle \nabla\varphi(x_j), \nabla\varphi(x_i)\rangle = 0, \qquad 0 \leq i < j \leq k < m,$$

$$\langle s_j, Qs_i\rangle = 0,$$

pri čemu je m prvi indeks za koji je $\nabla\varphi(x_m) = 0$. Zbog kraćeg zapisa uvedimo oznaku $g_j = \nabla\varphi(x_j)$. U dokazu ćemo koristiti da je,

$$\langle g_j, s_{j-1}\rangle = 0,\ g_{j+1} - g_j = \alpha_j Q s_j ,$$

(gde prva jednakost sledi iz izbora koraka a druga iz definicije funkcije φ).

Za k = 1 imamo

$$\langle g_1, s_o\rangle = 0,$$

$$\langle g_1, g_o\rangle = -\langle g_1, s_o\rangle = 0 ,$$

$$\langle s_1, Qs_o\rangle = \langle -g_1+\beta_o s_o, Qs_o\rangle = -\langle g_1, Qs_o\rangle + \frac{\langle g_1-g_o, g_1\rangle}{\langle g_o, g_o\rangle}\langle s_o, Qs_o\rangle =$$

$$= -\langle g_1, Qs_o\rangle + \frac{\langle g_1-g_o, g_1\rangle}{\langle g_1-g_o, s_o\rangle}\langle s_o, Qs_o\rangle = -\langle g_1, Qs_o\rangle + \frac{\langle g_1, Qs_o\rangle}{\langle s_o, Qs_o\rangle}\langle s_o, Qs_o\rangle = 0$$

Pretpostavimo da je za $i < j \leqslant k$

$$\langle g_j, s_i\rangle = 0 ,$$

$$\langle g_j, g_i\rangle = 0 ,$$

$$\langle s_j, Qs_i\rangle = 0 .$$

Za $i < j \leqslant k+1$ razlikovaćemo nekoliko slučajeva. Ako je $j \leqslant k$, uslovi su ispunjeni prema induktivnoj pretpostavci. Neka je $j = k+1$ i neka je $i = k$. Imamo

$$\langle g_{k+1}, s_k\rangle = 0 ,$$

$$\langle g_{k+1}, g_k\rangle = \langle g_{k+1}, -s_k+\beta_{k-1}s_{k-1}\rangle = \beta_{k-1}\langle g_{k+1}, s_{k-1}\rangle =$$

$$= \beta_{k-1}\langle g_{k+1}-g_k, s_{k-1}\rangle = \beta_{k-1}\alpha_k\langle s_{k-1}, Qs_k\rangle = 0 ;$$

$$\langle s_{k+1}, Qs_k\rangle = \langle -g_{k+1}+\beta_k s_k, Qs_k\rangle = -\langle g_{k+1}, Qs_k\rangle + \frac{\langle g_{k+1}-g_k, g_{k+1}\rangle}{\langle g_k, g_k\rangle}\langle s_k, Qs_k\rangle =$$

$$= -\langle g_{k+1}, Qs_k\rangle + \frac{\langle g_{k+1}-g_k, g_{k+1}\rangle}{\langle g_{k+1}-g_k, s_k\rangle}\langle s_k, Qs_k\rangle =$$

$$= -\langle g_{k+1}, Qs_k\rangle + \frac{\langle g_{k+1}, Qs_k\rangle}{\langle s_k, Qs_k\rangle}\langle s_k, Qs_k\rangle = 0$$

Neka je sada $i < k$. Koristeći induktivnu pretpostavku i prethodne formule imamo:

$$\langle g_{k+1}, s_i\rangle = \langle g_k+\alpha_k Qs_k, s_i\rangle = \langle g_k, s_i\rangle + \alpha_k\langle s_i, Qs_k\rangle = 0,$$

$$\langle g_{k+1}, g_i\rangle = \langle g_k+\alpha_k Qs_k, g_i\rangle = \alpha_k\langle g_i, Qs_k\rangle = \alpha_k\langle -s_i+\beta_{i-1}s_{i-1}, Qs_k\rangle =$$

$$= -\alpha_k\langle s_i, Qs_k\rangle + \alpha_k\beta_{i-1}\langle s_{i-1}, Qs_k\rangle = 0,$$

$$\langle s_{k+1}, Qs_i\rangle = \langle -g_{k+1}+\beta_k s_k, Qs_i\rangle = -\langle g_{k+1}, Qs_i\rangle + \beta_k\langle s_k, Qs_i\rangle = -\frac{1}{\alpha_i}\langle g_{k+1}, g_{i+1}-g_i\rangle = 0.$$

Iz leme 5.5.1. sledi da konjugovanih pravaca može biti najviše n, pa je $m \leqslant n$. S obzirom da je $\nabla\varphi(x_m) = 0$, a funkcija φ strogo konveksna, sledi da je x_m tačka minimuma. ♦

Pod pretpostavkama navedenim u sledećoj teoremi algoritam 5.5.1 je specijalan slučaj algoritma 5.2.1.

TEOREMA 5.5.3. Neka je $\varphi: R^n \to R$ dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija, neka je $x_0 \in R^n$ takva tačka da je skup $X(x_0) = \{ x \in R^n \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) \}$ konveksan i ograničen i neka je hesijan $H(x)$ pozitivno definitan za $x \in X(x_0)$. Neka su (x_k) i (s_k) nizovi konstruisani algoritmom 5.5.1. Tada postoji takav broj $\rho > 0$ da važi

(5.9) $\quad \langle\nabla\varphi(x_k), s_k\rangle \leqslant -\rho\|\nabla\varphi(x_k)\|\,\|s_k\|, \quad k = 0, 1, \ldots,$

DOKAZ: Zbog periodičnog „obnavljanja" algoritma na koraku 5, posle svakih n koraka vektor pravca s_{k+1} je oblika $s_{k+1} = -\nabla\varphi(x_{k+1})$. Prema tome,

$$\langle s_{k+1}, \nabla\varphi(x_{k+1})\rangle = -\|\nabla\varphi(x_{k+1})\|^2 < 0, \text{ za } k+1 \in \{ n, 2n, \ldots \}$$

pa (5.9) važi sa $\rho = 1 \geqslant 0$. Razume se, važi i $\langle s_0, \nabla\varphi(x_0)\rangle = -\|\nabla\varphi(x_0)\|^2$.

Pokažimo da relacija (5.9) važi i za ostale vrednosti k. Korišćenjem Taylor-ove formule dobijamo

$$\nabla\varphi(x_{k+1}) = \nabla\varphi(x_k+\alpha_k s_k) = \nabla\varphi(x_k) + \alpha_k H_k s_k ,$$

gde je $\quad H_k = \int_0^1 H(x_k+t(x_{k+1}-x_k))\,dt.$

Ako uvedemo oznaku $g_k = \nabla\varphi(x_k)$, dobićemo

(5.10) $\quad g_{k+1} = g_k + \alpha_k H_k s_k .$

Kako je, zbog koraka 3, $\langle s_k, g_{k+1}\rangle = 0$, iz (5.10) nalazimo

$$\alpha_k = \frac{-\langle s_k, g_k\rangle}{\langle s_k, H_k s_k\rangle}$$

a kako iz (5.7) sledi $s_k = -g_k + \beta_{k-1}s_{k-1}$ (za $k \notin \{ n, 2n, \ldots \}$) biće

(5.11) $\quad \langle s_k, g_k\rangle = \langle -g_k+\beta_{k-1}s_{k-1}, g_k\rangle = -\langle g_k, g_k\rangle .$

Ova formula očigledno važi i za $k \in \{ n, 2n, \ldots \}$. Prema tome,

(5.12) $\quad \alpha_k = \dfrac{\langle g_k, g_k\rangle}{\langle s_k, H_k s_k\rangle}$

Dalje, iz (5.7), (5.10) i (5.12) imamo:

$$|\beta_k| = \left| \frac{\langle g_{k+1}, H_k s_k\rangle}{\langle g_k, g_k\rangle} \cdot \frac{\langle g_k, g_k\rangle}{\langle s_k, H_k s_k\rangle} \right| = \left| \frac{\langle g_{k+1}, H_k s_k\rangle}{\langle s_k, H_k s_k\rangle} \right| .$$

S obzirom na izbor koraka α_k sledi da za $k \in N, x_k \in X(x_o)$, pa zbog leme 5.4.1. postoje brojevi $0 < m < M$ takvi da za svaki $y \in R^n$ i $k \in N$ važi

$$m \|y\|^2 \leqslant \langle y, H_k y\rangle \leqslant M \|y\|^2 ,$$

sem toga zbog kompaktnosti skupa $X(x_o)$ i neprekidnosti funkcije $\|H(x)\|$ postoji $M > 0$ tako da je $\|H_k\| \leqslant M$. Dalje je

$$(5.13) \qquad |\beta_k| \leqslant \frac{\|g_{k+1}\| \, \|H_k\| \, \|s_k\|}{m \|s_k\|^2} \leqslant \frac{\|g_{k+1}\|}{\|s_k\|} \frac{M}{m}$$

Prema nejednakosti trougla iz (5.7) sledi

$$\|s_{k+1}\| \leqslant \|g_{k+1}\| + |\beta_k| \, \|s_k\| ,$$

odnosno, imajući u vidu (5.13),

$$(5.14) \qquad \|s_{k+1}\| \leqslant \|g_{k+1}\| \left(1 + \frac{M}{m}\right) .$$

Prema tome, korišćenjem relacija (5.11) i (5.14) dobijamo:

$$\frac{\langle s_{k+1}, g_{k+1}\rangle}{\|s_{k+1}\| \, \|g_{k+1}\|} = - \frac{\langle g_{k+1}, g_{k+1}\rangle}{\|s_{k+1}\| \, \|g_{k+1}\|} = - \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|s_{k+1}\| \, \|g_{k+1}\|} = - \frac{\|g_{k+1}\|}{\|s_{k+1}\|} \leqslant - \frac{1}{1 + \frac{M}{m}}$$

čime je teorema dokazana. ♦

Iz teoreme 5.2.1 i prethodne teoreme neposredno sledi sledeća teorema:

TEOREMA 5.5.4. Neka funkcija φ zadovoljava pretpostavke teoreme 5.5.3. Tada algoritam 5.5.1 konstruiše ili konačan niz tačaka čiji je poslednji element x_m tačka minimuma ili beskonačan niz (x_k) koji konvergira ka (jedinstvenoj) tački minimuma.

Može se pokazati, uz strožije pretpostavke, da za brzinu konvergencije metode konjugovanih gradijenata važi sledeća ocena (Cohen [C.4]):

Postoji takva konstanta $q > 0$ da važi

$$\|x_{k+n} - x^*\| \leqslant q \|x_k - x^*\|^2, \quad k \in \{0, n, 2n, \ldots\} .$$

Odavde se može pokazati da je brzina konvergencije 2n-superlinearna.

Slabiji rezultat za Polak-Ribière-Poljak-ov algoritam, ali za širu klasu funkcijâ daje sledeća teorema.

TEOREMA 5.5.5. Neka je φ neprekidno diferencijabilna funkcija na otvorenom konveksnom skupu $C \subseteq R^n$. Neka $x_o \in C$ i pretpostavimo da je skup $X(x_o) = \{ x \in C \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_o) \}$ kompaktan. Tada Polak-Ribière-Poljakov- algoritam ima sledeće osobine:

1. $(\varphi(x_k))$ je monotono opadajući niz;

2. ili je $\nabla\varphi(x_m) = 0$ za neko m, ili je $\lim_{k\to\infty} \nabla\varphi(x_k) = 0$;

3. svaka tačka nagomilavanja niza (x_k) je stacionarna tačka.

Dokaz se može naći u Avriel [A.7].

Ostali algoritmi konjugovanih gradijenata su analogni izloženom algoritmu. Ustvari, svi algoritamski koraci su isti kao i kod algoritma 5.5.1 i razlika je samo u formuli za koeficijent β_k.

Tako kod Fletcher-Reeves-ove metode [F.9] imamo

$$\beta_k = \frac{\langle \nabla\varphi(x_{k+1}), \nabla\varphi(x_{k+1})\rangle}{\langle \nabla\varphi(x_k), \nabla\varphi(x_k)\rangle} = \frac{\|\nabla\varphi(x_{k+1})\|^2}{\|\nabla\varphi(x_k)\|^2}, \tag{5.15}$$

kod Sorenson-Wolfe-ove metode [S.2], [W.2] je

$$\beta_k = \frac{\langle \nabla\varphi(x_{k+1}) - \nabla\varphi(x_k), \nabla\varphi(x_{k+1})\rangle}{\langle \nabla\varphi(x_{k+1}) - \nabla\varphi(x_k), s_{k+1}\rangle} \tag{5.16}$$

kod Daniel-ove metode [D.1] je

$$\beta_k = \frac{\langle s_k, H(x_k)\nabla\varphi(x_{k+1})\rangle}{\langle s_k, H(x_k)s_k\rangle} \tag{5.17}$$

Formule (5.8), (5.15), (5.16) i (5.17) su ekvivalentne u slučaju kada je $\varphi(x)$ konveksna kvadratna funkcija.

Treba primetiti da u metodama konjugovanih pravaca (sem Daniel-ove) ne treba računati druge izvode a da je pod određenim pretpostavkama konvergencija ipak superlinearna, što predstavlja prednost u odnosu na Cauchy-evu i Newton-ovu metodu.

PRIMER 5.5.1. Naći minimum funkcije

$$\varphi(x) = \frac{3}{2}\xi_1^2 + \frac{5}{2}\xi_2^2 - \xi_1\xi_2 - 5\xi_1 + 3, \qquad x = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$$

Polak-Ribière-Poljak-ovom metodom.

Napišimo $\varphi(x)$ u obliku (5.1). Ovde je

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a = 3, \quad \nabla\varphi(x) = \begin{bmatrix} 3\xi_1 - \xi_2 - 5 \\ -\xi_1 + 5\xi_2 \end{bmatrix}.$$

Neka je $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Imaćemo:

$$\nabla\varphi(x_0) = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0, \quad s_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Minimizacijom funkcije φ duž pravca s_0, dobijamo $\alpha_0 = 1/3$. Dakle,

$$x_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla\varphi(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}, \quad s_1 = \begin{bmatrix} 5\beta_0 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}, \text{ gde je}$$

$$\beta_0 = \frac{\langle \nabla\varphi(x_1) - \nabla\varphi(x_0), \nabla\varphi(x_1) \rangle}{\langle \nabla\varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0) \rangle} = \frac{1}{9}$$

Prema tome,

$$s_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

Minimizacijom duž pravca s_1 naalzimo $\alpha_1 = \frac{3}{4}$. Znači da je

$$x_2 = \begin{bmatrix} \frac{25}{14} \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix},$$

što je tačka globalnog minimuma $\varphi(x)$. Dakle,

$$\varphi_{min}(x) = \varphi(x_2) = -1{,}464\ldots.$$

5.6. Metode promenljive metrike

Ideja algoritama koje ćemo ovde izložiti sastoji se u aproksimaciji inverznog hesijana potrebnog za izračunavanje Newton-ovog pravca. Iterativni algoritam je takav da u tački x_k nalazi pravac s_k:

$$s_k = -H_k \nabla\varphi(x_k), \tag{6.1}$$

gde je H_k – nxn matrica koja se menja od iteracije do iteracije.

Prvi algoritam promenljive metrike dao je Davidon [D.4], 1959. Posle njega bile su predložene mnoge metode koje su se razlikovale uglavnom u načinu dobijanja matrice H_k i u načinu određivanja dužine koraka.

Davidon-ov algoritam su pojednostavili Fletcher i Powell [F.8]; u daljem ćemo tu modifikaciju zvati Davidon-Fletcher-Powell-ov algoritam.

Neka je φ: $R^n \to R$ neprekidno diferencijabilna funkcija.

ALGORITAM 5.6.1. (Davidon-Fletcher-Powell-ov algoritam)
Korak 1. Izabrati $x_0 \in R^n$, izračunati $\nabla\varphi(x_0)$. Ako je $\nabla\varphi(x_0) = 0$, STOP; inače ići na korak 2.
Korak 2. Staviti $k = 0$, staviti $H_0 = I^*$ (I – jedinična matrica reda n).
Korak 3. Staviti $s_k = -H_k \nabla\varphi(x_k)$.
Korak 4. Izračunati α_k kao rešenje problema min $\{ \varphi(x_k+\alpha s_k) \mid \alpha \geqslant 0 \}$.
Korak 5. Izračunati $\nabla\varphi(x_k+\alpha_k s_k)$.
Korak 6. Ako je $\nabla\varphi(x_k+\alpha_k s_k) = 0$, STOP; inače staviti:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k ,$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k ,$$

$$\gamma_k = \nabla\varphi(x_{k+1}) - \nabla\varphi(x_k) ,$$

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\Delta x_k (\Delta x_k)^T}{\langle \Delta x_k, \gamma_k \rangle} - \frac{H_k \gamma_k (\gamma_k)^T H_k}{\langle \gamma_k, H_k \gamma_k \rangle}$$

i ići na korak 7.
Korak 7. Zameniti k sa k+1 i ići na korak 2.

U isto vreme kada je izložena metoda promenljive metrike dokazano je da ona nalazi minimum strogo konveksne kvadratne funkcije za ne više od n iteracija, i da su u tom slučaju vektori pravaca Q-konjugovani.

Powell je dokazao konvergenciju i dao ocenu brzine konvergencije metode promenljive metrike za jednu klasu strogo konveksnih funkcijâ. Taj dokaz se bazira na sledećoj teoremi, koju navodimo bez dokaza:

TEOREMA 5.6.1. (Powell [P.11]).Neka je φ: $R^n \to R$ strogo konveksna, dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija i neka postoji konstanta $L \geqslant 0$ da za sve $x \in \{ x \in R^n \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) \}$ važi

$$\|H(x)-H(x^*)\| \leqslant L\|x-x^*\| ,$$

gde x^* minimizira φ. Tada postoje takvi brojevi $0 < \bar{m} \leqslant \bar{M} < \infty$ da je za k = 0, 1, 2, ...

$$\bar{m}\|y\|^2 \leqslant \langle y, H_k y \rangle \leqslant \bar{M}\|y\|^2 \quad \text{za svaki } y \in R^n . \ \blacklozenge$$

Iz gornjeg sledi da algoritam 5.6.1, pod uslovom da φ zadovoljava pretpostavke teoreme 5.6.1, generiše niz pravaca (s_k) sa osobinom (2.3):

$$\langle \nabla\varphi(x_k), s_k \rangle = -\langle \nabla\varphi(x_k), H_k \nabla\varphi(x_k) \rangle \leqslant -\bar{m}\|\nabla\varphi(x_k)\|^2 < 0 ,$$

za $\nabla\varphi(x_k) \neq 0$, gde je $\rho = \bar{m} > 0$. Prema tome, algoritam Davidon-Fletcher-Powell-a je pri navedenim uslovima takođe specijalan slučaj algoritma 5.2.1. Samim tim, konver-

* Izbor $H_0 = I$ nije obavezan. Za H_0 možemo uzeti bilo koju simetričnu pozitivno definitnu matricu.

gencija niza tačaka (x_k) generisanog ovim algoritmom, pod pretpostavkama teoreme 5.6.1, ka jedinstvenoj tački minimuma x^*, sledi iz teoreme 5.2.1.

Ocenu brzine konvergencije daje sledeća teorema, koju takođe navodimo bez dokaza:

TEOREMA 5.6.2. (Powell [P.11]) Neka važe pretpostavke teoreme 5.6.1. i neka je x^* tačka minimuma funkcije φ na R^n. Ako je (x_k) – beskonačan niz generisan algoritmom promenljive metrike 5.6.1, tada (x_k) konvergira ka x^* superlinearno. ♦

PRIMER 5.6.1. Naći minimum funkcije

$$\varphi(x) = \frac{3}{2}\xi_1^2 + \frac{5}{2}\xi_2^2 - \xi_1\xi_2 - 5\xi_1 + 3,\ x = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$$

Davidon-Fletcher-Powell-ovom metodom.

Neka je

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ovde je

$$\nabla\varphi(x) = \begin{bmatrix} 3\xi_1 - \xi_2 - 5 \\ -\xi_1 + 5\xi_2 \end{bmatrix}, \quad \nabla\varphi(x_0) = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ pa je } s_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Minimizacijom funkcije φ duž pravca s_0 dobijamo $\alpha_0 = 1/3$,

$$\text{pa je } x_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla\varphi(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

Dalje, prema (6.2) imaćemo

$$H_1 = H_0 + \frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_0)^T}{\langle x_1 - x_0, \nabla\varphi(x_1) - \nabla\varphi(x_0)\rangle} - \frac{H_0(\nabla\varphi(x_1) - \nabla\varphi(x_0))(\nabla\varphi(x_1) - \nabla\varphi(x_0))^T H_0}{\langle \nabla\varphi(x_1) - \nabla\varphi(x_0), H_0(\nabla\varphi(x_1) - \nabla\varphi(x_0))\rangle}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} \frac{13}{3} & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}, \text{ pa je}$$

$$s_1 = -H_1 \nabla\varphi(x_1) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Minimizacijom duž pravca s_1 nalazimo $\alpha_1 = \frac{5}{21}$.

Prema tome,

$$x_2 = \begin{bmatrix} \frac{25}{14} \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix} \quad \text{a to je upravo tačka globalnog minimuma } \varphi(x).$$

Vidimo da su pravci vektora pravaca s_0, s_1 dobijeni Davidon-Fletcher-Powell-ovom metodom identični sa pravcima vektora dobijenim Polak-Ribiére-Poljak-ovom metodom i da stoga obe metode generišu isti niz tačaka.

5.7. Bezuslovna optimizacija bez izračunavanja izvoda

Sve dosad navedene metode zahtevaju izračunavanje prvih, odnosno drugih izvoda, što svakako usložnjava računanje. U praksi se često susrećemo sa funkcijama čiji su izvodi veoma složenog oblika ili nam čak nije poznato ni•da li su one diferencijabilne. U svim takvim situacijama koriste se metode koje zahtevaju samo izračunavanje vrednosti funkcije. Ovde ćemo izložiti dve takve metode – tzv. metodu lokalnih varijacija (Baničuk, Petrov i Černousko [B.1]) i Powell-Zangwill-ovu metodu [P.9], [Z.2].

Uvešćemo sledeće oznake: neka je e_i, $i = 1, \ldots, n$ i-ti jedinični koordinatni vektor u R^n i neka je $s_1 = e_1, s_2 = -e_1, s_3 = e_2, s_4 = -e_2 \ldots, s_{2n-1} = e_n, s_{2n} = -e_n$.

ALGORITAM 5.7.1. (Baničuk-Černousko -v algoritam)

Korak 1. Naći tačku $x_0 \in R^n$ takvu da je skup

$$X(x_0) = \{ x \in R^n \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) \}$$

ograničen. Izabrati $\rho_0 > 0$. Staviti $k = 0$.

Korak 2. Staviti $\rho = \rho_k$, $x = x_k$

Korak 3. Staviti $j = 1$, $y = x$.

Korak 4. Izračunati $\varphi(x+\rho s_j)$.

Korak 5. Ako je $\varphi(x+\rho s_j) < \varphi(x)$, zameniti x sa $x+\rho s_j$ i ići na korak 4; inače ići na korak 6.

Korak 6. Ako je $j < 2n$, zameniti j sa $j+1$ i ići na korak 4; inače ići na korak 7.

Korak 7. Ako je $x \neq y$ ići na korak 3; inače ići na korak 8.

Korak 8. Staviti $x_{k+1} = y$, $\rho_{k+1} = \rho_k/2$, zameniti k sa k+1 i ići na korak 2.

TEOREMA 5.7.1. Neka je φ: $R^n \to R$ neprekidno diferencijabilna funkcija. Ako je (x_k) niz generisan algoritmom 5.7.1, tada svaka njegova tačka nagomilavanja x^* zadovoljava uslov $\nabla\varphi(x^*) = 0$.

DOKAZ: Iz kompaktnosti skupa $X(x_0)$ sledi da algoritam 5.7.1. počevši računanje od $x = x_k$ i $\rho = \rho_k$, može generisati samo konačan broj međutačaka u ciklusu između koraka 3 i 7 pre nego što pređe na izvršenje koraka 8. Zato će algoritam 5.7.1. konstruisati beskonačan niz tačaka (x_k) i odgovarajući opadajući niz brojeva (ρ_k). Osim toga, pošto je skup $X(x_o)$ kompaktan, niz (x_k) mora imati tačke nagomilavanja. Pretpostavimo da $x_k \to x^*$, $k \to \infty$, $k \in K \subseteq N$. Po konstrukciji imamo za $k = 1, 2, \ldots$

$$\varphi(x_k+\rho_{k-1}s_j) \geqslant \varphi(x_k) \quad \text{za sve} \quad j \in \{1, 2, \ldots, 2n\}\,.$$

Odavde, na osnovu Lagrange-ove teoreme, za $\theta_k^j \in [0,1]$ dobijamo:

$$\varphi(x_k+\rho_{k-1}s_j) - \varphi(x_k) = \rho_{k-1}\langle\nabla\varphi(x_k+\theta_k^j\rho_{k-1}s_j), s_j\rangle \geqslant 0 \tag{7.1}$$

za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ i svaki k.

Pošto $x_k \to x^*$ za $k \in K$ i $\rho_k \to 0$ za $k \to \infty$, zbog neprekidnosti $\nabla\varphi(x)$ iz (7.1) sledi

$$\langle\nabla\varphi(x^*), s_j\rangle \geqslant 0 \quad \text{za } j = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Iz definicije s_j zaključujemo da je $\nabla\varphi(x^*) = 0$. ♦

Pre nego što pređemo na izlaganje Powell-Zangwill-ove metode, uvedimo sledeće oznake: koordinatne pravce u R^n označimo sa $s_1^o, \ldots, s_n^o$ *. Pretpostavićemo da su pravci normalizovani na jediničnu dužinu, tj. $\|s_i^o\| = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

ALGORITAM 5.7.2. (Powell-Zangwill-ov algoritam)

Izabrati $\epsilon \in (0,1)$.

Korak 1. Naći tačku $x_o^o \in R^n$ takvu da je skup $X(x_o^o)$ ograničen. Staviti $\delta^o = 1$, Staviti $k = 0$.

Korak 2. Za $i = 1, \ldots, n$ izračunati $\alpha_i^k \in R$ tako da minimizira funkciju $\varphi(x_{i-1}^k+\alpha s_i^k)$ i staviti $x_i^k = x_{i-1}^k + \alpha_i^k s_i^k$.

Korak 3. Staviti $\lambda^k = \|x_n^k - x_o^k\|$. Ako je $\lambda^k = 0$. STOP; inače staviti $s_{n+1}^k = (x_n^k - x_o^k)/\lambda^k$, izračunati α_{n+1}^k tako da minimizira funkciju $\varphi(x_n^k+\alpha s_{n+1}^k)$ i staviti $x_o^{k+1} = x_n^k + \alpha_{n+1}^k s_{n+1}^k$.

Ako je $\|x_o^{k+1} - x_o^k\| = 0$ STOP; inače ići na korak 4.

Korak 4. Odrediti m tako da je $\alpha_m^k = \max\{\alpha_i^k \mid i = 1, \ldots, n\}$.

a) Ako je

$$\frac{\alpha_m^k\,\delta^k}{\lambda^k} \geqslant \epsilon\,.$$

staviti $s_i^{k+1} = s_i^k$ za $i \neq m$, $s_m^{k+1} = s_{n+1}^k$ i $\delta^{k+1} = (\alpha_m^k\delta^k)/\lambda^k$.

b) Ako je

$$\frac{\alpha_m^k\delta^k}{\lambda^k} < \epsilon$$

staviti $s_i^{k+1} = s_i^k$, $i = 1, \ldots, n$, $\delta^{k+1} = \delta^k$.

Zameniti k sa k+1 i ići na korak 2.

---

* Skup pravaca s_i^o, $i = 1, \ldots, n$ može biti ma koji skup linearno nezavisnih pravaca.

Osnovna ideja ove metode je da se skup pravaca „kretanja" (koji je kod metode lokalnih varijacija bio konstantan) menja u nastojanju da se postigne brže opadanje funkcije. Korak 4 algoritma 5.7.2 obezbeđuje da novi pravci budu opet linearno nezavisni. Za Powell-Zangwill-ovu metodu važi sledeća teorema:

TEOREMA 5.7.2. Neka je funkcija φ: $R^n \to R$ strogo konveksna neprekidno diferencijabilna funkcija. Tada nizovi (x_0^k), (x_1^k), ..., (x_n^k) generisani algoritmom 5.7.2. konvergiraju ka tački globalnog minimuma funkcije φ.

Dokaz ove teoreme može se naći u Zangwill [Z.2].

Pomenimo još neke od poznatijih metoda ove vrste. To su ciklična koordinatna metoda (D'Esopo [D.5], Ivanov [I.1]) i Gauss-Southwell-ova metoda (Forsythe i Wasow [F.10]).

Eksperimentalna iskustva pokazuju da je brzina konvergencije svih koordinatnih metoda približno n puta (gde je n – dimenzija problema) sporija od brzine konvergencije Cauchy-eve metode.

PRIMER 5.7.1. Powell-Zangwill-ovom metodom naći minimum funkcije

$$\varphi(x) = \frac{3}{2}\xi_1^2 + \frac{5}{2}\xi_2^2 - \xi_1\xi_2 - 5\xi_1 + 3, \quad x = (\xi_1, \xi_2) \in R^2 .$$

Neka je

$$x_0^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_1^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \delta^0 = 1, \quad \epsilon = 0{,}99 .$$

Prvo tražimo minimum funkcije φ duž pravca s_1^0:

$$\min_\alpha \varphi(x_0^0 + \alpha s_1^0) = \min_\alpha \varphi(\frac{3}{2}\alpha^2 - 5\alpha + 3) .$$

Optimalna vrednost je $\alpha_1^0 = \frac{5}{3}$. Dakle,

$$x_1^0 = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Minimizacijom duž pravca s_2^0 dobijamo $\alpha_2^0 = \frac{1}{3}$, pa je

$$x_2^0 = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} .$$

Dalje je $\lambda^0 = \|x_2^0 - x_0^0\| = \sqrt{26}/3$, pa je

$$s_3^0 = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

i $\alpha_3^0 = \frac{\sqrt{26}}{42}$, te je $x_0^1 = \begin{bmatrix} 25/14 \\ 5/14 \end{bmatrix}$.

Na osnovu kriterijuma u koraku 4 algoritma 5.7.2, u sledećoj iteraciji uzimamo neizmenjen skup pravaca: $s_1^1 = s_1^o$ i $s_2^1 = s_2^o$.

Minimizacijom φ prvo duž jednog, pa onda duž drugog pravca, dobijamo

$$x_o^1 = x_1^1 = x_2^1 = \begin{bmatrix} 25/14 \\ 5/14 \end{bmatrix}.$$

koja je, dakle, optimalna tačka.

Na kraju ovog paragrafa treba napomenuti da postoji čitav niz metoda zasnovanih na aproksimaciji gradijenta funkcije cilja i njenog hesijana pomoću konačnih razlika (videti Mifflin [M.3]).

5.8. Optimizacija funkcija jedne promenljive

U većini metoda izloženih u ovoj glavi kao i u glavama VI i VII se pri određivanju dužine koraka zahteva nalaženje minimuma funkcije φ: $R^n \to R$ duž datog pravca. Ovakav izbor dužine koraka je učinjen isključivo radi uprošćenja dokaza teoremâ konvergencije. Međutim, po cenu izvesnog usložnjenja dokazâ, u većini slučajeva se dokazi mogu izvesti i pri „liberalnijem" izboru koraka. Npr. korak α_k se može birati na sledeći način:

Neka je data tačka x_k i pravac s_k tako da je $\langle \nabla\varphi(x_k), s_k \rangle < 0$. Odrediti najmanji prirodan broj j tako da je ispunjen uslov

$$\frac{\varphi(x_k + 2^{-j}s_k) - \varphi(x_k)}{\langle 2^{-j}\nabla\varphi(x_k), s_k \rangle} \geqslant r \tag{8.1}$$

gde je $r \in (0,1/2)$ konstanta, i staviti $\alpha_k = 2^{-j}$.

O algoritmima sa ovakvim izborom korakâ čitalac može naći više u Polak [P.4], Goldstein[G.5], Kovačević [K.5]. Međutim, s obzirom da se izbor dužine korakâ u metodama koje izlažemo vrši uglavnom minimizacijom duž datog pravca, navešćemo nekoliko metoda za približno rešavanje ovog problema.

Mogu se izdvojiti tri vrste metoda za približno nalaženje minimuma funkcije jedne promenljive. Prvu grupu čine Newton-ova i njoj srodne metode (videti Goldstein [G.5]). Druga vrsta metodâ aproksimira funkciju cilja polinomom (obično reda ne većeg od tri), videti Rosenbrock [R.8]. Treću vrstu metodâ čini klasa tzv. „direktnih" metoda: Fibonacci-eva metoda i srodne metode (Avriel i Wilde [A.5], [A.6]). Primetimo da se algoritam 5.7.1 takođe može primeniti za rešavanje ovog problema. Ovde ćemo izložiti ideju polinomialne aproksimacije kao i jednu od direktnih metoda.

Najviše korišćene metode polinomialne aproksimacije su kvadratna i kubna. Detaljnije ćemo opisati ideju metode kvadratne aproksimacije za traženje minimuma t* funkcije φ: $R^n \to R$ duž zraka koji polazi iz tačke x u pravcu s.

Pretpostavimo da je skup $\{ t \geqslant 0 \mid \varphi(x+ts) \leqslant \varphi(x) \}$ kompaktan i da postoji $\epsilon > 0$ tako da je $\varphi(x+ts) < \varphi(x)$ za $t \in (0,\epsilon]$ (ukoliko ove pretpostavke nisu ispunjene može se desiti da minimum ne postoji, tj. problem nije dobro definisan). Ideja metode kvadratne aproksimacije sastoji se u sledećem: Određuju se realni brojevi takvi da je

$$(8.2) \qquad 0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \quad \text{i} \quad \varphi(x+t_1 s) > \varphi(x+t_2 s), \ \varphi(x+t_2 s) < \varphi(x+t_3 s).$$

Ovi brojevi se mogu odrediti npr. na sledeći način:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{1}{m}, \ t_3 = m,$$

gde je m odabrano tako da je $\varphi(x+(1/m)s) < \varphi(x)$, $\varphi(x+ms) > \varphi(x+(1/m)s)$; s obzirom na učinjene pretpostavke o funkciji φ takvo m postoji i može se naći pretraživanjem u konačnom broju koraka. Zatim se minimum funkcije $\varphi(x+ts)$ aproksimira minimumom kvadratnog trinoma $\phi(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$ koji prolazi kroz tačke

$$(t_1, \varphi(x+t_1 s)), (t_2, \varphi(x+t_2 s)), (t_3, \varphi(x+t_3 s)).$$

Lako je videti da su koeficijenti trinoma $\phi(t)$ rešenje sistema

$$\varphi(x+t_i s) = \alpha + \beta t_i + \gamma t_i^2 , \quad i = 1, 2, 3,$$

tj. da je tačka minimuma t^* trinoma $\phi(t)$, koja zbog uslova (8.2) postoji, data izrazom

$$t^* = \frac{1}{2} \, \frac{(t_2^2-t_3^2)\,\varphi(x+t_1 s) + (t_3^2-t_1^2)\,\varphi(x+t_2 s) + (t_1^2-t_2^2)\,\varphi(x+t_3 s)}{(t_2-t_3)\,\varphi(x+t_1 s) + (t_3-t_1)\,\varphi(x+t_2 s) + (t_1-t_2)\,\varphi(x+t_3 s)} .$$

Ukoliko je $\varphi(x+t^* s) < \varphi(x+t_2 s)$, t_2 se zamenjuje sa t^*. Ukoliko je pak $\varphi(x+t^* s) \geqslant \varphi(x+t_2 s)$ i $t^* < t_2$, t_1 se zamenjuje sa t^*, a ako je $\varphi(x+t^* s) \geqslant \varphi(x+t_2 s)$ i $t^* > t_2$, t_3 se zamenjuje sa t^*. Najzad, ako se desi da je $t^* = t_2$ onda se t_2 zamenjuje sa t_2+h, gde je h broj takav da je

$$t_1 < t_2+h < t_3 \ \text{i} \ \varphi(x+(t_2+h)s) < \varphi(x+t_2 s);$$

broj h sa traženim osobinama postoji i može se naći pretraživanjem u konačnom broju koraka ukoliko funkcija $\varphi(x+ts)$ ne dostiže minimum u t_2. Postupak se ponavlja sa novodobijenim tačkama t_1, t_2 i t_3. Računski proces se obično prekida kada je dobijen zadovoljavajući pad vrednosti funkcije φ.

Polinomialna aproksimacija je pogodna za približno nalaženje minimuma funkcija koje se mogu dovoljno dobro aproksimirati kvadratnim ili kubnim polinomom. Efikasnost ovih metoda zavisi pre svega od konkretne funkcije. Više o ovim metodama može se naći u Luenberger D. G. [L.6].

Međutim, kod tzv. direktnih metoda, koje nalaze mali interval na realnoj osi koji sadrži tačku jedinstvenog minimuma posmatrane funkcije, efikasnost je ista, bez obzira na funkciju. Jedna od takvih metoda je metoda zlatnog preseka, koju ćemo sada izložiti.

Prvih šest algoritamskih koraka metode zlatnog preseka nalaze interval $L = [a_0,b_0]$ koji sadrži tačku minimuma t^*. Sledećih šest koraka umanjuju njegovu dužinu do unapred zadate veličine ϵ i pri tome se koriste Fibonacci-jevi brojevi: $F_1 = (3-\sqrt{5})/2 \approx 0{,}38$ i $F_2 = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0{,}62$. Pretpostavljamo da je funkcija $\varphi(x+ts)$ konveksna za $t \geqslant 0$ i da problem $\min\limits_{t \geqslant 0} \varphi(x+ts)$ ima rešenje.

ALGORITAM 5.8.1. (Algoritam zlatnog preseka)

Veličine $h > 0$, $\epsilon > 0$ su zadate.

Korak 1. Izračunati $\varphi(x)$, $\varphi(x+hs)$.

Korak 2. Ako je $\varphi(x+hs) \geqslant \varphi(x)$, staviti $a_0 = 0$, $b_0 = h$ i ići na korak 7; inače ići na korak 3.

Korak 3. Staviti $k = 0$, $t_0 = 0$.

Korak 4. Staviti $t_{k+1} = t_k + h$.

Korak 5. Izračunati $\varphi(x+t_{k+1}s)$.

Korak 6. Ako je $\varphi(x+t_{k+1}s) \geqslant \varphi(x+t_k s)$, staviti $a_0 = t_{k-1}$, $b_0 = t_{k+1}$ i ići na korak 7; inače zameniti k sa k+1 i ići na korak 4.

Korak 7. Staviti $j = 0$

Korak 8. Staviti $L_j = b_j - a_j$.

Korak 9. Ako je $L_j \leqslant \epsilon$, ići na korak 12; inače ići na korak 10.

Korak 10. Staviti $v_j = a_j + F_1 L_j$, $w_j = a_j + F_2 L_j$.

Korak 11. Ako je $\varphi(x+v_j s) < \varphi(x+w_j s)$ staviti $a_{j+1} = a_j$ i $b_{j+1} = w_j$, zameniti j sa j+1 i ići na korak 8; inače staviti $a_{j+1} = v_j$, $b_{j+1} = b_j$, zameniti j sa j+1 i ići na korak 8.

Korak 12. Staviti

$$t^* = \frac{a_j + b_j}{2}, \quad \text{STOP.}$$

Da gornji algoritam zaista nalazi interval dužine ne veće od ϵ u kome se dostiže minimum funkcije (pod navedenim pretpostavkama) lako se dokazuje: interval $[a_0,b_0]$ sadrži tačku minimuma, i, ukoliko tu tačku sadrži $[a_j,b_j]$, sadržaće je i $[a_{j+1},b_{j+1}]$. S obzirom da $|b_j - a_j| \to 0$, $j \to \infty$, vidimo da se posle konačno mnogo koraka takav interval zaista dobija.

ZADACI:

1. Cauchy-evom metodom i modifikovanom Newton-ovom metodom naći minimum funkcije

$$\varphi(x) = \frac{\xi_1^2}{2} + \frac{\xi_2^4}{20}.$$

Uzeti $x_0 = [1/10 \quad 1/10]^T$.

2. Rosenbrock-ova funkcija $\varphi(x) = 100\,[\xi_2 - \xi_1^2]^2 + (1 - \xi_1)^2$ predstavlja klasičnu test-funkciju za svaki algoritam bezuslovne optimizacije. Ona postiže jedinstveni minimum u $x^* = [1 \quad 1]^T$. Za nalaženje minimuma $\varphi(x)$ primeniti:
a) Cauchy-ev algoritam; b) modifikovani Newton-ov algoritam.

3. Kako glasi Newton-ov obrazac za funkciju $\varphi(x) = (-6 - \xi_1 - \xi_2)^2 + (2 - 3\xi_1 - \xi_1\xi_2)^2$ ako je $x_0 = [-4 \quad 6]^T$? Izračunati sledeće dve tačke dobijene Newton-ovom metodom.

4. Naći bar jedan sistem međusobno konjugovanih pravaca u odnosu na sledeće matrice:

a) $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$, b) $Q_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

5. Pretpostavimo da su s_1, s_2 i s_1, s_3 konjugovani pravci u odnosu na 3x3 pozitivno definitnu simetričnu matricu Q. Hoće li s_2 i s_3 takođe biti konjugovani u odnosu na Q?

6. Naći minimum funkcije $\varphi(x) = \langle b,x\rangle + \frac{1}{2}\langle x,Qx\rangle$, gde je

$$b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

primenom Polak-Ribiére-Poljak-ove metode.

7. Naći minimum Rosenbrock-ove funkcije (pogledati zadatak 2) primenom Fletcher-Reeves-ove metode. Uzeti $x_0 = [2 \quad 2]^T$.

8. Data je početna matrica $H_0 = I$. Kako će glasiti matrica H_1 po Davidon-Fletcher-Powell-ovom algoritmu ako je $\varphi(x) = \xi_1^2 + 2\xi_2^2$, a $x_0 = [1 \quad 1]^T$?

9. Pokazati da su pravci $s_1 = [0{,}453 \quad -0{,}892]^T$ i $s_2 = [0{,}608 \quad -0{,}794]^T$ korišćeni kod minimizacije Rosenbrock-ove funkcije u tački $x = [-0{,}702 \quad 0{,}462]^T$ konjugovani.

10. Naći minimum funkcije $\varphi(x) = 4(\xi_1 - 2)^2 + (\xi_2 - 6)^2$ primenom:
a) Powell-Zangwill-ove metode; b) Baničuk-Černousko-vljeve metode.
Uzeti $x_0 = [8 \quad 9]^T$.

11. Naći minimum funkcije $f(t) = t^2 - t$, počev od tačke $t = 3$, pomoću metode zlatnog preseka.

12. Naći minimum funkcije $\varphi(x)$ u pravcu najbržeg spuštanja polazeći od tačke $x_0 = [2 \quad 2]^T$ za $\varphi(x) = \xi_1^2 + 25\xi_2^2$.

13. Neka je $f: [0,1] \to R$ neprekidna funkcija i neka svoj minimum dostiže u jedinstvenoj tački $\xi \in [0,1]$. Dokazati da je funkcija f nerastuća na $[0,\xi]$ i neopadajuća na $[\xi,1]$.

14. Dokazati teoremu analognu teoremi 5.2.1 pod pretpostavkom da se u algoritnu 5.2.1 korak α_k bira po formuli (8.1).

GLAVA VI

METODE ZA REŠAVANJE PROBLEMA NELINEARNOG PROGRAMIRANJA POMOĆU BEZUSLOVNE OPTIMIZACIJE

6.1. Uvod

Razmatramo problem nelinearnog programiranja

(1.1) $\quad \min \{\varphi(x) \mid x \in X\}, \quad X = \{x \in R^n \mid f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m\}.$

Osnovna ideja metodâ koje ćemo ovde izložiti jeste zamenjivanje problema sa ograničenjima (1.1) nizom problema minimizacije bez ograničenja. Pod određenim uslovima će tačke nagomilavanja niza rešenja dobijenih problema biti rešenja problema (1.1).

Metode o kojima ćemo govoriti mogu se podeliti na: metode Lagrange-ovih množilaca, metode spoljašnjih kaznenih funkcija, metode unutrašnjih kaznenih funkcija i metode mešovitih kaznenih funkcija.

Metoda Lagrange-ovih množilaca je preteča svih metoda koje su izložene u ovom poglavlju. O ovoj metodi čitalac može naći više u Falk [F.1], Roode [R.5], Powell [P.10], Hestenes [H.4], Fletcher [F.6], Haarhoff i Buys [H.1].

Metode spoljašnjih kaznenih funkcija (Courant [C.6], Ablow i Brigham [A.1], Camp [C.1], Butler i Martin [B.9], Pietrzykowski [P.3], Fiacco i McCormick [F.4], Beltrami [B.4], Zangwill [Z.1]) se karakterišu time da generišu niz tačaka koje su izvan dopustivog skupa, ali njegove tačke nagomilavanja pripadaju dopustivom skupu.

Metode unutrašnjih kaznenih funkcija (Frisch [F.12], Carrol [C.2], Fiacco i McCormick [F.4], Pomentale [P.8], Kowalik [K.7], Lootsma [L.4], Fletcher i McCann [F.7]) u toku računskog procesa generišu samo dopustive tačke.

Kod metoda mešovitih kaznenih funkcija (Fiacco i McCormick [F.2], Lootsma [L.4]) u toku minimizacije neka od ograničenja su zadovoljena a druga nisu; tačke nagomilavanja dobijenog niza tačaka predstavljaju dopustiva rešenja.

6.2. Metoda Lagrange-ovih množilaca

Neka je dat problem nelinearnog programiranja

(2.1) $\quad \min \{\varphi(x) \mid x \in X\}$

gde je φ: $R^n \to R$ neprekidno diferencijabilna funkcija. Neka je x^* tačka lokalnog minimuma funkcije φ. Ukoliko je $x^* \in \mathring{X}$ onda, kao što je poznato, važi $\nabla\varphi(x^*) = 0$. Stoga se sve tačke lokalnog minimuma funkcije φ koje pripadaju unutrašnjosti skupa X nalaze među rešenjima sistema nelinearnih jednačina

$$\nabla\varphi(x) = 0.$$

Dakle, rešavanje problema

$$\min \{ \varphi(x) \mid x \in \mathring{X} \}$$

može se zameniti rešavanjem sistema nelinearnih jednačina (s tim što se na kraju mora ispitati koja od dobijenih rešenja zaista predstavljaju tačke lokalnog minimuma). Bilo bi od interesa da se rešavanje problema (2.1) zameni na sličan način rešavanjem sistema nelinearnih jednačina. U slučaju kada je skup X definisan sa

$$X = \{ x \in R^n \mid f_1(x) = 0, \ldots, f_m(x) = 0 \}, \quad m < n$$

takvo svođenje je mogućno pod uslovima preciziranim u sledećoj teoremi poznatoj iz matematičke analize:

TEOREMA 6.2.1. (Teorema o Lagrange-ovim množiocima). Neka su funkcije φ: $R^n \to R$ i f_i: $R^n \to R$, $i = 1, \ldots, m$, $m < n$, neprekidno diferencijabilne i neka je za svaki $x \in X$ rang Jacobi-eve matrice $[\partial f_i(x)/\partial x_j]$ jednak m. Ako je tačka $x^* \in X$ lokalno rešenje problema (2.1) tada postoje brojevi $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ tako da je

$$\nabla\varphi(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = 0 .$$

Dokaz ove teoreme se može naći npr. u Aljančić [A.2], Fihtengoljc [F.5]. Brojevi $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ nazivaju se Lagrange-ovim množiocima.

Metoda Lagrange-ovih množilaca se može kratko opisati na sledeći način: za problem

$$\text{(2.2)} \qquad \min \{ \varphi(x) \mid x \in X \}, \quad X = \{ x \in R^n \mid f_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m \}$$

se formira tzv. Lagrange-ova funkcija (uporediti sa II glavom):

$$F(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) .$$

Zatim se parcijalni izvodi funkcije F po svim promenljivim izjednače sa nulom. Dobija se sistem od n+m nelinearnih jednačina sa n+m nepoznatih:

$$\text{(2.3)} \qquad \begin{aligned} &\nabla\varphi(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x) = 0 \\ &f_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Prema teoremi 6.2.1. sva lokalna rešenja problema (2.2) se (pod navedenim uslovima) nalaze među rešenjima dobijenog sistema. Razume se, treba proveriti koja rešenja ovog sistema predstavljaju lokalna rešenja problema (2.2).

PRIMER 6.2.1. Naći

$$\min \{ 3x^2 + 2y^2 \mid x+4y = 5 \}\,.$$

Funkcije $\varphi(x,y) = 3x^2 + 2y^2$ i $f(x,y) = x+4y-5$ imaju neprekidne prve parcijalne izvode za svaki $(x,y) \in R^2$. Jacobi-eva matrica je $[1 \quad 4]$ i njen rang je 1, dakle jednak je broju ograničenja. Prema tome, možemo primeniti metodu Lagrange-ovih množilaca. Lagrange-ova funkcija je

$$F(x,y,\lambda) = 3x^2 + 2y^2 + \lambda(x+4y-5).$$

Uslovi (2.3) su

$$\frac{\partial F(x,y,\lambda)}{\partial x} = 6x + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F(x,y,\lambda)}{\partial y} = 4y + 4\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = x + 4y - 5 = 0$$

Odavde je $x = -\lambda/6$, $y = -\lambda$. Zamenom x i y u poslednjoj jednačini dobijamo $\lambda = -6/5$. Prema tome, tačka $(x,y) = (0.2,\ 1.2)$ je jedina tačka koja zadovoljava neophodne uslove optimalnosti. Lako je videti da je ona zaista rešenje postavljenog problema.

Da bismo primenili Lagrange-ovu metodu množilaca i na problem nelinearnog programiranja

(2.4) $\min \{ \varphi(x) \mid x \in X \}$

$$X = \{ x \in R^n \mid f_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m_1;\ f_i(x) \leqslant 0,\ i = m_1+1, \ldots, m \}$$

ograničenja u obliku nejednakosti treba transformisati u ograničenja – jednakosti uvođenjem odgovarajućih dopunskih promenljivih. Zadatak nelinearnog programiranja tada dobija sledeći oblik:

(2.5) $\min \{ \varphi(x) \mid x \in X \}$

$$X = \{ x \in R^n \mid f_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m_1;\ f_i(x) + v_i^2 = 0,\ i = m_1+1, \ldots, m \}.$$

Primetimo da su problemi (2.4) i (2.5) ekvivalentni. Na problem (2.5) se, pod ranijim pretpostavkama, može primeniti Lagrange-ova metoda množilaca. Lagrange-ova funkcija je sada

$$F(x,w,v) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{m_1} w_i f_i(x) + \sum_{i=m_1+1}^{m} w_i(f_i(x) + v_i^2),$$

gde su w_i, $i = 1, \ldots, m$ Lagrange-ovi množioci.

PRIMER 6.2.2. Naći

$$\min \{ x+y+z \mid x+y = 0, x^2+y^2+z^2 \leqslant 4 \}$$

Transformisani problem glasi

$$\min \{ x+y+z \mid x+y = 0, x^2+y^2+z^2+v^2 = 4 \}.$$

Lagrange-ova funkcija je

$$F(x,y,z,w_1,w_2,v) = x+y+z+w_1(x+y)+w_2(x^2+y^2+z^2+v^2-4).$$

Dalje je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + w_1 + 2xw_2 = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + w_1 + 2yw_2 = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 1 + 2zw_2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 2vw_2 = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial w_1} = x + y = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial w_2} = x^2+y^2+z^2+v^2-4 = 0$$

Iz $2vw_2 = 0$ sledi $v = 0$ ili $w_2 = 0$. Za $w_2 = 0$ sistem je nesaglasan. Za $v = 0$ i $w_2 \neq 0$ lako se dobija da je $x = y = 0$. Odavde je

$$w_1 = -1, x = 0, y = 0, z = \pm 2, w_2 = \pm 1/4, v = 0.$$

Minimum se dostiže u tački $(0,0,-2)$, tj. $\varphi_{min} = \varphi(0,0,-2) = -2$. (Uslov o rangu Jacobi--eve matrice je ispunjen jer je rang matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2x & 2y & 2z & 2v \end{bmatrix}$$

na skupu dopustivih tačaka jednak 2).

Ideja izložene metode je jednostavna. Međutim, u praksi je ova metoda gotovo neupotrebljiva. Naime, primenom Lagrange-ove metode se problem optimizacije svodi na problem rešavanja sistema nelinearnih jednačina, što je problem gotovo iste težine. Pritom se broj promenljivih uvećava.

Uopštenjem Lagrange-ove metode su se inače bavili mnogi matematičari, kao npr. Dorn [D.7], Everett [E.1], Falk [F.1], Takahashi [T.1], Zwart [Z.6]. U novije vreme postoji više uopštenja na probleme sa ograničenjima u obliku nejednakosti, sa dodatnim uslovom da x pripada konveksnom kompaktnom skupu (videti Benders [B.5], Falk [F.1] i Roode [R.5]) i na probleme sa ograničenjima u obliku jednakosti (videti Powell [P.10], Lootsma [L.4], Hestenes [H.4], Fletcher [F.6], Haarhoff i Buys [H.1]). Više o ovim metodama može se naći u Lootsma [L.5].

6.3. Metode spoljašnjih kaznenih funkcija

Razmatramo sledeći zadatak nelinearnog programiranja:

(3.1) $\min \{\varphi(x) \mid x \in X\}, \quad X = \{x \in R^n \mid f_i(x) \leqslant 0, i = 1, \ldots, m\}$

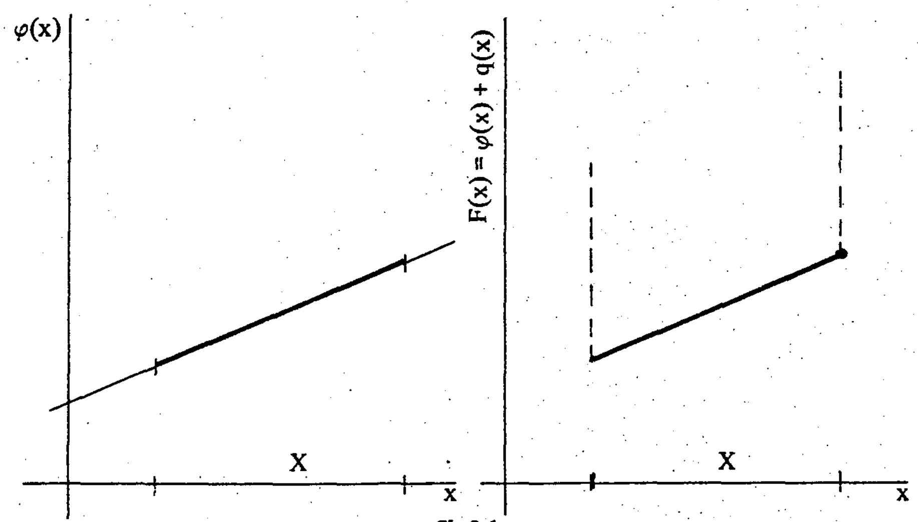
gde su $\varphi(x)$ i $f_1(x)$, ..., $f_m(x)$ konveksne funkcije na R^n. (Primetimo da, na osnovu teorema 1.4.5 i 1.4.6 iz konveksnosti, a odatle i neprekidnosti, funkcijâ $f_1(x)$, ..., $f_m(x)$ sledi zatvorenost i konveksnost dopustivog skupa).

Osnovna ideja metodâ spoljašnjih kaznenih funkcija sastoji se u izmeni funkcije cilja $\varphi(x)$ na takav način da ona za svaki izlazak iz dopustive oblasti X pretrpi beskonačno veliku „kaznu“. Znači, „kazneni dodatak“ bi trebalo da bude sledećeg oblika:

$$q(x) = \begin{cases} 0, & x \in X \\ +\infty, & x \notin X. \end{cases}$$

Proširena funkcija cilja bi glasila (sl. 3.1):

$$F(x) = \varphi(x) + q(x)$$



Sl. 3.1

Jasno je da će x^* biti optimalno za zadatak (3.1) tada i samo tada kada je x^* rešenje zadatka bez ograničenja

$$\min \{F(x) \mid x \in R^n\}.$$

Metode spoljašnjih kaznenih funkcija se sastoje upravo u aproksimaciji funkcije q(x) nizom kaznenih funkcija koje su jednake nuli na skupu X, a „približavaju“ se funkciji q(x). Definišimo sada niz funkcija koji će ispunjavati gornje zahteve:

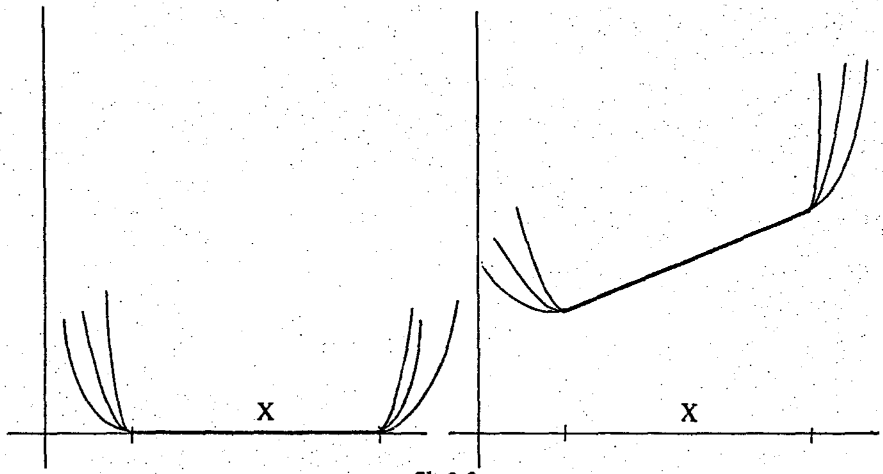
DEFINICIJA 6.3.1. Niz funkcija $P_k: R^n \to R$, $k = 1, 2, \ldots$ nazivamo niz spoljašnjih kaznenih funkcija za skup X ako i samo ako su za svako $k = 1, 2, \ldots$ ispunjeni uslovi

1. $P_k(x) = 0, \quad x \in X$
2. $P_k(x) > 0, \quad x \notin X$
3. $P_{k+1}(x) > P_k(x), \quad x \notin X$
4. $P_k(x) \to +\infty,\ k \to \infty, \quad x \notin X$

Zadatku (3.1) ćemo pridružiti niz zadataka bezuslovne optimizacije:

$$\text{(3.2)} \qquad \min\{F_k(x) = \varphi(x) + P_k(x) \mid x \in R^n\},\ k = 1, 2, \ldots$$

Geometrijska interpretacija niza funkcija $(P_k(x))$, odnosno niza zadataka (3.2) data je na sl. 3.2.



Sl. 3.2

Očigledno je da postoji mnogo načina na koje možemo konstruisati niz spoljašnjih kaznenih funkcija sa gornjim svojstvima. Lako je proveriti da je niz

$$P_k(x) = t_k \sum_{i=1}^{m} [\max\{0, f_i(x)\}]^{\beta}, \quad k = 1, 2, \ldots, \beta > 0$$

niz spoljašnjih kaznenih funkcija ukoliko je

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots$$

i $t_k \to +\infty$ kad $k \to \infty$. Za $\beta = 2$ dobija se jedan od najčešće korišćenih oblika niza spoljašnjih kaznenih funkcija. Ukoliko su funkcije $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ konveksne i $\beta \geqslant 1$, konveksne će biti i funkcije $P_k(x)$. Osim toga, ako su $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ diferencijabilne funkcije i $\beta > 1$ tada će i funkcije $P_k(x)$ biti diferencijabilne.

Metoda spoljašnjih kaznenih funkcija data je sledećim algoritmom:

ALGORITAM 6.3.1. Izabrati niz spoljašnjih kaznenih funkcija $P_k: R^n \to R$, $k = 1, 2, \ldots$

Korak 1. Izabrati tačku $x_0 \in R^n$. Staviti $k = 0$.
Korak 2. Zameniti k sa k+1.
Korak 3. Naći takvu tačku $x_k \in R^n$ da je

$$F_k(x_k) = \min \{ F_k(x) = \varphi(x) + P_k(x) \mid x \in R^n \} .$$

Korak 4. Ispitati da li $x_k \in X$. Ako jeste STOP; rešenje je x_k; inače ići na korak 2.

Uz određene pretpostavke (koje ćemo dalje precizirati) tačke nagomilavanja niza bezuslovnih minimuma (x_k) predstavljaju rešenje problema (3.1). U dokazima ćemo koristiti sledeću lemu:

LEMA 6.3.1. Neka je ψ: $R^n \to R$ konveksna funkcija, E konveksan zatvoren skup i neka postoji $x_0 \in E$ tako da je skup $K = \{ x \in E \mid \psi(x) \leqslant \psi(x_0) \}$ ograničen. Tada je za svaki $c \in R$ skup $K_c = \{ x \in E \mid \psi(x) \leqslant c \}$ ograničen.

DOKAZ: Dovoljno je razmotriti slučaj $\psi(x_0) < c$. Pretpostavimo da je za neki takav broj c skup K_c neograničen. Neka je skup K sadržan u kugli S poluprečnika r sa centrom u x_0. Budući da je K_c neograničen skup postoji niz tačaka (x_k), $x_k \in K_c$, $k \in N$, takav da $\|x_k\| \to +\infty$ kad $k \to \infty$. Neka je niz (y_k) definisan sa

$$y_k = x_0 + 2r \frac{x_k - x_0}{\|x_k - x_0\|} \quad , \; k = 1, 2, \ldots$$

Niz (y_k) je ograničen; neka je $\bar{y}$ tačka nagomilavanja tog niza i neka $y_k \to \bar{y}$, $k \in L \subseteq N$, $k \to \infty$. Kako je

$$y_k = (1 - \frac{2r}{\|x_k - x_0\|}) \; x \; + \; \frac{2r}{\|x_k - x_0\|} x_k$$

i za dovoljno veliko k je $2r/\|x_k - x_0\| < 1$, iz konveksnosti skupa E i funkcije ψ sledi $y_k \in E$ i

$$\psi(y_k) \leqslant (1 - \frac{2r}{\|x_k - x_0\|}) \psi(x_0) + \frac{2r}{\|x_k - x_0\|} \psi(x_k) \leqslant$$

$$\leqslant (1 - \frac{2r}{\|x_k - x_0\|}) \psi(x_0) + \frac{2r}{\|x_k - x_0\|} c \, .$$

Stavljajući $k \to \infty$, $k \in L$ biće, s obzirom na neprekidnost funkcije ψ

$$\psi(\bar{y}) \leqslant \psi(x_0) \, .$$

Kako je skup E zatvoren, $\bar{y} \in E$ i, dakle, $\bar{y} \in K$. Međutim,

$$\|y_k - x_0\| = 2r$$

pa je i

$$\|\bar{y} - x_0\| = 2r > r \, ,$$

što se protivi pretpostavci da je skup K sadržan u kugli S. ♦

Sledeća teorema precizira uslove pod kojima je algoritam 6.3.1. dobro definisan.

TEOREMA 6.3.1. Neka su $\varphi(x)$ i $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ u problemu (3.1) konveksne funkcije, neka je $X \neq \emptyset$ i neka je $P_k\colon R^n \to R$, $k = 1,2, \ldots$ niz konveksnih spoljašnjih kaznenih funkcija. Neka je tačka x_o kojom počinje algoritam 6.3.1 takva da je skup

$$\{ x \in R^n \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_o) \}$$

ograničen. Tada

(i) problem u koraku 3 algoritma 6.3.1 ima rešenje za svako $k \in N$

(ii) ukoliko x_k, rešenje problema u koraku 3 algoritma 6.3.1, pripada skupu X onda je x_k optimalno rešenje problema (3.1)

(iii) niz (x_k) je ograničen.

DOKAZ: (i) Dovoljno je dokazati da je za svako k skup

$$\{ x \in R^n \mid F_k(x) \leqslant F_k(x_o) \}$$

ograničen. Neka $z \in X$; s obzirom da je skup $\{ x \in R^n \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_o) \}$ ograničen, prema lemi 6.3.1 je i skup $\{ x \in R^n \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(z) \}$ ograničen. Funkcija $F_k(x) = \varphi(x) + P_k(x)$ je konveksna kao zbir konveksnih funkcija i važi

$$F_k(x) \geqslant \varphi(x), \quad F_k(z) = \varphi(z) .$$

Stoga je

$$\{ x \in R^n \mid F_k(x) \leqslant F_k(z) \} \subseteq \{ x \in R^n \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(z) \}$$

te je skup $\{ x \in R^n \mid F_k(x) \leqslant F_k(z) \}$ ograničen. Prema lemi 6.3.1 ograničen je i skup $\{ x \in R^n \mid F_k(x) \leqslant F_k(x_o) \}$, što je i trebalo pokazati.

(ii) Neka $x_k \in X$. Tada je za svaki $x \in R^n$ ispunjeno

$$F_k(x) \geqslant F_k(x_k) = \varphi(x_k) .$$

Specijalno, za $x \in X$ imamo

$$\varphi(x) = F_k(x) \geqslant \varphi(x_k)$$

pa je x_k optimalno rešenje problema (3.1).

(iii) Neka je z proizvoljna tačka iz X. Kao u (i) zaključujemo da je svaki skup

$$Y_k = \{ x \in R^n \mid F_k(x) \leqslant F_k(z) \}$$

sadržan u skupu $\{ x \in R^n \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(z) \}$, a ovaj skup je ograničen. Kako $x_k \in Y_k$, niz (x_k) je ograničen. ♦

Sledeća teorema daje uslove za konvergenciju metoda spoljašnjih kaznenih funkcija.

TEOREMA 6.3.2. Neka su $\varphi(x)$ i $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ u problemu (3.1) konveksne funkcije, neka je $X \neq \emptyset$ i neka je P_k: $R^n \to R$, $k = 1, 2, \ldots$ niz konveksnih spoljašnjih funkcija. Neka je (x_k) niz tačaka generisan algoritmom 6.3.1, pri čemu je x_o tačka takva da je skup $\{ x \in R^n \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_o) \}$ ograničen.

Tada je niz (x_k) ili konačan i poslednja tačka je optimalno rešenje problema (3.1), ili beskonačan a svaka tačka nagomilavanja je optimalno rešenje problema (3.1).

DOKAZ: Prema prethodnoj teoremi niz (x_k) može biti konačan samo ako poslednja tačka tog niza predstavlja optimalno rešenje problema (3.1). Pretpostavimo, dakle, da je niz (x_k) beskonačan. Neka je x^* tačka nagomilavanja niza (x_k). Dokažimo najpre da x^* pripada X. Kako je X zatvoren skup, iz $x^* \notin X$ bi sledilo da postoji zatvorena kugla U s centrom x^* takva da je $U \cap X = \emptyset$. Neka je

$$\mu_k = \min_{x \in U} P_k(x) .$$

S obzirom na kompaktnost skupa U i definiciju funkcijâ $P_k(x)$ je $\mu_k > 0$, a s obzirom na svojstvo 3 u definiciji 6.3.1. imamo da

$$\mu_k \to +\infty, \quad k \to \infty .$$

Neka je $z \in X$ i neka je k_o prirodan broj takav da je

$$\varphi(x) + \mu_k > \varphi(z) \text{ za } x \in U \text{ i } k > k_o .$$

Uzimajući $k > k_o$ i tako da je $x_k \in U$ dobijamo

$$\varphi(x_k) + P_k(x_k) \geq \varphi(x_k) + \mu_k > \varphi(z) = \varphi(z) + P_k(z)$$

što protivreči načinu biranja x_k, opisanom u koraku 3 algoritma 6.3.1. Dakle, $x^* \in X$.

Pretpostavimo da x^* nije optimalna tačka, tj. da postoji tačka $\hat{x} \in X$ takva da je $\varphi(\hat{x}) < \varphi(x^*)$. Neka je V okolina tačke x^* takva da za svaki $x \in V$ važi

$$\varphi(x) > \varphi(\hat{x}) .$$

Neka je k takav prirodan broj da $x_k \in V$. Tada je

$$F_k(x_k) = \varphi(x_k) + P_k(x_k) \geq \varphi(x_k) > \varphi(\hat{x}) = \varphi(\hat{x}) + P_k(\hat{x}) = F_k(\hat{x})$$

što se protivi načinu biranja tačke x_k (korak 3 algoritma 6.3.1.). ♦

N a p o m e n a: U dokazu teoreme 6.3.2. korišćena je samo neprekidnost funkcija $\varphi(x)$ i $P_k(x)$. Pretpostavka o konveksnosti $\varphi(x)$ i $P_k(x)$ kao i pretpostavka o ograničenosti skupa $\{ x \in R^n \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_o) \}$ obezbeđuju da niz (x_k) bude dobro definisan. Prema tome, tvrđenja teoreme 6.3.2. ostaju na snazi ako se pretpostavi samo neprekidnost funkcija $\varphi(x)$ i $P_k(x)$ i postojanje (globalnih) minimuma problema

$$\min_{x \in R^n} F_k(x)$$

za svaki prirodan broj k.

Na kraju rezimirajmo osnovne osobine metoda spoljašnjih kaznenih funkcija. Prednosti su sledeće:

– početna tačka u algoritmu 6.3.1 ne mora biti dopustiva;

– metode se mogu primeniti na probleme sa ograničenjima u obliku jednakosti i nejednakosti.

Osnovni nedostatak je što se na svakom koraku rešava problem minimizacije bez ograničenja, koji se, uopšte uzev, može samo približno rešiti.

PRIMER 6.3.1. Naći min $\{x^2 - 6x \mid x \leq 2\}$

Lako se vidi da je rešenje $x^* = 2$. Pokažimo kako se do njega može doći primenom metode spoljašnjih kaznenih funkcija. Neka je

$$P_k(x) = t_k\,[\max(0, x-2)]^2,$$

$$F_k(x) = x^2 - 6x + t_k\,[\max(0, x-2)]^2$$

gde je (t_k) monotono rastući niz pozitivnih brojeva koji teži $+\infty$. Funkcija $F_k(x)$ je konveksna i neprekidno diferencijabilna za svako k, pa se minimum može naći diferenciranjem. Imamo

$$\frac{dF_k}{dx} = 2x - 6 + 2t_k\,[\max(0, x-2)]\,.$$

Rešavanjem jednačine

$$\frac{dF_k}{dx} = 0$$

dobija se

$$x_k = \frac{4t_k + 6}{2t_k + 2}\,.$$

Kada $k \to \infty$, $x_k \to 2$, pa je $x^* = 2$, $\varphi_{min} = \varphi(2) = -8$.

6.4. Metode unutrašnjih kaznenih funkcija

Razmatramo problem nelinearnog programiranja

$$(4.1)\qquad \min\{\varphi(x) \mid x \in X\},\quad X = \{x \in R^n \mid f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \dots, m\}\,.$$

Ideja metodâ unutrašnjih kaznenih funkcija ili metodâ barijera za rešavanje ovog problema slična je osnovnoj ideji metodâ spoljašnjih kaznenih funkcija: i ovde se kaznena funkcija q(x) aproksimira nizom funkcija koje se približavaju ka q(x), ali iz unutrašnjosti dopustivog skupa X. Drugim rečima, kazneni dodatak ovde predstavlja barijeru protiv izlaska iz dopustive oblasti.

DEFINICIJA 6.4.1. Niz funkcija B_k: $\mathring{X} \to R$, $k = 1, 2, \ldots$ nazivamo niz unutrašnjih kaznenih funkcija ili niz barijernih funkcija za skup X ako i samo ako za svako $k = 1, 2, \ldots$ važi

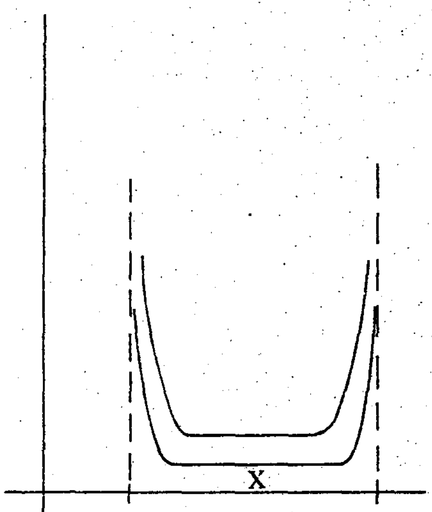
1. $0 < B_{k+1}(x) < B_k(x)$ za $x \in \mathring{X}$
2. $B_k(x) \to 0$, $k \to \infty$ za $x \in \mathring{X}$
3. $B_k(x_j) \to \infty$, $j \to \infty$ za ma koji niz (x_j) takav da je $x_j \in \mathring{X}$, $j = 1, 2, \ldots$ i $x_j \to x^* \in \partial X$, $j \to \infty$.

gde je $\mathring{X}$ unutrašnjost skupa X a ∂X njegova granica*.

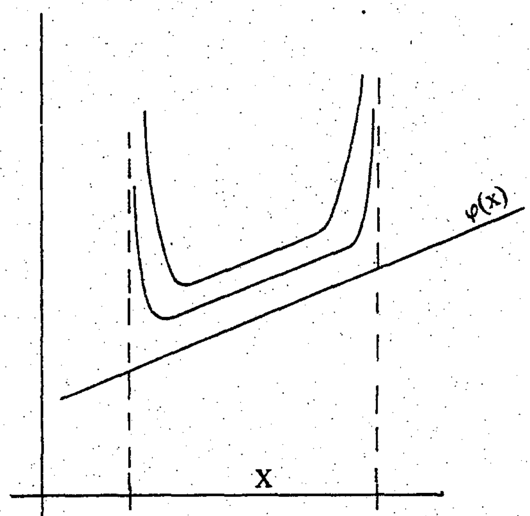
Pomoću niza barijernih funkcija problem (4.1) ćemo zameniti nizom problema minimizacije na otvorenom skupu $\mathring{X}$:

$$\min \{ \psi_k(x) = \varphi(x) + B_k(x) \mid x \in \mathring{X} \}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

Geometrijska interpretacija niza barijernih funkcija $(B_k(x))$, odnosno niza problema (4.2) data je na sl. 4.1 i sl. 4.2, respektivno:



Sl. 4.1



Sl. 4.2

Očigledno je da i ovde postoji mnogo načina za izbor niza barijernih funkcija sa navedenim osobinama. Zbog uloge koju te funkcije imaju važno je da one budu neprekidne, odnosno diferencijabilne, da bi se mogla primeniti neka od metoda za bezuslovnu optimizaciju. U slučaju kada su funkcije $f_1, \ldots, f_m$ konveksne i zadovoljavaju Slater-ov uslov važi (teorema 2.1.4)

$$\mathring{X} = \{ x \in R^n \mid f_i(x) < 0, i = 1, \ldots, m \}$$

$$\partial X = \{ x \in R^n \mid f_i(x) = 0 \text{ za bar jedno } i \in \{1, \ldots, m\} \}$$

* U literaturi se često uslov 1. izostavlja, što povlači izvesna usložnjavanja u dokazima koji slede.

i $\overline{\mathring{X}} = X$, pa je lako proveriti da je niz

$$B_k(x) = -\frac{1}{t_k} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{f_i(x)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

niz unutrašnjih kaznenih funkcija, ukoliko je

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots$$

i $t_k \to \infty$, kad $k \to \infty$. Primetimo da su funkcije $B_k(x)$ konveksne (videti teoremu 1.4.4). Ako je i $\varphi(x)$ konveksna funkcija onda je niz problema minimizacije (4.2) niz problema konveksnog programiranja.

Metoda unutrašnjih kaznenih funkcija data je sledećim algoritmom:

ALGORITAM 6.4.1. Izabrati niz barijernih funkcija $B_k\colon \mathring{X} \to R$, $k = 1, 2, \ldots$

Korak 1. Naći tačku $x_0 \in \mathring{X}$. Staviti $k = 0$.
Korak 2. Zameniti k sa $k + 1$.
Korak 3. Naći takvu tačku $x_k \in \mathring{X}$ da je

$$\psi_k(x_k) = \min \{\psi_k(x) = \varphi(x) + B_k(x) \mid x \in \mathring{X}\}$$

Korak 4. Ići na korak 2.

Za rešavanje problema u koraku 3 algoritma 6.4.1 mogu se primeniti metode bezuslovne optimizacije jer funkcije $B_k(x)$ onemogućuju „izlazak" iz skupa X. Primetimo da se u praksi u ovaj algoritam obično ugrađuje korak u kome se proverava da li je $\nabla\varphi(x_k)=0$ i ukoliko jeste postupak se zaustavlja.

Sledeća teorema daje uslove pod kojima je algoritam 6.4.1. dobro definisan.

TEOREMA 6.4.1. Neka je u problemu (4.1) $x_0 \in \mathring{X}$ tačka takva da je skup $\{ x \in X \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$ ograničen, neka su funkcije φ, $f_1, \ldots, f_m$ konveksne na R^n i neka je $B_k\colon \mathring{X} \to R$, $k = 1, 2, \ldots$ niz konveksnih barijernih funkcija. Tada

(i) Problem u koraku 3 algoritma 6.4.1. ima rešenje za svako $k \in N$.
(ii) Niz (x_k) je ograničen.

DOKAZ: (i) Funkcija $\psi_k(x) = \varphi(x) + B_k(x)$ je konveksna kao zbir konveksnih funkcija. S obzirom da je skup $\{ x \in X \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$ ograničen, a $B_k(x) > 0$ za $x \in \mathring{X}$ sledi da je funkcija $\psi_k(x)$ ograničena odozdo na $\mathring{X}$. Stoga postoji

$$\lambda = \inf_{x \in \mathring{X}} \psi_k(x)$$

Pokažimo da se ovaj infimum i postiže. Neka je (y_j) niz tačakâ iz $\mathring{X}$ takav da $\psi_k(y_j) \to \lambda$, $j \to \infty$. Prema lemi 6.3.1. skup

$$\{ x \in X \mid \varphi(x) \leq \lambda+1 \}$$

je ograničen. S obzirom da je $B_k(x) > 0$ za svako $x \in \mathring{X}$, ograničen je i skup

$$\{ x \in \mathring{X} \mid \psi_k(x) \leq \lambda+1 \}.$$

Stoga je niz (y_j) ograničen. Neka je $\bar{y}$ tačka nagomilavanja ovog niza i neka

$$y_j \to \bar{y}, j \to \infty, j \in L.$$

Dokažimo da $\bar{y}$ pripada $\mathring{X}$. Zaista, ako bi bilo $\bar{y} \in \partial X$ onda bi bilo

$$B_k(y_j) \to +\infty,\ j \to \infty,\ j \in L,$$

što je nemogućno. Kako je $\psi_k(x)$ neprekidna u tački $\bar{y}$ (videti teoremu 1.4.6) imamo

$$\psi_k(\bar{y}) = \lambda,$$

što je i trebalo dokazati.

(ii) Skup $A = \{ x \in X \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)+1 \}$ je neprazan i prema lemi 6.3.1, ograničen. Za k dovoljno veliko je

$$B_k(x_0) < 1,$$

pa je

$$\varphi(x_k) < \psi_k(x_k) \leq \psi_k(x_0) < \varphi(x_0) + 1$$

odakle sledi da $x_k \in A$. ♦

Sledeća teorema daje uslove za konvergenciju metode unutrašnjih kaznenih funkcija.

TEOREMA 6.4.2. Neka je $x_0 \in \mathring{X}$ tačka takva da je skup $\{ x \in X \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0) \}$ ograničen, neka su funkcije φ i $f_1, \ldots, f_m$ u problemu (4.1) konveksne i neka je $B_k: \mathring{X} \to R$, $k = 1, 2, \ldots$ niz konveksnih barijernih funkcija. Neka je (x_k) niz tačaka generisan algoritmom 6.4.1. Tada
(i) Niz (x_k) ima tačaka nagomilavanja.
(ii) Svaka tačka nagomilavanja niza (x_k) jeste optimalno rešenje problema (4.1).

DOKAZ: (i) Prema prethodnoj teoremi, niz (x_k) je ograničen, pa postoji bar jedna tačka nagomilavanja.

(ii) Neka je x^* tačka nagomilavanja niza (x_k) i neka

$$x_k \to x^*,\ k \to \infty, k \in L.$$

S obzirom da za svako k važi $x_k \in \mathring{X} \subseteq X$, biće $x^* \in X$, jer je X zatvoren skup. Pretpostavimo da x^* nije optimalno rešenje problema (4.1), tj. da postoji tačka $\bar{x} \in X$ takva da je

$$\varphi(\bar{x}) < \varphi(x^*).$$

Pošto je φ neprekidna u $\bar{x}$ i pošto je $\bar{\mathring{X}} = X$ postojaće tačka $\tilde{x} \in \mathring{X}$ takva da je $\varphi(\tilde{x}) < \varphi(x^*)$. Neka je

$$\eta = \varphi(x^*) - \varphi(\tilde{x})$$

i neka je $k \in L$ toliko veliko da je

$$|\varphi(x_k) - \varphi(x^*)| < \eta/2 \quad \text{i} \quad B_k(\tilde{x}) < \eta/2 .$$

Tada je

$$\varphi(x_k) > \varphi(x^*) - \eta/2 = \varphi(\tilde{x}) + \eta/2 ,$$

te je

$$\varphi(\tilde{x}) + B_k(\tilde{x}) < \varphi(\tilde{x}) + \eta/2 < \varphi(x_k) < \varphi(x_k) + B_k(x_k)$$

što je u kontradikciji sa načinom biranja x_k opisanom u koraku 3 algoritma 6.4.1. ♦

Za razliku od metode spoljašnjih kaznenih funkcija, metoda unutrašnjih kaznenih funkcija generiše niz dopustivih tačaka. Međutim, ona zahteva da je unutrašnjost dopustivog skupa X neprazna i da početna tačka x_0 pripada unutrašnjosti skupa X. Složenost određivanja početne tačke otežava primenu ove metode.

PRIMER 6.4.1. Naći

$$\min \{ 3x/5 - 2 \mid 2 - x \leqslant 0 \} .$$

Optimalna tačka je očigledno $x^* = 2$. Pokažimo kako do nje možemo doći primenom metode barijernih funkcija.

Neka je niz barijernih funkcija $B_k(x)$ dat sa

$$B_k(x) = -\frac{1}{t_k}\frac{1}{2-x} , \; k = 1, 2, \ldots ; x > 2$$

gde je (t_k) neograničen monotono rastući niz pozitivnih brojeva. Tada je

$$\psi_k(x) = \frac{3x}{5} - 2 - \frac{1}{t_k}\frac{1}{2-x} ;$$

ovde je

$$\mathring{X} = \{ x \mid x > 2 \} .$$

Kako je funkcija $\psi_k(x)$ diferencijabilna, optimalno rešenje možemo naći diferenciranjem:

$$\frac{d\psi_k}{dx} = \frac{3}{5} - \frac{1}{t_k}\frac{1}{(2-x)^2}$$

pa iz

$$\frac{d\psi_k}{dx} = 0$$

dobijamo $x_k = 2 + \sqrt{5/(3t_k)}$. Stavljajući $k \to \infty$, nalazimo $x_k \to x^* = 2.$*

* U primerima 6.3.1 i 6.4.1 izbor početne tačke x_0 ne igra nikakvu ulogu u daljim razmatranjima jer se minimizacija u koraku 3 algoritama 6.3.1 i 6.4.1 vrši analitički (a ne približnim metodama, što je inače u primenama redovan slučaj).

6.5. Metode mešovitih kaznenih funkcija

U prethodna dva odeljka izložili smo prednosti i nedostatke metoda spoljašnjih i metoda unutrašnjih kaznenih funkcija. Videli smo da su za neke probleme metode unutrašnjih kaznenih funkcija neprimenljive (kada je $\mathring{X} = \emptyset$), a da je osnovni nedostatak metoda spoljašnjih kaznenih funkcija da generišu niz tačaka koje ne pripadaju dopustivom skupu. Kada je iz praktičnih razloga potrebno da su neka ograničenja zadovoljena sve vreme korisno je primeniti algoritam kombinovan od algoritama unutrašnjih i spoljašnjih kaznenih funkcija. Taj će algoritam obezbediti da su neka ograničenja zadovoljena u toku celog računskog procesa, dok će ostala biti zadovoljena tek u granici. Kao i ranije, posmatramo problem

(5.1) $$\min\{\varphi(x) \mid x \in X\}, \quad X = \{x \in R^n \mid f_i(x) \leqslant 0, i = 1, \ldots, m\}.$$

Definišimo sada niz mešovitih kaznenih funkcija. Smatraćemo da je skup indeksâ ograničenja $I = \{1, \ldots, m\}$ podeljen u dva disjunktna neprazna podskupa I_1 i I_2. Niz mešovitih kaznenih funkcija je tada sledećeg oblika:

$$M_k(x) = P_k(x) + B_k(x), \; k = 1, 2, \ldots$$

Funkcije $P_k(x)$ i $B_k(x)$ imaju osobine analogne osobinama datim u definicijama 6.3.1 i 6.4.1, respektivno. Razlika je samo u tome što je funkcija $P_k(x)$ definisana u odnosu na skup X_1,

$$X_1 = \{x \in R^n \mid f_i(x) \leqslant 0, i \in I_1\}$$

a funkcija $B_k(x)$ je definisana u odnosu na skup X_2, gde je

$$X_2 = \{x \in R^n \mid f_i(x) \leqslant 0, i \in I_2\}.$$

Oblast definisanosti mešovite kaznene funkcije je dakle skup $\mathring{X}_2$. Pretpostavimo da je izbor skupova I_1 i I_2 takav da je $\mathring{X}_2 \neq \emptyset$.

Algoritam metoda mešovitih kaznenih funkcija je analogan prethodnim algoritmima kaznenih funkcija.

ALGORITAM 6.5.1. Izabrati niz spoljašnjih kaznenih funkcija $P_k\colon R^n \to R$ i niz unutrašnjih kaznenih funkcija $B_k\colon \mathring{X}_2 \to R$, $k = 1, 2, \ldots$

Korak 1. Naći tačku $x_0 \in \mathring{X}_2$. Staviti $k = 0$.

Korak 2. Zameniti k sa $k+1$.

Korak 3. Naći takvu tačku $x_k \in \mathring{X}_2$ da je

$$G_k(x_k) = \min\{G_k(x) = \varphi(x) + M_k(x) \mid x \in \mathring{X}_2\}.$$

Ići na korak 2.

Teoremu o konvergenciji ove metode dali su Fiacco i McCormick 1968. godine. Ona glasi:

TEOREMA 6.5.1. Ako su funkcije $\varphi(x)$ i $f_i(x), \ldots, f_m(x)$ konveksne, skup $X_1 \cap \mathring{X}_2$ neprazan a dopustivi skup X je kompaktan, tada
(i) Za svako $k \in N$ postoji tačka $x_k \in \mathring{X}_2$ koja minimizira $G_k(x)$ na $\mathring{X}_2$.
(ii) Svaka tačka nagomilavanja niza (x_k) je optimalno rešenje problema (5.1).

Dokaz se izvodi analogno dokazima prethodnih dvaju teorema o konvergenciji i može se naći u [F.4].

Kod metodâ mešovitih kaznenih funkcija (kao i kod metodâ unutrašnjih kaznenih funkcija) je za započinjanje računskog procesa potrebno imati tačku $x_0 \in \mathring{X}_2$ (odnosno $x_0 \in \mathring{X}$). Opisaćemo postupak za nalaženje takve tačke koji su predložili Fiacco i McCormick.

Pretpostavimo da su funkcije $f_i(x)$, $i \in I_2$ konveksne i da ispunjavaju Slater-ov uslov. Tada je (videti teoremu 2.1.4)

$$\mathring{X}_2 = \{x \in R^n \mid f_i(x) < 0, i \in I_2\}.$$

Neka je data tačka x_0 koja ne zadovoljava sve navedene nejednakosti. Razmotrimo skupove

$$S = \{s \in I_2 \mid f_s(x_0) \geqslant 0\} \quad \text{i} \quad T = \{t \in I_2 \mid f_t(x_0) < 0\}$$

Neka $q \in S$. Rešavanjem problema

$$\min f_q(x) \text{ za } x \in \{x \in R^n \mid f_t(x) \leqslant 0, t \in T\}$$

metodom unutrašnjih kaznenih funkcija (pri čemu je x_0 početna tačka) u konačnom broju koraka će se dobiti tačka y_0 za koju je $f_q(y_0) < 0$ i $f_t(y_0) < 0$, $t \in T$. Opisani postupak ponavljamo, smanjujući svaki put broj ograničenjâ koja nisu zadovoljena bar za jedan. (Primetimo da se u početku postupka može desiti da je $T = \emptyset$; za prvi problem se u tom slučaju može npr. uzeti $\min f_1(x)$ za $x \in R^n$).

Na kraju, konstatujmo da efikasnost svih metoda kaznenih funkcija zavisi pre svega od izbora niza kaznenih funkcija i od efikasnosti primenjene metode za bezuslovnu optimizaciju „proširene" funkcije cilja. Najefikasnije metode bezuslovne optimizacije su metode konjugovanih gradijenata i promenljive metrike, za koje je vrlo bitna dobra uslovljenost hesijana. Međutim, zbog osobina koje treba da zadovolji niz kaznenih funkcija za veliko k je hesijan obično loše uslovljen. Ova nepogodnost razmatrana je poslednjih godina, pa je predloženo više modifikacija kaznenih funkcija (Luenberger D.G. [L.6], Avriel M. [A.7]).

Napomenimo još da za metode kaznenih funkcija ne postoje ocene brzine konvergencije i da se zaključci o efikasnosti uglavnom baziraju na eksperimentalnom iskustvu.

ZADACI:

1. Neka je (x_k) niz tačaka generisan algoritmom 6.3.1. Pokazati da je niz $(\varphi(x_k))$ monotono nerastući.

2. Neka je niz (x_k) generisan algoritmom 6.4.1. Pokazati da je niz $(\varphi(x_k))$ monotono opadajući.

3. Naći vrednosti x_1 i x_2 koje minimiziraju funkciju $\varphi(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1$ i zadovoljavaju uslov $2x_2 - x_1 = 12$.

4. Pokazati da se skup stacionarnih tačaka funkcije $\varphi(x) = x_1^2 + x_2^2$ uz ograničenje $x_1 + x_2^2 - 5 = 0$ sastoji iz dvaju tačaka minimuma i jedne tačke maksimuma.

5. Naći najkraće rastojanje od tačke $x_0 = (1, 0)$ do krive $4x_1 - x_2^2 = 0$: a) direktnom eliminacijom jedne od promenljivih i b) Lagrange-ovom metodom. Da li se dobija isti odgovor u oba slučaja?

6. Naći minimum funkcije $\varphi(x) = x_1x_2, x = (x_1, x_2) \in R^2$, pri ograničenju $x_1^2+x_2^2-25\leqslant 0$.

7. Naći $\min \{ 4x_1^2 + 5x_2^2 \mid 2x_1 + 3x_2 - 6 = 0 \}$.

8. Naći dimenzije zatvorenog cilindričnog rezervoara date zapremine V koji ima minimalnu površinu P.

9. Naći $\min \{ x_2^2 - 2x_1 - x_1^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - 1 \leqslant 0 \}$.

10. Naći $\min \{ x_1 + x_2 + x_3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$.

11. Rešiti sledeće probleme sa ograničenjima korišćenjem metoda kaznenih funkcija:

a) $\min (x^3-6x^2+11x+z)$ uz uslove

$$\begin{aligned} x^2+y^2-z^2 &\leqslant 0\ , \\ x^2+y^2+z^2 &\geqslant 4\ , \\ z &\leqslant 5\ , \\ x\geqslant 0, y&\geqslant 0, z\geqslant 0; \end{aligned}$$

b) $\min [(x-y)^2 + (y-z)^4]$ uz ograničenje $x + xy^2 + z^4 = 3$.

12. Za problem nelinearnog programiranja oblika $\min \{ \varphi(x) \mid f_i(x) = 0, i = 1, ..., m \}$ definiše se spoljašna kaznena funkcija na sledeći način:

$$F(x, t_k) = \varphi(x) + t_k \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)|^{\beta}\ , \quad \beta \geqslant 1 - \text{konstanta}.$$

a) Primeniti metodu spoljašnjih kaznenih funkcija na problem:

$$\min \{ \frac{1}{2} \langle x,Qx\rangle + \alpha\langle b,x\rangle \mid \sum_{i=1}^{n} b_ix_i = 0, x \in R^n \}\ ,$$

gde je Q nesingularna simetrična matrica takva da je $\langle x,Qx\rangle > 0$ za sve $x \neq 0$ za koje je $\sum_{i=1}^{n} b_ix_i = 0$. Vektor $b \neq 0$ i broj $\alpha > 0$ su dati.

b) Neka je $t_k = (k+1)/2$ i $\beta = 2$. Pokazati da je niz minimuma (x_k) definisan sa

$$x_k = \frac{-\alpha Q^{-1} b}{1 + (k+1) \langle b, Q^{-1} b \rangle} .$$

13. Naći min $\{ 4x^2 + 5y^2 \mid 2x + 3y = 6 \}$ korišćenjem spoljašnje kaznene funkcije iz zadatka 12.

GLAVA VII

METODE ZA DIREKTNO REŠAVANJE PROBLEMA NELINEARNOG PROGRAMIRANJA

U ovoj glavi ćemo razmatrati problem oblika

$$\min \{ \varphi(x) \mid x \in X \}$$

$$X = \{ x \in R^n \mid \langle a_i, x \rangle \leqslant b_i, i = 1, ..., m; f_i(x) \leqslant 0, i = 1, ..., p \}$$

gde su φ, f_i, $i = 1, ..., p$, neprekidno diferencijabilne funkcije. Ograničenja smo iz praktičnih razloga podelili na linearna (prvih m) i nelinearna. Ukoliko nema nelinearnih ograničenja, tj. $p = 0$, govorimo o problemu sa linearnim ograničenjima. Navešćemo dve metode za probleme sa linearnim ograničenjima i jednu za opšti slučaj. Metode su oblika

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k, \quad k = 0, 1, 2, ... ,$$

gde je $s_k \in R^n$ pravac a $\alpha_k \geqslant 0$ korak takav da je $\varphi(x_k+\alpha_k s_k) < \varphi(x_k)$ i $x_{k+1} \in X$. Metode ovog oblika nazivaju se metode mogućih pravaca (methods of feasible directions) ukoliko je za svako k pravac s_k moguć, tj. takav da $x_k+\alpha s_k \in X$ za svako $0 \leqslant \alpha < \beta$ i β dovoljno malo i ako je uz to ispunjen uslov $\langle \nabla\varphi(x_k), s_k \rangle < 0$. Drugim rečima, „kretanjem" duž pravca s_k ne napuštamo odmah skup X i duž tog pravca funkcija cilja φ lokalno opada. Jasno je da je pri određivanju skupa mogućih pravaca u tački x_k dovoljno uzeti u obzir samo ograničenja aktivna u x_k.

Radi jednostavnijeg izlaganja u daljem ćemo pretpostaviti da je α_k rešenje problema

$$\min \{ \varphi(x_k+\alpha s_k) \mid \alpha \geqslant 0, x_k + t\alpha s_k \in X, 0 \leqslant t \leqslant 1 \}.$$

Ukoliko je α_k izabrano na ovaj način sledi da su sve tačke između x_k i x_{k+1} dopustive.

Metode mogućih pravaca su predmet mnogih članaka i monografijâ (Zoutendijk [Z.4], Zangwill [Z.3], Polak [P.4]). Proučavanje ovih metoda je složenije od proučavanja metodâ za bezuslovnu optimizaciju zbog prisustva ograničenjâ. Naime, nije dovoljno obezbediti da bude za svako k

$$\langle s_k, \nabla\varphi(x_k) \rangle \leqslant -\rho \|\nabla\varphi(x_k)\|^2 \, *$$

---

* Uporediti sa glavom V.

jer se može desiti da za svako k ovaj uslov bude zadovoljen a da niz (x_k) generisan metodom mogućih pravaca konvergira ka tački koja nije stacionarna, što se vidi iz sledećeg primera: Neka je dat problem

$$\min \{3\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 \mid (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in X\}$$
$$X = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^2 \mid \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \xi_3 \geq 0, \xi_3 \leq 100\}.$$

Neka je $x_0 = (1,0,0)$ i neka je

$$s_k = (-1,+1,0) \quad \text{za k parno}$$
$$s_k = (+1,-2,0) \quad \text{za k neparno}$$

(α_k ćemo, kao što je ranije rečeno, birati minimizacijom). Generisani niz tačaka je

$$x_k = (1/2^k, \ 0, \ 0) \quad \text{za k parno,}$$
$$x_k = (0, \ 1/2^k, \ 0) \quad \text{za k neparno.}$$

Lako je proveriti da je za svako k

$$\langle \nabla\varphi(x_k), s_k \rangle = -1 = -\frac{1}{14}\|\nabla\varphi(x_k)\|^2 .$$

Međutim, $x_k \to (0,0,0)$, $k \to \infty$, a tačka $(0,0,0)$ nije stacionarna.

Ova pojava se naziva „cik-cak kretanjem" (zigzagging) a prouzrokovana je time što ograničenja „prisiljavaju" korak α_k da teži nuli. Pri konstruisanju metodâ mora se voditi računa da se ova pojava izbegne. Kod nekih metoda to se postiže uzimanjem u obzir svih ograničenja pri određivanju pravca s_k (a ne samo aktivnih); kod drugih se pak to postiže uzimanjem u obzir aktivnih i „skoro aktivnih" ograničenja. Primer za prvi način izbegavanja cik-cak kretanja je Frank-Wolfe-ova metoda, opisana u odeljku 7.1; primer za drugi način je Zoutendijk-ova metoda koja je opisana u odeljku 7.4. Druge načine izbegavanja „cik-cak kretanja" čitalac može naći u Ritter [R.2], Goldfarb [G.6], Kovačević [K.6], Vujčić [V.3].

7.1. Frank-Wolfe-ova metoda

Metodu su zajednički predložili Frank i Wolfe [F.11]; primenjuje se za rešavanje problema sa linearnim ograničenjima, tj. problema

$$(1.1) \qquad \min \{\varphi(x) \mid x \in X\}, \quad X = \{x \in R^n \mid \langle a_i, x\rangle \leq b_i, \ i = 1, \ldots, m\},$$

gde je φ: $R^n \to R$ neprekidno diferencijabilna funkcija a skup X je ograničen i neprazan.

ALGORITAM 7.1.1.
Korak 1: Izabrati $x_0 \in X$. Staviti $k = 0$.
Korak 2: Naći ekstremnu tačku skupa X koja je optimalno rešenje problema

$$\min \{\langle \nabla\varphi(x_k), y\rangle \mid \langle a_i, y\rangle \leq b_i, \ i = 1, \ldots, m\}.$$

Neka je y_k dobijeno rešenje: staviti $s_k = y_k - x_k$.
Korak 3: Ukoliko je $\langle s_k, \nabla\varphi(x_k)\rangle = 0$. STOP; u suprotnom rešiti problem

$$\min \{ \varphi(x_k + \alpha s_k) \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \}.$$

Neka je α_k rešenje tog problema.

Korak 4: Staviti $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$, zameniti k sa k+1 i ići na korak 2.

P r i m e d b a: S obzirom da je X ograničen i neprazan skup, problem linearnog programiranja iz koraka 2 uvek ima optimalno rešenje koje je ekstremna tačka skupa X, te je algoritam dobro definisan. Takva tačka se npr. dobija primenom simpleks metode.

Jasno je da algoritam 7.1.1. definiše jednu metodu mogućih pravaca. Sledeća teorema utvrđuje neke osobine ove metode.

TEOREMA 7.1.1. Neka je (x_k) niz generisan algoritmom 7.1.1. Tada važi

(i) Za svako k, $x_k \in X$

(ii) Za svako k, $\varphi(x_{k+1}) < \varphi(x_k)$

(iii) Ako je $\langle s_k, \nabla\varphi(x_k) \rangle = 0$, tada je tačka x_k stacionarna.

DOKAZ: (i) Kako je $s_k = y_k - x_k$ biće

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k = \alpha_k y_k + (1-\alpha_k) x_k \in X$$

jer $x_k \in X$, $y_k \in X$, $0 \leqslant \alpha_k \leqslant 1$, a X je konveksan skup.

(ii) S obzirom da je tačka x_k dopustiva, a tačka y_k optimalna za problem linearnog programiranja iz koraka 2, vidimo da je

$$\langle s_k, \nabla\varphi(x_k) \rangle = \langle y_k - x_k, \nabla\varphi(x_k) \rangle \leqslant 0 .$$

Ukoliko je $\langle s_k, \nabla\varphi(x_k) \rangle = 0$ algoritam staje, tj. x_{k+1} nije definisano. U suprotnom iz $\langle s_k, \nabla\varphi(x_k) \rangle < 0$ na osnovu Taylor-ove formule i načina biranja α_k sledi tvrđenje.

(iii) S obzirom da je y_k optimalno rešenje problema iz koraka 2, sledi da je za svako y takvo da je

$$\langle a_i, y \rangle \leqslant b_i \,, \; i = 1, \dots, m$$

ispunjeno

$$\langle \nabla\varphi(x_k), y \rangle \geqslant \langle \nabla\varphi(x_k), y_k \rangle = \langle \nabla\varphi(x_k), x_k \rangle$$

To znači da je i x_k optimalno rešenje problema linearnog programiranja iz koraka 2. Na osnovu teoreme dualnosti (teorema 3.2.1 (iii)) postoje $\lambda_i \leqslant 0$, $i = 1, \dots, m$, takvi da je

$$\nabla\varphi(x_k) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$$

pri čemu je $\quad \lambda_i (\langle a_i, x_k \rangle - b_i) = 0, \; i = 1, \dots, m$,

tj. u tački x_k su ispunjeni Kuhn-Tucker-ovi uslovi. ♦

TEOREMA 7.1.2. Neka je (x_k) niz generisan algoritmom 7.1.1. Ukoliko je (x_k) konačan niz, poslednja tačka je stacionarna. U suprotnom svaka tačka nagomilavanja niza (x_k) je stacionarna tačka.

DOKAZ: Prvi deo tvrđenja sledi iz teoreme 7.1.1. Neka je niz (x_k) beskonačan i neka je z proizvoljna tačka nagomilavanja niza (x_k). Pretpostavimo da z nije stacionarna tačka. Neka su $z_1, \dots, z_r$ ekstremne tačke skupa X koje su optimalna rešenja problema linearnog programiranja

(1.2) $$\min \{ \langle \nabla\varphi(z), y \rangle \mid y \in X \} .$$

S obzirom da z nije stacionarna tačka, na osnovu prethodne teoreme postoji $\eta < 0$ tako da je

$$\langle z_i - z, \nabla\varphi(z) \rangle \leqslant \eta, \; i = 1, \dots, r .$$

Neka je (x_k), $k \in K \subseteq N$ podniz koji konvergira ka z. S obzirom da su $z_1, \dots, z_r$ optimalna rešenja problema (1.2) i da je funkcija $\langle \nabla\varphi(x), y \rangle$ neprekidna, postoji okolina V tačke z tako da je u svakoj tački $x \in V$ bar jedna od tačaka $z_1, \dots, z_r$ optimalno rešenje problema

(1.3) $$\min \{ \langle \nabla\varphi(x), y \rangle \mid y \in X \} ,$$

i da uz to nijedna ekstremna tačka skupa X različita od $z_1, \dots, z_r$ nije optimalno rešenje problema (1.3). Neka je $k_0 \in N$ takvo da $x_k \in V$ za $k \geqslant k_0$ i $k \in K$. Pošto $x_k \to z$, $k \to \infty$, $k \in K$, postojaće $k_1 > k_0$, $k_1 \in N$, tako da za $k \geqslant k_1$, $k \in K$, važi

$$\langle z_i - x_k, \nabla\varphi(x_k) \rangle \leqslant \eta/2 , \quad i = 1, \dots, r.$$

S obzirom na korak 2 algoritma 7.1.1. biće

$$\langle s_k, \nabla\varphi(x_k) \rangle \leqslant \eta/2, \qquad k \geqslant k_1, k \in K .$$

Budući da za svako $k \in N$, $\|s_k\|$ ne premaša dijametar kompaktnog skupa X, iz niza (s_k), $k \in K$ se može izdvojiti konvergentan podniz (s_k), $k \in K_1 \subseteq K$. Neka $s_k \to s$, $k \to \infty$, $k \in K_1$. Tada je

$$\langle s, \nabla\varphi(z) \rangle \leqslant \eta/2$$

te postoji τ, $0 < \tau \leqslant 1$ tako da je

$$\varphi(z + \tau s) = \varphi(z) - \zeta, \qquad \zeta > 0 .$$

Kako $x_k + \tau s_k \to z + \tau s$, $k \to \infty$, $k \in K_1$, za $k \in K_1$ dovoljno veliko biće

$$\varphi(x_k + \tau s_k) < \varphi(z) - \frac{2}{3}\zeta \quad \text{i} \quad \varphi(x_k) > \varphi(z) - \frac{1}{3}\zeta .$$

Dalje je

$$\varphi(x_{k+1}) \leqslant \varphi(x_k + \tau s_k) < \varphi(z) - \frac{2}{3}\zeta < \varphi(x_k) - \frac{1}{3}\zeta$$

pa je

(1.4) $$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{3}\zeta, \quad k \in K_1, \quad k \text{ dovoljno veliko.}$$

Kako je niz $(\varphi(x_k))$, $k \in N$, opadajući, iz (1.4) sledi da $\varphi(x_k) \to -\infty$ kada $k \to \infty$, što je nemoguće, jer je skup X kompaktan a φ neprekidna funkcija. ♦

Napomena 1: U koraku 2 algoritma 7.1.1. može se za y_k uzeti ma koje optimalno rešenje problema

$$\min\{\langle\nabla\varphi(x_k), y\rangle \mid y\in X\};$$

dokaz teoreme 7.1.2. se samo neznatno usložnjava. Mi smo se ograničili na slučaj kada je to optimalno rešenje istovremeno i ekstremna tačka jer većina metodâ za rešavanje problema linearnog programiranja (videti glavu IV) daje baš takva rešenja.

Napomena 2: Ukoliko X nije kompaktan skup može se desiti da problem linearnog programiranja iz koraka 2 algoritma 7.1.1. nema konačno rešenje. Tada se za s_k obično uzima ma koji pravac takav da $x_k+ts_k\in X$ za svako $t\geqslant 0$ i $\langle\nabla\varphi(x_k), x_k+ts_k\rangle\to-\infty$, $t\to+\infty$. Međutim, ukoliko se pri generisanju niza (x_k) beskonačno puta primeni ovo pravilo, može se desiti da niz (x_k) konvergira ka nestacionarnoj tački. Za ilustraciju navodimo sledeći

PRIMER 7.1.1. Neka je dat problem

$$\min\{x^2+4y^2+(z-1)^2 \mid (x,y,z)\in X\}$$

$$X=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x+y\leqslant 100,\ y-x\geqslant -100,\ z\geqslant 0\}$$

i neka je početna tačka (4,1,0). Pomoćni problem linearnog programiranja ovde je

$$\min\{8u+8v-2w \mid (u,v,w)\in X\}.$$

Ako za pravac s_0 uzmemo $(-1,-1,0)$ vidimo da je tačka $(4-t,1-t,0)$ dopustiva za svako $t\geqslant 0$ i da funkcija $8(4-t)+8(1-t)-2\cdot 0\to-\infty$, $t\to+\infty$. Minimizacijom duž pravca s_0 za novu tačku dobijamo $(12/5, -3/5, 0)$. Novi pomoćni problem linearnog programiranja je ovde

$$\min\{\frac{24}{5}u-\frac{24}{5}v-2w \mid (u,v,w)\in X\}.$$

Za pravac s_1 uzimamo $(-1,1,0)$. Opet se može proveriti da je tačka $(\frac{12}{5}-t, -\frac{3}{5}+t, 0)$ dopustiva za svako $t\geqslant 0$ i da je funkcija

$$\frac{24}{5}(\frac{12}{5}-t)-\frac{24}{5}(-\frac{3}{5}+t)-2\cdot 0$$

neograničena odozdo. Minimizacijom duž pravca s_1 dobijamo tačku $(36/25, 9/25, 0)$. Birajući dalje $s_k=(-1,(-1)^{k+1},0)$ imamo uvek sličnu situaciju u pogledu neograničenosti funkcije cilja odgovarajućeg problema linearnog programiranja. Generisani niz tačaka je

$$(4(\frac{3}{5})^k, (-1)^k(\frac{3}{5})^k, 0),\quad k=0,1,2,\ldots$$

Ovaj niz očigledno konvergira ka tački (0,0,0) koja nije stacionarna.

Sledeći primer pokazuje rad algoritma 7.1.1. u slučaju kada su ispunjeni svi uslovi za njegovu primenu.

PRIMER 7.1.2. Neka je dat problem

$$\min \{2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 - 20\xi_1 - 20\xi_2 + 100 \mid (\xi_1, \xi_2) \in X\}$$

$$X = \{(\xi_1, \xi_2) \in R^2 \mid \xi_1 - \xi_2 \leqslant 2,\ \xi_1 - \xi_2 \geqslant -2,\ \xi_1 + \xi_2 \leqslant 4,\ \xi_1 \geqslant 0,\ \xi_2 \geqslant 0\}.$$

Rešiti dati problem Frank-Wolfe-ovom metodom polazeći od tačke (2,0).

k = 0: Problem linearnog programiranja iz koraka 2 je

$$\min \{-12\eta_1 - 20\eta_2 \mid (\eta_1, \eta_2) \in X\}$$

i rešenje je $y_0 = (1,3)$. Odavde je $s_0 = y_0 - x_0 = (-1,3)$. Kako je $\langle s_0, \nabla\varphi(x_0)\rangle = -48 < 0$, tačka x_0 nije stacionarna. Korak α_0 dobija se rešavanjem problema

$$\min \{2(2-\alpha)^2 + 2(3\alpha)^2 - 20(2-\alpha) - 20(3\alpha) + 100 \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\};$$

rešenje je $\alpha_0 = 1$. Nova tačka je $x_1 = (1,3)$.

k = 1: Problem linearnog programiranja je sada

$$\min \{-16\eta_1 - 20\eta_2 \mid (\eta_1, \eta_2) \in X\}$$

a rešenje je $y_1 = (3,1)$. Dalje je $s_1 = y_1 - x_1 = (2,-2)$. Kako je $\langle s_1, \nabla\varphi(x_1)\rangle = -16 < 0$, tačka x_1 nije stacionarna. Rešavanjem problema

$$\min \{2(1+2\alpha)^2 + 2(3-2\alpha)^2 - 20(1+2\alpha) - 20(3-2\alpha) + 100 \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$$

dobija se $\alpha_1 = 1/2$. Nova tačka je $x_2 = (2,2)$

k = 2: Problem linearnog programiranja

$$\min \{-12\eta_1 - 12\eta_2 \mid (\eta_1, \eta_2) \in X\}$$

ima beskonačno mnogo rešenja. Tačka $y_2 = (1,3)$ je rešenje a i ekstremna tačka skupa X. Vektor pravca je sada $s_2 = y_2 - x_2 = (-1,1)$. Kako je $\langle s_2, \nabla\varphi(x_2)\rangle = 0$,na osnovu teoreme 7.1.1. zaključujemo da je tačka x_2 stacionarna.

7.2. Zangwill-ova lema

Neka je dat problem

(2.1) $$\min \{\varphi(x) \mid x \in X\},\quad X = \{x \in R^n \mid f_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \dots, q\}$$

gde su φ, f_i, $i = 1, \dots, q$, neprekidno diferencijabilne funkcije. (Ovde ne postoji potreba za razlikovanjem linearnih i nelinearnih ograničenjâ; neke od funkcijâ f_i, $i = 1, \dots, q$ mogu biti linearne). Sledeća lema utvrđuje jednu zajedničku osobinu svih metoda mogućih pravaca i može se koristiti pri dokazivanju konvergencije za razne metode (videti Ašić i Kovačević [A.4]).

TEOREMA 7.2.1. (Zangwill [Z.3]) Neka je (x_k) niz tačaka generisan nekom metodom mogućih pravaca primenjenom na rešavanje problema (2.1). Neka je z ma koja tačka nagomilavanja niza (x_k) i neka za bilo koji podniz (x_k), $k \in K$ koji konvergira ka z postoji beskonačan skup $K' \subseteq K$ takav da

$$s_k \to s,\ k \to \infty,\ k \in K',$$

pri čemu je

$$\langle \nabla\varphi(z), s \rangle < 0 .$$

Tada niz (x_k), $k \in N$ konvergira ka z.

DOKAZ: S obzirom na uslove teoreme postoji okolina tačke z, $B_\eta = \{ u \mid \|u-z\| < \eta \}$ i $c < 0$, tako da je za svaki $x \in B_\eta$ i $x_k \in B_\eta$

$$\langle \nabla\varphi(x), s_k \rangle \leq c < 0 .$$

Ako to ne bi bio slučaj, onda bi za svaki $n \in N$ postojala tačka $y_n \in B_{1/n}$ i član niza $x_k \in B_{1/n}$, $k > n$, tako da važi

$$\langle \nabla\varphi(y_n), s_k \rangle > -1/n .$$

Na taj način dobijamo podniz (x_k), $k \in K$, koji konvergira ka z. Po uslovu teoreme postojaće $K' \subseteq K$ tako da

$$s_k \to s,\ k \to \infty,\ k \in K' \text{ i } \langle \nabla\varphi(z), s \rangle < 0 ,$$

što protivureči nejednakosti

$$\langle \nabla\varphi(y_n), s_k \rangle > -1/n$$

za dovoljno veliko n.

Možemo bez umanjenja opštosti pretpostaviti da postoji $M > 0$ tako da za svaki k za koji je $x_k \in B_\eta$ važi

$$\|s_k\| < M .$$

U suprotnom bi se mogao naći skup $L \subseteq N$ takav da

$$x_k \to z,\ k \to \infty,\ k \in L \quad \text{i} \quad \|s_k\| \to \infty,\ k \to \infty,\ k \in L$$

što opet protivureči uslovima teoreme.

Pretpostavimo sada da zaključak teoreme ne važi, tj. da niz (x_k), $k \in N$ ne konvergira ka z. Tada postoji $\epsilon > 0$ tako da za beskonačno mnogo k važi $x_k \notin B_\epsilon$. Bez umanjenja opštosti možemo uzeti da je $\epsilon < \eta$. Neka je $x_k \in B_{\epsilon/2}$ i neka je r najmanji prirodan broj takav da $x_{k+r} \notin B_\epsilon$; neka je najzad x^*_{k+r} tačka na odsečku koji spaja x_{k+r-1} i x_{k+r} takva da je $\|z-x^*_{k+1}\| = \epsilon$. Tada je, s obzirom da se x_{k+1} dobija iz x_k minimizacijom duž pravca s_k,

$$\varphi(x_{k+r})-\varphi(x_k) \leqslant \varphi(x^*_{k+r})-\varphi(x_k) = \sum_{j=0}^{r-2} [\varphi(x_{k+j+1})-\varphi(x_{k+j})] + \varphi(x^*_{k+r})-\varphi(x_{k+r-1}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{r-2} \langle \nabla\varphi(\xi_{k+j}), s_{k+j}\rangle \frac{\|x_{k+j+1}-x_{k+j}\|}{\|s_{k+j}\|} + \langle \nabla\varphi(\xi^*_{k+r-1}), s_{k+r-1}\rangle \frac{\|x^*_{k+r} - x_{k+r-1}\|}{\|s_{k+r-1}\|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{M} \Big(\sum_{j=0}^{r-2} \|x_{k+j+1}-x_{k+j}\| + \|x^*_{k+r}-x_{k+r-1}\| \Big) \leqslant \frac{c}{M} \cdot \frac{\epsilon}{2} .$$

U gornjim formulama primenjena je teorema o srednjoj vrednosti i ξ_{k+j} pripada segmentu koji spaja x_{k+j} i x_{k+j+1}, a ξ^*_{k+r-1} pripada segmentu koji spaja x_{k+r-1} i x^*_{k+r}.

Neka je sada $k_1, k_1+r_1, k_2, k_2+r_2, ..., k_n, k_n+r_n, ...$ rastući niz prirodnih brojeva takvih da

$$x_{k_i} \in B_{\epsilon/2}, x_{k_i+1}, ..., x_{k_i+r_i-1} \in B_\epsilon, \; x_{k_i+r_i} \notin B_\epsilon .$$

Pošto je niz $(\varphi(x_k))$, $k \in N$ opadajući imamo

$$\varphi(x_{k_j+r_j}) \leqslant \varphi(x_1) + j(c \cdot \epsilon)/2M ,$$

te stoga $\varphi(x_k) \to -\infty$, $k \to \infty$, što je nemoguće zbog neprekidnosti funkcije φ u tački z.♦

7.3. Rosen-ova metoda

Kao i Frank-Wolfe-ova metoda, Rosen-ova metoda [R.6] se primenjuje za rešavanje problema sa samo linearnim ograničenjima:

$$(3.1) \qquad \min \{ \varphi(x) \mid x \in X \} , \quad X = \{ x \in R^n \mid \langle a_i, x\rangle \leqslant b_i, i = 1, ..., m \} .$$

Napomenimo da postoji i modifikacija ove metode koja se može primeniti i na problem sa nelinearnim ograničenjima (videti Rosen [R.7]).

Ideja Rosen-ove metode sastoji se u tome da se, kad god je to moguće, za pravac s_k uzima ortogonalna projekcija $-\nabla\varphi(x_k)$ na potprostor paralelan preseku hiperravni u kome se nalazi tačka x_k. Samim tim se obezbeđuje da pravac s_k bude moguć. Sledeća teorema opisuje kako se nalazi ortogonalna projekcija vektora na potprostor. Pre iskaza teoreme podsetimo se sledećeg rezultata iz linearne algebre:

Ako je $S \subseteq R^n$ dati potprostor, tada se svaki vektor $d \in R^n$ može jedinstveno razložiti na zbir dve komponente

$$d = d_1 + d_2, \quad d_1 \in S, \quad d_2 \in S^\perp .$$

Vektori d_1 i d_2 su orotogonalne projekcije vektora d na S i $S^{\perp}$, respektivno. Napomenimo još da je u slučaju kada je potprostor S zadat sa

$$S = \{x \in R^n \mid \langle c_i, x\rangle = 0, i = 1, ..., \ell\}$$

gde su $c_1, ..., c_\ell$ dati vektori, potprostor $S^{\perp}$ dat sa

$$S^{\perp} = \{x \in R^n \mid x = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i c_i, \lambda_i \in R, i = 1, ..., \ell\}.$$

U slučaju kada su $c_1, ..., c_\ell$ linearno nezavisni, svaki vektor $x \in S^{\perp}$ ima jedinstvenu reprezentaciju preko vektorâ $c_1, ..., c_\ell$.

TEOREMA 7.3.1. Neka su c_i, $i = 1, ..., \ell$, dati linearno nezavisni vektori iz R^n i neka je $S = \{x \in R^n \mid \langle c_i, x\rangle = 0, i = 1, ..., \ell\}$. Neka je $d = d_1 + d_2$, $d_1 \in S$, $d_2 \in S^{\perp}$, proizvoljan vektor iz R^n. Obeležimo sa C matricu kojoj su $c_1^T, ..., c_\ell^T$ vrste a sa I jediničnu nxn matricu. Tada je

$$d_1 = (I - C^T(CC^T)^{-1}C)d$$

$$d_2 = C^T(CC^T)^{-1}Cd = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i c_i ,$$

pri čemu je λ_i i-ta komponenta vektora $(CC^T)^{-1}Cd$, $i = 1, ..., \ell$.

DOKAZ: Primetimo da je matrica CC^T nesingularna zbog linearne nezavisnosti vektorâ c_i, $i = 1, ..., \ell$. Stoga postoji $(CC^T)^{-1}$. Pokažimo najpre da je za svako $x \in S$ ispunjeno

$$(I - C^T(CC^T)^{-1}C)\, x = x$$

a za svako $y \in S^{\perp}$ je

$$(I - C^T(CC^T)^{-1}C)\, y = 0 .$$

Zaista, zbog definicije podprostora S i matrice C je $Cx = 0$ za svako $x \in S$, te važi prva od prethodne dve jednakosti. S druge strane, svako $y \in S^{\perp}$ se može prikazati u obliku

$$y = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i c_i = C^T \Lambda ,$$

za neko $\Lambda \in R^{\ell}$. Stoga je

$$(I - C^T(CC^T)^{-1}C)\, y = y - C^T(CC^T)^{-1}CC^T\Lambda = y - C^T\Lambda = 0 .$$

Odavde sledi da je $(I - C^T(CC^T)^{-1}C)$ matrica projektovanja na S a $C^T(CC^T)^{-1}C$ matrica projektovanja na $S^{\perp}$. Stoga je

$$d_1 = (I - C^T(CC^T)^{-1}C)\, d$$

$$d_2 = C^T(CC^T)^{-1}Cd .$$

S obzirom da se d_2 može jednoznačno predstaviti u obliku

$$d_2 = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i c_i ,$$

sledi da je λ_i jednako i-toj komponenti vektora $(CC^T)^{-1}Cd$. ♦

Ukoliko su vektori $c_1, ..., c_\ell$ linearno zavisni, projekcije na potprostore S i $S^\perp$ možemo naći izdvajanjem iz $\{c_1, ..., c_\ell\}$ maksimalnog podskupa linearno nezavisnih vektora i primenom gornjih formula na taj podskup. Međutim, ova modifikacija gornjeg postupka nam neće biti potrebna jer ćemo u ostatku ovog paragrafa pretpostaviti da su u svakoj tački dopustivog skupa vektori aktivnih ograničenja linearno nezavisni. Ta pretpostavka se susreće i u originalnom Rosen-ovom radu u kome je prvi put predložena metoda koju razmatramo. Bez ove pretpostavke metoda se mora modifikovati te se i opis algoritma i dokazi znatno usložnjavaju.

U opisu algoritma Rosen-ove metode koristićemo sledeće oznake: Za dato $k \in N \cup \{0\}$ neka je

$$I_k = \{ i \mid \langle a_i, x_k \rangle = b_i \} , \quad S_k = \{ x \in R^n \mid \langle a_i, x \rangle = 0, i \in I_k \} ,$$

neka je P_k matrica projektovanja na S_k i neka su λ_{ik} koeficijenti u (zbog učinjene pretpostavke jedinstvenom) razlaganju

$$\nabla\varphi(x_k) = P_k \nabla\varphi(x_k) + \sum_{i \in I_k} \lambda_{ik} a_i .$$

ALGORITAM 7.3.1.

Korak 1: Odrediti $x_o \in X$ tako da je skup $X \cap \{ x \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_o) \}$ ograničen. Staviti k=0.

Korak 2: Odrediti $I_k, P_k \nabla\varphi(x_k)$ i $\lambda_{ik}, i \in I_k$.

Korak 3: Ako je $\|P_k \nabla\varphi(x_k)\| \neq 0$, staviti $s_k = -P_k \nabla\varphi(x_k)$ i ići na korak 6. U suprotnom ići na korak 4.

Korak 4: Odrediti $\hat{\lambda}_k = \max \{ \lambda_{ik} \mid i \in I_k \}$ i neka je $\hat{i}_k$ indeks za koji se taj maksimum dostiže. Ako je $\hat{\lambda}_k \leqslant 0$, STOP; inače ići na korak 5.

Korak 5: Staviti $\hat{I}_k = I_k \setminus \{\hat{i}_k\}$ i izračunati matricu projektovanja $\hat{P}_k$ na potprostor $\hat{S}_k = \{x \in R^n \mid \langle a_i, x \rangle = 0, i \in \hat{I}_k\}$. Staviti $s_k = -\hat{P}_k \nabla\varphi(x_k)$.

Korak 6: Izračunati α_k kao rešenje problema

$$\min \{ \varphi(x_k + \alpha s_k) \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_k^* \} ,$$

gde je

$$\alpha_k^* = \min \left\{ \frac{b_i - \langle a_i, x_k \rangle}{\langle a_i, s_k \rangle} \;\middle|\; \langle a_i, s_k \rangle > 0 \right\} .$$

Korak 7. Staviti $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$, zameniti k sa k+1 i ići na korak 2.

N a p o m e n a: Lako je videti da je α_k^* maksimalna vrednost koraka duž pravca s_k pri kojoj se ostaje u skupu X.

TEOREMA 7.3.2. Neka je niz (x_k) generisan algoritmom 7.3.1. Tada važi

(i) za svako k pravac s_k je moguć;
(ii) za svako k, $x_k \in X$;
(iii) za svako k, $\varphi(x_{k+1}) < \varphi(x_k)$;
(iv) ako je $P_k \nabla\varphi(x_k) = 0$ i $\hat{\lambda}_k \leqslant 0$ tačka x_k je stacionarna.

Dokaz: (i) Ukoliko je $s_k = -P_k \nabla\varphi(x_k)$, tada je za $i \in I_k$ ispunjeno $\langle a_i, s_k\rangle = 0$ pa je $\langle a_i, x_k+ts_k\rangle = b_i$ za svako t a osim toga je

$$\langle s_k, \nabla\varphi(x_k)\rangle = -\|P_k \nabla\varphi(x_k)\|^2 < 0 ,$$

te je pravac moguć. (Neaktivna ograničenja neće biti narušena za $t > 0$ dovoljno malo).

Ukoliko je $s_k = -\hat{P}_k \nabla\varphi(x_k)$ biće za $i \in \hat{I}_k$ ispunjeno $\langle a_i, s_k\rangle = 0$ dok je za $i = \hat{i}_k$

$$\langle a_i, s_k\rangle = -\langle a_i, \hat{P}_k(P_k \nabla\varphi(x_k) + \sum_{j\in I_k} \lambda_{jk} a_j)\rangle = -\langle a_i, P_k \nabla\varphi(x_k) + \lambda_{ik}\hat{P}_k a_i\rangle =$$

$$= -\lambda_{ik} \|\hat{P}_k a_i\|^2 < 0 ,$$

jer je $\lambda_{ik} = \hat{\lambda}_k > 0$ i $\hat{P}_k a_i \neq 0$ jer su $a_i, i \in I_k$, linearno nezavisni ($\hat{\lambda}_k > 0$ jer bi se u suprotnom algoritam zaustavio). Stoga je ovde

$$\langle a_i, x_k+ts_k\rangle \leqslant b_i \text{ za } i \in I_k \text{ i } t \geqslant 0 .$$

Osim toga je

$$\langle s_k, \nabla\varphi(x_k)\rangle = -\|\hat{P}_k \nabla\varphi(x_k)\|^2 = -\hat{\lambda}_k^2 \|\hat{P}_k a_{\hat{i}_k}\| < 0 ,$$

pa je s_k i u ovom slučaju moguć pravac.

(ii) Iz dokaza tačke (i) vidimo da je $\langle a_i, x_k+\alpha_k s_k\rangle \leqslant b_i$ za $i \in I_k$. Za one $i \notin I_k$ za koje je $\langle a_i, s_k\rangle \leqslant 0$ važi isto. Za $i \notin I_k$ za koje je $\langle a_i, s_k\rangle > 0$ imamo

$$\langle a_i, x_k+\alpha_k s_k\rangle \leqslant \langle a_i, x_k\rangle + \alpha_k^*\langle a_i, s_k\rangle \leqslant b_i .$$

Dakle, $x_{k+1} \in X$.

(iii) S obzirom da je s_k moguć pravac a α_k se bira minimizacijom, iz Taylor-ove teoreme sledi zaključak.

(iv) Sledi neposredno iz definicije 2.4.1. ♦

TEOREMA 7.3.3. Neka je (x_k) niz generisan algoritmom 7.3.1. Ukoliko je (x_k) konačan niz, poslednja tačka je stacionarna. U suprotnom, skup tačaka nagomilavanja niza (x_k) je neprazan i svaka tačka nagomilavanja z zadovoljava

$$P\nabla\varphi(z) = 0,$$

gde je P matrica projektovanja na potprostor

$$S = \{ x \in R^n \mid \langle a_i, x \rangle = 0, i \in I \},$$

a

$$I = \{ i \in \{1, ..., m\} \mid \langle a_i, z \rangle = b_i \}$$

DOKAZ: Ako je (x_k) konačan niz zaključak teoreme sledi iz teoreme 7.3.2. Pretpostavimo da je (x_k) beskonačan niz. S obzirom da je za svako k, $x_k \in X \cap \{x \in R^n \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_o)\}$ i da je skup $X \cap \{ x \in R^n \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_o) \}$ kompaktan, niz (x_k) mora imati tačaka nagomilavanja. Neka je z jedna od njih i neka $x_k \to z$, $k \to \infty$, $k \in K$. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju teoreme, da je $P \nabla \varphi(z) \neq 0$. S obzirom na neprekidnost gradijenta i kompaktnost skupa $X \cap \{ x \in R^n \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_o) \}$ niz pravaca (s_k) je ograničen pa (s_k), $k \in K$ sadrži konvergentan podniz (s_k), $k \in K'$, $K' \subseteq K$. Neka $s_k \to s$, $k \to \infty$, $k \in K'$. Ako je x_k, $k \in K'$ dovoljno blisko z, tada je $I_k \subseteq I$, pa prema tome $S_k \supseteq S$. Tada je

$$\langle \nabla \varphi(x_k), s_k \rangle \leq -\|P_k \nabla \varphi(x_k)\|^2 \leq -\|P \nabla \varphi(x_k)\|^2 \leq -\frac{\|P \nabla \varphi(z)\|^2}{2}$$

za dovoljno veliko $k \in K'$. Prolazeći na granicu kad $k \to \infty$, $k \in K'$ dobijamo

$$\langle \nabla \varphi(z), s \rangle < 0 .$$

Koristeći teoremu 7.2.1. zaključujemo da $x_k \to z$, $k \to \infty$, $k \in N$.

Kako je za dovoljno veliko k

$$\|P_k \nabla \varphi(x_k)\| \geq \|P \nabla \varphi(x_k)\| \geq c > 0 ,$$

na osnovu koraka 3. algoritma 7.3.1. zaključujemo da je

$$s_k = -P_k \nabla \varphi(x_k), k \geq k_o$$

gde je k_o dovoljno veliki prirodan broj. Prema tome je

$$I_k \subseteq I_{k+1}, k \geq k_o .$$

S druge strane, s obzirom da je broj ograničenja jednak m, postoji k_1, $k_1 > k_o$, tako da je

$$I_k = I_{k+1}, k \geq k_1,$$

tj. u koraku 6 algoritma 7.3.1. je $\alpha_k < \alpha_k^*$. Neka je

$$x^* = z + \tau s, \ \tau > 0$$

tako izabrano da funkcija $\psi(t) = \varphi(z+ts)$ opada za $t \in [0,\tau]$. Kako je φ neprekidno diferencijabilna funkcija, funkcije

$$\psi_k(t) = \varphi(x_k+ts_k), k \in N$$

će takođe biti opadajuće za $t \in [0, \tau/2]$ i k dovoljno veliko. S obzirom da se α_k bira minimizacijom i kako je pritom

$$\alpha_k < \alpha_k^*, \ k \geq k_1,$$

biće $\alpha_k \geq \tau/2$ za dovoljno veliko k. S druge strane, iz konvergencije niza (x_k) sledi

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|\alpha_k s_k\| \to 0, \ k \to \infty$$

što je u suprotnosti sa nejednakostima

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|\alpha_k s_k\| \geq \frac{\tau c}{2},$$

koje važe za k dovoljno veliko. ♦

Rosen-ovu metodu ilustrujemo sledećim primerom:

PRIMER 7.3.1. Rešiti sledeći problem nelinearnog programiranja sa linearnim ograničenjima

$$\min \{ 4\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_1\xi_2 - \xi_1 - 2\xi_2 + 4 \mid (\xi_1, \xi_2) \in X \}$$
$$X = \{ x \mid 2\xi_1 + \xi_2 \leq 5, \xi_1 + \xi_2 \leq 3, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0 \}$$

polazeći od tačke $(5/2, 0)$.

Ovde je $a_1 = (2,1)$, $a_2 = (1,1)$, $a_2 = (-1,0)$, $a_4 = (0,-1)$, $b_1 = 5$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$, $b_4 = 0$.

k = 0: Imamo da je $I_0 = \{1,4\}$. Koristeći teoremu 7.3.1. dobijamo $P_0 \nabla\varphi(x_0)$ i λ_{i0}, $i \in I_0$. Ovde je

$$C_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ P_0 \nabla\varphi(x_0) = [I - C_0^T (C_0 C_0^T)^{-1} C_0] \nabla\varphi(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{10} \\ \lambda_{40} \end{bmatrix} = (C_0 C_0^T)^{-1} C_0 \nabla\varphi(x_0) = \begin{bmatrix} 19/2 \\ 13/2 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\|P_0 \nabla\varphi(x_0)\| = 0$ određujemo $\hat{\lambda}_0 = 19/2$ i $\hat{i}_0 = 1$. S obzirom da je $\hat{\lambda}_0 > 0$, tačka x_0 nije stacionarna. Prema koraku 5 određujemo $\hat{I}_0 = \{4\}$. Koristeći teoremu 7.3.1. dobijamo $\hat{P}_0 \nabla\varphi(x_0)$. Ovde je

$$\hat{C}_0 = [0 \ \ -1], \ \hat{P}_0 \nabla\varphi(x_0) = (I - \hat{C}_0^T (\hat{C}_0 \hat{C}_0^T)^{-1} \hat{C}_0) \nabla\varphi(x_k) = \begin{bmatrix} 19 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Odavde je

$$s_0 = -\hat{P}_0 \nabla\varphi(x_0) = \begin{bmatrix} -19 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Za izračunavanje koraka α_0 potrebno je prvo odrediti α_0^*:

$$\alpha_0^* = \min \{ \frac{b_i - \langle a_i, x_0 \rangle}{\langle a_i, s_0 \rangle} \mid \langle a_i, s_0 \rangle > 0 \} = \min \{ \frac{5/2}{19} \} = \frac{5}{38} .$$

Korak α_0 je rešenje problema

$$\min \{ 4(\frac{5}{2} - 19\alpha)^2 - (\frac{5}{2} - 19\alpha) + 4 \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{5}{38} \} ,$$

odakle se dobija $\alpha_0 = 5/38$. Nova tačka je $x_1 = (0,0)$.

k = 1: Sada je $I_1 = \{3,4\}$. Koristeći teoremu 7.3.1. dobijamo $P_1 \nabla\varphi(x_1)$ i λ_{i1}, $i \in I_1$. Ovde je

$$C_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, P_1 \nabla\varphi(x_1) = (I - C_1^T(C_1C_1^T)^{-1}C_1)\nabla\varphi(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{31} \\ \lambda_{41} \end{bmatrix} = (C_1C_1^T)^{-1}C_1 \nabla\varphi(x_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Kako je $\|P_1 \nabla\varphi(x_1)\| = 0$, određujemo $\hat{\lambda}_1 = 2$, $\hat{i}_1 = 4$. S obzirom da je $\hat{\lambda}_1 > 0$, tačka x_1 nije stacionarna. Dalje određujemo $\hat{I}_1 = \{3\}$. Koristeći teoremu 7.3.1. određujemo $\hat{P}_1 \nabla\varphi(x_1)$. Ovde je

$$\hat{C}_1 = [-1 \quad 0], \hat{P}_1 \nabla\varphi(x_1) = (I - \hat{C}_1^T(\hat{C}_1\hat{C}_1^T)^{-1}\hat{C}_1)\nabla\varphi(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} .$$

Prema algoritmu je

$$s_1 = -\hat{P}_1 \nabla\varphi(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Veličina α_1^* potrebna za izračunavanje α_1 je

$$\alpha_1^* = \min \{ \frac{b_i - \langle a_i, x_1 \rangle}{\langle a_i, s_1 \rangle} \mid \langle a_i, s_1 \rangle > 0 \} = \min \{ \frac{5}{2}, \frac{3}{2} \} = \frac{3}{2} .$$

Prema tome, α_1 je rešenje sledećeg problema

$$\min \{ (2\alpha)^2 - 2(2\alpha) + 4 \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{3}{2} \} ,$$

odakle je $\alpha_1 = \frac{1}{2}$. Nova tačka je $x_2 = (0,1)$.

k = 2: Skup indeksa aktivnih ograničenja je $I_2 = \{3\}$. Koristeći teoremu 7.3.1. određujemo $P_2 \nabla\varphi(x_2)$ i λ_{i2}, $i \in I_2$. Ovde je

$$C_2 = [-1 \quad 0], \quad P_2 \nabla\varphi(x_2) = (I - C_2^T(C_2C_2^T)^{-1}C_2)\nabla\varphi(x_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{32} = (C_2C_2^T)^{-1}C_2\nabla\varphi(x_2) = -1 .$$

Znači da je $\hat{\lambda}_2 = -1$. Kako je $\|P_2\nabla\varphi(x_2)\| = 0$ i $\hat{\lambda}_2 < 0$, na osnovu teoreme 7.3.2 zaključujemo da je tačka x_2 stacionarna.

7.4. Zoutendijk-ova metoda

U ovom odeljku izložićemo metodu za rešavanje problema

$$\min\,\{\varphi(x) \mid x \in X\},\quad X = \{x \in R^n \mid \langle a_i, x\rangle \leqslant b_i,\ i = 1, \dots, m;\ f_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \dots, p\}.$$

Za razliku od prethodnih, ova metoda rešava problem sa linearnim i/ili nelinearnim ograničenjima. Pretpostavićemo stoga da su funkcije f_i, $i = 1, \dots, p$ nelinearne, ne isključujući mogućnost $p = 0$, tj. slučaj kada su sva ograničenja linearna. Takođe ćemo pretpostaviti da u svakoj tački $x \in X$ nijedna netrivijalna nenegativna linearna kombinacija gradijenata aktivnih ograničenja nije jednaka nuli. Primetimo da je ova pretpostavka slabija od pretpostavke o linearnoj nezavisnosti; pretpostavka je potrebna za dokaz teorema 7.4.1. i 7.4.2.

Pri izlaganju Zoutendijk-ove metode [Z.4] koristićemo sledeće oznake: za dato $\epsilon \geqslant 0$ i $\bar{x} \in X$ neka je

$$I(\bar{x},\epsilon) = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid b_i - \epsilon \leqslant \langle a_i, \bar{x}\rangle \leqslant b_i\}$$
$$J(\bar{x},\epsilon) = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid -\epsilon \leqslant f_i(x) \leqslant 0\}.$$

Ograničenja $\langle a_i,x\rangle \leqslant b_i$, $i \in I(\bar{x},\epsilon)$ i $f_i(x) \leqslant 0$, $i \in J(\bar{x},\epsilon)$ nazivaju se često ϵ-aktivnim u tački $\bar{x}$.

ALGORITAM 7.4.1. (Zoutendijk [Z.4])

Korak 1: Izabrati $\epsilon_0 > 0$ i $x_0 \in X$ tako da je skup $X \cap \{x \in R^n \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}$ ograničen. Staviti $k = 0$.

Korak 2: Rešiti sledeći problem linearnog programiranja

$$\begin{array}{ll}
\min\ \tau & \\
\langle\nabla\varphi(x_k), s\rangle \leqslant \tau & \\
\langle a_i, s\rangle \leqslant 0, & i \in I(x_k,\epsilon_k)\\
\langle\nabla f_i(x_k), s\rangle \leqslant \tau, & i \in J(x_k,\epsilon_k)\\
-1 \leqslant \sigma_i \leqslant 1, & i = 1, \dots, n
\end{array}$$

gde je $\tau \in R$ a $s = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in R^n$. Neka je (τ_k,s_k) rešenje ovog problema.

Korak 3: Ako je $\tau_k = 0$, $I(x_k,\epsilon_k) = I(x_k,0)$, $J(x_k,\epsilon_k) = J(x_k,0)$, STOP; u suprotnom ići na korak 4.

Korak 4: Ako je $\tau_k > -\epsilon_k$, zameniti ϵ_k sa $\epsilon_k/2$ i ići na korak 2; u suprotnom ići na korak 5.

Korak 5: Za pravac uzeti vektor s_k dobijen u prethodnim koracima. Rešiti jednodimenzioni problem

$$\min \{ \varphi(x_k+\alpha s_k) \mid \alpha \geqslant 0, x_k+\alpha s_k \in X \} .$$

Neka je α_k rešenje tog problema.
Korak 6: Staviti $x_{k+1} = x_k+\alpha_k s_k$, $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k$, zameniti k sa k+1 i ići na korak 2.

N a p o m e n a: Primetimo da se za istu vrednost k vrednost za s_k, τ_k i ϵ_k može menjati. Međutim, zbog jednostavnijeg pisanja, oznake ostaju nepromenjene. Iz konteksta je uvek jasno da li se radi o „konačnoj" vrednosti posmatrane veličine (sa kojom se ide na korak 5) ili o njenoj „trenutnoj" vrednosti.

Napomenimo da problem linearnog programiranja u koraku 2 uvek ima optimalno rešenje jer $s \in [-1,1]^n$ te je

$$\tau \geqslant \langle \nabla\varphi(x_k), s\rangle \geqslant -\|\nabla\varphi(x_k)\| \, \|s\| \geqslant -\|\nabla\varphi(x_k)\| \sqrt{n} ,$$

a skup dopustivih tačaka tog problema je neprazan jer mu pripada npr. tačka $(0, ..., 0,0) \in R^{n+1}$. Odavde sledi i da je uvek $\tau_k \leqslant 0$. Zapazimo još da zbog ograničenosti skupa $X \cap \{ x \in R^n \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) \}$ problem u koraku 5 uvek ima rešenje.

Iz sledeće teoreme vidimo da je algoritam 7.4.1. dobro definisan i da pripada klasi metoda mogućih pravaca.

TEOREMA 7.4.1. Neka je niz (x_k) generisan algoritmom 7.4.1. Tada važi
(i) Za svako k koraci 2, 3 i 4 se mogu ponoviti samo konačan broj puta.
(ii) Za svako k pravac s_k je moguć.
(iii) Za svako k, $x_k \in X$.
(iv) Za svako k, $\varphi(x_{k+1}) < \varphi(x_k)$.
(v) Ako je $\tau_k = 0$, $I(x_k,\epsilon_k) = I(x_k,0)$ i $J(x_k,\epsilon_k) = J(x_k,0)$ i pritom iz

$$\sum_{i\in I(x_k,0)} \mu_i a_i + \sum_{i\in J(x_k,0)} \nu_i \nabla f_i(x_k) = 0, \quad \mu_i \geqslant 0, i \in I(x_k,0); \quad \nu_i \geqslant 0, i \in J(x_k,0)$$

sledi

$$\mu_i = 0, i \in I(x_k,0) \quad \text{i} \quad \nu_i = 0, i \in J(x_k,0),$$

tačka x_k je stacionarna.

DOKAZ: (i) Primetimo prvo da za dato k postoji $\eta > 0$ tako da je

$$I(x_k,\epsilon) = I(x_k,0) \text{ i } J(x_k,\epsilon) = J(x_k,0) \text{ za sve } \epsilon \leqslant \eta .$$

Pri svakom skoku iz koraka 4 na korak 2, ϵ_k se polovi. Ili će se taj ciklus prekinuti ili će posle konačno mnogo koraka biti $\epsilon_k < \eta$, tj. $I(x_k,\epsilon_k) = I(x_k,0)$ i $J(x_k,\epsilon_k) = J(x_k,0)$. U tom slučaju imamo dve mogućnosti: $\tau_k = 0$, kada se algoritam zaustavlja, ili $\tau_k < 0$. Ako je $\tau_k \leqslant -\epsilon_k$ ide se na korak 5. U suprotnom će ovaj uslov postati zadovoljen posle konačno mnogo polovljenja ϵ_k jer je $\epsilon_k < \eta$ pa se rešava uvek isti problem linearnog programiranja, tj. τ_k se ne menja.

(ii) S obzirom da se pravac s_k bira u koraku 5 do koga se stiže samo ako je $\tau_k < 0$ imamo da je

$$\langle \nabla f_i(x_k), s_k \rangle < 0 \quad \text{za} \quad i \in J(x_k,0) \subseteq J(x_k,\epsilon_k),$$

pa je $f_i(x_k+\alpha s_k) < 0$ za dovoljno malo α i $i \in J(x_k,0)$. Što se tiče aktivnih linearnih ograničenja zbog uslova

$$\langle a_i, s_k \rangle \leq 0, \quad i \in I(x_k,0) \subseteq I(x_k,\epsilon_k)$$

imamo $\langle a_i, x_k+\alpha s_k \rangle = b_i + \alpha\langle a_i, s_k \rangle \leq b_i$ za sve $\alpha > 0$ i $i \in I(x_k,0)$. Osim toga, nijedno neaktivno ograničenje neće biti narušeno za dovoljno malo $\alpha > 0$. Kako je uz to

$$\langle \nabla\varphi(x_k), s_k \rangle \leq \tau_k < 0 ,$$

zaključujemo da je pravac s_k moguć.

(iii) S obzirom da $x_0 \in X$ i da zbog (ii) i koraka 5 iz $x_k \in X$ sledi $x_{k+1} \in X$, biće $x_k \in X$ za sve k.

(iv) Zaključak sledi iz uslova $\langle \nabla\varphi(x_k), s_k \rangle < 0$ i načina biranja koraka α_k.

(v) Neka je $I(x_k,\epsilon_k) = I(x_k,0)$, $J(x_k,\epsilon_k) = J(x_k,0)$. Primetimo najpre da ako je $\tau_k = 0$ optimalno rešenje problema linearnog programiranja iz koraka 2:

$$\begin{array}{lll} & \min \quad \tau & \\ & \langle \nabla\varphi(x_k, s) \rangle \leq \tau & \\ (4.1) & \langle a_i, s \rangle \leq 0, & i \in I(x_k,0) \\ & \langle \nabla f_i(x_k), s \rangle \leq \tau, & i \in J(x_k,0) \\ & -1 \leq \sigma_i \leq 1, i = 1, \ldots, n, & (s = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)), \end{array}$$

tada je optimalna vrednost funkcije cilja τ^* problema

$$\begin{array}{lll} & \min \quad \tau & \\ & \langle -\nabla\varphi(x_k), s \rangle + \tau \geq 0 & \\ (4.2) & \langle -a_i, s \rangle \geq 0, & i \in I(x_k,0) \\ & \langle -\nabla f_i(x_k), s \rangle + \tau \geq 0, & i \in J(x_k,0) \end{array}$$

takođe jednaka nuli. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji dopustivo rešenje $(\bar{\tau}, \bar{s})$ problema (4.2) tako da je $\bar{\tau} < 0$. Tada je $\bar{s} \neq 0$ zbog prvog ograničenja problema (4.2). No tada je tačka

$$\left(\frac{\tilde{\tau}}{\sum_{i=1}^{n} |\tilde{\sigma}_i|}, \frac{\tilde{s}}{\sum_{i=1}^{n} |\tilde{\sigma}_i|} \right)$$

dopustiva tačka problema (4.1), što je nemoguće jer je u suprotnosti sa $\tau_k = 0$. S druge strane, tačka $(\overline{\tau}, \overline{s}) = (0,0)$ je dopustiva tačka problema (4.2),pa je zaista $\tau^* = 0$.

Problem dualan problemu (4.2) može se posle sređivanja napisati u obliku

$$\max \ 0$$

$$-\lambda \nabla\varphi(x_k) - \sum_{i\in I(x_k,0)} \mu_i a_i - \sum_{i\in J(x_k,0)} \nu_i \nabla f_i(x_k) = 0$$

$$(4.3) \qquad \lambda + \sum_{i\in J(x_k,0)} \nu_i = 1$$

$$\lambda \geqslant 0;\ \mu_i \geqslant 0,\ i\in I(x_k,0);\ \nu_i \geqslant 0,\ i\in J(x_k,0).$$

Ako bi bilo $\lambda = 0$,tada bismo imali

$$\sum_{i\in I(x_k,0)} \mu_i a_i + \sum_{i\in J(x_k,0)} \nu_i \nabla f_i(x_k) = 0,$$

pri čemu su svi μ_i i ν_i nenegativni ali nisu svi jednaki nuli, što je suprotno pretpostavci teoreme. Dakle, $\lambda > 0$. No tada iz prve jednakosti u (4.3) deljenjem sa λ i sređivanjem dobijamo tvrđenje. ♦

TEOREMA 7.4.2. Pretpostavimo da za svako $x \in X$ iz

$$\sum_{i\in I(x,0)} \mu_i a_i + \sum_{i\in J(x,0)} \nu_i \nabla f_i(x) = 0,\ \mu_i \geqslant 0, i\in I(x,0);\ \nu_i \geqslant 0, i\in J(x,0)$$

sledi $\mu_i = 0$, $i \in I(x,0)$, $\nu_i = 0$, $i \in J(x,0)$. Neka je (x_k) niz generisan algoritmom 7.4.1. Ukoliko je (x_k) konačan niz,poslednja tačka je stacionarna. U suprotnom,skup tačaka nagomilavanja niza (x_k) je neprazan i svaka tačka nagomilavanja z niza (x_k) je stacionarna.

DOKAZ: Ako je niz (x_k) konačan,tvrđenje sledi iz teoreme 7.4.1. Neka je (x_k) beskonačan niz. S obzirom da je skup $X \cap \{ x \in R^n \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}$ ograničen, skup tačaka nagomilavanja je neprazan. Neka je z proizvoljna tačka nagomilavanja niza (x_k). Pretpostavimo da z nije stacionarna tačka. Tada zbog teoreme 7.4.1 (v) problem linearnog programiranja

$$\begin{array}{ll} \min & \tau \\ \langle \nabla\varphi(z), s\rangle \leqslant \tau & \\ \langle a_i, s\rangle \leqslant 0, & i\in I(z,0) \\ \langle \nabla f_i(z), s\rangle \leqslant \tau, & i\in J(z,0) \\ -1 \leqslant \sigma_i \leqslant 1, & i = 1, ..., n \end{array}$$

ima rešenje (τ^*,s^*) tako da je $\tau^* < 0$. Neka je $K \subseteq N$ takav beskonačan skup da

$$x_k \to z \quad i \quad s_k \to \hat{s}, \quad k \to \infty, \quad k \in K$$

(takav skup K postoji jer je z tačka nagomilavanja niza (x_k) a s_k se bira iz kompaktnog skupa). Prema koraku 2 algoritma 7.4.1. s_k se bira rešavanjem problema

$$\begin{array}{ll} \min & \tau \\ \langle \nabla\varphi(x_k), s\rangle \leqslant \tau & \\ \langle a_i, s\rangle \leqslant 0, & i \in I(x_k,\epsilon_k) \\ \langle \nabla f_i(x_k, s\rangle \leqslant \tau, & i \in J(x_k,\epsilon_k) \\ -1 \leqslant \sigma_i \leqslant 1, & i = 1, \dots, n . \end{array}$$

Niz (ϵ_k) je konvergentan kao monoton i ograničen; neka $\epsilon_k \to \epsilon^*$, $k \to \infty$. Dokažimo da je $\epsilon^* > 0$. Ako bi bilo $\epsilon^* = 0$,tada bi za dovoljno veliko $k \in K$ bilo

$$I(x_k,\epsilon_k) \subseteq I(z,0), \quad J(x_k,\epsilon_k) \subseteq J(z,0).$$

Onda je zbog neprekidnosti gradijenta i skalarnog proizvoda za $k \in K$ dovoljno veliko ispunjeno

$$\begin{array}{ll} \langle \nabla\varphi(x_k), s^*\rangle \leqslant \tau^*/2 & \\ \langle a_i, s^*\rangle \leqslant 0, & i \in I(x_k,\epsilon_k) \subseteq I(z,0) \\ \langle \nabla f_i(x_k), s^*\rangle \leqslant \tau^*/2, & i \in J(x_k,\epsilon_k) \subseteq J(z,0) \\ -1 \leqslant \sigma_i^* \leqslant 1, & i = 1, \dots, n , \end{array}$$

pa je tim pre

$$\langle \nabla\varphi(x_k), s_k\rangle \leqslant \tau_k \leqslant \tau^*/2 . \tag{4.4}$$

Zbog $s_k \to \hat{s}$, $k \to \infty$, $k \in K$ imamo da je

$$\langle \nabla\varphi(z), \hat{s}\rangle \leqslant \tau^*/2 .$$

Prema tome ispunjeni su uslovi Zangwill-ove leme pa niz (x_k) konvergira ka z. No, onda (4.4) važi za sve $k \geqslant k_o \in N$, gde je k_o pogodno izabrano. S obzirom da $\epsilon_k \to 0$, $k \to \infty$, postoji $k_1 > k_o$ tako da je za sve $k \geqslant k_1$ ispunjeno $-\epsilon_k \geqslant \tau^*/2$ i (4.4). No, tada u koraku 4 algoritma 6.4.1. ne dolazi do polovljenja ϵ_k što znači da je za $k > k_1, \epsilon_k = \epsilon^* > 0$. Kontradikcija.

Dakle, $\epsilon^* \neq 0$ pa je za dovoljno veliko k, $\epsilon_k = \epsilon_{k+1} = \dots = \epsilon^*$. Odatle sledi da je za takve k

$$\begin{array}{l} \langle \nabla\varphi(x_k), s_k\rangle \leqslant \tau_k \leqslant -\epsilon_k = -\epsilon^* \\ \langle \nabla f_i(x_k), s_k\rangle \leqslant \tau_k \leqslant -\epsilon_k = -\epsilon^*, \quad i \in J(x_k,\epsilon_k) . \end{array} \tag{4.5}$$

Osim toga je za $k \in K$ dovoljno veliko

$$I(x_k, \epsilon_k) \supseteq I(z,0), J(x_k, \epsilon_k) \supseteq J(z,0).$$

Stavljajući $k \to \infty$, $k \in K$ iz (4.5) sledi

$$\begin{aligned} &\langle \nabla\varphi(z), \hat{s}\rangle \leqslant -\epsilon^* \\ (4.6)\qquad &\langle \nabla f_i(z), \hat{s}\rangle \leqslant -\epsilon^*, \ i \in J(z,0) \end{aligned}$$

S obzirom da su funkcije $\varphi(x)$ i $f_i(x)$, $i = 1, ..., p$ neprekidne u z, zbog (4.6) postoji $\eta > 0$ (koje uz to može biti izabrano tako da je $\sqrt{n}$ puta manje od rastojanja ω tačke z do najbližeg ograničenja neaktivnog u z) za koje iz

$$\|s_k-\hat{s}\| < \eta, \quad \|x-z\| < \eta$$

sledi

$$\begin{aligned} &\langle \nabla\varphi(x), s_k\rangle \leqslant -\epsilon^*/2 \\ (4.7)\qquad &\langle \nabla f_i(x), s_k\rangle \leqslant -\epsilon^*/2, \quad i \in J(z,0). \end{aligned}$$

Neka je $k \in K$ tako veliko da je $\|x_k-z\| < \eta/2$. Pokažimo da je za svako $\alpha \in [0, \eta/2]$ tačka $x_k+\alpha s_k$ dopustiva. Zaista, iz

$$\|x_k+\alpha s_k-z\| \leqslant \|\alpha s_k\| + \|x_k-z\| \leqslant \omega$$

sledi da će u $x_k + \alpha s_k$ sva ograničenja neaktivna u z biti zadovoljena (i to sa znakom <). S obzirom da je

$$\langle a_i, s_k\rangle \leqslant 0, \ i \in I(z, 0) \subseteq I(x_k, \epsilon_k)$$

biće

$$\langle a_i, x_k+\alpha s_k\rangle \leqslant b_i + \alpha\langle a_i, s_k\rangle \leqslant b_i$$

za sve $\alpha \leqslant 0$ i $i \in I(z,0)$. Neka je sada $i \in J(z,0)$. Funkcija $g_i(\alpha) = f_i(x_k+\alpha s_k)$ je opadajuća na $[0, \eta/2]$. Zaista, zbog (4.7)

$$\frac{dg_i(\alpha)}{d\alpha} = \langle \nabla f_i(x_k+\alpha s_k), \frac{s_k}{\|s_k\|}\rangle \leqslant -\frac{\epsilon^*}{2\|s_k\|} < 0.$$

Stoga je $f_i(x_k+\alpha s_k) \leqslant f_i(x_k) \leqslant 0$ za $\alpha \in [0, \eta/2]$ i $i \in J(z,0)$. Dakle, tačka $x_k + \alpha s_k$ je dopustiva za svako $\alpha \in [0, \eta/2]$.

Ocenimo sada razliku $\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})$. Funkcija $g(\alpha) = \varphi(x_k+\alpha s_k)$ opada na $[0, \eta/2]$. Zaista, zbog (4.7) je

$$\frac{dg(\alpha)}{d\alpha} = \langle \nabla\varphi(x_k+\alpha s_k), \frac{s_k}{\|s_k\|}\rangle \leqslant -\frac{\epsilon^*}{2\|s_k\|} < 0.$$

Stoga je

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) \leqslant \varphi(x_k + \frac{\eta}{2} s_k) - \varphi(x_k) =$$

$$= g(\frac{\eta}{2}) - g(0) = \frac{dg(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\xi} \cdot (\frac{\eta}{2} - 0) \leqslant -\frac{\eta\epsilon^*}{4\|s_k\|} .$$

Zbog ograničenja $-1 \leqslant \sigma_i \leqslant 1, i = 1, ..., n$ je $\|s_k\| \leqslant \sqrt{n}$ pa je

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) \leqslant -\frac{\epsilon^*}{4\sqrt{n}} . \tag{4.8}$$

S obzirom da (4.8) važi za beskonačno mnogo $k \in K$ a niz $(\varphi(x_k))$ je monotono opadajući dobija se

$$\varphi(x_k) \to -\infty, \ k \to \infty, k \in K$$

što je u kontradikciji sa neprekidnošću funkcije φ u tački z. Dakle, z jeste stacionarna tačka. ♦

PRIMER 7.4.1. Neka je dat problem nelinearnog programiranja

$$\begin{aligned} \min \varphi(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{aligned}$$

Jasno je da je (0,0) rešenje. Videćemo kako se ovo rešenje dobija primenom Zoutendijk-ove metode. Imamo da je $a_1 = (-1,0), a_2 = (0,-1), f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Obeležimo sa X skup dopustivih tačaka. Neka je $x_0 = (1,0)$ i $\epsilon_0 = 1$.

k = 0: Imamo da je $I(x_0, \epsilon_0) = \{1,2\}$, $J(x_0, \epsilon_0) = \{1\}$. Problem linearnog programiranja iz koraka 2 je

$$\begin{aligned} \min \tau \\ 3\sigma_1 + 2\sigma_2 \leqslant \tau \\ -\sigma_1 \leqslant 0 \\ -\sigma_2 \leqslant 0 \\ 2\sigma_1 \leqslant \tau \\ -1 \leqslant \sigma_1 \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \sigma_2 \leqslant 1 \end{aligned}$$

Ovaj problem ima beskonačno mnogo optimalnih rešenja. Jedno od njih je npr. $(\tau_0, s_0) = (0,0,0)$. Kako je $\tau_0 > -\epsilon_0$, to je nova vrednost $\epsilon_0 = 1/2$. Sada je $I(x_0, \epsilon_0) = \{2\}$, $J(x_0, \epsilon_0) = \{1\}$. Rešavanjem problema

$$\min \tau$$
$$3\sigma_1 + 2\sigma_2 \leqslant \tau$$
$$-\sigma_2 \leqslant 0$$
$$2\sigma_1 \leqslant \tau$$
$$-1 \leqslant \sigma_1 \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \sigma_2 \leqslant 1$$

zaključujemo da opet postoji beskonačno mnogo rešenja. Jedno od njih je $(\tau_0, s_0) = (-2, -1, 1/2)$. Sada je $\tau_0 < -\epsilon_0$ pa prelazimo na korak 5. Dakle, $s_0 = (-1, 1/2)$ a α_0 se dobija rešavanjem problema

$$\min \frac{3}{2}(1-\alpha)^2 + 2(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{3}{4}\alpha^2 - 2\alpha + \frac{3}{2}$$

pod uslovom $\alpha \geqslant 0$ i uslovom $x_0 + \alpha s_0 \in X$, tj.

$$\alpha - 1 \leqslant 0$$
$$-\frac{\alpha}{2} \leqslant 0$$
$$\frac{5}{4}\alpha^2 - 2\alpha \leqslant 0,$$

što se svodi na uslov $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Minimum se dostiže pri $\alpha = 1$, pa je $\alpha_0 = 1$. Dobijena tačka je $x_1 = (0, 1/2)$.

$k = 1$: Dalje je $I(x_1, \epsilon_1) = \{1,2\}$, $J(x_1, \epsilon_1) = \emptyset$. Problem linearnog programiranja iz koraka 2 je

$$\min \tau$$
$$\sigma_1 + \sigma_2 \leqslant \tau$$
$$-\sigma_1 \leqslant 0$$
$$-\sigma_2 \leqslant 0$$
$$-1 \leqslant \sigma_1 \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \sigma_2 \leqslant 1$$

Rešenje problema je $(\tau_1, s_1) = (0, 0, 0)$ pa za novu vrednost ϵ_1 uzimamo $\epsilon_1 = 1/4$. Sada je $I(x_1, \epsilon_1) = \{1\}$, $J(x_1, \epsilon_1) = \emptyset$ i novi problem linearnog programiranja je

$$\min \tau$$
$$\sigma_1 + \sigma_2 \leqslant \tau$$
$$-\sigma_1 \leqslant 0$$
$$-1 \leqslant \sigma_1 \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \sigma_2 \leqslant 1$$

Optimalno rešenje je $(\tau_1, s_1) = (-1, 0, -1)$. Kako je $\tau_1 \leqslant -\epsilon_1$ prelazimo na korak 5. Znači, $s_1 = (0, -1)$ a α_1 dobijamo rešavanjem problema

$$\min\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^2$$

pod uslovom $\alpha \geqslant 0$ i $x_1 + \alpha s_1 \in X$, tj.

$$\alpha - \frac{1}{2} \leqslant 0$$

$$\alpha^2 - \alpha - \frac{3}{4} \leqslant 0,$$

što se svodi na uslov $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Minimum se dostiže pri $\alpha = 1/2$, pa je $\alpha_1 = 1/2$. Dobijena tačka je $x_2 = (0, 0)$.

k = 2: Dalje je $I(x_2, \epsilon_2) = \{1,2\} = I(x_2, 0)$; $J(x_2, \epsilon_2) = \emptyset = J(x_2, 0)$. Problem linearnog programiranja je .

$$\begin{gathered} \min \tau \\ 0 \leqslant \tau \\ -\sigma_1 \leqslant 0 \\ -\sigma_2 \leqslant 0 \\ -1 \leqslant \sigma_1 \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \sigma_2 \leqslant 1 \end{gathered}$$

Optimalnih rešenja ima beskonačno mnogo; jedno od njih je $(\tau_2, s_2) = (0, 0, 0)$. Uslovi za zaustavljanje rada algoritma su ispunjeni. Lako je proveriti da su svi uslovi teoreme 7.4.1. zadovoljeni pa je $x_2 = (0, 0)$ stacionarna tačka.

– – – O O O – – –

Na kraju ove glave primetimo da smo u svim algoritmima za rešavanje problemâ nelinearnog programiranja pretpostavili da je poznata dopustiva tačka x_0 tako da je skup

$$X \cap \{x \in R^n \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}$$

ograničen.

Kod problema sa linearnim ograničenjima dopustiva tačka, ukoliko postoji, može se kao i u linearnom programiranju naći rešavanjem pomoćnog problema linearnog programiranja. Pomoćni problem se može formulisati slično kao kod I faze simpleks metode:

$$\min \sum_{i=1}^{n} z_i$$

$$\langle a_i, x\rangle + y_i + z_i = b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$y_1 \geq 0, z_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m\,,$$

gde su y_i izravnavajuće a z_i veštačke promenljive.

Kod problema sa nelinearnim ograničenjima dopustiva tačka se može naći rešavanjem drugog problema nelinearnog programiranja na sledeći način: Neka je x_0 tačka koja zadovoljava linearna ograničenja, tj.

$$\langle a_i, x_0\rangle \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m\,.$$

Ako je $f_i(x_0) \leq 0$, $i = 1, \dots, p$ sledi da $x_0 \in X$. U suprotnom uvodimo pomoćnu promenljivu ξ i nenegativne brojeve ρ_i, $i = 1, \dots, p$ takve da je $\rho_i = 0$ ako je $f_i(x_0) \leq 0$ i $\rho_i \geq 0$ ako je $f_i(x_0) > 0$. Pomoćni problem nelinearnog programiranja je

$$\min \xi$$
$$\langle a_i, x\rangle \leq b_i, i = 1, \dots, m$$
$$f_i(x) \leq \rho_i \xi, \quad i = 1, \dots, p$$
$$\xi \geq 0$$

Početno dopustivo rešenje ovog problema je npr. tačka (ξ_0, x_0), gde je

$$\xi_0 = \max \left\{ \frac{f_i(x_0)}{\rho_i} \,\middle|\, \rho_i > 0 \right\}.$$

Ukoliko je optimalna vrednost funkcije cilja 0 dobili smo dopustivo rešenje polaznog problema. Ukoliko je optimalna vrednost funkcije cilja veća od 0 polazni problem nema dopustivih rešenja.

Ograničenost skupa $X = \{x \in R^n \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$ se u principu može dobiti dodavanjem dopunskih ograničenja tipa

$$-M \leq x_i \leq M, \quad i = 1, \dots, n\,,$$

gde je $M > 0$ dovoljno veliko. Ukoliko je u rešenju x^* aktivno bilo koje od ovih dodatnih ograničenja M treba uvećati; ukoliko nije tačka je stacionarna i za polazni problem.

Primetimo još da u ovoj glavi nije pretpostavljena konveksnost funkcijâ cilja i ograničenjâ te stacionarne tačke koje metode nalaze ne moraju biti (čak ni lokalna) rešenja postavljenog problema.

LITERATURA

A

1. Ablow, S. M. and Brigham, G.: An Analog Solution of Programming problems, *Operat. Res.*, 3, 388–394, 1955.
2. Aljančić, S.: Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Građevinska knjiga, Beograd, 1968.
3. Ašić, M. D.: Games and their spectra, Proc. III Symposium über Operations Research, Mannheim 1978, *Operations Research Verfahren* 34, 1979.
4. Ašić, M. D. i Kovačević, V. V.: Teoreme konvergencije za metode mogućih pravaca, Zbornik radova SYM-OP-IS '80.
5. Avriel, M. and Wilde, D. J.: Optimality Proof for the Symmetric Fibonacci Search Technique, *Fibonacci Quarterly*, 4, 265–269, 1966
6. Avriel, M. and Wilde, D. J.: Golden Block Search for the Maximum of Unimodal Functions, *Management Science*, 14, 307–319, 1968.
7. Avriel, M.: Nonlinear Programming, Prentice-Hall, 1976.

B

1. Баничук, Н. В., Петров, В. М., Черьноуско, Ф. Л.: Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций, *ЖВМ и МФ*, 6, 6, 947–961, 1966.
2. Barnes, J. G. P.: An Algorithm for Solving Nonlinear Equations Based on the Secant Method, *Computer J.*, 8, 66–72, 1965.
3. Beale, E. M. L.: Cycling in the Dual Simplex Algorithm, *Naval Research Logistic Quart.* 2, 4, 1955.
4. Beltrami, E. J.: A Constructive Proof of the Kuhn-Tucker Multiplier Rule, *J. Math. Anal. Appls.*, 26, 297–306, 1969.
5. Benders, J. F.: Partitioning in Mathematical Programming, *Avanti Delft*, 1960.
6. Blackwell, D. and Girschick, M. A.: Theory of Games and Statistical Decision, John Wiley and Sons, New York, 1954.
7. Boot, J. G. C.: Quadratic Programming, North-Holland, Amsterdam, 1964.
8. Burger, E.: Einführung in die Theorie der Spiele, Walter de Gruyter und Co., Berlin, 1959

C

1. Camp, G. D.: Inequality-Constrained Stationary Value Problems, *Operat. Res.*, 3, 548–550, 1955.
2. Caroll, C. W.: The Created Response Surface Technique for Optimization Nonlinear Restrained Systems, *Operat Res.*, 9, 169–184, 1961.
3. Cauchy, A. L.: Méthode Générale pour la Résolution des Systèmes d'Equations Simultanées, *Compt. Rend.*, 25, 536–538, 1847.
4. Cohen, A.: Rate of Convergence for Root Finding and Optimization Algorithms, *SIAM J. Numer. Anal.*, 9, 248–259, 1972.
5. Courant, R.: Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations, *Bull. Am. Math. Soc.*, 49, 1–23, 1943.
6. Crowder, H., and Wolfe, P.: Linear Convergence of the Conjugate Gradient Method, *IBM J. Res. and Dev.*, 16, 431–433, 1972.
7. Curry, H. B.: The Method of Steepest Descent for Nonlinear Minimization Problems, *Quart. Appl. Math.*, 2, 258–261, 1944.

Č

1. Черноусько, Ф. Л.: Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач, *ЖВМ и МФ*, 5, 4, 1965.

D

1. Daniell, J. W.: The Conjugate Gradient Method for Linear and Nonlinear Operator Equations, *SIAM J., Num. Anal.*, 4, 10–26, 1967.
2. Dantzig, G. B.: Programming in a Linear Structure, *Comptroller, USAF*, Washington D.C., Februar, 1948.
3. Dantzig, G. B.: Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton 1963.
4. Davidon, W. C.: Variable Metric Method for Minimization, *AEC Research and Development Report* ANL–5990 (Rev.) , November 1959.
5. D'Esopo, D. A.: A Convex Programming Procedure, *Naval Res. Logist. Quart.*, 6, 1, 33–42, 1959.
6. Diego, A.: Lecciones de Programción Lineal, Universidad Nacional del Sur, Bahia Blanca (Argentina), 1977.
7. Dorn, W. S.: On Lagrange Multipliers and Inequalities, *Operat. Res.*, 9, 95–104, 1961.
8. Duffin, R. J., Peterson, E. L., Zener, C. M.: Geometric Programming, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967.
9. Dunford, N. and Schwartz, J. T.: Linear Operators, Interscience Publishers, 1958.

E

1. Everett, H.: Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problems of Optimum Allocation of Resources, *Operat.Res.*, 11, 399–417, 1963.

F

1. Falk, J. E.: Lagrange Multipliers and Nonlinear Programming, *J. Math. Anal. Appls.*, 19, 141–159, 1967.
2. Fiacco, A. V., and McCormick, G. P.: Extensions of SUMT for Nonlinear Programming: Equality Constraints and Extrapolation, *Management Sci.*, 12, 816–828, 1966.
3. Fiacco, A. V., and McCormick, G. P.: The Slacked Unconstrained Minimization Technique for Convex Programming, *SIAM J. Appl. Math.*, 15, 505–515, 1967.
4. Fiacco, A. V., and McCormick, G. P.: Nonlinear Programming, John Wiley, New York, 1968.
5. Фихтенгольц, Г. М.: Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. I, II, III, *Наука*, Москва, 1966.
6. Fletcher, R.: A Class of Methods for Nonlinear Programming with Termination and Convergence Properties, In „Integer and Nonlinear Programming" (J. Abadie, ed.) 157–175, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1970.
7. Fletcher, R., and McCann, A. P.: Acceleration Techniques for Nonlinear Programming, In: „Optimization" (R. Fletcher, ed), 203–214, Academic Press, London, 1969.
8. Fletcher, R., and Powell, M. J. D.: A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization, *Computer J.*, 6, 163–168, 1963.
9. Fletcher, R., and Reeves, C. M.: Function Minimization by Conjugate Gradients, *Computer J.*, 7, 149–154, 1964.
10. Forsythe G. E. and Wasow, W. R.: Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations, John Wiley, New York, 1960.
11. Frank, M. and Wolfe, P.: An Algorithm for Quadratic Programming, *Naval Res. Log. Quart.*, 3, 95–110, 1956.
12. Frisch, R.: The Logarithmic Potential Method for Solving Linear Programming Problems, Memorandum of the University Institute of Economics, Oslo, 1955.

G

1. Gass, S. I.: Linear Programming, McGraw-Hill, 1969.
2. Geoffrion, A. M. (editor): Perspectives on Optimization, Addison-Wesley, 1972.
3. Гирсанов, Н. В.: Лекции по математической теории экстремальных задач, Изд. Московского Университета, 1970.
4. Goldstein, A. A.: Cauchy's Method for Minimization, *Num Math, IV*, 146–150, 1962.
5. Goldstein, A. A.: Constructive Real Analysis, Harper and Row, New York, 1967.
6. Goldfarb, D.: Extension of Davidon's Variable Metric Method to Maximization under Linear Inequality and Equality Constraints, *SIAM J. Appl. Math.*, 17, 1969.

H

1. Haarhoff, P. C. and Buys, J. D.: A New Method for the Optimization of a Nonlinear Function Subject to Nonlinear Constraints, *Computer J.*, 13, 178–184, 1970.
2. Hadley, G.: Linear Algebra, Addison-Wesley, 1961.
3. Hadley, G.: Linear Programming, Addison-Wesley, 1962.

4. Hestenes, M. R.: Multiplier and Gradient Methods, *J. Optim. Theory Appls.*, 4, 303–320, 1969.
5. Hestenes, M. R. and Stiefel, E.: Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Equations, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 49, 1952.
6. Hu, T. C.: Integer Programming and Network Flows, Addison-Wesley, 1970.

I

1. Ivanov, V.: Algorithms of Rapid Descent, *Soviet Math.*, 3, No. 2, pp. 476–479 (1962)

J

1. Юдин, Д. Б.: Математические методы управления в условиях неполной информации, Москва, 1977.

K

1. Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P.: Functional Analysis in Normed Spaces, Pergamon Press, Oxford, 1964.
2. Karlin, S.: Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics, Addison-Wesley, Reading, Massachusets, 1962.
3. Карманов, В., Г.: Математическое программирование, Наука, Москва, 1975.
4. Корбут, А. А., Финкельштейн, Ю., Ю.: Дискретное программирование, Наука, Москва, 1969.
5. Kovačević, V. V.: A Step Size Procedure, *Math. Balk.* 4, 1978.
6. Kovačević, V. V.: Some Extensions of Linearly Constrained Nonlinear Programming, *Proc. of a Conference held at Oberwolfach*, July 27–August 2, 1975.
7. Kovalik, J.: Nonlinear Programming Procedures and Design Optimization, *Acta Polytech. Scand.*, 13, Trondheim, 1966.
8. Kuhn, H. W.: Solvability and Consistency for Linear Equations and Inequalities, *Am. Math. Monthly*, 63(4), 217–232, April, 1956.
9. Künzi, H. P. und Krelle W.: Nichtlineare Programmierung, Springer-Verlag, Berlin, 1962.

L

1. Lasdon, L. S.: Optimization Theory for Large Systems, McMillan Comp., 1970.
2. Lemke, C. E.: The Dual Method of Solving the Linear Programming Problem, *Naval Research Logistic Quart.*, 1, 36–47, 1954.
3. Lootsma, F. A.: Extrapolation in Logarithmic Programming, *Philips Res. Repts.*, 23, 108–116, 1968.
4. Lootsma, F. A.: Constrained Optimization via Penalty Functions, *Philips Res. Repts.*, 23, 408–423, 1968.
5. Lootsma, F. A.: A Survey of Methods for solving Constrained Minimization Problems via Unconstrained Minimization, In „Numerical Methods for Nonlinear Optimization" (edited by F. A. Lootsma), Academic Press, London, pp. 313–347, 1972.
6. Luenberger, D. G.: Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley Publ. Co. Inc., 1973.

M

1. Mangasarian, O. L.: Nonlinear Programming, McGraw-Hill, New York, 1969.
2. McKinsey, J. C. C.: Introduction to the Theory of Games, Rand Corp. Santa Monica, 1952.
3. Mifflin, R.: A Superlinearly Convergent Algorithm for Minimization without Evaluating Derivatives, *Math. Programming*, 9, 100–117 (1975) No. 1.
4. Morgenstern, O.: Spieltheorie und Wirtschaftswissenschaft, R. Oldenburg, Wien, 1963.
5. Murtagh, B. A. and Sargent, R. W. H.: A Constrained Minimization Method with Quadratic Convergence, in „Optimization" R. Fletcher (ed), Academic Press, London, 1969.

O

1. Owen, G.: Game Theory, W. B. Saunders Co., Philadelphia, 1968.

P

1. Parthasarathy, T. and Raghavan, T. S.: Some Topics in Two-Person Games, Amer. Elsevier, New York, 1971.
2. Petrić, J.: Operaciona istraživanja I, II, PFV „Oeconomica", 1972.
3. Pietrzykowski, T.: Applications of the Steepest Descent Method to Concave Programming, in Proceedings of the IFIP Congress, München 1962, 185–189, North-Holland Publ. Co. Amsterdam, 1962.
4. Polak, E.: Computational Methods in Optimization, Academic Press, 1971.
5. Polak, E. and Ribière, G.: Note sur la Convergence de Méthodes de Directions Conjuguées, *Rev. Fr. Inform. Rech. Operation*, (16–R1), 35–43, 1969.
6. Поляк, Б. Т.: Градиентные методы минимизаций функционалов, *ЖВМ и МФ*, 3, 4, 643–653, 1963.
7. Поляк, Б. Т.: Метод сопраженных градиентов в задачах на экстремум, *ЖВМ и МФ*, 9, 4, 807–821, 1969.
8. Pomentale, T.: A New Method for Solving Conditioned Maxima Problems, *J. Math. Anal. Appls.*, 10, 216–220, 1965.
9. Powell, M. J. D.: An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Derivatives, *Computer J.*, Vol. 7, 155–162, 1964.
10. Powell, M. J. D.: A Method for Nonlinear Constraints in Minimization Problems, in „Optimization"(R. Fletcher ed.) 283–298, Academic Press, London, 1968.
11. Powell, M. J. D.: On the Convergence of the Variable Metric Algorithm, Mathematics Branch, Atomic Energy Research Establishment, Hanvell, Berkshire, England, October 1969.
12. Пшеничный, Б. Н., Данилин, Ю., М.: Численные методы в экстремальных задачах, Наука, Москва, 1975.

R

1. Ritter, K.: A Superlinearly Convergent Method for Unconstrained Minimization (u knjizi: Nonlinear Programming), Proc. Sympos., Univ. of Wisconsin, 177–206, Madison, 1970.).
2. Ritter, K.: A Method of Conjugate Directions for Linearly Constrained Nonlinear Programming Problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 12, 273–303 (1975).
3. Ritter, K. and McCormick, G.: Methods of Conjugate Directions Versus Quasi-Newton Methods, *Math. Prog.*, 3, 101–116, 1972.
4. Rockafellar, R. T.: Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, 1970.
5. Roode, J. D.: Generalized Lagrangian Functions in Mathematical Programming, Thesis, Leiden, The Netherlands, 1968.
6. Rosen, J. B.: The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, part I: Linear Constraints, *SIAM J. Appl. Math.*, 8, 181–217, 1960.
7. Rosen, J. B.: The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, part II: Nonlinear Constraints, *J. Soc. Ind. Appl. Math.* 9, 514–532 (1961).
8. Rosenbrock, H. H.: An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function, *Computer J.*, 3, 175–184, 1960.

S

1. Simonnard, M.: Programmation Linéaire, Dunod, Paris, 1962.
2. Sorenson, H. W.: Comparison of Some Conjugate Direction Procedures for Function Minimization, *J. Franklin Inst.*, 288, 421–441, 1969.
3. Stojanović, D.: Operaciona istraživanja, Ekonomski fakultet, Beograd, 1975.

T

1. Takahashi, I.: Variable Separation Principle in Mathematical Programming, *J. Oper. Res. Japan*, Vol. 6, 1964.

V

1. Valentine, F. A.: Convex Sets, McGraw-Hill, 1964.
2. Von Neumann, J. and Morgenstern, O.: Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, 1947.
3. Vujčić, V. V.: Some New Antizigzagging Precautions for Feasible Directions Methods, *Oper. Research Verfahren*, 31, 1979.

W

1. Wald, A.: Statistical Decision Functions, John Wiley and Sons, New York, 1950.
2. Wolfe, P.: The Method of Conjugate Gradients, Lectures delivered at the NATO Advanced Study Institute on Mathematical Programming in Theory and Practice, Figueira da Foz, Portugal, June, 1972.

3. Wolfe, P.: The Secant Method for Simultaneous Nonlinear Equations, *Comm. Assoc. Comp. Mach.*, 2, 12–13, 1959.

Z

1. Zangwill, W. I.: Nonlinear Programming via Penalty Functions, *Management Science*, 13, 344–358, 1967.
2. Zangwill, W. I.: Minimization of a Function without Calculating Derivatives, *Computer J.*, 10, 293–296, 1967.
3. Zangwill, W. I.: Nonlinear Programming, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1969.
4. Zoutendijk, G.: Methods of Feasible Directions, Elsevier, 1960.
5. Zoutendijk, G.: Mathematical Programming Methods, North-Holland, 1976.
6. Zwart, P. B.: Nonlinear Programming: Counter Examples to Global Optimization Algorithms by Ritter and Tui, *Op. Res.*, 21, 1260–1266, 1973.

Vera Vujčić, Miroslav Ašić i Nada Miličić

Matematičko programiranje

Beograd
1980.

Na kompozeru kucao .... Miodrag Matović
Korekture izvršili .... Vera Vujčić, Miroslav Ašić i Nada Miličić
Nacrt za korice .... Milan Čavčić

Tiraž: 1000 primeraka