

Matematički institut SANU

**Selected Papers
of
Đuro Kurepa**

Editorial Committee:

Aleksandar Ivić

Zlatko Mamuzić

Žarko Mijajlović (Editor-in-chief)

Stevo Todorčević

Beograd
1996

Издавач: Математички институт, Београд, Кнеза Михаила 35

Примљено за штампу 11. новембра 1994. године

одлуком Научног већа Математичког института

Рецензенти: Жарко Мијајловић и Миодраг Рашковић

Технички уредник: Драган Благојевић

Ликовно решење корица: Дејан М. Русић

Штампа: "Интерграф", Ватрослава Јагића 5, Београд

Штампање завршено децембра 1996.

Класификација Америчког математичког друштва

(AMS Mathematics Subject Classification): 00B60, 01A75, 04-03, 04A05, 04A20, 04A25, 04A30, 05-03, 05A10, 06A06, 06D30, 11-03, 11A99, 54-03, 54A25, 54E15, 54E35, 54F05, 54G15

Универзална децимална класификација: 510.22, 515.12, 511.172

CIP – Каталогизација у публикацији

Народна библиотека Србије, Београд

929:51 Курепа Ђ.

KUREPA, Đuro

Selected Papers of Đuro Kurepa / [Žarko Mijajlović, Editor-in-Chief].

– Beograd : Matematički institut SANU, 1996 (Beograd : Intergraf).

– 621 str. : graf. prikazi ; 24 cm.

Tekst na engl. i franc. jeziku.

– Tiraž 100. – Bibliografija uz svaki rad

ISBN 86-80593-21-4

510.22(081) 515.12(081) 511.172(081)

а) Курепа, Ђуро (1907–1993) б) Теорија скупова

ц) Топологија д) Теорија бројева

ID=50394636



CONTENTS

Preface	1
Duro Kurepa	2
A. Theory of Partially Ordered Sets	6
Ensembles ordonnés et ramifiés	12
Ensembles linéaires et une classe de tableaux ramifiés (Tableaux ramifiés de M. Aronszajn)	115
Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés	143
Une propriété des familles d'ensembles bien ordonnés linéaires	146
Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés	165
A propos d'une généralisation de la notion d'ensembles bien ordonnés	187
Sur les ensembles ordonnés dénombrables	199
L'hypothèse du continu et le problème de Souslin	205
Ensembles partiellement ordonnés et ensembles partiellement bien ordonnés	214
On a characteristic property of finite sets	222
Sur les fonctions réelles dans la famille des ensembles bien ordonnés de nombres rationnels	226
Ensembles ordonnés et leurs sous-ensembles bien ordonnés	236
Partitive sets and ordered chains	238
On a new reciprocity, distribution and duality law	278
B. Cardinal Functions in Topology	298
Le problème de Souslin et les espaces abstraits	302
Le problème de Souslin et les espaces abstraits	305
Le problème de Souslin et les espaces abstraits	308
La condition de Souslin et une propriété caractéristique des nombres réels	327
Sur une propriété caractéristique du continu linéaire et le problème de Suslin	329

On an inequality concerning cartesian multiplication	340
The cartesian multiplication and the cellularity number	342
Dendrity of spaces and of ordered sets	365
C. Partition Calculus in Set Theory	383
L'hypothèse du continu et les ensembles partiellement ordonnés	387
Sur la puissance des ensembles partiellement ordonnés	390
On reflexive symmetric relations and graphs	398
On the cardinal number of ordered sets and of symmetrical structures in dependence on the cardinal numbers of its chains and antichains	410
D. Axiomatic Set Theory	429
L'hypothèse de ramification	432
Sur la relation d'inclusion et l'axiome de choix de Zermelo	435
Über das Auswahlaxiom	446
Sur une hypothèse de la théorie des ensembles	451
Sur un principe de la théorie des espaces abstraits	453
Ein lemma über transformationen	456
General continuum hypothesis and ramifications	460
E. General Topology	466
Sur les espaces distanciés séparables généraux	469
Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo-distanciés	471
Sur les classes (\mathcal{E}) et (\mathcal{D})	474
Un critère de distanciabilité	482
Sur l'écart abstrait	489
On the existence of pseudometric non totally orderable spaces	522
Genesis of uniform spaces	534
A classification of topological spaces. Z-number of spaces	543
F. Number Theory	555
Factorials of cardinal numbers and trees	560
On p -adic spaces of Hensel	576
On the left factorial function $!N$	580
Left factorial function in complex domain	588
11 Problems	602
Right and left factorials	605

PREFACE

This book consists of 48 selected mathematical papers of Professor Đuro Kurepa taken from the list of 189 of his papers published in the Volume 57 (71), 1995 of the Publications de l'Institut Mathématique dedicated to him. They are divided into six separate sections each representing a subfield of Set Theory, Discrete Mathematics, General Topology, or Number Theory, where most (but not all!) of his mathematical achievement can be found. Each section is preceded by a commentary by one (or two) members of the Editorial Committee which may help the reader in placing Kurepa's work inside the particular area. All papers have been retypeset, and so we have used this opportunity to correct many typographical errors found in the original published papers. More serious corrections are marked with an asterisk and followed by an editorial footnote. It should also be noted that in the original papers Kurepa's first name appears in several different variations such as Georges, Georg, Gjuro, Djuro, etc. In this edition his name is written uniformly as Đuro.

We have received a considerable help in preparing this book from many of our colleagues either in the form of proofreading or in the form of some useful comments. Among them we are especially grateful to Dragan Blagojević, Kosta Došen, Ilijas Farah, Slobodanka Janković, Aleksandar Lipkovski, Mila Mršević, Tanja Ostrogorski, Predrag Tanović and Slobodan Vujošević.

Editorial Committee

ĐURO KUREPA

Đuro Kurepa was born on August 16, 1907 in Majske Poljane near Glina in Srpska Krajina as the fourteenth and last child of Rade and Anđelija Kurepa. He went to elementary and high school in Majske Poljane, Glina and Križevci. He got his diploma in theoretical mathematics and physics at the Faculty of Philosophy of the University of Zagreb in 1931. Kurepa spent the years 1932-1935 in Paris at the Faculté des Sciences and the Collège de France. He obtained his doctoral diploma at the Sorbonne in 1935 before a committee whose members were Paul Montel (president), Maurice Fréchet (supervisor), and Arnaud Denjoy. He received his post-doctoral education at some of the world's best institutions: the University of Warsaw and the University of Paris (1937), and after the Second World War he visited Cambridge (Massachusetts), the mathematical departments of the Universities of Chicago, Berkeley and Los Angeles, and the Institute of Advanced Studies in Princeton.

Kurepa's first employment was at the University of Zagreb in 1931, as an assistant in mathematics. He became an assistant professor at the same institution in 1937, associate professor in 1938, and full professor in 1948. He stayed in Zagreb until 1965 when he moved to Belgrade where he was invited to be full professor at the Faculty of Science of the University of Belgrade. He remained there until his retirement in 1977. Meanwhile, he was a visiting professor at Columbia University in New York (Summer School 1959), and Boulder, Colorado, in 1960. Besides the university teaching, Kurepa also worked successfully in organizing scientific work, too, and was very active in administrative matters. Thus, Kurepa was the chairman of the Mathematical Department of the Faculty of Philosophy in Zagreb; then since 1970 till 1980 chairman of the Mathematical Seminar of the Institute of Mathematics of SANU (the Serbian Academy of Sciences and Arts). Professor Kurepa was the founder and president of the Society of Mathematicians and Physicists of Croatia, and president of the Union of Yugoslav Societies of Mathematicians, Physicists and Astronomers. He was

also president of the Yugoslav National Committee for Mathematics, as well as president of the Balkan Mathematical Society. Furthermore, he was the founder and for many years the main editor of the scientific mathematical journal *Mathematica Balkanica*, now published in Sofia. Kurepa was also a member of the editorial board of Belgrade's *Publications de l'Institut Mathématique*, and the German journal *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*.

Professor Kurepa earned many awards, honors and distinctions. He received the highest prize of former Yugoslavia, the Award of AVNOJ (1976). He was a full member of SANU, the Academy of Science of Bosnia and Herzegovina, and a corresponding member of JAZU (Yugoslav Academy of Sciences and Arts) in Zagreb. Also, he was a member of the Tesla Memorial Society of the U.S.A. and Canada (1982), the Bernhard Bolzano Charter, and the Gramata Marin Drinov of the Bulgarian Academy of Science (Sofia 1987).

The scientific output of Professor Kurepa was tremendous. He published more than 200 scientific papers, and more than 700 writings: books, articles, reviews. His papers were published in journals all around the world, and some of them in the most recognized mathematical journals such as: *Mathematische Annalen*, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR*, *Fundamenta Mathematicae*, *Acta Mathematica*, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, *Journal of Symbolic Logic*, *Pacific Journal of Mathematics*. Many of his manuscripts were translated into English, French, Italian, and other languages. Kurepa also wrote about 1000 scientific reviews. He delivered scientific talks at many universities of Europe, America and Asia; for example, at Warsaw, Paris, Moscow, Jerusalem, Istanbul, Cambridge, Boston, Chicago, Berkeley, Princeton and Peking. As Kurepa himself told once: "I lectured at almost each of nineteen universities of (former) Yugoslavia, then in almost every European country, then in Canada, Cuba, Israel and Iraq, and I gave at least ten lectures in each of the following countries: France, Italy, Germany, the Soviet Union and the United States." He participated at dozens of international scientific symposia, and many of them were organized by himself (for example, the international conferences in topology in Herceg Novi 1968, Budva-Bečići 1972, Belgrade 1977).

The influence of Professor Kurepa on the development of mathematics in Yugoslavia was immense. As a professor of the University of Zagreb he introduced several mathematical disciplines, mainly concerning the foundations of mathematics and set theory. This is best witnessed by the following

words of Sibe Mardešić, a professor of at the University of Zagreb: "With his work and influence at the University of Zagreb, particularly introducing modern aspects into mathematics, he gained great benefits for our community."¹

His arrival to Belgrade in the mid-sixties, and the subsequent influence he had on the mathematical community there, may be described with almost the same words. Professor Kurepa exposed the newest results in diverse mathematical disciplines through many seminars, courses and talks which he delivered at the Faculty of Sciences and the Mathematical Institute. The topics of his lectures were among others: the construction of Cohen forcing, some questions concerning independence results in cardinal and ordinal arithmetic, ordered sets and general topology. But he was attracted to other mathematical topics, too. He gave valuable contributions to analysis, algebra, number theory, and even to those mathematical disciplines which were just appearing, as computer science, for example. The universality of his spirit is portrayed by the list of university courses he taught: Algebra, Analysis and Topology.

By publishing his doctoral dissertation *in extenso* in Belgrade's *Publications de l'Institut Mathématique* in 1935, Kurepa made a first contact with the Belgrade mathematical community. In the beginning of the fifties these contacts became deeper and more frequent. So, from a work² of Professor Zlatko Mamuzić we learn that Kurepa was invited already in 1952 to visit the University of Belgrade. On this occasion he gave talks on the theory of matrices, and held a seminar with topics in set theory, topology and algebra. In the same text we find the names of attendants of the seminar: Professor Mamuzić himself, Časlav Stanojević (who later became Professor of the University of Rolla, Missouri), Simon Četković (later Professor of the Faculty of Electric Engineering in Belgrade), Mirko Stojaković (Professor of Algebra of the University of Novi Sad) and others. By attending these seminars, many mathematicians gained ideas for their mathematical papers, while graduate students obtained themes for their master and doctoral theses. Many of these themes were formulated or initiated by Kurepa. These works include virtually all doctoral theses of the older generation of topologists, and many algebraists from all over Yugoslavia: Svetozar Kurepa, Zlatko Mamuzić, Sibe Mardešić, Pavle Papić, Viktor Sedmak, and a few

¹ Professor Đuro Kurepa, *Glasnik Mat.* 28(48) (1993), 333–343.

² *Povodom 35 godina knjige „Teorija skupova” profesora dr Đure Kurepe (On the occasion of 35 years of the book “Set theory” of Đuro Kurepa)*, *Istorijski spisi iz matematike i mehanike, Istorija matematičkih i mehaničkih nauka*, knj. 2, Matematički institut, Beograd, 1989.

years later, Ljubomir Ćirić, Rade Dacić, Milosav Marjanović, Veljko Perić, Milan Popadić, Ernest Stipanić and Mirko Stojaković. Professor Kurepa was supervisor (altogether 42 times) or member of examination boards for doctoral dissertations for many other mathematicians: Miroslav Ašić, Nataša Božović, Dušan Ćirić, Nada Miličić, Aleksandar Ivić, Milena Jelić, Gojko Kalajdžić, Ljubiša Kočinac, Žarko Mijajlović, Marica Prešić, Zoran Šami, Stevo Todorčević, Ratko Tošić, and others. Many of these mathematicians continued and developed further Kurepa's work.

Professor Kurepa had contacts with many mathematicians from all around the world. Thanks to him some of these mathematicians visited Belgrade: A. Tarski, P. Alexandroff, M. Krasner, N.A. Shanin, K. Devlin and others. Professor Kurepa was especially proud of his encounter with Nikola Tesla, the great Serbian scientist and engineer, with whom Kurepa was fascinated.

Kurepa was attracted to many areas in mathematics. He was especially interested in Set Theory, General Topology, Foundations of Mathematics, Number Theory and Algebra. His work includes themes on partially ordered sets, particularly trees, the Continuum Hypothesis, the Principle of Mathematical Induction, cardinal functions in topology, the general theory of uniform and metric spaces, fixed point theorems, the so-called left factorial function, and some problems in matrix theory. However, we shall not discuss here his mathematical achievements, since this will be done in the articles which precede various parts of this selection of his mathematical papers.

A. THEORY OF PARTIALLY ORDERED SETS

- A[35] *Ensembles ordonnés et ramifiés*, Publ. Math. Univ. Belgrade **4** (1935), 1–138.
- A[37] *Ensembles linéaires et une classe de tableaux ramifiés (Tableaux ramifiés de M. Aronszajn)*, Publ. Math. Univ. Belgrade **6/7** (1937/38), 129–160.
- A[37a] *Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés*, C.R. Acad. Sci. Paris **205** (1937), 1033–1035.
- A[40] *Une propriété des familles d'ensembles bien ordonnés linéaires*, Studia Math. **9** (1940), 23–42.
- A[40a] *Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés*, Revista de Ciencias (Lima) **42** No 434 (1940), 827–846; **43** No 437 (1941), 483–500.
- A[42] *A propos d'une généralisation de la notion d'ensembles bien ordonnés*, Acta Math. **75** (1942), 139–150.
- A[48] *Sur les ensembles ordonnés dénombrables*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. (2) **3** (1948), 145–150.
- A[48a] *L'hypothèse du continu et le problème de Souslin*, Publ. Inst. Math. Belgrade **2** (1948), 26–36.
- A[50] *Ensembles partiellement ordonnés et ensembles partiellement bien ordonnés*, Publ. Inst. Math. Belgrade **3** (1950), 119–125.
- A[52] *On a characteristic property of finite sets*, Pacific J. Math. **2** (1952), 323–326.
- A[54] *Sur les fonctions réelles dans la famille des ensembles bien ordonnés des nombres rationnels*, Bull. Internat. Acad. Yugosl. Cl. Math. Phys. Tech. (N.S.), **12** (1954), 35–42.
- A[56] *Ensembles ordonnés et leur sous-ensembles bien ordonnés*, C.R. Acad. Sci. Paris **242** (1956), 2202–2203.
- A[57] *Partitive sets and ordered chains*, Rad JAZU **302** (1957), 197–235.
- A[57a] *On a new reciprocity, distribution and duality law*, Pacific J. Math. **7** (1957), 1125–1145.

The most important publication in this group is Kurepa's thesis A[35] written under the direction of M. Fréchet. It was the first systematic study of trees and ramified partially ordered sets and of their close relationship to linear orderings. It was the source of many crucial notions and problems in this area such as, for example, the notions of *Aronszajn* and *Souslin tree*. It is the source of the problem whether inaccessible cardinals have the *tree property* i.e., whether they satisfy the analogue of König's infinity lemma, which was later proved by Hanf, Tarski and others ([12]) to be equivalent to the large cardinal property of *weak compactness*. Trees are classified in §8 A 11 as "large", "étroit" and "ambigu" according to their heights and widths. The very thin and tall trees ("étroit") always have cofinal branches i.e., chains intersecting every level (Theorem 5^{bis}). This is a fine result representing a recurring theme in applications of trees, especially in the partition calculus. This result was also a source of the problem whether the same fact is true about the class of slightly wider trees ("ambigu") i.e., the trees of height equal to some cardinal θ and whose levels are now only assumed to be of size $< \theta$ (rather than $< \lambda$ for some cardinal $\lambda < \theta$ as it was the case with the trees in Theorem 5^{bis}). This is the problem known today as the problem whether θ has the *tree property*. For $\theta = \omega_1$ the problem was solved in June 1934 by N. Aronszajn and appeared (with an acknowledgement) as Theorem 6 of A[35]. According to the footnote on the same page, Aronszajn constructed his tree as a subtree of the tree of all $1 - 1$ sequences from $\mathbb{Q}^{<\omega_1}$, while Kurepa's version of the proof presented in A[35] (and also in A[37]) was to build such a tree inside the tree $\sigma\mathbb{Q}$ (denoted by σ_0) of all (nonempty bounded) well-ordered subsets of rationals. This is the construction most frequently used in subsequent expositions of this result. In the sequel A[37; §27] he modified his construction in order to produce an Aronszajn tree with the surprising property that it is a union of countably many antichains, thus introducing yet another remarkable notion, the notion of a *special Aronszajn tree*. (It is known today that some care is needed to get such a tree, as it is possible to have nonspecial Aronszajn subtrees of both $\sigma\mathbb{Q}$ and the set of all $1 - 1$ sequences from $\mathbb{Q}^{<\omega_1}$; see [1] and [6].) The problem whether inaccessible cardinals have the tree property appears in §10.3. In the same place there is a remark that cardinals θ of the form $\omega_{\beta+1}$ carry θ -Aronszajn trees. Kurepa mentions neither that some form of GCH was used nor that ω_β is assumed to be a regular cardinal, since this is really the context in which the proof from the case $\theta = \omega_1$ generalizes without much difficulty. The first full description of this generalization is given by Specker [25]. That some form of GCH is needed for such a construction was proved much later by Mitchell and Silver [18]. Immediately after this in §10.4 one finds another remarkable problem asking whether every Aronszajn tree is a subtree of $\sigma\mathbb{Q}$, a problem which he would later frequently restate in even clearer form: Is every Aronszajn tree special? (At the end of §1 in A[40a] there is a remark which says that it was this problem which originally prompted Kurepa's extensive work on strictly increasing mappings from trees into the reals.) In fact, in A[40a; 2.44] one finds an even more far-sighted version of the problem: Is every tree with no uncountable branches and with levels of size $< \mathfrak{c}$ special? He repeated this problem on several occasions and this is what he had to say about it in A[35; §10.4]: "Le problème précédent est très intéressant et

important; en voilà un autre, plus difficile encore, qui occupe, à notre avis, une place particulière dans l'ensemble des problèmes mathématiques concernant la théorie des ensembles." The problem was solved more than 30 years later, first in the context of non-CH by Baumgartner-Malitz-Reinhardt ([4]) and then in the context of CH by Jensen ([7]) requiring one of the deepest applications of the method of forcing since its original invention. In the same 10.4 one finds yet another beautiful problem, "problème miraculeux I": Are every two uniformly branching Aronszajn trees isomorphic? He also mentions the related question: Is there a homogeneous Aronszajn tree? Kurepa was fascinated by the problem because in Theorem 1 of §10.5 he proved that every two countable infinitely branching trees of the same height are isomorphic. So if T and T' are two uniformly branching trees of height ω_1 and with countable levels, then for all $\alpha < \omega_1$, $T \upharpoonright \alpha$ and $T' \upharpoonright \alpha$ are isomorphic, but from this we cannot conclude that T and T' are isomorphic (let T be Aronszajn and T' be non-Aronszajn). This phenomena has reappeared much later in the field of Model Theory: there exist two nonisomorphic $L_{\infty\omega_1}$ -equivalent models of size \aleph_1 (see [5, p. 45]). The "probleme miraculeux I" was solved by Gaifman-Specker [10]: There exist nonisomorphic Aronszajn trees. The "Thèse" A[35] also contains the description of various operations on trees corresponding to the product and sum of linear orderings.

The paper A[42] is one of Kurepa's best written and most frequently cited papers. It is an exposition of the classification of trees which he started in his "Thèse" but now with particular emphasis on trees of height ω_1 . He, of course, mentions Aronszajn trees and the "premier problème miraculeux" about them. But now he turns his attention to the class of ω_1 -trees ("Suites (S)") with countable levels which are in some sense orthogonal to Aronszajn's: every node of T is a member of an ω_1 -branch. It was there that Kurepa pointed out the crucial problem about these trees which he couldn't solve: evaluate the number of all ω_1 -branches of such T . The possibility that this number (" $pUMT$ ") is of size $> \aleph_1$ is known today as *Kurepa's Hypothesis* which has been a subject of considerable interest among mathematicians since the publication of A[42] and especially since Silver [24] showed that its negation is equiconsistent with the existence of an inaccessible cardinal. The paper A[42] also introduces (under an equivalent description) the tree " μ " of all sequences $s: \alpha \rightarrow \omega$ ($\alpha < \omega_1$) which are nonzero on at most finitely many places and proves its remarkable minimality properties.

The Appendix C of A[35] contains the discussion of linearly ordered sets obtained by lexicographically ordering trees and especially Aronszajn trees. For example, Lemma 1 shows that the density of a subset S of T corresponds to the size of the initial part S generates. Lemma 2 says that the cellularity of the lexicographically ordered Aronszajn tree T corresponds to the size of antichains of T . The Appendix also contains the "problème miraculeux III": let S_1 and S_2 be two Aronszajn trees and let $S_1(\eta)$ and $S_2(\eta)$ be the lexicographical orderings of S_1 and S_2 generated by ordering successors of every node in order type η . Are $S_1(\eta)$ and $S_2(\eta)$ isomorphic? In the footnote 5 he mentions that this is related to the existence of a homogeneous Aronszajn line $S(\eta)$, whose existence would give an affirmative

answer to a question of Hausdorff [14; p. 156]: Is there a homogeneous linear ordering E such that E has neither uncountable well-ordered nor conversely well-ordered subset, while the density of E (and of every uncountable subset of E) is uncountable. This discovery of Aronszajn lines by itself stands as one of the finest in the whole theory of partially ordered sets as they have proved to be extremely deep and useful mathematical objects frequently occurring in seemingly unrelated problems ([8; footnote 7] or [20]). It is known today that the answer to the "problème miraculeux III" is negative and that indeed there exist many homogeneous Aronszajn lines but the version of the problem where we replace "isomorphic" by "containing uncountable isomorphic or conversely isomorphic subsets" is still open and in fact it is one of the central problems in the whole area (see [3]).

The "Thèse" A[35] contains another important notion; σE for a linearly (or partially) ordered set E , we define σE to be a tree of all *nonempty bounded* and well-ordered subsets of E with the end-extension as the tree ordering. The paper A[37] ends with the crucial question: Is there a strictly increasing function from $\sigma\mathbb{Q}$ into \mathbb{Q} ? The negative answer to this question came many years later in A[54] and A[56]. In fact Kurepa's first proof of this appearing in A[54] is not quite correct so we had to make a slight correction for the purpose of including it in this book. We conjecture that the difficulties were in the notion of $\sigma\mathbb{Q}$ i.e., that $\sigma\mathbb{Q}$ should have been the slightly bigger set $w\mathbb{Q}$ of *all* well-ordered subsets of \mathbb{Q} . The problems are clearly equivalent since $\sigma\mathbb{Q}$ and $w\mathbb{Q}$ differ in only two antichains which can be mapped to the $-\infty$ and $+\infty$ respectively and since $\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$ is isomorphic to $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. In the paper A[56] Kurepa finally realizes this and shows that for no partially ordered set E is there a strictly increasing mapping from wE into E . The proof is extremely short, identical to Hartog's proof ([13]) that there is no $1-1$ map from $\aleph(A)$ into A , where $\aleph(A)$ is the set of all ordinals α which can be injected into A . But A[56a; Théoreme 1] is a fine interpretation of the Hartogs phenomenon in the category of partially ordered sets. A similar but weaker phenomenon in the same theory was later found by Dilworth and Gleason [11].

In footnote 17 of the Appendix of A[35] one finds the question whether every uncountable subset of $\sigma\mathbb{Q}$ contains an uncountable antichain in connection with the celebrated problem of Souslin ([26]). The question is stated immediately after a proof that Souslin's problem is equivalent to the statement that every uncountable tree contains an uncountable chain or antichain i.e., that there are no Souslin trees. (This equivalence was later rediscovered by E. W. Miller [15] and Sierpinski [23]). The positive answer to this question about $\sigma\mathbb{Q}$ was given in A[40] while A[40a] contains some far reaching generalizations of this fact. The paper A[40a] contains many other interesting results among which is the fact that a poset E can be decomposed into countably many antichains iff there is a strictly increasing function from E into \mathbb{Q} . In the footnote 28 of A[42] one also finds the first explicit occurrence of the poset known today under the name of "Sierpinski poset" obtained by intersecting a well-ordering of the reals with the usual ordering.

In A[48] it is proved that among countable order types scattered ones are characterized by the fact that they do not contain a copy of some countable ordinal.

(This fact was later independently discovered by J. C. Shepherdson [21]; see also [19; p. 84].) Similar characterization is given involving the conversely well-ordered sets.

The extensive paper A[57] is a detailed study of the inter-embeddability of lexicographical powers 2^{ω_α} , 3^{ω_α} , ... as well as the study of the well-known dense-set problem of Knaster about the size of linearly ordered sets with given density. For example, it is shown in Theorem 8.1 (2) that the problem is equivalent to the problem about the size of chains in a given power-set algebra. The dense-set problem of Knaster was solved by Baumgartner [2] and Mitchell [18] after the invention of Forcing.

The paper A[48a], which appeared after almost 10 years of delay, contains the proof of the result announced in D[37; V]: Every uncountable well-founded poset having finite levels must have an uncountable chain. This result is frequently used today, especially in the theory of well-quasi orderings (see e.g. [9]). The paper A[50] might be the first paper in the cofinality theory of partial orderings, which has been recently a subject of considerable interest (see [16], [17]). The papers A[52] and A[57a] deal with the phenomenon when every (some) maximal chain intersects every maximal antichain. The subsequent paper of Shepherdson [22] is a nice supplement to A[52]. This has since then become a quite active area of research which can be seen, for example, from the recent survey [27].

Stevo Todorčević

REFERENCES

- [1] J. E. Baumgartner, *Decomposition and embedding of trees*, Notices Amer. Math. Soc. **17** (1970), 967.
- [2] ———, *Almost disjoint sets, the dense set problem and the partition calculus*, Ann. Math. Logic **10** (1970), 401–439.
- [3] ———, *Order types of real numbers and other uncountable linear orderings*, in: *Ordered Sets*, (I. Rival ed.), D. Reidel, Dordrecht, 1982, pp. 239–277,
- [4] J. E. Baumgartner, J. I. Malitz and W. Reinhardt' *Embedding trees in the rationals*, Proc. Natl. Acad. Sci USA **67** (1970), 1748–1753.
- [5] C. C. Chang, *Some remarks on the model theory of infinitary languages*, in: *The Syntax and Semantics of Infinitary Languages* (K. J. Barwise, ed.), Lecture Notes in Mathematics vol. 72, Springer-Verlag, 1968, pp. 36–63.
- [6] K. J. Devlin, *Note on a theorem of Baumgartner*, Fund. Math. **76** (1972), 255–260.
- [7] K. J. Devlin and H. Jonsbraten, *The Souslin problem*, Lecture Notes in Mathematics **405**, Springer-Verlag, 1974
- [8] P. Erdős and R. Rado, *A partition calculus in set theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **62** (1956), 427–489.
- [9] R. Fraïssé, *Theory of Relations*, North-Holland, Amsterdam, 1986.

-
- [10] H. Gaifman and E. Specker, *Isomorphism types of trees*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 1–7.
- [11] A. M. Gleason and R. P. Dilworth, *A generalized Cantor theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 704–705.
- [12] W. P. Hanf, *Incompactness in languages with infinitely long expressions*, Fund. Math. **53** (1964), 309–324.
- [13] E. Hartogs, *Über das Problem der Wohlordnung*, Math. Ann. **76** (1915), 436–443.
- [14] F. Hausdorff, *Untersuchungen über Ordnungstypen*, Ber. Wiss. Leipzig **50** (1900), 106–169.
- [15] E. W. Miller, *A note on Souslin's problem*, Amer. J. Math. **65** (1943), 673–678.
- [16] E. C. Milner and M. Pouzet, *On the cofinality of partially ordered sets*, in: *Ordered Sets* (I. Rival ed.), D. Reidel, Dordrecht, 1982, pp. 279–298.
- [17] E. C. Milner and K. Prikry, *The cofinality of partially ordered sets*, Proc. London Math. Soc. **46** (1983), 454–470.
- [18] W. J. Mitchell, *Aronszajn trees and the independence of the transfer property*, Ann. Math. Logic **5** (1972), 21–46.
- [19] J. G. Rosenstein, *Linear orderings*, Academic Press, New York, 1982.
- [20] S. Shelah, *Decomposing uncountable squares to countably many chains*, J. Combinatorial Theory Ser. A **21** (1976), 110–114.
- [21] J. C. Shepherdson, *Well-ordered subséries of general series*, Proc. London Math. Soc. **1** (1950), 291–307.
- [22] ———, *On two problems of Kurepa*, Pacific J. Math. **4** (1954), 301–304.
- [23] W. Sierpinski, *Sur un problème de la théorie générale des ensembles équivalent un problème de Souslin*, Fund. Math. **35** (1948), 165–174.
- [24] J. Silver, *The independence of Kurepa's conjecture and two-cardinal conjectures in model theory*, Proc. Symp. Pure Math. **13, I** (1971), Amer. Math. Soc., Providence, 383–390.
- [25] E. Specker, *Sur un problème de Sikorski*, Coll. Math. **2** (1949), 9–12.
- [26] M. Souslin, *Problème 3*, Fund. Math. **1** (1920), 223.
- [27] M. H. El-Zahar and N. Zaguia, *Antichains and cutsets*, in: *Combinatorics and Ordered Sets*, (I. Rival ed.), Contemporary Math. vol. 57, American Math. Soc., Providence, 1986, pp. 227–261.

ENSEMBLES ORDONNÉS ET RAMIFIÉS

I. Introduction

La théorie des ensembles ordonnés s'est heurtée, dès son début, à des problèmes présentant de sérieuses difficultés d'ordre plutôt logique que technique; tels sont: le problème de l'ordonnance ou de la bien-ordonnance d'un ensemble donné quelconque¹, le problème de l'existence d'un nombre cardinal entre k et 2^k , k étant un nombre cardinal infini quelconque². Ensuite, Michel Souslin³, un des premiers élèves de M. Lusin, a posé, dès 1917, le problème de savoir si tout ensemble ordonné continu E tel que $p_2 E = \aleph_0$ est nécessairement identique, au point de vue de l'ordre, au continu mathématique⁴, ou, ce qui revient au même à suite d'un théorème de Cantor, si un tel ensemble E est tel que $p_1 E = \aleph_0$.

Malgré des efforts continuels d'un grand nombre de mathématiciens, aucun des trois problèmes fondamentaux précédents n'est complètement résolu. Dans le présent travail, on a traité un ensemble de problèmes se rattachant au problème de Souslin. Bien que celui-ci ne soit pas définitivement résolu, on verra quelle est sa nature et quelles sont les difficultés qui s'opposent à sa solution. Voici le véritable aspect du problème de Souslin: E étant un ensemble ordonné continu, on se donne la donnée cellulaire

¹Ce problème est *partiellement* résolu par l'affirmative par M. Zermelo (en formulant "l'Axiome de Zermelo") et M. Fraenkel (en prouvant l'indépendance de l'axiome de Zermelo des autres axiomes de la théorie des ensembles); cependant, on est loin de prouver que l'axiome de Zermelo est *indépendant* d'un système *non-contradictoire* d'axiomes de la théorie des ensembles.

²La réponse présumée négative à ce problème est appelée Hypothèse de Cantor.

³C'est lui qui, avec M. Lusin, a inventé, en 1917, en généralisant les ensembles boreliens, les ensembles analytiques dont la théorie nous jette un peu de lumière sur la structure du Continu mathématique.

⁴L'ensemble des nombres réels x tels que $0 \leq x \leq 1$ est appelé Continu mathématique.

$p_2E = \aleph_0$, et on se demande quelle est la valeur du nombre p_1E dont le caractère est ponctuel⁵. Au sein de tableaux ramifiés (\equiv arbres généalogiques), le problème de Souslin est revêtu d'un caractère ponctuel. En effet, la réponse affirmative au problème de Souslin est une conséquence de l'une quelconque des deux hypothèses suivantes: 1) Toute suite ramifiée distinguée contient un sous-ensemble disjonctif non-dénombrable; 2) T étant un tableau ramifié quelconque, la borne supérieure $b T$ des puissances des sous-ensembles dégénérés⁶ de T est, dans T , atteinte; c'est-à-dire, T contient un sous-ensemble dégénéré ayant la puissance $b T$ (Postulat de ramification).

Une fois qu'on se trouve dans le domaine de tableaux ramifiés, un grand nombre de problèmes se posent d'eux-mêmes; notons celui-ci qui, par sa structure logique, occupe une place à part⁷: Deux suites distinguées quelconques de rang ω_1 sont-elles nécessairement semblables? (Premier problème miraculeux⁸.)

La réponse affirmative au problème précédent entraîne la réponse affirmative au problème de Souslin; celle-ci, de sa part, entraîne cette proposition que nous ne savons pas prouver: Tout sous-ensemble non-dénombrable de σ_0 ⁹ contient une famille non-dénombrable d'ensembles dont aucun n'est contenu dans aucun autre. Pour que, inversement, la proposition précédente entraîne la réponse affirmative au problème de Souslin, on devrait, ce que nous ne savons pas faire, démontrer que toute suite distinguée de rang ω_1 est semblable à un sous-ensemble de σ_0 .

⁵C'est par l'analyse précédente que nous avons pu formuler le Problème de la structure cellulaire des espaces abstraits (voir la note (11) du "Complément").

⁶Un arbre généalogique A est *dégénéré* si aucun couple de ses éléments, sauf ceux appartenant à la première génération de A , n'ont, dans A , les mêmes prédécesseurs.

⁷Tout en croyant que la réponse à ce problème ne soit pas négative, il n'y a aucun espoir d'en pouvoir donner une affirmative parce que celle-ci exige un passage à la limite non-dénombrable d'homéomorphies partielles non-dénombrables mutuellement enchevêtrées (c'est surtout M. Lusin qui a insisté sur la possibilité de tels phénomènes).

⁸Dans le langage courant, le Premier problème miraculeux s'exprime ainsi: Soient A^1, A^2 deux arbres généalogiques *infinis non-dénombrables* quelconques vérifiant ces conditions: a) Toute génération de A^i , ($i = 1, 2$) est infinie et dénombrable, b) A tout élément a de A^i correspond une infinité d'autres éléments de A^i , ($i = 1, 2$) ayant les mêmes prédécesseurs que a , c) Tout élément de A^i a au moins un *parent direct* dans toute génération de A^i , ($i = 1, 2$), d) Tout sous-ensemble d'individus de A^i , ($i = 1, 2$) deux à deux en parenté *directe*, est au plus dénombrable (l'existence de tels A a été prouvée, pour la première fois, par M.N. Aronszajn, cf. Note 9-3); peut-on, alors, établir une *correspondance biunivoque* entre les éléments de A^1 et ceux de A^2 *conservant leur degré de parenté*.

⁹ σ_0 désigne la famille des sous-ensembles bien-ordonnés non-vides et bornés de l'ensemble des nombres rationnels. Si l'on considère les éléments de σ comme complexes de points, σ_0 devient un tableau ramifié jouissant d'intéressantes propriétés. (V. Lemme 10-4).

Il est remarquable que, en attaquant, en liaison avec le problème de Souslin, différents problèmes concernant des tableaux ramifiés – tels que l'existence d'une descente disjonctive dans toute suite distinguée –, on se heurte à des difficultés qui, par un certain dualisme logique, nous rappellent des difficultés qu'on rencontre en voulant prouver l'Hypothèse de Cantor (pour le dualisme des mots "au moins un" et "tout" (sans exception, voir la note (17) du "Complément").

Quant à d'autres problèmes liés aux précédents, voir le Théorème fondamental du "Complément".

Enfin, dans un travail particulier, nous reviendrons sur une catégorie de problèmes liés au problème de Souslin, et chez lesquels c'est une certaine notion d'*uniformité* qui domine¹⁰.

Le présent travail se compose de trois parties:

Le Chapitre I traite des E ¹¹. Après avoir posé, dans le §1, un certain nombre de définitions, on démontre, dans le §2, quelques propriétés utiles des nombres transfinis, pour passer, dans le §3, à l'étude des E : on prête une attention particulière à la distinction entre différentes espèces de portions de E à la suite de quoi on formule trois principes de l'induction; le §3 se termine par la considération de certains sous-ensembles et sur-ensembles d'un E donné [V. la signification de fE en ($f = l, L, s, S, u.v, w$)]. Le §4 contient une étude assez détaillée de familles monotones d'ensembles (commencée par M.M. Zermelo et Kuratowski), et leur application à la définition des ensembles ordonnés (cf, le théorème 3 du §4). Dans le §5, on esquisse la notion de complexes de points (due à M. Hausdorff) et on étudie différentes opérations avec ceux-ci. Le §5 rend compte de la liaison entre les espaces ordonnés et plusieurs catégories d'espaces étudiés par M. Fréchet; on y démontre que le continu mathématique est caractérisé, au point de vue de l'ordre, par la propriété d'être un espace ordonné continu distanciable. Le dernier § du Chap. I contient les notions importantes des familles disjonctives d'ensembles et des puissances $p_i E$, ($i = 0, 1, \dots, 5$) attachées à un E , et différents théorèmes concernant celles-ci.

Le Chapitre II traite des T et E ¹¹. Le §8 contient la définition des ensembles, tableaux et suites ramifiés, la notion de différents sous-ensembles

¹⁰ A ce propos, cf. le *Postulate of Uniformity* de M. Veblen (Trans. Amer. Math. Soc. 9(1908), p. 166) aussi bien que le critère de M. Alexandroff-Urysohn sur la distanciability des espaces accessibles (pour son énoncé, voir p. 220 des *Espaces abstraits* de M. Fréchet); voir aussi les hypothèses P_6, P_7 du "Complément" chez lesquelles c'est la notion d'une certaine *unicité* qui intervient.

¹¹ E, T désigneront respectivement un ensemble ordonné et un tableau ramifié quelconques.

d'un T (portion, noeud etc.), classification des T en larges, étroits et ambigus; on introduit la notion de familles et de tableaux ramifiés d'ensembles, on donne, en généralisant une idée due à M. Lebesgue, la représentation de ceux-ci au moyen de complexes de points dont un cas particulier sera utilisé, dans le §12 B, pour résoudre un problème de M. Sierpinski; on reprend l'étude de complexes en définissant leur *ordonnance naturelle* dont on fait, par la suite, usage à plusieurs reprises (Existence de suites distinguées, Second problème miraculeux. Hypothèses P_6 et P_7 du Complément, etc.). Le §9 contient l'étude de quelques questions se rattachant à la notion importante de *Traversées monotones et disjonctives* d'un T . Dans le §10, on introduit la notion de *types de ramification* et, en établissant quelques théorèmes, on arrive au *Premier problème miraculeux*. Dans le §11, on attache à tout T deux puissances bT , $b'T$, on définit des T *normaux* et on pose la question de l'existence des T *anormaux*. Enfin, dans le §12, on revient aux E , on introduit la notion de *développement complet* d'un E et en particulier celle d'une *ϑ -partition complète des E continus*; on redonne la solution d'un problème de Sierpinski et on arrive au problème de Souslin et à la notion de E *normaux*.

Quant au "*Complément*", sa lecture est particulièrement recommandée.

L'origine de ce travail était l'idée de généraliser les espaces distancés de M. Fréchet en faisant jouer le rôle de nombres réels aux éléments d'un ensemble ordonné quelconque (Cf. la définition des espaces pseudo-distancés dans les C.R. Acad. Sci. Paris, 30 avril 1934); quelques résultats ont paru dans les C.R. Acad. Sci. Paris (19 Février, 5 Mars et 9 Juillet 1934).

Pour terminer, j'exprime ma plus vive reconnaissance à M.V. Varičak, Professeur à l'Université de Zagreb, pour ses encouragements et l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à mes travaux. Qu'il me soit permis d'adresser l'expression de ma profonde gratitude envers MM. Borel et Hadamard. Je remercie infiniment: M. Montel de ces conseils et des innombrables services qu'il a bien voulu me rendre, M. Fréchet de ses précieux conseils et de l'intérêt constant qu'il a porté à mes travaux, et M. Denjoy de ces conversations, instructives et encourageantes à la fois.

CHAPITRE I

ENSEMBLES ORDONNÉS DE POINTS

§1. Définitions générales

1. x, y , étant deux objets¹, la lettre \mathcal{R} , dans un symbole de la forme $x\mathcal{R}y$, est une relation binaire dont x est le premier et y le second terme.

Si la relation binaire \mathcal{R} subsiste entre tout couple de points d'un ensemble E , on dira que E est *domaine de \mathcal{R}* .

Si $x\mathcal{R}x$ est vraie pour tout x , la relation \mathcal{R} sera dite *réflexive*. Si $x\mathcal{R}x$ n'est vraie pour aucun x , \mathcal{R} sera dite *anti-réflexive*.

Si $x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}x$ subsistent simultanément pour tout x et tout y , \mathcal{R} sera dite *symétrique*; si cela n'a lieu pour aucun couple x, y , \mathcal{R} sera dite *anti-symétrique*.

Si $x\mathcal{R}z$ subsiste toutes les fois que $x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}z$, \mathcal{R} sera dite *transitive*. Si cela n'arrive pour aucun triple de points, la relation \mathcal{R} sera dite *anti-transitive*.

2. Une relation réflexive, symétrique et transitive sera appelée *relation de classification* ou simplement *classification*, et désignée par le symbole particulier \sim qu'on pourra lire "équivalent", "congruent", etc.

L'identité est une relation de classification. Soient E le domaine d'une classification \sim et a un élément de E ; en appelant *faisceau a de E* l'ensemble E_a de tous les points x de E tels que $x \sim a$, on a ce

LEMME I: $E = \sum_a E_a^2$, $a \in E$; les E_a sont tels que $E_a = E_b$ si $a \sim b$, et $E_a E_b = 0$ si $a \not\sim b$.

¹Le mot "objet" est le nom commun pour "élément" et "ensemble" tels qu'il sont axiomatisés, par ex. par M.E. Zermelo (Fund. Math. 16(1930), p. 29 et suiv.). Si a est un élément d'un ensemble E , on écrira $a \in E$ ou $E \ni a$; dans le cas contraire, on écrira $a \notin E$; E, F étant deux ensembles, on écrira $F \subseteq E$ ou $E \supseteq F$ si tout élément de F est un élément de E ; F sera dit alors un *sous-ensemble* de E , et E un *sur-ensemble* de F . Si $F \subseteq E$ sans que $E \supseteq F$, on écrira $F \subset E$ et dira que $F(E)$ est un vrai *sous-ensemble* (sur-ensemble) de $E(F)$. En désignant l'ensemble vide par 0, le symbole $0 \subset E$ voudra dire que E n'est pas vide, c'est à dire $pE > 1$, pE désignant la *puissance* de E ; a étant un objet quelconque, on désignera, en cas d'ambiguïté, par $\{a\}$ l'ensemble (ou la famille) composé de l'élément a .

² Φ étant une classe de familles \mathcal{F} d'ensembles E de points a , le signe $\sum \Phi$ désignera la réunion de tous les points a . Le signe $\sum' \Phi$ désignera la famille de tous les E appartenant à au moins une famille \mathcal{F} . D'une façon analogue, on définit $\prod \Phi$ et $\prod' \Phi$. En particulier, deux ensembles E, F , tels que $EF = 0$ seront dits *disjoints*.

3. Une relation d'ordre est une relation binaire qui est anti-réflexive, anti-symétrique et transitive; elle sera désignée par le symbole $<$ qu'on pourra lire "précède", "inférieure à" "avant", etc.

Le signe $a < b$ sera écrit aussi sous la forme $b > a$.

On voit que le signe $>$ est aussi une relation d'ordre ayant le même domaine que la relation $<$. La relation $>$ sera dite *relation inverse de $<$* et lue "succède à" "plus grand que", "après" etc.

4. Un ensemble de points, E , sera dit *ordonné* si l'on peut établir, entre ses points, une relation d'ordre $<$; autrement dit³, un ensemble ordonné E est une paire d'un ensemble de points, P , et d'une relation d'ordre $<$ ayant P pour domaine. On écrira $E = (P, <)$. De plus, l'ensemble vide et tout ensemble composé d'un seul élément seront considérés comme d'ensembles ordonnés. (cf. relation de comparabilité dans le §8).

L'ensemble ordonné $(P, >)$ sera désigné par E^* et appelé *inverse de E* .

Dorénavant, sauf mention expresse du contraire, E désignera un ensemble ordonné. F étant un sous-ensemble de E , F sera considéré comme *ordonné* par la même relation d'ordre par laquelle E est ordonné. En particulier, \mathcal{F} étant une famille de sous-ensembles de E , l'ensemble $\sum F$ sera toujours considéré comme un sous-ensemble ordonné de E . A, B , étant deux ensembles non-vides de E , le signe $A < B$ voudra dire que tout point de A précède tout point de B .

Convention 1. L'ensemble vide pourra, dans le cas général, précéder et succéder, à la fois, à tout point de chaque ensemble ordonné. En particulier, si $A < B$, on aura aussi $A < 0 < B$.

5. G, H étant deux sous-ensembles de E , les symboles $(., G)_H$ et $(G, .)_H$ désigneront respectivement l'ensemble de tous les points de H qui précèdent les points de G et l'ensemble de tous les points de H qui succèdent aux points de G . En particulier, a étant un point de E , l'ensemble $(., a)_E$ ou simplement $(., a)$ sera appelé *intervalle de E à gauche de a* ou, ce qui est plus commode, *intervalle gauche a de E* .

L'ensemble $(., a)_E + a$ sera appelé *segment gauche a de E* et désigné par $(., a]_E$ ou $(., a]$. D'une façon analogue⁴, on définit le *segment droit a de E* qu'on désignera par $[a, .)_E$ ou $[a, .)$. Le point a sera dit *extrémité* de

³Cette définition est due à M.M. Fréchet.

⁴On remarquera, une fois pour toutes, que les expressions telles que: gauche-droit, premier-dernier, etc. sont dans une certaine dépendance dualistique, parce que, par exemple, "gauche" dans E veut dire "droit" dans E^* . C'est ainsi que par exemple le *segment droit a de E* veut dire "le segment gauche a de E^* ".

$(., a)$, $(., a]$, $(a, .)$ et de $[a, .)$. a, b étant deux points différents d'un E tel que $pE > 1$, l'ensemble ordonné

$$(a, .)(., b) + (b, .)(., a)$$

sera appelé *intervalle a b* ou *b a* de E et désigné par $(a, b)_E$ ou (a, b) ou $(b, a)_E$ ou (b, a) ; autrement dit (a, b) est l'ensemble de tous les points x de E tels que $a < x < b$ si $a < b$ ou $b < x < a$ si $b < a$;

L'ensemble $a + (a, b) + b$ sera appelé *segment a b* ou *b a* de E et désigné par $[a, b]_E$ ou $[a, b]$ ou $[b, a]_E$ ou $[b, a]$. Le signe $x \in (a, b)_E$ sera lu aussi: x est entre a et b ou entre b et a .

On posera $[a, b]_E = a + (a, b)$, $(a, b]_E = b + (a, b)$.

Les points a, b seront appelés *extrémités* de $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ et (a, b) .

Les intervalles (segments), les intervalles (segmentes) gauches et droits de E , seront appelés, tout court, *intervalles (segments)* de E^5 .

6. L'ensemble vide, tout ensemble composé d'un seul point de E , les segments, les intervalles et les ensembles $[a, b]_E$ et $(a, b]_E$ seront appelés, en commun, *portions élémentaires de E*. Tout sous-ensemble F de E tel que $[a, b]_E \subseteq F$ si $a + b \subseteq F$, a, b étant quelconques, sera dit *portion de E*. Par conséquent, tout point de E est une portion de E . Tout sous-ensemble F de E tel que $(., a]_E \subseteq F$ si $a \in F$, a étant quelconque, sera appelé *portion gauche de E*.

L'ensemble vide sera considéré comme une portion, portion gauche et portion droite de E .

7. Un sous-ensemble non-vidé F de E sera dit *borné inférieurement dans E* s'il est contenu dans un *segment droit* de E . On dira que F est *limité inférieurement* s'il contient un point a tel que $[a, .)_E \supseteq F$. Le point a sera dit alors le *premier* point de F . On dira que F est *borné dans E*, s'il est borné, dans E , inférieurement et supérieurement, c'est à dire s'il appartient à un segment de E . F sera dit *limité* s'il a un *premier* et un *dernier* point.

Si E n'a ni un premier ni un dernier point, il sera dit *anti-limité*. Par conséquent, un ensemble non-limité, n'est pas nécessairement anti-limité. L'ensemble vide sera considéré comme anti-limité.

On dira que la *borne supérieure*⁶ relativement à E , d'un sous-ensemble non-vidé F de E existe et qu'elle est égale à a si a est ou bien le dernier

⁵Cf. A. Denjoy, J. Math. 1(1915), 106.

⁶Cf. R. Baire, *Leçons sur les théories générales de l'Analyse*, t. I Paris, 1907, p. 7 et suiv.

point de F ou bien, si F n'a pas un dernier point, alors a est le premier point de $(F, \cdot)_E$.

8. Si tout sous-ensemble non-vide de E est *limité*, E sera dit *fini*; dans le cas contraire, E sera dit *infini*. Si tout sous-ensemble non-vide de E a un premier (dernier) point, E sera dit *bien ordonné* (inversement bien ordonné). L'ensemble vide sera considéré comme fini, bien-ordonné et inversement bien-ordonné. On s'aperçoit que cette définition de ensembles finis est équivalente à la définition courante⁷.

9. *Espaces ordonnés*. F étant un sous-ensemble de E , la fermeture \bar{F} de F relativement à E est l'ensemble de tous les points a de E tels que dans tout *intervalle* de E contenant a , il y ait au moins un point de F^3 . Tout point a de E appartenant à la fermeture de $F - a$ sera appelé *point d'accumulation de F^3* (relativement à E). En particulier, si a appartient à la fermeture de $(\cdot, a]_E$, a sera dit point d'accumulation de F *du côté gauche*. Si a est un point d'accumulation de F du côté gauche et du côté droit, a sera dit point d'accumulation *bilatérale* de F . L'ensemble *dérivé* F' de F , relativement à E , sera l'ensemble de tous les points d'accumulation de F . Tout point de F qui n'est pas un point d'accumulation de F , sera dit point *isolé* de F . Si $F' \subseteq F$, F sera dit *fermé*. Si $F' \supseteq F$, F sera dit *dense en soi*. F ayant au moins deux points sera dit *dense* (au sens absolu) si tout point a de F est un point d'accumulation aussi bien de $(\cdot, a)_E$ si $(\cdot, a)_F \supset \emptyset$ que de $(a, \cdot)_F$ si $(a, \cdot) \supset \emptyset$.

G, H étant deux sous-ensembles de E , on dira que G est *partout dense sur H* si $\bar{G} \supseteq H^3$. Sous la même hypothèse, on dira que G, H sont *mutuellement connexes*³ si $\bar{G}H + G\bar{H} \supset \emptyset$.

Un sous-ensemble F de E sera dit *connexe* si, en le décomposant d'une manière quelconque en deux sous-ensembles, ceux-ci sont mutuellement *connexes*³.

Convention 2. Sauf mention expresse du contraire, tout ensemble ordonné composé d'un seul point sera considéré comme non-connexe⁸.

Remarque. D'après ce qui précède, on doit *distinguer* les *espaces ordonnés* des *ensembles ordonnés* ou, comme on les appellera dans le second

⁷Sur la théorie des ensembles finis, voir A. Tarski, *Fund. Math.* 6(1922), p. 45-95.

⁸Pour la terminologie, voir M. Fréchet, *Espaces abstraits*, Paris, 1928, p. 173 et 288; W. Sierpinski, *Nombres transfinis*, Paris, 1926, chap. VII; et F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914, p. 474. Ces trois livres seront désignés, dans ce qui va suivre, respectivement, E.A., N.T. et G.M.

chapitre, ensembles *monotones*, un *espace ordonné* étant un ensemble ordonné dans lequel l'opération de dérivation, qu'on vient de définir, des sous-ensembles de E est donnée (ou ce qui revient au même, si l'on se donne l'opération de faire correspondre à tout $F \subseteq E$ un $\bar{F} \subseteq E$). Cette remarque sera utile dans la suite⁹.

10. Chaque décomposition de E en deux portions disjointes sera appelée *coupure* de E . Excepté le cas où l'une des portions en question est vide, on voit que l'une d'elle est à gauche de l'autre. Si l'une d'elles est vide, on aura deux coupures différentes suivant qu'on prend la portion vide pour la portion gauche ou droite et alors l'ensemble E lui-même pour portion droite ou gauche. Alors la portion qui est à gauche de l'autre, sera appelée *composant inférieur* de la coupure en question, ou (portion à gauche de la coupure).

P étant une portion de E , la coupure P de E signifiera la décomposition $E = A + P + B$, $A < P < B$ c'est à dire la décomposition $E = (., P)_E + P + (P, .)_E$.

On dira qu'une coupure de E ouvre une lacune de E (ou dans E) si la portion à gauche de la coupure n'a pas un dernier élément et si sa portion droite n'a pas un premier élément; si, de plus, les deux portions sont non-vides, la lacune correspondante sera dite *intérieure*. Si E a au moins une lacune, il sera dit *lacunaire*; dans le cas contraire, E sera dit *non-lacunaire*. L'ensemble vide sera considéré comme *lacunaire*. On dira que la coupure AB de E est engendrée par le saut AB ou ab de E si a est le dernier point de A et b le premier point de B .

11. D'une manière générale, tout couple de points différents a, b de E entre lesquels il n'y a aucun point de E c'est à dire qui sont tels que $(a, b)_E = 0$, sera appelé un saut de E ; les deux points seront appelés *extrémités* du saut. Si les extrémités d'un saut de E sont points d'accumulation de E , le saut sera dit de *seconde espèce*. Tout saut qui n'est pas de seconde espèce, sera dit de *première espèce* (Cf. la définition des nombres ordinaux de première et de seconde espèce dans le §2).

12. Un ensemble ordonné *dense* et non-lacunaire sera dit *continu*.

P étant une propriété quelconque d'intervalles, on dira que E possède partout la propriété P ou que E possède totalement la propriété P , si tout intervalle non-vide de E possède la propriété P . On saura alors la signification des notions: partout lacunaire, totalement non-connexe, etc.

⁹Cette remarque est due à M. Fréchet.

13. G, H étant deux sous-ensembles non-vides d'un ensemble ordonné E , on dira que G, H sont *confinaux* (coinitiaux) si *ou bien* ils ont le même dernier (premier) élément *ou bien* après (avant) tout point de G il y a un point de H et après (avant) tout point de H il y a un point de G .

Si G, H sont coinitiaux et confiniaux, ils seront dits *coextensifs*¹⁰.

14. Deux ensembles ordonnés sont dits *semblables* si, entre leurs points, on peut établir une correspondance bi-univoque conservant l'ordre relatif des points.

A chaque E on fera correspondre un et un seul signe tE appelé *type ordinal* de E . Le symbole $tG \leq tH$ ou $tH \geq tG$ voudra dire que G est semblable à un sous-ensemble de H . On écrira $tG = tH$ si $tG \leq tH$ et $tG \geq tH$. Enfin, le symbole $tG || tH$ signifiera qu'aucun des signes $tG \leq tH$ et $tH \leq tG$ n'ait lieu. Dans le dernier cas, on dira que tG et tH sont *incomparables*¹¹.

Convention 3. Dans une certaine phrase, on dira, par abréviation, *type ordinal* α au lieu de: tout type ordinal α qui substitué à α dans P ne change pas le sens de cette phrase.

15. F étant un ensemble ordonné, soient E_a, a parcourant F , les éléments d'une famille d'ensembles ordonnés qui sont, pour des a différents, deux à deux disjoints; alors *l'ensemble-somme* $E = \sum_F E_a$ signifiera la réunion des points des E_a ordonnée de manière que les points d'un même E conservent leur ordre primitif et $E_a \leq E_b$ dans E suivant que $a \leq b$ dans F .

On posera $tE = \sum_F tE_a$. A, B étant deux ensembles ordonnés le *produit* (combinatoire) $A \times B$ de A et B est l'ensemble de tous les couples (b, a) , $a \in A, b \in B$ ordonnés *alphabétiquement* (d'après le *principe de premières différences*):

On posera $(b', a') = (b, a)$ si $b = b'$ et $a = a'$; on posera $(b', a') \leq (b, a)$ dans $A \times B$ suivant que ou bien $b' \leq b$ dans B ou bien $b' = b$ et $a' \leq a$ dans A (cf. §§ 5 et 13).

¹⁰G.M. p. 130.

¹¹Cf. G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin-Leipzig 1932 p. 282; et E.A. p. 31 et suiv.

§2. Sur les nombres transfinis

A. Nombres ordinaux.

1. Les types ordinaux des ensembles bien ordonnés s'appellent *nombres ordinaux* ou simplement *ordinaux*¹². Tout nombre ordinal qui est un point d'accumulation d'autres nombres ordinaux sera dit de *seconde espèce*. Tout ordinal qui n'est pas de seconde espèce sera dit de *première espèce*. On désignera par $p\alpha$ et on appellera puissance du nombre ordinal α la puissance de l'ensemble de type ordinal α .

2. Un ordinal α étant donné, le *type-limite* $\tau\alpha$ de α est défini comme il suit¹³: si α est de première espèce, alors $\tau\alpha = \alpha$; si α est de seconde espèce, $\tau\alpha$ est la borne inférieure, relativement à l'ensemble des ordinaux, des nombres ordinaux ξ tels que α soit la borne supérieure d'une ξ -suite d'ordinaux $< \alpha$ ¹⁴. Si $\tau\alpha = \alpha$, α sera dit *régulier*; si $\tau\alpha < \alpha$, α sera dit *singulier*. Si α est régulier et de seconde espèce, il sera appelé *inaccessible*¹⁵.

Tout ordinal infini dont la puissance est supérieure à celle d'un ordinal quelconque qui le précède, sera dit *initial*. Les nombres initiaux seront désignés par:

$$\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_\alpha, \dots \text{ pour tout ordinal } \alpha \geq 0,$$

$\omega \equiv \omega_0$ signifiant le plus petit ordinal initial et ω_α pour $\alpha > 0$, désignant la borne inférieure des ordinaux β tel que $p\beta > p\omega_\xi$, $\xi < \alpha$.

On posera $p\omega_\alpha = \aleph_\alpha$ et lira *aleph* α .

Pour la suite, il faut retenir qu'on posera:

$$\tau\aleph_\alpha = \tau\omega_\alpha.$$

On parlera d'alephs \aleph_α réguliers, inaccessibles, etc., suivant que le sont les ω_α correspondants. Les alephs seront appelés aussi *nombres cardinaux transfinis* (ou infinis).

¹²Pour la théorie axiomatique des nombres ordinaux, voir A. Fraenkel, J. Math. 155(1926), p. 129-158; J. von Neumann, Math. Ann. 99(1928), p. 373-391.

¹³La notion de $\tau\alpha$ interviendra très fréquemment dans le chap. II.

¹⁴Tout ensemble bien ordonné de type ordinal φ s'appellera aussi une φ -suite. Il est à remarquer que, α étant un ordinal, l'ensemble $(., \alpha)$ des ordinaux précédant α forment une α -suite (voir N.T. p. 171).

¹⁵Concernant la théorie des nombres inaccessibles, voir A. Tarski, W. Sierpinski, Fund. Math. 15(1930), p. 292-300; quant à leur existence et interprétation, voir E. Zermelo, loc. cit. §§ 2 et 5.

LEMME 1. *Le type-limite $\tau\alpha$ de tout ordinal α est un ordinal régulier bien déterminé et tel que $\tau\alpha \leq \alpha$.*

COROLLAIRE 1. *Tout nombre ordinal est ou bien singulier ou bien régulier.*

LEMME 2. *La borne inférieure de tout ensemble E d'ordinaux appartient à E . Si $pE < p\tau\gamma$, γ désignant la borne supérieure de E , alors $\gamma \in E$.*

S'il s'agit des nombres cardinaux, le lemme précédent s'énonce comme suit:

LEMME 2'. *Soient E un ensemble quelconque de nombres cardinaux et c la somme de ceux-ci; si $pE < p\tau c$, alors le nombre cardinal c appartient à E .*

Le lemme précédent interviendra assez fréquemment dans le chapitre II.

3. E étant un ensemble d'ordinaux et γ_0 sa borne inférieure, on dira que $\varphi(\alpha)$ est une *fonction rétractante dans E* si pour tout $\alpha \in E$, $\varphi(\alpha)$ est un nombre ordinal tel que $\varphi(\gamma_0) \leq \gamma_0$ et $\varphi(\beta) < \beta$ pour tout $\beta \in E - \gamma_0$.

En rappelant que $(., \alpha)$ désigne l'ensemble des ordinaux $< \alpha$, on a ce

THÉORÈME 1. *Soient γ un nombre ordinal de seconde espèce tel que $\tau\gamma > \omega_0$ et $\varphi(\alpha)$ une fonction rétractante définie dans $(., \gamma)$; alors, il existe un ensemble $E \subset (., \gamma)$ avant γ pour borne supérieure et tel que $\varphi(\alpha) < E$ pour tout $\alpha \in E$.*

En effet, ou bien pour tout $\alpha < \gamma$ il existe un nombre ordinal $\nu(\alpha)$ tel que $\alpha < \nu(\alpha) < \gamma$ et que, pour tout β entre $\nu(\alpha)$ et γ , on ait $\alpha < \varphi(\beta)$ ou bien il y a un ordinal $\alpha < \gamma$ pour lequel un tel nombre $\nu(\alpha)$ n'existe pas. Si le premier cas avait lieu, on poserait $\beta_0 = 1$, $\beta_{n+1} = \nu(\beta_n)$, $n = 0, 1, \dots$ et $\beta_{\omega_0} =$ borne sup. β_n ; on voit qu'on aurait $\varphi(\beta_{\omega_0}) \geq \beta_{\omega_0}$ et $\beta_{\omega_0} < \gamma$, contrairement à la définition de la fonction $\varphi(\alpha)$.

Il y a donc un nombre, et soit α_0 le premier nombre ordinal $\xi < \gamma$ tel que, pour tout β entre ξ et γ il y ait un nombre α entre β et γ tel $\varphi(\alpha) \leq \xi$. En désignant par E l'ensemble de tous les $\alpha \in (\alpha_0, \gamma)$ tels que $\varphi(\alpha) \leq \alpha_0$, on voit que E satisfait aux conditions du théorème.

COROLLAIRE 2. *γ étant un nombre initial régulier non-dénombrable et $\varphi(\alpha)$ une fonction rétractante définie pour tout $\alpha < \gamma$, il existe un nombre*

$\alpha_0 < \gamma$ et un ensemble $E \subset (., \gamma)$ ayant γ pour borne supérieure tel que $\varphi(\alpha) = \alpha_0$ pour tout $\alpha \in E$ ¹⁶.

Ce corollaire exprime une propriété intéressante des nombres ordinaux, à savoir que la fonction inverse de chaque fonction rétractante définie pour tout $\alpha < \gamma$, γ étant initial, régulier et non-dénombrable, possède une infinité de puissance $p\gamma$ de déterminations différentes.

THÉORÈME 2. *Tout ensemble ordonné non-vidé n'ayant pas un dernier point est confinal avec un et un seul nombre initial régulier (voir la convention 1.3)*¹⁷.

COROLLAIRE 3. *Le type-limite $\tau\alpha$ d'un nombre ordinal de seconde espèce est le nombre régulier avec lequel l'intervalle gauche α est confinal*¹⁸.

B. Nombres cardinaux.

On sait que, en admettant le fameux axiome de M. Zermelo, on peut démontrer que toute puissance infinie est égale à un seul aleph¹⁹. En particulier α, β étant deux ordinaux quelconques, on peut écrire:

$$(1) \quad \aleph_{\alpha}^{\aleph_{\beta}} = \aleph_{\gamma},$$

γ étant un ordinal déterminé, d'une manière unique.

Cependant, on ne connaît aucun triple d'ordinaux vérifiant l'équation (1). Tout ce qu'on peut dire dans l'état actuel des Mathématiques c'est ce:

¹⁶Ce corollaire est dû, pour $\gamma = \omega_1$ à M.P. Alexandroff et P. Urysohn (voir Proc. Ac. Si., Amsterdam, Eerste sectie, Deel XIV n^o I, 1929 p. 95).

Une fonction rétractante est le pendant logique aux fonctions telles que $\varphi(\alpha) \geq \alpha$ pour tout ordinal α . Si on appelle *fonction normale* chaque fonction uniforme $\varphi(\alpha)$ définie pour tout α et telle que $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$ si $\alpha < \beta$ et φ (borne sup. E) = borne sup. $\varphi(\alpha)$ E étant un ensemble quelconque d'ordinaux, on démontre qu'il y a de "valeurs critiques" de $\varphi(\alpha)$ telles que $\varphi(\alpha) = \alpha$ (voir O. Veblen, Trans. Amer. Math. Soc. 9(1908), p. 280; et G.M. p. 114). Par exemple, la fonction $\varphi(\alpha) = \omega_{\alpha}$ est une fonction normale et tout nombre ordinal inaccessible est une valeur critique de ω_{α} ; la réciproque n'a pas lieu (N.T. p. 226). Cependant, M.E. Zermelo a construit une fonction normale dont l'ensemble des valeurs critiques coïncide avec l'ensemble des ordinaux inaccessibles (loc. cit. p. 34).

¹⁷Ce théorème est dû à M. Hausdorff (G.M. p. 142).

¹⁸A peine faut il rappeler que cela veut dire l'ensemble des ordinaux $< \alpha$. De même, (α, β) voudra dire l'intervalle $\alpha\beta$ de l'ensemble des nombres ordinaux, etc.

¹⁹N.T. chap. XII. La réciproque est aussi vraie: si toute puissance est un aleph, l'axiome de Zermelo est démontrable. Rappelons aussi ce théorème de Hartogs: la comparabilité de deux puissances quelconques est une proposition logique équivalente à l'axiome de Zermelo (N.T. chap. XII),

Pour la théorie axiomatique des puissances, voir E. Zermelo, Math. Ann. 65(1908), p. 261-281.

Cf. aussi la notion axiomatique de tE dans la définition 1.14.

THÉOREME 3. Si $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma$, alors $\alpha \leq \gamma$, $\beta < \gamma$ et $\tau\beta \neq \tau\gamma$.

On se contentera de prouver que $\tau\beta \neq \tau\gamma$. Pour cela, il suffit de démontrer ce:

LEMME 3. Pour tout ordinal α , on a $\aleph_\alpha^{\aleph_{\tau\alpha}} > \aleph_\alpha$.

En effet, si dans (1), on avait $\tau\beta = \tau\gamma$ on aurait $(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta})^{\aleph_{\tau\beta}} = \aleph_\gamma^{\aleph_{\tau\gamma}}$ et par conséquent, $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ serait égal à la fois à \aleph_γ et $\aleph_\gamma^{\aleph_{\tau\gamma}}$ ce qui est, d'après le lemme 3. Distinguons deux cas:

1° α est régulier: $\tau\alpha = \alpha$. Puisque $\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = 2^{\aleph_\nu}$ si μ, ν sont deux ordinaux quelconques tels que $\mu \leq \nu^{20}$, l'inégalité à démontrer se réduit à l'inégalité classique de Cantor, à savoir que $2^{\aleph_\nu} > \aleph_\nu$ pour tout ordinal ν .

2° α est singulier. Soit

$$\alpha = \text{borne sup. } \alpha_\xi, \alpha_\xi < \alpha, \xi < \tau\alpha \text{ les } \alpha_\xi \text{ étant croissants.}$$

On a donc $\aleph_{\alpha_\xi} < \aleph_\alpha$ et d'après le théorème de König-Zermelo-Jourdain²¹, on a $\sum_{\alpha < \alpha_\tau} \aleph_{\alpha_\xi} < \aleph_\alpha^{\aleph_{\tau\alpha}}$.

Puisque $\sum_{\xi < \tau\alpha} \aleph_{\alpha_\xi} = \aleph_\alpha$ et $p\tau\alpha \leq \aleph_{\tau\alpha}$, le lemme est démontré.

L'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ étant l'hypothèse du continu²² l'hypothèse que, m étant une puissance quelconque infinie, il n'y ait aucune puissance n telle que $m < n < 2^m$ s'appelle l'hypothèse du continu généralisée²³ ou l'hypothèse de Cantor; elle sera désignée par (G). Sous cette hypothèse, on peut démontrer ce

THÉOREME 4. 1° Si $\alpha \leq \beta$, alors $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$.

2° si $\alpha \geq \beta, \tau\alpha \geq \tau\beta$, alors $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}$.

3° si $\alpha + 1 \leq \beta$, alors $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}$.

²⁰N.T. p. 220.

²¹N.T. §55.

²²Voir le livre récent de H. W. Sierpinski, *Hypothèse du Continu*, Warszawa, 1934, qui commence par cette phrase: "La question si l'ainsi dite l'hypothèse du continu est vraie ou non appartient aux problèmes les plus difficiles de la mathématique contemporaine". M. D. Hilbert a donné une esquisse de démonstration de l'hypothèse du continu, mais nous ne savons pas si, $n_1, n_2 \dots$ étant une suite d'entiers, le procédé itératoire de M. Hilbert finit par engendrer la suite $n_1, n_2 \dots$. C'est à ce point de vue que sa démonstration reste inachevée (voir Math. Ann. 95(1925), p. 161 et suiv. en particulier p. 186 et suiv.; aussi W. Ackermann, Math. Ann. 99(1928), p. 118). Voir l'opinion de M. N. Lusin dans le livre de M. Sierpinski p. 3 et 4.

²³Voir le livre précité de M. Sierpinski.

4° si $\alpha > \beta, \tau\alpha = \omega_\delta, \beta < \delta$, alors $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$.

5° si $\alpha > \beta, \tau\alpha = \omega_\delta, \beta \geq \delta$, alors $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}^{24}$.

THÉORÈME 5. Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, alors, $\aleph_\alpha^{\aleph_0} < \aleph_{\alpha+\omega_0}$, pour tout α^{25} .

Dans la suite, on aura besoin de ce:

THÉORÈME 6. Pour tout nombre ordinal α , on a

$$(2) \quad \sum_{\xi < \omega_{\alpha+1}} 2^{p\xi} = 2^p \omega_\alpha.$$

Sous l'hypothèse généralisée du continu, on a $\sum_{\xi < \omega_\alpha} 2^{p\xi} = p\omega_\alpha$.

En effet, pour tout $\xi < \omega_{\alpha+1}$, on a $2^{p\xi} \leq 2^{p\omega_\alpha}$; par conséquent,

$$2^{p\xi} \leq \sum_{\xi < \omega_{\alpha+1}} \leq 2^{p\omega_\alpha} \cdot \aleph_{\alpha+1}.$$

Puisque $2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}^{26}$, l'égalité (2) devient évidente. Sous l'hypothèse (G), on a $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ et, par conséquent, aussi $\sum_{\xi < \omega_\alpha} 2^{p\xi} = p\omega_\alpha$.

§3. Propriétés élémentaires des espaces et des ensembles ordonnés

Dans ce §, E désignera un espace ordonné, F, G, \dots des ensembles, a, b, \dots des points de E .

I.

LEMME 1. Si FRG signifie que F et G sont coextensifs, le signe R est une relation classifiante (Déf. 1.2, 1.13).

LEMME 2. \mathcal{F} étant une famille finie d'ensembles de E , la somme $\sum \mathcal{F}$ est finale avec un élément de \mathcal{F} .

II.

LEMME 3. P étant une portion de E , on a

$$(1) \quad E = (., P) + P + (P.,), (., P) < P < (P.,).$$

²⁴Le théorème est dû à M.A. Tarski, Fund. Math. 6(1925), p. 1-14, en particulier p. 9 et 10. Aussi le chap. VII du livre précité de M. Sierpinski.

²⁵Voir la Note des C.R. Acad. Sci. Paris 198(1934), p. 703 où une généralisation est donnée. La démonstration paraîtra ailleurs.

²⁶Bien entendu en admettant l'axiome de Zermelo.

Si $P \supset 0$, cette décomposition est déterminée d'une manière unique; si $P = 0$, toute coupure de E peut être mise sous la forme (1) (voir déf. 1.5, 1.6, 1.10 et la convention 1.1).

LEMME 4. *Chaque famille de portions droites de E est une famille monotone d'ensembles (voir la déf. 1.4),*

LEMME 5. *La partie commune de chaque famille de portion de E est une portion de E (qui est en général vide).*

LEMME 6. *\mathcal{F} étant une famille de portion de E deux à deux non-disjointes, la somme $\sum \mathcal{F}$ est une portion de E .*

LEMME 7. *\mathcal{F} étant une famille finie de portions de E telles que $\prod \mathcal{F} \supset 0$, \mathcal{F} contient deux éléments M_1, M_2 tels que $M_1 + M_2 = \sum \mathcal{F}$.*

En effet, d'après le lemme 2, \mathcal{F} contient un élément $M_1(M_2)$ qui est cœinitial (confinal) avec $\sum \mathcal{F}$. Puisque, par hypothèse, $\prod \mathcal{F} \supset 0$, soit $x \in M_1 M_2$. Alors, en posant $F = \sum \mathcal{F}$, il est clair que $(\cdot, x)_F \supset M_1$, $(x, \cdot)_F \supset M_2$ et, par conséquent, $F = M_1 + M_2$ c.q.f.d.

Il est à remarquer que le lemme 7 ne subsiste pas nécessairement si \mathcal{F} est infinie²⁷.

III.

LEMME 8. *Si $F \subseteq G$, alors $F' \subseteq G'$ et $\bar{F} \subseteq \bar{G}$. Si F est fini, alors $F' = 0$.*

LEMME 9. *Les ensembles F', \bar{F} sont fermés et par suite $\bar{F}' = \bar{F}$ ²⁸.*

LEMME 10. *F étant fermé et $F \supseteq H$, alors $F \supseteq \bar{H}$.*

LEMME 11. *Si $F R G$ signifie que F est partout dense sur G , R est une relation réflexive et transitive; en général, elle n'est pas symétrique.*

LEMME 12. *F étant partout dense sur G , tout point isolé de G appartient à F .*

LEMME 13. *P étant une portion de E , l'ensemble $\bar{P} - P$ est composé au plus de deux points de E : de la borne inférieure et de la borne supérieure de P relativement à E .*

²⁷Le lemme 7 est dû à M. A. Denjoy qui s'en est servi dans la théorie de la mesure des ensembles (Cf. la notion de "couvertures strictes d'intervalles", loc. cit. p. 223-232).

²⁸Il est clair que \bar{F}' veut dire \bar{G} en posant $G = \bar{F}$. Par conséquent, les espaces ordonnés appartiennent à la classe des espaces (V) de M. Fréchet vérifiant la condition α de M. Appert (voir, Appert, Actualités Sci. Indust. 145(1934), p. 12).

LEMME 14. *Pour qu'un espace ordonné ayant au moins deux points soit dense, il faut et il suffit qu'il n'ait aucun saut.*

LEMME 15. *Tout ensemble ordonné dense est dense en soi.*

LEMME 16. *Toute ensemble ordonné partout dense sur un ensemble ordonné dense est dense en soi.*

IV. Principes d'inductions.

Dans cette section, $T(x)$ désignera une proposition logique qui est, en y remplaçant x par un point quelconque de E , ou bien vraie ou bien non vraie; on dira pour abrégé, que $T(x)$ est vraie ou non vraie pour un $X \in E$ ²⁹.

1. On dira qu'un ensemble ordonné non-vidé E admet le principe de l'induction linéaire, si la conclusion suivante a lieu:

HYPOTHÈSE. *Soit $T(x)$ une proposition logique quelconque vérifiant les deux conditions:*

C_1 : *Il y a une portion gauche non vide P_0 de E telle que $T(x)$ soit vraie pour tout point x de P_0 .*

C_2 : *Si $T(x)$ est vraie pour tout point $x \in P$, P étant une portion gauche non-vidé de E , il y a, si $P \subset E$, une portion gauche Q de E telle que $P \subset Q$ et que $T(x)$ soit vraie pour tout x de Q .*

CONSÉQUENCE. *La proposition $T(x)$ est vraie pour tout x de E .*

2. On dira qu'un ensemble ordonné non-vidé E possède la propriété Lebesgue-Khintchine³⁰, si la conclusion suivante a lieu:

HYPOTHÈSE. *Soit $T(x)$ une proposition logique quelconque vérifiant les conditions:*

C'_1 : *Il y a une portion gauche élémentaire P_0 de E telle que $T(x)$ soit vraie pour tout point de P_0 .*

²⁹voir N.T. p. 164. On peut dire que $T(x)$ est une fonction univoque définie pour tout $x \in E$ et ne pouvant admettre dans E que deux valeurs différentes au plus. C'est donc la fonction caractéristique d'un sous-ensemble de E .

³⁰Cf. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, Paris, 1904, 105 et A. Khintchine, *Fund. Math.* 4(1923), 164-166. Voir aussi T.H. Hildebrandt, *Bull. Amer. Math. Soc.* 32(1926), p. 430, qui au lieu des conditions C'_1, C'_2 pose ces deux conditions:

K_1 : Il y a un point pour lequel $T(x)$ est vraie;

K_2 : Si $T(x)$ est vraie pour tout point de E précédant un point x' de E , il y a un point y de E tel que $x' < y$ et que $T(y)$ soit vraie. D'après M. Hildebrandt, cette définition serait équivalente avec la définition 2, ce qui n'est pas exact (voir la note 5).

C_2' : Si $T(x)$ est vraie pour tout point x de P , P étant une portion gauche élémentaire non-vide de E , il y a, si $P \subset E$, une portion gauche élémentaire Q de E telle que $P \subset Q$ et que $T(x)$ soit vraie pour tout x de Q .

CONSÉQUENCE. La proposition $T(x)$ est vraie pour tout point de E .

3. On dira qu'un ensemble ordonné non-vide E admet le principe de l'induction complète³, si E a un premier élément et si la conclusion suivante a lieu:

HYPOTHÈSE. Soit $T(x)$ une proposition logique quelconque vérifiant ces conditions:

C_1^0 : a désignant le premier point de E , $T(a)$ est vraie;

C_2^0 : b étant un point de E tel que $T(x)$ soit vraie pour tout point de l'intervalle gauche a de E , $T(x)$ est encore vraie pour le point a de E ;

CONSÉQUENCE. $T(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.

Convention 1. L'ensemble vide possède la propriété de Lebesgue-Khintchine et admet le principe de l'induction linéaire ainsi que celui de l'induction complète.

THÉORÈME 1. Toute ensemble ordonné admet le principe de l'induction linéaire.

Soient: E un ensemble ordonné non-vide, $T(x)$ une proposition logique quelconque vérifiant les conditions C_1 , C_2 , et \mathcal{F} la famille de toutes les portions gauches de E pour tout point desquelles $T(x)$ est vraie. Il s'agit de prouver que $E \in \mathcal{F}$. Si $E \notin \mathcal{F}$, soit $P = \sum \mathcal{F}$. Il est clair que $P \in \mathcal{F}$ et d'après la condition C_2 , il existerait une portion gauche Q de E telle que $P \subset Q$, $Q \in \mathcal{F}$ ce qui est absurde à cause de la définition de P . On a donc $E \in \mathcal{F}$. c.q.f.d.

THÉORÈME 2. Pour qu'un ensemble ordonné admette le principe de l'induction complète, il faut est il suffit qu'il soit bien ordonné.

Nous nous contentons de prouver que la condition est nécessaire. De plus, à cause de la convention précédente, on peut supposer que $E \supset 0$. Soit donc E un ensemble ordonné ayant un premier point a et admettant le principe de l'induction complète. Si E n'était pas bien ordonné, il existerait un sous-ensemble non-vide F de E n'ayant pas un premier point. x étant un point de E , désignons par $T(x)$ la phrase " x précède tout point de F ". Il est manifeste que la condition C_1^0 est remplie; d'autre part, si $T(x)$ est vraie pour tout x de E précédant un certain point b de E , il est clair $T(b)$ est encore vraie, sans quoi b serait le premier point F , contrairement

la supposition. Bref, la condition C_2^0 est aussi vérifiée. En admettant, par hypothèse, le principe de l'induction complète, la proposition $T(x)$ serait vraie pour tout $x \in E$ ce qui est absurde. Donc E est bien ordonné.

THÉORÈME 3. *Les quatre hypothèses suivantes sur un ensemble ordonné non-vide E sont logiquement équivalentes:*

- α . E possède la propriété de Lebesgue-Khintchine;
- β . E est sans aucune lacune intérieure (définition 1.10);
- γ . Tout F non-vide borné inférieurement dans E a une borne inférieure dans E (définition 1.7);
- δ . Tout F non-vide borné supérieurement dans E a une borne supérieure relativement à E (définition 1.7).

Il suffira de prouver cette chaîne de conclusions logiques:³¹

$$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow \alpha.$$

$\alpha \rightarrow \beta$. Supposons qu'il existe une lacune intérieure AB de E c'est-à-dire que $A < B$, $A \supset 0$, $B \supset 0$, et $A + B = E$.

Désignons par $T(x)$, x étant un point de E , la phrase " x appartient à A ". Puisque $A \supset 0$, la condition C_1^1 est satisfaite; puisque, par supposition, A n'a pas un dernier élément, $T(x)$ vérifie aussi la condition C_2^1 et à la suite de l'hypothèse α , la proposition $T(x)$ serait vraie pour tout $x \in E$ donc en particulier pour tout point de B , ce qui est absurde.

$\beta \rightarrow \gamma$. F étant borné inférieurement dans E , on a $A \supset 0$, A désignant l'ensemble de tous les points $a \in E$ tels que $F \subseteq (a, \cdot)_E$. L'inclusion $\beta \rightarrow \gamma$ étant évidente si F a un premier point, supposons que F n'a pas un premier point et que $F \supset 0$. Par conséquent, l'ensemble $B = E - A$ est aussi non-vide et n'a pas un premier point. A cause de l'hypothèse β , l'ensemble A a un dernier point, soit $a \in E$; et alors, on voit sans peine que a est la borne inférieure de F relativement à E .

$\gamma \rightarrow \delta$. $F \supset 0$ étant borné supérieurement dans E , soit B l'ensemble de tous les $a \in E$ tels que $F \subseteq (\cdot, a)_E$. Il est évident que B est une portion droite de E . Le dernier point éventuel de F étant sa borne supérieure, supposons que F n'a pas un dernier point. L'ensemble B étant non-vide et borné inférieurement dans E , soit b la borne inférieure de B relativement à

³¹ X, Y étant deux hypothèses ou deux propositions logiques, le symbole $X \rightarrow Y$ voudra dire que Y est une conséquence logique de X ou "si X alors Y ". Si $X \rightarrow Y$ et $Y \rightarrow X$, on dira que X, Y sont équivalentes.

Le signe $\underline{X \rightarrow Y}$ voudra dire "prouver que $X \rightarrow Y$ ".

E dont l'existence est assurée par l'hypothèse γ . On prouve facilement que b est alors la borne supérieure de F relativement à E .

$\delta \rightarrow \alpha$. $T(x)$ désignant une proposition logique quelconque vérifiant les conditions C_1^1, C_2^1 désignons par P l'ensemble de tous les points x de E pour lesquels $T(x)$ est vraie. A cause des conditions C_1^1, G_2^1 , l'ensemble P est une portion gauche non-vide de E ³². Si $P = E$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $G = E - P \supset 0$. On a alors $P < G, P \supset 0, G \supset 0$. Autrement dit, la portion P serait bornée supérieurement et, à la suite de l'hypothèse δ , aurait une borne supérieure relativement à E , soit $a \in E$. A cause de la condition C_2^1 on a $a \notin P$, on aurait donc $a \in G$. On voit que $P = (., a)_E$ et à la suite de la condition C_1^1 , il existerait une portion gauche élémentaire Q de E telle que $P \supset Q$ et que $T(x)$ soit vraie pour tout point de Q . Puisque $b \in Q$, on aurait $b \in P$, ce qui est incompatible avec la supposition que $b \in G$ et $P < G$. Ainsi le théorème 3 est complètement démontré.

V. Ensembles et espaces ordonnés non-lacunaires.

THÉORÈME 4. *Pour tout ensemble ordonné non-lacunaire, les hypothèses $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ du théorème 3 sont vérifiées.*

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent.

THÉORÈME 5. *Les cinq hypothèses suivantes sur un ensemble ordonné non-vidé E sont logiquement équivalentes:*

α . E est non-lacunaire;

β . Tout sous-ensemble non-vidé de E a une borne inférieure et une borne supérieure relativement à E ;

γ . 1° E est limité, 2° chaque portion de E est une portion élémentaire de E ;

δ . 1° E est limité, 2° \mathcal{F} étant une famille quelconque de portions (élémentaires) de E deux à deux non-disjointes, l'ensemble $\sum \mathcal{F}$ est une portion élémentaire de E ;

ϵ . \mathcal{F} étant une famille monotone³³ non-vidé quelconque de segments de E , l'ensemble $\Pi \mathcal{F}$ est un point ou un segment de E .

La démonstration du théorème consistera à prouver cette chaîne de conclusions $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow \epsilon \rightarrow \alpha$.

³²C'est cette conclusion qui est fondamentale dans tout le raisonnement; or il est clair qu'elle n'est pas une conséquence des conditions k_1, k_2 de la note (4).

³³voir la définition 4.1.

$\alpha \rightarrow \beta$. Prouvons, par exemple, l'existence de la borne supérieure de F relativement à E . En désignant par A la portion gauche de E confinale avec F , considérons la coupure A de E (voir la définition 1.10). Si A a un dernier point, l'ensemble $B = E - A$ a un premier point b , sans quoi on aurait la lacune AB de E contrairement à l'hypothèse. Or, on prouve facilement que le point b de E est alors la borne supérieure de E .

D'une façon analogue, on démontre que F a une borne inférieure relativement à E .

$\beta \rightarrow \gamma$. P étant une portion non-vide de E , soient a_P, b_P la borne inférieure et la borne supérieure de P relativement à E ; on s'aperçoit que P admet une (et une seule) des représentations: $[a_P, b_P]$, $[a_P, b_P)$, $(a_P, b_P]$ et (a_P, b_P) . Si, en particulier, $P = E$, on a $E = [a_E, b_E]$ et a_E, b_E sont respectivement la premier et la dernier point de E .

$\gamma \rightarrow \delta$. Voir le lemme 6.

$\delta \rightarrow \epsilon$. \mathcal{H} désignant la famille des segments droits x de E , x parcourant l'ensemble des extrémités droites des éléments de \mathcal{F} (\mathcal{F} ayant la même signification que dans l'hypothèse ϵ), posons $H = \sum \mathcal{H}$.

La famille \mathcal{H} étant monotone (lemme 4) et non-vide (parce que d'après l'hypothèse δ , E est limité), l'ensemble H est, d'après l'hypothèse $\delta 2$, une portion élémentaire de E . En désignant alors par h l'extrémité gauche de H , on s'aperçoit que h est le dernier point de $\prod \mathcal{F}$. De la même façon, on prouve que $\prod \mathcal{F}$ a un premier point g . On a alors $\prod \mathcal{F} = g = h$ ou $\prod \mathcal{F} = [g, h]$.

$\epsilon \rightarrow \alpha$. A, B , étant respectivement le composant inférieur et le composant supérieur d'une coupure 0 de E , au moins l'un d'eux est non-vide, soit $A \supset 0$. En désignant par \mathcal{F} la famille des segments droits x de E , x parcourant A , soit g le premier point de $\prod \mathcal{F}$. Si $g \in A$, g est le dernier point de A , si $g \in B$, g est le premier point de B . L'existence de g étant assurée par l'hypothèse ϵ , l'ensemble E est donc non-lacunaire.

Ainsi le théorème 1 est complètement démontré.

LEMME 16. *Tout ensemble fermé non-vide F d'un espace non-lacunaire E est non-lacunaire.*

En effet, considérons une coupure XY de F . Puisque, par hypothèse, $F \supset 0$, au moins un des ensembles X, Y est non-vide, soit X . Si X a un dernier point, il n'y a rien à démontrer. Si X n'a pas un dernier point, la portion gauche A de E confinale avec X n'en a pas non plus et, par conséquent, l'ensemble $B = E - A$ a un premier point, soit b . Le point b

est, on le voit, un point d'accumulation de X et par conséquent, F étant fermé, $b \in F$ donc $b \in Y$. On s'aperçoit aisément que b est alors le premier point de Y . Autrement dit, F est non-lacunaire.

COROLLAIRE 1. *Tout ensemble fermé non-vide d'un espace non-lacunaire est limité.*

LEMME 17. *\mathcal{F} étant une famille quelconque d'intervalles d'un espace non-lacunaire E telle que $\sum \mathcal{F} = E$, la famille \mathcal{F} contient une famille finie \mathcal{F}_1 telle que $\sum \mathcal{F}_1 = E$. Ou, dans la terminologie de M. Fréchet: tout espace ordonné non-lacunaire possède la propriété de Borel-Lebesgue (voir le théorème 6.2).*

\mathcal{F} étant une famille d'intervalles de E telle que $\sum \mathcal{F} = E$, disons, avec M. Lebesgue, qu'un point x de E est atteint s'il existe une famille finie f_x telle que $f_x \subseteq \mathcal{F}$ et $\sum f_x \supseteq (., x)_E$. Désignons par $T(x)$, x étant un point de E , la proposition logique "x peut être atteint". On s'aperçoit immédiatement que $T(x)$ vérifie les conditions C_1^1 et C_2^1 de la définition 2; l'ensemble E , étant non-lacunaire, possède la propriété Lebesgue-Khintchine et, par conséquent, la proposition $T(x)$ est vraie pour tout $x \in E$. En particulier, le dernier point b est atteint par les éléments de f_b : on a donc $f_b \subseteq \mathcal{F}$, $\sum f_b = E$ puiss. $f_c < \aleph_0$.

A la suite des lemmes 16 et 17, on a ce

THÉORÈME 6. *Tout ensemble fermé non-vide d'un espace ordonné non lacunaire, possède la propriété Borel-Lebesgue (voir le théorème 6.2).*

VI. Ensembles connexes.

LEMME 18. *Tout ensemble ordonné connexe est dense.*

En effet, E étant connexe, supposons qu'il ne soit pas dense; cela voudrait dire, d'après le lemme 13, l'existence de deux points consécutifs a , b de E . Si par exemple $a < b$, posons $G = (., a]$, $H = [b, .)$.

On s'aperçoit que $E = G + H$, $G \supset 0$, $H \supset 0$, $\bar{G}H + G\bar{H} = 0$ ce qui est contraire à la supposition que E est connexe.

THÉORÈME 7. *Pour qu'un ensemble ordonné E soit continu, il faut et il suffit qu'il soit limité et connexe.*

On se contentera de prouver que la condition est nécessaire. E étant continu, E est limité, sans quoi, si E n'avait pas un premier point par exemple, E aurait la lacune OE ; démontrons de plus qu'il est connexe. Supposons, par impossible que E ne soit pas connexe, donc

$$(1) \quad E = G + H, \quad G \supset 0, \quad H \supset 0, \quad \bar{G}H + G\bar{H} = 0.$$

Il s'en suit que

$$(2) \quad GH = 0, \quad G' = G, \quad H' = H.$$

Supposons que c'est G qui contient le premier point a de E , donc $a \text{ non} \in H$. L'ensemble H étant, par suppositions (1) et (2), fermé, possède, d'après le corollaire 1, un premier point, soit b . Il est évident que $a < b$, $(a, b) \subseteq G$. Or, E étant continu, donc en particulier dense, le point b serait un point d'accumulation de (a, b) donc aussi de G et à la suite de (2), on aurait $b \in G$. On aurait donc $b \in GH$, contrairement à (2).

THÉORÈME 8. *Pour qu'un ensemble ordonné soit connexe, il faut et il suffit qu'il soit dense et sans aucune lacune inférieure.*

THÉORÈME 9. *E étant un ensemble connexe, les hypothèses $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ du théorème 3 sont vérifiées.*

THÉORÈME 10. *Pour qu'un sous-ensemble F d'un ensemble connexe E soit connexe il faut et il suffit qu'il soit une portion de puissance > 1 de E (voir la convention 1.2).*

Nous nous contenterons de prouver que la condition est nécessaire. En effet, soit F un sous-ensemble connexe de F ; il s'agit de prouver que F est une portion de E . Si F n'étant pas une portion de E , on aurait deux points a, b de F tels que $c \in (a, b)$, $c \notin F$. En posant alors $G = (\cdot, c)_F$, $H = (c, \cdot)_F$, on voit que $F = G + H$, $G \supset 0$, $H \supset 0$ et $\bar{G}H + G\bar{H} = 0$; par conséquent, F ne serait pas connexe, contrairement à la supposition.

VII. Prolongements et réduction d'ensembles et d'espaces ordonnés.

5) E étant donné, lE désignera l'ensemble ordonné déduit de E en comblant chaque lacune de E par un élément (*Remplissage de lacunes*³⁴ de E).

³⁴Voici un procédé concret de remplissage de lacunes de E . Une famille non-vide C d'intervalles non-vide de E sera dite chaîne fondamentale d'intervalles de E si ces trois conditions sont vérifiées: 1° $v_1 v_2 \supset 0$ pour tout $v_1 \in C, v_2 \in C$; 2° $\prod C = \prod \bar{C}$, \bar{C} désignant la famille des fermetures $\bar{v}, v \in C$. 3° $p \prod C = 0$ ou 1. Si $p \prod C = 1$, on dira que C converge vers le point $\prod C$. Si $p \prod C = 0$, C sera dite divergente.

Deux chaînes fondamentales $C^i, (i = 1, 2)$ sont dites équivalentes, en signes $C^1 \sim C^2$, si pour tout $v^1 \in C^1$ et tout $v^2 \in C^2$, on ait $v^1 v^2 \supset 0$. On démontre que le signe \sim est une relation de classification et que deux chaînes fondamentales équivalentes sont à la fois ou bien divergentes ou bien convergentes et que, dans le dernier cas elles convergent vers le même point de E . A la suite du lemme 1.1, l'ensemble des chaînes fondamentales peut être partagé en faisceaux de chaînes fondamentales. Si l'on pose, ϕ^1, ϕ^2 étant deux faisceaux différents, $\phi^1 < \phi^2$ si $\sum' \phi^1$ contient un élément précédant un élément de $\sum' \phi^2$ (voir la note 1.2) et si l'on substitue a au lieu de ϕ si $\sum' \phi$ converge vers a , on s'assure que l'ensemble ainsi obtenu est ordonné et "coïncide" avec l'ensemble lE . (Cf. La Note des C. R. 198, 1934; p. 882). On prouve facilement ce théorème: Pour que E soit non-lacunaire, il faut et il suffit que chaîne fondamentale d'intervalles de E soit convergente.

lE désignera un ensemble qu'on obtient de E en y supprimant un sous-ensemble quelconque de points ne remplissant aucune portion de puissance > 1 de E .

sE désignera l'ensemble ordonné obtenu en plaçant dans chaque saut de E un ensemble ordonné ayant le type λ de l'ensemble des nombres réels (*Remplissage de sauts de E*).

SE désignera un ensemble ordonné qu'on obtient de E en lui enlevant une certaine famille d'intervalles deux à deux disjoints et ayant, tous, le type ordinal λ .

6) uE désignera l'ensemble ordonné qu'on obtient en comblant chaque lacune AB de E soit par deux points soit par un seul point, suivant que la lacune est intérieure ou non-intérieure.

a parcourant l'ensemble de points d'accumulation bilatérale de E , vE désignera l'ensemble ordonné qu'on déduit de E en intercalant un point, soit entre a et $(., a)_E$, soit entre a et $(a, .)_E$. Le signe VE désignera un ensemble qu'on obtient en supprimant une extrémité de chaque saut de seconde espèce de E .

wE désignera le sur-ensemble ordonné de E qu'on obtient en intercalant un point entre les composants de chaque coupure AB de E telle que *ou bien* A a un dernier point qui est alors non-isolé du côté droit *ou bien* B a un premier point qui est alors non-isolé du côté gauche.

LEMME 19. *E étant non-vide, l'ensemble lE est non-lacunaire. Si $p E > 1$, l'ensemble sE est dense.*

LEMME 19'. *Pour que lE soit continu, il faut et il suffit que E soit dense.*

LEMME 19''. *Si $p E > 1$, les ensembles $s(lE)$ et $l(sE)$ sont continus et semblables. Par conséquent, tout ensemble ordonné est continu dans un ensemble ordonné continu. Ainsi, la théorie des ensembles ordonnés continus peut se déduire de la théorie des ensembles ordonnés continus.*

LEMME 20. *Si E est dense (connexe), l'ensemble vE est dense en soi (et totalement non-connexe). Si E est dense en soi, l'ensemble VE est dense.*

LEMME 21. *L'ensemble E est partout dense sur lE , uE , vE et wE .*

Soit j une des lettres l, u, v, w , considérons jE . Si $E = jE$, il n'y a rien à démontrer; supposons donc que $E \subset jE$. Soient alors m un point de $jE - E$ et J un intervalle de jE contenant le point m ; il s'agit de prouver que $EJ \supset 0$. Nous nous contenterons de le prouver dans le cas où $j = w$.

Considérons seulement le cas où m n'est pas une extrémité de wE . En posant $A = (., m)_E$, $B = (m, .)_E$, on aura $E = A + B$, $A < B$, $A \supset 0$, $B \supset 0$. Par conséquent, ou bien A aura un dernier point, a , non-isolé du côté droit, ou bien B aura un premier point, soit b , non-isolé du côté gauche. Examinons le premier cas. Désignons par d l'extrémité droite de l'intervalle J . Si d n'existe pas, cela veut dire que J est un intervalle droit de wE et par conséquent $EJ \supset B$. Si d existe et appartient à E , on voit que $O \subset (a, d)_E \subset J$; si $d \in wE - E$, on posera $A_1 = (., d)_E$, $B_1 = (d, .)_E$. On obtient ainsi une nouvelle coupure de E différente de la précédente et on voit que $O \subset A_1 - A_2 \subset J$.

Le second cas où B a un premier point pouvant être traité d'une manière analogue, on a bien démontré que E est partout dense sur wE .

COROLLAIRE. *L'ensemble $jE - E$, ($j = l, u, v, w$), est ou bien vide ou bien composé de points d'accumulation de jE (voir le lemme 11).*

LEMME 22. *Pour qu'un point $a \in E$ soit un point d'accumulation, relativement à jE , ($j = l, u$), d'un $F \subseteq jE$, il faut et il suffit que a soit un point d'accumulation, relativement à E , de l'ensemble EF .³⁵*

LEMME 23. *Tout ensemble ordonné partout dense sur E est encore partout dense sur l'ensemble ordonné $uE + vE$.³⁶*

LEMME 24. *Tout point a de E est un point isolé de l'ensemble wE .*

La démonstration des lemmes 22, 23 et 24 ne présentant, aucune espèce de difficulté, on va prouver ce

THÉORÈME II. α) *lE est le plus petit sur-ensemble non-lacunaire de E s'est-à-dire il n'y a aucun ensemble non-lacunaire M tel que $E \subset M \subset lE$.*

β) *$uE + vE$ est le plus grand ensemble ordonné H contenant E , avec son organisation respective de points, comme une partie de H partout dense sur H .*

γ) *$uE + wE$ est le plus grand ensemble ordonné sur lequel E est partout dense.*

Nous nous contenterons de prouver la partie β du théorème II.

Tout d'abord, d'après le lemme 22, l'ensemble $uE + vE$ contient E avec son organisation respective de points; de plus, à la suite du lemme 21, l'ensemble E est partout dense sur $uE + vE$.

³⁵ On dira, pour abrégé, que $J E$ contient E avec son organisation relative de points.

³⁶ $uE + vE$ désigne l'ensemble ordonné de la réunion des ensembles uE et vE .

Supposons, d'autre part, l'existence d'un ensemble ordonné M tel que 1° $M \subset uE + vE$, 2° E est partout dense sur M , 3° M contient E avec son organisation respective. m étant alors un élément de $M - uE - vE$, posons $A = (., m)_E$, $B = (m, .)_E$. On voit que A, B sont portions d'une lacune intérieure de E . On a les quatre cas:

I) A a un dernier point a , B a un premier point b . Ce cas n'est pas possible parce que $(a, b)_M$ contiendrait au moins le point m de M sans contenir aucun point de E , contrairement à l'hypothèse que E est partout dense sur M .

II) A a un dernier point a , B n'a pas un premier point bien que $B \subset 0$. Autrement dit, le point a serait un point d'accumulation, relativement à E , de l'ensemble B sans qu'il soit un point d'accumulation, relativement à M , du segment droit m de M bien que E . $(m, .)_M = B$, ce qui est contraire à l'hypothèse que M contient E avec son organisation respective de points (voir ⁹) et le lemme 22).

III) A n'a pas un dernier point bien que $A \supset 0$, B a un premier point b . Ce cas est traité comme le cas précédent.

IV) A n'a pas un dernier point bien que $A \subset 0$, B n'a pas un premier point bien que $B \subset 0$. En vertu de sa définition, l'ensemble uE contient deux points p, q entre A et B . En considérant alors l'ensemble composé des points m, p, q , on s'aperçoit qu'au moins un de ceux-ci serait isolé dans M , ce qui est absurde.

Ainsi le Théorème II est complètement démontré.

Remarque. On peut prouver sans peine que tout ensemble ordonné peut être déduit à partir d'une paire ordonnée P par des combinaisons (finies ou transfinites) des procédés l, L, s, S, u, v, V et w . Par exemple, $1 + \lambda + 1$ est le type ordinal de sP ; η étant le type ordinal des nombres rationnels, on a $\eta = SsP$, etc.

§4. Familles monotones d'ensembles

La relation d'inclusion \subset (ou \supset) entre ensembles étant une relation d'ordre, le but de ce § sera de comparer les relations \subset et \supset .

1. Une famille d'ensembles sera dite *monotone* si ses éléments sont deux à deux toujours en relation \supset [ce qui revient au même toujours en

relation \subset], la famille vide sera, aussi bien que chaque famille composée d'un seul ensemble, considérée comme monotone³⁷.

Dans ce § la lettre \mathcal{F} désignera une famille monotone d'ensembles ordonnés par rapport à la relation \supset qu'on lira "contient au sens strict" et c'est sous cette convention qu'on emploiera le langage, établi dans les § précédents, des ensembles ordonnés. Toutefois, remarquons que, dans le cas actuel, l'ensemble vide jouera un rôle concret et s'il appartient à \mathcal{F} , succédera à tout autre élément de \mathcal{F} .³⁸

2. L'ensemble $\sum \mathcal{F}$ sera désigné par $M_{\mathcal{F}}$ ou M et appelé *base de \mathcal{F}* . La famille de tous les sous-ensembles de M (l'ensemble vide y compris) sera désigné par $U M$.

Si $a \in M_{\mathcal{F}}$, $b \in M_{\mathcal{F}}$,

(P) le signe $a < b$ voudra dire l'existence d'un $X \in \mathcal{F}$ tel que $a \notin X$, $b \in X$,

(Q) le signe $a \sim b$ voudra dire que tout élément de \mathcal{F} contenant a contient b et tout élément de \mathcal{F} contenant b contient aussi a ; alors on a aussi $b \sim a$.

On observe qu'on a dans tous les cas $a < b$ ou $b < a$ ou $a \sim b$.

\mathcal{F} sera dit un *ordre de M* si $a \sim b$ n'est vrai pour aucun couple de points différents de M . Si $p M = 0$ ou 1 , \mathcal{F} sera dit encore *ordre de M* .

3. \mathcal{F} étant une famille monotone, le signe $\bar{\mathcal{F}}$ désignera la famille des ensembles $\sum f$, $\prod f$, f parcourant la classe de sous-familles non-vides de \mathcal{F} .

Un saut de \mathcal{F} sera dit *large* si l'ensemble-différence de l'extrémité gauche et de l'extrémité droite du saut est composé d'au moins deux points. De plus, si \mathcal{F} a un dernier élément B de puissance > 1 , le couple $B0$ sera encore appelé un saut large de \mathcal{F} .

On désignera par $\sigma \mathcal{F}$ une famille d'ensembles qu'on obtient en adjoignant à la famille \mathcal{F} une famille d'ensembles non vides X tels que: 1°

³⁷ Autrement dit, pour qu'une famille d'ensembles soit monotone, il faut et il suffit qu'elle soit ordonnée par rapport à l'un des signes \supset ou \subset . On voit maintenant pourquoi on convient que \subset signifie "contenu au sens strict dans" au lieu de "contenu dans" parce que dans le dernier cas, \subset ne serait pas une relation d'ordre, (Voir la notion de familles ramifiées d'ensembles dans le § 8 B). Pour la théorie des familles monotones, voir C. Kuratowski, *Fund. Math.* 2(1921), p. 161-172 et Fraenkel loc. cit.

³⁸ Cette remarque aura, dans la suite, une grande importance. En particulier, si \mathcal{F} contient l'ensemble vide $\{0\}$ comme un élément, on aura $\mathcal{F} + \{0\} = \mathcal{F}$. (On écrira quelquefois $\{0\}$ au lieu de 0 pour marquer que $\{0\}$ est obtenu par de certaines constructions et joue, par conséquent, un rôle qui diffère du rôle joué par 0 qui est le type abstrait de tous les ensembles vides).

tout X est entre les extrémités d'un saut large de \mathcal{F} , et 2° pour tout saut large de \mathcal{F} , il y a un seul X entre ses extrémités (*Remplissage de sauts larges de \mathcal{F}* . Voir la déf. 3.5).

4. Une famille monotone \mathcal{F} sera dite *saturée* s'il n'existe aucune famille monotone \mathcal{G} telle que $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ et $\sum \mathcal{G} = \sum \mathcal{F}$.

LEMME 1. Φ étant une classe de familles monotones d'ensembles dont les bases forment une famille monotone, la famille $\sum' \Phi$ est monotone (voir la note 1.2).

THÉORÈME 1. \mathcal{F} étant donnée, $\bar{\mathcal{F}}$ est une famille monotone non-lacunaire contenant \mathcal{F} comme une partie partout dense. On a $\bar{\bar{\mathcal{F}}} = \bar{\mathcal{F}}$.³⁹

Le théorème 1 sera démontré quand on aura fait la démonstration des lemmes 2-6.

LEMME 2. $\bar{\mathcal{F}}$ est une sur-famille monotone de \mathcal{F} .

Que $\mathcal{F} \subseteq \bar{\mathcal{F}}$, c'est manifeste; prouvons que $\bar{\mathcal{F}}$ est monotone c'est-à-dire que, A, B étant deux éléments différents de $\bar{\mathcal{F}}$, on ait ou bien $A \subset B$ ou bien $A \supset B$.

Logiquement, quatre cas sont à envisager:

1° $A = \sum f, B = \sum g, f, g$ étant deux sous-familles non-vides de \mathcal{F} .

En désignant par F, G un élément variable respectivement de f, g , on a cette disjonction: ou bien pour *chaque* F il y a un G tel que $F \subseteq G$ et alors $A \subset B$ ou bien il y a un F tel que $F \not\subseteq G$ donc $F \supset G$ pour chaque G , et alors $A \supset B$.

2° $A = \sum f, B = \prod g$. Ou bien il y a un F et un G tels que $F \supseteq G$ et alors $A \supset B$ ou bien pour *chaque* G on a $F \not\supseteq G$ donc $F \subset G$ et alors $A \subset B$.

3° $A = \prod f, B = \sum g$. Voir le cas précédent.

4° $A = \prod f, B = \prod g$.

Tout d'abord, on s'aperçoit que pour F quelconque, on a ou bien $F \subseteq B$ ou bien $F \supset B$. Ceci étant, ou bien pour *chaque* F , on a $F \supset B$ et alors $A \supset B$ ou bien il y a un F tel que $F \subseteq B$ et alors $A \subset B$.

LEMME 3. \mathcal{F} est partout dense sur $\bar{\mathcal{F}}$.

Si $\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}}$, il n'y a rien à démontrer. Supposons l'existence d'un $A \in \bar{\mathcal{F}} - \mathcal{F}$. On voit qu'au moins un des deux cas a lieu:

$A = \prod (\cdot, A)_{\mathcal{F}}, A = \sum (A, \cdot)_{\mathcal{F}}$ (voir la définition 1.5).

³⁹Par définition, $\bar{\bar{\mathcal{F}}} = \bar{H}, H = \bar{\mathcal{F}}$.

On voit aussi que dans le premier cas par exemple, tout intervalle de $\bar{\mathcal{F}}$ contenant A contient au moins un élément de la famille $(\cdot, A)_{\mathcal{F}}$; par conséquent, A est alors un point d'accumulation de \mathcal{F} , etc.

LEMME 4. $\bar{\mathcal{F}}$ est non-lacunaire.

Tout d'abord, on voit que $\bar{\mathcal{F}}$ est limité. D'autre part, supposons l'existence d'une lacune intérieure AB de $\bar{\mathcal{F}}$. En posant $A_0 = A\mathcal{F}$, $B_0 = B\mathcal{F}$, A_0 est (puisque \mathcal{F} est partout dense sur $\bar{\mathcal{F}}$) une sous-famille non-vide de \mathcal{F} ; donc $A = \prod A_0$, $A \in \bar{\mathcal{F}}$. On a ou bien $A \in A$ ou bien $A \in B$. On voit que si $A \in A$ ($A \in B$), A sera le dernier (premier) élément de $A(B)$ et, par conséquent, la coupure AB n'ouvrirait pas une lacune de $\bar{\mathcal{F}}$, contrairement à la supposition.

LEMME 5. La famille $\bar{\mathcal{F}}$ est la plus grande sous-famille monotone de $\bigcup M_{\mathcal{F}}$ sur laquelle \mathcal{F} est partout dense.

Supposons l'existence d'une famille monotone \mathcal{G} telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \bigcup M_{\mathcal{F}}$ et sur laquelle \mathcal{F} serait partout dense. Si $G \in \mathcal{G} - \bar{\mathcal{F}}$, on voit que G ne peut pas être une extrémité de \mathcal{G} . Par conséquent, en posant $A = \prod (\cdot, G)_{\mathcal{F}}$, $B = \sum (G, \cdot)_{\mathcal{F}}$, on a $A \in \bar{\mathcal{F}}$, $B \in \bar{\mathcal{F}}$. Ainsi, l'intervalle AB de \mathcal{G} contiendrait au moins l'élément G de \mathcal{G} sans contenir aucun élément de \mathcal{F} contrairement à l'hypothèse que \mathcal{F} est partout dense sur \mathcal{G} .

LEMME 6. $\bar{\bar{\mathcal{F}}} = \bar{\mathcal{F}}$

Tout d'abord, d'après les lemmes 3 et 4, $\bar{\mathcal{F}}$ est une sur-famille monotone de \mathcal{F} sur laquelle $\bar{\mathcal{F}}$ est partout dense; \mathcal{F} étant partout dense sur $\bar{\mathcal{F}}$, $\bar{\mathcal{F}}$ est partout dense sur $\bar{\bar{\mathcal{F}}}$, \mathcal{F} est partout dense sur $\bar{\bar{\mathcal{F}}}$ aussi. Alors, à la suite de lemme 6, on ne peut pas avoir $\bar{\bar{\mathcal{F}}} \supset \mathcal{F}$.

THÉORÈME 2. Les quatre hypothèses suivantes sur une famille monotone \mathcal{F} sont logiquement équivalentes:

- α) \mathcal{F} est saturée;
- β) 1° $\{0\} \in \mathcal{F}$, 2° \mathcal{F} n'a aucun saut large, 3°) $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$;
- γ) Pour chaque coupure AB de \mathcal{F} , on a: 1° $\prod A \in \mathcal{F}$, 2° $\sum B \in \mathcal{F}$, 3° $p(\prod A - \sum B) = 0$ ou 1;
- δ) 1° \mathcal{F} est un ordre de $M_{\mathcal{F}}$, 2° pour chaque coupure AB de \mathcal{F} , on a $\prod A \in \mathcal{F}$ et $\sum B \in \mathcal{F}$.

On va prouver cette chaîne de conclusions: $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow \alpha$.

$\alpha \rightarrow \beta$. L'ensemble vide étant contenu (voir la note 1.1) dans tout ensemble, la conclusion $\alpha \rightarrow \beta_1$ est évidente; il en est de même, vu le théorème précédent, de la conclusion $\alpha \rightarrow \beta_3$. Pour prouver que $\alpha \rightarrow \beta_2$, on voit qu'il suffit de montrer ce

LEMME 7. Pour chaque famille monotone \mathcal{F} , $\sigma\mathcal{F}$ est une sur-famille monotone de \mathcal{F} . Pour que $\mathcal{F} = \sigma\mathcal{F}$, il faut et il suffit que \mathcal{F} n'ait aucun saut large.

$\beta \rightarrow \gamma$. A étant une portion gauche quelconque de \mathcal{F} , on a ou bien $A = 0$ et alors $\prod A = \mathcal{F}$ à cause de l'hypothèse $\beta 1$ ou bien $0 \supset A \supseteq \mathcal{F}$ et alors $\prod A = \mathcal{F}$ à cause de $\beta 3$. On a donc $\beta \rightarrow \gamma 1$. De la même façon, on prouve que $\beta \rightarrow \gamma 2$. Il nous reste à prouver que $\beta \rightarrow \gamma 3$. En posant $A = \prod A$, $B = \sum(\mathcal{F} - A)$, on voit que A, B sont deux éléments consécutifs de \mathcal{F} et, par conséquent, si la condition $\gamma 3$ n'était pas réalisée, A, B , seraient les extrémités d'un saut larg'e de \mathcal{F} contrairement à $\beta 2$.

$\gamma \rightarrow \delta$. Il s'agit de montrer que $\gamma \rightarrow \delta 1$. Le cas où $pM_{\mathcal{F}} \leq 1$ étant évident, supposons que $pM_{\mathcal{F}} > 1$. Il s'agit donc de prouver que, a, b , étant deux points différents quelconques de M , on ait ou bien $a < b$ ou bien $a > b$ (voir la définition (P)). En supposant que $b < a$ n'est pas vrai prouvons que

$$(1) \quad a < b$$

Remarquons, tout d'abord, que sous l'hypothèse γ , on peut démontrer sans peine que

$$(2) \quad \{0\} \in \mathcal{F}, \quad \bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}.$$

Ceci étant, soit \mathcal{G} la famille de tous les $X \in \mathcal{F}$ contenant le point b . Si \mathcal{G} contient un élément ne contenant pas le point a , la relation (1) serait vérifiée. Supposons donc que $a \in G = \prod \mathcal{G}$. En posant

$$(3) \quad G_a = G - a, \quad \text{on aura } a \notin G, \quad b \in G_a.$$

En posant $B = \sum(G, \cdot)_{\mathcal{F}}$, on a, à cause de (2), $B \in \mathcal{F}$ et $B \subset G_a + a$, donc $B \subseteq G_a$. Si l'on avait $B \subset G_a$, on aurait $p(G - B) > 1$ ce qui est impossible à cause de l'hypothèse $\gamma 3$ et du fait que $B = \sum B$ et $G = \prod(\mathcal{F} - B)$, $B = (G, \cdot)_{\mathcal{F}}$. On a donc $B = G_a$ et, par conséquent, $G_a \in \mathcal{F}$, ce qui, d'après (P), ensemble avec (3), veut dire que $a < b$.

$\delta \rightarrow \varepsilon$. Supposons, par impossible, l'existence d'une famille monotone \mathcal{G} telle que $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ et $\sum \mathcal{G} = \sum \mathcal{F}$ (voir la définition 4). G étant un élément de $\mathcal{G} - \mathcal{F}$, posons

$$A = \prod(\cdot, G)_{\mathcal{F}}, \quad B = \sum(G, \cdot)_{\mathcal{F}}$$

D'après la condition $\delta 2$, on a $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$. D'autre part, il est clair que $A \supset G \supset B$ et par suite $p(A - B) > 1$. Autrement dit A, B , seraient

les extrémités d'un saut large de \mathcal{F} ce qui est en la contradiction avec la condition $\delta 1$ et le

LEMME 8. *Aucune famille monotone \mathcal{F} qui est un ordre de sa base ne contient aucun saut large.*

Soient, en effet, m, n deux points différents de $A-B$. Par hypothèse, on a ou bien $m < n$ ou bien $n < m$. Supposons que $m < n$. Cela voudrait dire l'existence d'un ensemble $D \in \mathcal{F}$ tel que $m \notin D, n \in D$. Or, on voit, que D serait entre A et B et par conséquent, A, B ne seraient pas consécutifs dans \mathcal{F} , contrairement à la supposition. Ainsi le théorème 2 est complètement démontré.

LEMME 9. *Si \mathcal{F} est un ordre de sa base $M_{\mathcal{F}}$, \mathcal{F} est une famille de portions droites de $M_{\mathcal{F}}$ ordonnée par le procédé (P).*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait deux points a, b de M et un $X \in \mathcal{F}$ tels que: $a < b, a \in X$ et $b \notin X$. Le signe $a < b$ voulant dire l'existence d'un $Y \in \mathcal{F}$ tel que $a \notin Y, b \in Y$, les ensembles X, Y seraient deux éléments distincts de \mathcal{F} pour lesquels on n'a ni $X \subset Y$ ni $Y \subset X$ contrairement à la monotonie de \mathcal{F} .

THÉORÈME 3. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille monotone \mathcal{F} soit un ordre de sa base, est que la famille $\bar{\mathcal{F}} + \{0\}$ soit saturée.³⁸*

La condition est nécessaire. \mathcal{F} étant un ordre de $M_{\mathcal{F}}$, on voit que, à la suite des lemmes 6 et 9, la famille monotone $\mathcal{F} + \{0\}$ vérifie l'hypothèse β du théorème 2, et l'inclusion $\beta \rightarrow \alpha$ du même théorème veut dire que $\bar{\mathcal{F}} + \{0\}$ est saturée.

La condition est suffisante: $\bar{\mathcal{F}} + \{0\}$ étant une famille monotone saturée, prouver que \mathcal{F} est un ordre de $M_{\bar{\mathcal{F}}} = M_{\mathcal{F}}$. En employant les notations de la démonstration de l'inclusion $\gamma \rightarrow \delta$ ci-dessus, on s'assure, sans peine, que G et G_a sont deux éléments consécutifs de \mathcal{F} . On a alors deux cas:

1° $G_a \in \mathcal{F}$, donc $a \notin G_a, b \in G_a$ et d'après (P), on aurait $a < b$.

2° $G_a \notin \mathcal{F}$. Nous savons (voir le lemme 3) que G_a est un élément d'accumulation de \mathcal{F} et cela du côté droit parce que entre G et G_a , il n'y a aucun élément de \mathcal{F} . Autrement dit, il existe une famille $f \subset \mathcal{F}$ telle que $\sum f = G_a$ donc aussi un $X \in f$ tel que $b \in X \in \mathcal{F}$. Cela veut dire précisément que $a < b$.

Comme une conséquence facile du lemme 9 et du théorème précédent, on a ce

THÉORÈME 4.⁴⁰ *Chaque famille monotone saturée \mathcal{F} est le plus grand*

⁴⁰Ce théorème est dû à M. C. Kuratowski, loc. cit.

ordre de sa base et coïncide avec la famille des portions droites de l'ensemble $M_{\mathcal{F}}$ ordonné par le procédé (P); et vice versa: la famille des portions droites d'un ensemble ordonné quelconque est monotone et saturée.

5. \mathcal{F} étant une famille monotone donnée, on désignera par \mathcal{F}^1 la famille des $M_{\mathcal{F}} - X$, X parcourant \mathcal{F} . Le signe \mathcal{F}_J désignera la famille de tous les éléments non-vides $X \in \mathcal{F}$ vérifiant cette condition: il y a un point $a \in M_{\mathcal{F}} - X$ tel que l'ensemble $X + a \in \mathcal{F}^{41}$. Le signe $\mathcal{F}_J \times \mathcal{F}_J^1$ désignera la famille des X, X^1 non-vides, X, X^1 parcourant respectivement $\mathcal{F}_J, \mathcal{F}_J^1$. Enfin, la famille-réunion $\mathcal{F}_J + \mathcal{F}_J \times \mathcal{F}_J^1 + \mathcal{F}^1$ sera désignée par $J_{\mathcal{F}}$.

On prouve facilement ce

THÉORÈME 5. \mathcal{F} étant une famille monotone (et saturée), la famille \mathcal{F}^1 l'est aussi.

Si \mathcal{F} est monotone et saturée, la famille \mathcal{F}_J (\mathcal{F}_J^1) coïncide avec la famille des intervalles droits (gauches) non-vide de l'ensemble $M_{\mathcal{F}}$ ordonné par le procédé (P) tandis que la famille $J_{\mathcal{F}}$ coïncide avec la famille des intervalles non-vides de $M_{\mathcal{F}}$ ordonné par (P).

En rappelant que tE désigne le type ordinal de E , on peut prouver ce

THÉORÈME 6. \mathcal{F} étant un ordre saturé de M^{42} , on a $tM_{\mathcal{F}} + 1 \leq t\mathcal{F}$. Pour que les deux ensembles ordonnés \mathcal{F} et $M_{\mathcal{F}} + 1$ soient semblables, il faut et il suffit que \mathcal{F} soit bien ordonnée (par rapport à la relation \subset^{43}).

En définitive, on peut dire que la théorie de familles monotones d'ensembles se ramène à la théorie des ensembles ordonnés de points; et réciproquement⁴⁴.

6. La question se pose: M étant un ensemble de points, existe-t-il une famille monotone saturée de sous-ensembles de M ? ou ce qui revient au même: peut on indiquer une relation d'ordre entre les points de M ? ou encore: \mathcal{F} étant une famille monotone d'ensembles, peut-on indiquer un procédé de construire une famille monotone et saturée \mathcal{F}_s telle que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_s$ et $\sum \mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_s$?

⁴¹On voit facilement que, si a existe, il est unique

⁴²La terminologie s'entend d'elle même.

⁴³Voir la définition 1.14. Plus tard, on dira "... que \mathcal{F} soit un table monotone saturé" (voir le chap. II). Il est facile d'exprimer $tM_{\mathcal{F}}$ en fonction de $t\mathcal{F}$ au moyen des procédés, v, V, S et w (voir la section VI du précédent).

⁴⁴En particulier, la relation $<$ est exprimable en termes de la relation \subset . Il en est de même de la relation d'ordre cyclique, de celle définissant le mot "entre", aussi bien que de la "relation de séparation de couples", chacune de ces trois relations étant, en vertu d'un théorème récent de M. Huntington (Voir: Trans. Amer. Math. Soc. **38**(1935), pp. 1-9), définissable en termes de la relation $<$.

\mathcal{F} étant une famille monotone d'ensembles, posons

$$(1) \quad \mathcal{F}_0 = \bar{\mathcal{F}} + \{0\}^{38}$$

Supposons que, α étant un nombre ordinal donné, les \mathcal{F}_ξ sont définis pour tout ordinal $\xi < \alpha$. On posera

$$(II) \quad \mathcal{F}_\alpha = \bar{H}_{\alpha-1}, H_{\alpha-1} = \sigma \mathcal{F}_{\alpha-1} \text{ si } \alpha \text{ est de première espèce et}$$

$$(III) \quad \mathcal{F}_\alpha = \bar{H}_\alpha, H_\alpha = \sum'_{\xi < \alpha} \mathcal{F}_\xi \text{ si } \alpha \text{ est de seconde espèce}$$

(voir la note 1.2). Ainsi, en vertu du principe de l'induction complète, \mathcal{F}_α est défini pour *tout* ordinal α . On voit que $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \mathcal{F}^\alpha \subseteq \dots$ et que $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_{\alpha+\xi}$ pour tout ξ si $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_{\alpha+1}$.

En admettant le principe de M. Zermelo, il est clair qu'il existe un nombre γ tel que $\mathcal{F}_\gamma = \mathcal{F}_{\gamma+1}$. En posant alors

$$(IV) \quad \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}^s$$

α étant le premier nombre ordinal ξ tel que $\mathcal{F}_\xi = \mathcal{F}_{\xi+1}$, on a ce

THÉORÈME 7. *La famille \mathcal{F} définie par (I)-(IV) est une famille monotone saturée telle que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_s$ et $\sum \mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_s$. Pour que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_s$, il faut et il suffit que \mathcal{F} soit saturée.*

Eu égard des lemmes 1, 2, 3, 4, et 7, la famille \mathcal{F}_s est monotone, contient \mathcal{F} et a la même base que la famille \mathcal{F} . D'autre part, on voit que \mathcal{F}_s vérifie l'hypothèse β du théorème 2, et, en vertu du même théorème, \mathcal{F}_s est saturée.

Que l'égalité $\mathcal{F} = \mathcal{F}_s$ soit caractéristique pour les \mathcal{F} saturées, c'est bien manifeste.

Si, en particulier, M étant un ensemble de points, on pose $\{M\} = \mathcal{F}^{45}$ le procédé précédent permet de construire une famille monotone saturée ayant M pour base, et en vertu du théorème 3 ou 4, l'ensemble M peut être ordonné.

En regardant comme légitime la construction de la famille⁴⁶

$$\mathcal{F}_s = \sum'_{\alpha} \mathcal{F}_\alpha \quad (\text{voir la note 1.2})$$

⁴⁵ $\{M\}$ veut dire la famille composée de l'ensemble M .

⁴⁶ C'était M.E. Zermelo qui, en 1905, a, le premier, démontré que, en postulant l'axiome de choix, toute ensemble peut être bien ordonné. Trois ans après, il a démontré le même théorème en se servant d'un procédé qui est l'origine de la théorie de familles monotones d'ensembles. Voir E. Zermelo, *Math. An.* 59(1905), pp. 514-516 et *Math. An.* 65(1908), pp. 107-128.

la sommation s'étendant sur tous les ordinaux α^{47} , on pourrait encore démontrer sans l'axiome de M. Zermelo, le théorème précédent. On en déduirait, en particulier que tout ensemble peut être bien ordonné.

Vu l'importance de la notion d'ordre d'une part et l'idée très claire que nous en avons d'autre part, résultat de notre acquisition héréditaire, on peut poser ce

Problème. L'hypothèse que chaque ensemble peut être *ordonné*, entraîne-t-elle l'axiome de choix de Zermelo?⁴⁸

La réponse affirmative atténuerait un assez grand nombre d'objections qu'on fait à l'axiome de choix, bien que, étant donné l'indépendance⁴⁹ de celui-ci des autres axiomes (de Zermelo) de la théorie des ensembles, elles n'ont pas, au point de vue logique, une importance décisive.

Remarquons que la réponse serait affirmative si l'on pouvait prouver, sans l'aide de l'axiome de choix, cette proposition:

E étant un ensemble ordonné infini quelconque on a $(pE)^2 = pE^{50}$

§5. Systèmes de complexes de points

Dans ce §, on concretisera encore davantage la théorie des ensembles ordonnés.

Les notions introduites dans ce § joueront un rôle considérable dans la suite de l'exposé.

Les signes, α , E désigneront respectivement un nombre ordinal et un ensemble ordonné quelconques.

1. α étant donné, tout signe A de la forme $(a_0, a_1, \dots, a_\xi \dots)$, $\xi < \alpha$, sera appelé *complexe de rang α dont le rang ξ est occupé par a_ξ* , a_ξ étant un point (élément) quelconque; on écrira aussi $A = (a_0, \dots, a_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$.

⁴⁷ Ce "passage à la limite générale" peut être considéré comme une adjonction utile aussi bien que l'est le passage à la limite classique (l'infini potentiel); il est justifié, au point de vue logique, dans la même mesure que l'est le dernier parce qu'ils sont, les deux, un résultat du même principe de l'induction complète. Au point de vue pratique, ou même de constructions effectives, il y a même des entiers qui n'existent pas, étant donné l'évolution sans grand sauts de l'humanité d'une part et la durée bornée de tous phénomènes et objets naturels d'autre part, donc de l'Univers lui-même.

⁴⁸ On sait que, si l'on remplace, dans le texte, le mot "ordonné" par "bien ordonné" le problème admet une réponse affirmative (voir la note 2.8).

⁴⁹ Voir A. Fraenkel Sitz. Ber. Akad. Berlin. 1922, pp. 253-257.

⁵⁰ En effet, d'après M. A. Tarski, l'axiome de choix est équivalent à l'hypothèse: "Pour tout ensemble infini E , on a $(pE)^2 = pE$ " (voir. Fund. Math. 5(1924), pp. 147-154). Noter que, pour tout α , on a $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$.

L'ensemble vide sera considéré comme le seul complexe de rang 0.⁵¹

Deux complexes $A^1 = (a_0^1, \dots, a_\xi^1 \dots)_{\xi < a^1}$, $A^2 = (a_0^2, \dots, a_\xi^2 \dots)_{\xi < a^2}$ seront dits *différents*, en signe $A^1 \neq A^2$, si l'on n'a pas en général $a_\xi^1 = a_\xi^2$ quel que soit ξ .

Alors, on voit qu'il existe un indice v tel que $a_\xi^1 = a_\xi^2$ pour tout $\xi < v$ et $a_v^1 \neq a_v^2$. Le premier nombre v jouissant de cette propriété sera désigné par

$$\varphi(A^1, A^2) \text{ ou } \varphi(A^2, A^2)$$

En particulier, deux complexes de rangs différents seront différents.

Convention 1. Tout complexe $A = (a_0, \dots, a_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$ sera considéré comme un ensemble ordonné par ce procédé

(1) On posera $a_\xi \leq a_{\xi'}$, dans A suivant que $\xi \leq \xi'$.

Par conséquent, on pourra employer, ici encore, la terminologie des ensembles ordonnés; en particulier, le complexe $(a_0, \dots, a_\eta \dots)_{\eta < \xi}$, $\xi < \alpha$, sera appelé intervalle gauche ξ de A et désigné par $(\cdot, \xi)_A$. Les égalités

$$A = ((\cdot, \xi)_A a_\xi \dots)_{\xi < \alpha} = ((\cdot, \xi)_A [\xi, \cdot)_A), \text{ etc.}$$

s'entendront alors d'elles mêmes. (*Juxtapositions de complexes*).

2. E , α étant donnés, on désignera, avec M. Hausdorff,⁵² par E^{α^*} l'ensemble de tous les complexes $A = (a_0, \dots, a_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$ les a_ξ parcourant indépendamment l'ensemble E , les A étant ordonnés alphabétiquement (par le principe de premières différences): $A^i = (a_0^i, \dots, a_\xi^i \dots)_{\xi < \alpha^i}$, ($i = 1, 2$), étant deux éléments différents de E , on posera, φ désignant le nombre $\varphi(A^1, A^2)$,

(2) $A^1 \leq A^2$ dans E^{α^*} suivant que $a_\varphi^1 \leq a_\varphi^2$ dans E .

On s'assure aisément que E^{α^*} est ordonné par la procédé (2), son type sera désigné par μ^{α^*} si celui de E est μ . On posera, par convention, $\mu^0 = 1$ si $\mu > 0$.

LEMME 1. A, B, C étant trois éléments différents de E^{α^*} , on a $\varphi(A, C) \geq \min(\varphi(B, A), \varphi(C, B))$. Si, de plus, $A < B < C$, le nombre $\varphi(A, C)$ est le plus petit des ordinaux $\varphi(B, A), \varphi(C, B)$.

⁵¹ Quelquefois, il est avantageux de considérer un ensemble de puissance quelconque d'éléments jouant le rôle du zéro dans le cas courant.

⁵² G.M. 150. Noter que α^* est le type inverse de α . Voir encore F. Hausdorff, Ber. Math. Phys. Kl. d. Wiss. zu Leipzig, 58, 1906, p. 106 et suiv.

3. $B = (b_0, \dots, b_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$ étant un complexe donné, on désignera par $\{B\}_E$ l'ensemble de tous les complexes $A = (a_0 \dots a_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$ tels qu'il existe un indice v (variable avec A) tel que les a_ξ , $\xi < v$, parcourent indépendamment l'ensemble E tandis que $a_\xi = b_\xi$ pour $v \leq \xi < \alpha$.

G étant un complexe de rang γ , $\gamma < \alpha$, on désignera par $[G]_{E\alpha^*}$ ou simplement $[G]$ l'ensemble de tous les complexes $(Ga_\gamma \dots a_\xi \dots)_{\gamma \leq \xi < \alpha}$, les a parcourant indépendamment l'ensemble E (il est évident que $[G] = G$ si $\gamma = \alpha$).

Remarquons, une fois pour toutes, que $\{B\}_E$ ou $[G]_{E\alpha^*}$ seront considérés toujours comme déjà ordonnés par le procédé (2) s'ils sont susceptibles de l'être⁵³.

LEMME 2. B étant un élément quelconque de E^{α^*} , l'ensemble $\{B\}_E$ est partout dense sur E^{α^*} .

Tout d'abord, si α est de première espèce, on voit que $\{B\}_E = E^{\alpha^*}$. Supposons donc que α est de seconde espèce; on voit que $\{B\}_E \subset E^{\alpha^*}$. Il s'agit alors de montrer que toute intervalle non-vide (A^1, A^2) de E^{α^*} contient un point de $\{B\}$, c'est-à-dire qu'il existe un complexe C tel que

$$C \in \{B\}_E \cdot (A^1, A^2)_{E\alpha^*}.$$

En posant $A^i = (a_0^i, a_\xi^i \dots)_{\xi < \alpha^i}$, ($i = 1, 2$), on peut supposer $A^1 < A^2$ c'est-à-dire $a_\varphi^1 < a_\varphi^2$, $\varphi = \varphi(A^1, A^2)$. Ceci étant, on a deux cas:

I. Il y a un point $a \in (a_\varphi^1, a_\varphi^2)_E$; si alors C désigne le complexe $((\cdot, \varphi)_{A^1} a(\varphi, \cdot)_{A^2})$, on voit que la relation (3) est vérifiée.

II. a_φ^1, a_φ^2 sont deux éléments consécutifs de E . En désignant par A_φ^i l'ensemble $[(a_0^i \dots, a_\varphi^i)]_{E\alpha^*}$, ($i = 1, 2$), on a ces éventualités:⁵⁴

1°. A_φ^1 n'a pas un dernier point. Si alors X est un point de A_φ^1 tel que $A_\varphi^1 < X$, il suffit de considérer le complexe $((\cdot, \varphi_1)_X (\varphi_1, \cdot)_B)$, $\varphi_1 = \varphi(XA^1)$ pour voir (qu'il vérifie la relation (3)).

2°. A_φ^2 n'a pas un premier point. Ce cas est traité comme le cas précédent.

3°. A_φ^1 a un dernier point P , A_φ^2 a un premier point Q .

⁵³En effet, si l'ensemble-réunion $b_\xi + E$ n'est pas ordonné par exemple, il est clair que l'ensemble $[B]$ ne peut pas être ordonné par le procédé (2).

⁵⁴Bien entendu, l'ensemble A_φ^1 précède l'ensemble A_φ^2 parce qu'on a supposé que $A^1 < A^2$.

Tout d'abord, on voit facilement qu'alors l'ensemble E est limité et que P, Q sont deux éléments consécutifs de E^{α^*} et de la forme

$$P = (a_0^1 \dots a_{\varphi}^1 \dots s \dots), \quad Q = (a_0^2 \dots a_{\varphi}^2 r \dots r \dots),$$

r, s désignant respectivement le premier et le dernier point de E .

Si au moins un des intervalles $(A^1, P), (Q, A^2)$ n'est pas vide, on construit très facilement un complexe C vérifiant la relations (3). Le cas où $A^1 = P, Q = A^2$ étant inadmissible à cause de la supposition que A^1, A^2 ne sont pas consécutifs, il nous reste encore deux possibilités:

a) A^1, P sont deux éléments consécutifs de E^{α^*} . En posant $\varphi_1 = \varphi(A^1, P)$, on voit que $A^1 = ((\cdot, \varphi_1)_{P a_{\varphi_1}^1 s \dots s})$, $a_{\varphi_1}^1$ étant le prédécesseur immédiat de s dans E ; en posant alors $X = ((\cdot, \varphi_1)_{P s r \dots r \dots})$, on voit que X est entre A^1 et P , contrairement à la supposition.

b) Q, A^2 sont deux éléments consécutifs de E . En répétant le raisonnement de tout à l'heure, on s'assure que cette supposition aboutit aussi à une contradiction. Ainsi le lemme 2 est démontré.

COROLLAIRE I. *Si E fini ou dénombrable, l'ensemble ordonné E^{ω^*} est séparable⁵⁵.*

En effet, si $B \in E^{\omega^*}$, on voit que $[B]_E$ est dénombrable.

4. On désignera par kE^{α^*} l'ensemble ordonné alphabétiquement des éléments de la réunion $E^{\alpha^*} + \sum_B \{B\}_E$, la sommation s'étendant sur les complexes de rang α $B = (b, \dots b \dots)$, les b parcourant les éléments de l'ensemble lE (voir la définition 3.5).

Ceci étant, on va prouver ce

THÉORÈME 1.

- L'ensemble E^{α^*} est partout dense sur l'ensemble kE^{α^*} .*
- L'ensemble kE^{α^*} est non-lacunaire.*
- Si E est dense, on a $kE^{\alpha^*} = lE^{\alpha^*}$.*

Dans ce qui suit, r, s , désigneront respectivement le premier et le dernier élément de lE ; pour abrégé, on posera $kE^{\alpha^*} = \mathfrak{E}$

Le théorème 1a se démontre en imitant la démonstration du lemme 2; prouvons la partie b du théorème. On voit tout d'abord que \mathfrak{E} est limité par $R = (r, \dots r \dots)$ et $S = (s \dots s \dots)$. Supposons, d'autre part, l'existence d'une lacune intérieure MN de \mathfrak{E} . ξ étant un ordinal $< \alpha$, on voit qu'il

⁵⁵ C'est-à dire E^{ω} a un sous-ensemble dénombrable partout dense. E.A. p. 186).

existe au plus un complexe de rang ξ , $M_\xi = (m_0 \dots m_\eta)_{\eta < \xi}$ tel que $[M_\xi]_{\mathfrak{E}}$ ait un élément en commun avec M et un élément en commun avec N .

De plus, on voit que $M_{\xi_1} = (., \xi_1)_{M_{\xi_2}}$ si $\xi_1 < \xi_2$ dans le cas où M_{ξ_2} existe.

On a deux cas:

1-er cas: M existe pour tout $\xi < \alpha$. Si l'on pose

$$\mathfrak{M} = (m_0, \dots, m_\xi \dots)_{\xi < \alpha},$$

on s'aperçoit aisément que pour tout ξ , $m_\xi \in E$ et, par conséquent, $\mathfrak{M} \in E^{\alpha^*}$. Autrement dit, le complexe \mathfrak{M} appartiendrait ou bien à M où il serait alors le dernier élément, ou bien à N où il serait alors le premier élément, ce qui est incompatible avec la supposition que M , N sont les composants d'une lacune intérieure de \mathfrak{E} .

2-me cas: il y a un nombre β , et soit β le plus petit nombre tel que M_β n'existe pas. On a deux éventualités:

a) β est de première espèce. Puisque $[M_0]_{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}$, on a $\beta > 0$. En désignant par A l'ensemble des points $a \in E$ tels que $[M_{\beta-1}a]_{\mathfrak{E}} \subset M$ et en posant $B = E - A$, on voit que $A < B$, $A \supset 0$ et $B \supset 0$. Si A a un dernier élément e , le complexe $(M_{\beta-1}es \dots s)$ est le dernier point de M ; si B a un premier point f , le complexe $(M_{\beta-1}fn \dots n \dots)$ est le premier élément de N ; si aucun des derniers cas n'a lieu, soit g l'élément unique de lE entre A et B . On voit que le complexe $\mathfrak{M} = (M_{\beta-1}g \dots g \dots)$ appartient à \mathfrak{E} et est ou bien le dernier point de M ou bien le premier point de N .

b) β est de seconde espèce. En considérant l'ensemble $[M_\beta]_{\mathfrak{E}}$, on voit qu'il appartient ou bien à M et alors le complexe $(M_\beta s \dots s)$ serait le dernier point de M , ou bien à N et alors $(M_\beta n \dots n \dots)$ serait le premier point de N , contrairement à l'hypothèse.

On a donc démontré que \mathfrak{E} est non-lacunaire.

Passons à la démonstration du théorème 1c. E étant dense, on prouve, en répétant le raisonnement précédent, que chaque lacune (éventuelle) de E^{α^*} est comblée par un et un seul élément de $kE^{\alpha^*} - E^{\alpha^*}$. Il s'agit alors de prouver la réciproque: $G = (g_0 \dots, g_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$ étant un élément de $kE^{\alpha^*} - E^{\alpha^*}$, en posant $M = E^{\alpha^*}(., G)_{\mathfrak{E}}$, $N = E^{\alpha^*}(G, .)_{\mathfrak{E}}$, la coupure MN de E^{α^*} ouvre une lacune de E^{α^*} .

Supposons, par impossible, que M ait un dernier point,

$$\mathfrak{M} = (m_0 \dots m_\xi \dots)_{\xi < \alpha}.$$

En posant $\varphi = \varphi(\mathfrak{M}, G)$, considérons les points m_φ, g_φ . Si $g_\varphi \in E$, il suffit de prendre un point quelconque de l'intervalle (m_φ, g_φ) de E , le substituer à la place de m_φ , dans \mathfrak{M} , pour obtenir un point de M entre \mathfrak{M} et G , ce qui est absurde.

Si $g_\varphi \notin E$, il est clair que $g_\xi = g_\varphi$ pour tout $\varphi < \xi < \alpha$. On a trois cas:

1° g_φ est le premier point r de lE . On aurait $m_\varphi < r$, ce qui est absurde.

2° g_φ est le dernier point s de lE . Il suffit de remplacer, dans \mathfrak{M} , le point m_φ par un point de $(m_\varphi, \cdot)_E$ pour obtenir un complexe succédant à \mathfrak{M} .

3° g_φ est un élément de $lE - E$ entre r et s . Ce cas est traité comme le cas précédent. Ainsi, le théorème 1 est complètement démontré. —

D'ailleurs, on voit que $lE^{\omega^*} \subseteq kE^{\alpha^*}$; voilà un cas où $lE^{\alpha^*} \subset kE^{\alpha^*}$.

LEMME 3. l, λ désignant respectivement le type ordinal de l'ensemble des nombres irrationnels et de l'ensemble des nombres réels, on a ces identités

$$1^\circ (\omega^* + \omega)^{\omega^*} \equiv l$$

$$2^\circ l(\omega^* + \omega)^{\omega^*} \equiv 1 + \lambda + 1$$

$$3^\circ k(\omega^* + \omega)^{\omega^*} \equiv (\omega^* + \omega)^{\omega^*} \equiv \Theta \equiv 2\omega^*$$

Θ désignant le type ordinal de l'ensemble ordonné qu'on obtient du segment $[0, 1]$ des nombres réels en remplaçant tout nombre rationnel de l'intervalle $(0, 1)$ par une paire ordonnée de points (voir la définition 3.6).

Pour faciliter le langage, E désignera l'ensemble des entiers rationnels (le zéro compris).

Pour démontrer le lemme 3₁, il suffit, d'après le théorème de Cantor du § 12 D', de prouver que E^{ω^*} est anti-limité, dense, partout lacunaire et séparable, ce qu'on vérifie immédiatement. D'après le même théorème, on voit que le type de lE^{ω^*} est $1 + \lambda + 1$.

Si, enfin, r, s désignent respectivement le premier et le dernier élément de lE , et si l'on pose $R = (r, r \dots)$, $S = (s, s, \dots)$, on voit que les types de $\{R\}_E$, $\{S\}_E$ sont respectivement $1 + \eta$ et $\eta + 1$, η désignant le type ordinal de l'ensemble des nombres rationnels. Il est clair que $kE^{\omega^*} = E^{\omega^*} + \{R\}_E + \{S\}_E$. Or, si $(a_0 \dots a_n, a_{n+1} r r \dots)$ est un élément de $\{R\}_E - R$, on voit que l'élément $(a_0 \dots a_n, a_{n+1} - 1, s, s \dots)$ de $\{S\}_E - S$ le précède immédiatement dans kE^{ω^*} ce qui prouve que $kE^{\omega^*} \equiv \Theta \equiv uE^{\omega^*}$.

De plus, on prouve sans peine que $2^{\omega^*} \equiv \Theta$.

LEMME 4. μ étant un type continu, le type μ^{α^*} , $\alpha > 0$, l'est aussi.

LEMME 5. *Pour les α différents, les types $\vartheta\alpha^*$, $\vartheta = 1 + \lambda + 1$, sont différents deux à deux⁵⁶.*

5. E étant l'ensemble ordonné composé de trois éléments l, m, n tels que $l < m < n$, on posera, pour α quelconque $(l + m + n)^{\alpha^*} = \{M\}_E$, M désignant le complexe de rang α , $(m, \dots m \dots)$.

En particulier, ξ étant régulier, on posera $H_\xi = (l + m + n)^{\omega_\xi^*}$ (Voir la remarque 8 B 1)⁵⁷.

ξ étant régulier, on a ce

THÉORÈME 2.a. *L'ensemble H_ξ est confinal (coïntial) avec ω_ξ (ω_ξ^*) et semblable avec chacun de ses intervalles. On a $pH_\xi = \sum_{\zeta < \omega_\xi} 2^{p\zeta}$.*

b. *Tout ensemble ordonné ayant la puissance $\leq \aleph_\xi$ est semblable avec un sous-ensemble de H_ξ ⁵⁸.*

COROLLAIRE 1. *Pour tout nombre ordinal α , on a*

$$pH_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha} \quad (\text{voir le théorème 2.6}).$$

Le théorème 2b nous montre que, en admettant l'axiome de M. Zermelo⁵⁹, la théorie des ensembles ordonnés se réduit à la théorie des ensembles $H_0, H_1, \dots, H_\xi, \dots$, ξ parcourant les ordinaux réguliers, et de leurs sous-ensembles, résultat qui, en vue de simplicité, ne laisse rien à désirer.

§6. Espaces abstraits et ensembles ordonnés

Dans ce §, on confrontera la classe des ensembles ordonnés avec différentes classes d'espaces abstraits considérés dans le livre cité de M.M. Fréchet.

La terminologie est celle du même livre de M.M. Fréchet⁶⁰.

THÉORÈME 1. *En considérant chaque intervalle d'un ensemble ordonné E comme voisinage de tout point qui lui appartient, on obtient, par définition, l'espace ordonné E , qui est un espace accessible et complètement normal⁶¹.*

⁵⁶ Voir le chap. II du Mémoire précité de M. Hausdorff.

⁵⁷ Voir G. M. p. 179. Noter que $(l + m + n)^{\alpha^*}$ et E^{α^*} sont deux ensembles différents.

⁵⁸ Ce théorème est dû à M. Hausdorff (G.M. p. 172-185). On voit que H_0 est semblable avec l'ensemble des nombres rationnels.

⁵⁹ Pour assurer que pour toute puissance k , il existe un aleph \aleph_α , tel que $k \leq \aleph_\alpha$.

⁶⁰ E.A. p. 289.

⁶¹ Pour la terminologie, voir E. A. p. 289. Le théorème I est dû à M. H. Tietze (Math. Ann. 88, p. 312).

Remarque. Deux espaces ordonnés semblables sont toujours homéomorphes; mais, deux ensembles ordonnés semblables ne sont pas nécessairement homéomorphes. Si, par exemple, E désigne l'ensemble des nombres réels, on sait (voir la déf. 3.6) que E coïncide avec l'ensemble F des points isolés de l'ensemble ωE et, par conséquent, bien que semblable à lui, l'ensemble E ne peut pas être homéomorphe avec F .

D'autre part, deux ensembles ordonnés homéomorphes ne sont pas nécessairement semblables; exemple: les types $\omega + 1$ et $\omega + 2$.

Pendant, on peut prouver sans peine ceci:

Chaque homéomorphie entre deux ensembles ordonnés connexes, G , H , est une transformation par similitude de G soit sur H soit sur l'ensemble ordonné à sens inverse de celui-ci; autrement dit: la correspondance transformant G en H est constamment soit croissante soit décroissante.

La théorie 1 permet d'énoncer un grand nombre de théorèmes établis pour les espaces accessibles. On ne mentionnera que ce

THÉORÈME 2. *Les quatre hypothèses suivantes sur un ensemble ordonné non-vide E sont logiquement équivalentes:*

- α) E est non-lacunaire;
- β) Tout sous-ensemble infini de E a un point d'accumulation maximée dans E ;
- γ) \mathcal{F} étant une famille monotone non-vide quelconque de sous-ensembles fermés non-vides de E , on a $\prod \mathcal{F} \supset 0$ (voir le théorème 3.5);
- δ). E possède la propriété de Borel-Lebesgue (voir le théorème 3.6).⁶²

En combinant l'inclusion $\delta \rightarrow \alpha$ du théorème précédent avec le théorème 3.4 on obtient ce

THÉORÈME 3. *Pour qu'un ensemble ordonné non-vide possède la propriété de Borel-Lebesgue, il faut et il suffit qu'il possède la propriété de Lebesgue-Khinchine et qu'il soit limité (Déf. 1.7 et 3.2).*

THÉORÈME 4. *Pour qu'un espace (V) de M. Fréchet E , puisse être considéré comme un ensemble ordonné sans altérer l'opération de dérivation des sous-ensembles de E , il faut et il suffit qu'il existe une famille monotone saturée d'ensembles \mathcal{F} , telle que $\sum \mathcal{F} = E$ est jouissant de la propriété que la famille $J_{\mathcal{F}}$ soit une famille de voisinages définissant E , en considérant tout élément de $J_{\mathcal{F}}$ comme voisinage de tout point qui lui appartient⁶³.*

⁶²Le théorème 2 est dû à M. P. Alexandroff et Urysohn (loc. cit. (2.5) p. 8 et suiv.).

⁶³Pour la terminologie, consulter le §4.

Ce théorème est une conséquence immédiate des définitions 1.9 et des théorèmes 4.4 et 4.5).

THÉORÈME 5. *Pour qu'un espace ordonné E soit homéomorphe d'une classe (L) de M. Fréchet, il faut et il suffit que tout point de E ait un caractère au plus dénombrable⁶⁴. Tout ensemble ordonné qui est une classe (L) est aussi une classe (S) .*

En omettant la démonstration du théorème 5 parce qu'elle ne présente aucune espèce de difficultés, remarquons que c'était justement à partir de la notion de grandeur qu'a pris naissance la notion de limite qui peut être considérée comme fondamentale en Analyse. D'autre part, le théorème 5 nous montre que la classe des ensembles ordonnés qui sont une classe (L) de M. Fréchet est bien restreinte, et alors, il serait très naturel d'envisager des classes (L) généralisées où la puissance de suites de points déclarées comme divergentes ou convergentes ne jouerait aucun rôle. On verrait alors que tout ensemble ordonné serait une classe (S) généralisée, celles-ci étant définies comme des classes (L) généralisées dont tout ensemble dérivé est fermé⁶⁵.

λ désignant le type ordinal de l'ensemble des nombres réels, on a ce

THÉORÈME 6. *Les quatre types ordinaux λ , $1+\lambda$, $\lambda+1$ et $\vartheta \equiv 1+\lambda+1$, sont les seuls types ordinaux connexes distanciables⁶⁶.*

Si E est connexe, distanciable et limité, il est, d'après l'inclusion $\alpha \rightarrow \beta$ du théorème 2, compact en soi, donc aussi séparable⁶⁷.

Alors, d'après le théorème de Cantor (voir §12D), le type de E est ϑ . De même, on voit que si E est anti-limité connexe et distanciable, son type ordinal est λ ; etc.

LEMME 1. *μ étant un type ordinal quelconque, le type $\lambda\mu$ est distanciable.*

Par définition, $\lambda\mu$ est le type ordinal de l'ensemble E des complexes (m, x) ordonnés alphabétiquement (définition 1.15), m, x parcourant respectivement un ensemble M de type μ et l'intervalle $(0,1)$ des nombres réels. Alors, $C^i = (m^i, x^i)$, ($i = 1, 2$), étant deux complexes différents de E on s'aperçoit qu'il suffit de poser

$$\varrho(C^1, C^2) = 1 \text{ si } m^1 \neq m^2 \text{ et } \varrho(C^1, C^2) = |x^1 - x^2| \text{ si } m^1 = m^2,$$

⁶⁴Un point a de E sera dit avoir un caractère au plus dénombrable, s'il existe une famille au plus dénombrable \mathcal{F} d'intervalles de E telle que $\prod \mathcal{F} = a$.

⁶⁵voir E. A. p. 164.

⁶⁶Une classe distanciable veut dire une classe (\mathfrak{D}) de M. Fréchet.

⁶⁷Tout ensemble distanciable compact est séparable (E. A. p. 72).

pour obtenir un ensemble ordonné distancié⁶⁸ de type ordinal $\lambda\mu$.—

α étant un ordinal quelconque, on va prouver ce

LEMME 2. *Pour qu'un type ordinal de la forme λ^{α^*} soit distanciable, il faut et il suffit que α soit ou bien de première espèce ou bien tel que $\tau\alpha = \omega$ (voir la déf. 2.2 et 5.2).*

Tout d'abord, α étant de seconde espèce et tel que $\tau\alpha > \omega$, on prouve sans peine que chaque intervalle gauche de λ^{α^*} est confinal avec le nombre régulier $\tau\alpha$, et par conséquent, aucun point de λ^{α^*} ne serait à un caractère au plus dénombrable. Or, λ^{α^*} étant supposé distanciable, aucun point de λ^{α^*} n'a un caractère non dénombrable comme on le vérifie sans peine. Autrement dit, si λ^{α^*} est distanciable, α n'est pas un nombre de seconde espèce tel que $\tau\alpha > \omega$.

Prouvons la réciproque: si α est de première espèce, ou de seconde espèce tel que $\tau\alpha = \omega$, le type λ^{α^*} est distanciable. On se contentera de la prouver pour le cas où $\tau\alpha = \omega$. Soit

$$(1) \quad \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \dots \rightarrow \alpha$$

une suite d'ordinaux croissants $< \alpha$ et ayant α pour borne supérieure.

Il s'agit alors de distancier l'ensemble E des complexes

$$(a_0, \dots, a_\xi \dots)_{\xi < \alpha},$$

les a_ξ parcourant l'intervalle $(0,1)$. On posera, pour tout $A \in E^{\alpha^*}$, $\varrho(A, A) = 0$. Ensuite, A^1, A^2 étant deux éléments différents de E , on posera $\varrho(A^1, A^2) = 1/n$, n étant le premier indice ν tel que $\varphi(A^1, A^2) \leq \beta_\nu$ (voir la définition 5.1).

On voit aisément que l'ensemble ordonné E^{α^*} devient un espace distancié, E_α , et que de plus la condition triangulaire de M. Fréchet, prend cette forme particulière:

$$(\varrho) \quad \varrho(A^1, A^2) \leq \max(\varrho(A^2, A^3), \varrho(A^3, A^1));$$

(voir le lemme 5.1)

Il s'agit de prouver que E^{α^*} et E_α sont homéomorphes; pour cela, il suffit de prouver ces deux points:⁶⁹

⁶⁸ $\sigma(A, B)$ veut dire "distance AB ".

⁶⁹ E. A. p. 173.

1-er. $A = (a_0 \dots a_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$ étant un point quelconque de E^{α^*} , tout intervalle $(A^1 A^2)$ de E^{α^*} contient une sphère $S(A, r)$ de E_α ⁷⁰.

n étant un entier tel que le nombre ordinal β_n de la suite (1) soit supérieure au plus grand des nombres ordinaux $\varphi(A^1 A^2)$, $\varphi(AA^1)$ et $\varphi(AA^2)$, considérons la sphère $S(A, 1/(n+1))$; on voit qu'elle coïncide avec l'ensemble $[a_0 \dots a_{\beta_n}]_{E^{\alpha^*}}$ et qu'elle fait partie de l'intervalle $(A^1 A^2)$ de E^{α^*} (voir la déf. 5.3).

2-ème. $A = (a_0 \dots a_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$ étant un point quelconque de E_α , la sphère $S(A, 1/(n+1))$ de E_α contient un intervalle de E^{α^*} contenant le point A .

En effet, $a_{\beta_{n+1}}^i$, ($i = 1, 2$), étant deux nombres réels entre 0 et 1 tels que $a_{\beta_{n+1}}^1 < a_{\beta_{n+1}} < a_{\beta_{n+1}}^2$, désignons par A^i , ($i = 1, 2$), les complexes qu'on obtient en remplaçant dans le complexe A , le nombre $a_{\beta_{n+1}}$ par les nombres $a_{\beta_{n+1}}^i$ respectivement. Il est clair que $A^1 < A < A^2$ et que l'intervalle $(A^1 A^2)$ de E^{α^*} fait partie de la sphère $S(A, 1/(n+1))$ de E_α .

Remarquons, enfin, que, par un raisonnement analogue, on peut prouver que le type $(\omega^* + \omega)^{\omega^*}$ (voir le lemme 5.3) est celui d'un ensemble ordonné E qui peut être distancié en posant respectivement $\varrho(AA) = 0$, $\varrho(A^1, A^2) = 1/(\varphi(A^1 A^2) + 1)$, pour tout point A de E et tout couple de points différents A^1, A^2 de E . C'est la définition de la distance déjà connue dans le cas de l'espace à zéro dimensions G_0 de R. Baire⁷¹.

Celui-ci est semblable au type $(\omega^* + \omega)^{\omega^*}$ un résultat qui se déduit aussi du lemme 5.3 et du fait que l'espace G_0 de Baire est homéomorphe de l'ensemble des nombres irrationnels.

Remarquons que le type ω^{ω^*} n'est pas homéomorphe de l'espace G_0 . En effet, on prouve aisément que $\omega^{\omega^*} = 1 + \lambda$.⁷²

⁷⁰La sphère $S(A, r)$ de E_α ayant A pour centre et r pour rayon est l'ensemble de tous les points X de E_α tels que $\rho(A, X) < r$.

⁷¹Voilà la définition de l'espace G_0 de Baire. M étant un ensemble dénombrable quelconque (ordonné ou non-ordonné), soit \mathfrak{N} l'ensemble des suites (ou complexes de rang ω) $m_1, m_2 \dots m_i \dots$, les m_i parcourant indépendamment M . On posera, M^1, M^2 étant deux points différents de \mathfrak{N} : $\rho(M^1 M^2) = I/\varphi(M^1 M^2)$ et $\rho(N, N) = 0$, pour tout $N \in \mathfrak{N}$ (voir R. Baire, Acta. Math. 32, p. 97-175 et M. Fréchet E. A., p. 118). C'est dans l'espace G_0 (ou dans un modèle de G_0) et non dans l'ensemble des nombres réels que M. N. Lusin expose ses recherches sur les ensembles analytiques, projectifs etc. (N. Lusin, Ensembles Analytiques, Paris, 1930).

⁷²Voir G. M. p. 151.

Enfin, on prouve facilement que le type $(1 + \lambda)_{\omega+1}$ est connexe, localement distanciable⁷³ (donc aussi un espace (E) de M. Fréchet) sans être distanciable.

Problème. Caractériser la classe des types ordinaux distanciables.

Dimension des ensembles ordonnés.

Les symboles $\dim E$, dE désigneront respectivement la dimension d'Urysohn-Menger⁷⁴ de E et le type de dimension de M. Fréchet ou le type topologique de E .⁷⁵ De même, x étant un point de E , on désignera par $\dim_x E$ la dimension d'Urysohn-Menger de E dans le point x .⁷⁶

E étant un ensemble non-vide, on a ce

THÉORÈME 6. *a.* $\dim E = 0$ ou 1 c'est-à-dire $\dim E < 2$.

b. Pour que $\dim E = 0$, il faut et il suffit que E soit totalement non-connexe (voir la déf. 1.12).

c. Pour que $\dim_x E = 1$ pour tout $x \in E$, il faut et il suffit qu'aucun intervalle non-vide de E ne soit totalement non-connexe.

La partie *a* du théorème 6 est une conséquence immédiate de la définition de $\dim E$ et du lemme 3.12; pour montrer les parties *b*, *c* du théorème, il est clair qu'il faut et il suffit de prouver ce

LEMME 4. x étant un point de E , pour que $\dim_x E = 1$, il faut et il suffit que x soit contenu dans une portion connexe de E (voir la convention 1.2).

Prouvons le lemme 4. On peut, évidemment, supposer que x ne soit pas une extrémité de E . La supposition que l'ensemble $(., x)_E$ ne soit confinal avec aucune portion connexe de E bien que, par hypothèse, $\dim_x E = 1$, veut dire que (voir le théorème 3.8) pour tout point $a \in (., x)_E$, il existe une portion droite P_1 de $[a, x]_E$ telle qu'elle soit le composant supérieur soit d'une lacune soit d'un saut de $[a, x]_E$.

De même, sous la supposition qu'il n'existe aucune portion connexe de E coïnitiale avec $[x, .)$, on démontre, pour tout $b \in (x, .)$, l'existence d'une portion $P_2 \subseteq [x, b]$ telle qu'elle serait le composant inférieur soit d'une lacune soit d'un saut de $[x, b]_E$. Autrement dit, l'ensemble $P_1 + P_2 \subset (a, b)$ serait une portion à la fois fermée et ouverte de E contenant le point x . L'intervalle

⁷³Un espace abstrait est dit localement distancié si pour tout son point a il y a un voisinage de a qui est un espace distancié.

⁷⁴Pour la terminologie, voir C. Kuratowski, Topologie I, Warszawa, 1933 p. 116 et suiv.

⁷⁵Voir E. A. p. 30 et suiv. aussi: Kuratowski, Ibid. p. 72.

⁷⁶Kuratowski, ibid. p. 116.

(ab) de E étant quelconque, cela voudrait dire exactement que $\dim_x E = 0$, contrairement à l'hypothèse.

Pour montrer que la condition de lemme 4 est suffisante, il est manifeste qu'il suffit de prouver le

LEMME 5. *Pour tout point x d'un ensemble ordonné connexe E , on a $\dim_x E = 1$.*

Ce lemme est évident parce que, A étant un intervalle quelconque de E tel que $x \in A$, il est manifeste que l'ensemble $\bar{A} - A$ est composé soit d'un point soit de deux points de E (voir le lemme 3.12).

Remarquons que $\dim \lambda^{\alpha^*} = 0$ pour tout ordinal α de seconde espèce. En effet, on prouve facilement que les λ^{α^*} , α étant de seconde espèce, sont partout lacunaire.⁷⁷

Que $\dim \lambda^{\alpha^*} = 0$ pour les α tels que $\tau\alpha = \omega$, c'est également une conséquence de la forme particulière (ϱ) de la condition triangulaire de M. Fréchet.⁷⁸

D'après le théorème précédent, le symbole $\dim E$, E étant un ensemble ordonné quelconque, ne pourrait avoir qu'une des trois valeurs: -1, 0 et 1. Il en est tout autrement du symbole dE . En effet, I désignant le segment $[0, 1]$ des nombres réels, on sait (voir le lemme 5.5) que les dI^{α^*} , α parcourant des ordinaux, sont deux à deux différents. Malheureusement, ils sont, en général, incomparables entre eux. Si l'on désigne par $dE_1 \parallel dE_2$ le fait que dE_1, dE_2 sont incomparables, on voit, par exemple, que $dI \parallel dI^{\omega^*}$.

Considérons, enfin, le symbole tE (voir la définition 1.14). On prouve facilement que $tI^{\alpha^*} < tI^{\beta^*}$ si $\alpha < \beta$ sont deux ordinaux quelconques et, par conséquent, on pourrait poser $tI^{\alpha^*} = \alpha$. Mais pour les α finis, les tE^{α^*} ne coïncident aucunement avec la dimension dR_α de l'espace euclidien à α dimension (voir E. A. p. 56 et suiv.)

Par conséquent, l'ensemble des tE différents est extrêmement riche. Il y en a qui sont incomparables, par exemple tw_1 , et λ . On voit aussi

⁷⁷En effet, on a ce théorème: E , α étant respectivement un ensemble ordonné anti-limité non-vide et un nombre ordinal de seconde espèce, l'ensemble E^{α^*} est partout lacunaire.

⁷⁸D'ailleurs, on peut prouver ce théorème: Si pour tout triple de points A^i ($i = 1, 2, 3$) d'un espace distancié E , l'ensemble des distances $\rho(A^1A^2)$, $\rho(A^2A^3)$, $\rho(A^3A^1)$, ne se compose qu'au plus de deux nombres différents, alors $\dim E = 0$. Cela a lieu, en particulier, si l'équation triangulaire de M. Fréchet est de la forme

$$\rho(A^1A^2) \leq \max(\rho(A^2A^3), \rho(A^3A^1)).$$

que $t\lambda = t(1 + \lambda + 1)$ sans qu'ils soient semblables c'est-à-dire tels que $t\lambda \equiv t(1 + \lambda + 1)$. Mais, d'après M. Banach⁷⁹, si G, H sont deux ensembles ordonnés tels que $tG = tH$, alors $G = G_1 + G_2$, $G_1G_2 = 0$, $H = H_1 + H_2$, $H_1H_2 = 0$ et $tG_i \equiv tH_i$, ($i = 1, 2$). (voir la définition 1.14).

Problème: Soient G_1, G_2, H_1, H_2 quatre sous-ensembles d'un ensemble ordonné jouissant des propriétés suivantes: $G_1G_2 = 0$, $H_1H_2 = 0$ et $tG_i \equiv tH_i$, ($i = 1, 2$); en posant $G = G_1 + G_2$ et $H = H_1 + H_2$, est-ce que les types ordinaux tG et tH sont *comparables*? et en particulier sont-ils égaux?⁸⁰

§7. Sur quelques puissances se rattachant à un ensemble ordonné

Pour la commodité du raisonnement, on admettra, dans ce §, l'axiome de Zermelo, ou ce qui revient au même, l'hypothèse qu'il n'y ait pas de puissances incomparables. E désignera, comme toujours, un ensemble ordonné et pE sa puissance.

Il est commode de poser cette définition: Une famille d'ensembles sera dite *disjonctive*⁸¹ si les ensembles dont elle est composée, sont, deux à deux, disjoints; de plus, la famille vide aussi bien que chaque famille composée d'un seul élément sera dite *disjonctive*.

1. Le signe p_0E désignera la borne supérieure des pF , F parcourant la famille des sous-ensembles bien ordonnés ou inversement bien ordonnés de E . (voir la définition 18); p_1F désignera la borne inférieure des pF , F parcourant la famille des sous-ensembles de E partout denses sur E .

p_4E (p_2E) désignera la borne supérieure des $p\mathcal{F}$, \mathcal{F} parcourant la classe des familles disjonctives de segments (d'intervalles non vides) de E .

p_3E désignera la borne supérieure des $p\mathcal{F}$, \mathcal{F} parcourant la classe des familles de segments de E n'impriétant pas les uns sur les autres; p_5E désignera la borne inférieure des $p\mathcal{F}$, \mathcal{F} parcourant la classe des familles d'intervalles déterminant l'espace ordonné E .

LEMME 1. Les nombres p_iE , ($i = 0, 1, \dots, 5$), sont parfaitement déterminés et tels que $p_iE \leq pE$.

⁷⁹Fund. Math. 6, p. 236.

⁸⁰Le même problème se pose en considérant les types dimensionnels de M. Fréchet des ensembles appartenant à une certaine classe d'espaces abstraits (par exemple espaces distanciés, accessibles, etc). Le problème semble assez difficile (cf. l'énoncé original du lemme de M. Banach et le problème: *si la réciproque du lemme de Banach lui-même est vraie?*)

⁸¹Cette expression si suggestive est due à M. Fréchet. Dans la suite, on en déduira d'autres.

Que les $p_i E$ soient bien déterminés, c'est la conséquence du fait que "l'ensemble" des nombres cardinaux est bien ordonné.

THÉORÈME 1.⁸² a. $p_i l E = p^i E$, ($i = 0, 1, \dots 5$)

b. $p_i v E = p_i E$, ($i = 0, 1, 2$); $p_j v E = p E$, ($j = 3, 4, 5$);

c. $p_0 w E = p_0 E$, $p_i w E = p E$, ($i = 1, 2, \dots 5$).

Démonstration. L'égalité $p_0 E = p_0 j E$ ($j = u, l, w$), étant évidente, considérons les autres cas. Le théorème étant banal pour les E finis, on supposera que E est infini.

L'égalité $p_1 l E = p_1 E$ est une conséquence immédiate du lemme 3.21. Que $p_j w E = p E$, ($j = 1, \dots 5$), c'est une conséquence de ce que E coïncide avec l'ensemble des points isolés de l'ensemble $w E$ (voir le théorème 3.11). Les égalités $p_i j E = p_i E$, ($i = 1, 2$; $j = l, v$), proviennent de ce que, A étant un intervalle nonvide quelconque de $j E$, on a $A E \supset 0$ comme on le vérifie sans aucune peine. Il nous reste encore à prouver que $p_i l E = p E$ et $p_i v E = p E$, pour $i = 3, 4, 5$.

A ce but, prouvons tout d'abord ces deux lemmes:

LEMME 2. E étant infini, on a $p_3 E = p_4 E$.

LEMME 3. Si E n'a aucun point d'accumulation bilatérale, on a $p_4 E = p E$.

Le dernier lemme étant évident, démontrons le premier. Soit alors \mathcal{F} une famille infinie de segments S de E n'impieçant pas les uns sur les autres. S étant un élément de \mathcal{F} , soient S^1 l'élément (éventuel) de \mathcal{F} contenant l'extrémité gauche de S , et S^2 l'élément (éventuel) de \mathcal{F} contenant l'extrémité droite de S . Ceci étant, soient

$$(1) \quad S_0, S_1, \dots S_\varphi, \dots \varphi < \omega_\beta, p\omega_\beta = p\mathcal{F},$$

les éléments de \mathcal{F} . Désignons par \mathcal{F}_0 la famille des s_ψ déterminés de la façon suivante: on posera $s_0 = S_0$; les s_ξ étant déterminés pour tout $\xi < \alpha$, s_α désignera le terme du plus faible indice dans la suite (1) ne coïncidant avec aucun des s_ξ , s_ξ^1 , s_ξ^2 , $\xi < \alpha$. Il est clair que \mathcal{F}_0 est une famille de \mathcal{F} telle que $p\mathcal{F} \leq 3$. $p\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0$.

Donc $p\mathcal{F} = p\mathcal{F}_0$. Or, les éléments de \mathcal{F}_0 sont de segments deux à deux disjoints de E . On en tire, l'inégalité $p_3 E > p_4 E$ étant absurde, que $p_3 E = p_4 E$.

⁸²Pour la terminologie et les notations, voir la section VI du §3.

A la suite du lemme 3, on a $p_4vE = pE$ parce que, d'une part, $pvE = pE$, et d'autre part, vE n'a aucun point d'accumulation bilatérale. A la suite du lemme 2, on a $p_3vE = p_4vE$, ou, à la suite de $p_4vE = pE$, $p_3vE = pE$.

Prouvons que $p_5wE = pE$. Tout d'abord, les points de E étant isolés dans wE ; on a $pE \leq p_5wE \leq pwE$. Or, on voit que $pwE = pE$, et, par conséquent, $p_5wE = pE$.

Il s'agit encore de montrer que $p_5lE = p_5E$. Rappelons ce résultat qu'on vérifie aisément: \mathcal{F} étant une famille d'intervalles déterminant E , la famille \mathcal{G} de tous les intervalles non-vides de lE dont l'ensemble des extrémités est égal à celui des éléments de \mathcal{F} , est une famille d'intervalles déterminant l'espace lE . Or on voit que $p\mathcal{G} = p\mathcal{F}$. Si, en particulier, $p\mathcal{F} = p_1E$ (une telle famille existe, comme on s'en aperçoit), on en conclut que $p_5lE \leq p_5E$, donc $p_5lE = p_5E$.

Ainsi, le théorème 1 est complètement démontré.

LEMME 4. p désignant la puissance de l'ensemble des sauts de E , on a $p_i sE = p_i E + \aleph_0$. p , ($i = 0, \dots, 5$). (voir la déf. 3.5).

COROLLAIRE. a. Pour que $p_0 sE > p_0 E$, il faut et il suffit que $1 < pE < \aleph_0$.

b. Pour que $p_i sE > p_i E$, il faut et il suffit que $p_i E < p$, ($i = 1, 2, \dots, 5$).

LEMME 4'. E étant infini et sans aucun saut de seconde espèce, on a $p_i sE = p_i E$, ($i = 0, 1, \dots, 5$).

On se contentera de prouver que $p_1 sE = p_1 E$.

p étant la puissance de l'ensemble des sauts de E , il suffit de prouver, d'après le lemme précédent, que $p_1 E \geq p$. Il est clair que, q désignant la puissance de l'ensemble Q de points de E qui ne sont pas de points d'accumulation bilatérale de E , on a $p \leq q$. Prouvons que $p_1 E \geq q$. Soient donc, F un sous-ensemble de E partout dense sur lui et ayant la puissance $p_1 E$ et a un point quelconque de l'ensemble Q . Si a est isolé, posons $a' = a$; il est clair que $a' \in F$. Si a n'est pas isolé dans E , et s'il n'est pas une extrémité de E , soit a' le point de E qui précède immédiatement le point a si a n'est pas isolé du côté droit, et qui succède immédiatement à a si a est un point d'accumulation de E du côté gauche. L'ensemble E étant supposé sans aucun saut de seconde espèce, on voit que le point a' est isolé et par conséquent appartient à F . Autrement dit, à tout point a de Q correspond un seul point de F , un point de F pouvant correspondre au plus à trois points différents de Q . On a donc $3pF \geq q$ c'est-à-dire $p_1 F \geq q$.

LEMME 5. On a $p_i SE \leq p_i E$. Si SE est infini, alors $p_i SE = p_i E$, ($i = 0, 1, \dots, 5$). (voir la définition 3.5)

On se contentera de prouver que si $pSE \geq \aleph_0$, alors $p_4 SE = p_4 E$.

Tout d'abord, on voit qu'on peut supposer que $p_4 E > \aleph_0$. De plus, à cause de l'égalité $p_4 lE = p_4 E$, on peut supposer que E donc aussi SE est non-lacunaire.

Ceci étant, soit \mathcal{F} une famille non-dénombrable des segments $[a, b]$ de E n'empiétant pas les uns sur les autres. En supposant que $a < b$, désignons par \mathcal{F}_0 la famille des segments $[a', b']$ de SE construits de la façon suivante: a' est le dernier point de $(., a]_{SE}$ ⁸³, b' est le premier point de $[b, .)_{SE}$. L'ensemble E étant non-lacunaire, SE l'est encore et par conséquent, les points a' , b' existent (sauf, peut-être, dans le cas où a ou b sont des extrémités de E). Puisque $p_4 \lambda = \aleph_0$, tout élément de \mathcal{F}_0 correspond à une famille au plus dénombrable d'éléments de \mathcal{F} ; autrement dit, $p\mathcal{F} \leq \aleph_0$. $p\mathcal{F}_0$ donc $p\mathcal{F} = p\mathcal{F}_0$. Or, les éléments de \mathcal{F}_0 sont des segments de SE n'empiétant pas les uns sur les autres. On en conclut que $p_4 SE = p_4 E$.

LEMME 6. $p_0 E \leq p_1 E$.

C'est bien évident parce que, pour tout ensemble F bien ordonné ou inversement bien ordonné, on a $p_0 F = p_1 E = pE$ (voir le lemme 3).

LEMME 7. Pour chaque E infini n'ayant aucun saut de seconde espèce, on a $p_2 E = p_3 E$.

Tout d'abord, il est clair que $p_2 E \leq p_4 E$ donc, à la suite du lemme 2, aussi $p_2 E \leq p_3 E$. Prouvons que $p_2 E \geq p_3 E$. Soit \mathcal{F} une famille infinie quelconque de segments $[a, b]_E$ deux à deux disjoints. $S = [a, b]$, $a < b$, étant un élément de \mathcal{F} , désignons par S^1 l'élément (éventuel) de \mathcal{F} contenant le dernier point (éventuel) de $(., a)_E$, et par S^2 l'élément (éventuel) de \mathcal{F} contenant le premier point (éventuel) de $(a, .)_E$.

Si alors

$$(2) \quad S_0, S_1, \dots, S_\varphi. \quad (\varphi < \omega_\beta, p\omega_\beta = p\mathcal{F}),$$

sont les éléments de \mathcal{F} , soit \mathcal{F}_0 la famille des s_ξ construits comme suit:

Si au moins un des segments $S_0 = [a, b]$, $a < b$, S_0^1, S_0^2 n'est pas un saut de E , soit s_0 l'ensemble des points entre ses extrémités; s'ils sont, tous, de sauts de E , s_0 sera l'intervalle composé du point a si b n'est pas isolé

⁸³Le sigue $(., a]_{SE}$ représente l'ensemble de tous le points de SE qui ne succèdent pas, dans E , au point a .

(évidemment du côté droit), du point b si a n'est pas isolé (évidemment du côté gauche et égal à S si a, b sont isolés.

Les s_ξ , $\xi < \alpha$, étant construits, soit S_γ le premier terme de la suite (2) qui n'était pas pris en considération lors de la construction des s_ξ , pour les $\xi < \alpha$.

Alors, s_α sera construit, à partir de S_γ , exactement de la même façon que l'on a défini s_0 à partir de S_0 .

On s'assure que les s_ξ ainsi construits sont d'intervalles non-vides de E , deux à deux disjoints, et que leur famille \mathcal{F}_0 a la même puissance que la famille \mathcal{F} .

On en conclut que $p_2E \geq p_3E$ et finalement $p_2E = p_3E$.

LEMME 8. *Pour tout ensemble ordonné infini, on a $p_2E \leq p_3E$. Pour que $p_2E < p_3E$, il faut et il suffit que l'ensemble Δ des sauts de seconde espèce de E soit tel que $p\Delta > p_2E$. On a alors $p\Delta = p_2E$.*

a. Par hypothèse, on a $pE \geq \aleph_0$, $p_2E < p_3E$. Supposons que $p\Delta \leq p_2E$.

En désignant par M l'ensemble ordonné qu'on obtient en intercalant dans tout saut de seconde espèce de E un ensemble de type ordinal λ , on a, d'après le lemme précédent, $p_2M = p_3M$. D'autre part, $p_2M = p_2E + \aleph_0 p\Delta = p_2E$, parce que par supposition $p\Delta < p_2E$. Ensuite, $p_3M = p_3E + \aleph_0 p\Delta = p_3E$.

On aurait alors $p_3E = p_3M = p_2E$ et finalement $p_3E = p_2E$ contrairement à l'hypothèse. On a donc non pas $p\Delta \leq p_2E$ mais $p\Delta > p_2E$ ⁸⁴.

b. Par hypothèse, $p\Delta < p_2E$, $pE \geq \aleph_0$.

M ayant la même signification que tout à l'heure, on a

$$p_2M = p_2E + \aleph_0 \cdot p\Delta = p\Delta; \quad p_3M = \aleph_0 p_3E = p_3E.$$

A cause de $p_2M = p_3M$, on en tire l'égalité voulue $p_3E = p\Delta$.

LEMME 9. *Pour tout E infini, on a $p_5E = p_1E + p_4E$.*

D désignant l'ensemble des sauts de seconde espèce de E , on va prouver tout d'abord que $p_5E = p_1E + pD$. En effet, soient F un sous-ensemble de E partout dense sur lui et de puissance p_1E , G l'ensemble des extrémités de D , H la réunion de F et G , \mathcal{F} la famille de tous les intervalles non-vides de E dont les extrémités appartiennent à H , alors il est facile de prouver

⁸⁴Si l'on n'admettait pas l'axiome de Zermelo, la dernière conclusion ne serait pas permise (voir la note 2.8).

que \mathcal{F} est telle que, a étant un point et J un intervalle quelconque de E contenant a , il existe un intervalle I de E tel que $I \subset J$ et $a \in I \in \mathcal{F}$. Or, $p\mathcal{F} = pF + pD$.

Donc $p\mathcal{F} = p_1E + pD$. On en conclut que $p_5E \leq p_1E + pD$. Or, il est évident que $p_5E \geq p_1E$ et $p_5E \geq pD$. Finalement, $p_5E = p_1E + pD$.

D'autre part, il est clair que $pD \leq p_4E$. Par conséquent $p_5E \leq p_1E + p_4E$ donc $p_5E = p_1E + p_4E$.

2. Il nous reste encore à trouver une relation plus étroite entre p_0E et pE , d'une part, et entre p_1E , p_2E d'autre part ce qu'on fera dans le chapitre II.

Toutefois, on va démontrer ce

LEMME 10. Si $p_1E = p_2E$ pour tout ensemble ordonné continu E , alors $p_1E = p_2E$ pour chaque ensemble ordonné E .

Il s'agit donc de prouver que l'égalité

$$(1) \quad p_1E = p_2E$$

est vraie pour tout ensemble ordonné E si elle est vraie pour tout E continu.

L'égalité (1) étant évidente pour des E finis, supposons que E est infini. De plus, à cause des égalités $p_i lVE = p_iE$ pour $i = 1, 2$,⁸⁵ d'une part, et du fait que l'ensemble lVE est non-lacunaire et sans aucun saut de seconde espèce, d'autre part, on peut se borner à l'étude des E infinis, non-lacunaires et sans aucun saut de seconde espèce. Soit donc E un ensemble ordonné infini, non lacunaire et sans aucun saut de seconde espèce. A la suite des lemmes 2 et 7, on aura $p_2E = p_4E$ et $p_2sE = p_4sE$.

L'ensemble E étant sans aucun saut de seconde espèce, on a, d'après le lemme 4', ces égalités:

$$(2) \quad p_1E = p_1sE \text{ et } p_4E = p_4sE$$

On en conclut que $p_2E = p_4sE$. D'autre part, sE étant continu, on a, par hypothèse, $p_1sE = p_2sE$. A la suite des relations précédentes, on a donc $p_1sE = p_2sE = p_4sE = p_4E = p_2E$ et en particulier $p_1sE = p_2E$.

La dernière relation, vu la relation (2), nous donne finalement l'égalité cherchée.

LEMME 10'. Si la borne supérieure p_2E est atteinte pour tout E continu, elle est atteinte pour tout ensemble ordonné E .

⁸⁵Il va sans dire que le signe lVE veut dire $l(VE)$.

Soit E un ensemble quelconque; en désignant par I l'ensemble des points isolé de E , on a deux cas:

Premier cas. $pI \geq p_2E$; il est clair alors que la borne p_2E est atteinte parce qu'il suffit de considérer les éléments de I comme intervalles non-vides de E .

Second cas. $pI < p_2E$. En posant $F = E - I$, on voit que l'ensemble SF est dense, et par conséquent, l'ensemble $IV(F)$ est continu. Par hypothèse, il y a une famille \mathcal{F} d'intervalles non-vides de IVF telle que $p_2IVF = p\mathcal{F}$. D'autre part, on conclut de proche en proche, que $p_2IVF = p_2VF = p_2F = p_2E$.

Or, chaque intervalle M de IVF contient un intervalle non-vide M_0 de l'ensemble F ; si l'on désigne par M_2 l'intervalle de E ayant les mêmes extrémités que l'intervalle M_0 de F et si l'on désigne par \mathcal{F}_2 la famille des M_2 , M parcourant les éléments de \mathcal{F} , on voit que \mathcal{F}_2 est une famille *disjonctive* d'intervalles non-vides de E telle que $p\mathcal{F}_2 = p\mathcal{F}$ et à la suite des égalités précédentes: $p\mathcal{F}_2 = p_2E$.

Les deux lemmes précédents donnent ce

THÉORÈME 2. *Si, quel que soit l'ensemble ordonné continu E , il existe une famille disjonctive \mathcal{F} d'intervalles extraits de E tels que $p\mathcal{F} = p_1E$, il en est de même quel que soit l'ensemble ordonné.*

Le problème si, pour des E continus, la borne supérieure p_2E est atteinte et si elle est égale à p_1E , se réduit, comme on le voit, à cette question: soient E un ensemble ordonné continu et \mathcal{F} une famille d'intervalles déterminant E ; existe-t-il nécessairement une sous-famille *disjonctive* de \mathcal{F} ayant la puissance p_1E ? (*Problème sur la structure cellulaire de continus. Cf. la note 11 du Complément*).

Cette épineuse question nous occupera dans la suite de ce travail.

CHAPITRE II

ENSEMBLES ET TABLEAUX RAMIFIÉS

En généralisant la notion de *relation d'ordre* introduite par G. Cantor, on va définir la notion de *relation de ramification* en s'inspirant de l'idée de subdivision (bipartition, tripartition, etc.) qui intervient dans un grand nombre de démonstrations classiques. On en déduira la notion d'ensembles et tableaux ramifiés.

§8. Généralités

A. DÉFINITION DES ENSEMBLES ET TABLEAUX RAMIFIÉS.

1. *Relation de comparabilité* \approx . Soient $<$ une relation d'ordre quelconque¹ et $>$ la relation d'ordre inverse de $<$; comme d'habitude, \equiv sera le symbole pour la relation de l'identité. Par conséquent, si $a \equiv b$, les éléments a, b joueront partout le même rôle et chacun d'eux sera toujours remplaçable par l'autre; si, par exemple $a = b, b \leq c$, alors on aura $a \leq c$.

Remarquons que les relations $<, >, \equiv$ sont deux à deux *incompatibles*.²

Ceci étant, la *relation de comparabilité* – qu'on désignera par \approx – sera la *somme logique*³ des relations $<, >, \equiv$; autrement dit, le signe $a \approx b$ voudra dire que ou bien $a < b$ ou bien $a > b$ ou bien $a \equiv b$; on écrira: $\approx = (< + > + \equiv)$.

On voit que la relation \approx est symétrique c'est-à-dire: si $a \approx b$ alors $b \approx a$. Par conséquent, le signe $a \approx b$ pourra être lu "*a et b sont comparables (entre eux)*".

On voit aussi que \approx est une relation réflexive; seulement elle n'est pas nécessairement *transitive* (Cf. le lemme 2).

Cela posé, on voit que le chapitre précédent était consacré, au fond, non pas à l'étude de la relation d'ordre $<$, mais à la relation de comparabilité et aux ensembles ordonnés, ceux-ci étant définis comme des ensembles E dont tout couple de points était comparable c'est-à-dire tels que: si $a \in E, b \in E$, alors $a \approx b$.

¹Pour la terminologie, voir le § 1.

²Deux relations binaires R_1, R_2 sont dites *incompatibles* si l'on n'a jamais aR_1b et aR_2b .

³Soit \mathcal{F} une famille de relations binaires; la *somme logique* des relations appartenant à \mathcal{F} sera la relation R définie comme suit: le signe aRb voudra dire qu'il y a au moins une relation ρ appartenant à \mathcal{F} telle que $a\rho b$. On voit que si \mathcal{F} est composée des relations deux à deux incompatibles, les mots "au moins une" dans la phrase précédente sont remplacés par "une et une seule".

2. *Relation de disjonction* \parallel . Une relation binaire symétrique et anti-réflexive sera appelée *relation de disjonction* ou *relation disjonctive* et désignée par le symbole \parallel (deux traits verticaux). A cause de sa symétrie, le signe $a \parallel b$ pourra être lu “ a et b sont disjoints”, “séparés”, “incomparables” etc.

Par exemple, la négation de la relation d'identité est une relation disjonctive. Si A, B sont deux ensembles et si la phrase “ $AB = 0$ sans que $A = B = 0$ ” est désignée par $A \parallel B$, on obtient de nouveau une relation de disjonction⁴.

Remarquons que les relations \equiv et \parallel sont entre elles incompatibles.

3. *Relation de ramification* $*$. Soient $\approx = (< + > + \equiv)$ une relation de comparabilité et \parallel une relation de disjonction quelconques satisfaisant à la condition d'être *incompatibles entre soi*; cela veut dire que les relations $<$ et \parallel sont, entre elles, incompatibles. Alors la somme logique des relations \approx et \parallel sera dite *relation de ramification et désignée par $*$ si la condition suivante est vérifiée*: C : Si $a < c$ et $b < c$ alors $a \approx b$ c'est-à-dire: si $a < c$ et $b < c$, alors ou bien $a \equiv b$ ou bien $a < b$ ou bien $a > b$; ou en paroles: deux éléments, ou points, *précédant* un même point sont *comparables entre eux*.

Pour marquer la dépendance de la relation de ramification $*$ des relations élémentaires $\equiv, <, >, \parallel$ dont elle est composée, on écrira $* = (\equiv, <, >, \parallel)$.

Une relation de ramification sera dite relation de ramification dégénérée si la condition suivante est vérifiée:

\bar{C} : Si $c < a, c < b$ alors $a \approx b$; c'est-à-dire: deux points *succédant* à un même point sont *comparables*.

Par exemple, chacune des relations $\equiv, <, >$ et \parallel est une relation de ramification *dégénérée*.

Remarque 1. Si l'on désigne par \sim une *relation de classification* quelconque (voir le § 1) et si l'on considère la somme logique des relations $\sim, <, >$ et \parallel , celles-ci étant supposées deux à deux incompatibles et liées entre elles par des conditions simples et naturelles, on obtient la notion de la relation de ramification générale. Dans un travail particulier, on en montrera la structure logique.

4. *Ensembles ramifiés*. Un ensemble de points, E , sera dit ramifié relativement à une relation de ramification $* = (\equiv, <, >, \parallel)$ ou *rangé* par

⁴D'où l'expression “relation disjonctive” (voir la note 7.1).

rapport à la même relation de ramification $*$, si, quel que soit le couple d'éléments a, b de E , on a $a * b$. Dans la suite, on dira simplement que E est ramifié et on sous-entendra toujours qu'il est ramifié *par rapport à la relation $*$* définie si-dessus (cf. la Note 1 du Complément).

Exemple: A étant un arbre généalogique, si $a \in A$ et $b \in A$, désignons, respectivement, par $a \approx b$ et $a||b$ les faits que a, b sont respectivement en parenté directe ou collatérale; on voit qu'alors A est un ensemble (et même un *tableau* [voir ci-après]) ramifié; toutefois, on convient que, dans A , il n'y pas de relation "être époux" c'est-à-dire que tout élément de A peut, de lui-même, avoir des descendants.

Dans la suite de ce § lettre E désignera un ensemble ramifié quelconque.

On dira que E est un ensemble ramifié dégénéré si la relation $*$ par rapport à laquelle l'ensemble E est ramifié est dégénérée; par exemple, tout ensemble ordonné est un ensemble ramifié dégénéré. En particulier, on pourra parler des *sous-ensembles ramifiés et des sous-ensembles ramifiés dégénérés d'un ensemble ramifié E* : ceux-ci sont des sous-ensembles F de E pour les points a, b, c, d , desquels la relation $*$ vérifie aussi la condition \bar{C} . Les sous-ensembles F de E ne contenant *aucun couple de points incomparables* seront dits *monotones* (ou ordonnés). Un sous-ensemble F de E sera dit *disjonctif* (voir la note 7.1) si pour aucun couple de points a, b de F on n'a $a < b$ (ou $a > b$): on a, par conséquent, soit $a \equiv b$ soit $a||b$; en particulier, un ensemble de points sera dit *disjonctif* si pour chaque couple de ses points a, b on a ou bien $a \equiv b$ ou bien $a||b$.

Il s'en suit que chaque ensemble monotone ou disjonctif est ramifié et dégénéré; en particulier, l'ensemble vide et chaque ensemble composé d'un seul point sont monotones, disjonctifs et ramifiés et dégénérés.

La notion de sous-ensembles dégénérés d'un E jouera, dans la suite, un rôle important.

LEMME 1. *Si $a||b, a \leq c, b \leq d$, alors $c||d$.*⁵

Il est évident qu'on peut se contenter de prouver que: si $a||b, a < c, b < d$, alors $c||d$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. On aura $c * d$ donc soit $c \equiv d$ soit $c < d$ soit $c > d$.

A cause de la condition C , chacun de ces trois cas amène à une contradiction comme on le voit aisément.

⁵Remarquons que $a \leq c$ veut dire soit $a < c$ soit $a \equiv c$. Dans la définition primitive de la relation de ramification $*$, le lemme 1 était une condition imposée à $*$; la simplification précédente est due à M. J. Karamata.

LEMME 2. *Pour qu'un E soit dégénéré, il faut et il suffit que la relation de comparabilité \approx soit transitive.*

5. *Définition fondamentale.* a étant un point d'un ensemble ramifié E , la portion a de E sera l'ensemble de tous les points x de E tels que $x \not\| a$, autrement dit c'est l'ensemble de tous les points b, c de E tels que $b \leq a \leq c$; la portion a de E sera désignée par $[a]_E$ ou $[a]$. Il s'en suit que $a \in [a]_E$.

LEMME 3. *Pour qu'un ensemble ramifié E soit dégénéré, il faut et il suffit que, quel que soit le point a de E , la portion $[a]$ de E soit monotone.*

E étant dégénéré, supposons qu'il existe un point a de E tel que $[a]$ n'est pas monotone c'est-à-dire qu'il existe deux points m, n appartenant à $[a]$ et tels que $m \parallel n$. Il est clair que a ne peut coïncider ni avec m ni avec n . Alors, quatre éventualités sont à envisager:

- 1° $m < a, n < a$ donc $m \not\| n$ à cause de la condition C ,
- 2° $a < m, a < n$ donc $m \not\| n$ à cause de la condition \bar{C} ,
- 3° $m < a, a < n$ donc $m < n$ à cause de la transitivité de $<$,
- 4° $n < a, a < m$ donc $n < m$ à cause de la transitivité de $<$.

On n'a donc jamais $m \parallel n$ contrairement à la supposition.

D'autre part, E étant ramifié et tel que $[a]_E$ soit monotone pour tout point a de E , on voit aisément que la condition \bar{C} est vérifiée.

LEMME 4. *a, b étant deux points d'un E dégénéré, alors $[a]_E \equiv [b]_E$ ou $[a]_E \parallel [b]_E$ suivant que $a \not\| b$ ou $a \parallel b$.*⁶

On en déduit ce lemme qui nous montre la structure des E dégénérés:

LEMME 5. *Chaque ensemble ramifié dégénéré est composé d'une famille d'ensembles monotones deux à deux incomparables.*

6. *Intervalles, segments, portions, noeuds.*

a étant un point de E , les symboles $(., a)_E, (., a]_E, (a, .)_E$, et $[a, .)_E$ sont définis exactement comme dans le §1; ils porteront le même nom qu'auparavant. En particulier, l'intervalle gauche a de E c'est-à-dire l'ensemble $(., a)_E$ est l'ensemble de tous les points x de E tels que $x < a$; le segment droit a de E est l'ensemble de tous les points b de E tels que $a < b$.

On voit que $[a]_E = (., a)_E + [a, .)_E$.

La notion de portions droites et gauches de E est définie comme dans le §1.

⁶Deux sous-ensembles M, N d'un ensemble ramifié E sont dits *incomparables*, ce qu'on peut désigner par $M \parallel N$, si, quel que soit le point m de M et quel que soit le point n de N , on a $m \parallel n$.

Toutefois, il faut préciser le champ de validité de la notion d'intervalles de E et, par conséquent, aussi celle de portions de E . L'intervalle ab ou ba de E qu'on désignera par $(a, b)_E$ ou $(b, a)_E$ sera l'ensemble de tous les points x de E tels que $a < x < b$ si $a < b$ et $a > x > b$ si $a > b$.

On voit alors que la notion d'intervalle de E ne sera définie que pour des points éventuels a, b de E tels que soit $a < b$ soit $a > b$.

La notion de portion de E , les symboles $[a, b)_E$, $[a, b]_E$, et $(a, b]_E$ sont définis comme dans le §1.

Les intervalles gauches et droits de E et les intervalles proprement dits de E peuvent être appelés, en commun, intervalles de E .

On aura fréquemment besoin de la notion d'un noeud de E : soit a un point de E : l'ensemble de tous les points x de E tels que $(\cdot, x)_E = (\cdot, a)_E$ sera appelé *noeud a de E* et désigné par $|a|_E$.

LEMME 6. a. *Chaque intervalle (segment) de E est un sous-ensemble monotone de E ,*

b. *Chaque noeud de E est un sous-ensemble disjonctif de E .*

7. *Espaces ramifiés.* Nous nous contentons de définir seulement des *espaces-tableaux ramifiés*: la définition des espaces ramifiés paraîtra ailleurs. Soit T un tableau ramifié quelconque (voir ci-dessous); à tout point a de T on fera correspondre la famille \mathcal{F}_a de *ses voisinages* ceux-ci étant des ensembles $\sum_z [z, \cdot)_T - (a, \cdot)_T$, z parcourant $(x, a)_T$, x étant un point quelconque de T tel que $x \leq a$; en particulier, si $(\cdot, a)_T = 0$, la famille \mathcal{F}_a sera composée du seul point a . La détermination des \mathcal{F}_a pour les a de T implique la définition des points d'accumulation des sous-ensembles de T ; on obtient ainsi un espace bien déterminé qu'on désignera par eT .⁷

8. *La notion de première rangée de E .* On dira que E a une *première rangée de points* si, quel que soit le point a de E , l'ensemble ordonné $(\cdot, a)_E$ a un premier point; alors, la première rangée de E , qu'on désignera toujours par R_0E , sera l'ensemble des premiers points des segments $(\cdot, a)_E$, a parcourant les points de E .

LEMME 7. *Si E a une première rangée R_0E d'éléments, celle-ci est caractérisée comme un sous-ensemble disjonctif F de E tel que tout point*

⁷Pour la définition exacte de la dérivation des ensembles à partir de voisinages, voir E. A., p. 172. Quant à la définition de eT cf: la définition originelle de Baire de son espace G_0 (voir la note 6.12), aussi bien que la définition des espaces bien ordonnés.

de l'ensemble $E - F$ soit précédé par un (et par conséquent un seul) point de F^8 .

D'une façon analogue, on introduit la notion de dernière rangée de E : on dira que E a une dernière rangée de points s'il existe un sous-ensemble disjonctif F de E tel que tout point éventuel de $E - F$ précède au moins un point de F . Cependant, on n'en aura pas besoin dans ce qui suit: nous la mentionnons uniquement parce qu'elle nous permet d'introduire la notion des bornes supérieure et inférieure d'un sous-ensemble non-vide de E et, à partir de celle-ci, la notion de lacune de E ; etc. (la définition d'une coupure de E est la même que dans le cas des ensembles ordonnés)⁹.

9. *Tableaux ramifiés. Rang.* Un ensemble ramifié ou rangé sera dit *tableau ramifié* ou *ensemble bien rangé* si chacun de ses sous-ensembles non-vides a une première rangée d'éléments; l'ensemble vide sera considéré aussi comme un tableau ramifié.

Exemple: tout arbre généalogique est un *tableau ramifié* (voir la section 4).

LEMME 8. *Pour qu'un ensemble ramifié soit un tableau ramifié, il faut et il suffit que chacun de ses sous-ensembles ordonnés soit bien ordonné*¹⁰.

Dorénavant, on ne s'occupera que des tableaux ramifiés; la lettre T designera un *tableau ramifié quelconque*.

Remarquons que R_0T désigne, d'après la définition, la première rangée d'éléments de T . Voici un procédé pour *bien ranger* un tableau ramifié T :

La rangée O de T , qu'on désignera par R_0T , sera la première rangée de T ; supposons que les ensembles $R_\xi T$ sont déterminés pour tout $\xi < \alpha$ et que T contient au moins un point qui n'est contenu dans aucun des ensembles $R_\xi T$, $\xi < \alpha$; alors la rangée α de T qu'on désignera par $R_\alpha T$ sera la première rangée de $T - \sum_{\xi < \alpha} R_\xi T$ c'est-à-dire $R_\alpha T = R_0(T - \sum_{\xi < \alpha} R_\xi T)$.

⁸C'était notre définition primitive de R_0E ; la définition du texte est due à M. Fréchet.

⁹Voici par ex., la définition de la borne supérieure relativement à E d'un sous-ensemble non-vide F de E ; soit tout d'abord G_1 l'ensemble de tous les points de F qui ne sont suivis par aucun point de F ; soit ensuite G_2 l'ensemble de tous les points $a \in E - F$ tels que $(., a)_F \supset 0$: et que soit le point x de $(., a)_E$, on ait $(x, a)_F \supset 0$; alors, la première rangée G de la réunion $G_1 + G_2$ sera dite *borne supérieure de F* ; celle-ci sera dite *complète* si $F \subseteq \sum_a (., a]_E$, a parcourant les points de G . Il est clair qu'on peut avoir $G = 0$, et alors, E sera *lacunaire*. Il est à remarquer qu'un sous-ensemble, même monotone, de E , peut avoir une borne supérieure ayant une puissance quelconque. Au contraire, la borne inférieure de tout sous-ensemble monotone de E est composée d'au plus un point de E .

¹⁰La seconde moitié de ce lemme est due à M. Fréchet qui l'emploie comme définition des tableaux ramifiés.

Le type ordinal (et non pas la borne supérieure) de l'ensemble des nombres ordinaux α tels que $R_\alpha T \subset 0$, sera dit rang de T et désigné par γT ou γ .

Noter que tout sous-ensemble monotone de T est bien ordonné; par conséquent, les phrases "tableau monotone de rang α " et "ensemble bien-ordonné dont le type ordinal est α " veulent dire la même chose.

LEMME 9. Chacune des rangées de T est un sous-ensemble disjointif de T ; si a est un point de $R_\alpha T$, $\alpha < \gamma T$, l'intervalle $(., a)_T$ est un ensemble bien-ordonné de type ordinal α ayant avec chacune des rangées $R_\xi T$, $\xi < \alpha$, un et un seul point en commun. Tous les points d'un noeud quelconque de T appartiennent à une même rangée de points de T .

10. Longueur et largeur de T . Les nombres cardinaux $p\gamma T$ et $p\tau\gamma T$ (voir le §2) seront appelés respectivement longueur et longueur réduite de T . Pour abrégé, on désignera $pR_\alpha T$ par $m_\alpha T$ ou même par m_α . La borne supérieure des puissances $m_\alpha T$ sera appelée largeur de T et désignée par mT ou m . Exemple: Désignons par T l'ensemble des types ordinaux des sous-ensembles proprement dits de l'ensemble des entiers (positifs et négatifs), les signes \equiv , $<$, $>$, ayant la signification habituelle (voir la déf. 1.14); on a $\gamma T = \omega + 1$, $m_\alpha T = 1$ pour tout $\alpha < \omega$; la rangée $R_\omega T$ est composée de ω et ω^* . (Cet exemple est dû à M. Fréchet; voir son *Arithmétique de l'infini*, Actual. Sci. Industr. 144(1934), p. 25.).

Il est à peine nécessaire de rappeler que pT désignera la puissance de T ; on a donc $pT = \sum_{\alpha < \gamma T} m_\alpha T$. Si $pT \geq \aleph_0$, T sera dit infini; autrement, il sera fini.

LEMME 10. Quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \gamma$, le rang γT est la borne supérieure des rangs des portions $[a]_T$, a parcourant les éléments de $R_\alpha T$.

LEMME 11. Quel que soit le tableau ramifié infini T , on a $pT = mT \cdot p\gamma T$.

11. Classification des T . Le plus grand nombre ordinal de seconde espèce ne dépassant pas le rang γ de T sera appelé pseudorang de T et désigné par $\gamma' T$ ou γ' . Autrement dit, le nombre γ' est défini par l'équation $\gamma = \omega\gamma' + n$, n étant $< \omega$.

Si, en particulier, γ est de seconde espèce, on aura $\gamma' = \gamma$.

T sera dit large s'il y a un $\alpha < \gamma$ tel que $m_\alpha \geq p\tau\gamma'$.

T sera dit étroit si $mT < p\tau\gamma'$ et si, de plus, $mT < \aleph_\beta$, dans le cas où $\tau\gamma' = \omega_{\beta+1}$, β étant un ordinal quelconque.

Si T n'est ni étroit ni large, il sera dit *ambigu*.

Le tableau vide peut être considéré comme large. Du reste, ce paradoxe ne nous occupera pas dans la suite. (Avec l'ensemble vide on peut faire, d'ailleurs, tout ce qu'on veut). On vérifie que tout tableau fini est large; de même, si $\gamma T < \omega$, T est large.

LEMME 12. *Pour tout tableau infini non-large T on a $pT = p\gamma T$ (voir le lemme précédent).*

LEMME 13. *T étant un tableau étroit, il y a un $\alpha < \gamma T$ tel que $mT < p\alpha$.*

THÉORÈME 1. *Pour qu'un tableau ramifié T soit ambigu, il faut et il suffit que $mT = \aleph_\beta$ si $\tau\gamma' = \omega_{\beta+1}$ et $mT = p\tau\gamma'$, $m_\alpha T < mT$ pour tout $\alpha < \gamma T$ si $\tau\gamma'$ est un nombre inaccessible (voir le §2).*

Que la condition soit suffisante c'est évident; prouvons donc qu'elle est nécessaire.

Autant que T est non-large, on a $m_\alpha T < p\tau\gamma'$, pour tout $\alpha < \gamma$ donc $mT \leq p\tau\gamma'$; d'autre part, T étant non-étroit, on a $mT \geq p\tau\gamma'$. Si $\tau\gamma'$ est inaccessible, on en conclut que $m_\alpha < m$ et $m = p\tau\gamma'$. Si $\tau\gamma'$ n'est pas inaccessible c'est-à-dire si $\tau\gamma' = \omega_{\beta+1}$, ($\beta \geq 0$), on voit que $m \geq \aleph_\beta$ et par suite $m = \aleph_\beta$, sans quoi on aurait $m \geq \aleph_{\beta+1}$ donc aussi $m_\alpha T \geq \aleph_{\beta+1}$ pour au moins un $\alpha < \gamma$, ce qui est absurde, T étant non-large.

La classification des tableaux ramifiés en tableaux larges, étroits et ambigus se montrera très utile et naturelle.

12. *Suites ramifiées.* Un tableau ramifié T sera dit *suite ramifiée* si quel que soit le point a de T , la portion $[a]$ de T a le même rang que le tableau T lui-même; c'est-à-dire si $\gamma[a]_T = \gamma T$ pour tout $a \in T$.

LEMME 14. *Pour qu'un tableau ramifié T soit une suite ramifiée, il faut et il suffit que, quelle que soit la rangée R de T , on ait $T = \sum_a [a]_T$, a parcourant tous les points de R .*

Dans la suite, on aura besoin de ce

THÉORÈME 2. *T étant non large, T contient une suite ramifiée non large S ayant le même rang que le tableau T lui-même; si, en particulier, T est étroit, la suite S l'est aussi.*

Il est clair qu'on peut supposer que le rang γ de T soit un ordinal de seconde espèce c'est-à-dire qu'on ait $\gamma' = \gamma$. Chaque rangée R de T contient un point a tel que $\gamma[a]_T = \gamma$. En effet, d'après le lemme 5, on a $\gamma T = \text{borne sup } \gamma[a]_T$, a parcourant les points de R . D'autre part, T étant non-large,

on a $pR < p\tau\gamma$; par conséquent, on ne peut pas avoir $\gamma[a]_T < \gamma T$ pour tout point a de R , parce qu'alors γT serait la borne supérieure d'une suite de type $< \tau\gamma$ de nombres ordinaux $< \gamma$ ce qui est absurde.

Ceci étant, soit S l'ensemble des points a de T tels que $\gamma[a]_T = \gamma T$; on vient de prouver que $0 \subset R_\alpha S \subseteq R_\alpha T$ pour tout $\alpha < \gamma T$; par conséquent, $\gamma S = \gamma T$.

Il s'en suit que S est un tableau non-large et, en particulier, étroit si T est étroit. Il s'agit encore de voir que S est une suite ramifiée c'est-à-dire que $\gamma[a]_S = \gamma S$ pour tout point, a de S .

Supposons, par impossible, qu'il existe un point a de S tel que $\gamma[a]_S < \gamma S = \gamma T$; cela voudrait dire qu'il existe un nombre $\alpha < \gamma T$ tel que $R_\alpha T$ ne contient aucun point de $[a]_S$ bien que $\gamma[a]_T = \gamma T$. Or, il est clair que, de plus, le tableau $[a]_T$ est non-large et, par conséquent, $R_\alpha[a]_T$ contient au moins un point b de $[a]_T$, tel que $\gamma[b]_D = \gamma D$, $D = [a]_T$; le point b appartiendrait à S donc $b \in R_\alpha[a]_S$ contrairement à la supposition que $R_\alpha[a]_S = 0$ c.q.f.d.

13. *Noeuds de première et de seconde espèce. Suites totalement et complètement ramifiées.* On sait qu'un noeud quelconque de T appartient à une même rangée de T ; il est alors commode de poser cette définition: Soit N un noeud quelconque de T ; on dira qu'il est de *première ou de seconde espèce* suivant que le nombre ordinal α tel que $N \subseteq R_\alpha T$ est de première ou de seconde espèce.

Une suite ramifiée sera dite *complètement (totalement) ramifiée* si chacun de ses noeuds (de *première espèce*) est composée d'au moins deux points distincts¹¹.

Remarque 2. Les points de T peuvent, par la même convention, être déclarés comme étant soit de première, soit de seconde espèce.

On voit que pour qu'un $T \supset 0$ soit totalement ramifié, il faut et il suffit que quel que soit le point a de T , on ait ou bien $R_0(a, \cdot)_T = 0$ ou bien $pR_0(a, \cdot)_T > 1$.

¹¹Si chaque noeud de seconde espèce de T est composé d'un seul point, on voit que la borne supérieure de chaque sous-ensembles *monotone* non-vide de T est composée d'un point de T au plus. D'ailleurs, on peut prouver cette proposition: E étant un ensemble ramifié, il existe un ensemble ramifié non-lacunaire \bar{E} contenant E comme une partie partout dense sur \bar{E} et jouissant de la propriété que la borne supérieure de chaque sous-ensemble monotone non-vide de \bar{E} est composée d'au plus un point de \bar{E} . Par exemple, tout continu cyclique plan, cas réduit, de M. A. Denjoy est un ensemble ramifié dense et non-lacunaire et tel que la borne supérieure de chacun de ses sous-ensembles ordonnés non-vides est un point bien déterminé (voir C. R. 197, 1933, p. 570).

LEMME 15. *Quelle que soit la suite totalement ramifiée T , on a $pR_\alpha T \geq p\alpha$ pour tout $\alpha < \gamma T$.*

En effet, a étant un point de $R_\alpha T$, designons par a_ξ le point (unique) de $R_\xi T$ tel que $a_\xi < a$ pour tout $\xi < \alpha$; soit $a'_{\xi+1}$ un point quelconque de $R_{\xi+1} T$, tel que $a_\xi < a'_{\xi+1}$ et $a'_{\xi+1} \parallel a_{\xi+1}$. Il est clair que $a'_{\xi_1+1} \parallel a'_{\xi_2+1}$ si $\alpha > \xi_1 \leq \xi_2 < \alpha$. Or, T est une suite ramifiée, et par conséquent, pour tout $\xi < \alpha$, il y a un point $b_{\xi+1}$ de $R_\alpha T$ tel que $a'_{\xi+1} < b_{\xi+1}$. Puisque les $a'_{\xi+1}$ sont, deux à deux, incomparables, les $b_{\xi+1}$ le sont aussi.

Si α est infini, il est clair que la puissance de l'ensemble B des points $b_{\xi+1}$, $\xi < \alpha$, est égale à $p\alpha$; étant donné que $B \subseteq R_\alpha T$, on en conclut que $p\alpha \leq R_\alpha T$. La dernière relation étant évidente si α est fini, le lemme est complètement démontré.

THÉORÈME 3. a. *Chaque suite (totalement) ramifiée dont le rang est fini est large; en particulier, chaque suite finie (totalement) ramifiée est large.*

b. *Il n'existe aucune suite étroite totalement ramifiée.*

c. *Quelle que soit la suite ambiguë totalement ramifiée S , le rang γ de S est un nombre régulier c'est-à-dire tel que $\tau\gamma = \gamma$.*

Les trois cas a, b et c peuvent être énoncés de la manière suivante:

Quelle que soit la suite totalement ramifiée S dont le rang est un nombre de seconde espèce, elle est ou bien large ou bien ambiguë; dans le second cas, le rang de S est un nombre initial régulier. Le cas a étant évident, le cas b étant une conséquence immédiate des lemmes 8 et 11, prouvons le cas c du théorème c'est-à-dire que, S étant une suite ambiguë totalement ramifiée telle que $\gamma' = \gamma$, le rang γ est régulier.

Supposons que $\tau\gamma < \gamma$; on aurait $pR_{\tau\gamma} S \geq p\tau\gamma$, ce qui est impossible, la suite S étant non-large.

On aura besoin de ce

THÉORÈME 4. *Quelle que soit la suite étroite ramifiée S dont le rang γ est un nombre de seconde espèce, il y a un nombre $\alpha < \gamma$ tel que, pour tout point a de $R_\alpha S$, la portion $[a]$ de S soit monotone; ce qu'on peut exprimer encore en disant que la suite donnée S ne se ramifie plus du tout à partir de la rangée $R_\alpha S$.*

Soit S une suite étroite ayant pour rang un nombre ordinal γ de seconde espèce.

Pour aboutir à une contradiction, supposons que pour tout $\alpha < \gamma$, il y a un point $a \in R_\alpha S$ tel que la portion $[a]_S$ ne soit monotone c'est-à-dire telle que $m[a]_S > 1$.

Premier cas: γ est régulier. Désignons par R_0T l'ensemble de tous les points a de R_0S tels que $m[a]_S > 1$. Supposons que les ensembles $R_\xi T$ sont déterminés pour tout $\xi < \alpha$, α étant un ordinal quelconque $< \gamma$. On va déterminer l'ensemble $R_\alpha T$ de la façon suivante: si α est de première espèce, on posera $R_\alpha T = \sum_a R_{\alpha_a}[a]_S$. a parcourant les points de $R_{\alpha-1}T$, α_a désignant, pour un a donné, le plus petit nombre éventuel ξ tel que $m_\xi[a]_S > 1$.

Si α est de seconde espèce, soit α' la borne supérieure des nombres η tels que $R_\eta S$ contient au moins un point de l'ensemble $\sum_{\xi < \alpha} R_\xi T$. Puisque S est une suite étroite et γ régulier, il est clair que $\alpha' < \alpha$. Alors, $R_\alpha T$ désignera l'ensemble de tous les points a de $R_{\alpha'} S$ tels que $m[a]_S > 1$.

Il est clair que, dans les deux cas, pour tout $\alpha < \gamma$, on a $R_\alpha T \supset 0$. En posant $T = \sum_{\alpha < \gamma} R_\alpha T$, on voit que T est un tableau ramifié dont la rangée α est $R_\alpha T$ pour tout $\alpha < \gamma$. De plus, on voit que, a étant un point quelconque de T , on a ou bien $(a, \cdot)_T = 0$ ou bien $m_0(a, \cdot)_T > 1$. On voit aussi que T est étroit parce que, d'une part, $\gamma T = \gamma S$ et, de l'autre, pour tout $\alpha < \gamma$, il y a un nombre α_0 tel que $\alpha \leq \alpha_0 < \gamma$ et $m_\alpha T \leq m_{\alpha_0} S$.

Or, soit β un nombre quelconque tel que $mS < p\beta < p\gamma$; on peut supposer que β est de seconde espèce (voir le lemme 8.8); b étant un point quelconque de $R_\beta T$, soit, pour tout $\xi < \beta$, a_ξ le point (déterminé d'une manière unique) de $R_\xi T$ tel que $a_\xi < b$. Il est clair que $a_\xi < a_{\xi+1}$ c'est-à-dire $(a_\xi, \cdot) \supset 0$ et, par conséquent, $m_0(a_\xi, \cdot)_T > 1$.

Soit, alors, pour tout $\xi < \beta$ donné, b_ξ un point de $R_0(a_{\xi, \cdot})_T$, distinct de $a_{\xi+1}$. Il est clair que l'ensemble E des points b_ξ , $\xi < \alpha$, est disjonctif et que $pE = p\beta > mS$. Soit α la borne supérieure des nombres η tels que $R_\eta S$ contient au moins un point de E ; puisque $pE < mS < p\gamma$, on aura $\alpha < \gamma$ (γ étant régulier). Or, S étant une suite ramifiée, il est clair que, quel que soit le point b_ξ de E il y a un point d_ξ de $R_{\alpha+1} S$ tel que $b_\xi < d_\xi$. Les points b_ξ étant deux à deux incomparables, les points d_ξ le sont aussi et on aurait $m_{\alpha+1} S \geq pE$ donc $m_{\alpha+1} S > mS$ ce qui est absurde.

Autrement dit, la supposition que pour tout $\alpha < \gamma$, il y ait un point $a \in R_\alpha S$ tel que $m[a]_S > 1$ est impossible.

Second cas. γ est singulier c'est-à-dire tel que $\tau\gamma < \gamma$. Si alors $\alpha_0 < \alpha_1 \dots < \alpha_\xi < \dots$, $\xi < \tau\gamma$, est une suite de nombres ordinaux croissants $< \gamma$ ayant γ pour borne supérieure, on considère tout d'abord la suite $S^0 = \sum_{\xi < \tau\gamma} R_{\alpha_\xi} S$ qui vérifie les conditions du cas précédent.

Si alors α_η est un des nombres α_ξ tels que $[a]_{S^0}$ est monotone pour tout point a de $R_{\alpha_\xi} S^0$, il est clair qu'on a aussi $m[a]_S = 1$ pour tout point a de $R_{\alpha_\xi} S$.

THÉORÈME 5. *Chaque suite ramifiée étroite a la même puissance qu'un de ses sous-ensembles ordonnés (monotones).*

S étant une suite étroite, on a, tout d'abord, $pS = p\gamma S$ (voir le lemme 8.12). D'autre part, il y a un $a \in S$, tel que la portion $[a]_S$ soit monotone. En effet, si γS est un ordinal de première espèce, a peut être n'importe quel point de la rangée $R_{\gamma-1}S$; si le rang de S est de seconde espèce, l'existence de a résulte du théorème précédent.

Ceci étant, il est clair que $p[a]_S = pS$ et le sous-ensemble ordonné $[a]_S$ répond aux conditions du théorème.

THÉORÈME 5^{bis}. *Chaque tableau ramifié étroit a la même puissance qu'un de ses sous-ensembles ordonnés. (C'est une conséquence des théorèmes 2 et 5).*

B. FAMILLES ET TABLEAUX RAMIFIÉS D'ENSEMBLES.

Dans ce qui précède, on a défini les ensembles et tableaux ramifiés d'éléments quelconques. Si les éléments d'un ensemble ramifié sont eux-mêmes des ensembles, et si alors les relations $<$, $>$ et \parallel veulent dire respectivement \supset ("contient au sens strict"), \subset ("contenu au sens strict"), et "être deux ensembles disjoints sans être vide tous les deux", on obtient la définition de *familles ramifiées d'ensembles* et, ensuite, celle de tableaux ramifiés d'ensembles. En même temps, on voit que la condition C est, dans ce cas, remplie automatiquement. Voici la définition précise:

1. Une famille d'ensembles sera dite *ramifiée* si les éléments dont elle est composée sont *ou bien* deux à deux disjoints *ou bien* tels que l'un d'eux contiendra l'autre comme sous-ensemble proprement dit; ensuite, chaque famille d'ensembles composée d'un élément au plus, sera dite ramifiée.

On voit que les familles *monotones* et *disjonctives* d'ensembles sont deux cas particuliers des familles ramifiées d'ensembles.

Pour arriver à la notion de *tableaux* ramifiés d'ensembles, il faut définir la notion de *première rangée d'ensembles*: on dira qu'une famille ramifiée \mathcal{F} d'ensembles a une *première rangée d'ensembles* s'il existe une (et par conséquent une seule) sous-famille *disjonctive* f de \mathcal{F} telle que tout élément éventuel de $\mathcal{F} - f$ est contenu dans un (et donc un seul) ensemble appartenant à f .

Alors, la définition d'un tableau ramifié d'ensembles est exactement la même que celle des tableaux ramifiés quelconques. Si, par exemple, T désigne un tableau ramifié de points, la famille des ensembles $(a, \cdot)_T$ et $[a, \cdot)_T$, a parcourant T est un tableau ramifié d'ensembles. Si \mathcal{T} désigne un tableau ramifié d'ensembles, les signes $\gamma\mathcal{T}$, $R_\alpha\mathcal{T}$, $(A, \cdot)_\mathcal{T}$ si $A \in \mathcal{T}$,

$\sum R_0(A, \cdot)_{\mathcal{T}}$ si $A \in \mathcal{T}$, etc. sont bien définis; par exemple A étant un ensemble appartenant à \mathcal{T} , le signe (A, \cdot) représente la famille de tous les éléments X de \mathcal{T} tels que $A \supset X$. Alors, il est clair que, quel que soit l'élément A de \mathcal{T} , on a $A \supseteq \sum(A, \cdot)_{\mathcal{T}}$ et, en particulier $A \supseteq \sum R_0(A, \cdot)_{\mathcal{T}}$; de même $\prod(\cdot, A)_{\mathcal{T}} \supseteq A$.

2. Définition des tableaux ramifiés complets d'ensembles:

Un tableau ramifié \mathcal{T} d'ensembles sera dit *complet* si ces trois conditions sont vérifiées:

I. La réunion des ensembles de \mathcal{T} est un élément de \mathcal{T} c'est-à-dire $\sum \mathcal{T} \in \mathcal{T}$;

II. Quel que soit l'ensemble A appartenant à \mathcal{T} et ayant au moins deux points, on a $A = \sum R_0(A, \cdot)_{\mathcal{T}}$;

III. Quelle que soit la sous-famille *monotone* f de \mathcal{T} , la partie commune des ensembles de f est un élément de \mathcal{T} c'est-à-dire $\prod f \in \mathcal{T}$ (sauf éventuellement si $\prod f = 0$).

Remarque 3. On voit que dans la condition II, on peut supprimer la lettre R_0 .

\mathcal{T} étant complet, on voit que la première rangée de \mathcal{T} est constituée d'un seul ensemble, à savoir $\sum \mathcal{T}$; l'ensemble vide est en général, un élément de \mathcal{T} ; on voit aussi que, quel que soit l'élément A de *seconde espèce* de \mathcal{T} c'est-à-dire tel que le nombre α vérifiant $A \in R_{\alpha} \mathcal{T}$ et $\alpha > 0$ est de *seconde espèce*, on a $\prod(\cdot, A)_{\mathcal{T}} = A$; c'est une propriété utile parce qu'il s'en suit l'unicité de la borne supérieure (éventuelle) des sous-familles monotones de \mathcal{T} (voir la note 11)¹².

LEMME 16. \mathcal{T} étant un tableau ramifié complet d'ensembles chaque point de l'ensemble $\sum \mathcal{T}$ est un élément de \mathcal{T} .

Il est clair qu'on peut supposer que l'ensemble $\sum \mathcal{T}$ est composé d'au moins deux points; alors a étant un point de $\sum \mathcal{T}$, il est clair que la famille \mathcal{F} des éléments X de \mathcal{F} tels que $a \in X$ est non-vide et monotone, et que, à la suite de la condition III, l'ensemble $F = \prod \mathcal{F}$ est un élément de \mathcal{T} tel que $a \in F$. Si $pF = 1$, cela veut dire que $a \in \mathcal{T}$ et tout serait démontré. Supposons que $pF > 1$; alors, à la suite de la condition II, la sous-famille *disjonctive* $R_0(F, \cdot)_{\mathcal{T}}$ de \mathcal{T} contiendrait un ensemble A tel que $a \in A$ et

¹²Voir N. Lusin (Travaux de l'Institut Stekloff, tome V pp. 139-147 où un tableau d'ensembles, ou mieux encore, un tableau ramifié de *cribles* est donné (cf. "le problème des cribles" *ibid.* p. 147).

$A \subset F$. Par conséquent, A serait un élément de la famille \mathcal{F} définie ci-dessus et on aurait $F \subseteq A$ ce qui est absurde. On a donc $pF = 1$ et par conséquent $a \in \mathcal{T}$.

Le lemme précédent nous donne un moyen simple de construire un tableau ramifié complet contenant un tableau ramifié donné. En effet, soit \mathcal{T} un tableau ramifié d'ensembles quelconque; désignons par $\bar{\mathcal{T}}$ la famille-réunion d'ensembles obtenus de la façon suivante:

α) Quelle que soit la sous-famille *monotone* f de \mathcal{T} , l'ensemble $\prod f$ sera un élément de $\bar{\mathcal{T}}$ (il s'en suit que $\mathcal{T} \subseteq \bar{\mathcal{T}}$);

β) L'ensemble $\sum \mathcal{T}$ sera un élément de $\bar{\mathcal{T}}$.

Alors, on vérifie facilement que $\bar{\mathcal{T}}$ est un tableau ramifié complet d'ensembles tel que $\mathcal{T} \subseteq \bar{\mathcal{T}}$; en particulier, si \mathcal{T} est déjà complet, alors $\bar{\mathcal{T}} = \mathcal{T}^{13}$.

3. Voilà un procédé pour avoir un tableau ramifié complet d'ensembles. Soit M un ensemble donné quelconque de points; A étant un sous-ensemble quelconque de M tel que $pA > 1$, on désignera par $f(A)$ une famille *disjonctive* quelconque de *vrais* sous-ensembles de A tels que $\sum f(A) = A$. Ceci étant, désignons par $R_0\mathcal{T}$ la famille composée du seul ensemble M comme élément. Supposons que les familles disjonctives $R_\xi\mathcal{T}$ sont définies pour tout $\xi < \alpha$ et qu'il y ait au moins un point a de M qui n'est un élément d'aucun $R_\xi\mathcal{T}$, $\xi < \alpha$; il s'agit de définir la famille $R_\alpha\mathcal{T}$. Si α est de première espèce, $R_\alpha\mathcal{T}$ sera la famille-réunion des familles $f(A)$, A parcourant les éléments de $R_{\alpha-1}\mathcal{T}$ tels que $pA > 1$. Si α est de seconde espèce, $R_\alpha\mathcal{T}$ désignera la famille des ensembles non-vides de la forme $\prod_{\xi < \alpha} A_0, \dots, A_\xi$, les A_ξ appartenant à $R_\xi\mathcal{T}$ et étant tels que $A_\xi \subseteq \prod_{\eta < \xi} A_0, \dots, A_\eta$, quel que soit l'ordinal $\xi < \alpha$.

Alors, en désignant par \mathcal{T} la famille-réunion de toutes les familles disjonctives *non-vides* $R_\alpha\mathcal{T}$ construites par le procédé précédent, on s'assure très facilement que \mathcal{T} est un tableau ramifié complet d'ensembles extraits de M .

Remarque 4. Dans le cas où la famille $f(A)$, pour tout $A \subseteq M$ tel que $pA > 1$, est composée de deux éléments dont l'un se réduit à un point de M , on voit que le tableau \mathcal{T}^0 contenant l'ensemble vide et tous les $A \in \mathcal{T}$

¹³Dans le procédé α), on reconnaît le procédé bien connu d'adjonction d'éléments idéaux à une collection d'objets donnés; il était employé aussi dans la note 4.7 pour combler les lacunes d'un ensemble ordonné lacunaire; dans la théorie des espaces et ensembles distanciés, le même procédé fournit un moyen de compléter respectivement un espace ou un ensemble distancié (voir G. M. p. 318 et M. Fréchet, Amer. J. Math. 50(1928), p. 66).

tels que $pA > 1$, est une famille monotone saturée de sous-ensembles de M considérée par M.E. Zermelo dans sa célèbre démonstration que tout ensemble de points peut être bien ordonné (voir le §4 et E. Zermelo, J. Math. 65(1908), p. 107).

C. SYSTÈMES DE COMPLEXES. REPRÉSENTATION DE TABLEAUX RAMIFIÉS D'ENSEMBLES.

On sait que (cf. le §5), α étant un ordinal, tout symbole de la forme $(a_0, \dots, a_\xi)_{\xi < \alpha}$ est appelé *complexe de rang α* (a_ξ sont des éléments quelconques); soient $A^i = (a_0^i, \dots, a_\xi^i, \dots)_{\xi < \alpha^i}$, ($i = 1, 2$), deux complexes *différents* c'est-à-dire tels que soit $\alpha^1 \neq \alpha^2$, soit que $\alpha^1 = \alpha^2$ mais on n'a pas $a_\xi^1 = a_\xi^2$ pour tout $\xi < \alpha^1 = \alpha^2$. Si A^1 est une partie initiale de A^2 sans que A^2 soit une partie initiale de A^1 , on écrira $A^1 \subset A^2$ ou encore $A^2 \supset A^1$; si l'on n'a ni $A^1 \equiv A^2$ ni $A^1 \subset A^2$ ni $A^2 \subset A^1$, on écrira $A^1 \parallel A^2$. Alors, la somme logique des relations \equiv, \subset, \supset et \parallel vérifie la condition C et est une relation de ramification; autrement dit, tout système S de complexes est un ensemble, ramifié et même un *tableau ramifié*; on voit que la première rangée de S est constituée de tous les complexes de S ne contenant, comme partie initiale, aucun autre complexe de S .

1. Ceci étant, soit \mathcal{T} un tableau ramifié *d'ensembles*; pour des raisons de simplicité, on supposera que \mathcal{T} ne contient pas l'ensemble vide et que \mathcal{T} est complet (ou tout au moins qu'il n'y ait pas d'ensembles disjoints X, Y appartenant à une rangée $R_\alpha \mathcal{T}$, α étant de seconde espèce, tels que $(\cdot, X)_\mathcal{T} = (\cdot, Y)_\mathcal{T}$); on va donner, généralisant un procédé de M. Lebesgue,¹⁴ une *représentation* des ensembles de \mathcal{T} qui se montrera très utile. On peut supposer que \mathcal{T} a au moins deux points; autrement, une représentation serait inutile, celle-ci ayant pour but de *distinguer les éléments les uns des autres* et de les rendre, si possible, plus accessibles aux recherches poursuivies.

γ désignera le rang de \mathcal{T} ; α étant un ordinal quelconque $< \gamma$, désignons par A_α un *ensemble de points quelconque* ayant la même puissance que la famille $R_{\alpha+1} \mathcal{T}$; soit $\varphi_{\alpha+1}$ une correspondance biunivoque entre les éléments de A_α et ceux de $R_{\alpha+1} \mathcal{T}$. Si les familles $R_{\alpha+1} \mathcal{T}$, ($\alpha < \gamma$), ont toutes, la même puissance, on peut prendre $A_0 \equiv A_1 \equiv \dots \equiv A_\alpha \equiv$ pour tout $\alpha < \gamma$.

Pour commencer, l'ensemble $G = \sum \mathcal{T}$ - qui est, d'après la condition I de la définition B2, un élément de \mathcal{T} et par conséquent l'élément unique de

¹⁴Voir J. Math. 1(1905), p. 200. La "méthode de cortèges d'indices" de M. Lebesgue a fourni des résultats très précieux dans la théorie des fonctions réelles et des ensembles analytiques de Souslin-Lusin (voir R. Baire, loc. cit. 6.13) et surtout le livre cité de M. Lusin. Voir aussi un mémoire de M. M. L. Kantorovitch-E. Livenson, Fund. Math. 18(1932), pp. 214-279 et la littérature qui y est citée; cf. la notion des fonctions- δ , et fonctions- σ d de M. M. Sierpinski-Hausdorff (ibidem).

$R_0\mathcal{T}$ - ne sera affecté d'aucun indice, ou, pour employer un autre langage "le complexe de rang 0 sera l'indice de l'ensemble $G = \sum \mathcal{T}$ de \mathcal{T} . Supposons que les éléments de $R_\xi\mathcal{T}$ sont représentés par la notation $G_{\alpha_0 \dots \alpha_\eta \dots}$, ($\eta < \xi$), pour tout $\xi < \alpha$ et cela de façon que $(a_0^1 \dots a_\eta^1 \dots)_{\eta < \xi^1} \subseteq (a_0^2 \dots a_\zeta^2 \dots)_{\zeta < \xi^2}$ suivant que $G_{\alpha_0^1 \dots \alpha_\eta^1 \dots} \subseteq G_{\alpha_0^2 \dots \alpha_\zeta^2 \dots}$, ($\eta < \xi^1, \zeta < \xi^2$), pour tout $\alpha > \xi^1 \leq \xi^2 < \alpha$.

Si $\alpha = \gamma$, l'application du procédé est terminé; supposons que $\alpha < \gamma$ et soit X un élément de $R_\alpha\mathcal{T}$. On a deux cas:

I. $\alpha = \alpha_0 + 1$. L'ensemble X sera désigné par $G_{a_0, \dots, a_\xi, \dots, a_{\alpha_0}}$, a_{α_0} étant le point de l'ensemble A_{α_0} qui, en raison de la correspondance φ_α entre A_{α_0} , $R_\alpha\mathcal{T}$, correspond à l'ensemble envisagé X , et $G_{\alpha_0, \dots, \alpha_\xi \dots}$ ($\xi < \alpha_0$), désignant l'ensemble unique de $R_{\alpha_0}\mathcal{T}$ contenant l'ensemble X . Alors, on voit que a_{α_0} parcourant les points de A_{α_0} , le signe $G_{a_0, \dots, a_{\alpha_0}, \dots, a_{\alpha_0}}$ parcourant les éléments de $R_\alpha\mathcal{T}$; et vice versa.

II. α est de seconde espèce. On posera $X = G_{a_0^0, \dots, a_\xi^0 \dots}$, ($\xi < \alpha$), le signe $G_{a_0^0, \dots, a_\xi^0}$ étant l'ensemble (unique) de $R_{\xi+1}\mathcal{T}$ tel que $G_{a_0^0, \dots, a_\xi^0} \supset X$ pour tout $\xi = \alpha$.

On voit que $a_\xi^\xi = a_{\eta'}^{\xi'}$ pour tout $\xi < \xi' \leq \eta < \alpha$.

Ainsi les éléments de \mathcal{T} sont mis sous la forme $G_{a_0, \dots, a_\xi \dots}$, ($\xi < \alpha, \alpha < \gamma$); en particulier, $G = G_{vide} = \sum \mathcal{T}$. Désignons par $S(\mathcal{T})$ le système des complexes (c'est-à-dire des indices) $(a_0 \dots a_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$, ($\alpha < \gamma$), qu'on vient de construire. On voit que chaque partie initiale, même la "partie initiale vide", de chaque élément de $S(\mathcal{T})$ est un élément de $S(\mathcal{T})$ et que les éléments de $S(\mathcal{T})$ et ceux de \mathcal{T} sont dans une correspondance biunivoque vérifiant ces conditions:

Soient $X^i = G_{a_0^i \dots a_{\xi^i}^i \dots}$ ($\xi < \alpha^i$), deux ensembles différentes quelconques de \mathcal{T} ; alors

Si $X^1 \subseteq X^2$, on a $(a_0^1 \dots a_{\xi^1}^1 \dots)_{\xi^1 < \alpha^1} \supseteq (a_0^2 \dots a_{\xi^2}^2 \dots)_{\xi^2 < \alpha^2}$; et vice versa¹⁵.

Si $X^1 X^2 = 0$, on a $(a_0^1 \dots a_{\xi^1}^1 \dots)_{\xi^1 < \alpha^1} \parallel (a_0^2 \dots a_{\xi^2}^2 \dots)_{\xi^2 < \alpha^2}$; et vice versa.

La réciproque est encore vraie: si l'on a une famille \mathcal{F} d'ensembles qu'on peut mettre dans une correspondance biunivoque avec les éléments d'un système de complexes et cela de façon que les conditions écrites ci-dessus soient vérifiées, on prouve facilement que \mathcal{F} est un tableau ramifié d'ensembles.

¹⁵Bien entendu, on convient que le complexe vide 0 est une portion initiale de tout complexe non-vide A et par conséquent $0 \subset A$.

Le procédé le plus simple de faire correspondre à un système S de complexes A un tableau ramifié $\mathcal{T}(S)$ d'ensembles est le suivant: En désignant par $(A, \cdot)_S$ l'ensemble de tous les complexes K de S tels que $A \subset K$ et par $[A, \cdot)_S$ l'ensemble $(A, \cdot)_S$ augmenté de l'élément A , on voit que la famille $\mathcal{T}(S)$ des ensembles $(A, \cdot)_S$ et $[A, \cdot)_S$, A parcourant les éléments de S , est un tableau ramifié d'ensembles.

Soit enfin T un tableau ramifié *de points* (donc d'éléments quelconques) tel qu'il fut défini dans la première partie de ce §; désignons par $S(T)$ l'ensemble des $(\cdot, a)_T$ et $(\cdot, a]_T$, a parcourant les points de T ; alors on voit que $S(T)$ est un système de complexes jouissant de la propriété que, quel que soit le complexe $(a_0 \dots a_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$ de $S(T)$, le complexe $(a_0 \dots a_\eta \dots)_{\eta < \xi}$ est aussi un élément de $S(T)$ pour tout $\xi < \alpha$.

D'autre part, désignons par $\mathcal{T}(T)$ la famille des ensembles $(a, \cdot)_T$ et $(a, \cdot)_T$; on voit que $\mathcal{T}(T)$ est un tableau ramifié *d'ensembles* qui est en rapport très simple avec le système $S(T)$.

En somme, on peut dire que la théorie des systèmes de complexes et la théorie des tableaux ramifiés d'éléments quelconques, et, en particulier, des tableaux d'ensembles, sont dans une liaison très étroite; dans la suite, les raisonnements sur des systèmes de complexes se montreront, quelques fois, avantageux parce que ceux-ci sont facilement maniables.

2. *Ordonnance naturelle de complexes.* Soit S un système de complexes; à cause de la simplicité on considérera seulement les systèmes S tels que chaque partie initiale de tout élément de S appartient encore à S . Il s'en suit que tout noeud de seconde espèce de S est composé d'un seul élément, tandis que les complexes constituant un noeud de première espèce de S ont, pour partie commune, un élément bien déterminé de S . On voit alors, ce qui n'influe aucunement la structure de S , que les éléments de chaque noeud de S , peuvent être supposés *ordonnés alphabétiquement* (voir le §5); c'est ce qu'on supposera dans ce qui va suivre.

On prouve facilement que S devient un ensemble ordonné en convenant que, $A^i = (a_0^i \dots a_\xi^i \dots)_{\xi < \alpha_i}$, ($i = 1, 2$), étant deux éléments distincts quelconques de S , on pose $A^1 < A^2$ ou $A^2 > A^1$ si ou bien $A^1 \subset A^2$ ou bien $A^1 \parallel A^2$ et $a_\varphi^1 < a_\varphi^2$, φ étant le premier indice ξ tel que $a_\xi^1 \neq a_\xi^2$.

On voit que la *relation d'ordre ainsi obtenue* (tout en dépendant de l'ordre choisi dans chaque noeud) *est une extension de la relation d'ordre* C .

Ce mode d'ordonnance de S sera appelé *ordonnance naturelle de S* parce que, par exemple, les nombres réels, dans leur développement décimal, sont ordonnés de la même façon.¹⁶

On n'envisagera que des S tels que $R_0(A, \cdot)_S$ est infini pour tout élément A de S et on supposera que les éléments de $R_0(A, \cdot)_S$ sont ordonnés de telle manière que le noeud $R_0(A, \cdot)_S$ n'ait pas un premier élément.

Ceci étant, soit α un nombre ordinal quelconque de seconde espèce entre O et γS ; on va démontrer ce

LEMME 17. a) Les ensembles ordonnés $(\cdot, \alpha)_S$ et $(\cdot, \alpha]_S$ sont denses et anti-limités¹⁷.

b) L 'intervale ordonné $(\cdot, \alpha)_S$ est partout dense sur $R_\alpha S$ donc aussi sur le segment $(\cdot, \alpha]_S$.

Prouvons, par exemple, que $(\cdot, \alpha)_S$ est dense: il s'agit de prouver que, $A^i = (a_0^i \dots a_\xi^i \dots)_{\xi < \alpha_i}$, ($i = 1, 2$), étant deux éléments distincts quelconques de $(\cdot, \alpha)_S$, il y a, entre A^1 et A^2 , au moins un élément de $(\cdot, \alpha)_S$. On a ou bien $A^1 < A^2$ ou bien $A^2 < A^1$. Supposons que $A^1 < A^2$; cela veut dire que ou bien $A^1 \subset A^2$ ou bien $A^1 \parallel A^2$ et $a_\varphi^1 < a_\varphi^2$, φ étant le premier ξ tel que $a_\xi^1 \neq a_\xi^2$. Si $A^1 \subset A^2$, désignons par A un élément quelconque du noeud $R_0(A^1, \cdot)_S$ précédant l'élément $(A^1 a_{\alpha_1}^2)$,¹⁸ donc aussi l'élément A^2 ; si $A^1 \parallel A^2$, $a_\varphi^1 < a_\varphi^2$, désignons par A un élément quelconque de $R_0(A^1, \cdot)_S$. Dans les deux cas, on voit que $A^1 < A < A^2$ et $A \in (\cdot, \alpha)_S$. c.q.f.d.

Notre but est de prouver ce

THÉORÈME 6. Pour que, quel que soit l'ordinal α de seconde espèce entre O et γS , les ensembles ordonnés $(\cdot, \alpha)_S$ et $R_\alpha S$ soient partout denses l'un sur l'autre, il faut et il suffit que S soit une suite ramifiée de complexes.

On se contentera de prouver que la condition est nécessaire; il s'agit donc de prouver que, S satisfaisant aux conditions énoncées dans le théorème précédent, S est une suite ramifiée. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; il existe alors un complexe A de rang α de S et un ordinal α_0 entre α et γS tel qu'il n'y ait aucun complexe de rang α_0 appartenant à S et prolongeant

¹⁶Ici l'ordre dans chaque noeud est naturellement supposé l'ordre naturel des nombres $0, 1, \dots, 9$. Pour les nombres rationnels, on doit prendre quelques précautions à cause de l'ambiguïté de leur développement décimal. S'il s'agit seulement du type ordinal de l'ensemble des nombres rationnels, il est représentable, par exemple, par le type du système H_0 qu'on définira dans la remarque 9.1.

¹⁷L'ensemble $(\cdot, \alpha)_S \equiv \sum_{\xi < \alpha} R\xi S$ est appelé *l'intervale gauche α de S* ; le segment gauche α de S est par définition $(\cdot, \alpha]_S = (\cdot, \alpha)_S + R\alpha S$.

¹⁸Rappelons que $(A^1 a_{\alpha_1}^2)$ est le complexe de rang $\alpha_1 + 1$ commençant, par A^1 et finissant par $a_{\alpha_1}^2$ (voir le §5).

le complexe A . On peut admettre que α_0 soit le premier nombre ordinal jouissant de cette propriété. On s'aperçoit aisément que α_0 ne peut pas être de première espèce; il s'en suit, par hypothèse, que l'ensemble ordonné $R_{\alpha_0}S$ est partout dense sur l'ensemble ordonné $(\cdot, \alpha_0)_S$ lequel est, d'après le lemme précédent, dense. Désignons par $A^i = (Aa_\alpha^i)$, ($i = 1, 2$) deux éléments distincts quelconques de l'ensemble $R_0(A, \cdot)_S$; on a donc ou bien $A^1 < A^2$, c'est-à-dire $a_\alpha^1 < a_\alpha^2$ ou bien $A^2 < A^1$ c'est-à-dire $a_\alpha^2 < a_\alpha^1$. L'intervalle (A^1, A^2) de $(\cdot, \alpha_0)_S$ ne pouvant pas être vide, on en conclut qu'entre A^1 et A^2 il y a un élément, A^0 , de $R_{\alpha_0}S$. Si, par exemple, $A^1 < A^2$, on aura $A^1 < A^0 < A^2$ c'est-à-dire $(Aa_\alpha^1) < A^0 < (Aa_\alpha^2)$. On en déduit que A est une portion initiale de A^0 . D'autre part, A^0 appartenant à $R_{\alpha_0}S$, A^0 est un complexe de rang α_0 . On a donc construit un complexe, A^0 , de rang α_0 et tel que $A \subset A^0$, contrairement à la supposition.

§9. Descentes monotones et disjonctives

Dans ce §, on étudiera des sous-ensembles F d'une suite ramifiée quelconque S ayant avec chacune des rangées de S des points en commun. En particulier, si F a un seul point en commun avec chaque rangée de S , on dira que F *traverse* S ou que S *est traversée par* F . Si S peut être traversée par un sous-ensemble monotone (disjonctif), on dira que S *admet une descente monotone (disjonctive)*. Si S n'admet aucune descente monotone, on dira aussi que *le rang de* S *n'est pas atteint* (cf. la note 10.5).

THÉORÈME 1. *Chaque suite ramifiée S peut être traversée par une suite ramifiée T ayant le même rang que la suite S elle-même.*

Si S admet une descente monotone, il n'y a rien à démontrer; ce cas a lieu, en particulier, si le rang γ de S est de première espèce. En effet, a étant un point quelconque de $R_{\gamma-1}S$, il est clair que $[a]_S$ est monotone, traverse S et a le même rang que S .

Reste le cas où γ est de seconde espèce et où S n'admet aucune descente monotone.

Premier cas: γ est régulier donc aussi initial régulier.

La suite T dont on parle dans le théorème sera construite comme suit: On prendra n'importe quel point a_0 de R_0S . Supposons que les points a_ξ sont définis pour tout $\xi < \alpha$, α étant un ordinal quelconque $< \gamma$; on va alors déterminer le point a_α : si α est de première espèce, a_α sera n'importe quel point de $R_\alpha S$ tel que $a_{\alpha-1} < a_\alpha$. Supposons que α est de seconde espèce; soit T_α le tableau des points a_ξ , ($\xi < \alpha$). Désignons par β le plus petit des rangs $\gamma[a_\xi]_{T_\alpha}$, ($\xi < \alpha$); soit alors a^α le point a_ξ de T_α ayant le plus faible indice et tel que $\gamma[a_\xi]_{T_\alpha} = \beta$. Il est clair que le point a^α est déterminé d'une

manière unique. Soient ensuite α_0 n'importe quel nombre ordinal tel que $\alpha + \gamma T_\alpha < \alpha_0 < \gamma S$ et a_{α_0} un point quelconque de $R_{\alpha_0} S$ tel que $a_\alpha < a_{\alpha_0}$. Ceci étant, le segment $[a_\alpha, a_{\alpha_0}]$ de S (c'est-à-dire l'ensemble de tous les points a de S tels que $a^\alpha \leq a \leq a_{\alpha_0}$) sera considéré comme appartenant à l'ensemble à définir T ; on voit, en particulier, que les points a_η prolongeant les points a_ξ , ($\xi < \alpha$), sont définis pour tout η tel que $\alpha \leq \eta \leq \alpha_0$, de manière que $a_\eta \in R_\eta S$ et $\alpha_\eta \leq a_{\alpha_0}$. Alors, en désignant par T_{α_0} le tableau des points a_ξ , ($\xi \leq \alpha_0$), on voit que le rang de T_{α_0} est supérieur à celui de T_α . En posant $T = \sum_{\alpha < \gamma} T_\alpha$, on vérifie aisément que T est une suite traversant S et ayant le même rang que S .

Deuxième cas: γ est singulier et initial; par conséquent $\tau\gamma < \gamma$. Soit alors $0 = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_\xi < \dots$, ($\xi < \tau\gamma$), une suite d'ordinaux $< \gamma$ et ayant γ pour la borne supérieure. En posant $S^0 = \sum_{\xi < \tau\gamma} R_{\alpha_\xi} S$, on voit que S^0 est une suite ramifiée dont le rang est $\tau\gamma$ et, par conséquent, on se trouve dans les conditions du cas précédent. Soit alors T^0 une suite ramifiée de rang $\tau\gamma$ traversant la suite S^0 ; on va déterminer une suite T dont on parle dans le théorème: en désignant par a_{β_ξ} les éléments de T^0 tels que $a_{\beta_\xi} \in R_{\beta_\xi} S^0$ c'est-à-dire $a_{\beta_\xi} \in R_{\beta_\xi} S$ pour tout $\xi < \tau\gamma$, on obtiendra la suite cherchée T en complétant la suite T^0 de la façon suivante: soit α un nombre quelconque $< \gamma$; alors il y a un et un seul ordinal $\xi < \tau\gamma$ tel que $\beta_\xi \leq \alpha < \beta_{\xi+1}$; si $\alpha = \beta_\xi$, tout est fait parce que le point a_{β_ξ} est déjà déterminé; supposons donc que $\beta_\xi < \alpha < \beta_{\xi+1}$; alors le point a_α sera déterminé de telle façon que $a_\alpha \in R_\alpha S$ et $a_\alpha < a_{\beta_{\xi+1}}$. En désignant par T l'ensemble des points a_α ainsi construits, on voit que T est une suite ramifiée traversant S et ayant le rang γ .

En modifiant légèrement le raisonnement précédent, on prouve ce

THÉORÈME 2. *Chaque suite complètement ramifiée S n'admettant aucune descente monotone peut être traversée par une suite complètement ramifiée ayant le même rang que la suite S elle-même.*

2. Passons à la considération de descente monotone d'une suite ramifiée S .

THÉORÈME 3. *Pour qu'une suite ramifiée S admette une descente monotone, il faut et il suffit qu'elle contienne un tableau étroit ayant le même rang que la suite S elle-même.*

Que la condition soit nécessaire, c'est manifeste; il s'agit de prouver qu'elle est encore suffisante. Soit donc S une suite ramifiée contenant un tableau étroit T de rang γS ; il s'agit de prouver l'existence d'une descente monotone de S .

D'après le théorème 8.2, le tableau étroit T contient une *suite étroite* S^0 ayant le rang γT donc le même rang que la suite S elle-même. Or, d'après le théorème 8.4, la suite S^0 contient un point a tel que la portion $[a]_{S^0}$ est monotone; par conséquent, l'ensemble $D^0 = [a]_{S^0}$ effectue une descente monotone dans S^0 . En désignant par D le plus grand sous-ensemble monotone de S contenant l'ensemble D^0 , on voit que D est une descente monotone de S (on voit que D est la réunion $\sum_a(\cdot, a]_S$, a parcourant D^0).

Le théorème précédent justifie la notion des suites et tableaux étroits.

THÉORÈME 4. *Pour qu'une suite ramifiée S admette une descente monotone, il suffit qu'une au moins des trois conditions suivantes soit réalisée: a) S est étroite; b) γS est de première espèce; c) $\tau\gamma S = \omega$.*

Prouvons le cas c). S étant une suite ramifiée telle que $\tau\gamma S = \omega$, soient: $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n < \dots$, ($n < \omega$), une suite d'ordinaux $< \gamma S$ ayant γS pour borne supérieure, et a_{β_n} une suite de points tels que $a_{\beta_n} \in R_{\beta_n} S$ et $a_{\beta_n} < a_{\beta_{n+1}}$ pour tout $n < \omega$. En posant $D = \sum_{n < \omega}(\cdot, a_{\beta_n}]_S$, on voit que D est une descente monotone de S .

3. *Suites prototypes.* Une suite ramifiée, S , sera dite *prototype* (c'est-à-dire *suite prototype de ramification*) si tout noeud de S est composé exactement de deux points distincts.

THÉORÈME DE RÉCIPROCITÉ: *Pour qu'une suite prototype S admette une descente monotone (disjonctive), il faut et il suffit qu'elle admette une descente disjonctive (monotone); plus précisément: si D est une descente monotone (disjonctive) de S , l'ensemble \bar{D} composé des points $\bar{a} = [a]_S - a$, a parcourant D , est une descente disjonctive (monotone) de S^{19} .*

Supposons que D est une descente disjonctive de S et soient $a_\xi \in R_\xi S$, ($\xi < \gamma S$), les éléments de D ; il s'agit de prouver que l'ensemble des points $\bar{a}_\xi = [a_\xi]_S - a_\xi$, ($\xi < \gamma S$), est une descente monotone de S . Pour le voir, il suffit de montrer que les points \bar{a}_ξ , ($\xi < \gamma S$), sont deux à deux comparables ce qui résulte immédiatement de ce que, quel que soit $\alpha < \gamma S$, l'ensemble $R_0(S - \sum_{\xi < \alpha} [a_\xi, \cdot)_S)$ est composé du seul point a_α .

D'autre part, S admettant une descente monotone, S admet aussi une descente disjonctive parce que, tout d'abord, S est complètement ramifiée et, puis, on a ce

LEMME 1. *Toute suite complètement ramifiée admettant une descente monotone admet une descente disjonctive.*

¹⁹Remarquons qu'on peut construire une suite-prototype n'admettant aucune descente monotone, et, par conséquent, aucune descente disjonctive non plus.

En effet, $a_0 \dots a_\alpha \dots$, ($\alpha < \gamma$), étant les éléments d'une descente monotone de S tels que $a_\alpha \in R_\alpha S$ pour tout $\alpha < \gamma S$, désignons par a'_α un point quelconque de $|a_\alpha|_S - a_\alpha$; on vérifie que l'ensemble des points a'_α , ($\alpha < \gamma S$), est une descente disjonctive de S .

4. Si S admet une descente disjonctive, cela veut dire que S contient un ensemble disjonctif de puissance $p\gamma S$ dont les points sont distribués, dans S , d'une manière très particulière; à savoir de manière à traverser S . D'autre part, on a ceci:

Sous l'hypothèse que *chaque suite complètement ramifiée T contient un sous ensemble disjonctif de puissance $p\gamma T^{20}$* , on va prouver ce

THÉOREME 5: *Chaque suite complètement ramifiée ayant un noeud composé d'au moins trois points distincts, admet une descente disjonctive. (Théorème sur la descente disjonctive).*

Soient donc S une suite complètement ramifiée et a, b, c trois points distincts de S tels que $(., a)_S = (., b)_S = (., c)_S$; on a donc $a||b, b||c$ et $a||c$.

D'après le lemme précédent, on peut admettre que le rang γ de S n'est pas atteint et est, par conséquent, de seconde espèce.

Ceci étant, il s'agit de déterminer un ensemble des points α_α deux à deux incomparables tels que $d_\alpha \in R_\alpha S$ pour tout $\alpha < \gamma$.

Soit φ le nombre ordinal tel que les points a, b, c soient des éléments de $R_\varphi S$; soit ensuite \bar{b} un point quelconque de $R_{\varphi+\omega}[b]_S$; on posera $d_\varphi = a$, $d_{\varphi+\omega} = \bar{b}$ et pour tout autre nombre ξ inférieur à $\varphi + \omega$, d_ξ sera un point quelconque de l'ensemble $|b_\xi|_S - b_\xi$, b_ξ étant le point de $R_\xi S$ tel que $b_\xi < \bar{b}$. On a ainsi déterminé $d_0, \dots, d_\xi \dots, d_{\varphi+\omega}$; il nous reste à déterminer des d_α pour tout α tel que $\varphi + \omega < \alpha < \gamma S$.

\bar{c} étant un point de $R_{\varphi+\omega}[c]_S$, soit γ le rang de $(\bar{c}, .)_S$. Alors, par hypothèse, la suite complètement ramifiée $(\bar{c}, .)_S$ contient un sous-ensemble *disjonctif* de puissance $p\bar{\gamma}$; soient

$$(1) \quad c_0, c_1, \dots, c_\alpha, \dots, (\alpha < \bar{\gamma}),$$

les points de celui-ci.

²⁰Cette hypothèse est, logiquement équivalente à chacune des hypothèses P_i , ($i = 1, \dots, 12$) du "Complément". Puisque nous ne savons ni démontrer ni réfuter aucune de celles-ci, on pourrait croire qu'il serait plus logique de reporter les raisonnements de cette section au Complément (d'ailleurs on ne s'en servira plus au cours de ce Chapitre).

Qu'il soit remarqué que nous ne savons pas prouver ceci: Soit S une suite complètement ramifiée ayant un noeud composé, d'au moins trois points distincts; si S contient un sous-ensemble disjonctif de puissance $p\gamma S$, la suite S admet une descente disjonctive.

Pour tout $\alpha < \bar{\gamma}$, on définira $v(\alpha)$ par la relation $c_\alpha \in R_{v(\alpha)}S$; on a donc $\varphi + \omega < v(\alpha) < \gamma$. Soit γ_0 la borne supérieure des ordinaux $v(\alpha)$, ($\alpha < \bar{\gamma}$); il est clair que $\gamma_0 \leq \gamma$.

Premier cas: $\gamma_0 = \gamma$. Dans ce cas, on peut extraire de la suite (1) une suite de points

$$c_{\alpha_0}, c_{\alpha_1} \dots c_{\alpha_\xi} \dots$$

tels que $v(\alpha_\xi) < v(\alpha_{\xi+1})$ pour tout $\xi < \gamma^0$, γ^0 étant un ordinal $\leq \bar{\gamma}$ tel que les $v(\alpha_\xi)$ ont, pour $\xi < \gamma^0$, le nombre γ pour borne supérieure. Ceci étant, soient u un point de $R_{\varphi+\omega}[c]_S$ tel que $u \parallel \bar{c}$ et u_0 un point de $R_{v(\alpha_0)}[u]_S$. Si alors u^η est le point de $R_\eta[u]$ tel que $u^\eta < u_0$, d_η sera, pour tout η entre $\varphi + \omega$ et $v(\alpha_0)$ un point quelconque de $|u^\eta|_S - u^\eta$; on posera $d_{v(\alpha_0)} = u_0$.

D'une façon générale, soient ξ un nombre quelconque $< \gamma^0$ et $u_{\xi+1}$ un point quelconque de $R_{v(\alpha_{\xi+1})}[c_{\alpha_\xi}]_S$; si alors u^η , pour un η entre $v(\alpha_\xi)$ et $v(\alpha_{\xi+1})$, est le point de $R_\eta S$ tel que $u^\eta < u_{\xi+1}$, on désignera par d_η un point quelconque de $|u^\eta|_S - u^\eta$; on posera $d_{v(\alpha_{\xi+1})} = u_{\xi+1}$. Les nombres $v(\alpha_\xi)$, ($\xi < \gamma^0$), ayant γ pour borne supérieure, on voit que les points d_α sont définis pour tout $\alpha < \gamma$ et qu'ils constituent une descente disjonctive de S .

Second cas: $\gamma_0 < \gamma$. On a donc $\varphi + \omega < \gamma_0 < \gamma$.

Soient u un point de $R_{\alpha+\omega}[c]_S$ tel que $u \parallel c$ et u_0 un point de $R_{\gamma_0}[u]_S$. Si u^η est le point de $R_\eta S$ tel que $u^\eta < u_0$, on désignera, pour tout η entre $\varphi + \omega$ et γ_0 , par d_η un point quelconque de $|u^\eta|_S - u^\eta$; on posera $d_{\gamma_0} = u_0$. Enfin, si α est entre γ_0 et γ , on désignera par d_α un point quelconque de $R_\alpha[c_\alpha]_S$.

On voit sans peine que les points d_α , ($\alpha < \gamma$), qu'on vient de définir, effectuent une descente disjonctive de S .

5. *Suite ramifiée* σ_0 . Soit H_0 un ensemble ordonné quelconque ayant le même type ordinal que l'ensemble des nombres rationnels, par exemple l'ensemble des nombres rationnels lui-même; désignons par σ_0 la famille des sous-ensembles bien ordonnés, bornés et non-vides de H_0 . Les éléments de σ_0 pouvant être considérés comme des complexes, on a, en employant le langage du § précédent, ce

LEMME 2. σ_0 est une suite ramifiée de rang non atteint ω_1 .

Tout d'abord, rappelons que, d'après un théorème classique de Cantor, quel que soit l'ordinal $\alpha < \omega_1$, chaque portion de H_0 ayant au moins deux points contient un sous-ensemble ordonné de type α ; il s'en suit que σ_0 est une suite ramifiée de rang ω_1 . Si σ_0 admettait une descente monotone

c'est-à-dire si l'on avait une suite d'éléments $A_\alpha \in R_\alpha \sigma_0$ tels que $A_\alpha \subset A_{\alpha'}$ pour tout $\alpha < \alpha' < \omega_1$, on aurait, puisque pour des α infinis, A_α est de la forme $(a_0^\alpha \dots a_\xi^\alpha \dots)_{\xi < \alpha}$, un sous-ensemble non-dénombrable bien ordonné de H_0 , $a_{\omega+1}^{\omega+1} < \dots < a_{\alpha+1}^{\alpha+1} < \dots$, ($\omega < \alpha < \omega_1$), contrairement à ce que tout sous-ensemble bien ordonné de H_0 est au plus dénombrable (on a, en effet, $p_0 H_0 = \aleph_0$).

Remarquons, en passant, que $m\sigma_0 = 2^{pH_0}$.

THÉORÈME 6. *Il existe une suite ambiguë de rang non-atteint ω_1 .*²¹

En effet, considérons la suite ramifiée σ_0 et faisons le procédé suivant: désignons par $R_0 S_0$ la rangée $R_0 \sigma_0$; supposons que les sous-ensembles $R_\xi S_0$ de σ_0 sont construits pour tout $\xi < \alpha$, α étant $< \omega_1$, et cela de façon que:

1° $pR_\xi S_0 = \aleph_0$ pour tout $\xi < \alpha$;

2° $\xi + 1$ étant un ordinal quelconque $< \alpha$ et A un élément quelconque de $R_\xi S_0$, l'ensemble $R_0(A, \cdot)_{S_0}$ des éléments B de $R_{\xi+1} S_0$ tels que $A \subset B$ est un ensemble de puissance \aleph_0 , ordonné et n'ayant pas un premier élément.

On déterminera $R_\alpha S_0$ comme suit: si α est de première espèce, $R_\alpha S_0$ sera la réunion des éléments des noeuds $R_0(A, \cdot)_{S_0}$, A parcourant les éléments de $R_{\alpha-1} S_0$; si α est de seconde espèce, $R_\alpha S_0$ sera n'importe quel sous-ensemble F de $R_\alpha \sigma_0$ jouissant de ces propriétés: 1° $pF = \aleph_0$; 2° Les ensembles ordonnés F et $(\cdot, \alpha)_{S_0} \equiv \sum_{\xi < \alpha} R_\xi S_0$ sont partout denses l'un sur l'autre. La puissance de l'ensemble $(\cdot, \alpha)_{S_0}$ étant \aleph_0 , l'ensemble ordonné $R_\alpha \sigma_0$ étant, d'après la seconde moitié du théorème 8.6, partout dense sur l'ensemble ordonné $(\cdot, \alpha)_{S_0}$ donc aussi sur $(\cdot, \alpha)_{S_0}$, l'ensemble $R_\alpha S_0$ existe.

Ainsi, de proche en proche, on détermine des ensembles $R_\xi S_0$ pour tout $\xi < \omega_1$. En posant $S_0 = \sum_{\xi < \omega_1} R_\xi S_0$, prouvons que S_0 est une suite

²¹Ce théorème est dû à M.N. Aronszajn qui a bien voulu me communiquer, vers la fin du mois de juin 1934, un exemple d'une suite ramifiée ambiguë de complexes construite par des considérations suivantes: $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ étant la suite de l'ensemble R de tous les nombres rationnels entre 0 et 1, posons $\varphi(r_n) = 1/n$ pour tout n entre 0 et ω . On considère un système A de complexes $(a_0, \dots, a_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$, ($\alpha < \omega_1$), satisfaisant aux conditions suivantes:

a) pour tout complexe $(a_0, \dots, a_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$ de A , les a_ξ appartiennent à R , sont deux à deux distincts et tels que $\sum_{\xi < \alpha} \varphi(a_\xi) < \infty$;

b) α, α' étant deux ordinaux quelconques tels que $0 < \alpha < \alpha' < \omega_1$, pour chaque élément $(a_0, \dots, a_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$ de A et si petit que soit le nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe un complexe $(a'_0, \dots, a'_\xi \dots)_{\xi < \alpha'}$ de A tel que $a'_\xi = a_\xi$ pour tout $\xi < \alpha$ et $\sum_{\alpha \leq \eta < \alpha'} \varphi(a'_\eta) < \varepsilon$;

c) pour tout $0 < \alpha < \omega_1$, l'ensemble des complexes $(a_0, \dots, a_\xi \dots)$ de rang α de A est dénombrable.

Par le procédé de l'induction complète, on s'assure que la construction de A est possible. Il est clair que A n'admet aucune descente monotone.

ramifiée ambiguë de rang non-atteint ω_1 . On se contentera de prouver que S_0 est une *suite* ramifiée. Or, S_0 est un système de complexes ordonnables naturellement et jouissant de la propriété que, quel que soit l'ordinal α de seconde espèce entre 0 et ω_1 , les ensembles ordonnés $R_\alpha S_0$ et $(\cdot, \alpha)_{S_0}$ sont partout denses l'un sur l'autre; d'après le théorème 8.6, S_0 est bien une suite ramifiée. c.q.f.d.

Remarque 1. Soient l, m, n trois points quelconques ordonnés de telle façon que $l < m < n$; désignons par H_β , β étant un ordinal quelconque, l'ensemble, *ordonné alphabétiquement*, des complexes de rang ω_β définis comme suit: les éléments de H_β sont de la forme $(a_0 \dots a_\xi \dots)_{\xi < \omega_\beta}$, les a_ξ parcourant les trois points l, m, n sous la seule condition qu'à partir d'un indice (variable) φ on a $a_\xi = m$ pour tout ξ tel que $\varphi \leq \xi < \omega_\beta$ (voir la fin du §5); en particulier, le complexe de rang ω_β et de la forme $(m, \dots m \dots)$ appartient à H_β .

Comme on a construit σ_0, S_0 à partir de H_0 , on construit, à partir de H_β , les suites ramifiées σ_β, S_β . Nous ne le ferons pas.

Remarque 2. Par des raisonnements analogues à ceux qui nous ont servi à la construction de S_0 à partir de σ_0 , on démontre ceci: Chaque suite ramifiée S dont tout noeud de première espèce est infini contient une *suite ambiguë* s dont tout noeud de première espèce est infini et telle que $\gamma s = \gamma S$.

En particulier, on construit ainsi, à partir de la suite $(\cdot, \omega_1)_{\sigma_1}$ une suite ambiguë s_1 de rang ω_1 qui est *uniformément atteint* ce qui veut dire que, quel que soit l'élément A de s_1 , la suite $(A, \cdot)_{s_1}$ admet une descente monotone.

§10. Types de ramification. Suites distinguées. Premier problème miraculeux

1. Deux tableaux T_1, T_2 sont dits *semblables*, en signe $T_1 \simeq T_2$, si entre les points de T_1 et ceux de T_2 on peut établir une correspondance biunivoque conservant les relations respectives entre les points de T_1 et de T_2 ; la dernière phrase veut dire ceci: a_1, b_1 étant deux points quelconques de T_1 et a_2, b_2 les points de T_2 correspondant respectivement à a_1, b_1 , alors, on aura $a_2 \equiv b_2$, $a_2 < b_2$, $a_2 > b_2$ ou $a_2 \parallel b_2$ suivant que respectivement $a_1 \equiv b_1$, $a_1 < b_1$, $a_1 > b_1$ ou $a_1 \parallel b_1$; et réciproquement.

Si $T_1 \simeq T_2$ et si h est une similitude quelconque transformant les points de T_1 en points de T_2 , alors, quel que soit le point a de T_1 , on désignera par $h(a)$ le point correspondant de T_2 ; de même, F étant un sous-ensemble de T_1 , on désignera par $h(F)$ le sous-ensemble de T_2 transformé de F ; en particulier on aura $h(T_1) = T_2$.

T étant un tableau ramifié, la propriété commune des tableaux semblables avec T , sera appelée *type de ramification et désignée par rT* .

Si alors T_1, T_2 sont deux tableaux quelconques, on comprendra la signification des symboles $rT_1 \leq rT_2$ (qui veut dire la même chose que $rT_2 \geq rT_1$), $rT_1 \geq rT_2$, $rT_1 = rT_2$ ou $rT_1 \parallel rT_2$ (voir la déf. 1.14 et la note (1.11)).

Remarque. Si T est un tableau disjonctif, on voit que rT coïncide avec pT ; si T est monotone (c'est-à-dire bien ordonné), le type de ramification rT coïncide avec le nombre ordinal tT ; par conséquent, la théorie des types de ramification contient, comme cas particulier, la théorie *des nombres ordinaux et cardinaux, à la fois*.

LEMME 1. a. *Deux tableaux ramifiés semblables ont même rang.*

b. *Soit h une similitude transformant T_1 en T_2 ; si alors N est un noeud quelconque de T_1 et si $N \subseteq R_\alpha T_1$, alors $h(N)$ est un noeud de T_2 tel que $h(N) \subseteq R_\alpha T_2$. Par conséquent, quel que soit l'ordinal $\alpha < \gamma_{T_1}$, on aura $h(R_\alpha T_1) = R_\alpha T_2$.*

LEMME 2. *Soient T_1, T_2 deux tableaux réguliers²² quelconques; alors:*

a. *S'il existe une similitude h transformant l'intervalle $(., \alpha)_{T_1}$ en intervalle $(., \alpha)_{T_2}$, α étant un ordinal de seconde espèce inférieur à γ_{T_1} et γ_{T_2} , la similitude h peut être prolongée d'une façon au plus jusqu'à une similitude des segments $(., \alpha]_{T_1}$ et $(., \alpha]_{T_2}$.*

b. *Soit α un ordinal quelconque inférieur à γ_{T_1} et γ_{T_2} ; s'il existe une similitude entre $R_\alpha T_1$ et $R_\alpha T_2$, celle-ci peut être élargie d'une façon au plus à une similitude entre les segments $(., \alpha]_{T_1}$ et $(., \alpha]_{T_2}$.*

Le lemme précédent est une conséquence facile de cette proposition: *Soit h une similitude entre T_1 et T_2 : a étant un point quelconque de T , la transformation h coïncide, dans $(., a]_{T_1}$, avec la similitude des deux ensembles bien ordonnés $(., a]_{T_1}$ et $(., h(a)]_{T_2}$.*

2. *Procédé σ .* E étant un ensemble ordonné, le signe σE représentera le tableau ramifié de tous les sous-ensembles *bien ordonnés bornés non-vides* de E , ceux-ci étant interprétés comme complexes. On démontre facilement ce

LEMME 3. E, F étant deux ensembles ordonnés semblables, les tableaux ramifiés $\sigma E, \sigma F$ sont aussi semblables.

²²C'est-à-dire tels que chacun de leurs noeuds de seconde espèce n'a qu'un seul point.

Puisque l'ensemble des nombres rationnels est semblable avec chacune de ses portions droites, on en déduit ce

LEMME 4. *La suite ramifiée $\sigma_0 \equiv \sigma R$, R désignant l'ensemble des nombres rationnels,²³ est homogène.²⁴*

3. *Suites ramifiées distinguées.* Une suite ramifiée S sera dite *distinguée* si ces quatre conditions sont simultanément vérifiées:

1° γS est un ordinal initial et régulier;

2° S est ambiguë et n'admet aucune descente monotone;

3° Chaque noeud de S est infini;

4° Borne $\sup_{\alpha \in S} p|a|_s = \text{bornesup}_{\alpha < \gamma S} pR_\alpha S$; en particulier, si $\gamma S = \omega_{\beta+1}$. tout noeud de S a la puissance \aleph_β .

Example: S_0 désignant la suite ambiguë considérée à la fin du § précédent, on voit que $\sum_{\alpha < \omega_1} R_{\alpha+1} S_0$ est une suite distinguée de rang ω_1 .

Nous ne savons pas s'il existe une suite distinguée dont le rang serait un nombre inaccessible. Au contraire, quel que soit l'ordinal β , on peut démontrer l'existence d'une suite distinguée de rang $\omega_{\beta+1}$. On rencontrera à plusieurs reprises des suites distinguées.

4. Nous ne savons pas si toute suite distinguée de rang ω_1 est nécessairement semblable à un sous ensemble de σ_0 .

Le problème précédent est très intéressant et important; en voilà un autre, plus difficile encore, qui occupe, à notre avis, une place particulière dans l'ensemble des problèmes mathématiques concernant la théorie des ensembles.

Problème miraculeux 1: Deux suites distinguées quelconques de rang ω_1 sont-elles nécessairement semblables? (cf. les notes (7) et (8) de l'Introduction et la fin de ce §).²⁵

Comme on le démontre facilement, le problème précédent est équivalent à celui-ci: *Une suite distinguée quelconque de rang ω_1 étant donnée, est-elle nécessairement homogène?²⁶*

²³Dans ce qui suit, σ_0 aura constamment la même signification.

²⁴On dira qu'un tableau (ou même un ensemble) ramifié T est homogène si, quel que soit le point a de T , on a $T \simeq (a, \cdot)_T$.

²⁵Voici le *Second problème miraculeux*: S_1, S_2 étant deux suites distinguées quelconques de rang ω_1 , est-ce que les espaces-tableaux eS_1, eS_2 est homéomorphes? (cf. le § 8.A7). Remarquons que la réponse affirmative au Pr. miraculeux I en entraîne une au Pr. miraculeux II.

²⁶Voilà encore un problème: Démontrer l'existence d'une suite distinguée homogène.

Prouvons ceci: La réponse affirmative au problème miraculeux 1 entraîne la proposition que toute suite distinguée de rang ω_1 admet une descente disjonctive.

En effet, en se servant de la proposition évidente:

Si un tableau admet une descente disjonctive (monotone), tout tableau qui lui est semblable en admet encore une, il suffit de construire une suite distinguée particulière de rang ω_1 admettant une descente disjonctive.

Par un procédé, nommé *l'intercalation latérale* (voir plus loin la notion d'intercalation longitudinale), on va démontrer que:

Quelle que soit la suite distinguée S , il existe une suite distinguée S_l ayant le rang γS associée à S d'une manière très simple et admettant une descente disjonctive.

En effet, soit \mathcal{F} une famille de puissance pS de suites distinguées, deux à deux disjointes, de rang γS et dont aucune n'a un élément en commun avec la suite proposée S ; entre les éléments de \mathcal{F} et ceux de S , on peut établir une correspondance biunivoque qu'on désignera par S_a , voulant indiquer par ceci qu'à S_a de \mathcal{F} correspond le point a de T et au point a de S , l'élément S_a de \mathcal{F} . Ceci étant, soit a un point quelconque de S ; désignons par T_a le tableau qu'on obtient en ajoutant à la suite S la suite distinguée S_a de \mathcal{F} de la façon que, quel soit le point s_a de S_a on a $a < s_a$ et $s_a \parallel b$, pour tout point b de $S - (., a]_s$, ce qu'on peut écrire encore: $(., a]_s < S_a \parallel S - (., a]_s$. On désignera par S_l^0 le tableau-réunion $\sum_a T_a$, a parcourant les points de S , l'ensemble S_l^0 étant rangé d'une façon naturelle c'est-à-dire: les S_a aussi bien que S conservant leur relation de ramification primitive, ensuite, a, b étant deux points quelconques de S_l^0 tels que $a < b$, on devra avoir aussi $a < [b, .)_{S_l^0}$; en particulier, a, a' étant deux points distincts de S , les deux sous-tableaux $S_a, S_{a'}$ de S_l^0 seront incomparables: quels que soient les points b, b' respectivement de $S_a, S_{a'}$, on aura $b \parallel b'$.

En posant $S_l = S_l^0 - S$, on prouve très facilement que S_l est une suite distinguée de rang γS .

Or, la suite S_l admet une descente disjonctive. En effet, soient: F un sous-ensemble de S traversant la suite donnée S , et D un sous-ensemble quelconque de $\sum_a R_0 S_a$ ayant avec chacun des ensembles $R_0 S_a$, (a parcourant F), un seul point en commun. On prouve facilement que l'ensemble D constitue une descente disjonctive de la suite distinguée S . c. q. f. d.

5. Cas de suites ramifiées dénombrables.

LEMME 5. *Quelle que soit la suite ramifiée dénombrable S , il existe une suite ramifiée dénombrable S^0 de rang $\gamma S + 1$ telle que $S = (., \gamma S)_{S^0}$.*²⁷

Le cas où γS serait de première espèce étant trivial, supposons que γS est de seconde espèce. Prenons, tout d'abord, un cas très particulier où il s'agit de l'ensemble σ des complexes (a_1, \dots, a_n) , n étant un entier positif quelconque, les a_n parcourant les entiers positifs et négatifs. On voit que σ est une suite ramifiée de rang ω dont chaque noeud a la puissance \aleph_0 . Désignons par s l'ensemble des complexes $(a_1 a_2 \dots a_n \dots)$, a_n parcourant les entiers. On démontre facilement que les ensembles σ , s sont *ordonnables naturellement, chacun partout dense sur l'autre et chacun séparable*. Soit donc, en particulier, R un sous-ensemble dénombrable quelconque de s partout dense sur s donc aussi sur σ . En désignant par σ^0 l'ensemble des complexes de $\sigma + R$, on conclut, à la suite du théorème 8.6, que σ^0 est une suite ramifiée de rang $\omega + 1$ et que $R_\omega \sigma^0 = R$. Ainsi, le lemme est démontré pour la suite σ et, comme on le voit, pour toute suite semblable à un sous-ensemble de σ , en particulier pour des suites dénombrables de rang ω , parce qu'on prouve aisément que toute suite ramifiée dénombrable de rang $\leq \omega$ est semblable à un sous-ensemble des suites ramifiées σ considérées ci-dessus.

Reste le cas où γS est de seconde espèce et entre ω et ω_1 . $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots$ étant une suite d'ordinaux $< \gamma S$ tendant vers γS , posons $S_0 = \sum_{n < \omega} R_{\alpha_n} S$; on se trouve dans les conditions du cas précédent et il existe une suite S_0^0 de rang $\omega + 1$ telle que $(., \omega)_{S_0^0} = S_0$. En posant $S_0 = S + S_0^0$, on prouve aisément que S_0 répond aux conditions du lemme.

THÉORÈME 1. *Quelles que soient les deux suites ramifiées dénombrables S_1, S_2 telles que $\gamma S_1 = \gamma S_2$, $p|a|_{s_i} = pS_i = \aleph_0$ pour tout $a \in S_i$, ($i = 1, 2$), on a $S_1 \simeq S_2$.*

Le cas où les ordinaux $\gamma S_1, \gamma S_2$ seraient de première espèce pouvant être réduit à celui où ils sont de seconde espèce, considérons le dernier cas. D'après le lemme précédent, il existe une suite ramifiée dénombrable S_i^0

²⁷Si l'on dit que le rang d'un tableau T est *prolongeable* s'il existe un tableau T_0 tel que $\gamma T_0 > \gamma T$ et $T = (., \gamma T)_{T_0}$, le lemme dit, en particulier, que le rang de tout tableau dénombrable est prolongeable. On peut démontrer ceci: Pour que le rang d'un tableau soit prolongeable, il faut et il suffit qu'il soit atteint. Par conséquent, le rang de σ_0 n'est pas prolongeable: celui d'une suite distinguée quelconque non plus.

telle que $\gamma S_i^0 = \gamma S_i + 1$, $(\cdot, \gamma S_i)_{S_i^0} = S_i$, ($i = 1, 2$); en particulier, en posant $R_i = R_{\gamma S_i, S_i^0}$, on aura $pR_i = \aleph_0$.²⁸

Soient:

- (1) $a^0, a^1, \dots, a^n \dots$ les points de S_1 numérotés une fois pour toutes;
 (2) $b^0, b^1, \dots, b^n \dots$,, ,, ,, S_2 ,, ,, ,, ,, ,,
 (1') $a_0, a_1, \dots, a_n \dots$,, ,, ,, R_1 ,, ,, ,, ,, ,,
 (2') $b_0, b_1, \dots, b_n \dots$,, ,, ,, R_2 ,, ,, ,, ,, ,,

En posant $A_0 = a_0$, $E_0 = (\cdot, A_0)_{S_1}$, $B_0 = b_0$, $F_0 = (\cdot, B_0)_{S_2}$ et en faisant correspondre les noeuds A_0 avec B_0 , on obtient une similitude, qu'on désignera par h_0 , entre les points de E_0 et ceux de F_0 : on aura $h_0(E_0) = F_0$. Supposons que A_0, \dots, A_n sont des points de (1') et B_0, \dots, B_n des points de (2') tels que, en posant $E_i = (\cdot, A_0)_{S_1} + \dots + (\cdot, A_i)_{S_1}$, $F_i = (\cdot, B_0)_{S_2} + \dots + (\cdot, B_i)_{S_2}$, la correspondance biunivoque $A_i \xrightarrow{h_i} B_i$, pour tout $i \leq n$, entraîne une similitude h_i transformant E_i en F_i et que h_i se réduit, sur E_{i-1} , à la similitude h_{i-1} ; on va alors construire les points A_{n+1} , B_{n+1} et définir un prolongement de h_n .

Premier cas: n est un entier pair ou 0: Soit A_{n+1} l'élément du plus faible indice de la suite (1') distinct des éléments A_0, \dots, A_n ; désignons par m le point a^j du plus faible indice j dans (1) tel que $a^j \in (\cdot, A_{n+1})_{S_1} - E_n$ et $|a^j|_{S_1} \cdot E_n \supset 0$. Il est essentiel de remarquer que m existe et est déterminé d'une manière unique. Alors, m' désignant n'importe quel point de $|m|_{S_1} \cdot E_n$, B_{n+1} sera le premier élément de (2') tel que $h_n(m') < B_{n+1}$, le signe $h_n(m')$ représentant le point de F_n correspondant, en vertu de la similitude h_n , au point m' de E_n . En faisant correspondre les éléments A_{n+1} avec B_{n+1} , on voit qu'on obtient une similitude h_{n+1} entre les ensembles $E_{n+1} = E_n + (\cdot, A_{n+1})_{S_1}$, $F_{n+1} = F_n + (\cdot, B_{n+1})_{S_2}$, prolongeant la similitude h_n .

Second cas: n est impair; la construction est analogue à la précédente avec la différence que les lettres A , B changent leur rôle.

Dans les deux cas, les ensembles E_{n+1} , F_{n+1} sont donc déterminés.

On aura ainsi:

$$\begin{aligned} E_0 &\subset E_1 \subset \dots \subset E_n \subset \dots, & \Sigma E_n &= S_1, \\ F_0 &\subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset \dots, & \Sigma F_n &= S_2, \\ h_0 &\subset h_1 \subset \dots \subset h_n \subset \dots, \end{aligned}$$

²⁸On peut toujours supposer, et c'est ce que nous ferons, que $p|a|_{S_i^0} = 1$, pour tout $a \in R_i$, ($i = 1, 2$).

le signe $h_n \subset h_{n+1}$ voulant dire que la similitude h_{n+1} est une extension de la similitude h_n . Par conséquent, x étant un point de S_1 , on aura un indice k_x tel que $h_n(x)$ représente un même point de S_2 quel que soit l'entier $n \geq k_x$. En posant $h(x) = h_n(x)$ si $n \geq k_x$, on s'aperçoit aisément que la transformation $h = h(x)$ est une similitude entre les suites ramifiées S_1, S_2 . c. q. f. d.

Comme conséquence facile du théorème précédent, on a ceci:

a) Quel que soit l'ordinal $\alpha < \omega_1$, toute suite ramifiée S telle que $\gamma S = \omega^\alpha$, $p|a|_S = pS = \aleph_0$, est homogène. (cf. la note (4)).

b) Quelles que soient deux suites distinguées de rang ω_1 , S_1, S_2 , et quel que soit l'ordinal $\alpha < \omega_1$, on a $(., \alpha)_{S_1} \simeq (., \alpha)_{S_2}$ (cf. le problème miraculeux I).

§ 11. Nombres bT , $b'T$. Tableau normaux.

Dans ce §, on étudiera le rapport entre un tableau ramifié T et la classe de ces sous-tableaux *dégénérés*; on définira deux nombres bT et $b'T$ qui, dans la suite, interviendront fréquemment. Dans ce qui suit, sauf mention expresse du contraire, T désignera un tableau *infini* quelconque.

1. bT désignera la borne supérieure des pF , F parcourant la classe des sous-ensembles *dégénérés* de T .

Les deux problèmes nous intéresseront:

Problème A: La borne supérieure bT est-elle, dans T , atteinte, c'est-à-dire, existe-t-il un sous-tableau *dégénéré* de T ayant la puissance bT ?

Problème B: A-t-on nécessairement $bT = pT$?

On dira que T est *normal* s'il admet une réponse affirmative aux problèmes A et B, autrement dit s'il a la même puissance qu'un de ses sous-tableaux *dégénérés*.

LEMME 1. Quel que soit le nombre cardinal $k < pT$, T contient un sous-ensemble *dégénéré* T_k ayant la puissance k .

En effet, d'après le lemme 8.11, l'une au moins des égalités a lieu: $pT = mT$, $pT = p\gamma T$. Si, par exemple, $p\gamma T = pT$, on aura $k < p\gamma T$ et il existe un $\alpha < \gamma T$ tel que $p\alpha = k$; alors, a désignant un point quelconque de $R_\alpha T$, il suffit de poser $T_k = (., a)_T$. Si $pT = mT$, on voit qu'il existe une rangée R de T telle que $pR \geq k$, et T_k peut désigner n'importe quel sous-ensemble de puissance k de R .

THÉORÈME 1. Entre les nombres cardinaux bT et pT il n'y a aucun nombre cardinal; on a ou bien $bT = pT$ ou bien bT, pT sont deux nombres

cardinaux consécutifs tels que $bT < pT$. En particulier, si pT est de seconde espèce, on aura $bT = pT$. (cf. le problème B ci-dessus).

Le théorème est une conséquence facile du lemme précédent.

2. Avant d'aborder les problèmes A, B dans leurs généralités, considérons deux cas particuliers où $pT = \aleph_0$ ou \aleph_1 .

a) Si $pT = \aleph_0$, T est normal: T contient un sous-ensemble dégénéré infini T_d .

Si T a une rangée infinie R (ce cas aura lieu, en particulier, si $\gamma T < \omega$), il suffira de poser $R = T_d$. On peut donc supposer que toute rangée de T est finie. Il existe alors un point a_0 de R_0T tel que $p[a_0, \cdot)_T = pT$; supposons qu'on a démontré l'existence des points $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ tels que $a_i \in R_iT$ et $p[a_i, \cdot)_T = \aleph_0$ pour tout $i \leq n$; on désignera alors par a_{n+1} un point quelconque de $R_0(a_n, \cdot)_T$ tel que $p[a_{n+1}, \cdot) = pT$.

L'existence de a_{n+1} étant évidente pour tout $n < \omega$, il suffit de désigner par T_d l'ensemble des points $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ (on voit que T_d est une traversée monotone de T).

b) $pT = \aleph_1$. Le problème de savoir si tout T ayant la puissance \aleph_1 est normal est d'une importance considérable parce que, comme on le verra plus loin, il est intimement lié au problème bien connu de Souslin. Il s'agit donc de voir si T est normal, c'est-à-dire s'il contient un ensemble dégénéré non-dénombrable T_d .

On peut supposer que $\gamma T = \omega_1$: si $\gamma T < \omega_1$, il y a une rangée non dénombrable de T , si $\gamma T > \omega_1$, il suffirait de poser $T_d = (\cdot, a)_{T_0}$, a étant un point de $R_{\omega_1}T$, pour se convaincre que T est normal. Considérons la largeur mT de T : On a soit $mT = \aleph_1$ soit $mT = \aleph_0$ soit $mT < \aleph_0$. Si $mT = \aleph_1$, T a une rangée non-dénombrable R et on poserait $R = T_d$; si $mT < \aleph_0$, T serait étroit et, à la suite du théorème 8.5^{bis}, T serait normal. Reste enfin le cas où $mT = \aleph_0$. On peut aussi supposer que T n'admet aucune descente monotone parce qu'il est évident que tout tableau ambigu admettant une descente monotone est normal.

En désignant par T_0 l'ensemble de tous les éléments a de T tels que $p[a, \cdot)_T < pT$, on a ou bien $pT_0 = pT$ ou bien $pT_0 < pT$. Si $pT_0 = pT$, on voit que R_0T_0 est non-dénombrable et alors il suffit de poser $T_d = R_0T_0$; si $pT_0 < pT$, on aura, en posant $T_1 = T - T_0$, $pT_1 = pT$ et même $p[a, \cdot)_{T_1} = pT$ pour tout point a de T .

Puisqu'on a supposé que $mT = \aleph_0$ et que γT n'était pas atteint, on voit que T_1 est une suite ambiguë de rang non atteint ω_1 .

On prouve facilement ceci: *Quel que soit le point a de T_1 , il y a une rangée infinie (et forcément dénombrable) de la suite $(a, \cdot)_{T_1}$.*

Ceci étant, on va prouver que:

La suite T_1 contient une suite distinguée S de rang ω_1 .

Pour commencer, on désignera par $R_0 S_0$ la première rangée infinie de T_1 ; soit α un ordinal ω_1 et supposons que les sous-ensembles disjoints et dénombrables $R_\xi S_0$ de T_1 sont déterminés pour tout $\xi < \alpha$; on va déterminer $R_\alpha S_0$ comme suit: si α est de première espèce, on posera $R_\alpha S_0 = \sum_a R_{\alpha_a} [a, \cdot)_{T_1}$, a parcourant $R_{\alpha-1} S_0$, α_a désignant l'indice de la première rangée infinie de la suite ambiguë $[a, \cdot)_{T_1}$. Si α est de seconde espèce, on posera $R_\alpha S_0 = R_\beta T_1$, β désignant la borne supérieure des nombres η tels que $R_\eta T_1$ contient au moins un point de $\sum_{\xi < \alpha} R_\xi S_0$; le dernier ensemble étant dénombrable, l'ordinal β est bien déterminé et $< \omega_1$. Enfin, on posera $S = \sum_{\alpha < \omega_1} R_{\alpha+1} S_0$; on vérifie aisément que S est une suite distinguée de rang ω_1 (voir le § 10.3).

Il s'agit de savoir si la suite distinguée S est normale ou non, c'est-à-dire si $bS = \aleph_0$ ou \aleph_1 .

Pour que $bS = \aleph_0$, il faut et il suffit que tout sous-ensemble non-dénombrable de S soit, à un sous-ensemble au plus dénombrable près, une suite distinguée de rang γS .

Nous prouverons seulement que la condition est nécessaire. Par hypothèse, $bS = \aleph_0$. Soit E un sous-ensemble non dénombrable quelconque de S ; en particulier, E peut traverser S ; il s'agit de prouver que, en retranchant de E un sous-ensemble au plus dénombrable de E , le reste est une suite distinguée de rang γS . On se contentera de prouver seulement que la famille des noeuds *finis* de E est au plus dénombrable. Pour cela, soit M la réunion des ensembles $|a|_S - |a|_E$, a parcourant les points des noeuds *finis* de E . Soit, ensuite F un sous-ensemble quelconque de M ayant avec chacun des ensembles $|a|_S - |a|_E$, a parcourant les points de E tels que $p|a|_E < \aleph_0$, un seul point en commun. On démontre que F est un sous-ensemble disjointif de S et que $pF = pS$ si $pM = pS$; on aurait donc $bS = \aleph_1$ ce qui est incompatible avec notre hypothèse.

En somme, nous ne pouvons pas décider s'il y a une suite distinguée anormale.

Par un raisonnement analogue à celui par lequel on a prouvé que T contenait une suite distinguée, on prouve ce

LEMME 2. *Toute suite ramifiée ambiguë S n'admettant aucune descente monotone contient une suite distinguée de rang $\tau\gamma S$.*²⁹

3. Considérons maintenant un T quelconque et demandons-nous s'il contient un sous-ensemble dégénéré T_d ayant la puissance pT . On sera plus concis.

Désignons par T_0 l'ensemble de tous les points a de T tels que $p[a, \cdot)_T < pT$. Si $pT_0 = pT$, on aura $pR_0T_0 \geq p\tau pT$. Si pT est régulier, on pourra poser $T_d = R_0T_0$ parce que, comme on s'en aperçoit sans peine, $m_0T_0 = pT$. Si pT est singulier et en plus, $pR_0T_0 < pT$, il existe un ensemble de points $a^\xi \in R_0T_0$ tels que $p[a^0, \cdot)_{T_0} < p[a^1, \cdot)_{T_0} < \dots < p[a^\xi, \cdot)_{T_0} < \dots$, $p[a^\xi, \cdot)_{T_0} < pT$, ($\xi < \tau pT$), les $p[a^\xi, \cdot)_{T_0}$ ayant pT pour borne supérieure.

Soit $k^0 < k^1 < \dots < k^\xi < \dots$, ($\xi < \tau pT$), une suite de nombres cardinaux $< pT$ ayant pT pour borne supérieure. Déterminons les tableaux E^ξ comme suit: β_0 étant le premier indice tel que $p[a^{\beta_0}, \cdot)_{T_0} > k^0$, désignons par E^0 un sous-tableau dégénéré quelconque de $[a^{\beta_0}, \cdot)_{T_0}$ ayant la puissance k^0 (voir le lemme 1); ξ étant un ordinal $< \tau pT$, supposons que les ensembles dégénérés $E^\eta \subset [a^{\beta_\eta}, \cdot)_{T_0}$ sont déterminés pour tout $\eta < \xi$ et que $pE^\eta = k^\eta$; alors, en désignant par β_ξ le premier indice tel que $p[a^{\beta_\xi}, \cdot)_{T_0} > k^\xi$, on prendra n'importe quel sous-ensemble dégénéré E^ξ de $[a^{\beta_\xi}, \cdot)_{T_0}$ ayant la puissance k^ξ . En posant $T_d = \sum_{\xi < \tau pT} E^\xi$, on voit que T_d est un sous-ensemble dégénéré de T_0 ayant la puissance $pT_0 = pT$.

C'était dans le cas où $pT_0 = pT$. Si $pT_0 < pT$, en posant $T_1 = T - T_0$, on aura $pT_1 = pT$ et $p[a, \cdot)_{T_1} = pT_1$ pour tout $a \in T_1$. On a deux cas, suivant que $pT_1 = p\gamma T_1$ ou $pT_1 > p\gamma T_1$.

Supposons, tout d'abord, que $pT_1 > p\gamma T_1$. Puisque $pT_1 = \sum_{\alpha < \gamma_1} m_\alpha T_1$, en posant $\gamma_1 = \gamma T_1$, il existera un $\alpha_0 < \gamma$ tel que $m_{\alpha_0} \geq p\tau\gamma_1$ (voir le lemme 2 · 2'); en particulier, si pT_1 est régulier, T_1 aura une rangée de puissance pT_1 . En raisonnant sur une suite des $[a^\xi, \cdot)_{T_1}$, ($\xi < \tau pT_1$) les a^ξ appartenant à $R_{\alpha_0}T_1$, on construit, comme dans le cas précédent, un sous-ensemble dégénéré de T_1 ayant la puissance pT_1 . Reste le cas où $pT_1 = p\gamma T_1$. Si T_1 est *large*, on raisonne comme tout à l'heure; le cas où T_1 est *étroit* ne présentant aucune difficulté (voir le théorème 8 · 5^{bis}), reste le cas où T_1 est ambigu. On peut supposer que γT_1 est initial et non-atteint parce que, dans les deux cas, T_1 contiendrait un sous-ensemble monotone de puissance $p\gamma T_1 = pT_1$ et tout serait démontré. Puisque, quel que soit $a \in T_1$ $p[a, \cdot)_{T_1} = pT$ et $pT_1 = p\gamma T_1$, on démontre que T_1 est une *suite ramifiée*. En tenant compte des hypothèses précédentes, T_1 est une *suite ramifiée*

²⁹On prouve aussi que le mot "ambiguë" peut être barré.

ambiguë n'admettant aucune descente monotone et ayant, pour rang, un nombre initial.

En tenant compte du lemme 2, on peut démontrer ce

THÉORÈME 2. *Tout T anormal contient une suite distinguée anormale S telle que $p\gamma S = p\tau pT$.*

Ainsi, l'existence de *tableaux anormaux* se réduit à celle de *suites distinguées anormales*. La question concernant leur existence reste ouverte (cf. le § 12 et le complément).

4. *Nombre bT .* Si $a \in T$, $b \in T$, le signe $(a \leq b)_T$ ou simplement $(a \leq b)$ sera appelé *direction-élément* de T si ou bien $a < b$, $(a, b) = 0$ ou bien $a \equiv b$, $(a, \cdot)_T = 0$; c'est-à-dire si ou bien b est un des successeurs immédiats de a ou, si a est un des derniers points de T (c'est-à-dire $(\alpha, \cdot)_T = 0$). Deux directions-éléments $(a \leq b)$, $(a' \leq b')$ sont dites *distinctes* si l'on n'a pas à la fois $a \equiv a'$, $b \equiv b'$; et *non-radiales* si elles sont, tout d'abord, distinctes, et puis telles que ou bien $a \parallel a'$ ou bien, à la fois, $\text{anon} \parallel a'$ et $\text{bnon} \parallel b'$; il s'en suit qu'on n'a pas alors $a \equiv a'$.³⁰ Autrement dit, deux directions-éléments $(a \leq b)$, $(a' \leq b')$ sont non-radiales si ou bien $a \parallel a'$ ou bien $a < a'$, $b \leq a'$ ou bien $a' < a$, $b' \leq a$. Ceci étant, $b'T$ sera la borne supérieure des pF , F parcourant la classe des familles de directions-éléments de T celles-ci étant deux à deux non-radiales.

La notion de directions-éléments de T s'impose d'elle-même: elle nous indique un certain passage d'un point de T à un seul de ses successeurs immédiats (éventuels). C'est ainsi qu'on généralise la notion de *passage de n à $n + 1$* qui nous est familier des premiers éléments de Mathématiques (cf. l'hypothèse P_3 du Complément).

Dans le cas de tableaux d'ensembles \mathcal{T} (voir le § 8B), $b'T$ admet une autre définition, plus concrète d'ailleurs.

\mathcal{T} étant un tableau d'ensembles, \mathcal{T}^d sera la famille-réunion qu'on obtient en adjoignant à \mathcal{T} tous les ensembles $A-B$, les A, B parcourant \mathcal{T} .

On va prouver que $b' \mathcal{T}$ coïncide avec la borne supérieure des $p\mathcal{F}$, \mathcal{F} parcourant la classe des sous-familles disjonctives de la famille \mathcal{T}^d .

La proposition sera démontrée en deux pas:

1° Faisons correspondre à une direction-élément $(A \leq B)$ l'ensemble E_{AB} , celui-ci étant soit $A-B$ soit A suivant que $A \supset B$ ou $A = B$. On voit que, ainsi, à deux directions-éléments non-radiales de \mathcal{T} correspondent deux ensembles disjoints de \mathcal{T}^d (qui ne sont pas vides tous les deux).

³⁰D'où l'expression "non-radiales".

2° D'autre part, à un élément non vide M de \mathcal{T}^d faisons correspondre la direction-élément $(A_M \leq B_M)$ de \mathcal{T} construit comme suit: si $M \in \mathcal{T}^d - \mathcal{T}$, B_M sera tel que $X - B_M = M$, $X \in \mathcal{T}$ (on voit que X , B_M et A_M sont déterminés sans aucune ambiguïté); si $M \in \mathcal{T}$, A_M sera M , et B_M sera soit M soit un élément de la famille $R_0(M, \cdot)\mathcal{T}$ suivant que celle-ci est vide ou non. Alors, à deux éléments disjoints non-vides de \mathcal{T}^d correspondent, ainsi, deux directions-éléments non-radiales de \mathcal{T} .

La notion de $b'T$ interviendra effectivement dans le § suivant.

A propos de $b'T$, on peut poser deux problèmes analogues aux problèmes A , B en y remplaçant bT par $b'T$.

LEMME 3. $bT \leq b'T \leq pT$. On ne sait pas si le signe d'inégalité peut intervenir. Si T est normal, on aura $bT = b'T = pT$.

On aura besoin de ce

THÉORÈME 3. *Abstraction faite des T dont le rang est un ordinal inaccessible, la borne supérieure $b'T$ est atteinte.*

D'après ce qui précède, on se bornera au cas où T est une suite ambiguë quelconque ayant, pour rang, un ordinal initial singulier. Désignons par E l'ensemble de tous les points a de T tels que le nombre $\alpha > 0$ vérifiant $a \in R_\alpha T$ soit de première espèce et que $p|a|_T = 1$.

a) $pE = pT$.

En effet, si $pE < pT$, en posant $S = T - E$, on démontre que S serait une suite ambiguë totalement ramifiée dont le rang est un nombre singulier ($= \gamma T$) ce qui est incompatible avec le théorème 8 · 2.

b) Désignons par \mathcal{F} la famille des directions-éléments $(a \geq b)$ de T , b parcourant les points de E (par conséquent, a est le prédécesseur immédiat de b); on voit que $p\mathcal{F} = pE$ donc $p\mathcal{F} = pT$ et que les éléments de \mathcal{F} sont deux à deux non-radiales.

5. *Nous ne savons pas si, dans l'énoncé du théorème précédent, le signe $b'T$ peut être remplacé par bT : pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que tout T soit normal.*

Prouvons que la condition est nécessaire; on se bornera au cas de suites ramifiées ambiguës S de rang non-atteint qui est un nombre régulier initial quelconque. On emploiera un procédé appelé *intercalation longitudinale*.

a étant un point de S et α l'ordinal tel que $a \in R_\alpha S$, désignons par S^α le tableau qu'on obtient de S en y intercalant, entre le point a et le noeud $R_0(a, \cdot)_S$, un ensemble bien ordonné E^α de rang ω_α : tout point de E^α précédera tout point succédant à un point au moins de $R_0(a, \cdot)_S$ et

suivra à tout point de $(., a]_S$. Les E^a étant, pour des a distincts, deux à deux disjoints, on posera $S_l = \sum_a S^a$, ($a \in S$), les points de S_l étant rangés naturellement. On prouve facilement ceci:

α) Après tout point de S_l , il y a un point de S . Il s'en suit qu'à tout sous-ensemble disjonctif de S_l on peut faire correspondre un sous-ensemble disjonctif de S ayant la même puissance que lui-même.

β) S_l est une suite ambiguë n'admettant aucune descente monotone; on a $mS_l = mS$, $\gamma S_l = \omega_{\gamma S}$, $pS_l = \aleph_{\gamma S} = bS_l$.

Le rang de S_l est donc singulier. A la suite de l'hypothèse, S_l contient un sous-ensemble dégénéré E ayant la puissance $bS_l = \aleph_{\gamma S}$.

Or on a $pR_0E = p\gamma S$. En effet, le rang γS étant, par supposition, régulier, on a $\tau pE = \gamma S$; puis, d'autre part $p(a, .)_E < pE$, $pE = \sum_{a \in R_0E} p(a, .)_E$, on aura $pR_0E \geq p\gamma S$. L'ensemble R_0S étant disjonctif, la suite S contient, d'après α), un sous-ensemble disjonctif de puissance R_0E ; on a donc puissance $pR_0S = p\gamma S$, et la suite E est normale. c. q. f. d.

6. Pour terminer, démontrons que

L'indentité (eventuelle) $b'T = pT$ entraîne l'identité $bT = pT$ (la réciproque est évidente).

On peut supposer que T est une suite distinguée. Alors, en faisant correspondre à une direction-élément ($a \leq b$) de T un point quelconque de $|b|_T - b$, on voit qu'à deux directions-éléments non-radiales de T correspondent, ainsi, deux points incomparables de T . c. q. f. d.

§ 12. Retour aux ensembles ordonnés.

A. Notion de développement complet d'un ensemble ordonné.

1. Dans la section B du § 8, on a défini des tableaux ramifiés complets d'ensembles comme des tableaux ramifiés \mathcal{T} d'ensembles vérifiant ces conditions:

1° L'ensemble $\sum \mathcal{T}$ est un élément de \mathcal{T} ;

2° X étant un élément quelconque de \mathcal{T} tel que $pX > 1$, alors $\sum R_0(X, .)_\mathcal{T} = X$;

3° La partie commune de chaque sous-tableau monotone non-vide de \mathcal{T} appartient à \mathcal{T} (sauf éventuellement si celle-ci est vide).

Dans le cas qui nous occupe actuellement, on considérera des tableaux ramifiés de portions (et non pas de sous-ensembles quelconques), d'un ensemble ordonné E .

Notation. \mathcal{F} étant une famille d'ensembles quelconques, la famille de tous les éléments de \mathcal{F} ayant au moins deux points sera désignée par $\psi\mathcal{F}$.

Dans la suite, sauf mention expresse du contraire, E désignera un ensemble ordonné quelconque.

Chaque tableau ramifié complet D de portions de E tel que E soit un élément de E sera appelé développement complet de l'ensemble ordonné E .

Prouvons tout d'abord ce

LEMME 1. *Quel que soit l'ensemble ordonné E tel que $p_0E \leq \aleph_\beta$,³¹ le rang γ de chaque développement complet de E est tel que $\gamma \leq \omega_{\beta+1}$.*

En effet, supposons qu'il existe un développement complet D de E tel que $\gamma D > \omega_{\beta+1}$ bien que $p_0E \leq \aleph_\beta$. En désignant par F un élément quelconque de $R_{\omega_{\beta+1}}D$, soit, pour tout $\xi < \omega_{\beta+1}$, E_ξ l'élément (unique) de $R_\xi D$ tel que $E_\xi D$ tel que $E_\xi \supset F$. Il est clair que $E_\xi \supset E_{\xi+1}$ et que l'ensemble $E_\xi - E_{\xi+1}$ est composé, pour tout $\xi < \omega_{\beta+1}$, de deux portions disjointes P'_ξ , P''_ξ (dont l'une peut d'ailleurs être vide). Soient alors a'_ξ , a''_ξ deux points quelconques appartenant respectivement à P'_ξ , P''_ξ (si, par exemple, $P'_\xi = 0$, il est clair que $a'_\xi = 0$); en désignant par P' et P'' l'ensemble des points différents a'_ξ et a''_ξ respectivement, pour tout $\xi < \omega_{\beta+1}$ il est clair qu'au moins l'un des ensembles P' et P'' aura la puissance $\aleph_{\beta+1}$. Si, par exemple, $pP' = \aleph_{\beta+1}$, cela voudrait dire que P' est un sous-ensemble bien ordonné de E et de puissance $\aleph_{\beta+1}$; par conséquent, $p_0E \geq \aleph_{\beta+1}$ contrairement à l'hypothèse.

2. D étant un développement complet de E , on a donc $\sum D = E$. De plus, X étant un élément quelconque de ψD , il y a une famille disjointive $f(X)$ de portions non-vides de X telle que

1° $pf(X) > 1$ et $\sum f(X) = X$.

2° Quel que soit l'élément Y de $f(X)$, il n'y aucun élément Z de D tel que $X \supset Z \supset Y$. On voit que $f(X) = R_0(X, \cdot)_D$.

Dans la suite, on emploiera constamment la notation $f(X)$ dans le sens qu'on vient d'indiquer.

Or, la famille disjointive $f(X)$ peut être ordonnée de la manière suivante: A, B étant deux éléments distincts de $f(X)$, on posera $A \leq B$ dans $f(X)$ suivant que la portion A de E est, dans E , à gauche ou à droite de la portion B de E .

Dans la suite, on sous-entendra toujours que $f(X)$ est ordonné de la façon indiquée et, par conséquent, la notation $tf(X)$ pour le type ordinal

³¹Pour la terminologie, voir le § 7.

de $f(X)$ s'explique d'elle même. On voit alors que, quel que soit l'élément X de ψD , on a $1 < tf(X) \leq tX$ (le symbole tX désignant le type ordinal de l'ensemble ordonné X ; celui-ci est, d'ailleurs, une portion de E).

ν étant un type ordinal et E un ensemble ordonné, une famille \mathcal{F} d'ensembles sera dite ν -partition complète de E ou encore développement complet de E suivant le type ν , si \mathcal{F} est un développement complet de E satisfaisant à la condition que, quel que soit l'élément X de $\psi \mathcal{F}$, le type ordinal $tf(X)$ est identique avec le type ν ; si, par exemple, $\nu = 2, 3$, on parlera d'une bipartition ou d'une tripartition complètes de E .

B. Tripartition complète d'un ensemble ordonné dense. Solution d'un problème de M. Sierpinski.

Soient E un ensemble ordonné dense quelconque et D une tripartition complète de E .³² On va spécialiser la représentation, indiquée dans le § 8 B, des éléments de D .

1. Soit $\{l, m, n\}$ un ensemble ordonné composé de trois points absolument quelconques l, m, n tels que $l < m < n$ (par exemple $l = 1, m = 2, n = 3$); on va construire un système, $S(D)$, de complexes $(a_0 \dots a_\xi \dots)$ de la façon suivante:

Le complexe vide sera l'indice de l'élément E qui est, comme on sait, l'élément unique de $R_0 D$; autrement dit, E ne portera aucun indice dans la représentation qu'on va construire. Le complexe vide (c'est-à-dire, l'indice de E) sera un élément de $S(D)$ où il constituera "la première rangée" $R_0 S$ du système à construire $S(D)$.

Supposons que les éléments³³ de la famille $R_\xi D$ sont mis sous la forme $E_{(a_0 \dots a_\eta \dots)_{\eta < \xi}}$, les $(a_0 \dots a_\eta \dots)_{\eta < \xi}$ constituant un système $R_\xi S$ de complexes tels que a_η soit l, m ou n pour tout $\eta < \xi$ et tout $\xi < \alpha$, α étant un ordinal inférieur au rang γD du tableau ramifié D , et cela de façon que les conditions suivantes soient vérifiées:³³

$E^i = E_{(a_0^i \dots a_\xi^i \dots)_{\xi < \alpha_i < \alpha}}$, ($i = 1, 2$) étant deux éléments quelconques de l'intervalle $(., \alpha)_D$ tels que

$E^1 = E^2$, alors $(a_0^1 \dots a_\xi^1 \dots)_{\xi < \alpha_1} \equiv (a_0^2 \dots a_\xi^2 \dots)_{\xi < \alpha_2}$; par conséquent, $\alpha_1 = \alpha_2$;

(I) $E^1 \subsetneq E^2$, alors $(a_0^1 \dots a_\xi^1 \dots)_{\xi < \alpha_1} \supsetneq (a_0^2 \dots a_\xi^2 \dots)_{\xi < \alpha_2}$;

$E^1 E^2 = 0$, alors $(a_0^1 \dots a_\xi^1 \dots)_{\xi < \alpha_1} \parallel (a_0^2 \dots a_\xi^2 \dots)_{\xi < \alpha_2}$.³³

³²A propos de l'existence de D , voir le § 8 B et la section C qui va suivre.

³³Pour la terminologie et les notations, voir le § 8.

On va désigner les éléments de la famille $R_\alpha D$; les indices ainsi obtenus constitueront le système $R_\alpha S$. Soit donc X un élément quelconque de $R_\alpha D$; on a deux cas:

1° α est de première espèce. Si alors $E_{(a_0 \dots a_\xi \dots)_{\xi < \alpha-1}}$ est l'élément de $R_{\alpha-1} D$ contenant l'ensemble considéré X , on posera $X = E_{a_0 \dots a_\xi \dots a_{\alpha-1}}$, $a_{\alpha-1}$ étant ou bien le point l ou bien le point m ou bien le point n suivant que X est le premier, le second ou le troisième élément de l'ensemble ordonné $f(E_{(a_0 \dots a_\xi \dots)_{\xi < \alpha-1}})$.

2° α est de seconde espèce. On posera $X = E_{(a_0^1 \dots a_\xi^{\xi+1} \dots)_{\xi < \eta}}$ est l'élément Y de $R_\eta D$ tel que $Y \supset X$ pour tout $\eta < \xi$. Dans les deux cas, le système des complexes construits $(a_0 \dots a_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$ sera désigné par $R_\alpha S$.

La construction précédente étant possible pour tout $\alpha < \gamma D$, on voit que les éléments de D sont représentés sous la forme $E_{(a_0 \dots a_\xi \dots)_{\xi < \alpha}}$, ($\alpha < \gamma D$), les indices $(a_0 \dots a_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$, ($\alpha < \gamma D$), parcourant le système $S(D)$ défini par la réunion des complexes des systèmes partiels $R_\alpha S$, ($\alpha < \gamma D$). De plus, on voit que la correspondance entre les éléments de D et ceux de $S(D)$ est biunivoque et satisfait aux conditions (I) quels que soient les éléments E^1 et E^2 de D .

Remarque 1. Le système $S(D)$ qu'on vient de construire ne contient aucun complexe de rang γD , autrement dit, le rang du tableau ramifié $S(D)$ de complexes construits est non pas $\gamma D + 1$ mais γD .³⁴

Notons encore une fois, que les éléments du système $S(D)$ sont de la forme $(a_0 \dots a_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$, ($\alpha < \gamma D$), les a_ξ étant l , m ou n .

Or, D étant un tableau ramifié complet d'ensembles, d'après le lemme 8.17, tout point de l'ensemble $\sum D$ qui est, dans notre cas, identique avec E , est un élément de D . Par conséquent, aux points de l'ensemble ordonné E correspond par les transformations (I) un système partiel du système construit $S(D)$; en le désignant par $S^0(D)$, on voit que $S^0(D)$ est parfaitement déterminé et caractérisé par cette condition: $S^0(D)$ est le système de tous les complexes $(a_0 \dots a_\xi \dots)$ extraits du système $S(D)$ qui ne sont une partie (portion) initiale d'aucun autre complexe de $S(D)$. En particulier, $A^i = (a_0^i \dots a_\xi^i \dots)_{\xi < \alpha_i}$, ($i = 1, 2$), étant deux complexes appartenant à $S^0(D)$, on voit qu'il existe un nombre ordinal $\varphi = \varphi(A^1 A^2)$ tel que $a_\xi^1 = a_\xi^2$ pour tout $\xi < \varphi$ tandis que a_φ^1 et a_φ^2 sont deux points distincts de l'ensemble

³⁴Rappelons que le rang γD d'un tableau ramifié D est le type ordinal (et non pas la borne supérieure) des nombres α tels que $R_\alpha D > 0$.

ordonné $\{l, m, n\}$ des points l, m, n . On a donc ou bien $a_\varphi^1 < a_\varphi^2$ ou bien $a_\varphi^2 < a_\varphi^1$.

2. Le système $S^0(D)$ peut être ordonné alphabétiquement; autrement dit, $A^i = (a_0^i \dots a_\xi^i \dots)_{\xi < \alpha_i}$, ($i = 1, 2$) étant deux éléments distincts quelconques de $S^0(D)$, si l'on convient que le signe $A^1 < A^2$ ou $A^2 > A^1$ voudra dire que $a_\varphi^1 < a_\varphi^2$ dans $\{l, m, n\}$, φ désignant le nombre ordinal $\varphi(A^1, A^2)$, on s'assure que $S^0(D)$ devient un ensemble ordonné.

Résumons: b étant un point quelconque de E , désignons par $k(b)$ le complexe du système $S^0(D)$ défini par $b = E_{k(b)}$; alors, $k(b)$ établit une correspondance biunivoque entre les ensembles E et $S^0(D)$; de plus, le système $S^0(D)$ peut être ordonné alphabétiquement. Or, on voit que la correspondance $k(b)$ est une similitude des ensembles ordonnés E et $S^0(D)$ c'est-à-dire que, si $b \leq c$ dans E , alors $k(b) \leq k(c)$ dans $S^0(D)$. Ceci est bien évident si l'on regarde la façon dont on a construit les complexes du système $S^0(D)$.

Ceci étant, supposons que l'ensemble E soit encore tel que $p_0 E \leq \aleph_\beta$ ³¹; alors d'après le lemme précédent, on a $\gamma D \leq \omega_{\beta+1}$. D'autre part, d'après la remarque 1, le système $S(D)$ (donc $S^0(D)$ non plus) ne contient aucun complexe de rang $\omega_{\beta+1}$. Désignons par $S^m(D)$ le système des complexes de rang $\omega_{\beta+1}$ et de la forme $(Am \dots m \dots)$ ³⁵, A parcourant les complexes appartenant à $S^0(D)$. Il est clair que le système $S^m(D)$ peut être ordonné alphabétiquement et que les ensembles $S^0(D)$ et $S^m(D)$ sont semblables. Par conséquent, les ensembles ordonnés E et $S^m(D)$ sont semblables.

Or, l'ensemble $S^m(D)$ est un sous-ensemble de l'ensemble $H_{\beta+1}$ défini à la fin du § 5³⁶.

Autrement dit, E étant un ensemble ordonné dense tel que $p_0 E \leq \aleph_\beta$, l'ensemble E est semblable à un sous-ensemble de l'ensemble $H_{\beta+1}$ défini à la fin du § 5³⁶.

Soit maintenant E un ensemble ordonné infini quelconque; en désignant par E^0 l'ensemble ordonné qu'on déduit de E en comblant les sauts éventuels de E par des ensembles ordonnés de type η , on voit que E^0 est un ensemble dense tel que $E \subseteq E^0$ et $p_0 E^0 = p_0 E$. On en conclut ce

LEMME 2. β étant un nombre ordinal et E un ensemble ordonné quelconques tels que $p_0 E \leq \aleph_\beta$, l'ensemble E est semblable à un sous-ensemble de l'ensemble $H_{\beta+1}$ défini à la fin du § 5³⁶.

³⁵Si $A = (a_0 \dots a_\xi)_{\xi < \alpha}$, il va sans dire que le signe $(Am; m)$ veut dire $(a_0 \dots a_\xi \dots m \dots m \dots)$.

³⁶Voir aussi la remarque 9.1.

Par conséquent, sous la même hypothèse, on a $pE \leq pH_{\beta+1}$. Or, d'après la corollaire 5 · 1, on a $pH_{\beta+1} \leq 2^{\aleph_\beta}$; on en déduit, en prenant $p_0E = \aleph_\beta$, ce

THÉORÈME 1. *Quel que soit l'ensemble ordonné E , on a $pE \leq 2^{p_0E}$.*

Remarque 2: Le théorème précédent redonne, en particulier dans le cas où $p_0E \leq \aleph_0$, la réponse affirmative au problème suivant de M. Sierpinski: "Un ensemble ordonné (linéairement) dont tous les sous-ensembles bien ordonnés (croissants ou décroissants) sont au plus dénombrables, a-t-il nécessairement une puissance non-supérieure à celle du continu?" (Fund. Math. 2, p. 28, problème 12). P. Urysohn en a donné la réponse affirmative; d'après une remarque de M.F. Hausdorff, la solution du problème aussi bien que le théorème précédent lui-même se trouvent implicitement dans le livre cité: G.M. (Voir, P. Urysohn, Fund. Math. 5, 1924, p. 14 et vol. 6, 1925, p. 278).

C. ϑ -partitions complètes des ensembles ordonnés continus. Ensembles ordonnés normaux.

E désignera un ensemble ordonné continu quelconque; D sera une ϑ -partition complète quelconque de E .

1. A propos de l'existence de D , faisons tout d'abord cette remarque: Soient E, F deux ensembles ordonnés continus tels que $E \subseteq F$; il existe une et une seule famille disjonctive $f(E)$ de portions non-vides E_α de E vérifiant ces conditions:

1° A tout point a de F correspond un élément E_α de $f(E)$ tel que $a \in E_\alpha$;

2° a parcourant les points de F , on a $\sum_a E_\alpha = E$.

On peut alors dire que $f(E)$ est une *décomposition de E suivant F* . On voit facilement que, pour un point donné a de F , la portion correspondante E_α est déterminée comme suit:

Si a est le premier point de F , E_α est la portion gauche de E située à gauche de l'ensemble $(a, \cdot)_F$ des points de F qui sont à droite de a ;

Si a est le dernier point de F , E_α est la portion droite de E située à droite de l'ensemble $(\cdot, a)_F$ des points de F qui sont à gauche de a ;

Si a n'est ni premier ni dernier point de F , E_α est la portion de E située entre les ensembles $(\cdot, a)_F$ et $(a, \cdot)_F$.

Ceci étant, appliquons ce procédé: à chaque segment S d'un ensemble continu E tel que $pS > 1$, on fera correspondre un ensemble $\varphi(S) \subseteq S$ dont le type ordinal est égal à ϑ ; de plus, désignons par $f(S)$ la décomposition

de S suivant $\varphi(S)$, c'est-à-dire $f(S)$ est une famille disjonctive de portions de E chacune contenant un et un seul point de $\varphi(S)$ et étant de plus telles que $\sum f(S) = S$.

Désignons par R_0D la famille composée de l'ensemble E lui-même; supposons que les familles $R_\xi D$ d'ensembles sont définies pour tout $\xi < \alpha$ et qu'il y a au moins un point de E qui n'est un élément d'aucune des familles $R_\xi D$ et que les familles $\psi R_\xi D$ sont composées des segments de E , pour tout $\xi < \alpha$; définissons la famille $R_\alpha D$ comme suit:

Si α est de première espèce, $R_\alpha D$ désignera la famille-réunion des familles $f(S)$, S parcourant les éléments de la famille $\psi R_{\alpha-1} D$, c'est-à-dire $R_\alpha D = \sum'_S f(S)$, $S \in \psi R_{\alpha-1} D$; si α est de seconde espèce, $R_\alpha D$ désignera la famille des ensembles $\prod_{\xi < \alpha} E_0 \dots E_\xi$, les E_ξ étant tels que $E_\xi \in R_\xi D$ et $E_\xi \subseteq \prod_{\eta < \xi} E_0 \dots E_\eta$.

En désignant par γD le type ordinal de l'ensemble des ordinaux α tels que $R_\alpha D \supset 0$, on posera $D = \sum'_{\alpha < \gamma D} R_\alpha D$ (voir la note 1 · 2).

2. D est une ϑ -partition complète de E sur laquelle on va raisonner.

D étant un développement complet de E , tout point a de E est un élément de D ; par conséquent, $a \in E$ étant donné, le nombre $\nu(a)$ tel que l'ensemble composé du point a appartient à $R_{\nu(a)} D$ est parfaitement déterminé; de plus, il est clair que $\nu(a) > 0$.

Désignons par E_1 l'ensemble de tous les points a de E tels que le nombre $\nu(a)$ soit de première espèce, et par E_2 l'ensemble des points a de E tels que $\nu(a)$ soit un ordinal de seconde espèce. Il est clair que E_1 et E_2 sont deux sous-ensembles disjoints de E (dont l'un peut être vide) et que $E_1 + E_2 = E$.

Ceci étant, désignons par F_2 l'ensemble des extrémités des segments de E appartenant au tableau ψD . On voit que, si ψD est infini, l'ensemble F_2 et la famille ψD ont une même puissance.

Or, l'ensemble F_2 est partout dense sur l'ensemble E_2 .

En effet, soit a un point de E_2 et I un intervalle de E contenant le point a ; il s'agit de prouver que I contient un point de F_2 . Remarquons, tout d'abord, que, a étant un élément de D , la famille \mathcal{F} des éléments de ψD contenant le point a est telle que $a = \prod \mathcal{F}$. Par conséquent, il y a au moins un élément de \mathcal{F} c'est-à-dire un segment de E qui est entièrement contenu dans l'intervalle I .

D'autre part, considérons la famille ψD , et soit S un élément quelconque de ψD ; d'après la convention ci-dessus, $\varphi(S)$ désigne un sous-ensemble de S ayant le type ordinal ϑ ; par conséquent, l'ensemble $\varphi(S)$

est séparable c'est-à-dire $p_1\varphi(S) = \aleph_0$; désignons par $\varphi_0(S)$ n'importe quel sous-ensemble dénombrable de $\varphi(S)$ partout dense sur l'ensemble $\varphi(S)$.

Ceci étant, posons $F_1 = \sum_S \varphi_0(S)$, S parcourant les éléments de ψD . Tout d'abord, l'ensemble F_1 est partout dense sur l'ensemble $\sum_S \varphi(S)$, S parcourant ψD . D'autre part, l'ensemble $\sum_S \varphi(S)$, parcourant ψD , est partout dense sur l'ensemble E_1 défini plus haut parce que, tout point de E_1 appartient à au moins un $\varphi(S)$. Il s'en suit que l'ensemble F_1 est partout-dense sur l'ensemble E_1 .

En posant, $F = F_1 + F_2$, on obtient ce résultat:

L'ensemble F est partout dense sur l'ensemble considéré E .

Or, on voit que $pF_1 = \aleph_0.p\psi D$ et que $pF_2 = (p\psi D)^{32}$. On en conclut que $pF = \aleph_0.p\psi D$, par conséquent $p_1E \leq \aleph_0.p\psi D$.

LEMME 3. $p_1E = \aleph_0.p\psi D$.

Tout d'abord, en désignant par $\psi_d D$ la famille des ensembles distincts A, B et $A-B$, les A, B parcourant ψD , rappelons que $b'\psi D$ signifie la borne supérieure des $p\mathcal{F}$, \mathcal{F} parcourant la classe des sous-familles disjonctives de $\psi_d D$. On démontre facilement ce

LEMME 4: $p_2E = \aleph_0.b'\psi D$.

Passons à la démonstration du lemme 3; on peut supposer que ψD est infini. Puisque, évidemment, $p_2E \leq p_1E$, le lemme 3 sera vrai toutes les fois que $b'\psi D = p\psi D$. Or, d'après les résultats du § 11, la dernière égalité aura lieu toutes les fois que les nombres $\gamma\psi D$, $p\psi D$ ne sont pas respectivement de la forme $\omega_{\beta+1}$, $\aleph_{\beta+1}$, ($\beta \geq 0$). Supposons maintenant que $\gamma\psi D = \omega_{\beta+1}$, $p\psi D = \aleph_{\beta+1}$, ($\beta \geq 0$), et admettons, pour aboutir à la contradiction, qu'il existe un sous-ensemble G de E ayant la puissance $< \aleph_{\beta+1}$ et partout dense sur E . Le tableau D étant complet, tout point de G est un élément de D . Puisque $pG < \aleph_{\beta+1}$, il y a un nombre α tel que $G \subset (., \alpha)_D$. Si l'on désigne alors par A un segment quelconque de E appartenant à $R_\alpha D$, on voit qu'aucun intervalle de E contenu dans A ne contient aucun point de G , ce qui est incompatible avec l'hypothèse que G est partout dense sur E . c.q.f.d.

Corollaire 1. Toutes les fois que $b'\psi D = p\psi D$, on aura $p_1E = p_2E$.

Bref, le problème si l'on a identiquement $p_1E = p_2E$ se ramène au problème si l'on a identiquement $b'T = pT$ pour tout tableau ramifié infini (la réciproque est encore vraie: voir l'inclusion $P_5 \rightarrow P_3$ du Complément).

3. En s'appuyant sur les résultats du § 11, les lemmes 3 et 4 de ce § et le lemme 7 · 10, on obtient la proposition suivante dans laquelle E désigne un ensemble ordonné quelconque:

THÉORÈME 2. On a ou bien $p_1 E = p_2 E$ ou bien $p_2 E, p_1 E$ sont deux alephs consécutifs tels que $p_2 E < p_1 E$; dans le dernier cas on a $p_0 E = p_2 E$.

Résumons quelques résultats de ce § et du § 7;

THÉORÈME 3. Pour tout ensemble ordonné infini E tel que $p_1 E = p_2 E$ on a $p_0 E \leq p_1 E = p_2 E \leq p_3 E = p_4 E = p_5 E \leq p E < 2^{p_0 E}$; si, en plus, E est dense, $p_2 E = p_3 E$.

4. Un ensemble ordonné E sera dit normal s'il existe une famille disjointive d'intervalles non-vides de E ayant la puissance $p_1 E$. Dans le prochain §, on confrontera les notions de: tableaux ramifiés et ensembles ordonnés, normaux: pour le moment, voilà un résultat qui découle du théorème 11 · 3 et des lemmes précédents:

LEMME 5. Si $p_1 E$ est singulier, E est normal.

D. Sur le continu linéaire et un problème de Souslin.

1. L'un des premiers résultats fondamentaux de la théorie des ensembles ordonnés était le

*Théorème de Georg Cantor*³⁷:

a) Deux ensembles ordonnés, denses, anti-limités et dénombrables sont semblables, et ont, par conséquent, le même type d'ordre η que l'ensemble des nombres rationnels;

b) Deux ensembles ordonnés connexes, anti-limités et séparables sont semblables, et ont, par conséquent, le même type ordinal λ que l'ensemble des nombres réels³⁸;

c) Deux ensembles ordonnés partout lacunaires, anti-limités, denses et dont chacun a une infinité dénombrable de lacunes, sont semblables, et ont, par conséquent, le même type ordinal ι que l'ensemble des nombres irrationnels.

Théorème sur le continu mathématique. E étant un ensemble ordonné, soient A_i^j les hypothèses suivantes:

A^0 . E a le même type ordinal que l'ensemble des nombres réels x tels que $0 \leq x \leq 1$;

A^1 . E est continu et irréductible³⁹;

³⁷Ges. Abhandl. p. 310.

³⁸Problème: Existe-t-il une famille \mathcal{F} d'ensembles ordonnés tels que l'ensemble E des types ordinaux tF , F parcourant \mathcal{F} soit un ensemble ordonné du type λ ? La question analogue se pose aussi pour des types dimensionnels de M. Fréchet d'ensembles appartenant à une certaine classe d'espaces abstraits.

³⁹Un E continu est irréductible si tout sous-ensemble continu de E est semblable à E .

A_1^2 . E est continu et tel que $p_i E = \aleph_0$, ($i = 1, 5$);

A^3 . E est continu et distanciable;

A^4 . E est dense, limité, distanciable et complet⁴⁰;

A^5 . E est dense, distanciable et compact en soi.

Les propositions A^0 , A^1 , A_1^2 , A_5^2 , A^3 , A^4 , A^5 sont, deux à deux, logiquement équivalentes, et, par conséquent, chacune d'elles caractérise le type ordinal φ du continu linéaire.

Le théorème sera démontré par ce schème de conclusions

$$A^5 \rightarrow A^4 \rightarrow A^3 \rightarrow A_1^2 \rightarrow A_5^2 \rightarrow A_1^2 \rightarrow A^1 \rightarrow A^0 \rightarrow A^5$$

$A^5 \rightarrow A^4$. Tout d'abord, E étant compact en soi, il est limité. Il s'agit alors de prouver que, sous l'hypothèse A^5 , E est complet. E étant compact en soi, toute suite de points de E satisfaisant au critère de convergence de Cauchy est convergente parce qu'elle admet un seul point d'accumulation.

$A^4 \rightarrow A^3$. Il s'agit de prouver que E est non-lacunaire. Supposons, par absurde, que $E = A + B$, $A \supset 0$, $B \supset 0$, que A soit à gauche de B et que A n'ait pas un dernier point ni B un premier. Soit a_n , ($n = 1, 2, \dots$), une suite strictement croissante de points de A confinale avec A (E étant distanciable, il est clair qu'une telle suite de points a_n existe). On vérifie aisément que les points a_1, a_2, \dots sont tels que, ε étant un nombre réel quelconque, il y a un entier k tel que la distance entre a_n et $a_{n'}$ soit $< \varepsilon$ quels que soient les entiers n, n' dépassant k . Par conséquent, E étant complet, la suite de Cauchy a_1, a_2, \dots convergerait vers un point a de E . Il est évident que a serait soit le dernier point de A soit le premier point de B , contrairement à notre supposition.

$A^3 \rightarrow A_1^2$. C'est une conséquence du théorème 6 · 6.

Que $A_1^2 \rightarrow A_5^2 \rightarrow A_1^2$, c'est évident.

$A_1^2 \rightarrow A^1$. Prouvons que E est irréductible. En effet, E étant séparable, chacun de ses sous-ensembles l'est aussi; en particulier, tout sous-continu F de E est séparable et, à la suite du théorème de Cantor, semblable à E .

L'inclusion $A^1 \rightarrow A^0$ est une conséquence du fait que tout ensemble ordonné continu contient un continu séparable, ce qu'on vérifie aisément.

Enfin, l'inclusion $A^0 \rightarrow A^5$ est évidente.

⁴⁰C'est-à-dire: chaque suite de Cauchy de points de E est convergente (a un et un seul point d'accumulation appartenant à E). (Voir E. A. p. 74).

2. Désignons par A_i^2 l'hypothèse que E est un ensemble ordonné continu tel que $p_i E = \aleph_0$, ($i = 2, 3, 4$); il est clair que $A_1^2 \rightarrow A_2^2 \rightarrow A_3^2 \rightarrow A_4^2 \rightarrow A_2^2$ mais on ne sait pas si $A_2^2 \rightarrow A_1^2$ ou, ce qui revient au même, si $A_3^2 \rightarrow A_1^2$; c'est précisément le célèbre problème de Souslin dont voici l'énoncé originel:

"Un ensemble ordonné (linéairement) sans sauts et sans lacunes possédant cette propriété que tout ensemble d'intervalles⁴¹ (contenant plus d'un point) n'impieçant pas les uns sur les autres est toujours au plus dénombrable, est-il nécessairement un continu linéaire (ordinaire)?" (Fund. Math. 1, 1920, p. 223, problème 3).⁴²

D'après les résultats des deux derniers §§, l'hypothèse que tout tableau ramifié de puissance \aleph_1 est normal (ou ce qui revient au même que toute suite distinguée de rang ω_1 admet une descente disjonctive) entraîne la réponse affirmative au problème de Souslin (dans le § suivant, on verra que la réciproque est encore vraie). Remarquons que la réponse affirmative au problème miraculeux, I ou II, du § 10 entraîne la réponse affirmative au problème de Souslin (nous ne savons pas si la réciproque est vraie).

Pour plus de détail, voir le Complément.

A cause de l'inclusion $A^3 \rightarrow A^0$, il suffirait, pour obtenir la réponse affirmative au problème de Souslin, de prouver que, sous l'hypothèse A_2^2 , E est distanciable (ou même, comme on peut le démontrer, une classe (\mathcal{E}) de M. Fréchet.⁴³

3. Pour terminer, énonçons ce

THÉORÈME DE HUNTINGTON⁴⁴. Pour qu'un ensemble E soit isomorphe de l'ensemble R des nombres réels⁴⁵, il faut et il suffit que ces conditions A, B, C soient vérifiées:

A) Il y a une relation d'ordre $<$ par rapport à laquelle E est ordonné, connexe et anti-limité;

B) Il y a un mode de composition $+$ entre les couples des points de E par rapport auquel E est un groupe abélien (additif);

⁴¹Nous dirions "de segments".

⁴²Parlant du problème de Souslin, M. W. Sierpinski écrit "... et ce problème semble très difficile" (N. T. p. 153).

⁴³E. A. p. 214.

⁴⁴Trans. Am. Math. Soc. 6, 1905, p. 17-41.

⁴⁵C'est-à-dire tel que, entre E et R , on ait une similitude par rapport à laquelle l'addition (et, par conséquent, les autres opérations élémentaires aussi) des nombres soit invariante.

C) En désignant par z le zéro⁴⁶ du groupe E relatif à la composition $+$, alors: quels que soient les points a, b de E tels que $a \geq z$ et $b \geq z$, on aura $a + b \geq a$.

Remarques. 1° L'analyse de la démonstration de M. W. Huntington⁴⁴ du théorème précédent montre que les nombres réels sont des symboles très commodes pour *désigner et distinguer* des points de différents ensembles (intervenant dans les Mathématiques classiques); dans l'état actuel de la Science, ils ne suffisent plus à ce but; pour remédier à cela, on a introduit des ensembles ordonnés, ramifiés, etc.

2° En analysant les démonstrations de théorèmes de l'Analyse concernant les *fonctions continues réelles*, on se rend compte que, presque toujours, on se sert seulement de la propriété A) de l'ensemble des nombres réels. Par conséquent, on aura un grand nombre de propriétés des fonctions continues réelles qui seront valables pour des fonctions continues dont les arguments et valeurs appartiennent à un ensemble ordonné connexe quelconque.

3° En introduisant, dans sa Thèse, la notion d'*espaces distanciés*, M.M. Fréchet a fait jouer aux nombres réels non-négatifs un rôle nouveau⁴⁷: d'organiser les sous-ensembles d'un ensemble E de points: c'est-à-dire d'exprimer, F étant un sous-ensemble de E , la proximité d'un point de E de l'ensemble F et de définir ainsi les points d'accumulations de F . L'analyse de la théorie des espaces distanciés montre qu'un rôle analogue peut être joué par des points de *n'importe quel groupe abélien ordonné (condition A et B)*⁴⁸ ou même par des points d'un ensemble ordonné quelconque ayant un premier point⁴⁹.

C'est dans cette direction aussi bien que dans celle de voir les *liens entre les notions de groupes et d'espaces abstraits*⁵⁰ que nous publierons prochainement un travail⁵¹.

⁴⁶C'est-à-dire l'élément (unique) x de E tel que, quel que soit le point a de E , on ait $x + a = a + x = a$; d'après la théorie générale des groupes z existe et est bien déterminé.

⁴⁷Voir E. A. 61.

⁴⁸Voir W. Krull, Journal für Math. 167, 1932, p. 160-196.

⁴⁹Comp. la note (2·15) et la notion des espaces pseudo-distancié dans la Note aux C. R. 198, 1934 p. 1563.

⁵⁰Et rapprocher ainsi les idées de E. Galois et M. Fréchet.

⁵¹Cf. D. van Dantzig, Math. Ann., 107, 1932, p. 587-626.

NOTATIONS¹

$(., a), (., a], (a, b), [a, b], (a, .), [a, .)$: 1·5 et 8·A·6; $[a]$: 8·A·5 $(., \alpha)_T$, $(., \alpha]_T$: $N8 \cdot 16'$; bT : 11·1; $b'T$: 11·4; γT : 8·A·9; $\gamma'T$: 8·A·11; eT : 8·A·7; $f(X)$: 12·A·2; $\varphi(A^1 A^2)$: 5·1; $\psi\mathcal{F}$: 12·A·1; H_ξ : 5·5 et la Rem. 9·1; lE , lE : 3·VII; mT : 8·A·10; pE : $N1 \cdot 1$; $p_i E$, ($i = 0, 1, \dots, 5$): 7·1; $R_\alpha T$: 8·A·9; sE , SE : 3·VII; σ_0 : 9·5; σE : 10·2; $\sum \mathcal{F}$, $\sum' \mathcal{F}$: $N1 \cdot 2$; T^d : 11·4; $\tau\alpha$: 2A et 2B; uE , vE , VE , wE : 3·VII.

INDEX¹

- Ambigu* (Tableau), 8·A·11.
Alphabétiquement ordonné, 1·15.
Anti-limité, 1·7.
Atteint (Rang) 9.
Bipartition (complète), 12·A·2.
Borne supérieure (et inférieure), 1·7.
Borné supérieurement (et inférieurement), 1·7.
Coextensif, 1·13.
Complet (Développement), 8·B·2.
Complètement ramifié, 8·A·13.
Complexe de points, 5·1.
Coïntial, 1·13.
Confinal, 1·13.
Connexe (et mutuellement -), 1·9.
Continu, 1·12.
Coupure, 1·10.
Dégénéré (Ensemble ramifié), 8·A·4.
Degré (de cellularité), $NC \cdot 11$, (de séparabilité). $NC \cdot 11$.
Dense, 1·9, (en soi), 1·9, (Partout), 1·9.
Descente (disjonctive, monotone), 9.
Développement complet, 12·A·1.
Disjonctif, 8·A·2 et 8·A·4.
Disjonctive (Famille), 7·1.
Distinguée (Suite ramifiée), 10·3 et C·4.
Ensemble (disjonctif), 8·A·4, (ordonné), 1·4, (bien ordonné), 1·8, (partiellement ordonné), $NC \cdot 1$, (ramifié), 8·A·4 et $NC \cdot 1$, (ramifié dégénéré), 8·A·4.
Espace, (ordonné). 1·9, (-tableau), 8·A·7.
Etroit (Tableau), 8·A·11.
Famille (disjonctive), 7·1, (monotone), 4·1, (ramifiée), 8·B·1.

¹Les numéros renvoient aux sections des §§ où figurent les définitions des expressions et symboles considérés; ainsi, par exemple, mT : 8·A·10 voudra dire que la définition de mT se trouve dans le numéro 10 de la section A du § 8. De plus, si la définition de X se trouve dans la Note q du § p , on écrira X : $Np \cdot q$. Enfin, la lettre C désignera le Complément.

Fermé (Ensemble), 1 · 9.

Fonction rétractante, 2 · 3.

Homogène (Tableau), $N10 \cdot 3$.

Hypothèse (de Cantor), 2 · B, (de ramification), $C \cdot 3$, (P_i , $i = 1, \dots, 12$ et (Q)), $C \cdot 3$, (du continu), 2 · B.

Inaccessible (Nombre), 2 · A.

Induction (linéaire, complète), 3 · IV.

Inertie (d'ordonnance), $C \cdot 2$ et les hypothèses P_6 , P_7 .

Incompatibles (Relations), $N8 \cdot 2$.

Incomparable, 1 · 14 et 8 · A · 1.

Initial (Nombre), 2 · A · 2.

Isolé, 1 · 9.

Intercalation (latérale), 10 · 4, (longitudinale), 11 · 5.

Intervalle ($(., a)$, $(a, .)$, $(a, b,)$), 1 · 5 et 8 · A · 6, $((., \alpha)_T)$, $N8 \cdot 16'$.

Lacune, 1 · 10, (intérieure), 1 · 10.

Lacunaire, 1 · 10, (Partout), 1 · 12.

Large (Saut), 4 · 3, (Tableau), 8 · A · 11.

Largeur (d'un tableau) 8 · A · 10.

Limité (Ensemble ordonné), 1 · 7.

Longueur, longueur réduite, 8 · A · 10.

Monotone (Ensemble, Famille), 4 · 1 et 8 · A · 4.

Noeud, 8 · A · 6, 8 · A · 13.

Nombre (ordinal, cardinal), 2 · A, 2 · B, (initial, régulier, singulier, inaccessible), 2 · A · 2.

Normal (Ensemble ordonné), 12 · C · 4, (Tableau), 11 · 1.

Ordre (Famille), 4 · 2.

Ordonnance (alphabétique), 1 · 15, (naturelle), 8 · C · 2, C · 1.

Portion, 1 · 6, 8 · A · 5, (élémentaires), 1 · 6.

Principe, (de l'induction linéaire, complète), 3 · IV.

Propriété de Lebesgue-Khintchine, 3 · IV.

Pseudo-rang $\gamma'T$ (d'un tableau), 8 · A · 11.

Procédé σ , 10 · 2.

Problème (miraculeux), I, II, III), 10 · 4, $N10 \cdot 3'$ et $C \cdot 2$, (de la structure cellulaire des espaces), $NC \cdot 11$.

Ramifié, (V. Ensembles).

Rang, 8 · A · 9, (non-atteint), 9 et $N10 \cdot 5$.

Rangée, 8 · A · 8 et 8 · A · 9.

Relation (de classification), 1 · 2, (de comparabilité), 8 · A · 2,

(d'ordre, d'ordre inverse), 1 · 4, (d'ordre partiel), $NC \cdot 1$, (de ramification [dégénérée]), 8 · A · 3.

Saut, 1 · 11, (large), 4 · 3.

Saturée (Famille), 4 · 4.

Semblable, 1 · 14, 10 · 1.

Séparable $N5 \cdot 5$.

Somme de relations, $N8 \cdot 3$.

Suite ramifiée, 8 · A · 12, (distinguée), 10 · 3, $C \cdot 4$, (σ_0) , 9 · 5, (prototypes) 9 · 3.

Tableau ramifié, 8 · A · 9, (d'ensembles), 8 · B.

Totalement (ramifié), 8 · A · 13.

Type (d'ordre), 1 · 14, (de ramification), 10 · 1, (- limite d'un nombre), 2.

Traverser (un tableau), 9.

ENSEMBLES LINÉAIRES ET UNE CLASSE DE TABLEAUX RAMIFIÉS (TABLEAUX RAMIFIÉS DE M. ARONSAJN)

Introduction

Le présent travail traitera des problèmes d'existence d'une certaine classe de tableaux ramifiés¹, appelés tableaux ramifiés de M. Aronszajn.

Rappelons quelques définitions et notations dont nous nous servirons constamment.

1. Soient E ensemble partiellement ordonné par rapport à une relation binaire $<$ et a un point de E ; nous désignerons respectivement par

$$(1) \quad (\cdot, a)_E, (\cdot, a]_E, (a, \cdot)_E, [a, \cdot)_E$$

l'ensemble de tous les points $x \in E$ tels que respectivement

$$(1') \quad x < a, \quad x \leq a, \quad a < x, \quad a \leq x$$

et poserons

$$(2) \quad [a]_E = (\cdot, a)_E + [a, \cdot)_E.$$

Autrement dit, $[a]_E$ est l'ensemble de tous les points de E comparables à a^2 .

2. *Tableaux ramifiés.* Un ensemble E partiellement ordonné par $<$ est un *tableau ramifié* par rapport à $<$ si, quel que soit le point a de E ,

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Publ. Math. Univ. Belgrade 6/7 (1937/38), 129-160

¹Pour la terminologie, voir Georges Kurepa, *Ensembles ordonnés et ramifiés* (Thèse, Paris, 1935 ou Publ. Math. Univ. Belgrade, IV, 1935, pp. 1-138); dans ce qui suit, ce Mémoire sera désigné par Thèse

²Deux points a, b de E sont *comparables* si $a < b$ ou $b < a$ ou $a = b$; autrement, a, b , sont *incomparables*.

l'ensemble $(\cdot, a]$ est un sous-ensemble *bien ordonné* de E . En particulier, une famille d'ensembles, \mathcal{F} , sera dite un *tableau ramifié décroissant* (croissant) *d'ensembles*³ si, quel que soit l'ensemble A appartenant à \mathcal{F} , la famille $(\cdot, A]_{\mathcal{F}}$ des $X \in \mathcal{F}$ tels que $X \supseteq A \subseteq X$ est *bien ordonnée* par rapport à la relation d'inclusion $\supset (\subset)$.

Dans ce qui suit, nous désignerons par

$$(3) \quad T$$

un tableau ramifié par rapport à une relation binaire quelconque $<$. Nous poserons

$$(4) \quad \gamma T = \sup tF,^4 \quad (\sup \equiv \text{borne supérieure}),$$

F parcourant tous les sous-ensembles bien ordonnés de T ; le nombre ordinal γT s'appelle *le rang de T* (v. Thèse, p. 74). Pour un ordinal quelconque $\alpha < \gamma T$,

$$(5) \quad R_{\alpha}T$$

désignera l'ensemble de tous les points a de T tels que $t(\cdot, a)_T = \alpha$;⁴ en particulier, R_0T sera l'ensemble de tous les *premiers* points de E .

L'ensemble $R_{\alpha}T$ s'appelle *la rangée α de T* ; en particulier, R_0T s'appelle encore la *première rangée de T* (cf. Thèse, pp. 72-74).

Manifestement,

$$(6) \quad \text{si } \alpha < \gamma T \text{ alors } R_{\alpha}T \neq 0$$

$$(7) \quad \sum_{\alpha} R_{\alpha}T = T, \quad (\alpha < \gamma T).$$

3. Tableaux ramifiés de M. Aronszajn. Un tableau ramifié T sera dit un *tableau ramifié de M. Aronszajn* s'il vérifie ces quatre conditions:

- a) $\gamma T = \aleph_0$;
- b) Tout sous-ensemble bien ordonné de T est au plus dénombrable;
- c) Chaque rangée de T est au plus dénombrable: $pR_{\alpha}T^5 \leq \aleph_0$, ($\alpha < \gamma T$);

³Dans Thèse nous n'avons considéré que des tableaux ramifiés décroissants d'ensembles.

⁴ $tX \equiv$ type d'ordre de X .

⁵ $pX \equiv$ puissance de X .

d) Quels que soient le point a de T et l'ordinal $\alpha < \gamma T$, la rangée $R_\alpha T$ contient un point comparable à a ; symboliquement, $[a]_T R_\alpha T \neq 0$, ($a \in T, \alpha < \gamma T$).

C'est l'étude du problème de Souslin qui nous a amené à des tableaux ramifiés de M. Aronszajn dont l'existence fut établie par M. Aronszajn⁶.

4. *Position du problème.* Comme nous venons de le dire cidessus, nous nous occuperons dans ce qui suit de l'existence des tableaux ramifiés de M. Aronszajn. En particulier, nous exposerons au chapitre I la profonde démonstration, due à M. Aronszajn, de la proposition suivante:

1^o *il existe une famille d'ensembles linéaires fermés*

$$F_{\alpha,k}, \quad (k < \omega, \alpha < \Omega)$$

satisfaisant aux conditions I, II, III que voici:

I. Pour tout $\alpha < \Omega$ et tout $k < l < \omega$, on a $F_{\alpha,k} \cdot F_{\alpha,l} = 0$;

II. Pour tout $\alpha < \alpha' < \Omega$, tout $F_{\alpha',l}$ est contenu dans un $F_{\alpha,k}$ sans coïncider avec celui-ci;

III. Pour tout $\alpha < \alpha' < \Omega$ et tout k , il existe un $F_{\alpha',l}$ tel que $F_{\alpha',l} \subset F_{\alpha,k}$ (l'égalité exclue!).

Bref, il existe un tableau ramifié décroissant de M. Aronszajn composé d'ensembles linéaires fermés.

Depuis un moment je fus hanté par le problème de l'existence d'un tableau ramifié de M. Aronszajn d'ensembles linéaires fermés, et, quelques jours avant de partir de Varsovie (vers la fin du mois d'avril 1937), j'avais cru avoir résolu la question par l'affirmative et avais composé là-dessus un article et transmis à la Rédaction des *Fundamenta Mathematicae*. Une dizaine de jours après, j'avais découvert une faute dans ma démonstration, faute qui se trouve aussi dans ma Thèse (pages 96 et 97 où par une fausse application du th. 6, p. 89, j'avais obtenu la proposition fausse constituant la remarque 2, p. 97, loc. cit.).

N'ayant pas pu rétablir la démonstration de la proposition 1^o ci-dessus, je me suis adressé à M. Aronszajn; M. Aronszajn y a réussi, et, fait curieux, deux jours après qu'il avait bien voulu m'exposer sa belle démonstration, j'ai appris, lors d'une conversation avec M. Denjoy, que, de sa part, l'illustre

⁶Voir ma Thèse, p. 96. Remarquons que tout T vérifiant b), c) contient un tableau ramifié de M. Aronszajn (cf. Thèse, p. 106); notons qu'un T de M. Aronszajn tel que, pour tout $a \in T$, il y ait une infinité de points $x \in T$ vérifiant $(\cdot, a)_T = (\cdot, x)_T$, (cf. (1)), fut appelé par nous une suite ramifiée distinguée de rang Ω (cf. Thèse, p. 99).

géomètre en s'occupant du problème de Souslin, avait été, dès le printemps 1936, en possession de la proposition 1⁰.

5. *Transformations et fonctions croissantes*⁷. Dans le chap. II, en nous servant d'un raisonnement constituant le développement du raisonnement des pages 96, 97 de Thèse, nous établirons quelques liens inattendus entre des ensembles linéaires non dénombrables, d'une part, et des tableaux ramifiés de M. Aronszajn, d'autre part.

Pour nous mieux expliquer, posons une définition⁷:

E_i étant un ensemble partiellement ordonné par ρ_i , ($i = 1, 2$), nous dirons qu'il existe une transformation croissante de E_1 en E_2 si l'on peut faire correspondre à tout point a de E_1 , un point bien déterminé $f(a)$ de E_2 de manière que, quels que soient les points x, y de E , la relation $x, \rho_1 y$ entraîne $f(x) \rho_2 f(y)$; dans le cas où E_2 est un ensemble linéaire, nous dirons que $f(a)$ ($a \in E_1$), est une fonction réelle croissante dans E_1 .

6. Ceci étant, voici ce qu'on peut établir:

2⁰ Quel que soit l'ensemble linéaire partout dense M de puissance $\leq \aleph_1$, il y a un tableau ramifié de M. Aronszajn, T , et une fonction réelle uniforme croissante dans T , soit $f(a)$, ($a \in T$), tels que $f(T) = M$;⁸ dans le cas où M est non dénombrable, la fonction f peut être supposée univalente (cf. n^o 29, théorème 3^{bis}).

3⁰ Quel que soit l'ensemble linéaire non dénombrable M , il y a un tableau ramifié de M. Aronszajn, T , et une fonction réelle biunivoque croissante dans M , soit f , tels que $f(T) \subseteq M$.⁸

Par conséquent, en détruisant partiellement, dans l'ensemble linéaire $f(M)$ l'ordre de celui-ci, on peut arriver à un tableau ramifié semblable à T : pour cela, il suffit de déclarer *incomparables* tout couple de points x, y de $f(M)$ dès que les points $f^{-1}(x)$ ⁹, $f^{-1}(y)$ de T .

7. Remarquons que, quel que soit le tableau ramifié de M. Aronszajn, T , il y a une transformation biunivoque croissante f , de T dans l'ensemble ordonné

$$(8) \quad (\cdot, \Omega)$$

⁷Voir Georges Kurepa, *Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés* C. R. Acad. Sci. Paris, 20, (1937)

⁸ $f(T) \equiv$ l'ensemble des $f(a)$, ($a \in T$).

⁹Pour un $x \in f(T)$, $f^{-1}(x)_T$ désigne l'ensemble des $a \in T$ tels que $f(a) = x$.

des nombres ordinaux $< \Omega$; pour s'en rendre compte, nous n'avons qu'à énumérer chaque rangée $R_\alpha T$ de T

$$R_\alpha T \cdots a_0^\alpha, a_1^\alpha, \dots, a_n^\alpha, \dots, \quad (n < \omega, a_m^\alpha \neq a_n^\alpha, m < n < \omega)$$

et poser $f(a_n^\alpha) = \omega\alpha + n$, ($n < \omega$, $\alpha < \Omega$).

Autrement dit, quel que soit le tableau ram. de M. Aronszajn il y a un "désordonnement" partiel de l'ensemble (\cdot, Ω) tel qu'on obtienne un ensemble partiellement ordonné, semblable à T et donc identique à T au point de vue d'ordre.

8. Or, ce qui est difficile c'est d'examiner la nature des désordonnements partiels variés de (\cdot, Ω) pour obtenir tous les tableaux ram. de M. Aronszajn.

Dans le chap. II nous indiquerons un procédé d'un désordonnement partiel de (\cdot, Ω) , (cf. n°26, proposition I_Ω), procédé qui nous fournira les propositions 2⁰, 3⁰ ci-dessus; il est remarquable que chacun des tableaux ramifiés de M. Aronszajn que nous obtenons par ce procédé-là contient un sous-ensemble non dénombrable de points deux à deux incomparables¹⁰, propriété très précieuse, étant donné que la condition nécessaire et suffisante pour que la réponse au problème de Souslin soit affirmative c'est que tout tableau ramifié de M. Aronszajn contient un sous-ensemble non dénombrable de points deux à deux incomparables¹¹.

En terminant, ajoutons que la présent travail est une partie d'un Mémoire que M^{lle} St. Braun a examiné de plus près; je tiens à la remercier bien vivement de toutes les remarques qu'elle a bien voulu me faire à ce propos.

I. Tableaux ramifiés d'ensembles fermés linéaires

9. *Généralités.* D'après un théorème bien connu de Baire, toute suite décroissante (croissante) d'ensembles fermés (ouverts) extraits d'un espace distanciabile séparable quelconque est au plus dénombrable¹²; d'autre part, un théorème, dû à M. Hausdorff, d'autre part, un théorème, dû à M. Hausdorff, dit que toute suite croissante (décroissante) d'ensembles fermés (ouverts) d'un espace distanciabile séparable est au plus dénombrable.

¹⁰Cf. *loc. cit.*⁷, théorème 1.

¹¹Cf. Thèse pp. 106, 124 et 132 (l'équivalence $P_2 \rightleftharpoons P_5$)

¹²Voir Maurice Fréchet, *Espaces abstraits*, Paris, 1928, p. 234.

On en déduit que, quel que soit le tableau ramifié décroissant (croissant), \mathcal{C} , d'ensembles linéaires fermés ou ouverts¹³, on a

$$(9) \quad \gamma\mathcal{C} \leq \Omega.^{13}$$

En ce qui concerne le cas des ensembles ouverts, on a le

THÉORÈME 1. *Tout tableau ramifié décroissant (croissant), \mathcal{C} , d'ensembles ouverts appartenant à un espace métrique séparable quelconque est au plus dénombrable¹⁴.*

Puisque, pour tout $\alpha < \gamma\mathcal{C}$, la famille $R_\alpha\mathcal{C}$ est composée d'ensembles ouverts deux à deux disjoints (voir (5)), on aura, à la suite d'un théorème de Cantor, $pR_\alpha\mathcal{C}^5 \leq \aleph_0$, ($\alpha < \gamma\mathcal{C}$); il s'agit encore de prouver que $\gamma\mathcal{C} < \Omega$ et non pas $\gamma\mathcal{C} = \Omega$ (voir (9)). En désignant, pour tout $\alpha < \gamma\mathcal{C}$, par E_α la réunion des éléments de $R_\alpha\mathcal{C}$, E_α sera un ensemble ouvert non vide tel que

$$E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_\alpha \supset \dots \text{ ou } E_0 \subseteq E_1 \subseteq \dots \subseteq E_\alpha \subseteq \dots, \quad (\alpha < \gamma\mathcal{C})$$

suivant que \mathcal{C} est décroissant ou croissant.

Si, l'on avait $\gamma\mathcal{C} = \Omega$, il y aurait, d'après le théorème de M. Hausdorff (Baire), un indice $\alpha_0 < \Omega$ tel que $E_{\alpha_0} = E_{\alpha_0+\xi}$, pour tout $\xi < \Omega$; en désignant par a un point de $E_{\alpha_0}(E_0)$, soit pour tout $\alpha < \Omega$, G_α l'élément de $R_\alpha\mathcal{C}$ contenant le point a ; la famille des G_α , ($\alpha < \Omega$) formerait une suite transfinie décroissante (croissante) non dénombrable d'ensembles ouverts, contrairement au théorème de M. Hausdorff (Baire).

10. Soit maintenant \mathcal{C} un tableau ramifié décroissant (croissant) quelconque d'ensembles fermés linéaires non vides; on aura $\gamma\mathcal{C} \leq \Omega$, et il est facile de construire un \mathcal{C} tel que

$$(10) \quad \gamma\mathcal{C} = \Omega.$$

Or, il y a une différence essentielle suivant que \mathcal{C} est croissant ou décroissant. Si \mathcal{C} est croissant, la relation (10) entraîne les deux propositions:

$$(11) \quad \gamma[A]_{\mathcal{T}} < \Omega, (A \in \mathcal{C}) \quad (\text{c'est que } [A]_{\mathcal{C}} \text{ est ordonné; v. (2)})$$

$$(12) \quad pR_\alpha\mathcal{C} > \aleph_0, (\alpha < \Omega).$$

Au contraire, si \mathcal{C} est décroissant, il est facile de réaliser le cas où $\gamma[A]_{\mathcal{C}} = \Omega$ pour tout $A \in \mathcal{C}$ (on aura donc aussi $\gamma\mathcal{C} = \Omega$); mais il est très intéressant qu'il peut arriver que $R_\alpha\mathcal{C}$ soit dénombrable pour tout $\alpha < \Omega$: nous en allons fournir un exemple remarquable dû à M. Aronszajn.

¹³Pour la terminologie et les notations, voir l'Introduction, n°2.

¹⁴Le théorème subsiste encore pour tout espace (V) de M. Fréchet définissable moyennant une famille au plus dénombrable de voisinages (voir¹²).

11. Tableaux de M. Aronszajn d'ensembles fermés linéaires.

THÉORÈME 2. *Il y a un tableau ramifié décroissant de M. Aronszajn composé d'ensembles fermés linéaires; explicitement, il y a une famille C d'ensembles fermés linéaires*

$$(13) \quad F_{\alpha, k}, \quad (k < \omega, \alpha < \Omega)$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

I Pour tout $\alpha < \Omega$ et tout $k < l < \omega$, on a $F_{\alpha, k} \cdot F_{\alpha, l} = 0$;

II Pour tout $\alpha < \alpha' < \Omega$, tout $F_{\alpha', l}$ est contenu dans un $F_{\alpha, k}$ sans coïncider avec celui-ci;

III Pour tout $\alpha < \alpha' < \Omega$ et tout $k < \omega$, il existe un $l < \omega$ tel que $F_{\alpha', l} \subset F_{\alpha, k}$ (égalité exclue!)¹⁵.

Démonstration due à M. Aronszajn du théorème 2¹⁵.

12. *Fonction $\delta(r, F)$.* Soit F un ensemble compact en soi extrait d'un espace métrique quelconque; r étant un nombre réel > 0 , posons, pour tout $a \in F$,

$$(14) \quad \delta(a, r, F) = \sup_x \rho(a, x), \quad (x \in F, \rho(a, x) \leq r);$$

bien entendu $\rho(a, x)$ désigne la distance des points a, x .

Soit

$$(14') \quad \delta(r, F) = \inf_{\alpha \in F} \delta(\alpha, r, F); \quad (\text{inf} = \text{borne inférieure}).$$

Evidemment, $0 \leq \delta(r, F) \leq r$.

LEMME 1. *Pour que, pour tout $r > 0$, $\delta(r, F) > 0$, il faut et il suffit que F soit parfait.*

La relation $\delta(a, r, F) > 0$ pour tout r réel > 0 signifiant que a est un point d'accumulation de F , prouvons que la condition du lemme est suffisante: F étant compact en soi et parfait, on a $\delta(r, F) > 0$ pour tout $r > 0$. Si l'on avait $\delta(r, F) = 0$, il existerait une suite de points de F

$$(15) \quad a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \text{ vérifiant } \delta(a_n, r, F) \rightarrow 0.$$

¹⁵Voir l'Introduction, n°4.

Puisque $\delta(a_n, r, F) > 0$ pour tout $n < \omega$, on en déduirait l'existence d'un point a de F (F étant compact en soi) et d'une suite de points extraits de (15)

$$(16) \quad a^0, a^1, \dots, a^n, \dots \text{ tels que } a^n \rightarrow a \text{ et } \delta(a^n, r, F) < \delta(a^{n+1}, r, F)$$

pour tout $n < \omega$; on aurait donc $\delta(a^n, r, F) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.

Soit b un point F tel que

$$(17) \quad 0 < \varrho(a, b) < \frac{1}{3}\delta(a, r, F);$$

si ν désigne un entier tel que

$$(18) \quad \varrho(a^n, a) < \frac{1}{2}\varrho(a, b), \quad b \neq a^n, \quad \nu \leq n < \omega,$$

les relations

$$\varrho(a, b) - \varrho(a, a^n) \leq \varrho(a^n, b) \leq (a^n, a) + \varrho(a, b)$$

donneraient

$$\frac{1}{2}\varrho(a, b) < (a^n, b) < \frac{3}{2}\varrho(a, b) \leq \frac{1}{2}\delta(a, r, F) \leq \frac{r}{2} < r$$

et, en particulier, $\frac{1}{2}\varrho(a, b) < \varrho(a^n, b) < r$, ce qui, vu (14), signifierait $\delta(a^n, r, F) > \frac{1}{2}\varrho(a, b) > 0$, ($\nu \leq n < \omega$), contrairement à ce que, par hypothèse, $\delta(a^n, r, F) \rightarrow 0$.

LEMME 2. Si $F_1 \subseteq F_2$, alors $\delta(a, r, F_1) \leq \delta(a, r, F_2)$ pour tout point $a \in F$; si $F_{n+1} \subseteq F_n$, ($n < \omega$) on aura, en posant $F = \prod_{n < \omega} F_n$.

$$(19) \quad \delta(a, r, F) = \lim_{n < \omega} \delta(a, r, F_n), \text{ pour tout } a \in F$$

$$(19') \quad \delta(r, F) = \lim_{n < \omega} \delta(r, F_n).$$

13. Voici une propriété intéressante liant la fonction $\delta(r, F)$ de M. Aronszajn avec la distance, au sens de Hausdorff, deux ensembles fermés¹⁶:

¹⁶ A, B étant deux ensembles bornés non vides extraits d'un espace métrique, la distance au sens de M. Hausdorff des ensembles A, B , symboliquement $\text{dist.}(A, B)$, est le plus grand des deux nombres $\sup_{x \in A} \rho(x, B)$ et $\sup_{y \in B} \rho(y, A)$; comme d'habitude, $\rho(a, X)$ désigne $\inf \rho(a, x)$, x parcourant X . Voir à ce sujet C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa-Lwow, 1934, pp. 86 et 89.

LEMME 3. F_1, F_2 étant deux ensembles compacts en soi extraits d'un espace métrique, quel que soit le nombre réel $\eta > 0$ la relation

$$(20) \quad \text{dist}(F_1, F_2) < \eta^{16}$$

it entraîne

$$(21) \quad \delta(r, F_1) \leq \delta(r + 2\eta, F_2) + 2\eta$$

$$(21') \quad \delta(r, F_2) \leq \delta(r + 2\eta, F_1) + 2\eta \quad (\text{voir (14')} \text{ et } ^{16}).$$

Tout d'abord, la relation (20) entraîne¹⁶, pour tout $a_2 \in F_2$, l'existence d'un $a_1 \in F_1$ tel que $\varrho(a_1, a_2) < \eta$; d'autre part, pour tout $r > 0$, il y a, F_1 étant compact en soi, un point $b_1 \in F_1$ tel que

$$(22) \quad \varrho(a_1, b_1) = \delta(a_1, r, F_1) \text{ et donc } 0 \leq \varrho(a_1, b_1) \leq r.$$

Soit b_2 un point de F_2 tel que $\varrho(b_1, b_2) < \eta$; les relations

$$\varrho(a_1, b_1) - \varrho(a_1, a_2) - \varrho(b_1, b_2) \leq \varrho(a_2, b_2) \leq \varrho(a_1, b_1) + \varrho(a_1, a_2) + \varrho(b_1, b_2)$$

entraînent

$$(23) \quad \delta(a_1, r, F_1) - 2\eta < \varrho(a_2, b_2) < \delta(a_1, r, F_1) + 2\eta.$$

En posant $\delta(a_1, r, F_1) = r_1$, la relation $\varrho(a_2, b_2) < r_1 + 2\eta$ donne $\varrho(a_2, b_2) \leq \delta(a_2, r_1 + 2\eta, F_2)$ et donc, puisque $r_1 \leq r$,

$$\varrho(a_2, b_2) \leq \delta(a_2, r + 2\eta, F_2)$$

ce qui, vu (23), entraîne

$$(24) \quad \delta(a_1, r, F_1) - 2\eta < \delta(a_2, r + 2\eta, F_2).$$

Dès lors, a_2 parcourant F_2 , on obtient (21). C.q.f.d.

14. LEMME 4. Dans tout ensemble parfait linéaire borné nulle part dense, F , il y a une suite de sous-ensembles parfaits $F_0, F_1, \dots, F_n, \dots$, ($n < \omega$) tels que $\text{dist}(F, F_n) \rightarrow 0$ it avec $n \rightarrow \infty$ et que $F_i F_k = 0$ pour tout $i < k < \omega$.

F étant homéomorphe de l'ensemble triadique C de Cantor formé des nombres $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i_k}{3^k}$, ($i_k = 0, 1$), il suffira de montrer le lemme 4 pour $F = C$. Or, en désignant par C_n l'ensemble de tous les nombres réels x tels que

$$x = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{2i_k}{3^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2^n(4k-1)}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i_k}{3^{2^n(4k+1)}},$$

on prouve que les ensembles C_1, C_2, \dots sont: parfaits, deux à deux disjoints et que $\text{dist}(C, C_n) \rightarrow 0$ avec $n \rightarrow \infty$.

15. Passons à la construction des ensembles $F_{\alpha, k}$ dont on parle dans le théorème 2. Pour commencer, soient $F_{\alpha, k}$, ($k < \omega$), les ensembles parfaits C_n appartenant à l'ensemble C de Cantor que nous venons de considérer; d'une manière générale, soit $0 < \beta < \Omega$ et supposons que, pour tout $\alpha < \beta$, l'on ait construit des ensembles parfaits $F_{\alpha, k}$, ($k < \omega$) et que la famille des $F_{\alpha, k}$, ($\alpha < \beta, k < \omega$) vérifie les conditions I_{β} , II_{β} , III_{β} qu'on déduit des conditions I, II, III en y remplaçant partout Ω par β ; supposons de plus que la condition suivante soit vérifiée:

III_{β}^{bis} . Quels que soient $\alpha < \alpha' < \beta$, il existe pour tout $F_{\alpha, k}$ et tout indice $n < \omega$, un $F'_{\alpha', l} \subset F_{\alpha, k}$ tel que

$$(25) \quad \text{dist}(F_{\alpha, k}, F'_{\alpha', l}) < \frac{1}{2^n}.^{16}$$

Construisons la famille \mathcal{C}_{β} des $F_{\beta, k}$.

Si β est de première espèce, désignons, pour tout $k < \omega$, par $\{F_{\beta-1, k}\}$ une certaine suite dénombrable de sous-ensembles parfaits de $F_{\beta-1, k}$, deux à deux disjoints et tels que

$$(26) \quad \text{dist}(F_{\beta-1, k}, F) \rightarrow 0, \quad F \text{ parcourant } \{F_{\beta-1, k}\};$$

alors, \mathcal{C}_{β} désignera la famille des éléments des $\{F_{\beta-1, k}\}$, k parcourant les indices $< \omega$.

Si β est de seconde espèce, soit

$$(27) \quad 0 = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n \dots$$

une suite d'indices croissants $< \beta$ tendant vers β . Prenons un $\alpha < \beta$ quelconque et soit

$$(28) \quad \beta_{i-1} \leq \alpha < \beta_i.$$

Pour un $F_{\alpha,k}$ quelconque et tout $n < \omega$, construisons la suite

$$(29) \quad F_{\alpha,k} \supset F_{\beta_i, l_i} \supset F_{\beta_{i+1}, l_{i+1}} \supset \dots$$

de manière que, en posant:

$$(30) \quad \delta_j(r) = \delta(r, F_{\beta_j, l_j}, 0), \quad (j \geq i)$$

$$(31) \quad \varrho_{i-1} = \text{dist}(F_{\alpha,k}, F_{\beta_i, l_i})$$

$$(32) \quad \varrho_j = \text{dist}(F_{\beta_j, l_j}, F_{\beta_{j+1}, l_{j+1}}), \quad (j \geq i),$$

l'on ait:

$$(33) \quad \varrho_j \leq \frac{1}{8} \delta_j\left(\frac{1}{2^j}\right) \text{ pour tout } j \geq 1,$$

$$(34) \quad \varrho_{i-1} \leq 1/2^{n+1}$$

$$(35) \quad \varrho_{j+1} \leq \varrho_j/2.$$

En variant indépendamment α, k, n , on désignera par \mathcal{C} la famille des ensembles

$$(36) \quad F = \prod F_{\beta_j, l_j} \quad (i \leq j < \omega).$$

Il est essentiel de prouver que F est parfait: F étant non vide, borné et fermé, prouvons qu'il est dense en soit. Pour cela, il suffira, d'après le lemme 1, de prouver que

$$(37) \quad \delta(r, F) > 0 \text{ pour tout } r \text{ réel } > 0.$$

Or, en posant

$$(38) \quad r_j = \text{dist}(F, F_{\beta_j, l_j}),$$

on aura

$$(39) \quad r_j \leq \sum_{m=j}^{\infty} \varrho_m = \varrho_j \left(1 + \sum_{m>j} \frac{\varrho_m}{\varrho_j}\right) \leq \varrho_j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 2\varrho_j.$$

D'autre part, à la suite du lemme 3,

$$\delta\left(\frac{1}{2^j} + 2r_j, F\right) \geq \delta_j\left(\frac{1}{2^j}\right) - 2r_j,$$

ce qui, en vertu de (39) et (33), entraîne

$$\delta\left(\frac{1}{2^j} + 2r_j, F\right) \geq \delta_j\left(\frac{1}{2^j}\right) - 4\varrho_j \geq \frac{1}{2}\delta_j\left(\frac{1}{2^j}\right) > 0$$

c'est-à-dire

$$(40) \quad \delta\left(\frac{1}{2^j} + 2r_j, F\right) < 0.$$

Or, $\frac{1}{2^j} + 2r_j \rightarrow 0$ avec $j \rightarrow \infty$; si alors $\frac{1}{2^q} + 2r_q < r$, la fonction $\delta(r, F)$ étant non décroissante par rapport à r , on a, d'après (40),

$$\delta(r, F) > 0 \quad \text{C. q. f. d.}$$

16. Prouvons encore que les conditions $I_{\beta+1}$, $II_{\beta+1}$, $III_{\beta+1}$, $III_{\beta+1}^{bis}$ sont vérifiées. Tout d'abord \mathcal{C}_β étant dénombrable, ses éléments peuvent toujours être rangés de manière qu'on obtienne une suite de type ω d'ensembles deux à deux distincts et donc disjoints. Vérifions la Condition $III_{\beta+1}^{bis}$; pour cela, notons que

$$(41) \quad \text{dist}(F, F_{\alpha,k}) \leq \sum_{j=i-1}^{\infty} \varrho_j = \varrho_{i-1} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varrho_{i-1}}{\varrho_j}\right);$$

d'autre part, en vertu de (35)

$$(42) \quad \frac{\varrho_j}{\varrho_{i-1}} \leq \frac{1}{2^j}, \quad (i \leq j < \omega)$$

Dès lors, enfin,

$$(43) \quad \text{dist}(F, F_{\alpha,k}) \leq \frac{1}{2^n}.$$

La condition $III_{\beta+1}^{bis}$ étant facile à vérifier pour un β de première espèce, la construction de $F_{\beta,k}$ est possible pour tout $\beta < \Omega$, ce qui constitue la démonstration du théorème 2.

17. En posant

$$(44) \quad E_\alpha = \sum_k F_{\alpha,k}, \quad (k < \omega),$$

on a

$$(45) \quad \begin{aligned} E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_\alpha \supseteq \dots, \quad (\alpha < \Omega) \text{ et} \\ E_0 \supset E_\omega \supset E_{\omega \cdot 2} \supset \dots \supset E_{\omega \alpha} \supset \dots, \quad (\alpha < \omega). \end{aligned}$$

Les $E_{\omega\alpha}$, ($\alpha < \Omega$), constituant une suite transfinie décroissante d'ensembles linéaires F_σ , nous obtenons ainsi un théorème de M. M. Zalcwasser-Sierpinski¹⁷

De plus, manifestement

$$(46) \quad \prod_{\alpha} E_{\omega\alpha} = 0 \quad (\alpha < \Omega)$$

d'où l'on déduit un théorème de M. Hausdorff d'après lequel tout espace distanciable séparable complet non dénombrable est la somme d'une suite croissante de type Ω ses ensembles G_δ ¹⁸.

II Ensembles linéaires et tableaux ramifiés de M. Aronszajn. L'ensemble σ

18. *L'ensemble σ .* Nous désignerons par σ (ou σ_0) la famille de tous les sous-ensembles bien ordonnés bornés non vides de l'ensemble ordonné des nombres rationnels. e étant un élément de σ , soit α le type d'ordre de l'ensemble bien ordonné e ; il est bien connu que $\alpha < \Omega$ et que les points de e peuvent être rangés comme il suit:

$$a_0, a_1, \dots, a_\xi, \dots, \quad (\xi < \alpha)$$

et cela de façon que, pour tout $\mu < \nu < \alpha$, $a_\mu < a_\nu$. Dans ces conditions e sera désigné par

$$(47) \quad (a_0, a_1, \dots, a_\xi, \dots)_{\xi < \alpha}.$$

Si alors e^i , ($i = 1, 2$), sont deux éléments de σ , et si

$$e^i = (a_0^i \dots, a_\xi^i, \dots)_{\xi < \alpha}, \quad (i = 1, 2),$$

¹⁷Voir. Z. Zalcwasser, *Fund. Math.* III, p. 45 et W. Sierpinski, *C. R. Soc. Sci. Varsovie*, 1933, pp 85-89; aussi, W. Sierpinski *Mathematica*, XII, (1936), pp. 116-118.

¹⁸Voir F. Hausdorff, *Fund. Math.* 26 (1936), pp. 241-255; en particulier le théorème 1.

le signe

$$(48) \quad e^1 < e^2 \text{ équivaudra à ce que } \alpha^1 < \alpha^2 \text{ et}$$

$a_\xi^1 = a_\xi^2$ pour tout $\xi < \alpha^1$; on conviendra que $e^2 \geq e^1$ veut dire $e^1 < e^2$.

On vérifie sans peine que $<$ est une relation d'ordre; dans ce qui suit, nous supposons que σ est partiellement ordonné par rapport à $<$; c'est ainsi que nous parlerons de l'ensemble partiellement ordonné σ et de ses points (47).

On voit que tout sous-ensemble ordonné de σ est bien ordonné et qu'aucun point de σ n'est précédé de deux points incomparables de σ ; on a donc le

LEMME 5. σ est un tableau ramifié¹⁹ dont tout sous-ensemble ordonné est au plus dénombrable; $\gamma^\sigma = \Omega$ (voir (4) et le lemme 7).

19. Voici encore une notion utile. Soient T un tableau ramifié et F un sous-ensemble ordonné non vide de T ; la borne supérieure de F relativement à T , symboliquement

$$(49) \quad \sup F, \text{ (rel. } T),$$

sera: le dernier point de F s'il y en a un, et la première rangée (voir (5)) de l'ensemble des point de T dont chacun succède à tout point de F , si F n'a pas un dernier point.

On voit que

$$(49') \quad R_0 \left(\prod_{\alpha \in F} [a, \cdot)_T \right) = \sup F, \text{ (rel. } T).^{20}$$

Dans le cas de l'ensemble σ , on voit que pour tout $F \subset \sigma$ ordonné non vide, l'ensemble $\sup F, \text{ (rel. } \sigma)$, est composé d'un élément au plus, à savoir de l'ensemble bien ordonné des nombres rationnels constituant les éléments de F (dans le cas, bien entendu, où celui-ci est borné dans σ).²¹

20. Fonction $f(e)$, ($e \in \sigma$). Soit, pour tout élément $e = (a_0, a_1, \dots, a_\xi \dots)_{\xi < \alpha}$ de σ

$$(50) \quad f(e) = \sup_{\xi < \alpha} a_\xi;$$

¹⁹Pour la terminologie, voir l'Introduction (aussi Thèse pp. 73, 126).

²⁰Voir (1) et (5).

²¹Un sous-ensemble non vide F d'un ensemble partiellement ordonné E est borné dans E s'il y a deux points a, b de E tels que tout point de F soit entre les points a, b .

$f(e)$ sera un nombre réel bien déterminé. D'une manière générale, soit, pour tout sous-ensemble non vide E de σ ,

$$(51) \quad f(E) \text{ l'ensemble des } f(e), \quad (e \in E).$$

LEMME 6. Pour tout couple d'éléments a, b de σ

$$(52) \quad \text{la relation } a < b \text{ entraîne } f(a) \leq f(b),$$

l'égalité $f(a) = f(b)$ ne se produisant que dans le cas où l'ensemble $b - a$ est composé du nombre $\sup_{x \in \alpha} x$.

Par conséquent, la fonction f est: non décroissante dans σ et croissante dans chacun des ensembles $\sum_{\alpha} R_{\alpha+1}\sigma, \sum_{\alpha} R_{\omega\alpha}\sigma$, ($\alpha < \Omega$) (voir l'Introduction, n°5).

LEMME 7. Quels que soient $e \in \sigma, \beta < \Omega$, l'ensemble $f(R_{\beta}(e, \cdot)_{\sigma})$ est partout dense sur l'intervalle $(f(e), \cdot)$ des nombres réels $> f(e)$ (voir (1), (5) et (51)).

Tout d'abord, si $e = (a_0, a_1, \dots, a_{\xi}, \dots)_{\xi < \alpha}$, $R_0(e, \cdot)_{\sigma}$ coïncide avec l'ensemble des éléments de σ de la forme $(a_0, \dots, a_{\xi}, \dots, r)_{\xi < \alpha}$, r parcourant les nombres rationnels $> f(e)$ ou $\geq f(e)$, suivant que α est de première ou de seconde espèce; puisque $f((a_0, \dots, a_{\xi}, \dots, r)_{\xi < \alpha}) = r$, le lemme 7 est évident dans le cas où $\beta = 0$.

Supposons que $0 < \beta < \Omega$ et qu'on ait montré que, quels que soient $e \in \sigma$, $\xi < \beta$, l'ensemble $f(R_{\xi}(e, \cdot)_{\sigma})$ soit partout dense sur $(f(e), \cdot)$; prouvons que la propriété subsiste pour $\xi = \beta$. Si β est de première espèce, l'ensemble $f(R_{\beta-1}(e, \cdot)_{\sigma})$ est, par hypothèse, partout dense sur $(f(e), \cdot)$; de même, pour tout $b \in R_{\beta-1}(e, \cdot)_{\sigma}$, $f(R_0(b, \cdot)_{\sigma})$ est partout dense sur $(f(b), \cdot)$; dès lors, l'ensemble

$$\sum_b f(R_0(b, \cdot)_{\sigma}) \equiv f\left(\sum_b R_0(b, \cdot)_{\sigma}\right) \equiv f(R_{\beta}(e, \cdot)_{\sigma}), \quad (b \in R_{\beta-1}(e, \cdot)_{\sigma}),$$

est partout dense sur $(f(e), \cdot)$.

Si β est de seconde espèce, soit $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n < \dots$ une suite d'indices $< \beta$ tendant vers β ; soient, alors, x un nombre réel quelconque $> f(e)$ et $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ une suite de nombres réels croissants tels que $f(e) < x_0$ et $\sup x_n = x$; en désignant par e^0 un élément quelconque de $R_{\beta_0}(e, \cdot)_{\sigma}$ tel que

$e < e^0$ et $f(e) < f(e^0) < x_0$, soit, pour tout entier $n > 0$, e^n un élément de $R_{\beta_n}(e, \cdot)_\sigma$ tel que $e^{n-1} < e^n$ et $x_{n-1} < f(e^n) < x_n$. En posant

$$e(x) = \sup_{n < \omega} e^n, \quad (\text{rel } \sigma), \quad (\text{voir (49)}),$$

$e(x)$ est un élément bien déterminé de $R_\beta(e, \cdot)_\sigma$ tel que $x = f(e(x))$. On en conclut que, dans ce cas, $(f(e), \cdot) = f(R_\beta(e, \cdot)_\sigma)$.

Le lemme 7 entraîne ces deux corollaires:

COROLLAIRE 1. *Pour tout $e \in \sigma$, $\gamma[e]_\sigma = \gamma\sigma = \Omega$ (voir (2),(4) et le lemme 5).*

COROLLAIRE 2. *Pour tout $\alpha < \Omega$, $f(R_\alpha\sigma)$ est partout dense et coïncide, pour tout $\alpha > 0$ de seconde espèce, avec l'ensemble des nombres réels.*

21. Fonctions $g(a)$, ($\alpha < \Omega$) et Théorème d'existence. Soit

$$(53) \quad g(a), \quad (\alpha < \Omega)$$

une fonction réelle uniforme définie dans l'ensemble (\cdot, Ω) des nombres ordinaux $< \Omega$; nous supposons que la fonction g vérifie ces deux conditions:

A) La fonction g est univalente dans chacun des ensembles

$$[\omega^2\beta, \omega^2(\beta + 1)), \quad (\beta < \Omega);^{22}$$

B) Pour tout $\beta < \Omega$, l'ensemble

$$(54) \quad G_\beta \text{ des nombres réels } g(\alpha), \alpha \text{ vérifiant } \omega\beta \leq \alpha < \beta(\beta + 1),$$

est partout dense (sur l'ensemble des nombres réels).

On en déduit que chacun des ensembles G_β est semblable à l'ensemble ordonné des nombres rationnelles et que

$$(54') \quad G_\beta G_{\beta+n} = 0 \quad (\beta < \Omega, n < \omega).$$

Ceci étant, nous sommes à même d'établir le

²²Notons que $[\omega^2\beta, \omega^2(\beta + 1))$ désigne l'ensemble des nombres ordinaux ξ vérifiant $\omega^2\beta \leq \xi < \omega^2(\beta + 1)$.

Quant à l'arithmétique des nombres ordinaux, voir W. Sierpinski, *Nombres transfinis*, Paris, (1928): chap. X.

THÉORÈME d'existence de tableaux ramifiés de M. Aronszajn.
 $g(a)$, ($a < \Omega$), étant une fonction de l'espèce que nous venons de considérer, il existe dans l'ensemble (\cdot, Ω) des nombres ordinaux $< \Omega$ une fonction bi-univoque à valeurs appartenant à σ :

$$\varphi(\alpha), \varphi(\alpha) \in \sigma, (\alpha < \Omega)$$

telle que

$$(E) \quad f(\varphi(\alpha)) = g(\alpha), \quad (\alpha < \Omega)$$

et que, pour aucun couple $a < \beta < \Omega$, on n'ait $\varphi(\beta) < \varphi(\alpha)$ et que, enfin, l'ensemble $\varphi(\cdot, \Omega)$ des $\varphi(\alpha)$, ($\alpha < \Omega$), soit un tableau ramifié de M. Aronszajn extrait de σ (voir l'Introduction, n°3, (48), (50))

Puisque $(\cdot, \Omega) = \sum_{\beta} [\omega^2 \beta, \omega^2(\beta + 1)]$, ($\beta < \Omega$), la fonction φ sera déterminée lorsque nous l'aurons définie dans chacun des ensembles

$$(55_{\beta}) \quad [\omega^2 \beta, \omega^2(\beta + 1)].$$

22. Pour commencer, soit, pour tout α tel que

$$(55_0) \quad \alpha \in [\omega^2 \cdot 0, \omega^2 \cdot 1) \text{ c'est-à-dire } \alpha < \omega^2,$$

$\varphi(\alpha)$ un certain élément de σ tel que

$$(56_0) \quad \varphi(\alpha) \in R_{\omega} \sigma, \quad f(\varphi(\alpha)) = g(\alpha).$$

D'après le corollaire 2, un élément pareil existe pour tout α . Prouvons que si $\alpha_1 < \alpha_2 < \omega^2$ alors $\varphi(\alpha_1) \neq \varphi(\alpha_2)$. En effet, si l'on avait $\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2)$, on aurait, la fonction f , (voir (50)), étant uniforme, $f(\varphi(\alpha_1)) = f(\varphi(\alpha_2))$, ce qui, vu (56₀), entraînerait $g(\alpha) = g(\alpha_2)$, contrairement à l'univalence de g dans $[0, \omega^2)$ (cf. la condition A), n°21).

En désignant par S_0 l'ensemble des $\varphi(\alpha)$, ($\alpha \in [\omega^2 \cdot 0, \omega^2 \cdot 1)$)

$$(57_0) \quad S_0 = \varphi([0, \omega^2)),$$

la fonction f est univalente dans S_0 et, d'après (E),

$$(58_0) \quad f(S_0) = \sum_n G_n, \quad (n < \omega) \text{ (voir (54)).}$$

Prouvons que $f(e_1) \neq f(e_2)$ pour tout couple d'éléments distincts e_1, e_2 de S_0 . En effet, en désignant par α_i un nombre ordinal $< \omega^2$ tel que $\varphi(\alpha_i) = e_i$, ($i = 1, 2$), nous venons de voir que $\alpha_1 \neq \alpha_2$ et donc aussi $g(\alpha_1) \neq g(\alpha_2)$ et finalement $f(e_1) \neq f(e_2)$

23. Prolongeons la fonction $\varphi(\alpha)$, ($\alpha < \omega^2$), en la définissant encore dans l'ensemble

$$(55_1) \quad [\omega^2 \cdot 1, \omega^2 \cdot 2).$$

Pour ceci, soit

$$(59_0) \quad e_0^0, e_1^0, \dots, e_n^0, \dots, \quad (n < \omega; e_m^0 \neq e_n^0, m \neq n),$$

la suite de tous les éléments de S_0 .

Considérons e_0^0 et désignons, pour tout α tel que

$$(55_0^1) \quad \alpha \in [\omega^2, \omega^2 + \omega), \quad g(\alpha) > f(e_0^0),$$

par $\varphi(\alpha)$ un certain élément de σ tel que

$$(56_0^1) \quad \varphi(\alpha) \in R_\omega(e_0^0, \cdot)_\sigma, \quad f(\varphi(\alpha)) = g(\alpha);$$

soit

$$(60_1^0) \quad E_0^0 \text{ l'ensemble des } \varphi(\alpha), \alpha \text{ vérifiant } (55_1^0), \text{ alors}$$

$$(61_1^0) \quad E_0^0 \subset R_\omega(e_0^0, \cdot)_\sigma, \quad f(E_0^0) = (f(e_0^0), \cdot)_{G_\omega}.$$

La fonction $\varphi(\alpha)$, α vérifiant (55₀¹) ou (55₁⁰), est univalente de même, la fonction $f(e)$ est univalente dans $S_0 + E_0^0$.

Considérons, dans (59₀) l'élément e_1^0 et désignons pour tout α :

$$(55_1^1) \quad \alpha \in [\omega^2, \omega^2 + \omega \cdot 2), \quad f(e_1^0) < g(\alpha), \quad g(\alpha) \notin f(E_0^0),$$

par $\varphi(\alpha)$ un certain élément de σ tel que

$$(56_1^1) \quad (\varphi(\alpha) \in R_\omega(e_1^0, \cdot)_\sigma, \quad f(\varphi(\alpha)) = g(\alpha).$$

On vérifie que φ est univalente dans l'ensemble des α dont chacun vérifie l'une des conditions (55_0) , (55_1^0) , (55_1^1) . En désignant par

(60₁¹) E_1^0 l'ensemble des $\varphi(\alpha)$, α vérifiant (55_1^1) , on a

$$(61_1^1) \quad f(E_1^0) = (f(e_1^0, \cdot)_{G_\omega + G_{\omega+1}} - f(E_0^0)).$$

D'une façon générale, nous désignerons pour tout entier $n > 1$ et tout α tel que

$$(55_n^1) \quad \alpha \in [\omega^2, \omega^2 + \omega(n+1)], \quad f(e_n^0) < g(\alpha), \\ g(\alpha) \notin (f(E_0^0) + \dots + f(E_{n-1}^0)),$$

par $\varphi(\alpha)$ un certain point de σ tel que

$$(56_n^1) \quad \varphi(\alpha) \in R_\omega(e_n^0, \cdot)_\sigma, \quad f(\varphi(\alpha)) = g(\alpha), \quad \text{et par}$$

(60₁ⁿ) E_n^0 l'ensemble des $\varphi(\alpha)$, α vérifiant (18_n^1) ; alors

$$(61_n^1) \quad f(E_n^0) = (f(e_n^0, \cdot)_{\sum_i G_{\omega+i}} - \sum_j f(E_j^0)), \quad (i \leq n, j < n).$$

Montrons que, par le procédé précédent, $\varphi(\alpha)$ est définie pour tout $\alpha \in [\omega^2, \omega^2 \cdot 2)$. Pour le voir, il suffit de remarquer que tout nombre de l'ensemble (55_1) vérifie l'une des conditions (55_n^1) , ($n = 0, 1, \dots$); puisque la fonction g est univalente dans $[\omega^2, \omega^2 \cdot 2)$, α ne vérifie qu'une seule des conditions (55_n^1) .

De plus, on prouve sans peine que la fonction $\varphi(\alpha)$ est univalente dans $(\cdot, \omega^2 \cdot 2)$ (\equiv l'ensemble des $\alpha < \omega^2 \cdot 2$).

En posant

$$(57_1) \quad S_1 = \varphi([\omega^2, \omega^2 \cdot 2)) = \sum_{n < \omega} E_n^0,$$

on prouve facilement que

$$(58_1) \quad f(S_1) = \sum_{n < \omega} G_{\omega+n} \quad (\text{cf. } (51), (54)),$$

et que la fonction f est univalente dans S_1 .

24. D'une façon générale, soit β un ordinal quelconque entre 1 et Ω , et supposons que, quel que soit l'ordinal $\xi < \beta$, l'on ait fait correspondre à tout ordinal α tel que $\omega^2\xi \leq \alpha < \omega^2(\xi + 1)$ un certain élément $\varphi(\alpha)$ de $R_{(\omega\xi)} + \sigma$ ²³ vérifiant $f(\varphi(\alpha)) = g(\alpha)$ de manière que, en rangeant les éléments $\varphi(\alpha)$, ($\alpha \in [\omega^2\xi, \omega^2(\xi + 1))$), dans la suite

$$(59_\xi) \quad e_0^\xi, e_1^\xi, \dots, e_n^\xi, \dots, (n < \omega, e_m^\xi \neq e_n^\xi, m \neq n),$$

et en désignant par S_ξ l'ensemble des e_n^ξ , ($n < \omega$),

$$(57_\xi) \quad S_\xi = \varphi([\omega^2\xi, \omega^2(\xi + 1)),$$

et en posant

$$(57^\beta) \quad s_\beta = \sum_{\xi} S_\xi, \quad (\xi < \beta),$$

les conditions suivantes soient satisfaites:

I_β La fonction $\varphi(\alpha)$, ($\alpha < \omega^2\beta$), est biunivoque et telle que, quels que soient les ordinaux $\xi < \eta < \omega^2\beta$, $\varphi(\eta) < \varphi(\xi)$;

II_β $R_\alpha s_\beta = s_\alpha \subset R_{(\alpha\omega)} + \sigma$ ²³, $\varphi([\omega^2\alpha, \omega^2(\alpha + 1))) = S_\alpha$, ($\alpha < \beta$),

III_β $\gamma[e]_{s_\beta} = \gamma s_\beta = \beta$, ($e \in s_\beta$) (cf. (2), (4));

IV_β La fonction f est croissante dans s_β et univalente dans $R_\alpha s_\beta$, pour tout $\alpha < \beta$; on a $f(R_\alpha s_\beta) = \sum_{n < \omega} G_{\omega\alpha+n}$, ($\alpha < \gamma s_\beta$);

V'_β Quels que soient: $n < \omega$, $\alpha < \gamma s_\beta$ vérifiant $\alpha + 1 < \gamma s_\beta$; l'ensemble $f(R_0(e_n^\alpha, \cdot)_{s_\beta})$ contient l'ensemble $(f(e_n^\alpha, \cdot)_{G_{\omega\alpha+n}})$ et est donc partout dense sur l'intervalle $f(e_n^\alpha, \cdot)$ des nombres réels $> f(e_n^\alpha)$;

V''_β Quels que soient: $\alpha < \xi < \beta$ et $e \in R_\alpha s_\beta$, l'ensemble $f(R_\xi[e]_{s_\beta})$ est partout dense sur l'intervalle $(f(e), \cdot)$.

Nous allons prolonger la fonction $\varphi(\alpha)$, ($\alpha < \omega^2\beta$), en la définissant encore pour tout $\alpha \in [\omega^2\beta, \omega^2(\beta + 1))$ de manière que les conditions $I_{\beta+1}$, $II_{\beta+1}$, $III_{\beta+1}$, $IV_{\beta+1}$, $V'_{\beta+1}$, $V''_{\beta+1}$ soient satisfaites.

25. Distinguons deux cas:

²³Pour un ordinal α , nous désignerons par α^+ le nombre $\alpha + 1$ ou α suivant que α est de première ou de seconde espèce.

Premier cas: β est de première espèce et > 1 . Dans ce cas, on procède d'une manière toute analogue que dans le cas précédent où fut $\beta = 1$: en considérant la suite

$$(59_{\beta-1}) \quad e_0^{\beta-1}, \dots, e_n^{\beta-1}, \dots, \quad (n < \omega, e_m^{\beta-1} \neq e_n^{\beta-1}, m \neq n),$$

soit, pour tout α tel que

$$(55_{\beta}^0) \quad \alpha \in [\omega^2\beta, \omega^2\beta + \omega), \quad f(e_0^{\beta-1}) < g(\alpha),$$

$\varphi(\alpha)$ un certain élément de σ tel que

$$(56^0) \quad \varphi(\alpha) \in R_{\omega}(e_0^{\beta-1}, \cdot)_{\sigma}, \quad f(\varphi(\alpha)) = g(\alpha);$$

en désignant par $E_1^{\beta-1}$ l'ensemble de tous ces $\varphi(\alpha)$, on définit, par l'induction, pour tout entier $n > 0$ et pour tout α tel que

$$(55_{\beta}^n) \quad \alpha \in [\omega^2\beta, \omega^2\beta + \omega(n+1)), \quad f(e_0^{\beta-1}) < g(\alpha),$$

$$g(\alpha) \notin \left(\sum_i f(E_i^{\beta-1}), (i < n) \right).$$

$\varphi(\alpha)$ comme un certain élément de σ tel que

$$(56_{\beta}^n) \quad \varphi(\alpha) \in R_{\omega}(e_n^{\beta-1}, \cdot)_{\sigma}, \quad f(\varphi(\alpha)) = g(\alpha);$$

l'on désigne par $E_n^{\beta-1}$ l'ensemble de tous ces $\varphi(\alpha)$ et l'on pose

$$(57_{\beta}) \quad S_{\beta} = \sum_n E_n^{\beta-1}, \quad (n < \omega)$$

$$(58_{\beta+1}) \quad s_{\beta+1} = s_{\beta-1} + S_{\beta}$$

Second cas: β est de seconde espèce. Soient:

$$\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n < \dots, \quad (n < \omega)$$

une suite croissante d'ordinaux $< \beta$ tendant vers β , et

$$(62_{\beta}) \quad e_{\beta}^0, e_{\beta}^1, \dots, e_{\beta}^n, \dots, \quad (n < \omega, e_{\beta}^m \neq e_{\beta}^n, m \neq n)$$

la suite de tous les points des $S_{\beta_n}, (n < \omega)$; posons

(63 $_{\beta}$) $s^{\beta} = \sum_F \sup F$ (rel σ), F parcourant tous les sous-ensembles ordonnés infinis du sous-ensemble $\sum_n S_{\beta_n}$, ($n < \omega$), du sous-ensemble $s_{\beta} = \sum_{\alpha} S_{\alpha}$, ($\alpha < \beta$), de l'ensemble σ (voir (49)). Montrons que s^{β} est un sous-ensemble bien déterminé non vide de $R_{\omega\beta}\sigma$ et que, quel que soit $e \in s_{\beta}$, l'ensemble $f((e, \cdot)_{s_{\beta}})$ est partout dense dans l'intervalle réel $(f(e), \cdot)$.

Pour cela, soient: a un nombre réel $> f(e)$ et $a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots$, ($n < \omega$), une suite croissante de nombres réels $\rightarrow a$. En définissant α par $e \in R_{\alpha} s_{\beta}$, soient n, r deux entiers > 0 vérifiant $\alpha < \beta_n$, $f(e) < a_r$. En vertu de la condition V_{β}'' , l'ensemble $f(R_{\beta_n}[e]_{s_{\beta}})$ est partout dense dans $f(e, \cdot)$; soient, alors, E_0 un certain élément de $R_{\beta_n}[e]_{s_{\beta}}$ tel que $e < E_0$, $a_r < f(E_0) < a_{r+1}$, et pour tout entier $k > 0$, E_k un certain élément de $R_{\beta_{n+k}}[E_{k-1}]_{s_{\beta}}$ tel que $E_{k-1} < E_k$, $a_{r+k} < f(E_k) < a_{r+k+1}$, et finalement

$$\bar{e} = \underset{k < \omega}{E}_k, \text{ (rel } \sigma).$$

Vu V_{β}'' , l'existence de \bar{e} est immédiate, et manifestement $f(\bar{e}) = a$. Prouvons encore que $\bar{e} \in R_{\omega\beta}\sigma$; pour ceci, remarquons que $E_k \in R_{\beta_{n+k}}[E_{k-1}]_{s_{\beta}}$, pour tout $0 < k < \omega$, ce qui, vu l'hypothèse III $_{\beta}$, donne $E_k \in R_{\beta_{n+k}} s_{\beta}$ et donc, à la suite de II $_{\beta}$, $E_k \in R_{\omega\delta_k}\sigma$ avec $(\beta_{n+k})^+ = \delta_k$ ²³; alors la relation $\bar{e} \in R_{\omega\beta}\sigma$ (et à fortiori la relation $s^{\beta} \subseteq R_{\omega\beta}\sigma$) résulte de ce que $\delta_k \rightarrow \omega\beta$ avec $k \rightarrow \omega$.

L'existence du sous-ensemble s^{β} de $R_{\omega\beta}\sigma$ étant établie, reprenons la suite (62 $_{\beta}$) des points e_{β}^n , ($n < \omega$), et définissons $\varphi(\alpha)$, pour tout $\alpha \in [\omega^2\beta, \omega^2(\beta + 1))$, comme il suit:

Pour tout α vérifiant

$$(55_0^{\beta}) \quad \omega^2\beta \leq \alpha < \omega^2\beta + \omega, \quad f(e_{\beta}^0) < g(\alpha),$$

soit $\varphi(\alpha)$ un certain point de σ tel que

$$(56_0^{\beta}) \quad \varphi(\alpha) \in (e_{\beta}^0, \cdot)_{s_{\beta}} \quad f(\varphi(\alpha)) = g(\alpha);$$

en désignant par E_{β}^0 l'ensemble de tous ces $\varphi(\alpha)$, soient, pour tout entier $n > 0$ et tout α tel que

$$(55_n^{\beta}) \quad \begin{aligned} &\omega^2\beta < \alpha < \omega^2\beta + (\omega + n + 1), \quad f(e_{\beta}^n) < g(\alpha) \\ &g(\alpha) \notin \left(\sum_i f(E_{\beta}^i) \right), \quad (i < n), \end{aligned}$$

$\varphi(\alpha)$ un certain point de σ tel que

$$(56_\beta^n) \quad \varphi(\alpha) \in (e_0^n, \cdot)_{s,\beta}, \quad f(\varphi(\alpha)) = g(\alpha),$$

et E_β^n l'ensemble de tous ces $\varphi(\alpha)$.

Puisque tout $\alpha \in [\omega^2\beta, \omega^2(\beta+1))$ vérifie une des relations (55_β^n) , ($n < \omega$), c'est ce que résulte de ce que l'ensemble des nombres $g(\alpha)$, ($\omega^2\beta \leq \alpha < \omega^2(\beta+1)$), est partout dense et donc une seule à cause de l'univalence de $g(\alpha)$ dans $[\omega^2\beta, \omega^2(\beta+1))$, la fonction φ est définie dans (55_β) .

En posant

$$(57_\beta) \quad S_\beta = \sum E_\beta^n, \quad (n < \omega)$$

$$(58_{\beta+1}) \quad s_{\beta+1} = \sum_{\xi} S_\xi, \quad (\xi < \beta+1),$$

on vérifie facilement que les conditions $I_{\beta+1}$, $II_{\beta+1}$, $III_{\beta+1}$, $IV_{\beta+1}$, $V'_{\beta+1}$, $V''_{\beta+1}$ sont satisfaites.

26. En posant

$$(55) \quad S = \sum_{\beta} S_\beta, \quad (\beta < \Omega),$$

les propositions I_β - IV_β , V''_β entraînent les propositions suivantes:

I_Ω La fonction $\varphi(\alpha)$, ($\varphi(\alpha) \in \sigma, \alpha < \Omega$), est biunivoque et telle que, quels que soient les nombres $\alpha < \beta < \Omega$, $\varphi(\beta) \notin \varphi(\alpha)$;

II_Ω $R_\alpha S = S_\alpha = \varphi([\omega^2\alpha, \omega^2(\alpha+1)))$, ($\alpha < \Omega$); donc $\varphi(S) = (\cdot, \Omega)$;

III_Ω $\gamma[e]_S = \gamma S = \Omega$, ($e \in S$) (voir corollaire 1);

IV_Ω La fonction f est croissante dans S et univalente dans chaque $R_\alpha S$, ($\alpha < \Omega$); on a

$$(58) \quad f(R_\alpha S) = \sum_{n < \omega} G_{\omega\alpha+n} \text{ et donc } f(S) = \sum_{\alpha} G_\alpha, \quad (\alpha < \Omega);$$

V_Ω Pour tout $e \in S$ et pour tout $\alpha < \Omega$ l'ensemble $f(R_\alpha(e, \cdot)_S)$ est partout dense sur l'intervalle réel $(f(e), \cdot)$ (cf. le lemme 7).

Puisque S est un sous-ensemble de σ tous sous ensemble ordonné de S est au plus dénombrable (cf. Lemme 5) ce qui, vu les propositions II_Ω ,

III_{Ω} , prouve que S est un tableau ramifié de M. Aronszajn extrait de Ω (cf. n°3)

Ainsi le Théorème d'existence est complètement démontré.

27. Deux cas particuliers remarquables. D'après IV_{Ω} , $f(S) = \sum_{\beta} G_{\beta}$, ($\beta < \Omega$); si, alors, pour un $x \in f(S)$.

$$(65) \quad f^{-1}(x)_S$$

désigne l'ensemble de tous les $e \in S$ vérifiant $f(e) = x$, nous aurons

$$(66) \quad S = \sum_x f^{-1}(x)_S, \quad (x \in f(S)).$$

De plus, d'après IV_{Ω} , $f^{-1}(x)_S$ est un sous-ensemble *disjonctif*²⁴ de S tel que

$$(67) \quad f^{-1}(x)_S \cdot f^{-1}(x')_S = 0 \quad (x \in S, x' \in S, x \neq x').$$

La construction précédent de S dépendant essentiellement de la fonction $g(\alpha)$, ($\alpha < \Omega$), considérons les deux cas particuliers suivants:

a) Quel que soit $\beta < \Omega$, l'ensemble des valeurs de $\varphi(\alpha)$ dans $[\omega^2\alpha, \omega^2(\alpha+1)]$ ²⁴ coïncide avec l'ensemble de ses valeurs prises dans $[0, \omega^2)$ c'est-à-dire

$$\sum_{n < \omega} G_n = \sum_{n < \omega} G_{\omega\beta+n}, \quad (\beta < \Omega)$$

$$f(S_{\beta}) = f(S_0) = f(S), \quad (\beta < \Omega).$$

Par conséquent, l'ensemble $f(S)$ est, dans ce cas, *dénombrable* et tel que pour tout $x \in f(S)$ l'ensemble $f^{-1}(x)_S$ soit de puissance \aleph_1 les relations (66), (67) entraînent donc le résultat suivant:

Il y a un tableau ramifié de M. Aronszajn décomposable en une infinité dénombrable de ses sous-ensembles disjonctifs²⁴ deux à deux disjoints.

b) La fonction $g(\alpha)$, ($\alpha < \Omega$), est univalente. La fonction f étant, dans ce cas, univalente dans S , nous avons établi ce résultat:

²⁴Un sous-ensemble d'un ensemble partiellement ordonné est *disjonctifs* s'il ne contient aucun couple de points distincts *comparables*.

Il y a un tableau ramifié de M . Aronszajn, S , une fonction réelle biunivoque croissante dans S , $f(e)$, ($e \in S$), tels que, de plus quel que soit $\beta < \Omega$, l'ensemble $f(R_\beta S)$ soit partout dense sur $f(S)$.

Dans ce cas, l'ordre intégral de l'ensemble linéaire $f(S)$ peut être transplanté dans S moyennant la fonction biunivoque $f^{-1}(x)_S$, ($x \in f(S)$); on obtiendra un ensemble ordonné semblable à $f(S)$ et dont l'ordre est une extension de l'ordre primitif de S . Bref, il y a un tableau ramifié de M . Aronszajn dont l'ordre partiel peut être élagué de manière qu'on obtienne un ensemble ordonné semblable à un ensemble linéaire²⁵ (cf. n°29 corrolaire 3 et n°30 théorème 3^{IV}).

28. Applications. Soient, pour tout $\beta < \Omega$,

(68) H_β un ensemble linéaire dénombrable quelconque partout dense, et

$$(69) \quad a_0^\beta, \dots, a_\xi^\beta, \dots, (\xi < \omega^2, a_\xi^\beta \neq a_\zeta^\beta, \xi \neq \zeta)$$

un bon ordre de l'ensemble H_β tel que, quel que soit $n < \omega$, t l'ensemble

$$(70) \quad H(\beta, n) \text{ des } a_\xi^\beta, (\omega n \leq \xi < \omega(n+1))$$

soit partout dense.

Manifestement, quel que soit $\beta < \Omega$,

$$(71) \quad H_\beta = \sum H(\beta, n), \quad H(\beta, m) \cdot H(\beta, n) = 0, \quad (m < n < \omega).$$

En posant

$$(72) \quad g(\omega^2\beta + \omega m + n) = a_{\omega m + n}^\beta, \quad (\beta < \Omega, m < \omega, n < \omega)$$

et

$$(72') \quad \alpha = \omega^2\beta + \omega m + n,$$

$g(\alpha)$, ($\alpha < \Omega$), est une fonction bien déterminée de l'espèce que nous avons considérée dans ce qui précède; en employant des notations précédentes, on aura

$$(73) \quad H_\beta = \sum_{n < \omega} G_{\omega\beta+n}$$

²⁵C'est la solution d'un problème de la Thèse, p. 128, en note.

et, d'après II_Ω ,

$$(73') \quad H_\beta = f(S_\beta), \quad f(S) = \sum_{\beta} H_\beta, \quad (\beta < \Omega).$$

Nous avons donc établi le

THÉORÈME 3. *Quelle que soit la suite transfinie d'ensembles linéaires*

$$H_0, H_1, \dots, H_\beta, \dots, (\beta < \Omega),$$

dont chacun est dénombrable et partout dense, le tableau ramifié σ (défini n°18) contient un tableau ramifié de M. Aronszajn, S , tel que la fonction f (définie n°20) soit croissante dans S et univalente dans $R_\beta S$ et que $f(R_\beta S) = H_\beta$, pour tout indice $\beta < \Omega$.

29. Ensembles linéaires partout denses et tableaux ramifiés de M. Aronszajn. Le théorème 3 va nous permettre d'établir le

THÉORÈME 3^{bis}. *Quel que soit l'ensemble linéaire partout dense H de puissance $\leq \aleph_1$ et ayant partout une même puissance, l'ensemble σ contient un tableau ram. de M. Aronszajn S tel que la fonction f (définie n°20) y soit croissante (et univalente si H est non dénombrable) et telle que $f(S) = H$.*

En effet, si H est dénombrable, le théorème 3^{bis} résulte du théorème 3 en y posant $H_\beta = H, (\beta < \Omega)$; si $pH = \aleph_1$, soient

$$x_0, x_1, \dots, x_\beta, \dots, (\beta < \Omega), x_\alpha \neq x_\beta, \alpha < \beta < \Omega$$

tous les points de H ; construisons la suite des $H_\beta, (\beta < \Omega)$, comme il suit: α_0 étant le premier indice $< \Omega$ tel que l'ensemble des points $x_\xi, (\xi < \alpha_0)$, soit partout dense, H_0 sera l'ensemble des $x_\xi, (\xi < \alpha_0)$; d'une façon générale, quel que soit $\beta < \Omega$, en désignant par α_β le premier ordinal $< \Omega$ tel que l'ensemble des $x_\xi, (\sup_{\zeta < \beta} \alpha_\zeta < \xi < \alpha_\beta)$, soit partout dense, H_β sera l'ensemble des x_ξ, ξ vérifiant $\sup_{\zeta < \beta} \alpha_\zeta \leq \xi < \alpha_\beta$.

Par le procédé inductif on démontre sans peine que, pour tout $\beta < \Omega$, l'ensemble H_β est bien déterminé, dénombrable, partout dense et que $H_\alpha H_\beta = 0$ pour tout $\alpha < \beta < \Omega$. En appliquant à la suite $H_0, H_1, \dots, H_\beta, \dots, (\beta < \Omega)$, les raisonnements du n°28, la fonction correspondante g sera biunivoque; il en est de même de la fonction $f(e), (e \in S)$, S désignant le tableau ram. de M. Aronszajn attaché à $g(\alpha), (\alpha < \Omega)$.

COROLLAIRE 3. Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il y a (dans σ) un tableau ram. de M. Aronszajn dont l'ordre partiel peut être élagué de façon qu'on obtienne un ensemble ordonné semblable à l'ensemble ordonné des nombres réels (cf. la fin du n°27; aussi théorème 3^{IV}).

30. On démontre facilement le résultat suivant:

Quel que soit l'ensemble linéaire non dénombrable, E , il y a un ensemble linéaire H partout non dénombrable et semblable à un sous-ensemble E^0 de E tel que l'ensemble $E - E^0$ soit au plus dénombrable²⁶

Or, H contient un ensemble H^1 partout de puissance \aleph_1 ; dès lors, d'après le théorème 3^{bis}, il y a un tableau ram. de M. Aronszajn, S extrait de σ tel que la fonction f du n°20 y soit biunivoque, croissante et vérifiant $f(S) = H^1$, donc aussi $f(S) \subseteq H$; en désignant par s une transformation par similitude de l'ensemble ordonné H^1 dans l'ensemble ordonné E^0 et en posant

$$f_0(e) \equiv s(f(e)), \quad (e \in S)$$

on a $f(S) = E^0$ puisque $f(S) = H^1$; dès lors le

THÉORÈME 3^{ter}. Quel que soit l'ensemble linéaire non dénombrable E , il y a un tableau ramifié de Aronszajn S (extrait de σ) et une fonction biunivoque f_0 croissante dans S tels que $f_0(S) \subseteq E$; dans le cas où la puissance E est \aleph_1 , on peut faire de manière que l'ensemble $E - f_0(S)$ soit au plus dénombrable.

Enfin, on peut prouver sans peine le

THÉORÈME 3^{IV} Pour qu'un ensemble linéaire E puisse être obtenu en élargissant ordre partiel d'un tableau ram. de M. Aronszajn, il faut et il suffit que, quel que soit le point x de E , l'ensemble des points de E à droite de x soit de la puissance \aleph_1 .

31. La démonstration précédente de l'existence de tableaux ramifiés de M. Aronszajn s'exprime entièrement en termes d'ordre, sans faire appel à aucune notion métrique.

En imitant le raisonnement primitif de M. Aronszajn par lequel il a démontré, le premier, l'existence de tableaux ramifiés portant son nom²⁷,

²⁶Il suffit de désigner par E^0 l'ensemble qu'on déduit de l'ensemble E_c des points de condensation de E appartenant à E , en barrant dans E_c tous les points consécutifs de E_c aussi bien que l'(es) extrémité(s) éventuelle(s) de E_c .

²⁷Voir ma Thèse, loc. cit. p. 96 en note (cf. aussi n°16 ci-dessus).

voici comment on procéderait dans le cas concret qui nous occupe (c'est-à-dire pour prouver l'existence d'un tableau ram. de M. Aronszajn dans l'ensemble σ [cf. le problème 1 ci-après]).

On pose $S_0 = R_0\sigma$; si $0 < \beta < \Omega$, on définira S_β comme il suit: si β est de première espèce, $S_\beta = \sum_e R_0(e, \cdot)_\sigma$, ($e \in S_{\beta-1}$); si β est de seconde espèce, soit $0 = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n < \dots$, ($n < \omega$), une suite croissante d'indice $< \beta$ tendant vers β . Soit r un entier positif quelconque; soient $\alpha < \beta$ et $e < S_\alpha$ quelconques; i vérifiant $\beta_{i-1} \leq \alpha < \beta_i$, soit e^1 un élément de S_{β_i} tel que $e < e^1$ et $f(e^1) - f(e) < \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{2^i}$; d'une façon générale, quel que soit l'entier $k > 1$, soit e^k un certain élément de $S_{\beta_{i+k}}$ tel que

$$e^{k-1} < e^k, f(e^k) - f(e^{k-1}) < \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{2^{2k}}; \text{ en posant}$$

$$e(r) = \sup_{k < \omega} e^k, \quad (\text{rel } \sigma),$$

$e(r)$ est un certain point de σ tel que $e < e(r)$; alors, S_β sera, par définition, l'ensemble des $e(r)$; e, r parcourant indépendamment l'ensemble $\sum_\alpha S_\alpha$, ($\alpha < \beta$) et les entiers > 0 respectivement.

De proche en proche, on démontre l'existence de S_β pour tout $\beta < \Omega$ et on vérifie que l'ensemble $S = \sum_\beta S_\beta$, ($\beta < \Omega$). est un tableau ramifié de M. Aronszajn (on a d'ailleurs $R_\beta S = S_\beta$ pour tout $\beta < \Omega$).

32. Deux problèmes. A propos des démonstrations précédentes de l'existence de tableaux ramifiés de M. Aronszajn dans le tableau ramifié σ , voici le

PROBLÈME 1. Soit T un tableau ramifié quelconque tel que $\gamma[a]_T = \gamma T = \Omega$, ($a \in T$); s'il existe dans T une fonction réelle uniforme croissante, l'ensemble T contient-il un tableau ramifié de M. Aronszajn?

Et pour terminer, voici un problème bien intéressant:

PROBLÈME 2. Existe-il dans l'ensemble σ (voir n°18) une fonction uniforme croissante à valeurs rationnelles?

TRANSFORMATIONS MONOTONES DES ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS

Soit $<$ une relation binaire; un ensemble E sera dit *partiellement ordonné par* $<$ si, d'une part, quels que soient les points a, b, c de E vérifiant $a < b, b < c$, on a $a < c$, et d'autre part, si, pour aucun couple de points a, b de E , on n'a à la fois $a < b, b < a$. Il en sera encore ainsi si E n'a qu'un point au plus. Deux points a, b de E seront *incomparables* relativement à $<$ si l'on n'a pas $a = b$ ni $a < b$, ni $b < a$.

Si, à tout point a d'un ensemble E_1 partiellement ordonné par une relation binaire $<_1$, on fait correspondre un point bien déterminé $f(a)$ d'un ensemble E_2 partiellement ordonné par une relation binaire $<_2$, et si, pour tout couple de points a, b de E_1 tels que $a \leq_1 b$ on a $f(a) \leq_2 f(b)$ [$f(b) \leq_2 f(a)$], nous dirons que $f(a), a \in E_1$, est une *transformation non décroissante* (non croissante) de E_1 en E_2 . Des transformations non décroissantes et non croissantes de E_1 en E_2 seront dites des *transformations monotones* de E_1 en E_2 .

Soit $f(a)$ une transformation monotone de E_1 en E_2 ; elle sera: *croissante* si, quels que soient les points a, b de E_1 vérifiant $a <_1 b$, on a $f(a) <_2 f(b)$, et *presque croissante*, si elle est non décroissante et telle que, quel que soit le point a de E_1 qui n'est pas un *dernier* point de E_1 , l'ensemble $f(A)$ des $f(b), b$ parcourant l'ensemble A des points x de E_1 tels que $a \leq_1 x$ soit composé de plus d'un point. Dans le cas particulier où E_2 est semblable à un ensemble linéaire, on dira que, dans E_1 , il existe une *fonction réelle uniforme croissante* (presque croissante), s'il y a une transformation croissante (presque croissante) de E_1 en E_2 .

Voici trois cas remarquables dans chacun desquels il existe une fonction réelle uniforme croissante:

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. C.R. Acad. Sci. Paris 205 (1937), 1033-1035. (Note présentée par M. Paul Montel au séance du 29 novembre 1937)

1° E_1 est ordonné et contient un ensemble au plus dénombrable D tel qu'entre deux points de E_1 n'appartenant pas simultanément à D existe un point de D (Cantor-Denjoy)¹;

2° La famille de tous les sous-ensembles d'un ensemble au plus dénombrable, ordonnée partiellement par \supset ou \subset ²;

3° La famille de tous les ensembles fermés (ouverts) extraits d'un espace (V) parfaitement séparable³, ordonnée partiellement par \supset ou \subset ⁴.

Manifestement la condition nécessaire pour l'existence d'une fonction réelle croissante dans E_1 est que tout sous-ensemble bien ordonné de E_1 soit $\leq \aleph_0$; de même, il suffit que E_1 soit somme de $\leq \aleph_0$ ensembles dont chacun est composé de points deux à deux incomparables, pour que, dans E_1 , il existe une fonction réelle croissante.

En nous restreignant au cas particulier où E_1 est un *tableau ramifié* (c'est-à-dire tel que, quel que soit le point a de E_1 , l'ensemble des points de E_1 dont chacun précède a est *bien ordonné*), il est intéressant de savoir si les deux conditions précédentes sont encore suffisante et nécessaire respectivement. Remarquons que le second problème est équivalent à celui-ci:

Peut-on attacher à tout ensemble E bien ordonné non vide de nombres rationnels un nombre rationnel bien déterminé $f(E)$ de telle façon que, pour tout couple d'ensembles bien ordonnés non vides distincts de nombres rationnels, A, B , tels que A soit un segment initial de B , on ait $f(A) < f(B)$.

THÉORÈME I. *Tout tableau ramifié non dénombrable dans lequel existe une fonction réelle uniforme croissante à même puissance que l'un de ses sous-ensembles composé de points deux à deux incomparables.*

En combinant le théorème I avec un théorème de Baire et avec le théorème ci-dessus de M. Lindenbaum, on a:

THÉORÈME II. *Quel que soit le tableau ramifié non dénombrable \mathcal{T} ⁵ d'ensembles fermés et d'ensembles ouverts extraits d'un espace (V) parfaitement séparable au sens de M. Fréchet, \mathcal{T} a même puissance que l'une de ses sous-familles composée d'ensembles fermés deux à deux disjoints.*

Définitions. E étant un ensemble partiellement ordonné, posons: $\Gamma E =$ borne $\sup tF$, F parcourant tous les sous-ensembles bien ordonnés de E et tous les sous-ensembles inversement bien ordonnés de E ($tF \equiv$ type

¹Cf. C.R. Acad. Sci. Paris 192 (1931), p. 1011

²W. Sierpinski, Ensig. Math. 30 (1931), p. 240

³Pour la terminologie, voir M. Fréchet, *Espaces abstraits*, Paris, 1928, p. 290.

⁴A. Lindenbaum, C.R. Acad. Sci. Paris, 192 (1931), p. 1511.

⁵Pour la terminologie, C.R. Acad. Sci. Paris 199 (1934), p. 112

d'ordre de F); désignons, pour tout $a \in E$, par $[a]_E$ l'ensemble de tous les points de E dont chacun est comparable à a ; disons, enfin, que E est *normal* s'il est fini ou s'il a même puissance que l'un de ses sous-ensembles F jouissant de la propriété suivante: pour tout point a de F , le sous-ensemble $[a]$ de F est ordonné.

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Est normal tout tableau ramifié E dans lequel existe une fonction réelle uniforme presque croissante, pourvu que E vérifie l'une de ces deux conditions:*

I. *Quel que soit le point a de E , $\Gamma[a]_E = \Gamma E$;*

II. *ΓE est un nombre ordinal de première espèce ou bien un ordinal de seconde espèce tel que, quelle que soit la suite croissante d'ordinaux $< \Gamma E$ et $\rightarrow \Gamma E$, le type d'ordre de celle-ci est ΓF ($\equiv \Gamma E$ est régulier).*

Remarquons que, pour que tout tableau ramifié soit normal⁶, il faut et il suffit que tout tableau ramifié dans lequel existe une fonction réelle uniforme presque croissante soit normal.

⁶C.R. Acad. Sci. Paris, 202 (1936), p. 109.

UNE PROPRIÉTÉ DES FAMILLES D'ENSEMBLES BIEN ORDONNÉS LINÉAIRES

Introduction

1. J'avais posé le problème¹ de savoir si chaque famille non dénombrable d'ensembles bien ordonnés de nombres rationnels contient une sous-famille non dénombrable dont aucun élément n'est segment initial d'un autre élément de la sous-famille.

Dans ce qui suit, je prouverai que la réponse au problème précédent est affirmative (v. lemme 1), ce qui me permettra de prouver – pour justifier le titre de l'Article – que toute famille non dénombrable F d'ensembles linéaires bien ordonnés contient une sous-famille Φ de même puissance que la famille F et jouissant de la propriété qu'aucun élément de Φ n'est un segment initial d'un autre élément de Φ (v. lemme 2), fait qui à son tour entraîne la normalité² de tout tableau ramifié³ dans lequel il existe une fonction réelle uniforme croissante (v. théorème 1) ou même une opération uniforme croissante transformant ce tableau en un ensemble ordonné séparable (v. théorème 2^{bis})⁴.

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. *Studia Math.* 9 (1940), 23–42. (Reçu par la Rédaction le 31.08.1937)

¹G. Kurepa, *Ensembles ordonnés et ramifiés*, (Thèse, Paris, 1935); aussi *Publ. Math. Univ. Belgrade* 4 (1935) p. 1–138, en particulier p. 3 et p. 134 en bas.

²Un ensemble partiellement ordonné est dit *normal* s'il est fini ou a même puissance que l'un de ses sous-ensembles F jouissant de la propriété suivante: quel que soit le point a de F , l'ensemble $[a]_F$ des points de F comparables à a est un sous-ensemble ordonné de F .

³Un ensemble E partiellement ordonné par une relation d'ordre $<$ est dit un *tableau ramifié* par rapport à $<$ si, quel que soit le point a de E , l'ensemble $(\cdot, a)_E$ des points x de E vérifiant $x < a$ est vide ou un sous-ensemble bien ordonné de E .

⁴En convenant qu'un ensemble E partiellement ordonné par ρ vérifie la condition (β_0) s'il existe: un ensemble ordonné séparable F et un procédé faisant correspondre à tout point a de E un seul point $f(a)$ de F de manière que, pour tout point b de E vérifiant $a\rho b$, on ait $f(a) \leq f(b)$, l'inégalité $f(a) < f(a_0)$ ayant lieu alors pour au moins un point a_0 de E vérifiant $a\rho a_0$ (bien entendu, $<$ désigne la relation par rapport à laquelle F est

2. D'une manière générale, E étant un ensemble ordonné quelconque, soit⁵

$$(1) \quad \sigma E$$

la famille de tous les sous-ensembles bien ordonnés de E , ordonnée partiellement par la relation \triangleleft que voici: A, B étant deux ensembles bien ordonnés quelconques,

$$(2) \quad A \triangleleft B$$

équivalent à ce que A est un segment initial de B sans que B soit un segment initial de A , avec la convention que, quel que soit l'ensemble bien ordonné non vide B , l'ensemble ordonné vide L vérifie $L \triangleleft B$.

On vérifie sans peine que σE est, par rapport à \triangleleft , un tableau ramifié normal^{2,3}; mais le problème de savoir, si tout sous-ensemble du tableau σE est normal, est bien difficile⁶.

Dans le présent Article, le problème sera traité pour les quatre cas où l'ensemble ordonné E vérifie l'une des conditions suivantes:

I. E est au plus dénombrable, donc, d'après G. Cantor, semblable à un ensemble de nombres rationnels;

II. E est parfaitement séparable au sens de M. Fréchet⁷, donc, d'après A. Denjoy⁸, semblable à un ensemble linéaire;

III. E est séparable au sens de M. Fréchet, donc semblable à un ensemble pseudo-linéaire⁹;

ordonné séparable), nous avons prouvé ailleurs la normalité de tout tableau ramifié T vérifiant la condition (β_0) , pourvu que la puissance du rang γT de T soit de la forme $\aleph_{\alpha+1}$ ($\alpha \geq 0$).

⁵Sous le nom de *procédé* σ sur E on a introduit (loc. cit.¹ p. 99) σE avec la restriction que tout élément de σE soit non vide et borné.

⁶et équivalent à l'ainsi dite *hypothèse de ramification* (cf. loc. cit.¹ p. 130).

⁷Un ensemble ordonné E est dit *parfaitement séparable* s'il y a une famille au plus dénombrable F d'intervalles de E telle que tout intervalle non vide de E soit la réunion de certains intervalles appartenant à F .

⁸Voir A. Denjoy, Sur les ensembles ordonnés. Comptes Rendus 192 (1931) p. 1011-1014.

⁹Voir G. Kurepa, Sur les relations d'ordre, Bull. Académie Zagreb (1937). En désignant par $2 \times [0, 1]$ l'ensemble des couples (a, b) , ($a \in [0, 1], b = 0$ ou 1), ceux-ci étant ordonnés par le principe de première différence, tout sous-ensemble de $2 \times [0, 1]$ est appelé *pseudo-linéaire*. Remarquons que $2 \times [0, 1]$ est séparable sans être parfaitement séparable.

IV. E vérifie la condition de Souslin, à savoir que toute famille d'intervalles non vides de E est au plus dénombrable¹⁰.

Alors que, dans les trois premiers cas, le problème de la normalité de tout sous-ensemble du tableau σE sera résolu par l'affirmative, le problème analogue concernant le quatrième cas, étant équivalent au problème bien connu de Souslin, reste ouvert; c'est qu'on peut démontrer ceci:

Soit E un ensemble ordonné tel que chaque famille d'intervalles non vides de E est au plus dénombrable; pour que E soit séparable, il faut et il suffit que chaque famille non dénombrable d'ensembles bien ordonnés extraits de E contienne une sous-famille non dénombrable ne contenant aucun couple d'éléments distincts dont l'un est un segment initial de l'autre (v. théorème 3).

I. Familles d'ensembles bien ordonnés de nombres rationnels.

LEMME 1. *Chaque famille non dénombrable F d'ensembles bien ordonnés de nombres rationnels contient une famille Φ de même puissance que la famille F et telle qu'aucun de ses éléments n'est un segment initial d'un autre élément de Φ .*

3. Pour démontrer le lemme, nous traiterons la famille F comme un tableau ramifié par rapport à la relation \triangleleft , définie par (2), et remarquerons qu'alors le lemme 1 s'exprime encore en disant que le tableau ramifié F contient un sous-ensemble disjonctif¹¹ Φ vérifiant $pF = p\Phi$ ¹².

Manifestement, tout sous-ensemble ordonné du tableau F est au plus dénombrable; dès lors¹³ $\gamma F \leq \Omega$.

Or¹⁴, tout tableau ramifié non dénombrable dont chaque sous-ensemble ordonné est au plus dénombrable a la même puissance que l'un de

¹⁰Nous ne savons pas résoudre le problème, s'il existe un ensemble ordonné vérifiant la condition de Souslin et contenant, au point de vue de l'ordre, tout ensemble ordonné vérifiant la condition de Souslin (bien entendu, si la réponse au problème de Souslin est affirmative, l'ensemble $2 \times [0, 1]$ de tout à l'heure est un pareil ensemble).

¹¹Un ensemble partiellement ordonné est dit *disjonctif* s'il ne contient aucun couple de points distincts comparables.

¹² pX veut dire *puissance de X* .

¹³ T étant un tableau ramifié, on désigne, pour tout indice α , par $R_\alpha T$ l'ensemble des points a de T pour chacun desquels l'ensemble $(\cdot, a)_T$ des points de T précédant a est de type d'ordre α . Le rang de T , en signes γT , est le premier nombre ordinal α vérifiant $R_\alpha T = 0$.

¹⁴Voir loc. cit.¹ pp. 107 et 108, où nous avons prouvé la normalité (voir²) de tout tableau ramifié T vérifiant $pT > p\gamma T$ (voir¹³), c'est-à-dire, si $pT > \aleph_0$, il y a un $F \leq T$ tel que, d'une part $pF = pT$, et de l'autre, pour tout $a \in F$, l'ensemble $[a]_F$ des points de F comparables à a est ordonné, donc bien ordonné; si, de plus, $pT > \aleph_0$ d'une part et si tout sous-ensemble ordonné de T est au plus dénombrable d'autre part, il est manifeste que l'ensemble disjonctif $R_0 F$ (voir¹³) vérifie $pR_0 F = pT$.

ses sous-ensembles disjonctifs¹¹⁾, pourvu que la puissance du tableau soit supérieure à celle du rang du tableau¹³⁾. C'est pourquoi, dans le cas qui nous occupe, nous pouvons ne traiter que le cas où

$$(3) \quad pF = \aleph_1, \quad \gamma F = \Omega.$$

4. Soient

$$(4) \quad r, A$$

un nombre rationnel et un ensemble bien ordonné non vide de nombres rationnels respectivement. α désignant le type d'ordre de l'ensemble A , celui-ci peut être écrit comme il suit:

$$(5) \quad A \equiv (a_0, a_1, \dots, a_\xi, \dots)_{\xi < \alpha} \text{ avec } a_\xi < a_\eta \text{ pour tout } \xi < \eta < \alpha;$$

bien entendu, pour tout $\xi < \alpha$, a_ξ est un nombre rationnel bien défini appartenant à A .

Définissons la fonction

$$(6) \quad \varphi(r, A)$$

de la façon suivante: si $r \in A$, $\varphi(r, A)$ désignera l'indice vérifiant, dans (5),

$$(7) \quad a_{\varphi(r, A)} = r;$$

si $r \notin A$, on posera $\varphi(r, A) = 0$. On aura donc

$$(8) \quad 0 \leq \varphi(r, A) < \alpha.$$

En posant

$$(9) \quad \varphi(r, F) = \text{borne sup}_{A \in F} \varphi(r, A),$$

on obtient

$$(10) \quad 0 \leq \varphi(r, F) \leq \Omega.$$

Démontrons qu'il existe un nombre rationnel r_0 vérifiant

$$(11) \quad \varphi(r_0, F) = \Omega;$$

bien entendu, nous supposons que F vérifie (3) et que tout élément de F est non vide.

Or, si l'on avait

$$(12) \quad \varphi(r, F) < \Omega$$

pour tout nombre rationnel r , alors, en posant

$$(13) \quad \delta = \underset{r}{\text{borne sup}} \varphi(r, F),$$

où r parcourt l'ensemble des nombres rationnels, la dénombrabilité de celui-ci entraînerait, vu (12), que

$$(14) \quad \delta < \Omega.$$

Or, par supposition (3), $\gamma F = \Omega$, ce qui entraîne, F étant un tableau ramifié, l'existence, pour tout $\alpha < \Omega$, d'un sous-ensemble bien ordonné de F de type ordinal α . En particulier, A étant un élément de $R_{\delta+2}F$, en écrivant A sous la forme (5), on aurait $\alpha \geq \delta + 2$. Mais $a_{\delta+1}$ est un nombre rationnel vérifiant $\varphi(a_{\delta+1}, A) = \delta + 1$, ce qui est en contradiction avec la définition (13).

5. La relation (11) étant établie, on en déduit ceci:

Quel que soit le nombre ordinal $\nu < \Omega$, il existe un élément $A^\nu \in F$ vérifiant

$$(15) \quad \varphi(r_0, A^\nu) \geq \nu.$$

Ceci étant, soit A^0 un élément quelconque de F vérifiant

$$(16) \quad r_0 \in A^{0 \text{ } 15};$$

soit $0 < \alpha < \Omega$ et supposons que, pour tout $\xi < \alpha$, A^ξ soit un élément de F tel que

$$(17) \quad \varphi(r_0, A^\eta) < \varphi(r_0, A^\xi) \text{ pour tout } \eta < \xi;$$

alors A^α désignera un élément quelconque de F tel que

$$(17') \quad \varphi(r_0, A^\xi) < \varphi(r_0, A^\alpha) \quad (\xi < \alpha).$$

¹⁵ r_0 désigne un certain nombre rationnel vérifiant (11).

D'après la remarque de tout à l'heure, A^α existe: pour s'en convaincre, il suffit de poser $\nu = \text{borne sup}_{\xi < \alpha} \varphi(r_0, A^\xi)$ et $A^\alpha = A^\nu$.

Bref, nous avons prouvé l'existence d'une suite transfinie d'éléments de F

$$(18) \quad A^0, A^1, \dots, A^\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega)$$

telle que

$$(19) \quad \varphi(r_0, A^\xi) < \varphi(r_0, A^\eta) \text{ pour tout } \xi < \eta < \Omega.$$

Et voici la conclusion: l'ensemble des $A^\alpha (\alpha < \Omega)$ est un sous-ensemble disjonctif du tableau F , c'est-à-dire, quels que soient $\xi < \eta < \Omega$, les A^ξ, A^η sont deux éléments distincts de F ne vérifiant ni $A^\xi < A^\eta$ ni $A^\eta < A^\xi$.

En effet, soient $A^\xi \equiv (a_0^\xi, \dots, a_\zeta^\xi, \dots)_{\zeta < \alpha^\xi}$, $A^\eta \equiv (a_0^\eta, \dots, a_\zeta^\eta, \dots)_{\zeta < \alpha^\eta}$ les représentations de la forme (5) de A^ξ, A^η ; on a donc

$$(20) \quad a_0^\xi < a_1^\xi < \dots < a_\zeta^\xi < \dots, \quad (\zeta < \alpha^\xi)$$

$$(20') \quad a_0^\eta < a_1^\eta < \dots < a_\zeta^\eta < \dots, \quad (\zeta < \alpha^\eta).$$

Puisque

$$(21) \quad a_{\varphi(r_0, A^\xi)}^\xi = r_0, \quad a_{\varphi(r_0, A^\eta)}^\eta = r_0,$$

on aura

$$(22) \quad a_{\varphi(r_0, A^\xi)}^\xi = a_{\varphi(r_0, A^\eta)}^\eta.$$

Si, alors, l'on avait par exemple $A^\xi < A^\eta$, c'est-à-dire $a_\zeta^\xi = a_\zeta^\eta$ pour tout $\zeta < \alpha^\xi$, on obtiendrait en particulier, puisque $\varphi(r_0, A^\xi) < \alpha^\xi$,

$$a_{\varphi(r_0, A^\xi)}^\xi = a_{\varphi(r_0, A^\xi)}^\eta = r_0,$$

ce qui est impossible à cause des deux inégalités suivantes:

$$\varphi(r_0, A^\xi) \neq \varphi(r_0, A^\eta) \quad (\text{voir (18) et (19)})$$

$$a_{\varphi(r_0, A^\xi)}^\eta \neq a_{\varphi(r_0, A^\eta)}^\eta \quad (\text{voir (20')}).$$

L'impossibilité de $A^{\eta} \triangleleft A^{\xi}$ pouvant être démontrée d'une façon analogue, le lemme 1 est complètement établi.

II. Familles d'ensembles bien ordonnés linéaires

6. LEMME 2. *Chaque famille non dénombrable F d'ensembles bien ordonnés linéaires contient une famille Φ de puissance égale à celle de F et telle qu'aucun élément de Φ n'est un segment initial d'un autre élément de Φ (cf. lemme 1).*

Posons pour tout ensemble bien ordonné non vide A de nombres réels

$$(23) \quad f(A) = \text{borne sup}_{a \in A} a.$$

On aura

$$(24) \quad -\infty < f(A) \leq \infty;$$

de plus, quels que soient les ensembles bien ordonnés non vides linéaires A et B ,

$$(25) \quad A \triangleleft B \text{ entraîne } f(A) \leq f(B),$$

l'égalité $f(A) = f(B)$ ne pouvant avoir lieu que dans le cas où $A = B - f(A)$, ce qui, en particulier, entraîne que le type ordinal α de A est de seconde espèce et que le type ordinal de B est $\alpha + 1$.

Comme ci-dessus, nous pouvons supposer que F vérifie (3) et que, de plus, $pR_{\alpha}F \leq \aleph_0$ pour tout $\alpha < \Omega$. Désignons par F_0, F_1 respectivement la famille des éléments de $R_{\alpha+1}F$ et $R_{\omega\alpha}F$ ($\alpha < \Omega$); par conséquent $F_1 = F - F_0$.

i désignant l'un des deux nombres 0, 1, la famille F_i jouit de la propriété que pour tout couple d'éléments A, B de F_i vérifiant $A \triangleleft B$, on aura $f(A) < f(B)$, propriété qu'on peut exprimer en disant que $f(A)$ ($A \in F_i$), est une fonction réelle uniforme croissante dans le tableau ramifié F_i .

Par conséquent, le lemme 2 est un cas particulier du

THÉORÈME 1. *Tout tableau ramifié non dénombrable T sur lequel il existe une fonction réelle uniforme croissante est de même puissance que l'un de ses sous-ensembles composé de points deux à deux incomparables.*

7. Démontrons le théorème 1. En désignant par

$$(26) \quad f(a) \quad (a \in T)$$

une fonction réelle uniforme croissante dans T , on aura $\gamma T \leq \Omega$, et, comme dans (3), nous pouvons supposer que $\gamma T = \Omega$ et que chacun des ensembles $R_\alpha T (\alpha < \Omega)$ ¹³ est au plus dénombrable.

En rappelant que tout sous-ensemble maximum N de T tel que les relations $a \in N, b \in N$ entraînent $(., a) = (., b)_T$ ¹⁶ s'appelle un *noeud* de T , observons que tout noeud de T appartient à un et un seul des ensembles $R_\alpha T (\alpha < \gamma T)$; il est alors commode de qualifier N de *première* ou de *seconde espèce*, suivant que l'est le nombre α vérifiant $N \leq R_\alpha T$. De même, un point a de T sera dit un *point de T de première* ou de *seconde espèce dans T* , suivant que α vérifiant $a \in R_\alpha T$ est de première ou de seconde espèce.

8. Ceci fait, dans l'étude de la distribution des valeurs de la fonction $f(a)$ ($a \in T$), le cas où tout noeud de seconde espèce de T est composé d'un seul point est de beaucoup le plus simple.

C'est pour cette raison que nous allons associer à T un tableau ramifié T_0 dont tout noeud de seconde espèce n'aura qu'un point.

Nous désignerons par

$$(27) \quad T_0$$

la famille des ensembles A où A parcourt d'une part tous les sous-ensembles de T dont chacun est composé d'un seul point de première espèce de T et d'autre part tous les noeuds de seconde espèce du tableau T . Nous conviendrons que, pour tout couple d'éléments A, B de T_0 , le signe

$$(28) \quad A \rho B$$

voudra dire l'existence d'un $a \in A$ et d'un $b \in B$ tels que $a \triangleleft b$ (\triangleleft désignant la relation d'ordre par rapport à laquelle T est un tableau ramifié et $f(a)$ ($a \in T$) une fonction croissante dans T).

On démontre sans peine que T_0 est, par rapport à ρ , un tableau ramifié vérifiant

$$(29) \quad \gamma T_0 = \gamma T, \quad pR_\alpha T_0 \leq pR_\alpha T \quad (\alpha < \gamma T_0),$$

ce qui, vu n^o7, donne

$$(30) \quad pT_0 = \aleph_1, \quad \gamma T_0 = \Omega, \quad pR_\alpha T_0 \leq \aleph_0 \quad (\alpha < \Omega).$$

De plus, tout noeud de seconde espèce de T_0 est composé d'un seul point.

¹⁶Rappelons que $(., a)_T$ désigne l'ensemble des points de T précédant a .

Pour démontrer l'existence, dans T , d'un sous-ensemble disjonctif non dénombrable, il suffit de prouver l'existence d'un sous-ensemble disjonctif non dénombrable dans le tableau T_0 . En effet, F_0 étant un sous-ensemble disjonctif quelconque du tableau T_0 , soit F un sous-ensemble quelconque du sous-ensemble $\sum_A A$ ($A \in F_0$) du tableau T , ayant avec chacun des sous-ensembles A de T un et un seul point en commun; manifestement F sera un sous-ensemble disjonctif de T vérifiant $pF = pF_0$.

9. Prouvons donc que T_0 contient un sous-ensemble disjonctif non dénombrable¹⁷; nous le ferons en nous servant du lemme 1. Il existe une fonction réelle uniforme, croissante dans T_0 et univalente dans tout noeud de T_0 ¹⁷, de plus, à cause de $pR_\alpha T_0 \leq \aleph_0$ ($\alpha < \gamma T_0$), il en existe une ne prenant, dans un noeud de première espèce quelconque de T_0 , que des valeurs rationnelles.

Pour tout $A \in T_0$, posons

$$(30) \quad F(A) = f(a)$$

si A est un point a de première espèce de T , et

$$(30') \quad F(A) = \text{borne sup}_a f(a),$$

a parcourant tous les points de T dont chacun précède tout point du noeud A de T si A est un noeud de seconde espèce de T (bien entendu, $f(a)$ ($a \in T$), a la signification (26)).

Manifestement $F(A)$ ($A \in T_0$) est une fonction réelle uniforme et croissante dans T_0 .

10. Soit N un noeud quelconque de première espèce de T_0 ; à la suite de (30), N est au plus dénombrable; alors, $k(N)$ désignant le nombre des points de N ou ω , suivant que N est fini ou infini, soient

$$(31) \quad A_0, \dots, A_n, \dots \quad (n < k(N))$$

¹⁷La démonstration de ce fait fera usage d'une part de ce que tout noeud de seconde espèce de T_0 est composé d'un seul point et d'autre part de l'existence d'une fonction réelle uniforme croissante dans T_0 .

D'ailleurs, en modifiant légèrement les raisonnements des nos 9 et 10, on démontre ceci:

T étant un tableau ramifié de puissance $\leq 2^{\aleph_0}$ sur lequel il existe une fonction réelle uniforme croissante, si tout noeud de seconde espèce de T est composé d'un seul point, il existe une fonction réelle uniforme croissante dans T et univalente dans chacun des noeuds de T (la question si, alors, il en existe une fonction univalente dans T tout entier, reste ouverte).

où $A_n \neq A_{n'}$ pour tout $n < n' < k(N)$, tous les points du noeud N .

α vérifiant $R_\alpha T_0 \geq N$, distinguons deux cas, suivant que $\alpha = 0$ ou $\alpha > 0$.

Dans le cas où $\alpha = 0$, soit $\varphi_N(A_0) < F(A_0)$ un nombre rationnel quelconque; soit $0 < n < k(N)$. Les nombres rationnels

$$(32) \quad \varphi_N(A_0), \dots, \varphi_N(A_{n-1})$$

étant définis de manière que d'une part

$$(33) \quad \varphi_N(A_i) \leq F(A_i) \text{ pour tout } i < n$$

et d'autre part

$$(33') \quad \varphi_N(A_i) \neq \varphi_N(A_j) \text{ pour tout } i < j < n,$$

soit $\varphi_N(A_n)$ un nombre rationnel quelconque vérifiant

$$(34) \quad \varphi_N(A_n) \leq F(A_n), \quad \varphi_N(A_n) \neq \varphi_N(A_i) \text{ pour } i < n.$$

Si $\alpha > 0$, on définira $\varphi_N(A_n)$ ($n < k(N)$) comme il suit: en désignant, pour tout $n < k(N)$, par A'_n le point de $R_{\alpha-1}T_0$ vérifiant $A'_n \notin A_n$, $\varphi_N(A_0)$ sera un point rationnel quelconque vérifiant

$$(35) \quad F(A'_0) < \varphi_N(A_0) = F(A_0);$$

d'une manière générale, pour tout $0 < n < k(N)$, $\varphi_N(A_n)$ sera un point rationnel quelconque tel que

$$(36) \quad F(A'_n) < \varphi_N(A_n) \leq F(A_n), \quad \varphi_N(A_n) \neq \varphi_N(A_i) \text{ pour } i < n.$$

Définissons, pour tout $A \in T_0$, le nombre réel $\varphi(A)$:

$$(37) \quad \varphi(A) = F(A) \text{ ou } \varphi_N(A),$$

suivant que A est un noeud de seconde espèce de T ou un ensemble composé d'un point de première espèce de T , N désignant, dans le second cas, le noeud de T_0 contenant le point A de T_0 .

$\varphi(A)$ ($A \in T_0$) est une fonction réelle uniforme croissante; en plus, elle est univalente dans tout noeud de T_0 et ne prend que des valeurs rationnelles dans tout point de première espèce du tableau T_0 .

11. Et voici la conclusion:

A étant un élément de T_0 , soit $E(A)$ l'ensemble des nombres réels $\varphi(X)$, X parcourant tous les points de première espèce de T_0 vérifiant $X \rho A$ (voir (28)), auquel on ajoute le point $\varphi(A)$ dans le cas où A est un point de première espèce de T_0 .

$E(A)$ est un ensemble bien ordonné non vide de nombres rationnels, bien déterminé par A .

A, B étant deux éléments quelconques de T_0 tels que $A \rho B$, on a $E(A) \triangleleft E(B)$; si A, B sont incomparables par rapport à la relation ρ définie dans (28), $E(A), E(B)$ sont incomparables par rapport à la relation \triangleleft définie par (2); autrement dit, en désignant par $E(T_0)$ l'ensemble des $E(A)$ ($A \in T_0$) partiellement ordonné par \triangleleft , les deux ensembles partiellement ordonnés $T_0, E(T_0)$ sont semblables, la transformation $E(A)$ ($A \in T_0$) étant une similitude entre eux.

Or, $E(T_0)$ est une famille non dénombrable d'ensembles bien ordonnés de nombres rationnels; elle contient donc, d'après le lemme 1, une sous-famille non dénombrable Φ d'éléments deux à deux incomparables par rapport à \triangleleft ; en désignant par F l'ensemble des $A \in T_0$ vérifiant $E(A) \in \Phi$, F est un sous-ensemble disjonctif non dénombrable de T_0 , c.q.f.d.

12. En nous reportant aux définitions et notations de l'Introduction, le lemme 2 entraîne le

LEMME 2^{bis}. *E étant un ensemble ordonné parfaitement séparable quelconque, tout sous-ensemble T du tableau ramifié σE est normal; en particulier, dans le cas où T est non dénombrable, T est de même puissance que l'un de ses sous-ensembles disjonctifs.*

III. Familles d'ensembles bien ordonnés pseudo-linéaires⁹

13. THÉORÈME 2. *Quel que soit l'ensemble ordonné séparable E , tout sous-ensemble du tableau ramifié σE est normal; en particulier, tout sous-ensemble non dénombrable de σE est de même puissance que l'un de ses sous-ensembles disjonctifs.*

E étant séparable, on aura $\gamma(\sigma E) \leq \Omega$; dès lors, pour prouver la normalité de tout $F \leq \sigma E$, nous pouvons, comme ci-dessus, nous borner au cas où

$$(38) \quad \gamma F = \Omega, \quad pR_\alpha F \leq \aleph_\alpha \quad (\alpha < \Omega);$$

c'est ce que nous ferons; de plus, nous supposons que l'ensemble vide n'est pas élément de F .

Soit

$$(39) \quad lE$$

l'ensemble ordonné qu'on obtient de E en comblant chaque lacune de l'ensemble ordonné E par un point¹⁸; posons, pour tout $A \in F$

$$(40) \quad f(A) = \text{borne sup}_{a \in A} a \quad (\text{rel. } lE);$$

$f(A)$ est un point bien déterminé de lE tel que

$$(41) \quad \text{les relations } A \in F, B \in F, A \triangleleft B \text{ entraînent } f(A) \leq f(B),$$

avec la même remarque que celle à (25) dans n^0 6. Notamment, en désignant par F_1 l'ensemble des éléments de F dont le type d'ordre est un ordinal de première espèce - rappelons que tout élément de F est un sous-ensemble bien ordonné de E - et en posant $F_2 = F - F_1$, on aura ce qui suit: i désignant l'un des nombres 1, 2,

$$(41') \quad \text{les relations } A \in F_i, B \in F_i, A \triangleleft B \text{ entraînent } f(A) < f(B);$$

bien entendu, $<$ désigne la relation d'ordre ordonnant lE .

A parcourant F_i , soit

$$(42) \quad f(F_i)$$

l'ensemble des points $f(A)$ de lE ; désignons pour tout $a \in f(F_i)$ par

$$(43) \quad f_i^{-1}(a)$$

la totalité des $A \in F_i$ vérifiant $f(A) = a$; manifestement les éléments de $f_i^{-1}(a)$, s'il y en a plus d'un, sont deux à deux incomparables. Dès lors, l'une au moins des familles F_1, F_2 , soit F_i , étant non dénombrable, on a

$$(44) \quad pF_i = pF;$$

s'il y avait un point a de $f(F_i)$ tel que $f_i^{-1}(a)$ était non dénombrable, $f_i^{-1}(a)$ serait un sous-ensemble disjonctif non dénombrable du tableau ramifié F_i , et à fortiori de F , ce qui prouverait le théorème 2.

¹⁸Notons que, E étant séparable, lE l'est aussi.

14. Examinons le cas où pour tout $a \in f(F_i)$, $f_i^{-1}(a)$ est au plus dénombrable; puisque $F_i = \sum_a f_i^{-1}(a)$ ($a \in f(F_i)$), on a

$$(45) \quad pf(F_i) = pF_i = \aleph_i.$$

Soit, pour tout $a \in f(F_i)$, $k_i(a)$ un certain élément de F_i vérifiant

$$(46) \quad f(k_i(a)) = a;$$

soit

$$(47) \quad K_i \text{ la famille des } k_i(a) \quad (a \in f(F_i)).$$

Manifestement la transformation

$$(48) \quad a \rightleftharpoons k_i(a) \quad (a \in f(F_i))$$

est biunivoque, ce qui, vu (45), donne

$$(49) \quad pK_i = \aleph_i.$$

15. Considérons le sous-ensemble $f(F_i)$ de l'ensemble ordonné séparable IE . Soit

$$(50) \quad \Delta_i$$

l'ensemble des extrémités gauches des sauts de seconde espèce de l'ensemble ordonné $f(F_i)$ ¹⁹.

On aura

$$(51) \quad p\Delta_i \leq \aleph_i.$$

Dans le cas où $p\Delta_i \leq \aleph_0$, on sait que l'ensemble ordonné $f(F_i)$ est semblable à un ensemble linéaire²⁰. Si alors $\varphi_i(a)$, ($a \in f(F_i)$), est une similitude transformant $f(F_i)$ dans un ensemble linéaire, la transformation

$$\varphi_i(f(A)) \quad (A \in F_i)$$

¹⁹Rappelons que tout couple de points consécutifs d'un ensemble ordonné F dont chacun est un point d'accumulation de F s'appelle un *saut de seconde espèce* de l'ensemble F .

²⁰En effet, pour qu'un ensemble ordonné soit semblable à un ensemble linéaire, il faut et il suffit qu'il soit séparable et que la famille de ses sauts de seconde espèce¹⁹ soit au plus dénombrable (voir loc. cit.⁸).

sera une fonction réelle uniforme croissante dans le tableau F_i , ce qui, d'après le théorème 1, entraîne la normalité de F_i .

16. Examinons le cas où

$$(52) \quad p\Delta_i = \aleph_1.$$

Tout d'abord, lE étant séparable, la relation $\Delta_i \leq lE$ entraîne la séparabilité de Δ_i ; d'autre part, on vérifie que, quel que soit le couple de points distincts a, b de Δ_i , l'ensemble des points de lE (et de E) entre a, b est non vide; dès lors, l'ensemble des couples de points consécutifs de Δ_i est au plus dénombrable, ce qui, vu la séparabilité de Δ_i , entraîne l'existence d'une transformation par similitude, soit $\psi_i(a)$ ($a \in \Delta_i$), de l'ensemble ordonné Δ_i dans un ensemble linéaire. En désignant alors par F_i^i l'ensemble des éléments $A \in K_i$ vérifiant $f(A) \in \Delta_i$, la transformation

$$\psi_i(f(A)) \quad (A \in F_i^i)$$

est une fonction réelle uniforme croissante dans le tableau F_i^i . Or, à la suite de (48)

$$pF_i^i = p\Delta_i, \quad F_i^i \leq F_i,$$

donc, vu (52),

$$pF_i^i = \aleph_1;$$

à cause du théorème 1, le tableau F_i^i , et à fortiori le tableau F_i , donc le tableau F , contient un sous-ensemble disjonctif non dénombrable, c.q.f.d.

17. La démonstration du théorème 2 s'applique pour démontrer le

THÉORÈME 2^{bis}. *Tout tableau ramifié auquel on peut attacher un ensemble ordonné séparable E et une transformation uniforme et croissante du tableau dans E , est normal.*

COROLLAIRE. *Est normal tout tableau ramifié dont l'ordre partiel peut être élargi de manière que le tableau devienne un ensemble ordonné séparable.*

IV. Familles d'ensembles bien ordonnés extraits d'un ensemble ordonné vérifiant la condition de Souslin

La question se pose si, dans les théorèmes 2, 2^{bis} (et dans le corollaire précédent), l'on peut remplacer la condition de séparabilité de E par celle que E vérifie la condition de Souslin, c'est-à-dire que toute famille d'intervalles non vides de E deux à deux disjoints soit au plus dénombrable.

La question est délicate; en effet, d'une part, on ne sait pas si tout ensemble ordonné vérifiant la condition de Souslin est nécessairement séparable, et de l'autre, on peut prouver le

THÉORÈME 3. *Pour qu'un ensemble ordonné E vérifiant la condition de Souslin soit séparable, il faut et il suffit que tout sous-ensemble du tableau ramifié σE soit normal²¹ (cf. théorème 2).*

18. Puisque tout ensemble ordonné séparable vérifie la condition de Souslin, le théorème 2 dit que la condition du théorème 3 est suffisante; prouvons que la condition du théorème 3 est nécessaire: il s'agit donc de prouver la séparabilité de tout ensemble ordonné E vérifiant la condition de Souslin et tel que tout sous-ensemble de σE est normal²¹.

19. Prouvons qu'on peut supposer que l'ensemble ordonné E soit continu.

Tout d'abord, Δ étant l'ensemble des extrémités gauches des sauts de seconde espèce de E ¹⁹, soit

$$(53) \quad s(E - \Delta)$$

l'ensemble ordonné qui s'obtient de l'ensemble ordonné $E - \Delta$ en plaçant entre tout couple de points consécutifs de $E - \Delta$ (c'est-à-dire dans tout saut de $E - \Delta$) un ensemble ordonné semblable à l'ensemble des nombres réels; enfin, désignons par

$$(54) \quad ls(E - \Delta)$$

l'ensemble ordonné qu'on obtient de $s(E - \Delta)$ en comblant chaque lacune de $s(E - \Delta)$ par un point.

On démontre sans peine que, d'une part, si E vérifie la condition de Souslin, il en est de même de chacun des ensembles

$$E - \Delta, \quad s(E - \Delta), \quad ls(E - \Delta)$$

et, d'autre part, que la normalité de tout tableau extrait du tableau σE entraîne celle de tout tableau ramifié appartenant à n'importe lequel des tableaux ramifiés

$$\sigma(E - \Delta), \quad \sigma(s(E - \Delta)), \quad \sigma(ls(E - \Delta)).$$

²¹Pour la terminologie, voir Introduction.

Réciproquement, on démontre de proche en proche que la séparabilité de l'ensemble ordonné $ls(E - \Delta)$ entraîne celle de chacun des ensembles

$$s(E - \Delta), \quad E - \Delta, \quad E.$$

Or, toutes les fois que E se compose de plus d'un point, l'ensemble ordonné $ls(E - \Delta)$ est continu, ce qui prouve qu'on peut bien supposer que l'ensemble ordonné E dont il est question dans le théorème 3 soit continu; c'est ce que nous ferons.

Pour prouver la séparabilité de E , nous allons nous servir d'une ϑ -partition complète de E^{22} en l'adaptant aux besoins de notre cause.

20. Désignons, pour tout segment S de E ayant plus d'un point, par

$$(55) \quad \varphi(S)$$

un sous-ensemble quelconque de S semblable au segment $[0, 1]$ des nombres réels et tel que, quel que soit le point a de S différant des deux extrémités r, s de S , il y ait deux points de $\varphi(S)$ (variant avec a) distincts de r et s , et dont l'un précède le point a alors que l'autre succède à a .

On en déduit que S et $\varphi(S)$ ont mêmes extrémités.

Si, pour tout point $a \in \varphi(S)$, l'on désigne par S_a une portion de S contenant le point a et si $S_a S_{a'} = 0$ pour tout couple de points distincts a, a' de $\varphi(S)$, la décomposition

$$(56) \quad S = \sum_a S_a \quad (a \in \varphi(S))$$

est bien déterminée et on vérifie que, pour tout $a \in \varphi(S)$, S_a est un segment de S pouvant se réduire à un point.

Ceci étant, soit D_0 la famille composée de l'ensemble continu E lui-même; d'une manière générale, soit $\alpha > 0$ un nombre ordinal et supposons que pour tout $\xi < \alpha$ l'on ait déterminé la famille D_ξ composée de portions de E de manière qu'il y ait un point a de E tel que l'ensemble (a) composé du point a ne figure comme élément dans aucune famille $D_\xi (\xi < \alpha)$.

Définissons maintenant D_α .

Si α est de première espèce et S parcourt les éléments de $D_{\alpha-1}$ dont chacun se compose de plus d'un point, alors, en écrivant comme ci-dessus $S = \sum_a S_a (a \in \varphi(S))$, soit D_α la famille des S_a .

²²Voir loc. cit.¹ p. 114 et p. 118.

Si α est de seconde espèce, D_α désignera la famille des ensembles

$$\prod_{\xi < \alpha} E_0 E_1 \dots E_\xi,$$

les E_ξ étant tels que $E_\xi \in D_\xi$ et $E_\xi > E_\eta$ pour tout $\xi < \eta < \alpha$.

En désignant par

$$(57) \quad \gamma$$

le premier ordinal tel que, quel que soit le point a de E , l'ensemble (a) figure dans l'une des familles D_α ($\alpha < \gamma$), la famille D des éléments des D_α ($\alpha < \gamma$), s'appelle une ϑ -partition complète de E .

Soient pour tout $\alpha < \gamma$:

$$(58) \quad \Psi D_\alpha$$

la famille des éléments de D_α dont chacun a plus d'un point, et

$$(59) \quad \Psi D$$

la famille de tous les éléments des ΨD_α ($\alpha < \gamma$).

21. Nous allons prouver que

$$(60) \quad p\Psi D \leq \aleph_0.$$

Tout d'abord, on démontre que tout élément de ΨD est un segment de E ayant plus d'un point et que, quels que soient deux éléments distincts A, B de ΨD , ils n'ont aucune extrémité en commun et sont tels que

$$(61) \quad \text{ou bien } A < B, \text{ ou bien } B < A, \text{ ou bien } AB = 0;$$

enfin, pour tout $\xi < \eta < \gamma$, on a $\Psi D_\xi \cdot \Psi D_\eta = 0$.

Ceci étant, désignons pour tout $A \in \Psi D$ par

$$(62) \quad k(A)$$

l'ensemble des extrémités gauches des éléments X de ΨD vérifiant la relation $A \leq X$; on voit que, α étant défini par $A \in \Psi D_\alpha$, $k(A)$ est un sous-ensemble bien ordonné de type $\alpha + 1$ de E ; de plus, pour tout couple d'éléments

distincts A, B de ΨD , les relations $A < B, B < A, AB = 0$ entraînent respectivement

$$k(A) \triangleleft k(B), \quad k(B) \triangleleft k(A), \quad k(A) \parallel_{\triangleleft} k(B),$$

le signe $k(A) \parallel_{\triangleleft} k(B)$ voulant dire que $k(A)$ et $k(B)$ sont deux ensembles bien ordonnés incomparables par rapport à la relation \triangleleft définie par (2).

Par conséquent, en désignant par

$$(63) \quad k(D)$$

la famille des $k(A)$ ($A \in \Psi D$), on aura

$$(64) \quad p\Psi D = pk(D).$$

22. Or,

$$(65) \quad k(D) \leq \sigma E;$$

donc, par hypothèse, le tableau ramifié $k(D)$ est normal. Tout sous-ensemble bien ordonné de E (donc aussi tout sous-ensemble ordonné du tableau σE) étant au plus dénombrable, on en déduit que tout sous-ensemble non dénombrable du tableau σE contient un sous-ensemble disjoint non dénombrable.

Si, alors, on avait $p\Psi D > \aleph_0$, la relation (64) entraînerait $pk(D) > \aleph_0$, et, comme nous venons de voir, le tableau $k(D)$ contiendrait un sous-ensemble, soit K , non dénombrable et composé d'éléments deux à deux incomparables par rapport à \triangleleft ; en désignant par D^0 la famille des $A \in \Psi D$ vérifiant $k(A) \in K$, on aurait $pD^0 = pK$, donc $pD^0 > \aleph_0$. Tout élément de D^0 est un segment de E ayant plus d'un point; en désignant donc par D^1 la famille des intervalles de l'ensemble ordonné continu E dont chacun a mêmes extrémités que l'un des segments appartenant à K , D^1 serait une famille non dénombrable d'intervalles non vides de E , ce qui est impossible, E vérifiant la condition de Souslin.

On a donc $pk(D) \leq \aleph_0$ ce qui, vu (64), démontre (60).

23. Ceci étant, considérons la famille des ensembles $\varphi(S)$ ($S \in \Psi(D)$) définis par (55); tout $\varphi(S)$ étant semblable au segment $[0, 1]$, désignons par

$$(66) \quad \varphi_0(S)$$

l'ensemble des points de S correspondant, dans une similitude entre S et $[0, 1]$, à l'ensemble des points rationnels de $[0, 1]$; on démontre facilement²³ que l'ensemble

$$(67) \quad \sum_S \varphi_0(S) \quad (S \in \Psi(D))$$

est un sous-ensemble de E partout dense sur E .

Or, l'ensemble (67) est dénombrable ce qui est une conséquence de (60) d'une part et de l'identité $p\varphi_0(S) = \aleph_0$ ($S \in \Psi(D)$) d'autre part; bref, l'ensemble ordonné E est séparable, c.q.f.d.

24. En modifiant légèrement la démonstration précédente du théorème 3, on démontre le

THÉORÈME 3^{bis}. *Pour qu'un ensemble ordonné E vérifiant la condition de Souslin soit séparable, il faut et il suffit que tout tableau ramifié, transformable en un sous-ensemble de E par une transformation uniforme croissante, soit normal (cf. théorème 2^{bis}).*

²³Voir loc. cit.¹ p. 120.

Editor's note: The abstract in Polish is omitted.

TRANSFORMATIONS MONOTONES DES ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS¹

1. Introduction. – Définitions. – Notations. – Résumé

1.1. Ensembles partiellement ordonnés. Ensembles disjonctifs

Soit $<$ une relation binaire; un ensemble E sera dit *partiellement ordonné par rapport à $<$* si, d'une part, quels que soient les points a, b, c de E tels que $a < b, b < c$, on a $a < c$, et, d'autre part, si pour aucun couple de points a, b de E on n'a à la fois $a < b, b < a$, ce qu'on peut exprimer en disant que, dans l'ensemble E , la relation $<$ est transitive et antisymétrique, respectivement. De plus, tout ensemble composé d'un point au plus sera considéré comme partiellement ordonné par rapport à n'importe quelle relation binaire.

Deux points a, b de E seront dits *comparables* par rapport à $<$ si $a = b, a < b$ ou $b < a$, et *incomparables* par rapport à $<$, dans le cas contraire.

Un ensemble partiellement ordonné sera dit *ordonné, disjonctif* respectivement s'il ne contient aucun couple de points distincts, incomparables et comparables, respectivement.

Pour un point a nous désignerons par

$$(1) \quad (., a)_E, (., a]_E, (a, .)_E, [a, .)_E$$

l'ensemble de tous les points X de E vérifiant respectivement

$$X < a, X \leq a, a < X, a \leq X,$$

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Revista de Ciencias (Lima) 42(434) (1940), 827–846 and 43(No 437) (1941), 483–500; the two parts, published separately, are pasted here.

¹Voir C.R. Acad. Sci. Paris 205, (1937), 1033–1035 où quelques-uns des résultats du présent article sont insérés

et par

$$(2) \quad [a]_E$$

l'ensemble de tous les points de E comparables à a ; dès lors

$$(2') \quad [a]_E = (., a)_E + [a, .)_E.$$

1.2. Transformations monotones, croissantes et presque croissantes

1.21. Si à tout point a d'un ensemble E_1 partiellement ordonné par rapport à une relation binaire $<_1$ on fait correspondre un point bien déterminé d'un ensemble E_2 ² partiellement ordonné par rapport à une relation binaire $<_2$ ³, et si pour tout couple de points a, b de E_1 tels que $a <_1 b$ on a $f(a) \leq_2 f(b)$ [$f(b) \leq_2 f(a)$], nous dirons que f , explicitement $f(a)$, ($a \in E_1$), est une *transformation* (uniforme) *non décroissante* [non croissante] de l'ensemble partiellement ordonné E_1 en ensemble partiellement ordonné E_2 .

Des transformations non décroissantes et des transformations non croissantes de E_1 en E_2 seront dites *transformations monotones* de E_1 en E_2 . Dans ce qui suit nous ne considérerons que des transformations non décroissantes.

Si alors f est une transformation monotone de E_1 en E_2 , nous désignerons, pour tout sous-ensemble non vide X de E_1 , par

$$(3) \quad f(X)$$

l'ensemble des $f(a)$, ($a \in X$), et on dira que l'ensemble $f(X)$ est le *transformé* de l'ensemble X par la transformation f . Manifestement $f(E_1)_1 \subseteq E_2$, sans que nécessairement $f(E_1) = E_2$.

Une transformation non décroissante f de E_1 en E_2 sera dite: *croissante* si, quels que soient les points a, b de E_1 .

$$(4) \quad \text{la relation de } a <_1 b \text{ entraîne } f(a) <_2 f(b);$$

presque croissante si quelque soit le point a de E_1 qui n'est pas un dernier point de E_1 , c'est-à-dire tel que $(a, .)_{E_1} \neq 0$, l'ensemble des $f(x)$, x parcourant tous les points de E_1 vérifiant $a \leq_1 x$, est composé de plus d'un point; autrement dit, si les relations

²Distinct ou non de E_1 .

³Distincte ou non de $<_1$.

$$(5) \quad a \in E_1, p(a, \cdot)_{E_1} > 1^4 \text{ entraînent } pf([a, \cdot)_{E_1}) < 1.$$

ou encore, si les relations

$$(5') \quad a \in E_1, p[a, \cdot)_{E_1} > 1 \text{ entraînent } p(f(a), \cdot) < 1.$$

1.22. Dans le cas particulier où E_2 est ordonné par $<_2$ et semblable à un ensemble linéaire, cas où l'on peut admettre que E_2 soit un ensemble linéaire, nous dirons que f est une fonction réelle uniforme croissante (presque croissante) dans E_1 si f est une transformation croissante (presque croissante) de E_1 en E_2 .

1.3. Exemples

1.31. Toute fonction réelle, croissante au sens strict (croisante et dépassant tout entier) est une transformation croissante (presque croissante) de l'ensemble ordonné linéaire dans lequel elle est définie en ensemble ordonné de tous les nombres réels.

1.32. En désignant, pour un ensemble Q , par UQ la famille de tous les sous-ensembles de Q , ordonnée partiellement par la relation d'inclusion \subset (égalité exclue), et en désignant, pour tout $G \leq UQ$, par $f(G)$ la réunion des ensembles constituant la famille G , f est une transformation non décroissante de UQ en soi-même.

1.33. Voici trois cas remarquables d'ensembles E_1 dans chacun desquels existe une fonction réelle uniforme croissante:

1.33.1. E_1 est ordonné et contient un ensemble *au plus dénombrable* D tel qu'entre deux points de E_1 n'appartenant pas simultanément à D existe un point de D ⁵.

1.33.2. E_1 est la famille de tous les sous-ensembles extraits d'un ensemble au plus dénombrable ordonné partiellement par \subset (ou \supset)⁶.

1.33.3. E_1 est la famille des ensembles fermés (ouverts) extraits d'un espace (V.) parfaitement séparable⁷ ordonné partiellement par $<$ ou $>$ ⁸.

1.4. Une condition nécessaire et une condition suffisante

⁴ p = puissance de X .

⁵Le théorème remonte à G. Cantor; voir K. Kuratowski, *Fundamenta Mathematicae*, 3, 1922, et A. Denjoy, *Comptes Rendus*, Paris, 192, 1931.

⁶Le théorème est dû à M.W. Sierpinski (*L'Ens. Math.*, 30, 1931, p. 240).

⁷Pour la terminologie, voir Maurice Fréchet, *Espaces abstraits*, Paris, 1928, XI + 296, p. 290.

⁸Le théorème est dû à M. Lindenbaum (*Comptes Rendus*, 192, 1931, p. 15 M). Dans ce qui suit, nous ferons usage de ce théorème (cf. th. 7).

1.41. Condition nécessaire. Tout ensemble bien ordonné linéaire étant, d'après un théorème de Cantor, au plus dénombrable, la condition *nécessaire* pour l'existence dans E_1 d'une fonction réelle *croissante* est que tout sous-ensemble bien ordonné de E_1 soit $< \aleph_0$. Mais cette condition n'est pas, dans le cas général, suffisante.

En effet, a parcourant tous les nombres réels, considérons la famille des ensembles linéaires des nombres $X \leq a$, a et des nombres $y < a$, ordonnée par \supset . On obtient un ensemble ordonné par \subset , soit tel que M chacun de ses sous-ensembles bien ordonné soit $\leq \aleph_0$. Or, dans M il n'existe aucune fonction réelle croissante, c'est-à-dire M n'est pas semblable à un ensemble linéaire (cf. N 3.31).

1.42. Condition suffisante. Si E_1 est somme de $\leq \aleph_0$ ensembles dont chacun est composé de points deux à deux incomparables, nous prouverons qu'il existe une fonction réelle croissante dans E_1 (cf. th. 1).

Mais cette condition suffisante n'est pas, dans le cas général, nécessaire: pour s'en rendre compte, il suffit de désigner par E_1 un ensemble linéaire non dénombrable quelconque.

1.43. Nous allons indiquer une classe d'ensembles partiellement ordonnés pour lesquels il y a lieu de se demander si les deux conditions précédentes sont encore respectivement suffisante et nécessaire.

1.5. Tableaux ramifiés (ensembles T).

1.51. Un ensemble E partiellement ordonné par une relation linéaire $<$ sera dit *tableau ramifié* par rapport à $<^9$ si, quel que soit le point a de E , l'ensemble $(\cdot, a)_E$ des *prédécesseurs* du point a , dans E est bien ordonné par rapport à $<^{10}$. Dans ce qui suit, nous désignerons par

(6) T

un tableau ramifié quelconque par rapport à une relation binaire quelconque que nous désignerons, tantôt par $<$, tantôt par ρ .

1.52. Ceci étant, revenons à la question du N^0 1.43. Alors que je ne sais même pas amorcer le problème de savoir si, dans un tableau ramifié dont tout sous-ensemble bien ordonné est $\leq \aleph_0$, il existe une fonction réelle croissante (quelles difficultés de la théorie de croissance s'y présentent!), je remarque que, par contre, le problème de savoir si tout tableau ramifié

⁹Voir Georges Kurepa, Ensemble ordonnés et ramifiés (thèse, Paris, 1935 ou Publ. Math. Univ. Belgrade, IV 1935, pp. 1-138), p. 73. Dans ce qui suit, ce Mémoire sera désigné par thèse.

¹⁰En y barrant "bien", on obtient la définition des ensembles ramifiés.

dans lequel existe une fonction réelle uniforme croissante est somme de $\leq \aleph_0$ de ses sous-ensembles dont chacun est composé de points deux à deux incomparables est équivalent à l'intéressant problème que voici:

Peut-on attacher à tout ensemble bien ordonné non vide F de nombres rationnels un nombre *rationnel*¹¹ bien déterminé $g(F)$ de telle façon que, pour tout couple d'ensembles bien ordonnés non vides de nombres rationnels A, B tels que A soit un segment initial de B , on ait $g(A) < g(B)$? (voir aussi N° 1.612).

1.53. La notion des T a donné naissance à celle de *normalité d'un ensemble partiellement ordonné*, que nous allons définir.

1.6. Normalité. Pour abrégé, nous dirons qu'un ensemble partiellement ordonné E est *dégénéré* si, quel que soit le point a de E l'ensemble $[a]_E$ est *ordonné* (cf. (2)). Par exemple, tout ensemble disjonctif ou ordonné est dégénéré.

Un ensemble partiellement ordonné sera dit *normal* s'il est fini ou s'il a même puissance que l'un de ses sous-ensembles dégénérés.

Dans ce qui suit nous rencontrerons des ensembles partiellement ordonnés anormaux, même parmi ceux jouissant de la propriété que chacun de leurs sous-ensembles ordonnés soit bien ordonnés (cf. note 28).

Par contre, le problème de savoir si tout tableau ramifié est normal reste encore ouvert.

Nous allons voir le rôle qui incombe dans cet ordre d'idées à des transformations croissantes et à des transformations presque croissantes des ensembles T .

1.61. Normalité des T et fonctions croissantes dans T .

1.61. L'un des buts principaux du présent article consiste à prouver que *tout tableau ramifié dans lequel existe une fonction réelle croissante est normal* (voir th. 2), proposition qui, combinée avec le théorème ci-dessus de M. Lindenbaum et avec un théorème de Baire, entraîne le résultat suivant:

Quel que soit le tableau ramifié décroissant (croissant)¹² non dénombrable T d'ensembles fermés et d'ensembles ouverts extraits d'un espace (V)

¹¹Si l'on remplace ce mot par "irrationnel", la réponse au problème qu'on obtient ainsi est affirmative.

¹²Une famille F d'ensembles est un *tableau ramifié décroissant (croissant)* d'ensembles si, d'une part, quels que soient les éléments A, B de F on ait $A \subset B$ ou $B \subset A$ ou $AB = 0$ et si, d'autre part, pour tout élément A de F , la famille $(\cdot, A)_F$ des éléments X de F vérifiant $X \subset A$ ($A \supset X$) est *bien ordonnée* par rapport à \supset (\subset).

parfaitement séparable au sens de M. Fréchet, T a même puissance que l'une de ses sous-familles composée d'ensembles fermés deux à deux disjoints¹³

1.61.2. L'ensemble σ_o . En désignant par σ_o la famille de tous les ensembles bien ordonnés bornés non vides de nombres rationnels, ordonnée partiellement par la relation ρ où $A\rho B$ veut dire que A est un segment initial de B distinct de B , on prouve sans peine que σ_o est un tableau ramifié par rapport à ρ et que, en posant

$$f(e) = \sup_{X \in e} X, \quad (e \in \sigma_o),$$

la fonction f est non décroissante dans σ_o et telle que, quels que soient les éléments A, B, C de σ_o vérifiant $A\rho B\rho C$, on ait $f(A) < f(C)$.

En vertu du th. ⁵, on en déduit que *tout sous-ensemble non dénombrable de σ_o a même puissance que l'un de ses sous-ensembles disjonctifs*¹⁴ (cf. N^o 4.31).

1.62. Normalité des T et fonctions presque croissantes dans T . On peut prouver que si tout T dans lequel existe une fonction réelle presque croissante était normal, tout tableau ramifié serait normal¹⁵, d'où l'intérêt des conditions I, II que nous allons formuler (voir N^o 3.43, Théorème fondamental).

1.62.1. Le rang γT de T ; rangées $R_\alpha T$, ($\alpha < \gamma T$), de T . Pour un ensemble partiellement ordonné E nous désignerons par

$$(7) \quad \Gamma E$$

la borne supérieure des types d'ordres des sous-ensembles *bien ordonnés* de E ¹⁶. Dans le cas d'un tableau ramifié T nous écrirons

¹³Ce théorème a une importance si l'on tient compte de l'existence de tableaux ramifiés décroissants T d'ensembles linéaires fermés tels que $\gamma T = \Omega$, (voir (8)) et $pR\alpha T = \aleph_0$, ($\alpha < \Omega$), (voir (9) [Aronszajn-Denjoy].

Pour cela, voir mon article des Publ. Math. Univ. Belgrade, VI, 1937, pp. ... consacré à l'étude des T vérifiant $\gamma T = \Omega$, $pR\alpha T = \aleph_0$, ($\alpha < \Omega$) et tels que tout sous-ensemble ordonné de T soit $\leq \aleph_0$; nous les appelons *tableaux ramifiés de M. Aronszajn*.

¹⁴Cette proposition constitue la réponse affirmative à un problème que j'ai posé dans ma thèse, p 3, et 134 en note.

¹⁵Quant à l'hypothèse que tout T soit normal, voir Comptes Rendus, 202, 1936 p. 185.

¹⁶Cf. loc. cit. ¹ où dans la définition de ΓE il faut barrer la phrase "et tous les sous ensembles inversement bien ordonnés de E ".

(8) γT au lieu de ΓE^{17} et appellerons le nombre ordinal γT , *le range de T*. Manifestement,

(8*) $\gamma T = \sup t(., a)$, ($a \in T$), tX désignant le type d'ordre de X (cf. (1)).

Pour tout nombre ordinal $\alpha < \gamma T$, nous désignerons par

(9) $R_\alpha T$

l'ensemble des $A \in T$ pour chacun desquels le type d'ordre de $(., a)_T$ est α (cf. (1)); le sous-ensemble bien déterminé $R_\alpha T$ de T sera appelé *la rangée α de T*; de plus $R_0 T$ sera dite *la première rangée de T*.

1.62.2. Ceci étant, on peut établir la proposition fondamentale que voici:

Est normal tout tableau ramifié T dans lequel existe une fonction réelle uniforme presque croissante, pourvu que T vérifie l'une des deux conditions suivantes:

I $\gamma[a]_T = \gamma T$, ($a \in T$), (cf. (2), (8*)),

II γT est un nombre ordinal de première espèce ou un nombre ordinal initial régulier¹⁸ cf. n^0 3.4 ci-après).

En particulier tout T tel que $\gamma T \leq \Omega$ (cf. th.) dans lequel existe une fonction réelle uniforme presque croissante est normal.

1.7. Le problème de Souslin. Origine du travail. C'est le problème de Souslin¹⁹ qui a donné naissance à la notion des tableaux ramifiés. Les résultats du n^0 1.6. et d'autres que nous exposerons dans la suite constituent un pas en avant vers la solution du problème de Souslin, celui-ci étant équivalent au problème de savoir si tout tableau ramifié T tel que $\gamma T \leq \Omega$ est normal²⁰.

D'autre part, c'est un procédé de construction, dû à M. Aronszajn, d'un tableau ramifié portant son nom²¹ qui m'avait suggéré la notion des

¹⁷La définition de γT de Thèse (p. 74) s'applique à un ensemble partiellement ordonné quelconque E , pourvu que tout sous-ensemble ordonné de E soit bien ordonné; l'étude de γE pour un E pareil est lié avec le problème du continu (v. C.R. Acad. Sci. Paris 205 (1937), p. 1196).

¹⁸Un nombre ordinal α est régulier s'il est de première espèce ou si, quelle que soit la suite croissante d'ordinaux $< \alpha$ et $\rightarrow \alpha$, le type d'ordre de celle-ci est α .

¹⁹Le problème de Souslin demande si tout ensemble ordonné continu tel que chacune des familles de ses intervalles deux à deux disjoints soit $\leq \aleph_0$ est nécessairement semblable à un ensemble linéaire.

²⁰Cf. Thèse, p. 106, p. 124 et 132 (équivalence $P_2 \stackrel{*}{\leftrightarrow} P_3$).

²¹Cf. ¹³. Voir loc. cit. ¹³) p. ...; aussi Thèse. p. 96 en note. L'article que nous avons mentionné dans¹³) étudie l'existence des tableaux ramifiés de M. Aronszajn.

fonctions croissantes dans un tableau ramifié et celle des transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés.

Pour terminer, je remercie bien vivement M. Aronszajn de l'aide qu'il m'a montrée au cours de la rédaction de l'article, en particulier des simplifications de mes démonstrations primitives de quelques uns des résultats du présent travail.

2. Généralités sur les transformations croissantes et presque croissantes.

2.1. LEMME 1. *E étant un ensemble partiellement ordonné dans lequel existe une fonction réelle croissante, tout sous-ensemble bien ordonné de E est $\leq \aleph_0$; par conséquent, $\Gamma E \leq \omega_1$ (cf. (7)).*

2.2. Une condition suffisante.

THÉORÈME 1. *Dans tout ensemble partiellement ordonné somme de $\leq \aleph_0$ de ses ensembles disjoints (cf. n^o 1.1) il existe une fonction réelle uniforme croissante à valeurs rationnelles.*

En effet, soient E un ensemble partiellement ordonné et

$$E_0, E_1, \dots, E_n, \dots, \quad (n < \omega)$$

une suite de ses sous-ensembles disjoints, deux à deux distincts ou non, tels que $E = \sum_n E_n$, ($n < \omega$).

Soient

$$(10) \quad r_0, r_1, \dots, r_n, \dots, \quad (n < \omega, r_m \neq r_n, m < n < \omega),$$

la suite de tous les nombres rationnels et

$$F_n = E_0 + E_1 + \dots + E_n \text{ pour tout entier } n \geq 0.$$

Pour tout entier $n \geq 0$, nous allons définir, dans l'ensemble partiellement ordonné F_n , la fonction croissante f_n .

Pour commencer, posons $f(a) = r_0$ pour tout $a \in F_0$; par conséquent, l'ensemble $f_0(F_0)$ est composé du point r_0 (cf. (3)).

D'une manière générale, soit $n > 0$ un entier tel que la suite des fonctions f_0, f_1, \dots, f_{n-1} soit définie et vérifie ces deux conditions:

a) f_k est, pour tout indice $k < n$, une fonction uniforme réelle croissante dans l'ensemble partiellement ordonné F_k et n'y prend qu'un nombre fini de valeurs de la suite (10); en particulier, $pf_k(F_k) < \aleph_0$ (cf. (3));

b) Pour tout entier k entre 0 et n et pour tout entier i tel que $0 \leq i < k$, la fonction f_k coïncide avec f_i dans l'ensemble F_i .

Définissons la fonction f_n dans F_n .

En désignant, pour un ensemble partiellement ordonné X , par

$$(11) \quad R_0 X$$

l'ensemble de tous les *premiers points* de X , la relation évidente $\Gamma F \leq n+1$ (cf. (7)) entraîne que

$$F_n = R_0 F_n + R_1 F_n + \dots + R_n F_n \quad \text{où}$$

$$R_k F_n = R_0 \left(F_n - \sum_{i < k} R_i F_n \right),$$

quelques-uns des ensembles $R_0 F_n, \dots, R_n F_n$ pouvant être vides à partir d'un indice.

Alors, pour tout $a \in F_{n-1}$, nous poserons $f_n(a) = f_{n-1}(a)$; pour tout point a de $R_0 F_n - F_{n-1}$, $f(a)$ sera le premier point de (10) situé à gauche de l'ensemble fini $f_{n-1}(F_{n-1})$. Soit $a \in R_1 F_n - F_{n-1}$; $f(a)$ sera le premier nombre dans (10) tel qu'il soit situé entre

$$f_n((\cdot, a)_{R_0 F_n + F_{n-1}}) \quad \text{et} \quad f_n((a, \cdot)_{F_{n-1}}) \quad (\text{cf. (1), (3)});$$

pour tout $k < n$ tel que $R_k F_n \neq 0$ et pour tout point éventuel, a , de $R_k F_n - F_{n-1}$, nous définirons $f(a)$ comme le premier nombre dans (10) tel que $f_n(x) < f(a) < f_n(y)$, x, y parcourant les points de $(\cdot, a)_{R_0 F_n + \dots + R_{k-1} F_n + F_{n-1}}$ et $(a, \cdot)_{F_{n-1}}$, respectivement (cf. (1)).

On démontre sans peine que f_n est une fonction uniforme croissante dans F_n et que l'ensemble $f_n(F_n)$ est un ensemble fini de nombres rationnels.

Pour terminer, quel que soit $a \in E$, $f(a)$ désignera le nombre rationnel $f_n(a)$, n étant le premier indice tel que $a \in F_n$.

Et on voit que f est dans l'ensemble donné E une fonction réelle croissante à valeurs rationnelles. C.q.f.d.

2.3. Nous avons déjà remarqué que la condition suffisante que nous venons de considérer (cf. th. 1) n'est pas nécessaire pour qu'il existe dans E une fonction réelle croissante. (cf. n^0 1.42).

Or, il nous semble qu'en nous restreignant au cas particulier de tableaux ramifiés, elle sera encore nécessaire c'est-à-dire que, quel qu

le tableau ramifié dans lequel existe une fonction réelle uniforme croissante, celui-ci serait somme de $\leq \aleph_0$ de ses sous-ensembles disjonctifs.

Il est intéressant de signaler qu'on peut prouver le résultat suivant:

Pour que le tableau ramifié dans lequel existe une fonction réelle uniforme croissante soit décomposable en $\leq \aleph_0$ de ses sous ensembles disjonctifs, il faut et il suffit que la réponse au problème suivant soit affirmative:

Existe-t-il dans le tableau ramifié σ_0 du n^0 1.612 une fonction réelle uniforme croissante à valeurs rationnelles?

2.4. Fonctions presque croissantes. Dans ce qui suit, nous ne traiterons que des tableaux ramifiés; la lettre

$$(12) \quad T$$

en désignera un quelconque.

2.41. Alors que, d'après le lemme 1, $\gamma T \leq \Omega$, pourvu qu'il existe dans T une fonction réelle croissante, nous allons démontrer le

LEMME 2. *Quel que soit le nombre ordinal $\alpha > 0$, il y a un tableau ramifié $T(\alpha)$ vérifiant $\gamma T(\alpha) = \alpha$ et dans lequel existe une fonction réelle uniforme presque croissante.*

Et effet, ξ parcourant tous les ordinaux $< \alpha$, soit $T(\alpha)$ l'ensemble des ξ et des $\xi_0 \equiv \alpha + \xi$ ordonné partiellement par la relation ρ que voici:

si $a \in T(\alpha)$, $b \in T(\alpha)$, la relation $a\rho b$ équivaut à ce que d'une part, a est un ordinal $< \alpha$, et, d'autre part, que b est ou bien un ordinal entre a et α , ou bien l'un des ordinaux $\alpha + \xi$ vérifiant $a \leq \xi < \alpha$.

Pour un $e \in T(\alpha)$, soit $f(e) = 1$ ou 2 , suivant que $e < \alpha$ ou $\alpha \leq e$. On démontre sans peine que $T(\alpha)$ est, par rapport à ρ , un tableau ramifié de rang α et que la fonction f y est presque croissante.

2.42. En particulier, il y a un T de rang Ω et dans lequel existe une fonction réelle presque croissante; par contre, on démontre facilement le

LEMME 3. *Dans un ensemble bien ordonné de type d'ordre Ω il n'existe aucune fonction réelle presque croissante.*

En effet, soient

$$(13) \quad a_0, a_1, \dots, a_\xi, \dots, \quad (\xi < \Omega)$$

tous les points de l'ensemble bien ordonné donnés dans leur bon ordre. Supposons, par impossible, que f soit une fonction réelle presque croissante dans l'ensemble. Désignons le point a_0 par b_0 , et supposons que α soit un

ordinal entre 0 et Ω tel qu'on ait construit le sous-ensemble de (13) des points croissants $b_0, b_1, \dots, b_\xi, \dots, (\xi < \alpha)$ tel que

$$f(b_0) < f(b_1) < \dots < f(b_\xi) < \dots, \quad (\xi < \alpha).$$

Pour déterminer b_α , soit a le premier point dans (13) succédant à chacun des points $b_\xi, (\xi < \alpha)$; l'existence de a étant évidente, il est aussi évident que, dans (13), il y a un point succédant à a , ce qui, d'après la presque croissance de f dans (13), veut dire qu'il y a un point, soit b , dans (13) tel que $f(a) < f(b)$; alors, b_α désignera le premier point pareil dans (13).

Finalement, la presque croissance de f dans (13) entraînerait l'existence de l'ensemble bien ordonné linéaire non dénombrable

$$f(b_0), \dots, f(b_\alpha), \dots, \quad (\alpha < \Omega),$$

contrairement à un théorème de Cantor.

Le lemme 3 entraîne le

LEMME 3^{bis}. *T étant un tableau ramifié dans lequel existe une fonction réelle presque croissante, quel que soit le point a de T tel que $\gamma[a]_T = \Omega$, l'ensemble $[a]_T$ n'est pas ordonné.*

2.43. LEMME 4. *Il y a un tableau ramifié T de rang $\gamma T = \Omega$ et tel que*

$$p_s[a]_T > 1, \quad (a \in T)^{22}$$

et tel qu'il n'existe, dans T , aucune fonction réelle presque croissante.

Pour le voir, il suffit de considérer la famille

$$(14) \quad \sigma(\Omega)$$

de tous les sous-ensembles bien ordonnés non vides de l'ensemble ordonné (Ω) des ordinaux $< \Omega$, ordonnée par la relation ρ où, pour deux éléments A, B de $\sigma(\Omega)$, $A\rho B$ veut dire que A est un segment initial de B distinct de B . Manifestement, $\sigma(\Omega)$ est un tableau ramifié par rapport à ρ et

$$(15) \quad \gamma[a]_{\sigma(\Omega)} = \gamma(\sigma(\Omega)) = \Omega, \quad (a \in \sigma(\Omega)) \quad (\text{cf. (2), (8)}).$$

²²Pour un ensemble partiellement ordonné E , nous désignons par $p_s E$ la borne supérieure des puissances des sous-ensembles *disjonctifs* de E (c'est-à-dire dont chacun est composé de points deux à deux incomparables).

Alors, la relation $p_s E \leq 1$ est caractéristique pour des E ordonnés l'inégalité $p_s E < 1$ ne se produisant que dans le cas où $E = 0$.

$$(15') \quad p_s[a]_{\sigma(\Omega)} = \aleph_1, \quad (a \in \sigma(\Omega)).$$

Prouvons qu'il n'existe aucune fonction réelle presque croissante dans $\sigma(\Omega)$. Supposons qu'il existe une, soit f .

Désignons par c_0 un point quelconque de $R_0\sigma(\Omega)$ (cf. (9) ou (11)); le point c_0 étant, d'après (15), succédé d'au moins un point de $\sigma(\Omega)$, la presque croissance de f aurait pour conséquence qu'il y ait un point, soit c_1 , de $(a, \cdot)_{\sigma(\Omega)}$ tel que $f(c_0) < f(c_1)$. D'une façon générale, en désignant, pour tout indice α entre 0 et Ω , par c_α : un point de $(c_{\alpha-1}, \cdot)_{\sigma(\Omega)}$ tel que $f(c_{\alpha-1}) < f(c_\alpha)$ si α est de première espèce, et, dans le cas où α est de seconde espèce, l'ensemble des ordinaux se présentant dans des c_ξ , ($\xi < \alpha$)-rappelons que tout élément de $\sigma(\Omega)$ est un ensemble d'ordinaux $< \Omega$ -on obtiendrait l'ensemble bien ordonné linéaire non dénombrable

$$f(c_0), \dots, f(c_\alpha), \dots, \quad (\alpha < \Omega),$$

contrairement au théorème déjà cité de Cantor.

2.44. Par un procédé analogue à celui du n^0 2.43. on prouve le

LEMME 5. *Pour qu'il existe une fonction réelle presque croissante dans un tableau ramifié T tel que*

$$\gamma[a]_T = \gamma T = \Omega, \quad (a \in T),$$

il faut que, quel que soit le point a de T , l'ensemble T contienne un sous-ensemble ordonné dénombrable non borné²³ dans T et contenant le point a .

Remarquons que la condition nécessaire du lemme 5 est vérifiée pour tout T tel que

$$(N) \quad \begin{cases} \gamma[a]_T = \Omega, p_s[a]_T > 1, & (a \in T) \text{ (cf. (2), (8))} \\ pR_\alpha T < 2^{\aleph_0}, & (\alpha < \Omega) \text{ (cf. (9) et } ^4). \end{cases}$$

Et l'un des problèmes les plus passionnants qui se pose dans la théorie de croissance qu'est la théorie des tableaux ramifiés c'est de savoir si des relations (N) on peut conclure à l'existence d'une fonction réelle presque croissante dans le tableau ramifié T !

²³ E étant un ensemble partiellement ordonné par rapport à $<$, un sous-ensemble non vide F de E est dit *borné dans E* si E contient deux points a, b vérifiant $a \leq x \leq b$ pour tout point x de F .

3. Fonctions croissantes, fonctions presque croissantes et la normalité des tableaux ramifiés.

3.1. Fonctions croissantes

THÉORÈME 2. *Est normal tout tableau ramifié dans lequel existe une fonction réelle uniforme croissante (cf. Nos. 1.21; 1.5; 1.6).*

Soient donc T un tableau ramifié et f une fonction réelle croissante dans T ; prouvons que T est normal.

3.11. Or, nous avons prouvé la normalité de T toutes les fois que T vérifie l'une de ces conditions:

$$1) T \text{ est fini; } \quad 2) \gamma T < \Omega;^{24} \quad 3) pT > p\gamma T;^1$$

4) γT n'est pas initial (c'est-à-dire il y a un $\alpha < \gamma T$ tel que $p\alpha = p\gamma T^1$;

5) T est somme d'une infinité dénombrable de ses sous-ensembles (deux à deux disjoints ou non) dont chacun a une puissance $< pT^{25}$.

Dès lors nous pouvons supposer que T ne vérifie aucune des conditions 1), 2), 3), 4) et 5), et en particulier que

$$(16) \quad \gamma T \text{ est initial } \geq \Omega \text{ et que } pT = p\gamma T$$

et

$$(17) \quad T \text{ ne vérifie pas la condition 5) ci-dessus.}$$

3.12. Ceci étant, soit

(18) T_1 l'ensemble de tous les points de T dont chacun a au moins un successeur. Les éléments de l'ensemble $T_0 = T - T_1$ étant deux à deux incomparables, si l'on avait $pT_0 = pT$, la normalité de T en résulterait immédiatement; nous pouvons donc supposer que $pT_0 < pT$ et, par conséquent, $pT_1 = pT$.

Par définition de la fonction f , à chaque point a de T_1 correspond un point, soit $b(a)$, de T ($b(c)$ peut appartenir aussi à T_0) tel que

$$(19) \quad a < b(a),^{26} \quad f(a) < f(b(a)).$$

Soit

$$(20) \quad r_0, r_1, \dots, r_n, \dots, \quad (n < \omega, r_n \neq r'_n, n \neq n')$$

²⁴Voir Thèse, pp. 105-109, en particulier pp. 108-109.

²⁵Voir Thèse, p. 92 (th. 4 cas c), p. 105, cas a) et pp. 108-109.

²⁶< désigne la relation par rapport à laquelle T est un tableau ramifié.

la suite de tous les nombres rationnels.

Désignons, pour tout $n < \omega$, par

$$(21) \quad T_1^n.$$

l'ensemble des points a de T_1 vérifiant

$$(22) \quad f(a) < r_n < f(b(a)).$$

Manifestement,

$$T_1 = \sum_n T_1^n, \quad (n < \omega)$$

ce qui, d'après $pT_1 = pT$ et (17), entraîne l'existence d'un indice, soit $\nu < \omega$, tel que

$$(23) \quad pT_1^\nu = pT_1 \text{ et donc } pT_1^\nu = pT.$$

3.13. Prouvons la normalité de T_1^ν . Comme tout à l'heure dans le cas de T (cf. (16)), nous pouvons supposer que

$$(23') \quad p\gamma T_1^\nu = pT_1^\nu \text{ et donc } \gamma T_1^\nu = \gamma T.$$

En désignant par

$$(24) \quad \tau$$

le plus petit nombre ordinal tel que le nombre γT soit la borne supérieure d'une suite croissante de rang τ d'ordinaux $< \gamma T$, il est facile de construire, par un procédé de l'induction transfinitie évident, une suite de points de T_1^ν , soit

$$(25) \quad a_0, a_1, \dots, a_\xi, \dots; \quad a_\xi \in T_1^\nu, \quad (\xi < \tau),$$

de telle façon que, en définissant pour tout $\xi < \tau$, les deux nombres²⁷

$$(26) \quad \zeta_\xi, \eta_\xi \text{ par les relations } a_\xi \in R_{\zeta_\xi} T, \quad b(a_\xi) \in R_{\eta_\xi} T,$$

²⁷ Les nombres ζ_ξ, η_ξ indiquent en quelque sorte les rangs dans T des points $a_\xi, b(a_\xi)$, respectivement.

l'on ait

$$(27) \quad \zeta_0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_\xi < \dots \rightarrow \gamma T, \quad (\xi < \tau),$$

$$(27') \quad \eta_\xi < \zeta_{\xi+1}.$$

Vu (19) et (27'), on a

$$(27'') \quad \zeta_\xi < \eta_\xi < \zeta_{\xi+1}, \quad (\xi < \tau).$$

Prouvons que les points

$$(28) \quad b(a_0), b(a_1), \dots, b(a_\xi), \dots, (\xi < \tau),$$

sont deux à deux incomparables.

En effet, soit $\xi' < \xi'' < \tau$; il s'agit de prouver qu'on n'a $b(a_{\xi''}) < b(a_{\xi'})$ pas plus qu'on n'a $b(a_{\xi'}) < b(a_{\xi''})$.

Tout d'abord, après (27), (27'), (27'') $\eta'_{\xi'} < \zeta_{\xi'+1} \leq \zeta_{\xi''} < \eta_{\xi''}$ et dont $\eta_{\xi'} < \eta_{\xi''}$ ce qui prouve l'impossibilité de $b(a_{\xi''}) \leq b(a_{\xi'})$. D'autre part, si l'on avait $b(a_{\xi'}) < b(a_{\xi''})$, remarquons que, d'après (19), $a_{\xi''} < b(a_{\xi''})$; dès lors, T étant un tableau ramifié, ses points $a_{\xi''}$, $b(a_{\xi'})$ seraient comparables (car ils précèdent le point $b(a_{\xi''})$)²⁸.

D'après (27), (27'), on a $\eta_{\xi'} < \zeta_{\xi''}$ et on n'a pas $a_{\xi''} \leq b(a_{\xi'})$.

On devrait donc avoir $b(a_{\xi'}) < a_{\xi''}$ et par conséquent

$$f(b(a_{\xi'})) < f(a_{\xi''})$$

²⁸C'est en ce lieu qu'intervient essentiellement l'hypothèse que T soit un *tableau ramifié*. Prouvons, par contre, qu'il existe un ensemble partiellement ordonné non dénombrable *anormal*, H , dans lequel existe une fonction réelle croissante biunivoque et dont tout sous-ensemble ordonné est *bein ordonné* (comme dans le cas des tableaux ramifiés). Pour cela, soit ψ un nombre ordinal non dénombrable quelconque tel que $\rho\psi \leq 2^{\aleph_0}$; soit

$$z_0, z_1, \dots, z_\varphi, \dots, \quad (\varphi < \psi, z_\alpha \neq z_{\alpha'}, \alpha < \alpha' < \psi)$$

un bon ordre quelconque d'un ensemble linéaire quelconque de puissance $\rho\psi$. En désignant par H l'ensemble des z_φ , ($\varphi < \psi$), ordonné partiellement par la relation ρ où $z_\varphi \rho z_{\varphi'}$ équivant à ce que $\varphi < \varphi' < \psi$, $z_\varphi < z_{\varphi'}$, on voit que tout sous-ensemble ordonné de Z est bien ordonné et donc $\leq \aleph_0$, et que, en posant $f(z_\varphi) = a_\varphi$, ($\varphi > \psi$), f est une fonction biunivoque croissante dans Z . On prouve sans peine que tout sous-ensemble *disjonctif* de Z est $\leq \aleph_0$; il en est encore ainsi de tout sous-ensemble *dégénéré* de T , ce qui prouve l'anormalité de Z . D'ailleurs, va le corollaire 1, on prouve sans peine que tout tableau ramifié extrait de Z est $\leq \aleph_0$.

ce qui, avec la relation

$$f(a_{\xi''}) < r_\nu < f(b(a_{\xi''}))$$

entraînerait $f(b(a_{\xi'})) < r_\nu$, contrairement à ce que

$$f(a_\xi) < r_\nu < f(b(a_\xi)), \quad (\xi < \tau)$$

tout point a_ξ , ($\xi < \tau$), appartenant à l'ensemble T_1^ν .

Il y a lieu d'observer que les raisonnements dans les N^{os} 3.11–3.13 subsistent, sans y rien changer, en supposant que f soit presque croissante.

3.14 Or, puisque, par hypothèse il existe dans T une fonction réelle croissante, on aura, d'après le lemme 1, $\gamma T \leq \Omega$ et, par conséquent, d'après (16), $\gamma T = \Omega$, et, d'après (24), $\tau = \Omega$. Puisque, d'après (16), $pT = \aleph_1$, la normalité de T résulte de ce que les points $b(a_\xi)$, ($\xi < \Omega$), appartiennent à T et sont deux à deux incomparables. C.q.f.d.

3.15. COROLLAIRE 1. *Tout tableau ramifié non dénombrable dans lequel existe une fonction réelle uniforme croissante à la même puissance que l'un de ses sous-ensemble composé de points deux à deux incomparables*²⁹.

En effet, T remplissant les conditions du corollaire, T est, d'après le théorème 2, normal; soit alors F l'un de ses sous-ensembles dégénérés de puissance pT . Puisque, pour tout $a \in F$, l'ensemble $[a]_F$ est ordonné et donc bien ordonné, on aura $p[a]_F \leq \aleph_0$ (cf. lemme 1). Dès lors, les relations $pF = pT > \aleph_0$, $F = \sum_a [a]_F$, ($a \in R_0F$), entraînent $pR_0F = pF$. L'ensemble R_0F étant disjointif, le corollaire est démontré.

3.2. Fonctions presque croissantes

Est il légitime de remplacer, dans l'énoncé du théorème 1, le mot "croissante" par le mot "presque croissante"? Le problème reste ouvert et est équivalent à celui de savoir si tout tableau ramifié est normal³⁰.

Toutefois nous allons indiquer deux cas importants dans chacun desquels la substitution pareille est légitime (cf. th. 3, th. 4 et Théor. fond.).

3.21. THÉORÈME 3. *Est normal tout tableau ramifié T dans lequel existe une fonction réelle uniforme presque croissante, pourvu que le rang γT de T ne soit un ordinal initial singulier*³¹.

²⁹Cf. loc. cit.¹, th. 1.

³⁰Quant à hypothèse que tout tableau ramifié soit normal, voir Thèse, pp. 130–133 et C.R. Acad. Sci. Paris 202 (1936), p. 185.

³¹Un ordinal α est *initial* si pour tout $\xi < \alpha$ on a $p\xi < p\alpha$, et *singulier* s'il y a un ordinal $\zeta < \alpha$ et une suite de type ζ d'ordinaux croissants $< \alpha$ et $\rightarrow \alpha$. Si α n'est pas singulier, il est dit régulier (cf.¹⁸).

La démonstration du théorème est contenue dans les N^{os} . 3.11–3.13, puisque dans les hypothèses du théorème 3, le nombre τ de (24) coïncide avec le nombre γT (cf. la fin du 3.13).

3.22. THÉORÈME 4. *Un tableau ramifié T dans lequel existe une fonction réelle presque croissante est normal, pourvu que*

$$(29) \quad \gamma[a]_T = \gamma T, \quad (a \in T) \quad (\text{cf. (2), (8)}).$$

Pour démontrer le th. 4, il suffit, d'après le th. 3, de le faire dans le cas où γT est initial singulier³². En reprenant alors des notations précédentes (cf. (24)–(28)), la condition (29) entraîne, pour tout $\xi < \tau$ (cf. (24)), l'existence d'un point c_ξ postérieur à $b(a_\xi)$ (cf. (25), (28)) tel que l'ensemble S_ξ des éléments de T entre $b(a_\xi)$ et C_ξ soit du type d'ordre η_ξ (cf. (26)). De plus, pour tout $\xi' < \xi'' < \tau$, tout élément de $S_{\xi'}$ est incomparable à tout élément de $S_{\xi''}$ de manière que, chacun des S_ξ étant ordonné, l'ensemble $\sum_\xi S_\xi$, ($\xi < \tau$), est dégénéré. Puisque, manifestement $\eta_\xi \rightarrow \gamma T$ avec $\xi \rightarrow \tau$, on en déduit que $pS_\xi \rightarrow pT$ avec $\xi \rightarrow \tau$; dès lors la normalité de T est prouvée.

3.3. Généralisations Théorème fondamental.

3.31. Symbole $i(E, f)$. E étant un ensemble partiellement ordonné et f une transformation uniforme non décroissante de E , soit

$$(30) \quad i(E, f) = \text{Sup}_F tF, \quad (\text{Sup} \equiv \text{bornesup}, \quad tF \equiv \text{type d'ordre de } F),$$

F parcourant tous les sous-ensembles bien ordonnés de E sur chacun desquels la transformation f est constante.

Il s'ensuit que l'égalité $i(E, f) = 1$ caractérise des f croissantes.

THÉORÈME 5. *Tout tableau ramifié T dans lequel existe une fonction réelle uniforme non décroissante f vérifiant $i(T, f) < \gamma T$ est normal.*

D'après ce que nous avons dit au 3.11, pour démontrer le th. 5, il suffit de le prouver pour des T vérifiant (16) et (17). Or, dans ce cas, en posant $\beta = i(T, f) + 1$, on aura, γT étant initial et $\geq \Omega$,

$$\Omega < \gamma T, \quad \beta\xi < \gamma T, \quad (\xi < \gamma T).$$

³²Un ordinal α est *initial* si pour tout $\xi < \alpha$ on a $p\xi < p\alpha$, et *singulier* s'il y a un ordinal $\zeta < \alpha$ et une suite de type ζ d'ordinaux croissants $< \alpha$ et $\rightarrow \alpha$. Si α n'est pas singulier, il est dit régulier (cf. ¹⁸).

Dès lors en posant

$$T_0 = \sum_{\xi} R_{\beta\xi} T, \quad (\xi < \gamma T)$$

on aura

$$pT_0 = pT, \quad T_0 \leq T, \quad \gamma T_0 = \gamma T.$$

Or, $i(T_0, f) = 1$ ce qui veut dire que f est croissante dans T_0 , d'où la normalité de T_0 (th. 2) et à fortiori celle de T .

3.32 x étant un nombre réel quelconque, désignons par

$$(\cdot, x), \quad (\cdot, x]$$

l'ensemble de tous les nombres réels y vérifiant respectivement

$$y < x, \quad y \leq x.$$

En désignant par

(31) M l'ensemble ordonné par la relation de l'inclusion C (égalité exclue) des ensembles (\cdot, x) , $(\cdot, x]$, x parcourant tous les nombres réels, on peut prouver³³ que tout ensemble ordonné séparable³⁴ est semblable à un sous-ensemble de l'ensemble ordonné M et que, à son tour, celui-ci est séparable. Cela posé, prouvons le

THÉORÈME 6. *Est normal tout tableau ramifié T admettant une transformation croissante, soit f , en un ensemble ordonné séparable (cf. th. 2).*

L'ensemble ordonné $f(T)$, (cf. (3)), étant séparable, il y a, comme nous venons de dire, une transformation par similitude, soit g , de $f(T)$ en M ; alors $g(f(a))$, ($a \in T$), est une transformation croissante de T en M .

Ceci étant, soit T_0 l'ensemble des points $a \in T$ tels que l'élément $g(f(a))$ de M soit de la forme (\cdot, x) ; en posant, dans ce cas $h(a) = x$, h sera une fonction réelle croissante dans T_0 ; d'où la normalité de T_0 , et donc aussi celle de T , pourvu que $pT_0 = pT$.

Si $pT_0 < pT$, on aura $pT_1 = pT$, en posant $T_1 = T - T_0$ ³⁵, et la normalité de T_1 entraînera celle de T . Or, pour tout $a \in T_1$, l'élément

³³Voir mon article: *Sur les relations d'ordre*, Bull. Int. Acad. Yougoslave Sci. Beaux-Arts Cl. Math. 32 (1939), 66-76

³⁴Un ensemble ordonné E est séparable s'il contient un ensemble au plus dénombrable F tel que tout intervalle non vide de E contienne un point de F .

³⁵Bien entendu, nous supposons que $pT \geq N_0$.

$g(f(a))$ de N est de la forme $(\cdot, x]$; en posant $j(a) = x$, j sera une fonction réelle croissante dans T_1 ; d'où, d'après le th. 2, la normalité de T_1 et à fortiori celle de T .

3.43. De même que nous venons d'établir le th. 6 en généralisant le th. 2 dans le sens qu'on considère, au lieu des fonctions réelles croissantes, des transformations des tableaux ramifiés en un ensemble ordonné séparable quelconque, de même on établit sans peine des généralisations analogues des théorèmes 3, 4, 5. C'est ainsi qu'on a le

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Est normal tout tableau ramifié T transformable par une transformation univoque presque croissante, f , en un ensemble ordonné séparable, pourvu que soit vérifiée l'une des conditions que voici:*

- I $\gamma[a]_T = \gamma T$, ($a \in T$) (cf. (2), (8), th. 4);
- II γT n'est pas initial et singulier (cf. (8), th. 3 et note);
- III $i(T, f) < \gamma T$ (cf. (8), (30), th. 5).

4. Applications

4.1. Tableaux ramifiés d'ensembles fermés et d'ensembles ouverts.

Nous avons remarqué (cf. 1.32) que, d'après M. Lindenbaum, il existe une fonction réelle uniforme croissante dans la famille des ensembles ouverts (fermés) extraits d'un espace (V) parfaitement séparable et ordonné partiellement par C ; cela combiné avec le th. 2, entraîne le

THÉORÈME 7. *Tout tableau ramifié décroissant (croissant) d'ensembles fermés ou d'ensembles ouverts extraits d'un espace (V) parfaitement séparable au sens de M. Fréchet est normal*

En désignant par U la famille des ensembles ouverts et des ensembles fermés extraits d'un espace (V) parfaitement séparable, ordonné par la relation C , on déduit du théorème de M. Lindenbaum qu'il existe une fonction réelle uniforme f non décroissante dans U telle que

$$i(U, f) \leq 2,^{36} \quad (\text{cf. (30)});$$

d'autre part, tout tableau ramifié d'ensembles ouverts extrait de U étant, comme on le prouve sans peine, au plus dénombrable, on en déduit, vu le corollaire 1 et le théorème 5, le

³⁶Dans le cas général, $i(U, f) = 2$.

THÉORÈME 7 BIS. *Tout tableau ramifié décroissant (croissant) non dénombrable composé d'ensembles fermés et d'ensembles ouverts extraits d'un espace (V) parfaitement séparable a même puissance que l'une de ses sous-familles composées d'ensembles fermés deux à deux disjoints.*

4.2. *Tableaux ramifiés d'ensembles linéaires mesurables.* Dans le N^0 précédent nous avons prouvé la normalité de tout tableau ramifié décroissant composé d'ensembles linéaires, fermés ou ouverts. On peut alors se proposer de montrer la proposition analogue pour des classes plus vastes d'ensembles linéaires telles que celles composées d'ensembles analytiques, projectifs, etc.

4.21. Sans être actuellement à même d'épuiser le sujet, prouvons le

THÉORÈME 8. *Tout tableau ramifié décroissant, T , d'ensembles linéaires mesurables de mesure positive finie est normal.*

Comme nous avons déjà remarqué à plusieurs reprises, pour prouver la normalité de T , nous pouvons nous restreindre au cas où

$$pT = p\gamma T > \aleph_0 \quad (\text{cf. 3.11}).$$

En le faisant, nous pouvons supposer que tout sous-ensemble ordonné de T soit d'une puissance $< p\gamma T$; en effet, si T ne jouissait pas de cette propriété, la normalité de T en résulterait tout de suite.

La même hypothèse entraîne que γT est un ordinal initial et que, quel que soit le point éventuel a de T vérifiant $\gamma[a]_T = \gamma T$, le sous-ensemble $[a]_T$ n'est pas ordonné.

Ceci étant, en désignant par T_0 l'ensemble des $a \in T$ vérifiant $\gamma[a]_T < \gamma T$, nous pouvons supposer que $pT_0 < pT$, l'égalité $pT_0 = pT$ entraînant facilement la normalité de T_0 et à fortiori celle de T .

Or, dans ces conditions, en posant $T_1 = T - T_0$, on a

$$(32) \quad \gamma[a]_{T_1} = \gamma T_1 = \gamma T, \quad (a \in T_1);$$

de même, on en déduit que pour aucun point $a \in T$, le sous-ensemble $[a]_{T_1}$ n'est ordonné.

Bref, quel que soit l'élément a de T_1 , il y a deux éléments incomparables a_1, a_2 de $(a, \cdot)_{T_1}$; de plus, la relation (32) est vérifiée.

Or, a est un ensemble mesurable de mesure positive finie:

$$0 < \text{mes } a < \infty, \quad 0 < \text{mes } a_i < \infty, \quad (i = 1, 2).$$

a_1, a_2 étant deux sous-ensembles *disjoints* de a , on a $\text{mes } a \geq \text{mes } a_1 + \text{mes } a_2$, et en particulier $\text{mes } a > \text{mes } a_1$. Autrement dit, *quel que soit l'élément a de T_1 , il y a un élément a_1 tel que $a_1 \in (a, \cdot)_{T_1}$ et $0 < \text{mes } a_1 < \text{mes } a$, ce qui veut dire que la fonction réelle uniforme*

$$f(a) \equiv -\text{mes } a, \quad (a \in T_1)$$

est presque croissante dans le tableau ramifié T_1 . Celui-ci-verifiant (32), le théorème 4 entraîne la normalité de T_1 et à fortiori celle de T puisque $pT_1 = pT, T_1 \leq T$.

4.22. Etant donné que toute famille d'ensembles linéaires deux à deux disjoints et dont chacun est mesurable de *mesure positive, finie ou non*, est au plus dénombrable, le théorème 8 entraîne le

THÉORÈME 9. *Tout tableau ramifié décroissant (croissant) d'ensembles linéaires mesurables de mesure positive finie tel que chacun des sous-ensembles ordonnés du tableau ramifié soit au plus dénombrable, est, lui-même, au plus dénombrable.*

4.3. Familles d'ensembles bien ordonnés linéaires.

E étant un ensemble ordonné non vide, soit

$$(33) \quad \sigma(E) \text{ ou } \sigma E$$

la famille de tous les sous-ensembles *bien ordonnés* non vides extraits de E , *ordonnée partiellement par la relation ρ* que A, B étant deux éléments de σE , la relation $A\rho B$ équivaut à ce que A soit un segment initial de l'ensemble bien ordonné B tel que $A \neq B$ (cf. la définition de $\sigma(\Omega)$, 2.43).

On prouve sans peine que σE est un tableau ramifié par rapport à ρ .

Le problème de savoir si pour un ensemble ordonné quelconque E , tout sous-ensemble du tableau ramifié σE est normal est bien difficile, étant équivalent à celui de savoir si tout tableau ramifié est normal.

4.31. Cas où E coïncide avec l'ensemble ordonné (0,1) des nombres réels x vérifiant $0 \leq x \leq 1$. En posant, dans ce cas, pour tout $a \in \sigma E$,

$$f(a) = \text{Sup}_x x, \quad (x \in a),$$

f est, dans σE , une fonction réelle uniforme non décroissante telle qu'elle ne se réduise à un point dans aucun sous-ensemble ordonné de σE ayant plus de deux points; par conséquent

$$i(\sigma E, f) \leq 2 \quad (\text{cf. (30)}).$$

Alors, d'après le théorème 5, tout sous-ensemble de σE est normal.

L'ensemble ordonné des nombres réels étant semblable à l'intervalle $(0,1)$ des nombres réels, nous concluons de ce que nous venons de dire que, E désignant maintenant l'ensemble ordonné des nombres réels, tout sous-ensemble du tableau ramifié σE est normal.

D'une manière explicite, cela nous donne le

THÉORÈME 10. *Quelle que soit la famille non dénombrable d'ensembles bien ordonnés linéaires, elle a même puissance que l'une de ses sous-familles, ϕ , telle qu'aucun élément de ϕ ne soit un segment initial d'un autre élément de ϕ (cf. Corollaire 1).*

COROLLAIRE 2. *Chaque famille non dénombrable d'ensembles bien ordonnés non vides de nombres rationnels contient une famille non dénombrable ne contenant aucun couple d'éléments dont l'un serait un segment initial de l'autre.*

4.32. *Cas d'un E séparable.* Soit E un ensemble ordonné séparable non vide quelconque; en désignant par lE l'ensemble ordonné qu'on obtient de E en y comblant chaque lacune par un point, il est manifeste que $\sigma E \leq \sigma(lE)$.

En désignant alors, pour tout $e \in \sigma(lE)$, par $f(e)$, le dernier point de l'ensemble bien ordonné e s'il y en a un, et, si celui-ci n'existe pas, le premier point de l'ensemble des points succédant à e dans lE , il est clair que f est une transformation non décroissante de $\sigma(lE)$ et de σE en lE , acceptant au moins deux valeurs sur chacun des ensembles ordonnés de $\sigma(lE)$ ou de σE composé de plus de deux points, ce qui, d'après le théorème fondamental, cas III, (cf. 3.43) entraîne la normalité de σE . Nous avons ainsi le

THÉORÈME 11. *E étant un ensemble ordonné séparable quelconque, tout sous-ensemble du tableau ramifié σE est normal (cf. (33)).*

Le théorème précédent et le théorème fondamental du N^0 3.43 mettent en évidence l'importance de la notion de séparabilité, due à M. Fréchet, d'un ensemble ordonné.

A PROPOS D'UNE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION D'ENSEMBLES BIEN ORDONNÉS

T , P étant respectivement un ensemble et une propriété d'ensemble, il arrive fréquemment qu'on a à étudier la famille $U_P T$ de tous les sous-ensembles de T vérifiant la propriété P et que, en particulier, il importe de connaître la puissance de la famille $U_P T$. Dans le dernier cas où l'on a à déterminer la puissance de $U_P T$, le procédé diagonal de Cantor (fournissant l'inégalité fondamentale de Cantor: $2^m > m$, quel que soit le nombre cardinal m) ne nous donnera, dans le cas général, aucun renseignement là-dessus. C'est que le procédé de Cantor construit un ensemble point par point, et dans des cas concrets, il est extrêmement difficile sinon impossible de vérifier si l'ensemble ainsi construit vérifie ou non la propriété P^1 .

Dans cet ordre d'idées nous allons traiter deux problèmes dont l'un se rattache très étroitement au problème de Souslin et à l'hypothèse du continu. L'ensemble T de tout à l'heure appartiendra, par la suite, à une classe d'ensembles partiellement ordonnés généralisant d'une manière aussi simple et naturelle que possible la classe d'ensembles bien ordonnés: il s'agit de la notion de suites ramifiées que nous allons définir.

1. La notion de suites ramifiées

1.1. Rappelons qu'un ensemble T partiellement ordonné (par rapport à une relation d'ordre quelconque $<$) est dit un *tableau ramifié*² (par rapport à la relation $<$) si a étant un point quelconque de T , l'ensemble

$$(1) \quad (., a)_T$$

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Acta Math. 75 (1942), 139-150.

¹Le procédé diagonal a été publié par Cantor en 1890-91 dans Jahr. Ber. d. D. Math. Ver., Bd I., pp. 75-78; aussi Gesamm. Abh. pp. 278-281.

²Voir G. Kurepa, *Ensembles ordonnés et ramifiés* (Thèse, Paris, 1935), aussi Publ. Math. Univ. Belgrade 4 (1935), pp. 106, 124 et 134.

des points de T précèdent le point a est bien ordonné (par rapport à $<$). Si l'on désigne par γ_a le type d'ordre de l'ensemble bien ordonné $(\cdot, a)_T$ et par

$$(2) \quad \gamma T$$

le type d'ordre de l'ensemble bien ordonné des nombres ordinaux γ_a , ($a \in T$), il est manifeste que, pour tout nombre ordinal $\alpha < \gamma T$, l'ensemble

$$(3) \quad R_\alpha T$$

des points $a \in T$ vérifiant $\gamma_a = \alpha$ contient au moins un point sans contenir aucun couple de points distincts comparables. Manifestement

$$(4) \quad T = \sum_{\alpha} R_\alpha T, \quad (\alpha < \gamma T).$$

1.2. Le nombre ordinal γT s'appelle le rang du tableau T . Si $\alpha < \beta < \gamma T$, les ensembles $R_\alpha T$, $R_\beta T$ sont sans point commun. Il est alors commode de dire d'un point $a \in T$ qu'il est de *première* ou de *seconde espèce* relativement à T si l'ordinal α vérifiant $a \in R_\alpha T$ est de *première* ou de *seconde espèce*. En particulier, tout point de $R_0 T$ sera de première espèce.

Pour un $a \in T$ nous désignerons par

$$(5) \quad [a]_T$$

l'ensemble de tous les points de T dont chacun est comparable à a et par

$$(5') \quad |a|_T$$

l'ensemble de tous les $x \in T$ tels que $(\cdot, x)_T = (\cdot, a)_T$ (cf. (1)). Tout sous-ensemble N de T tel qu'il y ait un $a \in T$ vérifiant $|a|_T = N$ sera appelé un *noeud* de T , de première ou de seconde espèce, suivant que l'est le point a . Par exemple, $R_0 T$ est un noeud de première espèce.

1.3. Une *suite ramifiée* sera, par définition, tout tableau ramifié T vérifiant

$$\gamma[a]_T = \gamma T, \quad (a \in T).$$

C'est-à-dire T est une suite ramifiée si, quels que soient $a \in T$ et $a\alpha < \gamma T$, l'ensemble $R_\alpha T$ contient un point comparable à a .

Par exemple tout ensemble bien ordonné (vide ou non) est une suite ramifiée de rang égal au type d'ordre de l'ensemble.

Voici un autre exemple: la famille des complexes finis (a_0, \dots, a_k) où $a_k < \omega$, $k < \omega$, est une suite ramifiée, en considérant qu'un complexe (a_0, \dots, a_k) précède (b_0, \dots, b_n) si $k < n$ et $a_0 = b_0, \dots, a_k = b_k$.

2. Conditions I, II, III. Dans ce qui suit nous ne considérerons que des suites ramifiées T vérifiant les conditions I, II, III que voici:

I. Quel que soit le point $a \in T$, on a $p|a|^T = \aleph_0$ ou 1 ,³ suivant que a est un point de première ou de seconde espèce (cf. le n^o 1.2).

II. $\gamma T = \Omega$ et donc, T étant une suite ramifiée, $\gamma[a]_T = \omega_1$ (cf. (5));

III. $pR_\alpha T = \aleph_0$, ($\alpha < \Omega$) (cf.³, (3)).

Les conditions I, II, III entraînent la relation

$$(6) \quad pT = \aleph_1.$$

3. Suites (s). Le problème bien connu de Souslin⁴ est étroitement lié avec des suites ramifiées vérifiant, en sus des conditions I, II, III, la condition IV que voici:

IV. *Tout sous-ensemble bien ordonné de T est au plus dénombrable.* Une suite ramifiée vérifiant, I, II, III, IV sera appelée une suite (s) désignée, en général, par s .

On sait que le problème de Souslin est équivalent à la proposition que n'importe quelle suite (s) contient un ensemble infini non dénombrable de points deux à deux incomparables⁵.

En qualifiant de *disjonctif* tout ensemble composé de points deux à deux incomparables, le réponse affirmative au problème de Souslin entraîne que la famille $U_D s$ de tous les ensembles disjonctifs extraits d'une suite (s) quelconque est de la puissance 2^{\aleph_1} et donc supérieure à la puissance de la suite (s) elle-même; c'est que la suite (s) contient un ensemble disjonctif non dénombrable.

Si l'on suppose vraie l'hypothèse du continu $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, on peut prouver la réciproque: si pour chaque suite (s), soit s , la puissance de la famille $U_D s$ des sous-ensembles disjonctifs de s est supérieure à $\aleph_1 = ps$, la réponse au problème de Souslin est affirmative.

³Comme d'habitude, pX désigne la puissance de X .

⁴Celui-ci demande si un ensemble ordonné continu jouissant de la dénombrabilité de chacune des familles infinies de ses intervalles est nécessairement identique, au point de vue d'ordre, à un ensemble linéaire.

⁵Cf. loc. cit.¹ p. 139: p. 106 (passage b), p. 124 (dernier passage) et p. 132 $P_4 \leftrightarrow P_5$.

Pour s'en assurer, il suffit, d'après l'équivalence de tout à l'heure de prouver que s contient un sous-ensemble disjonctif de puissance \aleph_1 . Or, si tout sous-ensemble disjonctif de s était $\leq \aleph_0$, la famille U_{Ds} aurait la puissance $(pS)^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0}$, et donc la puissance $2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1 = ps$ (c'est que par hypothèse $2^{\aleph_0} = \aleph_1$); bref, on aurait $pU_{Ds} = ps$, contrairement à la supposition.

Bref, en désignant pour une suite (s) , soit s , par U_{Ds} la famille des sous-ensembles disjonctif de s et en posant⁶

$$(7) \quad 2_{\aleph_1} = \text{borne inf } pU_{Ds},$$

s parcourant toutes les suites (s) deux à deux distinctes au point de vue d'ordre⁷, nous avons le

THÉORÈME 1. *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, l'inégalité $2_{\aleph_1} > \aleph_1$ est équivalente à la réponse affirmative au problème de Souslin.*⁸

Il est probable que $2_{\aleph_1} > \aleph_1$ (ce serait l'analogue de l'inégalité de Cantor $2^{\aleph_1} > \aleph_1$) mais je suis incapable de le prouver; une raison en est que le procédé de Cantor n'est pas, sans plus, applicable à la détermination de la puissance de la famille U_{Ds} (cf. (7)).

En conséquence, si $2_{\aleph_1} = \aleph_1$, au moins l'un deux cas aura lieu:

L'hypothèse du continu de Cantor est fausse c'est-à-dire $2^{\aleph_0} > \aleph_1$;

La réponse au problème de Souslin est négative.

4. Suites (S). Voici une condition diamétralement opposée à la condition IV:

V. *Pour tout $a \in T$, l'ensemble $[a]_T$ (cf. (5)) contient un ensemble ordonné infini non-dénombrable.*

Une suite ramifiée vérifiant I, II, III, V, sera appelée une suite (S) et désignée, en général, par la lettre S .

⁶D'une manière générale, en disant d'un tableau ramifié t qu'il est *dégénéré* si pour tout $a \in t$ l'ensemble $[a]_T$ est ordonné, et en désignant, pour un tableau T , par U_{DT} la famille des tableaux dégénérés extraits de T , en posant, pour un ordinal α , $2_{\aleph_\alpha} = \text{borne inf}_T pU_{DT}$, T parcourant la classe des tableaux ramifiés de puissance $\leq \aleph_\alpha$, on aura $\aleph_\alpha \leq 2_{\aleph_\alpha} \leq 2^{\aleph_\alpha}$, mais nous ne savons pas si nécessairement $\aleph_\alpha < 2_{\aleph_\alpha}$ et $2_{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$. Si \aleph_α est somme de \aleph_0 nombre cardinaux $< \aleph_\alpha$, on aura $2_{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$ (et donc $2_{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$). Par exemple $2_{\aleph_\omega} = 2^{\aleph_\omega}$.

⁷On peut prouver que dans la définition du nombre 2_{\aleph_1} il suffit de supposer $s \subseteq C$ (cf. le n° 6, 2 ci-après).

⁸Voir p. 141, note 2.

Dans le cas d'un ensemble S , le problème du n^0 3 n'est plus intéressant, chaque S contenant un ensemble disjonctif non-dénombrable.⁹

En revanche, nous ne savons pas évaluer la puissance de la famille $U_M S$ de tous les ensembles ordonnés maximaux¹⁰ de puissance \aleph_1 extraits de S . Toutefois nous allons démontrer que $pU_M S \geq pS (\equiv \aleph_1)$.

Supposons, par impossible, que la famille $U_D S$ soit dénombrable; on pourrait alors énumérer la famille des couples d'éléments distincts de $U_M S$:

$$(A^0, B^0), (A^1, B^1), \dots (A^n, B^n), \dots, (A^n \neq B^n, A^n \in U_M S, B^n \in U_M S).$$

Or, chaque élément X de $U_M S$ étant un sous-ensemble bien ordonné

$$x_0 < x_1 < \dots < x_\alpha < \dots \quad (x_\alpha \in R_\alpha S, \alpha < \Omega),$$

on en déduit que pour tout $n < \omega$, il existe un indice bien déterminé $\alpha_n < \Omega$ tel que $a_\xi^n = b_\xi^n$, pour $\xi < \alpha_n$, et $a_{\alpha_n}^n \neq b_{\alpha_n}^n$ où a_α^n et b_α^n désigne respectivement les points $A^n R_\alpha S, B^n R_\alpha S$.

En posant $\alpha = \text{bornesup } \alpha_n, (n < \omega)$, on aura $\alpha < \Omega$. Soit alors a un point quelconque de $R_\alpha S$; en désignant par a^1, a^2 deux points distincts de $R_{\alpha+1} S$ succédant au point a (cf. la condition I), et par A_1, A_2 deux ensembles ordonnés maximaux de puissance \aleph_1 extraits de $[a^1]_S, [a^2]_S$ respectivement, il est clair que le couple A_1, A_2 d'éléments de $U_M S$ ne peut pas faire partie de la suite précédente des $(A^n, B^n), (n < \omega)$, l'indice lui correspondant étant $\alpha + 1$ et donc $> \alpha$, ce qui est en contradiction avec la définition du nombre α .

5. Suites (C). Les deux catégories de suites ramifiées que nous venons de considérer jouissent de la propriété suivante: α étant un ordinal quelconque de *seconde espèce* et $< \Omega$, la famille des ensembles ordonnés maximaux de type α extraits de la suite est de la puissance 2^{\aleph_0} . Et voici maintenant une condition tout différente entraînant une sorte de non-lacunarité (au point de vue du dénombrable) de chaque suite ramifiée qui la vérifie:

VI. *Tout sous-ensemble ordonné maximal est d'une puissance $\geq \aleph_1$.* Une suite ramifiée sera dite une suite (C) et désignée en général par C si elle vérifie les conditions I, II et VI.

⁹En effet, soit $a_0, \dots, a_\xi, \dots (\xi < \Omega)$ un sous-ensemble ordonné de S tel que $a_\xi \in R_\xi S, (\xi < \Omega)$; soit, pour tout $\alpha < \Omega, a'_\alpha$ un point quelconque distinct de $a_{\alpha+1}$ et appartenant à $R_{\alpha+1} S$; alors l'ensemble des $a'_\xi, (\xi < \Omega)$, est disjonctif et de puissance \aleph_1 . Dès lors, $pU_D S = 2^{\aleph_1}$.

¹⁰Un sous-ensemble ordonné E de T est maximal, si, quel que soit l'ensemble ordonné $X, \text{ les relations } E \subseteq X \subseteq T \text{ entraînent } E = X.$

THÉORÈME 2¹¹: Pour que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il faut et il suffit que, C étant une suite ramifiée vérifiant I, II et VI, il existe une suite de points $a_\alpha \in R_\alpha C$, ($\alpha < \Omega$) telle que $C = \sum_\alpha [a_\alpha]_C$, ($\alpha < \Omega$) (cf. 5). Tout d'abord, on voit sans peine que $pR_\alpha C = 2^{\aleph_0}$ pour tout $\omega \leq \alpha < \Omega$. Dès lors $pC = 2^{\aleph_0}$ et donc, en supposant $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, les points de C peuvent être rangés dans une suite transfinie, soit

$$b_0, b_1, b_2, \dots, b_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega).$$

En désignant, pour un $\alpha < \Omega$ quelconque, par a_α un point de $R_\alpha C$ comparable à b_α , on aura $C = \sum_\alpha [a_\alpha]_C$, ($\alpha < \Omega$).

Prouvons que la condition du théorème 2 est encore suffisante. Commençons par le lemme que voici:

Quelle que soit la suite de points $a_n \in R_n C$, ($n < \omega$), l'ensemble

$$D(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \equiv R_\omega C - \sum_n [a_n]_C$$

a la puissance du continu.

Pour prouver le lemme, désignons, pour abrégé, par R_n l'ensemble $R_n C$ diminué du point a_n , quel que soit $n < \omega$; soient a^0, a^1 deux points distincts de R_0 ; i_0 désignant 0 ou 1, soient $a^{i_0 0}, a^{i_0 1}$ deux points distincts de R_1 succédant à a^{i_0} , d'une manière générale, $n < \omega$ étant donné, supposons qu'on ait construit 2^{n+1} points distincts $a^{i_0 \dots i_n} \in R_n$, ($i_0, i_1, \dots, i_n = 0$ ou 1); alors $a^{i_0 i_1 \dots i_n 0}, a^{i_0 i_1 \dots i_n 1}$ désigneront deux points distincts de R_{n+1} succédant au point $a^{i_0 \dots i_n}$. Ceci étant,

$$(8) \quad i_0, i_1, \dots, i_n, \dots \quad (n < \omega)$$

étant une suite quelconque de nombres 0 ou 1, soit

$$(9) \quad a^{i_0 i_1 \dots i_n \dots}$$

le point bien déterminé de $R_\omega C$ succédant à chacun des points $a^{i_0}, a^{i_0 i_1}, \dots$. L'existence du point (9) résultant de la condition VI, il est manifeste que le point (9) est incomparable à chacun des a_n , ($n < \omega$) est qu'il appartient, par conséquent, à l'ensemble $D(a_0, \dots, a_n, \dots)$. Or, à deux suites distinctes (8) correspondent deux points distincts (9), ce qui veut dire que l'ensemble $D(a_0, \dots, a_n, \dots)$ a bien la puissance 2^{\aleph_0} .

¹¹Voir loc. cit.¹ p. 139: p. 134 th. 5.

Cela posé, prouvons que la relation $C = \sum_{\alpha} [a_{\alpha}]_C$, ($a_{\alpha} \in R_{\alpha}C$, $\alpha < \Omega$) entraîne $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$ et donc $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Pour cela, il suffira de prouver que la puissance de l'ensemble $D(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, ($n < \omega$) est $\leq \aleph_1$.

Tout d'abord

$$D(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \subseteq \sum_{\alpha} [a_{\alpha}]_C, \quad (a_{\alpha} \in R_{\alpha}C, \omega \leq \alpha < \Omega),$$

tout point de D étant incomparable à tout point a_n , ($n < \omega$). Désignons pour un $x \in D(a_0, \dots, a_n, \dots)$ par $\alpha(x)$ le premier nombre ordinal tel que les points $x, a_{\alpha(x)}$, soient comparables; manifestement, C étant un tableau ramifié, à deux x distincts et donc incomparables correspondront deux $\alpha(x)$ distincts. Bref, la correspondance $x \rightleftharpoons \alpha(x)$, ($x \in D$) serait une correspondance biunivoque entre l'ensemble D de puissance 2^{\aleph_0} et un ensemble de nombre ordinaux $< \Omega$, ce qui voudrait dire précisément que $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$.

Ainsi le théorème 2 est complètement démontré.

6. Existence des suites (s), (S) et (C)

6.1. Quant à l'existence d'une suite (s) – elle fut prouvée pour la première fois par M. Aronszajn – voir mon article *Ensembles linéaires et une classe de tableaux ramifiés (tableaux ramifiés de M. Aronszajn)*¹².

6.2. Pour démontrer l'existence d'une suite (C), il suffit de considérer l'ensemble C des complexes $(a_0, a_1, \dots, a_{\xi}, \dots)_{\xi < \alpha}$, ($a_{\xi} < \omega$, $0 < \alpha < \Omega$) ordonné partiellement par la relation $<$ où $(a_0, \dots, a_{\xi}, \dots)_{\xi < \alpha} < (b_0, b_1, \dots, b_{\xi})_{\xi < \beta}$ veut dire que $\alpha < \beta < \Omega$ et $a_{\xi} = b_{\xi}$, ($\xi < \alpha$).

LEMME 1. *Deux suites (C) quelconques sont semblables.* Pour établir une similitude, φ , entre deux suites (C), C_1, C_2 , énumérons, pour commencer, chaque noeud de première espèce de chacun des ensembles C_1 et C_2 (cf. n^o 1, 2). Faisons se correspondre les points du noeud R_0C_1 et ceux du noeud R_0C_2 de manière que se correspondent les points portant, dans l'énumération dont nous venons de parler, un même indice. Soit $0 < \alpha < \Omega$ et supposons qu'on ait établi une similitude entre les ensembles $\sum_{\xi} R_{\xi}C_1$ et $\sum_{\xi} R_{\xi}C_2$, ($\xi < \alpha$); prolongeons-la dans les ensembles $\sum_{\xi} R_{\xi}C_1, \sum_{\xi} R_{\xi}C_2$, ($\xi \leq \alpha$).

Soit $a \in R_{\alpha}C_1$; déterminons $\varphi(a) \in R_{\alpha}C_2$. Si α est de seconde espèce, $\varphi(a)$ sera le point de $R_{\alpha}C_2$ succédant à chacun des points $\varphi(x)$, x parcourant tous les prédécesseurs de a . Si α est de première espèce, soient a' le

¹²Publ. Math. Univ. Belgrade, VI, 1937, pp. 124–160.

prédécesseur immédiat de a et A le noeud de C_2 succédant immédiatement au point $\varphi(a') \in C_2$. Alors, $\varphi(a)$ sera le point du noeud A ayant même indice que le point a dans les énumérations précédentes des noeuds $|a|_{C_1}$ et A .

Ainsi, par l'induction transfinitie, à tout $a \in C_1$ on fait correspondre un seul $\varphi(a) \in C_2$, et on voit que φ est une similitude entre C_1 et C_2 .

En particulier, il n'y a, au point de vue d'ordre, aucune différence entre une suite (C) quelconque et la suite C de tout à l'heure.

6.3. *L'ensemble μ .* Désignons par μ l'ensemble des complexes

$$(a_0, a_1, \dots, a_n), \quad (n < \omega, \alpha_0 < \Omega, \dots, a_n < \Omega)$$

ordonné partiellement par la relation $<$ que voici:

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) < (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$$

veut dire que, ou bien

$$n = k, \alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{n-1} = \beta_{n-1}, \alpha_n < \beta_n$$

(en particulier, si $n = k = 0$, cela veut dire que $\alpha_0 < \beta_0$), ou bien

$$n < k, (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) < (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}).$$

On prouve facilement par le procédé de l'induction totale, que μ est partiellement ordonné, ce qui, au fond, revient à la transitivité de la relation $<$ dans μ : le relation $a < b < c$ entraînent $a < c$, quels que soient les points a, b, c de μ .

LEMME 2. *L'ensemble μ est une suite (S) .*

La démonstration du lemme 2 étant facile, nous nous contentons de quelques observations: $a \equiv (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ étant un élément de μ , le noeud $|a|_\mu$ est constitué des points $(\alpha_0, \dots, \alpha_k), (\alpha_0, \dots, \alpha_k, 0), (\alpha_0, \dots, \alpha_k, 0, 0), \dots$, k désignant le plus grand des nombres $\leq n$ vérifiant $\alpha_k \neq 0$; en particulier, $R_0\mu$ est constitué des points $(0), (0, 0), (0, 0, 0), \dots$. Le noeud de μ succédant immédiatement à a est composé des points

$$\begin{aligned} &(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n + 1), \\ &(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n + 1, 0), \dots, (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n + 1, 0, 0, \dots, 0), \dots \end{aligned}$$

Que μ vérifie V , cela résulte de ce que les points $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \xi)$, ($\xi < \Omega$), constituent un sous-ensemble ordonné non-dénombrable maximal de μ contenant le point a .

Par ailleurs, on vérifie que tout ensemble ordonné maximal non-dénombrable extrait de μ a la forme précédente: $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \xi)$, ($\xi < \Omega$). En conséquence, la famille $U_M \mu$ des sous-ensembles ordonnés maximaux non-dénombrables de μ a la puissance égale à celle de μ , donc $\aleph_1 : pU_M \mu = \aleph_1$ (cf. le problème du n^o 4).

LEMME 3. *Chaque suite (S) contient un ensemble semblable à μ .*

On peut exprimer le lemme 3 en disant que μ est la plus petite suite (S). Soit donc S une suite (S) quelconque. Désignons par $T_0 \equiv \{a_{\alpha_0}\}_{\alpha_0 < \Omega}$ un sous-ensemble ordonné maximal non-dénombrable de S; par conséquent, $a_{\alpha_0} \in R_{\alpha_0} S$, ($\alpha_0 < \Omega$); soit, pour tout $\alpha_0 < \Omega$, $M_{\alpha_0} \equiv \{\alpha_{\alpha_0 \alpha_1}\}$, ($\alpha_1 < \Omega$) un ensemble ordonné maximal non-dénombrable quelconque extrait de $\sum_{\xi} R_{\xi} S - T_0$, ($\alpha_0 \leq \xi < \Omega$) tel que a_{α_0} et $a_{\alpha_0 \alpha_1}$ appartiennent au même noeud de S. D'une manière générale, les ensembles

$$T_0 = \{a_{\alpha_0}\}, M_{\alpha_0} = \{a_{\alpha_0 \alpha_1}\}, \dots, M_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}} = \{a_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}\},$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n < \Omega)$$

étant définis, nous désignerons par

$$M_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n} \equiv \{a_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}\}, \quad (\alpha_{n+1} < \Omega)$$

un ensemble ordonné maximal non-dénombrable extrait de

$$\sum_{\xi} R_{\xi} S - T_0 - \sum_{\alpha_0} M_{\alpha_0} - \dots - \sum_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}} M_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}},$$

$$(\beta \leq \xi < \Omega, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} < \Omega)$$

où $a_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} \in R_{\beta} S$, sous la seule condition que les points

$$a_{\alpha_0 \dots \alpha_n}, a_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}$$

appartiennent au même noeud de S.

Ainsi, par l'induction totale, nous construisons la famille des ensembles

$$T_0, M_{\alpha_0}, M_{\alpha_0 \alpha_1}, \dots, M_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}, \dots$$

et l'ensemble A des points

$$a_{\alpha_0}, a_{\alpha_0\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n}, \dots \quad (\alpha_n < \Omega, n < \omega)$$

extraits de S . On voit sans peine que A est semblable à μ , la correspondance

$$a_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n} \leftrightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

étant une similitude entre A et μ .

Il serait extrêmement intéressant de savoir si une proposition analogue au lemme 3 subsiste pour des suites (s) ; c'est-à-dire s'il existe une suite (s) minimale!

LEMME 4. *L'ensemble μ ne contient aucune suite (s) .*

Supposons, par impossible, que μ contienne une suite (s) , soit s . Tout d'abord, s ne contient que $\leq \aleph_0$ points de la forme (α_0) ; sinon, l'ensemble des (α_0) , $(\alpha_0 < \Omega)$, étant ordonné, l'ensemble s contiendrait un ensemble ordonné non-dénombrable, ce qui est impossible, vu la condition IV. Soit β^0 le premier ordinal tel que

$$(10) \quad (\alpha_0) \notin s, \quad (\beta^0 \leq \alpha_0 < \Omega).$$

Montrons que s contient $\leq \aleph_0$ points $(\alpha_0\alpha_1)$. $(\alpha_0, \alpha_1 < \Omega)$. Dans le cas contraire, l'indice α_0 parcourrait nécessairement une suite transfinie; c'est que si l'on avait un $\alpha < \Omega$ tel que $\alpha_0 < \alpha$ et $(\alpha_0, \alpha_1) \in s$ pour une suite transfinie des $\alpha_1 < \Omega$, il y aurait un $\beta \leq \alpha$ tel que $(\beta, \alpha_1) \in s$ pour une infinité non-dénombrable des α_1 , ce qui est impossible, l'ensemble des (β, α_1) , $(\alpha_1 < \Omega)$, étant, pour β fixe, ordonné.

Il y aurait donc un ensemble non-dénombrable K_0 d'ordinaux $< \Omega$ tel que, quel que soit $\alpha_0 \in K_0$, il y ait au moins un α_1 (dépendant de α_0) vérifiant $(\alpha_0, \alpha_1) \in s$. En désignant, pour un $\alpha_0 \in K_0$, par $\varphi(\alpha_0)$ le premier ordinal tel que $(\alpha_0, \varphi(\alpha_0)) \in s$, l'ensemble E_0 des points $(\alpha_0, \varphi(\alpha_0))$, $(\alpha_0 \in K_0)$ appartiendrait à l'ensemble $\sum_{\xi} R_{\xi} S$, $(\xi \leq \beta^0)$, l'ordinal β^0 ayant la signification de tout à l'heure. En effet, soit $\alpha_0 \in K_0$; l'ensemble des points de μ précédant le point $(\alpha_0, \varphi(\alpha_0))$ est de l'une des deux formes:

$$\text{soit } (\xi), \quad (\xi < \alpha_0), \quad \text{soit } (\alpha_0, \zeta), \quad (\zeta < \varphi(\alpha_0)).$$

Or, $(\xi) < (\alpha_0, \zeta)$, $(\xi < \alpha_0, \zeta < \varphi(\alpha_0))$ ce qui, vu qu'aucun des points (α_0, ζ) , $(\zeta < \varphi(\alpha_0))$ n'appartienne à s , entraîne que l'ensemble des points de s précédant le point $(\alpha_0, \varphi(\alpha_0))$ est contenu dans l'ensemble bien ordonné

des points (ξ) , $(\xi < \alpha_0)$, ce qui vu la relation (10) veut dire que l'ensemble des points de s précédant le point $(\alpha_0, \varphi(\alpha_0))$ est d'un type d'ordre $< \beta^0$, c'est-à-dire que la relation $(\alpha_0, \varphi(\alpha_0)) \in R_{\eta}s$ entraîne $\eta \leq \beta^0$.

Ainsi donc l'ensemble infini non-dénombrable des points $(\alpha_0, \varphi(\alpha_0))$, $(\alpha_0 \in K_0)$, ferait partie de l'ensemble $\sum_{\xi} R_{\xi}s$, $(\xi \leq \beta^0)$, ce qui est impossible, celui-ci étant dénombrable comme conséquence des relations $\beta^0 < \Omega$ et $pR_{\xi}s = \aleph_0$, $(\xi < \Omega)$ (cf. la condition III).

Bref, l'ensemble des points de s de forme (α_0) ou $(\alpha_0\alpha_1)$ serait $\leq \aleph_0$. Soit $0 < n < \omega$ et supposons que nous ayons prouvé que l'ensemble des points de s de forme $(\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_k)$, $(k \leq n)$ est au plus dénombrable; démontrons qu'il en serait encore ainsi de l'ensemble des points $(\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_n\alpha_{n+1})$ appartenant à s .

Soit β^n le premier nombre ordinal tel qu'aucun des points

$$(\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_k), \quad (\beta^n \leq \alpha_0 < \Omega, \dots, \beta^n \leq \alpha_k < \Omega, \quad k \leq n)$$

n'appartienne à s . Comme tout à l'heure, nous concluons que pour un point donné $(\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_n)$ de μ il y a un nombre ordinal, et soit $\varphi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ le plus petit ordinal tel que $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in s$ entraîne $\alpha_{n+1} < \varphi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Il y aurait donc un ensemble non-dénombrable K_n de points $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tels que l'ensemble E_n des points $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \varphi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n))$, $((\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K_n)$ fasse partie de s . On aboutit à la contradiction en démontrant comme ci-dessus que l'ensemble E_n serait contenu dans l'ensemble dénombrable $\sum_{\xi} R_{\xi}s$, $(\xi \leq \beta^n)$.

Bref, quel que soit l'entier $n \geq 0$, il n'y aurait qu'au plus \aleph_0 points de μ de forme $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ appartenant à s ; d'où l'on conclurait à la dénombrabilité de s , ce qui est impossible (cf. (6)). Autrement dit, μ ne contient aucune suite (s) . -

LEMME 5. *Il y a deux suites (S) distinctes au point de une d'ordre.*

Soient s une suite (s) quelconque et, pour un $a \in s$, $S(a)$ une suite (S) semblable à la suite μ et sans point commun avec μ , de manière qu'à deux points distincts a, a^1 de s , les ensembles $S(a), S(a^1)$ sont sans point commun. Désignons par $\mu(s)$ l'ensemble

$$s + \sum_a S(a), \quad (a \in s)$$

ordonné partiellement de manière que, quel que soit $x \in \mu(s)$, l'ensemble des points de $\mu(s)$ précédant le point x est composé: des points de s précédant,

dans s , le point x si $x \in s$, et des points de s précédant, dans s , le point a et des points de $S(a)$ précédant, dans $S(a)$, le point x , si $x \in S(a)$ et $a \in s$; bien entendu, l'ordre relatif des points dans chacun des ensembles s et $S(a)$, ($a \in s$), reste conservé dans $\mu(s)$, de manière qu'on peut dire qu'on obtient l'ensemble $\mu(s)$ à partir de l'ensemble s en faisant suivre le point $a \in s$ par l'ensemble $S(a)$, ($a \in s$).

On prouve que $\mu(s)$ est une suite (S).

Or, les deux suites (S), μ et $\mu(s)$ ne sont pas semblables, la suite $\mu(s)$ contenant une suite (s), soit s , alors que la suite μ n'en contient aucune, comme le prouve le lemme 4.

Le problème de savoir s'il y a deux suites (s) distinctes au point de vue d'ordre reste ouvert.

Remarquons, en terminant, que chaque suite (s) ou (S) est semblable à un sous-ensemble d'une suite (C) quelconque, ce qui, vu la similitude de deux suites (C) quelconques, veut dire qu'on peut supposer les ensembles dont nous venons nous occuper au cours de l'article appartenir à la suite C que nous avons définie au n^o 6.2.

SUR LES ENSEMBLES ORDONNÉS DENOMBRABLES

1. G. Cantor a prouvé, d'une part, que l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable (v. [2, p. 297])¹ et d'autre part, que l'ensemble des nombres ordinaux de première et de seconde classe n'est pas dénombrable (v. [1, p. 332, théor. *D* et p. 333, théor. *F*]).

En désignant (v. [1, p. 304, formule (1)]) respectivement par

$$(1) \quad \eta, \Omega$$

les types d'ordre de ces deux ensembles-là chacun étant ordonné d'après la grandeur de ses éléments, et en convenant que

$$(2) \quad pX \text{ désigne la puissance de } X,^2$$

on a donc

$$(3) \quad p\eta = \aleph_0, \quad p\Omega = \aleph_1.$$

D'autre part, le type d'ordre de tout ensemble ordonné au plus dénombrable est, au plus égal à η ,³ en particulier, α étant un nombre ordinal quelconque $< \Omega$, on a

$$(4) \quad \alpha \leq \eta$$

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Glasnik Mat. Fiz. Astr. (2) 3 (1948), 145-151.

¹Les crochets se rattachent à la Bibliographie (voir la fin de la Note).

²Cantor désigne pX par $\overline{\overline{X}}$ ou \overline{X} , suivant que X est un ensemble ou un type d'ordre (v. [2, p. 282, formule (3) et p. 298, formule (5)]).

³Voir Hausdorff [3, p. 99]; aussi Cantor [2, p. 305].

puisque l'ensemble ordonné des nombres ordinaux $< \alpha$ est au plus dénombrable et du type d'ordre α .⁴

Soit, pour un ensemble ordonné E ,

$$(8) \quad \Gamma E = \sup_F tF \quad (\text{sup} = \text{borne supérieure})$$

F parcourant tous les sous-ensembles bien ordonnés de E . Au lieu de

$$(9) \quad \Gamma E$$

on écrira aussi $\Gamma(tE)$ et réciproquement.

Ceci étant, on a donc

$$(10) \quad p\eta = \aleph_0, \quad \Gamma\eta = \Omega.$$

Le but de la Note c'est de prouver les deux propositions suivantes:

THÉORÈME 1. (caractérisation des E dénombrables non clairsemés).

La relation

$$(11) \quad tE = \eta \quad (\text{voir (1) et (5)})$$

est équivalente à ce que

$$(12) \quad pE = \aleph_0, \quad \Gamma E = \Omega \quad (\text{voir (2) et (8)}).$$

⁴La façon d'écrire se rattache à celle que Cantor emploie pour des ensembles bien ordonnés (Ibidem, p. 321): en désignant pour un ensemble ordonné E par

$$(5) \quad tE$$

le type d'ordre de E , nous écrivons, F étant un ensemble ordonné quelconque,

$$(6) \quad tE \leq tF \text{ ou } tF \geq tE,$$

si E est semblable à un sous-ensemble de F . La relation

$$(7) \quad tE = tF$$

équivalra à ce que simultanément $tE \leq tF$ et $tF \leq tE$. Si $tE \leq tF$ sans que $tF \leq tE$, on écrit $tE < tF$ (cf. Cantor loc. cit. p. 285).

Remarquons que l'égalité $tE = tF$ ne suffit pas pour que E et F soient semblables c'est-à-dire pour que $tE \equiv tF$. Par exemple $1 + \eta = \eta$ sans que $1 + \eta \equiv \eta$. Remarquons toutefois que, d'après Banach [1] si $tE = tF$, on peut décomposer les ensembles E et F en deux parties disjointes respectivement semblables.

THÉORÈME 2. Pour un ensemble ordonné E la relation

$$(13) \quad \Gamma E + \Gamma(E^*) < \Omega,^5$$

est équivalente aux systèmes de relations

$$(14) \quad pE \leq \aleph_0, \quad \eta \leq tE$$

et est donc caractéristique pour des ensembles ordonnés au plus dénombrables et clairsemés au point de vue d'ordre.⁶

Remarque 1. Dans le côté gauche de (13) on ne peut omettre aucun terme; par exemple, pour tout ensemble bien ordonné E on aura $\Gamma(E^*) \leq \omega$, alors que pE peut être un aleph quelconque.

Ajoutons que $pE \leq 2^{p(\Gamma E + \Gamma E^*)}$ (il y a une meilleure évaluation de pE , même dans le cas de E partiellement ordonné; cf. Kurepa [4]).

Remarque 2. Dans le théorème 1 on peut remplacer ΓE par $\Gamma(E^*)$.

2. *La condition du théorème 2 est nécessaire.* En effet, nous allons prouver que si E vérifie (13) alors E est au plus dénombrable et clairsemé ordinalement.

Que l'ensemble E est clairsemé ordinalement c'est bien évident, puisque, dans le cas contraire, E contiendrait un sous-ensemble dense, soit F' , et dès lors un sous-ensemble semblable à l'ensemble des nombres rationnels c'est-à-dire $\eta \leq tE$ et par conséquent $\Gamma \eta \leq \Gamma E$. Or, $\Gamma \eta = \Omega$ et par conséquent $\Omega \leq \Gamma E$ contrairement à l'hypothèse (13).

Prouvons encore que $pE \leq \aleph_0$.

Pour le voir, définissons pour deux points a, b de E la relation \sim que voici (cf. Hausdorff [2, p. 96]):

$$(15) \quad a \sim b \text{ si et seulement si}^7$$

$$(15') \quad p[a, b]_E \leq \aleph_0 \quad (\text{cf. (2)}).$$

⁵ E^* désigne l'ensemble des points de E ordonnés par la relation inverse à celle ordonnant E . Par conséquent, $\Gamma E^* = \sup t(F^*)$, F parcourant tous les sous-ensembles, inversement bien ordonnés de E .

⁶ E est dit *clairsemé* au point de vue d'ordre s'il ne contient aucun sous-ensemble F tel que, entre tout couple de points de F il y ait d'autres points de F .

Remarquons qu'un ensemble linéaire peut être composé de points *isolés* et pourtant, au point de vue d'ordre, être dense: tel est le cas de l'ensemble des centres des intervalles contigus d'un ensemble linéaire fermé nulle-part dense.

⁷ $[a, b]_E$ désigne l'ensemble des points de E situés entre a et b , ces deux points, y étant inclus. En particulier, $[a, a]_E$ se compose du point a .

On vérifie sans peine que \sim est une relation d'équivalence ou de classification.⁸

Si alors, pour un $a \in E$, l'on désigne par

$$(16) \quad C(a)$$

l'ensemble de tous les $b \in E$ tels que $a \sim b$, on aura des lemmes suivants:

LEMME 1. $C(a)$ est une portion de E c'est-à-dire un sous-ensemble X de E tel que si $a \in X$, $b \in X$, alors aussi $[a, b]_E \subseteq X$.

LEMME 2. Si $a \in E$, $b \in E$, alors ou bien $C(a) = C(b)$ ou bien $C(a)$, $C(b)$ sont disjoints.

LEMME 3. $C(a)$ est au plus dénombrable.

Le lemme étant évident si $C(a)$ a un premier point et un dernier point, supposons que $C(a)$ n'ait pas un premier point pas plus qu'un dernier point. Supposons, par impossible, que $C(a)$ soit infini et non-dénombrable et de plus que l'ensemble $(a, \cdot)_A$ des points de $A \equiv C(a)$ succédant à a soit $> \aleph_0$.

Soit alors $a \equiv a_0, a_1, \dots, a_\xi, \dots, (\xi < \alpha)$ un sous-ensemble bien ordonné de A tel que

$$\sum_{\xi} (\cdot, a_\xi)_A \equiv A, \quad (\xi < \alpha),$$

le signe $(\cdot, x)_A$ désignant tous les points de A précédant le point x . On a nécessairement, $\alpha \leq \Gamma A \leq \Gamma E$ et donc à la suite de (13), $\alpha < \Omega$. Or, chacun des ensembles $[a_0, a_\xi]_A$ étant au plus dénombrable puisque $a_0 \sim a_\xi$, la relation évidente

$$[a, \cdot)_A = \sum_{\xi} [a_\xi, a_{\xi+1}]_A, \quad (\xi < \alpha)$$

nous dirait, α étant au plus dénombrable, que l'ensemble $(a, \cdot)_A$ des points de A succédant à a serait au plus dénombrable, contrairement à l'hypothèse.

LEMME 4. Il n'y a pas de classes $C(a)$ consécutives c'est-à-dire il n'y a aucun couple d'éléments a, b de E tels que la portion $C(a)$ de E précède immédiatement la portion $C(b)$ de E .

⁸Une relation binaire ρ est une relation d'équivalence dans un ensemble M si

- 1) $a\rho a$, ($a \in M$),
- 2) $a\rho b$ entraîne $b\rho a$, quels que soient $a \in M$, $b \in M$,
- 3) $a\rho b$, $b\rho c$ entraînent $a\rho c$, quels que soient $a \in M$, $b \in M$, $c \in M$.

En effet, dans le cas contraire, chacune des portions $C(a)$, $C(b)$ étant, d'après le lemme 3, au plus dénombrable, l'ensemble $C(a) + C(b)$ le serait encore et à la suite de (15), $a \sim b$ et donc $C(a) \equiv C(b)$.

LEMME 5. *Quel que soit $a \in E$, on aura $C(a) = E$.*

En effet, si l'on avait deux portions distinctes $C(a)$, $C(b)$, on en aurait, d'après le lemme 4, une infinité F telle que entre deux éléments quelconques de F , il y en a d'autres; si alors on choisit un point de chaque élément de F , on obtiendrait un sous-ensemble dense, soit A , de E , et dès lors $\eta \leq tA \leq tE$ donc $\eta \leq tE$, contrairement à la seconde relation (14).

Ainsi donc le lemme 5 est prouvé, ce qui, vu le lemme 3, entraîne $pE \leq \aleph_0$.

3. *La condition du théorème 2 est suffisante.* En effet, si les relations (14) n'avaient pas pour conséquence la relation (13), on aurait $\Gamma E + \Gamma(E^*) > \Omega$ et dès lors au moins un des deux nombres ordinaux ΓE , $\Gamma(E^*)$ serait $= \Omega$, disons $\Gamma E = \Omega$. Ainsi donc, on aurait $\Gamma E = \Omega$, $pE = \aleph_0$ et, d'après le théorème 1 que nous allons établir, $\eta = tE$, contrairement à (14).

4. *Démonstration du théorème 1.* Que la condition (11) entraîne (12) c'est ce que nous avons rappelé dans (3).

Il s'agit encore de prouver la réciproque c'est-à-dire que (12) entraîne (11) ce qui revient à démontrer que E contient un sous-ensemble dense.

Définissons dans E , une relation binaire \sim que voici:

$$(17) \quad a \sim b \text{ signifie que } a \in E, \quad b \in E \text{ et } \Gamma[a, b]_E < \Omega.$$

On vérifie que la relation \sim est une relation de classification dans E^8 . Soit alors, pour un $a \in E$, $C(a)$ la classe de tous les $x \in E$ vérifiant $x \sim a$. Les lemmes 1, 2 et 4 subsistent encore pour la relation (17).

LEMME 6. $\Gamma C(a) < \Omega$ quel que soit $a \in E$ (cf. [8]).

Le lemme 6 est évident si la portion $C(a)$ a un premier élément, soit x , et un dernier élément, soit y , puisque, dans ce cas, d'une part, $[x, y]_E = C(a)$ et d'autre part $x \sim y$. Si $C(a)$ ne contient pas un dernier point, soit

$$b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

une suite croissante de points de $C(a)$ et

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

une suite monotone non croissante de points de $C(a)$ tels que

$$C(a) \equiv \sum_n [a_n, b_n]_E, \quad (n < \omega).$$

L'existence des suites a_n, b_n étant évidente, nous en concluons que

$$\Gamma C(a) = \sup_n \Gamma[a_n, b_n]_E, \quad (n < \omega).$$

Or, $a_n \in C(a), b_n \in C(a)$ signifient que $a_n \sim b_n$ c'est-à-dire $\Gamma[a_n, b_n] < \Omega$.

L'ordinal $\Gamma C(a)$ étant limite d'une suite au plus dénombrable d'ordinaux $< \Omega$, il est lui-même $< \Omega$.

Soit C l'ensemble des classes $C(a), (a \in E)$, ordonné par la convention que, A, B étant deux éléments de C , alors A précède B dans C si la portion A de E est dans E à gauche de la portion B de E .

LEMME 7. *L'ensemble ordonné C a du moins deux éléments distincts.*

C'est que, autrement, la relation évidente $E = \sum_a C(a), (a \in E)$ entraînerait que E serait l'élément unique de C et à ce titre, d'après le lemme 6, on aurait $\Gamma E < \Omega$, contrairement à la condition (12).

LEMME 8. *L'ensemble ordonné C est dense et dénombrable. C'est une conséquence immédiate des lemmes 4, 6 et de la dénombrabilité de E , puisque $pC \leq pE = \aleph_0$. Par conséquent, $tC = \eta$.*

Or, l'ensemble ordonné C est semblable à un sous-ensemble de E : pour le voir, il suffit de choisir de chaque élément de C un et un seul point et de considérer l'ensemble de tous les points ainsi choisis.

Finalement, des relations $\eta = tC, tC \leq tE$ on en conclut $\eta \leq tE$, ce qui avec la relation $tE \leq \eta$ de Cantor entraîne la relation $tE = \eta$ elle-même.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Banach, *Un théorème sur les transformations biunivoques*, Fund. Math. **6** (1924), 236-239.
- [2] Georg Cantor, *Gesammte Abhandlungen herausgegeben von Ernst Zermelo*, Berlin 1932, 8 + 486.
- [3] Felix Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914, 6 + 476.
- [4] G. Kurepa, *Sur la puissance des ensembles partiellement ordonnés* C. R. Soc. Sci. Varsovie **32** (1939), 61-67.

L'HYPOTHÈSE DU CONTINU ET LE PROBLÈME DE SOUSLIN

En admettant la possibilité d'une bonne ordination du continu linéaire, c'est-à-dire que le nombre 2^{\aleph_0} soit un aleph, on aura en posant

$$(1) \quad 2^{\aleph_0} = \aleph_{N(0)}, \quad N(0) \geq 1,$$

l'égalité hypothétique $N(0) = 1$ étant le contenu de l'hypothèse de Cantor. Un bon nombre de mathématiciens se sont occupés du problème du continu, c'est-à-dire de la détermination du nombre $N(0)$ et ont obtenu plusieurs propositions équivalentes à l'hypothèse $N(0) = 1^1$.

Dans le présent travail nous engloberons l'étude du problème du continu dans l'étude d'une classe d'ensembles partiellement ordonnés ayant quelques rapports avec l'étude du problème de Souslin.

Bien que nous ne sachions pas établir une relation directe entre le problème du continu et le problème de Souslin, nous indiquerons, dans ce qui suit, tout au moins quelques analogies dans l'étude des deux problèmes dans les deux classes d'ensembles partiellement ordonnés, que nous allons définir et qui sont liés aux deux problèmes, respectivement^{2,3}.

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Publ. Inst. Math. Belgrade **2** (1948), 26–36.

¹Voir W. Sierpinski, *Hypothèse du continu*, Warszawa-Lwów, 1934. IV + 192, en particulier, ch. I. Voir aussi des notes de M. Kurt Gödel dans Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1938, 1939 dans lesquelles il aurait prouvé la consistance de l'hypothèse du continu au sein d'une axiomatique consistante de la théorie des ensembles.

²Rappelons que le problème de Souslin demande si un ensemble ordonné continu tel que chaque famille de ses intervalles disjoints soit $\leq \aleph_0$ est semblable à un ensemble linéaire (v. *Fund. Math.* I, 1920 p. 223, problème 3 et la 2^{de} édition, 1937, p. 248).

³Dans Thèse, p. 133, (*Ensembles ordonnés et ramifiés*, Paris, 1935, et *Publ. Math. Univ. Belgrade*, IV, 1935), j'ai établi la proposition suivante: Si, quel que soit l'ensemble partiellement ordonné T de puissance $\geq \aleph_1$ et vérifiant les conditions I, II ci-après, la famille des ensembles extraits de T et dont chacun est, soit ordonné, soit composé de points deux à deux incomparables est d'une puissance $> \aleph_1$, l'hypothèse de Cantor entraîne la réponse affirmative au problème de Souslin.

En désignant, pour un ensemble partiellement ordonné E , par

$$(2) \quad bE,$$

la borne supérieure des puissances des sous-ensembles bien ordonnés croissants et décroissants de E et des sous-ensembles de E composés de points deux à deux incomparables, nous avons fait voir l'existence des liens intimes entre, d'une part, le problème de Souslin et, d'autre part, les ensembles partiellement ordonnés E tels que

$$(3) \quad bE \leq \aleph_0,$$

vérifiant les deux conditions que voici:

I. Tout sous-ensemble ordonné de l'ensemble est bien ordonné;

II. Quelque soit le point a de l'ensemble, le sous-ensemble des points de l'ensemble précédant le point a est ordonné.

C'est que la puissance d'un ensemble quelconque est $\leq \aleph_1$, le problème de Souslin lui-même étant équivalent à celui disant que la puissance d'un E quelconque vérifiant (3), I, II soit $\leq \aleph_0^4$.

Nous verrons plus loin que le problème du continu est intimement lié à l'étude des E vérifiant (3) et I (sans vérifier II), l'hypothèse de Cantor étant équivalente à celle que la puissance d'un E quelconque vérifiant (3), I soit $\leq \aleph_1$.

Pour montrer en quoi consiste notre réduction du problème du continu, avançons quelques définitions.

1. Un ensemble partiellement ordonné sera dit

$\left\{ \begin{array}{l} \text{partiellement bien ordonné} \\ \text{un tableau ramifié} \end{array} \right\}$ s'il vérifie $\left\{ \begin{array}{l} \text{la condition I} \\ \text{les conditions I, II} \end{array} \right\}$ ci-dessus.

Dans ce qui suit E ; désignera un ensemble partiellement bien ordonné quelconque.

1.1. Nombre γE ; Ensembles $R_\alpha E$, ($\alpha < \gamma E$). Nous désignerons par

$$(4) \quad R_0 E$$

⁴Voir Thèse loc. cit.³, pp. 106, 124, 132 (équivalence $P_2 \Leftrightarrow P_3$).

l'ensemble des premiers points de E ; manifestement, R_0E est bien déterminé et on aura $R_0E = 0$ si $E = 0$; on voit que, E étant partiellement bien ordonné, tout point de $E - R_0E$ est précédé d'au moins un point de R_0E .

L'ensemble R_0E sera appelé la *rangée 0* ou la *première rangée de E*. Pour tout ordinal $\alpha > 0$, nous poserons

$$(5) \quad R_\alpha = R_0(E - \sum_{\xi < \alpha} R_\xi E).$$

Nous désignerons par

$$(6) \quad \gamma E$$

le premier ordinal ξ vérifiant $R_\xi E = 0$.

Ainsi se trouve parfaitement déterminée la suite des rangées de E :

$$(7) \quad R_0E, R_1E, \dots, R_\alpha E, \dots, \quad (\alpha < \gamma E).$$

1.2. Soit $\alpha < \gamma E$; l'ensemble $R_\alpha E$ ne contenant aucun couple de points distincts comparables, on aura, dans le cas où E vérifie (3), puissance $R_\alpha E \leq \aleph_0$.

L'un des buts de cette note sera de prouver les propositions suivantes:

α_1 . Si E vérifie II et (3), la puissance de E est $\leq \aleph_1$, l'égalité éventuelle étant équivalente à la réponse négative au problème de Souslin.⁵

α_2 . Si $\gamma E \geq \Omega$ et si chacun des ensembles $R_\alpha E$, ($\alpha < \gamma E$) est fini, l'ensemble E contient un sous-ensemble bien ordonné infini non dénombrable; par conséquent, si $bE \leq \aleph_0$ et *puiss.* $R_\alpha E < \aleph_0$, ($\alpha < \gamma E$), on aura $\gamma E < \Omega$ et donc E est au plus dénombrable (cf. th. 1^{bis}).

α_3 . Si $bE = \aleph_0$ et *puiss.* $R_\alpha E = \aleph_0$, ($\alpha < \gamma E$), tout ce qu'on peut dire de γE , c'est que $\gamma E < \omega_{N(\aleph_0)+1}$ avec $N(\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$, l'hypothèse $\gamma E < \omega_2$ étant équivalente à l'hypothèse du continu (cf. th. 4).

Par contre, si E vérifie II et si *puiss.* $R_\alpha E = \aleph_0$, ($\alpha < \omega_{\beta+1}$) avec $\beta > 0$, il y a un indice $\xi < \gamma E$ tel que, quels que soient $a \in R_\eta E$, $\xi < \eta < \gamma E$, l'ensemble des points de E succédant à a est ordonné et de la puissance $\aleph_{\beta+1}$.⁶

L'énoncé de la proposition α_3 subsiste même dans le cas où l'on suppose que E vérifie quelques conditions supplémentaires, comme par exemple

⁵Pour démonstration, voir Thèse, loc. cit.³, p. 105 (th. 1), pp. 106, 124, 132.

⁶Cf. Thèse, p. 78. (th. 4).

celle-ci: à tout point a de E on peut faire correspondre un nombre réel $f(a)$ de telle manière que, si a précède b dans E , le nombre $f(a)$ précède le nombre réel $f(b)$.⁷ L'importance de la condition provient de ce que, dans le cas où un pareil E vérifie II et (3), E est au plus dénombrable et se comporte donc normalement par rapport au problème de Souslin (cf. prop α_1).

Ajoutons-y l'importante relation

$$\gamma E \leq \beta E \cdot \Gamma E \quad (\text{cf. th. 5 ci-après}).$$

Notons que quelques-uns des résultats de l'article ont paru aux C. R. Acad. Sci. Paris 205 (1937), 1196-1198.

2.1. Quelques propriétés des ensembles $R_\alpha E$ ($\alpha < \gamma F$) (cf. 7).

LEMME 1. *Pour tout $\alpha < \beta < \gamma E$, les ensembles $R_\alpha E$, $R_\beta E$ sont disjoints.*

LEMME 2. *Pour tout $\alpha < \beta < \gamma E$, et pour tout $b \in R_\beta E$, il y a au moins un point $a \in R_\beta E$ précédant le point a ; dans le cas où E vérifie II, le point a est unique.*

LEMME 3. *Quel que soient l'indice $\beta < \gamma E$ et la suite croissante de nombres ordinaux $< \gamma E$*

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_\xi < \dots, \quad (\xi < \beta)$$

on aura, en posant $F = \sum_\xi R_{\alpha_\xi} E$, $(\xi < \beta)$

$$\gamma F = \beta, \quad R_\xi F = R_{\alpha_\xi} E, \quad (\xi < \beta).$$

LEMME 4. *Si $\gamma E = \Omega$ et si pour tout $\alpha < \Omega$ il y a un point a_α de $R_\alpha E$ et un nombre ordinal β_α tel que $\alpha < \beta_\alpha < \Omega$ et que a_α précède chacun des points de $R_{\beta_\alpha} E$, alors E contient un ensemble bien ordonné infini non dénombrable.*

Tout d'abord, si un point de E précède tout point de $R_\alpha E$ le même point précédera tout point de l'ensemble $\sum_\xi R_\xi E$, ($\alpha \leq \xi < \gamma E$). Soit $b_0 \in R_{\beta_0} E$; supposons que $0 < \alpha < \Omega$ et que $b_0, b_1, \dots, b_\xi, \dots$, ($\alpha < \xi$) constitue un sous-ensemble bien ordonné de E ; alors η désignant un ordinal tel que l'ensemble $R_\alpha E$ soit précédé de l'ensemble des b_0, \dots, b_ξ, \dots , ($\xi < \alpha$), soit b_α un point de $R_{\beta_\eta} E$.

⁷Cf. la définition des ensembles H au n^o 2, 3 où l'on peut poser $f(a) = a$ ($a \in H$).

Ceci étant, on voit immédiatement que la suite des points

$$b_0, b_1, \dots, b_\alpha \dots, \quad (\alpha < \Omega)$$

constitue un sous-ensemble de E bien ordonné et non dénombrable.

2.2. LEMME 5. *Les relations $\gamma E = \Omega$, puiss. $R_\alpha E < \aleph_0$, ($\alpha < \gamma E$) entraînent l'existence d'un sous-ensemble de E bien ordonné infini et non dénombrable.*

En vertu du lemme 4, nous pouvons nous restreindre au cas où il y a un $\mu < \Omega$ tel qu'aucun point de $\sum_\xi R_\xi E$, ($\mu \leq \xi < \Omega$) ne précède aucune rangée $R_\eta E$ de E ; rien ne nous empêche de supposer $\mu = 0$. Ceci étant, on aura $2 \leq$ puiss. $R_\alpha E < \aleph_0$ pour tout $\alpha < \Omega$. Considérons le cas où puiss. $R_\alpha E = 2$ pour tout $\alpha < \Omega$.

En vertu de l'hypothèse de tout-à-l'heure, tout point de E a une infinité non dénombrable de successeurs. En effet, si E contenait un point, a , n'ayant, dans E , que $\leq \aleph_0$ successeurs, soient α, β deux ordinaux $< \Omega$ tels que $a \in R_\alpha E$, $\alpha < \beta$ et que a ne précède aucun point de $\sum_\xi R_\xi E$, ($\beta \leq \xi < \Omega$); en désignant par b le point de $R_\alpha E$ distinct de a , le point b précéderait la rangée $R_\beta E$, contrairement à l'hypothèse.

Ceci étant, soit a un point de $R_0 E$; posons $F = \sum_\xi R_{\alpha_\xi} E$, α_ξ parcourant tous les ordinaux $< \Omega$ tels que $R_{\alpha_\xi} E$ contienne un point comparable à a . D'après ce que nous venons de prouver puiss $F > \aleph_0$ et d'après le lemme 3, $\gamma F = \Omega$.

Ceci étant soient, pour tout $\alpha < \Omega$, x_α le point de $R_\alpha F$ comparable à a et y_α le point constituant l'ensemble $R_\alpha F - x_\alpha$. Si $\alpha < \beta < \Omega$, on aura $y_\alpha < y_\beta$. En effet, y_β étant précédé d'au moins un des points x_α, y_α , on ne peut pas avoir $x_\alpha < y_\beta$ puisque, en vertu de $a \leq x_\alpha$, on aurait $a < y_\beta$, contrairement à la définition du point y_β . Bref, l'ensemble des points de F incomparables à a est ordonné (donc, aussi, bien ordonné) infini et non dénombrable. D'une façon générale, supposons que n soit un entier > 2 tel que le lemme 5 soit prouvé pour tout E vérifiant $\gamma E = \Omega$ et puiss. $R_\alpha E < n$; démontrons le lemme pour le cas où puiss. $R_\alpha E \leq n$, ($\alpha < \Omega$). Manifestement, nous pouvons supposer que puiss. $R_\alpha E = n$ pour tout $\alpha < \Omega$. Soit alors a un point de E tel que puiss. $[a] =^8$ puiss. E ; l'existence de a étant immédiate, posons $G = \sum_{\alpha_\xi} R_{\alpha_\xi} E - [a]_E$,⁸ α_ξ parcourant tous les indices $< \Omega$ tels que $R_{\alpha_\xi} E$ ait un point comparable à a . G est non dénombrable puisque $R_{\alpha_\xi} E - [a]_E \neq \emptyset$, pour tout $\xi < \Omega$. De

⁸Nous désignerons par $[a]_E$ l'ensemble des points de E comparables à a .

plus, $R_\xi G = R_{\alpha_\xi} E - [a]_E$; dès lors, puisque $[a]_E \cdot R_{\alpha_\xi} E \neq 0$, ($\xi < \Omega$), et que, par hypothèse, $\text{puiss. } R_\alpha E = n$, ($\alpha < \Omega$), on aura $0 < \text{puiss. } R_\xi G < n$, ($\xi < \Omega$), ce qui, d'après les suppositions, entraîne l'existence d'un ensemble de puissance \aleph_1 ordonné et extrait de G et à fortiori de E .

Ainsi le lemme 5 est prouvé toutes les fois qu'il y a un entier n tel que $0 < \text{puiss. } R_\alpha E \leq n$, ($\alpha < \Omega$). Dans le cas général où un tel n n'existe pas, bien que $0 < \text{puiss. } R_\alpha E < \aleph_0$, ($\alpha < \Omega$), il est évident qu'il existe, d'une part, un entier $k > 0$, et, d'autre part, une suite d'ordinaux $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_\xi < \dots$, ($\alpha_\xi < \Omega_1 \xi < \Omega$), tels que $\text{puiss. } R_{\alpha_\xi} E = k$. Alors, l'ensemble $F = \sum_\xi R_{\alpha_\xi} E$, ($\xi < \Omega$), satisfaisant aux conditions dans lesquelles le lemme est prouvé, on en déduit la validité du lemme 5 dans tous les cas.

THÉORÈME 1. *Pour tout ensemble partiellement bien ordonné E , les relations $bE \leq \aleph_0$ (cf. (2)), $\text{puiss. } R_\alpha E < \aleph_0$, ($\alpha < \gamma E$) entraînent $\gamma E < \Omega$ et à fortiori $\text{puiss. } E \leq \aleph_0$. En effet, si l'on avait $\gamma E \geq \Omega$, en considérant l'ensemble $G = \sum_\alpha R_\alpha E$, ($\alpha < \Omega$), on aurait $\gamma G = \Omega$, $R_\alpha G = R_\alpha E$ et donc $\text{puiss. } R_\alpha G < \aleph_0$, ($\alpha < \Omega$), ce qui, d'après le lemme 5, entraînerait l'existence d'un sous-ensemble bien ordonné de puissance \aleph_1 extrait de G et donc E , contrairement à l'hypothèse $bE \leq \aleph_0$.*

En combinant le lemme 3 et le théorème 1. nous avons le

THÉORÈME 1. bis *Un ensemble partiellement ordonné tel que $bE \leq \aleph_0$ ne contient que $\leq \aleph_0$ rangées $R_\alpha E$ dont chacune est finie.*

2.3. Combien de rangées dénombrables peut avoir un E vérifiant $bE \leq \aleph_0$? Un E , dont tout sous-ensemble composé de points deux à deux incomparables est au plus dénombrable et tel que $\gamma E = \omega_2$, contient-il nécessairement un sous-ensemble bien ordonné de puissance \aleph_2 ? Nous n'en savons rien!

LEMME 6. Quel que soit l'ordinal ψ de puissance $\leq 2^{\aleph_0}$, il y a un ensemble partiellement bien ordonné E tel que $\gamma E = \psi$, $bE \leq \aleph_0$.

En effet, soit

$$H_0, H_1, \dots, H_\xi, \dots, (\xi < \psi)$$

une suite de type ψ d'ensembles linéaires deux à deux disjoints, dont chacun est dénombrable et partout dense. En désignant par H l'ensemble $\sum_\xi E_\xi$, ($\xi < \psi$), ordonné partiellement par la relation ρ où, quels que soient les points a, b de H , la relation $a\rho b$ équivaut à $a < b$, $\alpha < \beta$, les ordinaux α, β vérifiant $a \in H_\alpha, b \in H_\beta$, on démontre les propositions que voici:

$\beta_1.$ H n'est pas un ensemble partiellement bien ordonné par ρ et vérifie $bH = \aleph_0$.

β_2 . Pour tout $\alpha < \psi$, $R_\alpha H = H_\alpha$; dès lors $\gamma H = \psi$.

De plus, quels que soient $a \in H$ et $\xi < \psi$, l'ensemble $R_\xi H$ contient un point comparable à a .

Le lemme 6 entraîne le

THÉORÈME 2. *En admettant la possibilité d'une bonne ordination du continu linéaire, il y a un ensemble partiellement bien ordonné E vérifiant $bE = \aleph_0$, puiss. $E = 2^{\aleph_0}$.*

3. Ensembles $R^\alpha E$; Nombres ordinaux ΓE , βE .

3.1. Pour un nombre ordinal α , nous désignerons par

$$(8) \quad R^\alpha E$$

l'ensemble de tous les points a de E pour chacun desquels l'ensemble des prédécesseurs du point a contient un sous-ensemble ordonné maximal de type d'ordre α . Nous définirons

$$(9) \quad \Gamma E$$

comme le premier indice α tel que $R^\alpha E = 0$.

Ainsi sont bien définis le nombre ordinal ΓE et les ensembles

$$(10) \quad R^0 E, R^1 E, \dots, R^\alpha E, \dots, \quad (\alpha < \Gamma E).$$

Remarquons que les ensembles (10) ne sont pas nécessairement deux à deux disjoints; de même, $R^\alpha E$ peut contenir des couples de points distincts comparables. Par conséquent, la suite (10) peut différer de la suite (7) des $R_\alpha E$, ($\alpha < \gamma E$).

LEMME 7. *On a $\Gamma E \leq \gamma E$. Dans le cas d'un tableau ramifié (c'est-à-dire d'un E vérifiant II), on a $\gamma E = \Gamma E$, $R_\alpha E = R^\alpha E$, ($\alpha < \gamma E$).*

3.2. **Opérateur F , (F ordonné $\subseteq E$).** F étant un ensemble ordonné quelconque de E , nous désignerons par

$$(11) \quad F_E$$

la première rangée de E , ou la première rangée de l'ensemble des points de E dont chacun succède à F , selon que $F = 0$ ou $F \neq 0$.

De proche en proche on démontre l'important

LEMME 8. $R^0 E = R_0 E$; pour tout $0 < \alpha < \Gamma E$, $R^\alpha E = \sum_F F_E$, F parcourant tous les ensembles ordonnés maxima de type d'ordre α extraits de E .

En particulier, pour tout $\alpha + 1 < \Gamma E$, $R^{\alpha+1} E = \sum_a (a)_E$, ($a \in R^\alpha E$) (a) désignant l'ensemble ordonné composé du point a .

Le lemme 8 entraîne le

LEMME 9. Quels que soient l'ordinal $\alpha < \Gamma E$ et le point $a \in R^\alpha E$, le point a est précédé d'un sous-ensemble ordonné de E ayant un point en commun avec chacun des ensembles $R^\xi E$, ($\xi < \alpha$)⁹

COROLLAIRE 1. Si $\aleph_0 \leq bE < \text{puiss. } \Gamma E$, le nombre bE est l'aleph qui précède immédiatement l'aleph *puiss.* ΓE .

Vu le lemme 8, les relations: *puiss.* $R^0 E \leq bE \geq \text{borne sup}$ *puiss.* α , ($\alpha < \Gamma E$) et $E = \sum_\alpha R^\alpha E$, ($\alpha < \Gamma E$) entraînent la relation

$$\text{puiss. } E \leq \sum_\alpha (bE)^{\text{puiss. } \alpha}, \quad (\alpha < \Gamma E)$$

et à fortiori le

THÉORÈME 3. Tout ensemble partiellement bien ordonné E vérifie *puiss.* $E \leq 2^{bE}$.¹⁰

Les théorème 2 et 3 entraînent le

THÉORÈME 4. Pour que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il faut et il suffit que la puissance de tout ensemble partiellement bien ordonné E vérifiant $bE \leq \aleph_0$ soit $\leq \aleph_1$.

3.3. Nombre ordinal βE . En posant, pour un sous-ensemble non vide X de E , $\beta(X, E) = \text{borne } \alpha \text{ sup } \alpha$, α parcourant tous les ordinaux vérifiant $X R_\alpha E \neq 0$, il est manifeste que, quel que soit le sous-ensemble ordonné $F \neq 0$ de E tel que $F_E \neq 0$ (cf. 11), on aura $\beta(F_E, E) - \beta(F, E) \geq 0$.

C'est du nombre ordinal

$$(12) \quad \beta E = \text{borne sup } \beta(F_E, E) - \beta(F, E),$$

F parcourant tous les sous-ensembles ordonnés non vides de E vérifiant $F_E \neq 0$, dont dépend essentiellement la relation entre les nombres γE et ΓE ¹¹.

⁹Dans le cas où E vérifie II, le sous-ensemble est uniquement déterminé par a .

¹⁰La relation subsiste pour tout ensemble partiellement ordonné.

¹¹Il importe bien de trouver une relation entre les nombres γE , ΓE , au moins à cause de la proposition α_3 du 1,2 et du corollaire 1 du 3,2.

Passons à la démonstration du

THÉORÈME 5. $\gamma E \leq \beta E \cdot \Gamma E$ (bien entendu, $\Gamma E \leq \gamma E$) (cf. (6), (9), (12)).

Tout d'abord, $R^0 E = R_0 E$ (cf. (4), (8)); d'une manière générale, soit $1 < \alpha < \Gamma E$, et supposons que, pour tout $\xi < \alpha$, on ait

$$(13) \quad \sum_{\xi < \zeta} R^\xi E \subseteq \sum_{\eta} R_\eta E, \quad (\eta < \beta E \cdot \zeta);$$

démontrons alors que

$$(13\alpha) \quad \sum_{\xi < \alpha} R^\xi E \subseteq \sum_{\eta} R_\eta E, \quad (\eta < \beta E \cdot \alpha).$$

Si α est de première espèce, la relation (13 α) est une conséquence immédiate de (13 $_{\alpha-1}$) et du fait que $R^\alpha E = \sum_{\alpha} (a)E$, ($a \in R^{\alpha-1} E$) (cf. lemme 8). Dans le cas où α est de seconde espèce, la relation (13 $_{\alpha}$) résulte des relations (13 $_{\zeta}$) ($\zeta < \alpha$) et de celle-ci:

$$\beta E \cdot \alpha = \text{borne sup}_{\zeta < \alpha} \beta E \cdot \zeta.$$

Ainsi la relation (13 $_{\alpha}$) subsiste pour tout $\alpha < \Gamma E$. On en déduit

$$\sum_{\xi < \Gamma E} R_\xi E^\alpha \subseteq \sum_{\eta} R_\eta E, \quad (\eta < \beta E \cdot \Gamma E);$$

dès lors, vu $E = \sum_{\xi < \Gamma E} R_\xi E$,

$$E \subseteq \sum_{\eta} R_\eta E, \quad (\eta < \beta E \cdot \Gamma E)$$

ce qui, d'après la définition du nombre γE , entraîne le théorème 5.

Le théorème 5 entraîne le

THÉORÈME 6. Si $\beta E \cdot \Gamma E = \Gamma E$, alors $\Gamma E = \gamma E$.

Or, on aura $\beta E \cdot \Gamma E = \Gamma E$ toutes les fois que $\beta E < \Gamma E$ et $\Gamma E = \omega_\alpha$.

Ainsi, si l'on pouvait établir l'existence d'un E vérifiant

$$bE = \aleph_0, \quad \gamma E = \omega_{N(0)}, \quad \beta E < \Gamma E.$$

on aurait, en vertu de $\Gamma E \leq \gamma E$,

$$\beta E \leq \omega_{N(0)}, \quad \Gamma E \leq_{N(0)}$$
 et, par conséquent,

$$\beta E \cdot \Gamma E \leq \omega_{N(0)} = \gamma E, \quad \text{ce qui, vu le théorème 5, entraîne}$$

$$\beta E \cdot \Gamma E = \omega_{N(0)} \quad \text{et dès lors } \Gamma E = \omega_{N(0)}.$$

Bref, on aurait $\aleph_0 = bE < \text{puiss } \Gamma E = \aleph_{N(0)}$ ce qui, en vertu du corrolaire 1 du n^0 3,2, voudrait dire que $N(0) = 0 + 1$ et dès lors $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS ET ENSEMBLES PARTIELLEMENT BIEN ORDONNÉS

A plusieurs reprises (v. [2], [3], [4], [5]) j'avais affaire à une classe d'ensembles partiellement ordonnés, à savoir ceux vérifiant la condition suivante:

Tout sous-ensemble ordonné de l'ensemble est bien ordonné.

Un pareil ensemble sera dit *partiellement bien ordonné* ou *ensemble rangé*.

1. Notation. Pour un élément a et un sous-ensemble F d'un ensemble partiellement ordonné

$$(1) \quad (E; \leq)$$

nous désignerons par

$$(2) \quad (-\infty, a]_F, (-\infty, a)_F, (a, \infty)_F \text{ et } [a, \infty)_F$$

respectivement l'ensemble de tous les $x \in F$ vérifiant

$$(3) \quad x \leq a, x < a, a < x \text{ et } a \leq x$$

respectivement.

Il va sans dire que \leq désigne la relation binaire, par rapport à laquelle l'ensemble E est partiellement ordonné.

Nous désignerons par

$$(4) \quad (-\infty, a, \infty)_F$$

l'ensemble de tous les points de F dont chacun est comparable à a ; par conséquent,

$$(5) \quad (-\infty, a, \infty)_F = (-\infty, a)_F \cup [a, \infty)_F = (-\infty, a]_F \cup (a, \infty)_F.$$

2. L'énoncé du théorème. Le but de la Note sera d'établir le théorème suivant:

Tout ensemble partiellement ordonné $(E; \leq)$ contient un sous-ensemble partiellement bien ordonné W tel que

$$(6) \quad E = \bigcup_x (-\infty, x]_E, \quad (x \in W);$$

par conséquent quel que soit le point $a \in E$, il existe au moins un point $x \in W$ tel que $a \leq x$.

Dans le cas où l'ensemble E est ordonné, le théorème est presque évident (v. Hausdorff, [1, p. 86]); en se servant d'une terminologie de F. Hausdorff (remontant peut-être à Du Bois Reymond), le théorème pourrait s'énoncer de la façon suivante:

Tout ensemble partiellement ordonné est confinal¹ à un de ses sous-ensembles partiellement bien ordonnés.

Remarque. Tout ensemble partiellement ordonné est coïntial avec l'un de ses sous-ensembles.

En effet, en considérant un sous-ensemble X de $(E; \leq)$ avec lequel l'ensemble $(E; \geq)$ est confinal, l'ensemble primitif $(E; \leq)$ est coïntial avec X .

¹ G, H étant deux sous-ensembles d'un ensemble partiellement ordonné, nous dirons que G et H sont *confinaux*, si on a le système suivant:

$$G = \bigcup_h (-\infty, h]_G, \quad (h \in H), \quad H = \bigcup_g (-\infty, g]_H, \quad (g \in G).$$

Dans les mêmes hypothèses G et H sont *coïntiaux* si:

$$G = \bigcup_h [h, \infty)_G, \quad (h \in H), \quad H = \bigcup_g [g, \infty)_H, \quad (g \in G).$$

3. Opérateur R° . LEMME. Tout ensemble partiellement ordonné contient un sous-ensemble anti-ordonné² – nous en désignerons l'un quelconque par

$$(7) \quad R^\circ X$$

tel que tout point de X soit comparable à un point de $R^\circ X$ et dès lors:

$$(8) \quad X = \bigcup_x (-\infty, x, \infty)_X, \quad (x \in R^\circ X).$$

En effet,

$$(9) \quad x_0, x_1, \dots, x_\xi, \dots, \quad (\xi < \delta)$$

étant une bonne ordination quelconque de X (par conséquent, nous admettons la possibilité d'une bonne ordination de X), déterminons par récurrence l'ensemble

$$(10) \quad a_0, a_1, \dots, a_\eta, \dots, \quad (\eta < \mu)$$

de la façon suivante:

Pour commencer, nous poserons $a_0 = x_0$; soit β un ordinal quelconque et supposons que les points a_ξ , ($\xi < \beta$) soient extraits de (9) et qu'ils soient deux à deux *incomparables*. Alors, en considérant l'ensemble

$$(11) \quad X \setminus \bigcup_\xi (-\infty, a_\xi, \infty), \quad (\xi < \beta),$$

celui-ci est ou bien vide ou bien non vide. Dans le premier cas la construction est terminée et l'on désignera par $R^\circ X$ l'ensemble des a_ξ , ($\xi < \beta$). Dans le cas où l'ensemble (11) n'est pas vide, le procès ne sera pas terminé et nous désignerons par a_β le premier point de la suite (9) ne faisant pas partie de (11).

Or, il est manifeste que le procédé prendra fin au plus tard pour le nombre $\beta = \delta$ et que l'ensemble (10) sera déterminé.

4. Ensembles E_α et le nombre γ . Ceci étant, définissons le nombre γ et les sous-ensembles

$$(12) \quad E_0, E_1, \dots, E_\alpha, \dots (\alpha < \gamma)$$

²C'est-à-dire sans points distincts comparables.

de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
 E_0 &= R^\circ E; \\
 E_1 &= R^\circ \left(E \setminus \bigcup_x (-\infty, x]_E \right), \quad (x \in E_0); \\
 &\text{-----} \\
 E_\alpha &= R^\circ \left(E \setminus \bigcup_x (-\infty, x]_E \right), \quad \left(x \in \bigcup_{\xi < \alpha} E_\xi \right). \\
 &\text{-----}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

L'ordinal γ sera le premier nombre ν tel que l'ensemble E_ν soit vide, donc

$$\begin{aligned}
 E_\xi &\supset \nu, \quad (\xi < \gamma), \\
 E_\nu &= \nu, \quad (\nu \geq \gamma).
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

5. L'ensemble W . Posons

$$W = \bigcup_\alpha E_\alpha, \quad (\alpha < \gamma).
 \tag{15}$$

Nous prouverons que l'ensemble W ainsi construit est partiellement bien ordonné et confinal à E .

Tout d'abord, d'après la définition du nombre γ , on a

$$E \setminus \bigcup_x (-\infty, x]_E = \text{vide}, \quad \left(x \in \bigcup_{\alpha < \gamma} E_\alpha \right),$$

ce qui, vu la relation $E \supseteq (-\infty, x]_E$, veut dire que

$$E = \bigcup_x (-\infty, x]_E, \quad (x \in W).
 \tag{16}$$

Donc W est confinal à E .

6. Le rang γW et les rangées $R_\alpha W$ de W . Il s'agit de prouver que W est partiellement bien ordonné. Nous prouverons même que³

$$R_\alpha W = E_\alpha, \quad (\alpha < \gamma), \quad (17)$$

$$\gamma W = \gamma. \quad (18)$$

Pour abrégier, posons

$$(19) \quad S_\alpha = E \setminus \bigcup_x (-\infty, x]_E, \quad (x \in \bigcup_{\xi < \alpha} E_\xi)$$

donc

$$(20) \quad E = \bigcup_x (-\infty, x]_E \cup S_\alpha, \quad (x \in \bigcup_{\xi < \alpha} E_\xi).$$

La décomposition (20) est une coupure de l'ensemble E .⁴ Tout d'abord, les deux ensembles: S_α et son complément

$$(21) \quad \bigcup_x (-\infty, x]_E, \quad (x \in \bigcup_{\xi < \alpha} E_\xi)$$

sont sans point commun. D'autre part, il est bien évident que l'ensemble (21) est une portion initiale de E sans être identique à E , ce qui veut dire que, pour tout $\alpha < \gamma W$, l'ensemble S_α est une portion finale non vide de E . Par conséquent, S_α étant une portion finale de E , on a:

$$(22) \quad [x, \infty)_{S_\alpha} = [x, \infty)_E, \quad (x \in S_\alpha)$$

³Pour un ensemble partiellement bien ordonné W , la rangée initiale $R_0 W$ de W c'est l'ensemble de tous les points initiaux de W ; d'une façon générale l'on pose

$$R_\alpha W \geq R_0 W \setminus \left(\bigcup_{\xi < \alpha} R_\xi W \right)$$

et l'on désigne par γW le premier ordinal γ tel que $R_\gamma W$ soit vide; on a ainsi le rang γW de W et la suite

$$R_\xi W, \quad (\xi < \gamma W)$$

des rangées de W .

⁴Chaque décomposition d'un ensemble partiellement ordonné E en deux parties disjointes non vides dont l'une est une portion initiale de E (et donc l'autre une portion finale de E) s'appelle une coupure de E . Il va sans dire qu'un ensemble $F \subseteq E$ est une portion initiale (finale) de E si la relation $x \in F$ entraîne respectivement: $(-\infty, x]_E \subseteq F$, $[x, \infty)_E \subseteq F$.

pour tout $\alpha < \gamma W$.

Prouvons que, pour tout $\alpha < \gamma$:

$$(23) \quad E_\alpha = R_0\left(\bigcup_x [x, \infty)_E\right), \quad (x \in S_\alpha).$$

Vu les relations (22), la relation (23) est équivalente à

$$(24) \quad E_\alpha = R_0\left(\bigcup_x [x, \infty)_{S_\alpha}\right), \quad (x \in S_\alpha).$$

Or, d'après (13) et (19), l'ensemble E_α est un sous-ensemble anti-ordonné de S_α vérifiant l'égalité

$$(25) \quad S_\alpha = \bigcup_x (-\infty, x)_{S_\alpha} \cup \bigcup_x [x, \infty)_{S_\alpha}, \quad (x \in S_\alpha).$$

Etant donné que E_α est un sous-ensemble anti-ordonné de la section finale

$$\bigcup_x [x, \infty)_{S_\alpha}, \quad (x \in E_\alpha)$$

de la section finale S_α de E , la formule (24) et donc (23) en résulte immédiatement.

Puisque

$$(26) \quad E_\alpha \subseteq S_\alpha, \quad E_\xi \subseteq E \setminus S_\alpha, \quad (\xi < \alpha),$$

les ensembles (12) sont deux à deux sans point commun. De plus,

$$S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_\alpha \supset \dots \quad (\alpha < \gamma),$$

ce qui, avec (26), entraîne

$$(27) \quad E_\xi \subseteq S_\alpha \text{ pour tout } (\alpha \leq \xi < \gamma).$$

Dès lors, si $\xi > \alpha$, l'ensemble E_ξ aussi bien que E_α appartiennent au composant supérieur de la coupure (20) c'est-à-dire:

$$(28) \quad E_\xi \subseteq \bigcup_x [x, \infty)_{S_\alpha} \quad (= \text{d'après (22)}) = \bigcup [x, \infty)_E, \\ (x \in E_\alpha, \quad \alpha \leq \xi < \gamma).$$

Vu la relation (24), on en déduit pour tout $\alpha < \gamma$:

$$(29) \quad E_\alpha = R_0\left(\bigcup_{\xi} E_\xi\right), \quad (\alpha \leq \xi < \gamma).$$

Ceci étant, prouvons la validité des formules (17) et (18). Tout d'abord

$$(30) \quad R_\alpha W = E_\alpha, \quad \text{pour tout } \alpha < \gamma.$$

En effet, dans le cas $\alpha = 0$, la formule (30) provient de (29) en y posant $\alpha = 0$. Soit $0 < \alpha < \gamma$ et supposons que la formule (30) ait lieu pour tout $\xi < \alpha$ c'est-à-dire que

$$(31) \quad R_\xi W = E_\xi, \quad (\xi < \alpha).$$

Prouvons alors que

$$(32) \quad R_\alpha W = E_\alpha.$$

En effet, d'après sa définition même, l'ensemble $R_\alpha W$ vérifie:

$$\begin{aligned} R_\alpha W &= R_0\left(W \setminus \bigcup_{\xi < \alpha} R_\xi W\right) \text{ (à cause de (31))} = R_0\left(W \setminus \bigcup_{\xi < \alpha} E_\xi\right) \\ &= \text{(à la suite de la définition de } W \text{ et du fait que les } E_\xi \text{ sont deux} \\ &\quad \text{à deux à disjoints)} = R_0\left(\bigcup_{\alpha \leq \xi < \gamma} R_\xi\right) \text{ (à la suite de (29))} = E_\alpha \\ &\quad \text{ce qui prouve la formule (32).} \end{aligned}$$

Ainsi par l'induction, l'égalité (30) est prouvée complètement.

De plus, puisque d'après (15) et (14):

$$W = \bigcup_{\alpha < \gamma} E_\alpha = \text{(à la suite de (31))} = \bigcup_{\alpha < \gamma} R_\alpha W$$

et que $E_\alpha \neq \nu$ pour tout $\alpha < \gamma$, cela prouve que $\gamma W = \gamma$ ce qui prouve enfin que l'ensemble W est un sous-ensemble partiellement bien ordonné de E et que son rang γW coïncide avec le nombre γ de (14).

Ainsi le théorème est complètement démontré.

7. La condition (C). Dans la théorie des tableaux ramifiés (Thèse, Paris, 1935) j'ai fait ressortir l'intérêt qu'on a à étudier des ensembles partiellement ordonnés vérifiant la condition (C) que voici:

Quel que soit l'élément a de l'ensemble, l'ensemble $(-\infty, a)$ de tous les prédécesseurs de a est ordonné.

C'est qu'un tableau ramifié c'est un ensemble partiellement bien ordonné vérifiant la condition (C).

En conséquence du théorème que nous venons de démontrer on a le théorème suivant:

Tout ensemble partiellement ordonné vérifiant la condition C est confinal à un de ses tableaux ramifiés.

REFERENCES

- [1] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914.
- [2] G. Kurepa, Ensembles ordonnés et ramifiés, Thèse, Paris 1935. (aussi: Publ. Math. Belgrade, Tome IV. 1935, 1-138).
- [3] ———— *L'Hypothèse du continu et les ensembles partiellement ordonnés*, C.R. Acad. Sci. Paris **205**, (1937), 1196-1198.
- [4] ———— Sur la puissance des ensembles partiellement ordonnés, C.R. Soc. Sci. Varsovie, 1939.
- [5] ———— *L'Hypothèse du continu et le problème de Suslin*, Publ. Math. Univ. Belgrade (1948), 26-36.

ON A CHARACTERISTIC PROPERTY OF FINITE SETS

1. Introduction. There are several equivalent definitions of finite sets [2], [5]. The purpose of this note is to give an equivalent property of finite sets in terms of ramifications of sets.

Definition 1. A partially ordered set $S \equiv (S; \leq)$ is said to be *ramified* or to satisfy the *ramification condition* [3, pp. 69, 127; cf. 4] provided that for every $x \in S$ the set $(-\infty, x)$ of all $y \in S$ satisfying $y < x$ is totally ordered (that is, contains no distinct noncomparable points). If the points of a ramified set $(S; \leq)$ are the same as these of a set M , one says that $(S; \leq)$ is a *ramification of M* .

Definition 2. A *chain (anti-chain)* of a partially ordered set $(S; \leq)$ is any subset of S containing no distinct incomparable (comparable) points. Every set containing a single point is considered both as chain and as anti-chain.

Definition 3. For a partially ordered set $(S; \leq) = S$, we denote by

$$(1) \quad O(S) \quad \text{or} \quad OS$$

the system of all *maximal* chains contained in S ; analogously,

$$(2) \quad \bar{O}(S) \quad \text{or} \quad \bar{O}S$$

denotes the system of all maximal anti-chains of S .

THEOREM. *In order that a nonvoid set S be finite, it is necessary and sufficient that for every ramification $T(S)$ of S the relations*

$$(3) \quad M \in OT(S), \quad A \in \bar{O}T(S)$$

imply

$$(4) \quad M \cap A \neq \Lambda \quad (\Lambda \equiv \text{vacuous set}).$$

2. The condition is necessary. Otherwise, there would be a finite set S , a ramification $T(S)$, a set $M \in OT(S)$, and a set $A \in \bar{OT}(S)$, such that

$$(5) \quad M \cap A = \Lambda.$$

Now, A is a maximal anti-chain of $T(S)$; consequently, for every $x \in T(S)$ there is a point $a(x) \in A$ such that the set $\{x, a(x)\}$ is a chain of $T(S)$. (Otherwise, the set $A \cup \{x\}$ would be an anti-chain greater than the maximal anti-chain A .)

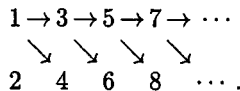
In particular, for any $x \in M \in OT(S)$, the points $x, a(x)$ are comparable. We say that

$$(6) \quad x < a(x).$$

Since M is a maximal chain of the ramified set $T(S)$, M is an initial portion of $T(S)$; that is, M , which contains the point x contains also every point of $T(S)$ preceding x . In particular, if (6) did not hold then M would contain also $a(x) \leq x$; consequently, $a(x) \in M \cap A$, contrary to the assumption (5).

Thus if (5) held then for every $x \in M$ one would have (6); but M , as a nonvoid subset of the finite set $T(S)$, would have a terminal point, say l ; l would be a final point of $T(S)$, too, contrary to the relation (6) for $x = l$. Thus the relation (5) is not possible.

3. The condition is sufficient. If for every ramification $T(S)$ the relations (3) imply (4), then the set S is finite. Otherwise, the set S would be infinite; consequently, there would be a one-to-one correspondence ϕ of the set N of all natural numbers into S . Now, let us define the ordering $(S; \leq)$ by transplantation of a certain order of the set N . We shall order N according to the scheme¹,



¹For the definition of schemes or diagrams of partly ordered sets see Birkhoff [1, p. 6].

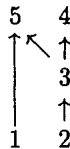
That is, the set $2N - 1$ of all $2n - 1$ ($n \in N$) is ordered as in the natural order; for every $n \in N$, the set of numbers preceding $2n$ consists of the numbers $2\nu - 1$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$); all other couples of natural integers are incomparable, by definition. In the ramified set N_0 so obtained one sees that $2N \in \bar{O}N_0$, that $2N - 1 \in ON_0$, and that the sets $2N$, $2N - 1$ are disjoint. Now, the set S being infinite by hypothesis, there is a one-to-one mapping ϕ of $N = N_0$ into S . That enables us to define the order in S by transporting the order of N_0 into S so that, on the one hand, the mapping ϕ is a similitude between N_0 and $\phi N_0 \subseteq S$, and so that, on the other hand, no point of ϕN_0 is comparable to any point of $S \setminus \phi N_0$, and so that $S \setminus \phi N_0$ contains no comparable couple of distinct points.

It is obvious that the set $(S; \leq)$ is ramified, that the set $\phi(2N - 1)$ is a maximal chain of $(S; \leq)$, and that the set $A = \phi(2N) \cup (S \setminus \phi N)$ is a maximal anti-chain of $(S; \leq)$.

According to (4), the set $A \cap \phi(2N - 1)$ would be nonvacuous, contrary to the fact that the sets A , $\phi(2N - 1)$ are disjoint.

Thus, the proof of the theorem is completed.

4. Observation. We observe that the condition of ramification in the statement of the theorem is essential. Namely, if we consider the partially ordered set $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ with the diagram



it is obvious that $\{2, 3, 5\}$ is a maximal chain of S , that $\{1, 4\}$ is a maximal anti-chain of S , and that the set $\{2, 3, 5\}$ does not intersect the set $\{1, 4\}$.

5. Questions. In connection with the statement of the theorem it is interesting to consider the following two questions:

Question 1. Is there a partially ordered nonvacuous set S such that there is no maximal anti-chain $A \in \bar{O}S$ satisfying $A \cap M \neq \Lambda$ for every maximal chain $M \in OS$?

Question 2. Is there a partially ordered nonvacuous set S such that there is no maximal chain $M \in OS$ satisfying $M \cap A \neq \Lambda$ for every maximal anti-chain $A \in \bar{O}S$?

REFERENCES

- [1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, New York, 1948.
- [2] K. Iseki, *Sur les ensembles finis*, C. R. Acad. Sci. Paris **231** (1951), 1396–1397.
- [3] G. Kurepa, *Ensembles ordonnés et ramifiés*, Thèse, Paris, 1935; also Publ. Math. Univ. Belgrade **4** (1935), 1–138.
- [4] ———, *L'hypothèse de ramification*, C. R. Acad. Sci. Paris **202** (1936), 185–187.
- [5] A. Tarski, *Sur les ensembles finis*, Fund. Math. **6** (1924), 45–95.

SUR LES FONCTIONS RÉELLES DANS LA FAMILLE DES ENSEMBLES BIEN ORDONNÉS DE NOMBRES RATIONNELS

A plusieurs reprises¹ nous avons posé le problème que voici: *Peut-on associer à tout ensemble bien ordonné a de nombres rationnels un nombre rationnel $\varphi(a)$ de manière que, quels que soient les ensembles bien ordonnés $x, y \subseteq R$, on ait nécessairement $\varphi(x) < \varphi(y)$, pourvu que $x <_k y$ (c'est-à-dire que x soit une section initiale propre de y)? R désigne l'ensemble ordonné des nombres rationnels.*

Dans [6] nous avons posé encore 3 d'autres problèmes analogues. Dans ce qui suit nous prouverons que la réponse au problème précédent est formellement négative, ce qui veut dire que chaque transformation réelle f de l'ensemble ωR des sous-ensembles bien ordonnés $\subseteq R$ prend nécessairement au moins une fois la valeur irrationnelle, du moment que des relations $x, y \in \omega R, x <_k y$ impliquent $f(x) < f(y)$. Nous verrons que le problème précédent est intimement lié au problème de décomposition d'un ensemble ordonné en familles de ses antichaînes (cf. [3; 5, p. 841]). En particulier, le théorème précédent résultera de l'impossibilité (cf. Th. 2.1) de décomposer l'ensemble ωR en une famille dénombrable de systèmes dont chacun serait composé d'éléments incomparables par rapport à la relation \leq_k . Il est à remarquer que déjà Cantor a prouvé que ωR était l'union d'un système pareil de puissance \aleph_1 ; en effet il suffit, pour tout ordinal $a < \omega_1$ de considérer la famille R_α des a -suites $\subseteq R$; évidemment, $\omega R = \bigcup_a R_\alpha$ ($a < \omega_1$). Nous reconsidérons (cf. la notion de l'ordonnance naturelle dans [1] une extensions totale de l'ordre partiel précédent dans les ensembles ωR et σR (cf. (1.1),

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Rad Jugoslav. Acad. Znan. Umjetn. 296(1954), 85-93

AUTHOR'S NOTE. Le titre original de ce travail: *O realnim funkcijama u obitelji uredjenih skupova racionalnih brojeva.*

¹D. Kurepa [3, p. 1033]; [4 p. 160 (problème 2)]; [5, p. 841]; [6 p. 263 (problème 23.3.3)].

(1.2)) et prouverons, en particulier, que chaque antichaîne $\subseteq (\sigma R, \leq_k)$ est nulle part dense dans l'ordre total de σR (cf. th. 4.1).

1. Opérateurs $\omega E, \sigma E$ (E ordonné).

$E = (E, \leq)$ étant un ensemble ordonné (totalement ou partiellement) relativement à \leq , nous désignerons par

$$(1.1) \quad \omega E$$

l'ensemble de tous les sous-ensembles totalement bien ordonnés $\subseteq E$; en particulier

$$(1.2) \quad \text{l'ensemble vide } v \in \omega E.$$

Nous désignerons par

$$(1.3) \quad \sigma E$$

l'ensemble des $x \in \omega R$ non vides jouissant de la propriété que, pour chacun d'eux, il y ait $x' \in E$ vérifiant $x \leq x'$ c'est-à-dire $z \leq x'$ ($z \in x$).

En désignant pour tout ensemble ordonné X par

$$(1.4) \quad tX \text{ le type d'ordre de } X,$$

il est clair que tx , pour chaque $x \in \omega E$, est un nombre ordinal et que la tx -suite croissante

$$(1.5) \quad x = x_0 < x_1 < \dots x_\alpha < \dots \quad (\alpha < tx)$$

est complètement déterminée.

2. Ensembles ordonnés $\omega_k E = (\omega E; \leq_k), \sigma_k E = (\sigma E; \leq_k)$.

L'ensemble ωE sera ordonné par la relation k, K ou \leq_k disant que pour deux ensembles ordonnés $A = (A; \leq_a), B = (B; \leq_b)$ on ait

$$(2.1) \quad A \leq_k B$$

si et seulement si A est une portion initiale de B^2 . Pour abrégé, nous poserons

$$(2.2) \quad \omega_k E = (\omega E; \leq_k), \quad \sigma_k E = (\sigma E; \leq_k);$$

chacun des ensembles (2.2) est *ramifié* (cf. [1]) ce qui veut dire qu'un élément de ces ensembles ne peut pas être précédé de deux éléments incomparables appartenant à (2.2). De plus les ensembles (2.2) sont *bien ordonnés* dans le sens que chacun de leur sous-ensembles non vides, soit X , possède un point initial (c'est-à-dire un point au-dessous duquel ne se trouve aucun point de X). Par conséquent, si $v \subset X \subseteq \omega_k E$, l'ensemble

$$(2.3) \quad R_0 X$$

des points initiaux de X est complètement déterminé et tout de X est précédé par un point unique de $R_0 X$. Si l'on pose (cf. [1, p. 74]) pour chaque ordinal

$$(2.4) \quad R_\alpha X = R_0 \left(X \setminus \bigcup_{\xi < \alpha} R_\xi X \right),$$

on aura certainement un ordinal bien déterminé γX d'être le plus petit ordinal vérifiant

$$(2.5) \quad R_{\gamma X} X = \text{vide.}$$

On voit que

$$(2.6) \quad \gamma(\omega_k R) = \gamma(\sigma_k R) = \omega_1.$$

et que pour chaque $a < \omega_1$ les ensembles

$$(2.7) \quad R_a(\omega_k R), \quad R_a(\sigma_k R)$$

²Portion initiale de B est chaque ensemble $X \subseteq B$ tel que si $x \in X$ alors $(\cdot, x]_B \subseteq X$; $(\cdot, x]_B$ est l'ensemble des $z \in B$ vérifiant $z \leq_b x$. Donc $(\cdot, x]_B = E$ ($z \in B, x \leq_b z$)
D'une façon analogue, on définit des sous-ensembles

$$(\cdot, x)_B = E_z(z \in B, z <_b x);$$

$$(x, y)_B = (y, x)_B = E_z(x <_b z <_b y, z \in B), \text{ si } x <_b y;$$

$$[x, \cdot)_B = E_z(x \leq_b z, z \in B), \text{ etc}$$

sont composés des ensembles bien ordonnés non vides, quelconques et bornés respectivement, et $\subseteq R$ (= ensemble ordonné des nombres rationnels). Les ensembles (2.7) sont antichaînes ou mieux encore k -antichaînes ou K -antichaînes (\rightleftharpoons ne contiennent de points distincts comparables relativement à \leq_k).

Par conséquent, la relation

$$(2.8) \quad \omega_k R = \bigcup_{\alpha} R_{\alpha}(\omega_k R) \quad (a < \omega_1)$$

montre que $\omega_k R$ (et à plus forte raison $\sigma_k R \subset \omega_k R$) est l'union de \aleph_1 de ses antichaînes (Cantor). Le nombre \aleph_1 n'y peut pas être baissé comme le dit le théorème 2.1 que nous allons prouver.

THÉORÈME 2.1. *L'ensemble ordonné $\sigma_k R$ (et $\omega_k R$) est l'union de \aleph_1 de ses antichaînes. Le cardinal \aleph_1 n'y peut pas être baissé.*

Tout d'abord, pour chaque $v \neq a \in \omega R$ on a

$$-\infty < \sup a = \sup_{x \in a} x \leq \infty.$$

Si de plus $a \in \sigma R$, on y a le signe $<$ au lieu de \leq .

LEMME 2.1. *Soient $a \in \sigma R$, $x \in (\sup a, \cdot)_R$; pour chaque K -antichaîne $A \subseteq \omega_k R$ il existe un élément e dépendant de a, A, x , soit*

$$e = \varphi(a, A, x)$$

tel que

$$(2.9) \quad e \in \sigma(\cdot, x)_R$$

$$(2.10) \quad a <_k e$$

$$(2.11) \quad \sup e < x$$

$$(2.12) \quad A \cap [\varphi(a, A, x), \cdot)_{\sigma_k(\cdot, x)_R} = v \text{ (vide).}$$

Dans le cas contraire, on aurait un triple a, A, x tels que, pour aucun $e \in \sigma R$ les conditions (2.9)–(2.12) ne seraient vérifiées. Or, l'ensemble $(\cdot, x)_R$ étant dense, l'existence d'un e vérifiant (2.9), (2.10), (2.11) est immédiate. En conséquence, pour chaque e vérifiant ces trois conditions-là on aurait un

$$a' \in A \cap [e, \cdot)_X, \quad X = \sigma_k(\cdot, x)_R.$$

En particulier,

$$a <_k e \leq_k a', \quad \sup a' < x, \quad x' \in A.$$

En conséquence, a' pourrait prendre le rôle de a , et l'on déduirait un a'' vérifiant

$$a' <_k a'', \quad \sup a' < \sup a'' < x, \quad a'' \in A.$$

On aurait donc $a' <_k a''$, contrairement à ce que a', a'' appartiennent à l'antichaîne A .

Ceci étant, prouvons le théorème 2.1. Soient $a \in \sigma_R$ et $x \in (\sup a, \cdot)_R$ quelconques. Soit A_n ($n < \omega_0$) une ω_0 -suite d'antichaînes $\subseteq \sigma_k R$.

Considérons l'élément $e^0 = \varphi(a, A_0, x)$ dont on parle dans le lemme 2.1; l'élément e^0 satisfait aux conditions qu'on déduit des conditions (2.9)–(2.12) en y substituant A_0 au lieu de A . D'une façon générale, soit $0 < n < \omega_0$; considérons l'élément

$$e^n = \varphi(e^{n-1}, A_n, x);^*$$

celui-ci satisfait aux conditions qu'on obtient des (2.9)–(2.12) en y substituant e^{n-1} et A_n au lieu de a et A respectivement. En particulier, on aura ainsi pour tout $0 < n < \omega_0$:^{*}

- | | |
|-------------------|---|
| (n ₁) | $e^n \in \sigma(\cdot, x)_R$ |
| (n ₂) | $e^{n-1} <_k e^n$ |
| (n ₃) | $\sup e^n < x$ |
| (n ₄) | $A_n \cap [e^n, \cdot]_{\sigma_k(\cdot, x)_R} = v.$ |

On déduit de (n₂) que e^n ($n < \omega_0$) est une ω_0 -suite croissante $>_k a$; en posant

$$e = \bigcup_n e^n \quad (n < \omega_0)$$

e sera bien ordonné et appartiendra, d'après (n₁), à $(\cdot, x]_R$ donc

$$e \in \sigma(\cdot, x')_R, \quad x' \in (x, \cdot)_R.$$

Or, $e^n <_k e$ ($n < \omega_0$) et d'après (n₄), non aura,

$$A_n \cap [e, \cdot]_{\sigma(\cdot, x)_R} = \text{vide},$$

^{*} EDITORIAL NOTE: There is a mathematical error here which should be corrected by simply choosing at the same time also a strictly decreasing sequence x_n of reals and replacing the x of (n₁), (n₃) and (n₄) by x_n

ce qui veut dire que l'élément $e \in \sigma_R$ n'appartient à aucun A_n ($n < \omega_0$). Ainsi on a prouvé non seulement le théorème 2.1 mais celui-ci qui est plus précis:

THÉORÈME 2.2. *Quels que soient les antichaînes $A_n \subseteq \sigma_k R$ ($n < \omega_0$), et les éléments $a \in \sigma R$, $x \in (\sup a, \cdot)_R$, l'ensemble*

$$\omega(\cdot, x)_R \setminus \bigcup_n A_n \quad (n < \omega_0)$$

est non vide.

Etant donné que $\omega R \subset PR$ (\equiv l'ensemble de tous $X \subseteq R$), il est intéressant de comparer le théorème 2.1 au

THÉORÈME 2.3. *L'ensemble ordonné $(PR; \subseteq)$ est l'union de 2^{\aleph_0} de ses antichaînes; le cardinal 2^{\aleph_0} n'y peut pas être baissé.*

La première partie du théorème 2.3 provient de ce que $kPR = 2^{\aleph_0^3}$ et que PR est l'union de v et de ses sous-ensembles uniponctuels, ceux-ci aussi bien que v étant, par convention, antichaînes. Que le nombre 2^{\aleph_0} dans le théorème 2.3 ne peut pas être baissé, cela provient de ce que $(PR; \subseteq)$ contient une chaîne de puissance 2^{\aleph_0} ; telle est par exemple la chaîne L composée des portions initiales de R . Or, toute famille F d'antichaînes épuisant PR vérifie nécessairement $kF \geq kL$, étant donné que $k(A \cap L) \leq 1$ ($A \in F$).

3. Applications croissantes de $\sigma_k R$ dans R ou \tilde{R}^4

L'application

$$(3.1) \quad \sup x \quad (x \in \sigma_k R)$$

de $\sigma_k R$ dans R est croissante, bien qu'elle ne pas strictement croissante. Or, il est facile d'en fabriquer une strictement croissante; ainsi par exemple si r_n ($n < \omega_0$) est une bonne ordination totale de R et si l'on pose $\varphi(r_n) = \frac{1}{(n+1)^2}$, il suffit de poser $f(v) = 0$ et

$$f(X) = \sum_x \varphi(x) \quad (x \in X)$$

³ kX = le cardinal de X

⁴Pour un ensemble ordonné E nous désignons par \tilde{E} ce qu'on obtient comblant chaque lacune de E par un élément.

pour chaque $v \subset X \subseteq R$, pour se convaincre que f est une application strictement croissante de l'ensemble ramifié $\sigma_k R$ dans la chaîne des nombres réels.⁵

Nous nous sommes alors demandés (v. [3, p. 1033], [4, p. 160]; [5, p.841]) si l'on pouvait exiger qu'une transformation pareille transforme $\sigma_k R$ non seulement dans \tilde{R} , mais aussi dans R , R étant dense partout dans \tilde{R} . La réponse (négative) à cette question résulte du

THÉORÈME 3.1. *Il n'y a aucune transformation strictement croissante de l'ensemble ordonné $\sigma_k R$ dans l'ensemble R ; au contraire, quelle que soit la transformation strictement croissante f de $\sigma_k R$ dans R , l'ensemble $f\sigma_k R \setminus R$ est non vide.*

En effet, si une application pareille, soit f , de $\sigma_k R$ dans R existait, on aurait pour chaque $r \in f\sigma_k R$ l'antichaine $f^{-1}(r)$ des $x \in \sigma_k R$ vérifiant $f(x) = r$. Alors, la formule

$$\sigma_k R = \bigcup_r f^{-1}(r), \quad (r \in f\sigma_k R)$$

fournirait une décomposition de $\sigma_k R$ en \aleph_0 de ses antichaines, contrairement au théorème 2.1.

Voici encore quelque théorèmes se rapportant aux théorèmes 2.1 et 3.1.

THÉORÈME 3.2. *Il y a un ensemble bien ordonné ramifié \mathcal{T} ⁶ non décomposable en \aleph_0 de ses antichaines, bien qu'il y ait dans \mathcal{T} une fonction réelle strictement croissante (cf. [3, p. 1033], [5, p. 841]). Il suffit de considérer $\mathcal{T} = \sigma_k R$.*

THÉORÈME 3.3. *S'il existe une transformations strictement croissante d'un ensemble bien ordonné ramifié \mathcal{T} dans une chaîne S et si S_1 est un sous-ensemble de S partout dense dans S , cela n'entraîne pas nécessairement l'existence d'une transformation strictement croissante de \mathcal{T} dans S_1 (cf. le problème 23.3.2 dans [6]).*

Pour le voir, il suffit de considérer le cas où $\mathcal{T} = \sigma_k R$, $S_1 = R$, $S = \tilde{R}$.

⁵Quant à la théorie générale des transformations monotones des ensembles ordonnés v. [5].

⁶J'appelle tableau ramifié tout ensemble bien ordonné ramifié (cf. [1]).

THÉORÈME 3.4. *Il y a une chaîne S (par exemple R) telle que l'ensemble ordonné $\omega_k S$ ne soit transformable dans S par aucune transformation strictement croissante.*

Le cas $S = R$ le prouve⁷.

THÉORÈME 3.5. *Il y a un ensemble ordonné E vérifiant $\gamma\omega_k E = \omega_1$ et qui est l'union de \aleph_0 de ses antichaînes.*

Il suffit de désigner par E l'ensemble des $x \in \omega_k R$ vérifiant $\sup x \in R$. A ce propos, notons le

LEMME 3.1. Pour chaque ensemble ordonné E , on a $\gamma\omega_k E = \gamma(\omega_k(\omega_k E))$.

**4. Ordonnance naturelle de $\omega_k R$ et de $\sigma_k R$;
chaînes $\omega_1 R = (\omega R; \leq_1)$, $\sigma_1 R = (\sigma R; \leq_1)$.**

Il y a une extensions totale bien simple de l'ordre partiel $\omega_k R$; en effet si pour $x, y \in \omega R$ l'on définit

$$(4.1) \quad x \leq_1 y$$

si et seulement si ou bien $x \leq_k y$ ou bien $x_{\nu(x,y)} < y_{\nu(x,y)}$, on prouve que l'ensemble ordonné $(\omega R; \leq_1)$ ainsi obtenu est totalement ordonné⁸. A ce propos il est intéressant qu'on a les trois lemmes 4.1, 4.2, 4.3 que voici:

LEMME 4.1. *Si $a \in \sigma_k R$, l'ensemble*

$$(4.2) \quad [a, \cdot)_{\sigma_k R} \text{ des } a' \in \sigma_k R,$$

vérifiant $a \leq_k a'$ est une portion non vide de la chaîne $(\sigma R; \leq_1)$; autrement dit, si

$$(4.3) \quad a \leq_k x, \quad a \leq_k y, \quad x \leq_1 z \leq_1 y, \quad \text{alors } a \leq_k z;$$

en conséquence, l'ensemble (4.2) contient un intervalle non vide de $\sigma_1 R$.

LEMME 4.2. *Si $a \in \sigma_k R$ et $c \in \sigma_k R \setminus [a, \cdot)_{\sigma_k R}$ alors, pour chaque $a \leq_k x \in \sigma_k R$, les relations $c <_1 a, c >_1 a$ respectivement entraînent $c <_1 x$ et $x <_1 c$ respectivement pour chaque $a \leq_k x \in \sigma_k R$.*

⁷Le problème comment, à ce propos, se comporte la chaîne des nombres réels reste ouvert.

⁸Le fait subsiste en y remplaçant R par une chaîne quelconque (cf. l'ordonnance naturelle dans [1, p. 87, 127] et [2, p. 6.]

LEMME 4.3. Si $a <_1 b$, $a, b \in \sigma R$, $(a, b)_{\sigma_1 R} \neq v$, alors il y a un $c \in (a, b)_{\sigma_1 R}$ tel que $c' \in (a, b)_{\sigma_1 R}$ pour chaque $c < c' \in \sigma R$ (cependant, la conclusion ne subsiste pas nécessairement pour chaque $c \in (a, b)_{\sigma_1 R}$).

Le lemme 4.1 étant une conséquence du lemme 4.2 prouvons celui-ci. Or, le lemme 4.2 est évident si $c <_k a$. Reste le cas où $c \parallel_k a$. Examinons le cas $c <_1 a$ donc $c_\nu < a_\nu$, avec $\nu = \nu(a, c)$. Si $a \leq_k x \in \sigma_k$, on aura aussi $x_\nu = a_\nu$, donc $c_\nu < a_\nu$ et par conséquent $c <_1 x$. D'une façon analogue, on examine le cas $a <_1 c$.

Prouvons le lemme 4.3. Par supposition $a <_1 b$; donc $a <_k b$ soit $a_\nu < b_\nu$, où $\nu = \nu(a, b)$. Si $a <_k b$ il suffit de considérer $c_\alpha \in (\sup b_{ta}, \cdot)$ et de poser $c = a \cup (c_\alpha)$; si $a_\nu < n_\nu$, il suffit de considérer $c_\nu \in (a_\nu, b_\nu)_R$ et de poser $c = \{a_0 \dots a_\xi \dots c_\nu\} (\xi < \nu)$; dans les deux cas, c vérifie les conditions du lemme 4.3.

Ceci étant, prouvons le

THÉORÈME 4.1. *Quelle que soit l'antichaîne A de l'ensemble ordonné $(\sigma R; \leq_k)$, A n'est nulle part dense dans la chaîne $(\sigma R; \leq_1)$.*

Supposons que le théorème 4.1 ne subsiste pas. On aurait donc une antichaîne A de $\sigma_k R$ et un intervalle non vide $I \subseteq \sigma_1 R$ dans lequel A serait partout dense. D'après le lemme 4.3 il y a un $c \in \sigma R$ vérifiant $[c, \cdot)_{\sigma_k R} \subseteq I$.

Or, puisque $c \in \sigma R$, chaque successeur immédiat c^+ de c dans $\sigma_k R$ a au moins deux successeurs immédiats, mettons c' , c'' ; ceux-ci n'étant pas consécutifs dans $\sigma_1 R$, on aurait, A étant supposé dense dans I , un a vérifiant

$$(4.4) \quad a \in A \cap (c', c'')_{\sigma_1 R}$$

On n'a pas $a \leq_k c$, puisque $c <_k c'$, $c <_k c''$, ce qui impliquerait $a <_k c'$, $a <_k c''$, contrairement à (4.4). On n'a pas $c <_k a$ non plus; puisque cela impliquerait $(a, \cdot)_{\sigma_k R} \subset (c, \cdot)_{\sigma_k R} \subset I$; d'après le lemme 4.1, l'ensemble $(a, \cdot)_{\sigma_k R}$ serait une portion non vide de $\sigma_1 R$ et contiendrait un point $a' \in A$; se qui est impossible, A étant une antichaîne ne peut contenir le couple de points distincts a, a' comparables. Reste le seul cas logiquement concevable: $a \parallel_k c$ donc soit $a_\nu < c_\nu$ et donc $a <_1 c$ soit $c_\nu < a_\nu$ (avec $\nu = \nu(a, c)$) et donc $c <_1 a$; le premier cas ne peut pas se produire; c'est qu'on en déduirait $a <_1 c'$, $a <_1 c''$ contrairement à (4.4). Mais, le cas $a_\nu > c_\nu$ n'est pas possible non plus; c'est que $c_\nu = c'_\nu = c''_\nu$ et $a_\nu > c'_\nu$, $a_\nu > c''_\nu$ et par conséquent $c' <_1 a$, $c'' <_1 a''$ contrairement à (4.4).

Ainsi le théorème 4.1 est prouvé.

BIBLIOGRAPHIE

1. Đ. Kurepa, *L'hypothèse de ramification* C. R. Acad. Sci. Paris **202** (1936), p. 185.
2. Đ. Kurepa, *Sur les relations d'ordre*, Bull. Int. Acad. Zagreb **32** (1939), 66–76.
3. Đ. Kurepa, *Transformation monotones des ensembles partiellement ordonnés*, C. R. Acad. Sci. Paris **205** (1937), 1033–1035.
4. Đ. Kurepa, *Ensembles linéaires et une classe de tableaux ramifiés. (Tableaux ramifiés de M. Aronszajn)*, Publ. Math. Univ. Belgrade **6** (1937), 129–160.
5. Đ. Kurepa, *Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés*, Rev. Cienc. **434** (1940), 827–846; **437** (1941), 483–500.
6. Đ. Kurepa, *Teorija skupova*, Školska knjiga, Zagreb, 1951.

ENSEMBLES ORDONNÉS ET LEURS SOUS-ENSEMBLES BIEN ORDONNÉS

On attache à chaque ensemble ordonné E l'arbre wE des sous-ensembles de E , ceux-ci étant ordonnés par la relation $< i$ ou $< (i)$ où $A \leq (i)B$ dit que A est une portion initiale de B . L'arbre wE n'est pas transformable d'une façon strictement croissante en E (théorème 1).

Soit $E = (E; <)$ un ensemble ordonné (totalement ou non totalement). Désignons par γE le premier nombre ordinal qu'on ne peut pas plonger par similitude en E . On n'a donc pas $\gamma E \leq tE$, tE désignant le type d'ordre de E .

Soit wE la famille des sous-ensembles bien ordonnés de E ; soit $\sigma E = \{x \mid x \in wE, x \neq \nu, x \text{ borné du côté droit}\}$. Soit (A, B) une paire ordonnée d'ensembles ordonnés A, B .

Nous désignerons par $\uparrow(A, B)$ la famille des transformations uniformes strictement croissantes de A en B . Par conséquent, si $f \in \uparrow(A, B)$, alors $f(a) \in B$ pour chaque $a \in A$ et la relation $a < a'$ dans A entraîne $f(a) < f(a')$ dans B . L'ensemble vide sera désigné par ν .¹

Q étant l'ensemble ordonné des nombres rationnels, nous nous sommes demandé si $\uparrow(wQ, Q) = \nu$ ou $\neq \nu$ et si $\uparrow(\sigma Q, Q) = \nu$ ou $\neq \nu$. Nous avons prouvé que c'est le signe $=$ qui y a lieu. Il en est encore ainsi en y remplaçant Q par l'ensemble ordonné R des nombres réels².

THÉORÈME 1. $\uparrow(wE, E) = \nu$ pour chaque ensemble ordonné E (l'ordre de E étant total ou partiel).

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. C. R. Acad. Sci. Paris 242 (1956), 2202-2203. (Note présentée par M. Arnaud Denjoy, au séance du 23 avril 1956)

¹C'est que le chiffre ν est réservé pour d'autres buts; d'autre part, il nous paraît peu naturel de désigner l'ensemble vide par \emptyset ; plutôt, il serait préférable que \emptyset désigne un ensemble $\neq \nu$.

²Voir *Bull. Internat. Acad. Sci. Zagreb* 12 (1954), p. 35-42; *Bull. Sci. Yougoslave* 2 (1954), p. 9. M.S. Ginsburg a bien voulu me communiquer une autre démonstration de la même proposition.

Supposons par contre que $f \in \uparrow (wE, E)$. Soit $e_0 = (\nu)$, $e_1 = fe_0$. Définissons, pour chaque $0 < \alpha < \gamma E$, l'ensemble e_α comme $e_{\alpha-1} \cup fe_{\alpha-1}$ ou $\bigcup e_{\alpha_0}$, suivant que $\alpha - 1$ existe ou n'existe pas; α_0 y parcourt l'ensemble $I(\alpha)$ des ordinaux $< \alpha$. Par récurrence, on prouve sans peine que $e_\alpha \in wE$ et $\gamma e_\alpha = \alpha$. On en déduirait également l'ensemble $e_{\gamma E} \in wE$ et $\gamma E \leq tE$ ce qui est absurde.

E étant ordonné (totalement ou non), soit AS la borne inférieure des cardinaux des familles F des antichaînes de S , l'union des $X \in F$ étant E .

THÉORÈME 2. *Si $AE \leq \aleph_\sigma$, alors $\uparrow (E, \eta_\sigma) \neq \nu$, \aleph_σ étant régulier (pour $\sigma = 0$, voir notre article dans Rev. Cienc. Lima, n° 434 (1940), p. 837, th. 1).*

THÉORÈME 3. *Soit $\sigma_k Q$ l'extension de l'ordre partiel $[\sigma\eta_0; < (i)]$ obtenue en ordonnant alphabétiquement les éléments de σQ non comparables par la relation $< (i)$. $\sigma_k Q$ est une chaîne ordonnée dont l'espace ordonné est de première catégorie. Il n'y a aucune famille dénombrable d'antichaînes de $[\sigma Q, < (i)]$ dont la réunion épuiserait σQ .*

Un théorème analogue subsiste en y remplaçant Q par l'ensemble R des nombres réels.

Démonstrations, extensions, etc... paraîtront dans une autre publication.

PARTITIVE SETS AND ORDERED CHAINS

Introduction

Partitive sets PS are of fundamental importance. In particular, the theory of ordered sets is a part of the theory of the inclusion order of sets of the form PS .¹ Many problems concerning PS are still unsolved; thus for instance the question of the cardinals kS , kPS , of the supremum, k_0PS , of the cardinals of the chains $\subseteq PS$ etc.

It is very interesting to observe that in the case of *well ordered sets*, W , the sets PW may be *totally ordered* to become $2(W)$ or 2^{W^*} and to serve as *universal chains*. Already Hausdorff [1], [3, p. 182] considered for each chain C and each ordinal α the set C^{α^*} or $C(\alpha)$ ordered *lexicographically* and consisting of all α -sequences of elements of C . He proved in particular that the chains $3(\omega_\alpha)$ have the property to contain isomorphically each chain. Sierpinski [6] has proved that also the chains $2(\omega_\alpha)$ have the same property of universality. Now we are going to prove that $2(\omega_\alpha)$ and $3(\omega_\alpha)$ are identical from the point of view of ordering and, moreover, that for each ordinal α the chains $2(\omega_\alpha)$, $3(\omega_\alpha)$; $\nu(\omega_\alpha)$ ($1 < \nu < \omega_\alpha$) have an equal order type, i.e. that each of these chains is similar to a part of each of them, a fact that is a remarkable extension of the cardinal number relation $2^{\aleph_\alpha} = \nu^{\aleph_\alpha}$ ($1 < \nu \leq \omega_\alpha$). We shall see (T. 4.1) how closely connected are the ordered sets $PI(\omega_\alpha)$ and $2(\omega_\alpha)$ (cf. Def. 1.3). Therefore, the chains $2(\omega_\alpha)$ have in a certain sense a privileged position; the more so it is interesting to note that the chains $(n+1)(\omega_\alpha)$ ($1 \leq n < \omega_\alpha$) are ordinally identical (cf. §6).

The subject of this paper is linked up with the researches of Cantor, Hausdorff, Sierpinski, etc. In particular the famous *pantachy problem* of Du

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Rad JAZU 302 (1957, 205–235 (Accepted on Feb. 21, 1956 at the session of the Division of Math. Phys. and Tech. Sciences.)

¹In fact, $(E; \leq)$ being any ordered set, let E_0 be the system of all the sets $[x, -)_E$ ($x \in E$), $[x, -)_E$ meaning the set of all the points $y \in E$ satisfying $y \geq x$. Obviously, $E_0 \subseteq PE$ and the mapping $x \rightarrow [x, -)_E$ ($x \in E$) is a similarity mapping of $(E; \leq)$ into $(PE; \supseteq)$. (For the case of chains, cf. L.2.6).

Bois Reymond ([1, §69]; also Hausdorff [2, 151-159]) is closely connected with our cardinal function K_1 or with the operator k_0PS (v. Def. 7.3). The question is connected with the following problem of Knaster (v. Sierpinski [1] and [3, 120]); *Does there exist a chain C of power $> 2^{\aleph_0}$ having an everywhere-dense subset of power $\leq 2^{\aleph_0}$?* In our functional notation (cf. Def. 1.1, Def. 2.1): *does there exist a chain C satisfying $k_1C \leq 2^{\aleph_0}$, $kC > 2^{\aleph_0}$ or, in Kuratowski's wording, is there a class of $> 2^{\aleph_0}$ linear sets that are pairwise comparable with respect to \subseteq (v. Sierpinski, ibidem)?*

This paper consists of 10 paragraphs. In §1 a number of elementary definitions is reproduced and a strengthening (cf. T. 1.1) of the equality $kPS = 2^{kS}$ is given (cf. Def. 1.1; 1.6). In §2 (cf. T. 2.1) a *necessary and sufficient condition is found for the chains representable in $(PS; \subseteq)$* . In §3 several definitions concerning complexes are given; especially, a generalization of the lexicographical ordering of complexes - *natural ordering* - is emphasized. The complex calculus is shown in §§3 and 6 to be a very handy tool. Thus as an analog of the cardinal number relations

$$(0.1) \quad k2(\omega_\beta) = kn(\omega_\beta), \quad \text{i.e.} \quad 2^{\aleph_\beta} = n^{\aleph_\beta} \quad (2 \leq n \leq \omega_\beta),$$

it is shown (T. 5.1), that the corresponding ordinal relations hold:

$$(0.2) \quad t2(\omega_\beta) = tn(\omega_\beta) \quad (2 \leq n \leq \omega_\beta);$$

in particular that the lexicographic order of $3(\omega_\beta)$ or the one of $\omega_\beta(\omega_\beta)$ is representable in the lexicographic order of $2(\omega_\beta)$; this is more interesting because the last order is isomorphic to the ordering of $PI(\omega_\beta)$ by the use of the sum modulo 2 (Def. 4.3) of elements of $PI(\omega_\beta)$ (cf. T. 4.1). In §§7 and 8 the numbers k_0S , $k_{\bar{0}}S$ and K_1 are introduced and in terms of $k_{\bar{0}}$ and k_0 respectively the characteristic properties of finite numbers are given (Cor. 7.1, Cor. 8.1). While the number $k_{\bar{0}}P(m)$ is easily evaluable (T. 7.1), the question of evaluation of the numbers $k_0P(m)$, $K_1(m)$ is very difficult as far as it is connected with the problem of the cardinal exponentiation (cf. T. 8.1-3). In §9 a special kind of isomorphism (*cogredieny of orderings or strong similarity*) is introduced on the one hand as a counterpart to the *weak similarities or preorderings* occurring in §4 and, on the other, to have something that, in the transfinite field, would correspond to the elementary permutations and inversions. In §10 the question of *maximal chains* in partitive sets is especially emphasized. As a synthesis of work of many mathematicians over a period of almost a century we shall prove the great theorem 10.1 showing the particular importance of the study of *extremal phenomena* also in the realm of partitive sets.

§ 1. Set A (B). Partitive set PS (S any set)

Definition 1.1. kX or k denotes the cardinal of X . E.g. $k\omega_0 = \aleph_0$, $k8 = 8$, $k\aleph = \aleph_0$, $k\aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. For any cardinal number a we put $k(a) = a$.

Definition 1.2. For any ordered pair of sets (S_0, S_1) we denote by $S_0(S_1)$ the system of all uniform functions from S_1 to S_0 , i.e. $f \in S_0(S_1)$ is equivalent to the statement that $f(x) \in S_0$ for each $x \in S_1$.

Definition 1.3. For any ordinal (cardinal) number α , $I(\alpha)$ means the set of all ordinal (cardinal) numbers, each of which is $< \alpha$. E.g. $I(0) = v$ (= void set); $I(\aleph_0) = I(\omega_0)$, $I(\omega_1) = 0, 1, 2, \dots, \omega_0, \omega_0 + 1, \dots$

Definition 1.4. For any numbers a, b let $a(b) = I(a)(I(b))$. In particular $2(\omega_\alpha)$ consists of all dyadic ω_α -sequences, i.e. for each $f \in 2(\omega_\alpha)$, f is a ω_α -sequence of digits 0,1, thus $f_\xi = 0$, or 1 for each $\xi < \omega_\alpha$. Similarly, $3(\omega_\alpha)$ consists of all triadic ω_α -sequences.

It is known that, by definition (cf. Cantor [1, 288]), $k(A(B)) = (kA)^{(kB)}$; in particular $2^{\aleph_\alpha} = k(2(\omega_\alpha))$.

Definition 1.5. The characteristic function φ_X of a subset X of S is defined to be 1 in X and 0 in $S \setminus X$.

Definition 1.6. The partitive set PS of S is the system of all $X \subseteq S$. Thus $X \subseteq S \Leftrightarrow X \in PS$; in particular $v \in PS$, $S \in PS$ (v means the void set).

LEMMA 1.1. *If $X \in PS$, then $\varphi_X \in 2(S)$ and vice versa; if $f \in 2(S)$, then $f^{-1}(1) \in PS$ and $\varphi_{f^{-1}(1)} = f$. The mappings $X \rightarrow \varphi_X$, $f \rightarrow f^{-1}(1)$ are biunique. Thus $kPS = 2^{kS}$.*

LEMMA 1.2. *If $X \subseteq Y \subseteq S$, then $\varphi_X(s) \leq \varphi_Y(s)$, ($s \in S$) and vice versa; if $f, g \in 2(S)$ and $f(s) \leq g(s)$ for each $s \in S$, then $f^{-1}(1) \subseteq g^{-1}(1)$; here = reads: if and only if $f(s) = g(s)$ ($s \in S$).*

Definition 1.7. $(PS; \subseteq)$ means the set PS ordered by \subseteq ; dually, $(PS; \supseteq)$ means the same set ordered by \supseteq .

Definition 1.8. $A = (A; \leq)$ being an ordered set, the cardinal ordering of $A(B)$ means that for $f, g \in A(B)$:

$$f = g \Leftrightarrow f(b) = g(b) \quad (b \in B)$$

$$f < g \Leftrightarrow f \neq g \text{ and } f(b) \leq g(b) \quad (b \in B) \text{ (cf. Birkhoff [1], [2]).}$$

Of course, $f \leq g$ means $f = g$ or $f < g$; generally neither $f \leq g$ nor $g \leq f$.

Definition 1.9. For ordered sets $(S_1; \leq_1)$ $(S_2; \leq_2)$ the relation $tS_1 \leq tS_2$ or $tS_2 \geq tS_1$ means that $(S_1; \leq_1)$ is similar to a subset of $(S_2; \leq_2)$;

$$tS_1 = tS_2 \Leftrightarrow tS_1 \leq tS_2, \quad tS_2 \leq tS_1,$$

$$tS_1 < tS_2 \Leftrightarrow tS_1 \leq tS_2, \quad tS_2 \not\leq tS_1,$$

$tS_1 \equiv tS_2$ means that S_1 and S_2 are similar.

THEOREM 1.1. *The ordered set $(PS; \subseteq)$ and the cardinal ordering of $2(S)$ are similar. In particular the mapping $\varphi_X (X \in PS)$ as well as the mapping $f^{-1}(1)$, $(f \in 2(S))$ represent a similarity.*

E. g. let $f, g \in 2(S)$ and $f < g$; we have to prove that $f^{-1}(1) \subset g^{-1}(1)$.

Now, if $x \in f^{-1}(1)$, then $f(x) = 1$, and, because $f(x) \leq g(x) \in \{0, 1\}$, we obtain $g(x) = 1$; hence, $x \in g^{-1}(1)$ etc.

The T. 1.1. is a strengthening of the famous theorem $kPS = 2^kS$.

LEMMA 1.3. *If the sets S_1, S_2 are equivalent, then the sets $(PS_1; \subseteq)$, $(PS_2; \subseteq)$ are similar, thus also the cardinal orderings $2(S_1), 2(S_2)$ are similar. And also reciprocally.*

Symbolically: if $kS_1 = kS_2$ then

$$tPS_1 \equiv tPS_2, \tag{1}$$

$$t2(S_1) \equiv t2(S_2); \text{ and reciprocally.} \tag{2}$$

The lemma is obvious: if f is a one-to-one mapping of S_1 onto S_2 , then putting for each $X \in PS_1: g(v) = v, gX = \bigcup_x f(x) (x \in X)$, g is an isomorphism between PS_1 and PS_2 . Reciprocally, each isomorphism g between PS_1, PS_2 reduces for one-point sets $\subseteq PS$ to a one-to-one mapping of S_1 onto S_2 . The isomorphism (2) is an obvious consequence of (1) and of T. 1.1.

Definition 1.10. For any cardinal number a we denote by $P(a)$ or Pa the cardinal of PS where S is any set of power a .

LEMMA 1.4. *The ordered set $(PS; \subseteq)$ is similar to its dual; the cardinal order in $2(S)$ is similar to its dual.*

To see it, it is sufficient to consider the mapping $X \rightarrow X' (\equiv \text{complement of } X) = S \setminus X$ and the mapping $f \rightarrow f'$, respectively, where, for each $s \in S, f'(s) = 1 - f(s)$.

§ 2. Numbers k_1C , k_2C (C any chain).

Definition 2.1. (*Separability degree* k_1C). C being an ordered chain let

$$(2.1) \quad k_1C = \text{Inf}_X kX, \quad (X \subseteq C)$$

each X being everywhere dense on C in the sense that each open non-void interval of C contains at least one point of X . The number k_1C may be called the *separability degree of C* . E.g., for a real continuum C one has $k_1C = \aleph_0$.

Definition 2.2. For a chain C we define k_2C as follows:

$$(2.2) \quad k_2C = \text{Sup}_F kF, F$$

running over all disjointed systems of non-void open sets (intervals) of C .

The interconnection of the numbers k_1C , k_2C is closely connected with the Suslin problem.

LEMMA 2.1. For each chain C , $k_1C \geq k_2C$.

LEMMA 2.2. $k_1C \leq kC \leq 2^{k_1C}$; for any finite C , $k_1C = kC$.

We will restrict ourselves to considering any transfinite chain C . To prove that $kC \leq 2^{k_1C}$, let M be any subset of C everywhere dense on C and such that $kM = k_1C$; let F be the system of all sets

$$(1) \quad (\cdot, x]_M \quad (x \in C);$$

naturally, $F \subseteq PM$ thus

$$(2) \quad kF \leq 2^{kM} = 2^{k_1C}.$$

Now, the mapping (1) is of the type $(1, \leq 2)$, i.e. the mapping is uniform and on at most 2-point sets $\subseteq C$ it may be constant; therefore $kC \leq 2kF = kF$, which with (2) yields the L. 2.2.

LEMMA 2.3. Let M be an ordered set; let $C \subseteq M$ be a chain, and $X \subseteq M$, so that each $x \in X$ is comparable to each $c \in C$. If every non-void open interval of C contains a point of X , then $k_1C \leq kX$.

Proof. At first, let C_i be the set of all isolated points of C . Then

$$(1) \quad kC_i \leq kX, \quad kC_i \leq k_1C.$$

Namely, the points of C_i can be separated simultaneously: to each $c_i \in C_i$ we can associate an interval $I(c_i)$ of C , so that $I(c_i) \cap C_i = \{c_i\}$. Since each set, which is dense everywhere on C crosses in particular each $I(C_i) \neq v$, one concludes immediately that (1) holds. Now, if $kC_i = k_1C$, Lemma 2.3 is proved by (1). It remains to consider the case $kC_i < k_1C$. Considering the set $C' \setminus C_i$, C' has no isolated point and obviously $k_1C' = k_1C$. Again, each non-void interval I of C' crosses X ; but I is infinite; in particular, if $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5$ are 5 points of $I \cap C$, then there are points x_1, x_2 of X , so that $c_1 < x_1 < c_3 < x_2 < c_5$; thus to I is associated an interval

$$(2) \quad (x_1, x_2)_{C'} \neq v \quad \text{with} \quad x_1, x_2 \in X.$$

Hence, if F denotes the system of all intervals of the form (2) and to each $i \in F$ we associate a point $p_i \in i \cap C'$ (the existence of p_i is visible from (2), it means that $k_1C' \leq kF$. Since $kF = kX^2 = kX$, we conclude that $k_1C' \leq kX$. Q.E.D.

LEMMA 2.4. *Each chain $C \subseteq PS$ satisfies $k_1C \leq kS$; in other words: If $tC \leq tP(m)$, then $k_1C \leq m$ (m being a cardinal).*

In fact, let us consider the union

$$(1) \quad S_0 = \bigcup_X X \quad (X \in C);$$

of course, $S_0 \subseteq S$, thus $kS_0 \leq kS$. For each $x \in S_0$ let I_x be the intersection of all the elements of C , each of which contains x . To prove that the set C_0 of all the I_x ($x \in S_0$) is a subset of PS , which is order-dense in C : if E_0, E_1, E_2 are any 3 elements of C such that $E_0 \subset E_1 \subset E_2$ there is an $X \in C_0$ satisfying $E_0 \subset X \subset E_2$. Now, let $e_1 \in E_1 \setminus E_0, e_2 \in E_2 \setminus E_1$ obviously $E_0 \subset I_{e_1} \subseteq E_1 \subseteq I_{e_2} \subseteq E_2$; consequently, $E_0 \subset I_{e_1} \subset E_2, I_{e_1} \in C_0, I_{e_1} \subseteq S_0$. On the other hand $kS_0 \leq kS$. According to the L. 2.3 $k_1C \leq kS_0$; and that with $kS_0 \leq kS$ proves the L. 2.4.

LEMMA 2.5. *For each chain $C \subseteq PS$ the set $C(1)$ of all points of C each of which is a unilateral limit point of C has at the most kS points: $kC(1) \leq kS$.*

Let L and D be the system of all left and right limit points belonging to $C(1)$ respectively. Obviously, $L \cup D = C(1), L \cap D = v$. Now, for each $x \in L$ (except the case when x happens to be the last element of C) the immediate $x^+ \in C$ is well defined and $x^+ \setminus x \neq v$; also for each $y \in D$ (except

that y is the initial element of C) the immediate predecessor $y^- \in C$ of y is determined. The sets

$$x^+ \setminus x, y \setminus y^- \quad (x \in L, y \in D)$$

are pairwise disjoint and form a subsystem F of PS . Obviously $kF \leq kS$. Since, on the other hand, $kF = kL + kD = kC(1)$, we have $kC(1) \leq kS$. Q.E.D.

LEMMA 2.6. *Let C be a chain such that $k_1C \leq kS$ and $kC(1) \leq kS$;² then C is similar to a subset of $(PS; \subseteq)$. (cf. L. 2.5 for $C(1)$).*

Proof. Let C' be a subset of C dense everywhere on C , and such that $kC' = k_1C$. Since, by supposition, each of the cardinals k_1C , $kC(1)$ is $\leq kS$, we have also $k(C' \cup C(1)) \leq kS$. Consequently, there is a one-to-one mapping f of the set $B = C' \cup C(1)$ into the set S ; thus $fB \subseteq S$ and $PfB \subseteq PS$. Now, consider the transformation:

$$(1) \quad f[x] \equiv f(\cdot, x)_B \quad (x \in C);$$

thus for each $x \in C$ $f[x]$ consists of all the points $f(x')$ where $x' \leq x$, $x' \in B$. We say that (1) is a similarity transformation of C into PS . In fact, let $x, y \in C$ and $x < y$; to prove that $f[x] \subset f[y]$.

At first, if x, y are not consecutive points in C , and because C' is dense on C , there is an element of C' located between x and y . If, on the contrary, y succeeds immediately to x , then either y is isolated, thus $y \in f[y]$ or y is a unilateral limit point, hence $y \in C'$, and again $y \in f[y]$.

The Lemmas 2.3–2.6 yield the following general

THEOREM 2.1. *Let M be any set; in order that an ordered chain C be similar to a subset of PM , it is necessary and sufficient that both:*

$$(1) \quad k_1C \leq kM, \quad kC(1) \leq kM,$$

where $C(1)$ denotes the system of all unilateral limit points of C ; symbolically, for any chain C and any transfinite cardinal number m the relations

$$tC \leq tP(m)$$

and

$$k_1C \leq m, \quad kC(1) \leq m$$

² $C(1)$ denotes the set of all unilateral limit points of C .

are equivalent.

Cf. also Novotny [1]. The case of denumerable sets M yields the following corollary due to W. Sierpinski [2, p. 241].

COROLLARY 2.1. *In order that a chain be similar to a subset of PN , N being the set of natural numbers, it is necessary and sufficient that C be similar to a set of real numbers.*

LEMMA 2.7. *For each ordered chain C and each set M satisfying $k_1C \leq kM$ there is a chain $C_0 \subseteq PM$, so that $kC = kC_0$, $k_1C = k_1C_0$.*

Proof. Let $C(1)$ be the set of all unilateral limit points of C . If $kC(1) \leq k_1C$, then, according to T. 2.1, the chain C is representable in PM , and the L. 2.7 is proved. On the other hand, if $kC(1) > k_1C$, then the consecutive limit points of C form a set C_2 of power $= kC(1)$ thus $kC_2 > k_1C$. Now, dropping the right point in each couple of consecutive limit points of C one gets a chain $C_3 \subseteq C$ satisfying $kC_3 = kC$, $k_1C_3 = k_1C$ and $kC_3(1) \leq k_1C_3$ [$C_3(1)$ is the set of all unilateral limit points of C_3]. In virtue of the T. 2.1 the chain $C_3(1)$ is representable in PM by a model C_0 which is the set required by the L. 2.7. Q.E.D.

§ 3. Natural ordering of complexes.

Definition 3.1. For a sequence or complex s we denote by γs the rank or length or the degree of s ; consequently, for each $\xi < \gamma s$, s_ξ is a well determined term of s ; we might also write $s_\xi \in s$.³

Convention 3.1. Each sequence (complex) s may be considered as ordered, so that for any $\xi, \xi' < \gamma s$ the set $\{\xi, \xi'\}$ should be similar to $\{s_\xi, s_{\xi'}\}$ by the mapping $\xi \rightarrow s_\xi$ (cf. Kurepa [2, p. 44 convention 1]).

Definition 3.2. The ordinal sum of complexes s, s' is the complex $s \uplus s'$ of rank $\gamma s + \gamma s'$ so that

$$(1) \quad (s \uplus s')_\xi = s_\xi \quad \text{or} \quad s'_{-\gamma s + \xi}$$

according as $\xi < \gamma s$ or $\gamma s \leq \xi < \gamma s + \gamma s'$.

In general, s being a sequence of sequences s_ξ , the ordered sum

$$(2) \quad \uplus_{\xi < \gamma s} s_\xi$$

³It is convenient to put $\gamma M = M$ for any set M ; then $\xi < \gamma M$ is to be read as $\xi \in M$. Thus each set, space etc. may be considered as a complex.

is defined as the sequence obtained by *juxtaposition of sequences* s_ξ ($\xi < \gamma s$). In particular, each sequence, s , is to be considered as the ordinal sum of its terms: $s = \bigoplus_{\xi < \gamma s} s_\xi$.

Consequently, the rank γ is a distributive operation.

$$\text{E.g. } (2, 3, 5) \oplus (0, 0, 0, 0) = (2, 3, 5, 0, 0, 0, 0)$$

and for the corresponding ranks one has $3 + 4 = 7$.

Convention 3.2. Let s be a complex (sequence) and $\nu > \gamma s$; then s may be considered as a complex s_ν of rank ν , so that its terms of order $\geq \gamma s$ are v (vacuous): $(s_\nu)_\xi = s_\xi$ or v according as $\xi < \gamma s$ or $\xi \geq \gamma s$. E.g. $(0, 0, 0) = (0, 0, 0, vvv \dots)$. Naturally, v has the usual arithmetic of its own.

Definition 3.3. For any ordered pair (s, s') of sequences we denote by $i(s, s')$ or i or $e(s, s')$ the *maximal initial portion of "indices"* ξ satisfying

$$(4) \quad s_\xi = s'_\xi \quad (\xi < e(s, s'));$$

in particular let $e(s, s) = \gamma s$ (cf. Def. 2.1).

Definition 3.4. (\subseteq relation) s, s' being sequences, let $s \subseteq s'$ or $s' \supseteq s$ mean $\gamma s < \gamma s'$, $s_\xi = s'_\xi$ ($\xi < \gamma s$). Naturally, $s \subseteq s'$ or $s' \supseteq s$ means $s \subseteq s'$ or $s = s'$.

Sometimes it is convenient to denote \subseteq by l . This relation is the very basis of the theory of *ramified tables*. (Kurepa [2, pp. 84–87]).

C being a chain, it is known that for each ordinal α Hausdorff [1] (cf. also Bernstein [1, p. 51]) introduced the *lexicographical order* in the set $C(\alpha)$ of all α -sequences extracted from C , so that for distinct elements $f, g \in C(\alpha)$ he defined:

$$f < g \text{ in } C(\alpha) \Leftrightarrow f_{i(f,g)} < g_{i(f,g)} \text{ in } C.$$

The set $C(\alpha)$ becomes a (\leq) -chain or l -chain (read: *lexicographic chain*).

LEMMA 3.1. *Given any system S of complexes, the logical sum of \subseteq -ordering and of the lexicographical ordering of S yields a total ordering of S . (Natural ordering of complexes in Kurepa [2, p. 87, 127]).*

The simplest way to prove the lemma is the following:

Definition 3.5. Let $\gamma S = \text{Sup } \gamma s$ ($s \in S$).

Then each sequence $s \in S$ is to be considered as a sequence s' of degree γS so that $s'_\xi = s_\xi$ ($\xi < \gamma s$) and $s'_\xi = v$ (vacuum) for each $\gamma s \leq \xi < \gamma S$ provided that $\gamma s < \gamma S$ and that v precedes each point occurring as a proper term in any element of S . Thus we obtain the system S' .

E.g. if $S = \{(1, 2, 3), (2), (2, 4), (1, 2, 3, \dots)\}$,

then S' is to be considered as the system

$\{(1, 2, 3, v, v \dots), (2, v, v, v \dots), (2, 4, v, v, \dots), (1, 2, 3, \dots)\}$.

Of course, the mapping $s \rightarrow s'$ ($s \in S$) is a one-to-one mapping of S onto S' ; but the lexicographical ordering of S' yields a chain; the transfer of that order onto S by the map $s \leftrightarrow s'$ yields a total order in S , which obviously is an extension of both the \subset -order and the alphabetical order defined for the l -incomparable elements of S ; the ordering of S thus obtained is its natural order.

As an illustration of the usefulness of the preceding considerations let us mention the

LEMMA 3.2. *For each ordinal α the natural ordering of*

$$(1) \quad \bigcup 2(\alpha_0) \quad (\alpha_0 < \alpha)$$

yields a chain which, for each limit number α is everywhere dense on the set $2(\alpha)$. The same statement holds if instead of 2 we read here any ordered chain C as having a first and last element (cf. Def. 1.4). Note that sets (1) and $2(\alpha)$ are disjoint.

Let α be a limit ordinal λ ; then for each dyadic α -sequence x of the form $x = (x_0 x_1 \dots 0, 1, 1 \dots)$ we have $x^+ = (x_0 x_1 \dots 1, 0, 0 \dots)$ i.e. for each $\beta < \alpha$ and each $y \in 2(\beta)$ the λ -sequence $y \dot{+} 0 \dot{+} \{1\}_{-\beta+\lambda}$ is the immediate predecessor in $2(\alpha)$ of the λ -sequence $y \dot{+} 1 \dot{+} \{s\}_{\beta+\lambda}$; and, reciprocally, each couple of consecutive points of $2(\lambda)$ is of that form. Now, prove that (1) is dense on $2(\alpha)$ for $\alpha = \lambda$: if s, s' are non consecutive in $2(\lambda)$ and $s < s'$, then there is an $x \in (1)$ such that $s < x < s'$. Let $i = i(s, s')$; then $s_i = 0, s'_i = 1$. Let $\nu = -i + \alpha$. If $(i, \alpha)_{s'} \neq \{0\}_\nu$, we can put $x = (\cdot, i)_{s'} \dot{+} \{v\}_\nu$. If $(i, \alpha)_{s'} = \{0\}_\nu$, then necessarily $(i, \cdot)_s \neq \{1\}_\nu$ because $(\cdot, i)_s \dot{+} \{1\}_\nu$ and s' are consecutive in $2(\alpha)$. Thus there is a $\xi \in (i, \alpha)$ such that $s_\xi = 0$; putting then $x = (\cdot, \xi)_s \dot{+} (1) \dot{+} \{0\}_\nu$ we see that $s < x < s'$ and $x \in 2(\alpha)$.

Remark 3.1. The same conclusion holds for $C(\lambda)$, 0 and 1 denoting the first and last elements of C ; if C is not limited, then $C(\lambda)$ has no consecutive points; C is any chain.

Definition 3.6. For any ordered pair (b, a) of cardinal numbers let

$$a^{\overset{b}{\sim}} = \sum_{x < b} a^x \quad (\text{v. Tarski [1, p. 188, Def. 4]}).$$

Definition 3.7. For any ordered pair (β, α) of ordinal numbers let

$$H_\alpha(\beta) = \bigcup_{\xi < \omega_\alpha} \beta(\xi).$$

Thus $H_\alpha(\beta)$ consists of all $< \omega_\alpha$ -sequences⁴ of ordinals $< \beta$. The cases $1 < \beta < \omega_0$ and particularly $\beta = 2$ are of special importance. Thus, for example,

$$H_1(2) = \bigcup_{\xi} 2(\xi) \quad (\xi < \omega_1).$$

LEMMA 3.3. *If $b \geq 2$, then*

$$b^{\overset{N_\alpha}{\sim}} \geq 2^{\overset{N_\alpha}{\sim}} \geq N_\alpha; \quad N_\alpha b^{\overset{N_\alpha}{\sim}} = b^{\overset{N_\alpha}{\sim}}; \quad b^{\overset{N_{\alpha+1}}{\sim}} = b^{\overset{N_\alpha}{\sim}}.$$

Since $b \geq 2$ implies $b^{\overset{N_\alpha}{\sim}} \geq 2^{\overset{N_\alpha}{\sim}}$ let us consider the case $b = 2$. For $\alpha = 0$ the formula reads $b^0 + b^1 + b^2 + \dots \geq N_0$ which is obviously true. If $\alpha - 1$ exists, then $2^{N_{\alpha-1}} \geq N_\alpha$ and $2^{\overset{N_\alpha}{\sim}} \geq 2^{N_{\alpha-1}}$, thus $2^{N_\alpha} \geq N_\alpha$. If α is a limit number thus $\alpha = \text{Sup}_{\nu < \alpha} (\nu + 1)$ and $N_\alpha = \text{Sup}_{\nu < \alpha} N_{\nu+1}$, $2^{N_\nu} \geq N_{\nu+1}$, $2^{\overset{N_\alpha}{\sim}} \geq 2^{N_\nu} \geq N_{\nu+1}$ ($\nu < \alpha$), hence the first relation in L. 3.3; multiplying it by N_α we obtain the second relation in L. 3.3; the third relation is a special case of the second.

LEMMA 3.4. *If $b \geq 2$, then $b^{\overset{N_\alpha}{\sim}} = \sum_{\nu < \omega_\alpha} b^{k\nu}$.*

As a matter of fact

$$b^{\overset{N_\alpha}{\sim}} = \sum_{a < N_\alpha} b^a \leq \sum_{\nu < \omega_\alpha} b^{k\nu} \leq \sum_{a < N_\alpha} N_\alpha b^a = N_\alpha b^{\overset{N_\alpha}{\sim}} = b^{\overset{N_\alpha}{\sim}}.$$

⁴i.e. of all ξ -sequences, ξ running over the ordinals $< \omega_\alpha$.

Therefore the L. 3.4 holds true.

LEMMA 3.5. *For each ordinal $\beta > 1$ we have (k reads "cardinal of")*

$$(1) \quad kH_\alpha(\beta) = (k\beta)^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_\alpha$$

and in particular

$$kH_\alpha(2) = 2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_\alpha; \quad (2)$$

$$kH_{\alpha+1}(2) = 2^{\aleph_\alpha}. \quad (3)$$

Since the summands in the Def. 3.7 are pairwise disjoint we have

$$kH_\alpha(\beta) = \sum (k\beta)^{k\xi}, \quad (\xi < \omega_\alpha);$$

hence by the application of L. 3.3 and L. 3.4 we obtain the L. 3.5.

On the numbers $k_1(2(\omega_\alpha)), k_2(2(\omega_\alpha))$ (cf. Def. 2.1, 2.2).

LEMMA 3.6.

$$(1) \quad k_1(2(\omega_\alpha)) = 2^{\aleph_\alpha} = k_2(2(\omega_\alpha));$$

thus

$$k_i(2(\omega_\alpha)) \geq \aleph_\alpha \quad (i = 1, 2).$$

In particular

$$(2) \quad k_i(2(\omega_{\alpha+1})) \geq 2^{\aleph_\alpha} \quad (i = 1, 2);$$

here \geq reads = if α is not a limit number.

The hypothesis $k_1(2(\omega_{\alpha+1})) = \aleph_{\alpha+1}$ is equivalent to the continuum hypothesis $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

At first, the set $H_\alpha(2)$ is dense everywhere in $2(\omega_\alpha)$; therefore (cf. L. 3.2) we have

$$(1) \quad k_1(2(\omega_\alpha)) \leq kH_\alpha(2).$$

Since obviously

$$(2) \quad k_1 \geq k_2 \quad (\text{Cf. L. 2.1})$$

the equality $k_1(2(\omega_\alpha)) = k_2(2(\omega_\alpha)) = kH_\alpha(2)$ will follow from (1) and from the dual relation.

At first we can easily prove

LEMMA 3.7. *Let $\xi < \omega_\alpha$ and $y \in 2(\xi)$; let $I(y)$ be the set of all points $x \in 2(\omega_\alpha)$ such that $y \dot{+}\{0\}_{\omega_\alpha} < x < y \dot{+}\{1\}_{\omega_\alpha}$; then $I(y)$ ($y \in 2(\xi)$) is a disjointed system of $k2(\xi) = 2^{k\xi}$ non-void intervals of $2(\omega_\alpha)$.*

Consequently, $k_2(2(\omega_\alpha)) \geq 2^{k\xi}$ ($\xi < \omega_\alpha$), from where we can easily deduce that

$$(3) \quad k_2(2(\omega_\alpha)) \geq 2^{\aleph_\alpha} = kH_\alpha(2).$$

The relations (1), (2), (3) yield the first equality in L. 3.7. That implies, in virtue of the last equality in L. 3.3, the second equality in L. 3.7.

The remainder of L. 3.7 is obvious.

§4. On comparison of orders. Preorder operator o

Definition 4.1. Let $(S; \leq)$, $(S'; \leq')$ be ordered; we say that *the order in $(S; \leq)$ is at least so great (abundant) as the order in $(S' \leq')$ or that $(S; \leq)$ is weakly similar to a subset of $(S'; \leq')$* , symbolically

$$(1) \quad o(S; \leq) \leq o(S'; \leq') \quad \text{or} \quad o(S'; \leq') \geq o(S; \leq)$$

if and only if there is a one-to-one mapping f of S into S' , so that for each chain $C \subseteq (S; \leq)$ the set fC is a similar chain of $(S'; \leq')$.

We also write oS instead of $o(S; \leq)$.

Definition 4.2.

$$\begin{aligned} oS = oS' &\Leftrightarrow oS \leq oS', & oS' \leq oS \\ oS < oS' &\Leftrightarrow oS \leq oS', & oS \neq oS'. \end{aligned}$$

The above notion of preorder was introduced earlier (v. Kurepa [4, p. 72]); it is not to be confused with the type order tS of $(S; \leq)$ (cf. Def. 1.9) because if $tS \leq tS'$, then the transform of each antichain in S is a well determined antichain in S' , which in the case of $oS \leq oS'$ need not hold. In particular *the preorder operator o enables us to compare chains, antichains and general order sets*. For instance, if in a chain C the relation $oS \leq oC$ holds, *it enables us to order totally S by an extension of its partial order $(S; \leq)$* : as a matter of fact, let f be a preorder mapping of $(S; \leq)$ into C ;

if then for any $a, b \in S$ the relation $a \leq b$ in S has to mean the same as $f(a) \leq f(b)$ in C , then S becomes a chain similar to a chain in C , so that the new total order of S is an extension of the previous order $(S; \leq)$ of S .

We may write $oS \equiv oS'$ if and only if S, S' are similar, that is if and only if $tS \equiv tS'$. Naturally, the relation $tS = tS'$ does not necessarily imply the relation $tS \equiv tS'$ (already it is so in the case of total orderings).

LEMMA 4.1. *For an antichain A the relation $oA \leq oS$ is equivalent to $kA \leq kS$.*

The consideration of preorder is in a certain sense the consideration of the history of an ordered set $(S; \leq)$, because the relations $o(X; \leq) \leq oS, kX = kS$ imply that the order of X may be considered as a particular state in the evolution of order in S from its totally unordered state through $(S; \leq)$, to become a chain.

In fact, let f be a preorder mapping of X onto $(S; \leq)$; then the transferring of the order from S to X by the process

$$x, y \in X, \quad x \leq y \text{ in } X \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) \text{ in } (S; \leq)$$

yields an order extension of $(X; \leq)$ similar to $(S; \leq)$; consequently, the given order $(X; \leq)$ is indeed a previous state of the order $(S; \leq)$. Once more it becomes useful to mention that it is of no importance to distinguish similar ordered sets. A very remarkable example of the past states of some linear sets were given by us elsewhere (cf. Kurepa [5]).

Now we are going to prove the following very interesting theorem.

Definition 4.3. *The sum modulo 2 of sets A, B is the set $A+B_2$ consisting of those points of $A \cup B$ that are not in $A \cap B$.*

THEOREM 4.1. *For any ordinal number α one has*

$$(1) \quad oPI(\alpha) \leq o(2(\alpha)) \quad (\text{cf. Def. 1.4, 4.1})$$

and still more: *The system $PI(\alpha)$ of all subsets $\subseteq I(\alpha)$ ordered by the relation \subseteq can be mapped biuniquely not only into but also onto the chain $2(\alpha) = 2^{\alpha^*}$ of all dyadic α -sequences ordered lexicographically, so that each chain $C \subseteq PI(\alpha)$ is similar to the corresponding subset of $2(\alpha)$: the correspondence $X \rightarrow \text{char. function } \varphi_X$ is such an isomorphic mapping of $PI(\alpha)$ onto $2(\alpha)$. In other words: the partial order of $(PI(\alpha); \subseteq)$ can be extended totally, to become identical with the total lexicographical order in $2(\alpha)$: the mapping $f^{-1}(1)$ ($f \in 2(\alpha)$) enables us to transfer the lexicographic order of $2(\alpha)$ into $(PI(\alpha); \subseteq)$ by enlarging the partial order $(PI(\alpha); \subseteq)$.*

In other words: let $PI(\alpha)$ be ordered so that the vacuous set v precedes every other element of $PI(\alpha)$ and that for the non-void distinct elements $X, Y \in PI(\alpha)$ the relation $X < Y$ means that the first element of the sum $X+Y$ modulo 2 belongs to Y ; then $PI(\alpha)$ becomes a chain similar to $2(\alpha)$, the correspondence

$$X \rightarrow \text{char. function } \varphi_X$$

being a similarity between $PI(\alpha)$ so ordered, and the chain $2(\alpha)$; in particular, for each $\xi < \alpha$ and each $A \subseteq I(\xi)$ the element $A \cup (\xi)$ is the immediate successor of $A \cup (\xi, \alpha)$. If α is a limit number, then each pair of consecutive points of $(PI(\alpha); \subseteq)$ is of that form.

Of course, (ξ, α) means the set of all ordinals between ξ and α .

Proof. It was shown earlier (cf. T. 1.1) that φ_X ($X \in PI(\alpha)$) is a one-to-one mapping of $PI(\alpha)$ onto $2(I(\alpha))$ and thus onto $2(\alpha)$ and even that it is a similarity between $(PI(\alpha); \subseteq)$ and the cardinal ordering of $2(\alpha)$. Since the lexicographical ordering of $2(\alpha)$ is an extension of the cardinal order in $2(\alpha)$, the first part of the theorem is proved. It is obvious that $A \cup (\xi, \alpha)$ precedes $A \cup (\xi)$ because the symmetrical sum mod 2 of these sets is $[\xi, \alpha)$ and the first element of that sum belongs to $A \cup (\xi)$. It remains to prove the last statement in T. 4.1. Let us operate with the sum modulo 2. Suppose $F, G \in PI(\alpha)$ and $F^+ = G$; i being the first element of $F+G$, we have $i \in G \setminus F$. Then $G \cap (i, \alpha) = v$; in the opposite case there would be a $\xi \in G \cap (i, \alpha)$, which is impossible, since we should have $F < G \setminus (\xi) < G$ contrary to $F^+ = G$. By analogy, we prove that $(2, \alpha) \subset F$. Q.E.D.

Remark 4.1. From the above it would seem that, in the sequence of lexicographic orders

$$(1) \quad 2(\beta), 3(\beta), \dots, n(\beta), \dots, \omega(\beta), \dots,$$

the ordering $2(\beta)$ had a very privileged position. It is the more interesting to show that for each limit ordinal β the types $2(\beta), 3(\beta)$ are equal (although not identical), and that for each ordinal α we have

$$(2) \quad t2(\omega_\alpha) \equiv t3(\omega_\alpha).$$

Consequently, $2(\omega_\alpha)$ and $3(\omega_\alpha)$ are merely representations in the different systems of some type of ordering or of some numerical continuum obtained by identification of consecutive points in $PI(\omega_\alpha)$. In this connection we will consider the ordinals as digits and some passages from one (finite or transfinite) numerical system to another.

§ 5. Ordinals as digits. Digital functions.

Example 5.1. Let us consider the chains $2(\omega_0)$, $4(\omega_0)$ consisting of all ω_0 -sequences of digits 0,1 and 0, 1, 2, 3 respectively. We may consider that the elements of chains $2(\omega_0)$, $4(\omega_0)$ are obtainable by successive partitions of a set in 2 and 4 parts respectively; thus the first 2 steps in the case of $2(\omega_0)$ are equivalent to the first step in the case of $4(\omega_0)$ etc. That leads us to denote in the 2-system the digits 0, 1, 2, 3 of the 4-system as follows (Definition 5.1):

$$(1) \quad 00, 01, 10, 11 \text{ for } 0, 1, 2, 3$$

respectively, and, vice versa, to denote *dyadic "numbers"* 00,01,10,11 as 0, 1, 2, 3 in the 4-system.

If that transformation is denoted $[4; 2]$, thus e.g.

$$(2) \quad [4; 2](0) = 00, [4; 2](1) = 01, [4; 2](2) = 10, [4; 2](3) = 11,$$

then each sequence s of 4-digits is representable in the 2-system as the sequence

$$(3) \quad [4; 2](s) \equiv \bigoplus_{\nu < \gamma s} [4; 2]s_{\nu} \quad (\nu < \gamma s),$$

(γs denoting the degree of s); e.g.

$$(4) \quad [4; 2](103302) = 010011110010.$$

Conversely, the passage from the 2-system to the 4-system may be accomplished by means of the transformation $[4; 2]^{-1}$ defined as follows for each dyadic sequence σ of even rank $\gamma\sigma$: if $\sigma = 00, 01, 10, 11$ respectively, then $[4; 2]^{-1}\sigma$ is, respectively, 0, 1, 2, 3. If $\gamma\sigma = 2\gamma'$, the partition of $\sigma = \bigoplus_{\nu < \gamma'} s'_{\nu}$ with $\gamma s'_{\nu} = 2$ permits to define $[4; 2]^{-1}\sigma = \bigoplus_{\nu < \gamma'} [4; 2]^{-1}s'_{\nu}$. E.g. in the above case: $[4; 2]^{-1}(010011110010)$ reads 103302. For the ω_0 -sequences $\{0\}_{\omega_{\alpha}}$, $\{3\}_{\omega_{\alpha}}$ we have as their $[4; 2]^{-1}$ -images: $\{0\}_{\omega_{\alpha}}$, $\{1\}_{\omega_{\alpha}}$, respectively.

LEMMA 5.1. (1) For each ordinal α the mapping $[4; 2]s$ ($s \in 4(\omega_{\alpha})$) is a similarity between the lexicographic chains $4(\omega_{\alpha})$ and $2(\omega_{\alpha})$.

(2) For each $2 \leq n < \omega_0$ let $[2^n; 2]$ denote the mapping induced by the following dyadic representation of the 2^n digits $\nu < 2^n$:

$$(2) \quad [2^n; 2]\nu = (i_0 i_1 \dots i_{n-1}),$$

where

$$(3) \quad (i_0, i_1, \dots, i_{n-1}) \in 2(n) \quad \text{and} \quad \nu = \bigoplus_{n_0 < n} i_{n_0} 2^{n-n_0}.$$

Then the mapping

$$(4) \quad [2^n; 2]x = \bigoplus_{\sigma < 2^n} [2^n; 2]x_\sigma \quad (x \in 2^n(\omega_\alpha))$$

is a similarity transformation between the lexicographic orderings $2^n(\omega_\alpha)$ and $2(\omega_\alpha)$.

By the induction argument one sees that by (2), (3) the mapping $[2^n; 2]$ is uniquely determined; obviously, it is a one-one mapping. Its isomorphic character for the natural ordering is a consequence of the definition of the natural ordering in the one hand, and that the mapping is isomorphic in the chain $I(2^n)$ of all digits $\nu < 2^n$.

The inverse of the mapping (4) exists and may be denoted $[2^n; 2]^{-1}$.

5.2. $[\alpha; \beta]$ -functions ($\alpha; \beta$ ordinals) serve to pass from the α -system representation to the β -system representation of sequences of a given order γ (therefore it should be better to speak of $[\alpha; \beta]_\gamma$ -functions to mark the degree of the given sequences, or even to speak of the type $[\alpha; \beta | \gamma; \gamma']$ of functions to denote the degree γ of the set of sequences from which we start and the degree of the resulting set of sequences. So for the above case (4), its inverse mapping $[2^n; 2]^{-1}$ is of the type $[2; 2^n]$ or, more precisely, of the type $[2; 2^n | \lambda; \lambda]$ for each limit ordinal λ . It is not here the place to develop the theory of such functions, but we shall indicate some simple and important cases. Thus, for example, given an ordinal α , each digit $\alpha_0 < \alpha$ can be dyadically represented by the characteristic function of $I(\alpha_0)$ relative to $I(\alpha)$; for that $[\alpha; 2]$ -function we have the following definition of $[\alpha; 2]$:

Definition 5.2. $\gamma([\alpha; 2]\alpha_0) = \alpha$, $([\alpha; 2]\alpha_0)_\xi = 1$ or 0 according as $\xi < \alpha_0$ or $\alpha_0 \leq \xi < \alpha$; α_0 denotes any ordinal $< \alpha$; for any sequence s of digits, let

$$[\alpha; 2]s = \bigoplus_{\xi < \gamma s} [\alpha; 2]s_\xi.$$

Thus we have a definite $[\alpha; 2]$ -function⁵ which maps isomorphically the natural order of $\bigcup_{\xi < \omega_\sigma} \alpha(\xi)$ into that of $\bigcup_{\xi} 2(\xi)(\xi < \omega_\sigma)$ for each $2 \leq \alpha < \omega_\sigma$. In particular, that function maps $3(\omega_\sigma)$ into $2(\omega_\sigma)$ for each ordinal σ .

⁵There is no inconvenience in that the same symbol $[\alpha; 2]$ be used for 2 distinct digital functions (cf. Def. 5.1).

We could proceed by considering special digital functions. Despite that we are anxious to prove the following theorem of Hausdorff [1], but which apparently was not sufficiently used and which we are going to apply later.

THEOREM 5.1. *For each chain C and ordinals α, β we have*

$$(1) \quad tC(\alpha)(\beta) \equiv tC(\alpha\beta)$$

i.e. the lexicographical chains

$$(2) \quad C(\alpha)(\beta), \quad C(\alpha\beta)$$

are similar. In particular, if $x \in C(\alpha)(\beta)$, let

$$(3) \quad x = \bigoplus_{\beta_0} x_{\beta_0} = \bigoplus_{\beta_0} \bigoplus_{\alpha_0} (x_{\beta_0})_{\alpha_0}.$$

Let $I(\beta) \times I(\alpha)$ denote the lexicographically ordered set of ordered pairs (β_0, α_0) ($\beta_0 < \beta, \alpha_0 < \alpha$); putting

$$(4) \quad (x_{\beta_0})_{\alpha_0} = \bar{x}_{(\beta_0\alpha_0)}, \quad \bar{x} = \bigoplus_{(\beta_0\alpha_0)} \bar{x}_{(\beta_0\alpha_0)}$$

then the mapping

$$(5) \quad \bar{x}(x \in C(\alpha)(\beta))$$

is a similarity between the chains (2).

Remark 5.1. It is to be noted that, by definition, the product $\alpha\beta$ means the type of $I(\alpha) \times I(\beta)$ and not that of $I(\beta) \times I(\alpha)$; namely, by definition, $\alpha\beta = \sum_{\beta_0} \alpha$ and not conversely $\alpha\beta = \sum_{\alpha_0} \beta$, although there are great practical reasons for the last definition. E.g. in high schools everybody says $2a = a + a$ and not $2a = 2 + 2 + \dots + 2$ (a times).

Proof. of T. 5.1. It is obvious that $\bar{x} \in C(\alpha\beta)$; clearly \bar{x} exhausts $C(\alpha\beta)$. It remains to prove the isomorphic character of that mapping. Let $x, y \in C(\alpha)(\beta)$ and $x < y$; thus $x_i < y_i$ where $i = i(x, y)$ is the first number $< \beta$ for which x, y differ; in particular, $x_\nu = y_\nu$ ($\nu < i$). Now, x_ν, y_ν are α -sequences and consequently $(x_\nu)_{\alpha_0} = (y_\nu)_{\alpha_0}$ i.e. $\bar{x}_{(\nu\alpha_0)} = \bar{y}_{(\nu\alpha_0)}$; that means

$$(5) \quad \bar{x}_{(\alpha\nu)_0} = \bar{y}_{(\alpha\nu)_0}$$

where, as usual $(\alpha\nu)_0$ runs over the ordinals $< \alpha\nu$.

Now let $\varepsilon = i(x_i, y_i)$; as $x_i < y_i$ that means

$$(x_i)_{\varepsilon_0} = (y_i)_{\varepsilon_0}, \quad (x_i)_{\varepsilon} < (y_i)_{\varepsilon}.$$

In other words

$$(6) \quad \bar{x}_{i\varepsilon_0} = \bar{y}_{i\varepsilon_0}, \quad \bar{x}_{i\varepsilon} < \bar{y}_{i\varepsilon}.$$

Putting $e = i(\bar{x}, \bar{y})$, it follows from (5), (6) that $e = \alpha i + \varepsilon$, $\bar{x}_e < \bar{y}_e$ thus $\bar{x} < \bar{y}$ in $C(\alpha\beta)$. Q.E.D.

The relation (1) is due to Hausdorff ([1], [2, p. 127], [3, p. 150]; cf. also Birkhoff [1, p. 290]).

5.3. Here is a very interesting theorem:

THEOREM 5.2. *Let α, ν be any ordinal numbers; let $\nu(\omega_\alpha)$ denote the lexicographically ordered set of all mappings of $I(\omega_\alpha)$ into $I(\nu)$; then*

(1) $2(\omega_\alpha)$ is similar to $(n+1)(\omega_\alpha)$ for each $2 \leq n < \omega_0$ i.e.

$$(2) \quad t2(\omega_\alpha) \equiv t(n+1)(\omega_\alpha) \quad (2 \leq n < \omega_0)$$

and

$$(3) \quad t2(\omega_\alpha) = t\nu(\omega_\alpha) \quad (2 \leq \nu \leq \omega_\alpha)$$

$$(4) \quad t\nu(\omega_\alpha) = t\nu'(\omega_\alpha) \quad (2 \leq \nu, \nu' \leq \omega_\alpha).^6$$

The theorem 5.2 (1) is true for $\alpha = 0$ because the sets $2(\omega_0)$, $3(\omega_0)$ are similar to the chain $C = \sum_{0 \leq x \leq 1} f(x)$, where for each rational $x \in (0, 1)$, $tf(x) = 2$, and for each other $x \in [0, 1]$, $tf = 1$. Now, the sets $2(\omega_0)$, $n(\omega_0)$ being similar, the same holds for the sets $(2(\omega_0))(\omega_\alpha)$, $(n(\omega_0))(\omega_\alpha)$, which, in virtue of T. 5.1, means that

$$(*) \quad t2(\omega_0\omega_\alpha) \equiv tn(\omega_0\omega_\alpha).$$

In particular, if $\alpha > 0$ then $\omega_0\omega_\alpha = \omega_\alpha$ and (*) yields (1). The same reasoning applies to prove the theorem 5.2 (2) as well as the

⁶It is to be remarked that in (3) the sign = means \leq and \geq and generally it is not replaceable by \equiv .

LEMMA 5.2. *Let α be any ordinal number; then*

- (1) $tn(\omega\alpha) \equiv tn^{n'}(\omega\alpha) \quad (1 \leq n' < \omega, 2 \leq n < \omega);$
- (2) $tn(\omega^\omega \cdot \alpha) \equiv tn^{n'}(\omega^\omega \cdot \alpha) \quad (2 \leq n, n' < \omega).$

In fact, $1 \cdot \omega \cdot \alpha = n'\omega\alpha$ thus $tn(1 \cdot \omega\alpha) \equiv tn(n'\omega\alpha) \equiv$ (in virtue of T. 5.1) $\equiv tn(n')(\omega\alpha) \equiv tn^{n'}(\omega\alpha)$ because $n(n') = n^{n'}$ for finite n' ; that proves the L. 5.2 (1).

As to L. 5.2 (2), firstly, as $tn(\omega) \equiv tn'(\omega)$ thus

$$tn(\omega)(\omega^\omega \cdot \alpha) \equiv tn'(\omega)(\omega^\omega \cdot \alpha)$$

and by T. 5.1 $tn(\omega^\omega \cdot \alpha) \equiv tn'(\omega \cdot \omega^\omega \cdot \alpha)$ what with

$$\omega\omega^\omega \cdot \alpha = \omega^{1+\omega} \cdot \alpha = \omega^\omega \cdot \alpha$$

implies the L. 5.2 (2).

Proof of T. 5.2 (3). Digital function $|\alpha; 2|$.

Definition 5.3. For any ordinal number α , let $|\alpha; 2| = 0 \dot{+} \{1\}_\alpha$ i.e. $|\alpha; 2|$ is the $(1 + \alpha)$ -sequence so that $|\alpha; 2|\beta = 0$ or 1 , according as $\beta = 0$ or $0 < \beta < 1 + \alpha$. In particular $|0; 2| = 0$. For each sequence s of ordinals let $|v; 2| = v$ and for $s \neq v$:

$$|s; 2| = \dot{+}_{x \in s} |x; 2|$$

LEMMA 5.3.

- (1) $\gamma|s; 2| = \sum_{\gamma_0} (1 + \gamma s_{\gamma_0}), \quad (\gamma_0 < \gamma s \equiv \text{the length of } s).$

Given any ordinal sequences x, y ; let $e = e(x, y)$ (cf. Def. 3.3) and

- (2) $e_0 = e_0(x, y) \equiv |x_e - y_e|;$

then

- (3) $\bar{e} \equiv e(|x; 2|, |y; 2|) = \sum_{\alpha < e} (1 + x_\alpha) + e_0(x, y),$

- (4) $e_0(|x; 2|, |y; 2|) = 1$

- (5) $x_e \geq y_e \Leftrightarrow |x; 2|_{\bar{e}} \geq |y; 2|_{\bar{e}} \quad \text{respectively.}$

At first, (1) is obvious because $\gamma|\alpha; 2| = 1 + \alpha$ for each ordinal α . As to (3), from $x_\alpha = y_\alpha$ ($\alpha < e$) it follows

$$\dot{\pm}_\alpha |x_\alpha; 2| = \dot{\pm}_\alpha |y_\alpha; 2| \quad (\alpha < e(x, y))$$

what with

$$|x_e; 2|_\beta = |y_e; 2|_\beta \quad (\beta < e_0(x, y))$$

implies

$$|x; 2|_\xi = |y; 2|_\xi \quad (\xi < \bar{e}).$$

On the other hand

$$|z; 2|_{\bar{e}} = |z_e; 2|_{e_0} \quad (z \in \{x, y\})$$

which proves (4) and (5). So the lemma 5.3 is proved.

Now, the proof of T. 5.2 (3) is easy. Since, obviously for $2 \leq \nu \leq \omega_\alpha$ we have $2(\omega_\alpha) \subseteq \nu(\omega_\alpha)$ the relation T. 3 (3)₁ \subseteq T. 3 (3)₂ is immediate. As to the dual relation (3)₂ \subseteq (3)₁, it is sufficient to consider the above mapping

$$|s; 2| \quad (s \in \nu(\omega_\alpha))$$

which embeds isomorphically the chain $\nu(\omega_\alpha)$ into the dyadic chain $2(\omega_\alpha)$ (cf. L. 5.3 (5)). Finally, the T. 5.2 (4) follows from T. 5.2 (3). Q.E.D.

5.4. Remark on the cardinal relation

$$(1) \quad 2^{\aleph_\alpha} = \nu^{\aleph_\alpha} \quad (2 \leq \nu \leq \aleph_\alpha).$$

The previous function $|s; 2|$ ($s \in \nu(\omega_\alpha)$) enables us in particular to map biuniquely the set $\nu(\omega_\alpha)$ of ν^{\aleph_α} elements into the set $2(\omega_\alpha)$ of 2^{\aleph_α} elements, which is a very simple proof of the classical cardinal relation

$$(2) \quad n^{\aleph_\alpha} \leq 2^{\aleph_\alpha}$$

for each cardinal

$$(3) \quad 2 \leq n \leq \aleph_\alpha$$

(its dual is obvious; hence the announced equality).

§ 6. Trees. Partitions. Number systems.

1. The question arises to find all solutions of the equation

$$(1) \quad t\beta(\omega_\alpha) \equiv t2(\omega_\alpha).$$

We have seen that (1) is satisfied for

$$(2) \quad \beta = 2, 3, \dots, n, \dots, 2(\omega_0) \text{ and } 2(\xi) \text{ for each } 2 \leq \xi < \omega_\alpha$$

because

$$(3) \quad t2(\xi)(\omega_\alpha) \equiv t2(\xi\omega_\alpha) \equiv t2(\omega_\alpha).$$

Now, $2(\xi)$ is exactly the set of initial portions of length ξ of elements of $2(\omega_\alpha)$. It is very useful to consider, for any sequence s the system

$$(4) \quad Ts$$

of all initial portions of s ordered by the relation \subseteq where

$$(5) \quad x \subseteq y$$

means that x is an initial portion of y . (v. Def. 3.4). In particular $x \in Ts$.

For a set S of sequences we define

$$(6) \quad TS$$

as the union of all the sets

$$Ts \quad (s \in S).$$

The ordered set TS is a *tree (ramified table)* i.e. for each element of this set, the set of its predecessors is well-ordered. Consequently, for any ordered set S we have the tree

$$(7) \quad TS(\omega_\alpha)$$

In particular, the tree

$$(8) \quad T2(\omega_\alpha)$$

is defined; for each $1 \leq \xi < \omega_\alpha$ the set $2(\xi)$ constitutes the ξ^{th} row $R_\xi T$ of this tree T (cf. Kurepa [2, §9.3 p. 92-93]).

Such rows are special *maximal antichains of T* .⁷

Here are some maximal antichains of T :

- 0, 1 (or replacing 1 by 10, 11)
 (9) 0, 10, 11
 00, 01, 100, 101, 110, 111 (bipartition of 0, 4-partition of 1).

The antichain

$$0, 10, 110, 1110, \dots \{1\}_\xi 0, \dots (\xi < \omega_\alpha)$$

is not maximal, because the element $\{1\}_{\omega_\alpha}$ is not comparable with an element of this antichain.

THEOREM 6.1. *Let A be a maximal antichain of the tree*

$$T2(\omega_\alpha), \text{ such that } \gamma x < \omega_\alpha \quad (x \in A).$$

and A^l the lexicographical ordering of A ; we have

$$(10) \quad tA^l(\omega_\alpha) \equiv t2(\omega_\alpha)$$

i.e. the elements of such a maximal antichain A as well as the elements of the corresponding chain A^l or those of any other chain similar with A^l are able to serve as digits for representation of the chain $2(\omega_\alpha)$.

As a matter of fact, let $s \in A^l(\omega_\alpha)$; consequently $s = \{s_\xi\}_{\xi < \omega_\alpha}$; let

$$(11) \quad \psi s = \bigoplus_\xi s_\xi (\xi < \omega_\alpha).$$

Since $s_\xi \in T$, one has $\psi s \in 2(\omega_\alpha)$.

LEMMA 6.1. *The mapping $s \rightarrow \psi s$ is a similarity between the chains $A^l(\omega_\alpha)$, $2(\omega_\alpha)$.*

First of all

$$(12) \quad s < s' \text{ in } A^l(\omega_\alpha) \Rightarrow \psi s < \psi s' \text{ in } 2(\omega_\alpha).$$

The proof is analogue to the proof of the Lemma 5.3.

⁷Any ordered set having no comparable elements is called an *antichain*.

Secondly, each element $x \in 2(\omega_\alpha)$ is a ψs .

Let A_0x denote the unique element of the antichain A such that

$$(13) \quad A_0x \subseteq x.$$

By induction, let us define the sequence

$$(14) \quad Ax = A_0x, A_1x, \dots$$

in this way:

$$(15) \quad \begin{aligned} A_0X, A_1X &= A_0(A_0x, -)_x, \quad A_2x = A_0(A_0x \dot{+} A_1x, -)_x, \dots \\ A_\xi x &= A_0(\dot{+} A_{\xi_0}x, -)_x, \dots (\xi < \omega_\alpha). \end{aligned}$$

The sequence Ax is an element of $A^l(\omega_\alpha)$ and obviously

$$(16) \quad \psi Ax = x. \quad \text{Q.E.D.}$$

2. Let ν be any ordinal such that $1 < \nu < \omega_\alpha$.

The elements

$$(17) \quad 0, 10, 110, 1110, \dots,$$

constitute a maximal antichain A ; the lexicographical ordering A^l of A yields the ordinal number $\nu + 1$. For this antichain A , the theorem 6.1 implies this

THEOREM 6.2.⁸ *For each ordinal ν we have*

$$(1) \quad t(\nu + 1)(\omega_\alpha) \equiv t2(\omega_\alpha) \quad (1 \leq \nu < \omega_\alpha).$$

More explicitly: Let

$$[\nu + 1; 2|\nu_0 = \{1\}_{\nu_0} \dot{+} 0, \quad [\nu + 1, 2|0 = 0, \quad (2)$$

$$[\nu + 1; 2|\nu = \{1\}_\nu \quad (3)$$

⁸The theorem 6.2 was found also by P. Papić in February 1956. The paper (without §6) was written and sent to Germany in the Summer 1953. The results of §6 were found also in 1953, and partly announced at the colloquium of the Society of mathematicians and physicists of Croatia (Zagreb, 17.03.1954).

and

$$(4) \quad [\nu + 1; 2|s = \bigoplus_{\xi} s_{\xi} \quad (\xi < \omega_{\alpha}, s \in (\nu + 1)(\omega_{\alpha}));$$

then the mapping

$$(5) \quad s \rightarrow [\nu + 1; 2|s \quad (s \in (\nu + 1)\omega_{\alpha})$$

is a similarity between the chains $(\nu + 1)(\omega_{\alpha})$, $2(\omega_{\alpha})$.

3. Here is the reciprocal of the theorem 6.1:

THEOREM 6.3. *For each chain C the relation*

$$(1) \quad tC(\omega_{\alpha}) \equiv t2(\omega_{\alpha})$$

implies

$$(2) \quad tC \equiv tA^l$$

for a maximal antichain A of $T2(\omega_{\alpha})$ such that $\gamma x < \omega_{\alpha}$ for each $x \in A$.

Let f be a similarity of $C(\omega_{\alpha})$ onto $2(\omega_{\alpha})$. The C -partition of $C(\omega_{\alpha})$ into sets of the form

$$(3) \quad (x) \bigoplus C(\omega_{\alpha}) \quad (x \in C)$$

implies in $2(\omega_{\alpha})$ the fC -partition

$$(4) \quad f(x) \bigoplus f(C(\omega_{\alpha})) \quad (x \in C)$$

or

$$(5) \quad (y) \bigoplus 2(\omega_{\alpha}) \quad (y \in fC).$$

Now, fC is a maximal antichain of T , because the sets (5) are pairwise disjoint and exhaust the set $2(\omega_{\alpha})$ and obviously $\gamma y < \omega_{\alpha}$.

If the relation (1) is interpreted as a digital representation of the set $2(\omega_{\alpha})$ or $PI(\omega_{\alpha})$ in the number system C -the elements of C playing the role of digits - we have proved this far-reaching

THEOREM 6.4. *In order that the ordered chain $2(\omega_{\alpha})$ be representable as the set of all the ω_{α} -sequences of a chain C , it is necessary and sufficient that there exists a maximal antichain A of the tree $T2(\omega_{\alpha})$ such that $\gamma x < \omega_{\alpha}$*

($x \in A$) and that the lexicographical ordering A^l of A be similar with C . Or in this wording: in order that $t2(\omega_\alpha) \equiv tC(\omega_\alpha)$ it is necessary and sufficient that there exists a C -partition of $2(\omega_\alpha)$ into sets of type $2(\omega_\alpha)$ each and hence

$$(6) \quad t2(\omega_\alpha) \equiv t2(\omega_\alpha) \cdot tC.$$

In a similar way one proves

THEOREM 6.5. *Let a be any ordinal number and L any ordered chain; in order that for an ordered chain C one has*

$$(7) \quad tC(\omega_\alpha) \equiv tL(\omega_\alpha)$$

it is necessary and sufficient that the table $TL(\omega_\alpha)$ contains a maximal chain A of elements of length $< \omega_\alpha$ such that its lexicographical ordering A^l be similar with C .

The extensions are to appear else.

§ 7. Numbers $k_0S, k_{\bar{0}}S$, (S any ordered set).

Cardinal number function K_1 .

Definition 7.1. OS or $O(S; \leq)$ denotes the system of all the *maximal chains* $\subseteq (S; \leq)$.

Definition 7.2. $\bar{O}S = \bar{O}(S; \leq)$ denotes the system of all the *maximal antichains* $\subseteq (S; \leq)$.

Definition 7.3. $k_0S = \text{Sup}_x kx$ ($x \in OS$); in particular $k_0P(0) = 1$.

Definition 7.4. $k_{\bar{0}}S = \text{Sup}_x kx$ ($x \in \bar{O}S$); in particular $k_{\bar{0}}P(0) = 1$.

Definition 7.5. For any cardinal number $m > 0$ let

$$K_1(m) = \text{Sup}_C kC, \quad (k_1C \leq m);$$

in other words: $K_1(m)$ is the supremum of cardinals of chains each of which is m -separable.

Or thus:

$$K_1(m) = \text{Sup}_C kC, \quad (C \in k_1^{-1}(m))$$

$k_1^{-1}(m)$ being the class of chains C such that $k_1C = m$. By definition, let $K_1(0) = 1$.

Definition 7.6. For a system F of sets let

$$k_D F = k_d F = \text{Sup } kX, \quad (X \in DF),$$

DF being the system of all *disjointed* families of sets belonging to F .

LEMMA 7.1. For each chain C and each antichain \bar{C} one has

$$k_0 C = kC, \quad k_0 \bar{C} = k\bar{C}.$$

THEOREM 7.1. For each cardinal m

$$k_0 P(m) = \binom{m}{[m/2]}, \quad \text{if } m \text{ is finite}; \quad (1)$$

$$k_0 P(m) = 2^m, \quad \text{if } m \text{ is not finite}. \quad (2)$$

COROLLARY 7.1. In order that $k_0 P(m) < 2^m$, it is necessary and sufficient that m is finite.⁹

The proof of (1) is given elsewhere; if $0 < m < \aleph_0$, then the system of all $[m/2]$ -point sets $\subseteq P(m)$ is an antichain having the $k_0 P(m)$ elements.

As to (2), let M be a set having m points; m being infinite, $m^2 = m$;¹⁰ let then F be a disjointed system of sets $\subseteq M$ so that $kF = kX = m$ ($X \in F$). Now, let S be the system of all sets $Y \subseteq M$, such that Y has a single point in each $X \in F$. Of course, $kS = m^m = kP(m)$; on the other hand, obviously, the elements of S are pairwise inclusionally incomparable. Since by definition $k_0 0 = 1$, the proof of T. 7.1 is finished.

LEMMA 7.2. $k_D P(m) = m$ for each infinite cardinal m (cf. Def. 7.6).

At first, there exists a disjointed system $S \subseteq P(m)$ of power m ; such is the system of all the one-point-sets $\subseteq M$ where $kM = m$; secondly, each disjointed system $\subseteq P(m)$ is of power $\leq m$; otherwise we should have a disjointed system F of non-void sets $\subseteq M$, so that $kF > kM$, which is a nonsense (at least on the basis of choice axiom).

⁹0 is considered as non finite; consequently, the cardinals are either 0, or finite, or infinite.

¹⁰Consequently, we use a proposition equivalent to the choice axiom.

§ 8. On the function K_1m , (m any cardinal).

From the definition of $K_1(m)$ (cf. Def. 7.5.) as the supremum of kC with $k_1C \leq m$ it follows that

LEMMA 8.1. $K_1(k_1C) \geq kC$ for each chain C .

THEOREM 8.1. (1) For each finite cardinal m

$$(1) \quad K_1(m) = m, \quad k_0P(m) = m + 1, \quad K_1(m) < k_0P(m).$$

(2) For each infinite cardinal m ,

$$(2) \quad K_1(m) = k_0P(m).$$

Proof. If m is finite, then the sets $I(0), I(1), \dots, I(m)$ form a chain in $P(m)$, which proves the T. 8.1 (1). As to the T. 8.1 (2), at first $K_10 = 1 = k_0P(0)$; secondly, for each transfinite m , each chain $C \subseteq P(m)$ satisfies $k_1C \leq m$ (cf. L. 2.4). On the other hand (cf. L. 2.7) for each C satisfying $K_1C = m$ there exists a chain $C_0 \subseteq P(m)$, so that $kC = kC_0$; consequently, in the definition of $K_1(m)$ we can require still more that $C \subseteq P(m)$, which means exactly that the T. 8.1 (2) is proved.

COROLLARY 8.1. In order that a cardinal m be finite, it is necessary and sufficient that $K_1(m) < k_0P(m)$.

Whereas for finite m the evaluation of the numbers $K_1(m), k_0P(m)$ is easy, for transfinite m , on the contrary, the question is connected with continuum hypothesis, e.g. with the problem of evaluation of the power a^b (a, b cardinals).

THEOREM 8.2. For each ordinal α :

$$(1) \quad \aleph_\alpha < K_1(\aleph_\alpha) \leq 2^{\aleph_\alpha} \leq K_1\left(2^{\aleph_\alpha}\right),$$

$$\text{where } 2^{\aleph_\alpha} = \sum_a 2^a \quad (a < \aleph_\alpha).$$

$$(2) \quad \aleph_\alpha^{\aleph_0} \leq K_1(\aleph_\alpha).$$

$$(3) \quad 2^{\aleph_{\alpha+1}} \leq K_1(2^{\aleph_\alpha}).$$

$$(4) \quad K_1(\aleph_\alpha) = 2^{\aleph_\alpha} \Leftrightarrow 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha.$$

$$(5) \quad K_1(\aleph_\alpha) = 2^{\aleph_\alpha} \Leftrightarrow 2^{\aleph_\alpha} \leq \aleph_\alpha$$

$$(6) \quad 2^{\aleph_\sigma} = \aleph_{\sigma+1} (\sigma < \alpha) \Rightarrow K_1(\aleph_\alpha) = 2^{\aleph_\alpha}; \quad \text{in particular}$$

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \Rightarrow K_1(2^{\aleph_\alpha}) = 2^{\aleph_\alpha}.$$

The equality

$$(7) \quad K_1(\aleph_\alpha) = 2^{\aleph_\alpha}$$

holds for $\alpha = 0$, and for each strongly inaccessible \aleph_α i.e. for each \aleph_α satisfying $2^{\aleph_\sigma} < \aleph_\alpha$ ($\sigma < \alpha$).

$$(8) \quad K_1\left(2^{\aleph_\alpha}\right) \geq 2^{\aleph_\alpha}.$$

The theorems 8.1 (2) and 8.2 yields

THEOREM 8.3. *In the wording of T. 8.2 it is legitimate to read k_0P instead of K_1 .*

Proof. (1) At first, let us prove that $\aleph_\alpha < K_1(\aleph_\alpha)$ (v. Sierpinski [1]). Let $p(\alpha)$ be the first ordinal such that $2^{\aleph_{p(\alpha)}} > \aleph_\alpha$; the $p(\alpha) \leq \alpha$, because $2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$. Consequently $2^{k\sigma} \leq \aleph_\alpha$ ($\sigma < p(\alpha)$); therefore σ running over $I(p\alpha)$:

$$2^{\aleph_{p(\alpha)}} \equiv \sum_{\sigma < p(\alpha)} 2^{k\sigma} \leq \sum_{\sigma} \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \aleph_{p(\alpha)} = \aleph_\alpha.$$

This means (cf. L. 3.6) that $kH_{p(\alpha)}(2) = \aleph_\alpha$. Now (cf. L. 3.2), $H_{p(\alpha)}(2)$ is everywhere dense on the chain $2(\omega_{p(\alpha)})$ whose cardinal is $2^{\aleph_{p(\alpha)}}$ thus $> \aleph_\alpha$. Hence

$$k_1 2(\omega_{p(\alpha)}) = kH_{p(\alpha)}(2) = 2^{\aleph_{p(\alpha)}} \leq \aleph_\alpha \quad (\text{cf. L. 3.7}).$$

If here the sign \leq means $=$, all is proved. However, let $C = 2(\omega_{p(\alpha)}) \dot{+} I(\omega_\alpha)$; then $k_1 C = \aleph_\alpha$, and $kC = 2^{\aleph_{p(\alpha)}} + \aleph_\alpha > \aleph_\alpha$. So the first step in T. 8.1 (1) is accomplished. Again, the relation $K_1(\aleph_\alpha) \leq 2^{\aleph_\alpha}$ is contained in the relation $kC \leq 2^{k_1 C}$ (cf. L. 2.2). The last part of T. 8.2 (1) is obtainable from L. 8.1 for the case $C = 2(\omega_\alpha)$ as a consequence of $k_2 2(\omega_\alpha) = 2^{\aleph_\alpha}$ (cf. Def. 1.4) and $k_1(2(\omega_\alpha)) = 2^{\aleph_\alpha}$ (cf. L. 3.7).

As to T. 8.2 (2), let us consider the chain $\omega_\alpha(\omega_0)$; then $k\omega_\alpha(\omega_0) = \aleph_\alpha^{\aleph_0}$, $k_1(\omega_\alpha(\alpha_0)) = \sum_{n < \omega_0} \aleph_\alpha^n = \aleph_\alpha$; the last equality is a consequence of the fact that the chain $\cup_n \omega_\alpha(n)$ is dense everywhere on $\omega_\alpha(\omega_0)$.

As to T. 8.2 (3), it suffices to construct a chain C satisfying

$$(*) \quad k_1 C \leq 2^{\aleph_\alpha}, \quad kC \geq 2^{\aleph_{\alpha+1}}.$$

Such is the chain $2(\omega_{\alpha+1})$ on which the chain $H \equiv H_{\omega_{\alpha+1}}(2)$ is dense.

Now, $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$. Therefore for each $\sigma < \omega_{\alpha+1}$, because $k\sigma \leq \aleph_\alpha$:
 $\aleph_\alpha^{k\sigma} \leq (2^{\aleph_\alpha})^{k\sigma} = 2^{\aleph_\alpha \cdot k\sigma} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Thus, σ running over $I(\omega_{\alpha+1})$:

$$kH_{\omega_{\alpha+1}}(2) = \sum_{\sigma} k(2(\sigma)) \leq \sum_{\sigma} \aleph_{\alpha+1}^{k\sigma} \leq \sum_{\sigma} 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} 2^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

Therefore $kH \leq 2^{\aleph_\alpha}$. Now $k2(\omega_{\alpha+1}) = 2^{\aleph_{\alpha+1}}$, $k_1(2(\omega_{\alpha+1})) = kH$ (cf. L. 3.7). The chain H being everywhere dense on $2(\omega_{\alpha+1})$, the chain $2(\omega_{\alpha+1})$ satisfies (*), which proves the T. 8.2 (3).

Obviously (1) \Rightarrow (3). Also (4) follows from (3) and from the obvious equivalence $2^{\aleph_\sigma} \leq \aleph_\alpha (\sigma < \alpha) \Leftrightarrow 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha$.

The implications (5) and (6) are included in (4). The theorem 8.3 (3), for the case $\alpha = 0$ implies the following corollary of W. Seirpinski [4]:

COROLLARY 8.2. *There is a monotonic family of 2^{\aleph_1} linear sets.*

By analogy, the theorem 8.3 (7) implies the

COROLLARY 8.3. *If $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, there is a monotonic family of $2^{2^{\aleph_0}}$ linear sets (v. Sierpinski [3, p. 120]).*

The implications in T. 8.2 (7) and T. 8.3 (7) show how the evaluation of $K_1(m)$, $k_0P(m)$ is, for transfinite m , connected with the problem of the evaluation of 2^m .

Now, the proposition

$$G \ m^+ = 2^m \quad \text{for each transfinite cardinal } m$$

implies in particular $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ as well as the choice axiom (cf. Sierpinski [5]). Consequently, according to T. 8.2 (7) and T. 8.3 (7) we have

THEOREM 8.4. $G \Rightarrow K_1(m) = 2^m$ for each transfinite cardinal m .

THEOREM 8.5. $G \Rightarrow k_0P(m) = 2^m$ for each transfinite cardinal m .

§ 9. Cogredieny of orderings.

The elementary notion of permutation has two meanings: first an arrangement, an ordering of a set, and then that of a mapping of the same set onto itself. So e.g. for the set $I(2)$ we have the following total orderings (permutation) $1 < 2$, $2 < 1$ and the antichain $1 \parallel 2$.

The chains $1 < 2$, $2 < 1$ are similar but not *cogrediently*, *strongly similar* in the sense that the identity should be an isomorphism. Therefore

we are going to define a *strong similarity or cogredieny* between the orderings of a set in order to have the analog of the elementary notion of the permutation as an ordering.

Definition 9.1. Each one-to-one mapping of a set onto itself is called a *permutation* of that set. The system of all permutations of a set M is denoted $M!$

Definition 9.2. Let

$$(1) \quad (S; \leq), \quad (S; \preceq)$$

be any orderings of S ; they are cogredient or strongly similar, symbolically

$$(2) \quad (S; \leq) \equiv (S; \preceq),$$

if and only if the identity mapping is an isomorphism between these orderings.

Definition 9.3. For an ordered set $(S; \leq)$ let $I(S; \leq)$ or IS denote the system of all the initial portions of $(S; \leq)$, the vacuous set v included.

LEMMA 9.1. *The relations $I(S; \leq) = I(S; \preceq)$ and $(S; \leq) \equiv (S; \preceq)$ are equivalent.*

LEMMA 9.2. *If two orderings of a set are strongly similar, they are similar. The converse is not necessarily true.*

§ 10. Maximal chains in partitive sets. Total orderings. Choice axiom.

As a synthesis of investigations of many authors (chronologically: Cantor, Du Bois-Reymond,¹¹ Bernstein, Hessenberg, Hartogs, Janiszewski, Fraenkel, Kuratowski, Mostowski, Denjoy) we have the following theorem showing of what importance are the investigations of *maximality* already in the case of very special ordered sets.

THEOREM 10.1. *Let M be any set and, respectively,*

$$(1) \quad O_o[M], \quad O_c[M]$$

¹¹Thus the problem of *infinitary pantachies* of Du Bois-Reymond [1, §69] is connected to the development of the notion of general ordered sets and its maximal chains (cf. Hausdorff [2, p. 105-159]).

the system of all orderings and of all total orderings of M respectively, the equality relation in $O_i[M]$ ($i = o, c$) being that of the cogredency (strong similarity); by definition one puts $O_i[kM] = kO_i[M]$ for $i = c, o$.

1. If $(M; \leq) \in O_c[M]$, then the system

$$(2) \quad I(M; \leq)$$

of all initial portions of $(M \leq)$ - the void portion included - is a maximal chain in $P(M)$; the mapping

$$(3) \quad I_x \quad (x \in O_c[M])$$

is one-to-one of $O_c[M]$ onto $OP(M)$; the converse of (3) is defined in the following way: If $C \in OP(M)$ and if in M one defines $\leq (c)$ so that for $x, y \in M$ the binary relation $x \leq (c)y$ or $y \geq (c)x$ means $x = y$ or that there is

$$(4) \quad X \in C \quad \text{satisfying} \quad x \in X, \quad y \notin X$$

then

$$(5) \quad (M; \leq (c))$$

is a chain so that

$$(6) \quad I(M; \leq (c)) = C.$$

2. $kO_c[M] = kOP(M)$.

3. For $i \in \{c, o\}$ we have $kT_i(m) \leq kO_i[m] \leq kT_i(m)$, $m! \leq 2^{mm}$, m^m for each cardinal m ; $T_i(m)$ means $O_i[m]$ with the similarity as equality relation (as to $T_c(m)$ cf. Cantor [1, p. 298]).

4. $kOP(\aleph_\alpha) = 2^{\aleph_\alpha} = kT_c(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha!$

5. $kOP(C) = k(C!)$ for each well-ordered chain; in particular $kOP(m) = m!$ ($m < \aleph_0$ and for each aleph m).

6. $Z \Leftrightarrow O(m; \leq) \neq 0$ for each cardinal m and each ordering $(m; \leq)$.

7. $Z \Leftrightarrow (OP(m) \neq 0) \wedge (\bar{O}(m; \leq) \neq 0)$ for each cardinal m and each ordering $(m; \leq)$.

8. $\sim((m)OP(m) \neq 0 \Rightarrow Z)$.

The proof of T. 10.1 is very long.

As to the proof of T. 10.1 (1) see Kuratowski [1], where other references are given; (v. also Kurepa [1, 33-43]). T. 10.1 (2) is obviously a consequence of T. 10.1 (1).

T. 10.1 (3). The first relation in T. 10.1 (3) is obvious. Now, by the relation of similarity we have a disjointed partition of $O[M]$ into classes of similar sets. Hence, for the proof of the first part of T. 10.1 (3) it suffices to prove the

LEMMA 10.1. *All orderings of M similar to a given ordering $(M; \leq)$ of M are representable in the form*

$$(1) \quad (M; \leq (f)) \quad (f \in M!)$$

the relation $\leq (f)$ being defined so that, for $x, y \in M$, $f(x) \geq (f) f(y)$ in $(M; \leq (f))$.

To orderings of M which are not cogredient are associated different elements of $M!$ ¹²

Firstly, for each $f \in M!$ it is obvious that $(M; \leq (f))$ is an ordered set similar to $(M; \leq)$ the mapping f being a similarity and even a strong similarity between $(M; \leq)$ and $(M; \leq (f))$. Secondly, each ordering $(M; \preceq)$ similar to $(M; \leq)$ is strongly similar to $(M; \leq (f))$ for some $f \in M!$ In fact, s being any similarity mapping of $(M; \leq)$ onto $(M; \preceq)$ we have $(M; \preceq) \equiv (M; \leq (s))$, because, on the one hand, s being a similarity

$$(2) \quad x \leq y \Leftrightarrow s(x) \preceq s(y)$$

and on the other hand, by definition of $\leq (s)$

$$(3) \quad x \leq y \Leftrightarrow s(x) \leq (s) s(y).$$

Now, $s(x) \preceq s(y)$ (by (2)) $\Rightarrow x \leq y$ (and by (3)) $\Rightarrow s(x) \leq (s) s(y)$. And conversely. Thus

$$(4) \quad s(x) \preceq s(y) \Leftrightarrow s(x) \leq (s) s(y) \quad (x, y \in M)$$

which means exactly that \preceq and $\leq (s)$ are cogredient orderings of M , s being a one-to-one mapping of M onto itself, so that instead of $s(x)$, $s(y)$ in (4) we might write e.g. x' , y' .

¹²For the case of total orderings of $I(\omega)$ the L. 10.1 is due to Denjoy [1, p. 114].

As to the second relation in T. 10.1 (3), we have firstly $kT_i(m) \leq 2^{mm}$ (cf. Hausdorff [3, p. 97]) and secondly $m! \leq m^m$ because $(kM)^{(kM)} = k(M(M))$ and obviously $M! \subseteq M(M)$ (cf. Def. 1.2).

T. 10.1 (4) is a consequence of the following lemma.

LEMMA 10.2.

$$kT_c(N_\alpha) = 2^{N_\alpha}; \tag{1}$$

$$N_\alpha! = 2^{N_\alpha}. \tag{2}$$

First of all $kT_c(N_\alpha) \leq 2^{N_\alpha N_\alpha} = 2^{N_\alpha}$; secondly, the dual relation holds also (cf. Bernstein [1, p. 40]): it is sufficient to associate to each ω_α -sequence f of digits 0,1 the chain of type

$$(1) \quad \sum_{\nu < \omega_\alpha} (f_\nu + \omega_0^* + \omega_0).$$

The cardinal of that type is obviously N_α ; therefore it belongs to $T_c(N_\alpha)$. But, for different ω_α -sequences f, g of digits 0,1, the corresponding types (1) are different. To see it, let us materialize these order types. Let us consider a set E of type $\omega_0^* + \omega_0$ e.g. the ordered set of all rational integers; for each $\nu < \omega_\alpha$ let f''_ν denote the set of ordered triplets (f, ν, x) ($x \in E$) ordered lexicographically; let f'_ν denote ν or $(\nu, f, 1)$ according as $f_\nu = 0$ or 1. Let

$$[f_\nu] = f'_\nu \dot{+} f'_\nu \quad \text{and} \quad Cf = \sum_{\nu < \omega_\alpha} [f_\nu].$$

Obviously, Cf is a chain of the requested type (1) because

$$t[f_\nu] = f_\nu + \omega_0^* + \omega_0 \quad \text{for each } \nu < \omega_\alpha.$$

Now, if $tCf \equiv tCg$, then, necessarily, $f = g$. This is a consequence of the fact that each similarity maps each portion onto a portion; therefore we see that, firstly, for each $\nu < \omega_\alpha$ the portion f'_ν (or f''_ν) is mapped onto a certain g'_ν (or g''_ν) and, secondly, that necessarily $\nu = \nu'$ (or $\nu = \nu''$). In particular, $tf'_\nu = tg'_\nu$ thus $f_\nu = g_\nu$ for each $\nu < \omega_\alpha$.

*Proof of L. 10.2 (2).*¹³ It is sufficient to prove that

$$(1) \quad N_\alpha^{N_\alpha} \geq N_\alpha!$$

¹³For $\alpha = 0$, L. 10. 2 (2) is due to Bernstein [1, p. 39].

Let us remember that $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$; it means that there exists a biunique mapping f of S^2 onto $S = I(\omega_\alpha)$. Thus we are dealing with a *disjointed* partition

$$(2) \quad S = f(\nu \times S) \quad (\nu \in S),$$

where, for each ν , $\nu \times S$ means the set of all the ordered pairs (ν, s) ($s \in S$). Let φ be any biunique mapping of $f(0 \times S)$ so that

$$(3) \quad \varphi(f(0, \nu)) \in f(\nu \times S) \quad (\nu \in S).$$

So the sets

$$(4) \quad f(0 \times S), \varphi f(0 \times S)$$

are well determined subsets of S ; in their union, φ is defined; let us prolong φ onto S by the identity transformation in the complement of that union; we get a biunique mapping p_φ of S onto itself. Obviously, if $\varphi \neq \varphi'$, then $p_\varphi \neq p_{\varphi'}$. Since the cardinal of all mappings φ is $\aleph_\alpha^{\aleph_\alpha}$, we get $\aleph_\alpha^{\aleph_\alpha}$ permutations of the set $I(\omega_\alpha) = S$. Q.E.D.

Thus the proof of T. 10.1 (4) is finished.

T. 10.1 (5) is a consequence of T. 10.1 (4).

Proof of T. 10.1 (6). The first inclusion is well known. As to the inverse conclusion let us prove the

LEMMA 10.3. *If for each ordered set $(S; \leq)$ the relation $O(S; \leq) \neq v$ holds, then for each chain $C \subseteq (S; \leq)$ there is an element $C_0 \in O(S; \leq)$, so that $C \subseteq C_0$.*

In fact, let S_0 be the set of all the points of S , each of which is comparable to each point of C ; according to the hypothesis of L. 10.3 there is a *maximal* chain K in S_0 . Now, $K \in O(S; \leq)$. In fact, firstly,

$$(1) \quad K \supseteq C$$

because each point of S_0 is comparable to each point of C ; in fact if X is a chain in S_0 , then $X \cup C$ is also a chain in S_0 ; secondly, let us suppose $\sim (K \in OS)$; that would mean that the system F of chains $X \subseteq S$ satisfying

$$(2) \quad K \subset X \subseteq S$$

is non-vacuous. From (1), (2) it follows

$$(3) \quad C \subset X.$$

X being a chain, the relation (3) says that, by the definition of S_0 , we have $X \subseteq S_0$, and, consequently, by (2) $K \subset X \subseteq S_0$, which is incompatible with $K \in OS_0$. Accordingly, the system (2) is satisfied for no chain $C \subseteq (S; \leq)$. Q.E.D.

As to the proof that the thesis in L. 10.3 implies the choice axiom, see Birkhoff [2] p. 42.

Proof of T. 10.1 (7) (see Kurepa [6]); reminds us that the total ordering principle V is equivalent to the proposition $OP(m) \neq 0$ for each cardinal m (cf. T. 10.1 (2)).

Proof of T. 10.1 (8). It is a consequence of T. 10.1 (2) and of the theorem of Mostowski [1], according to which $\sim (V \Rightarrow Z)$. Thus the proof of theorem 10.1 is finished.

§ 11. A Problem.

In connection with T. 10.1 (7), (8) we wonder whether the analogy of T. 10.1 (8) subsists for the second factor in T. 10.1 (7) too; in other words:

Is it possible to have a model of the set theory in which the choice axiom is not fulfilled, although each ordered set $(S; \leq)$ contains a maximal subset of pairwise incomparable points?

BIBLIOGRAPHY

Bernstein F.

- [1] *Untersuchungen aus der Mengenlehre*, Dissertation, Halle a. S. 1-54 (1901).
Math. Ann. **61** (1905), 117-155.

Birkhoff G.

- [1] *Generalized arithmetic*, Duke Math. J. **9** (1942), 283-302.
[2] *Lattice Theory*, New-York, 1948, 14 + 283

Cantor G.

- [1] *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin, 1932, 7 + 486

Denjoy A.

- [1] *L'Enumeration transfinie*, Paris, 1946-1952, 24 + 614.

Du Bois-Reymond

- [1] *Funktionentheorie*, Tübingen, 1882, 14 + 292

Fraenkel A.

- [1] *Abstract Set Theory*, Amsterdam, 1953, 12 + 479

Hartogs F.

- [1] *Über das Problem der Wohlordnung*, Math. Ann. **76** (1914), 438–443.

Hausdorff F.

- [1] *Über den Potenzbegriff in der Mengenlehre*, Jahresberichte D.M.V. **13** (1904), 569–571.
[2] *Untersuchungen über Ordnungstypen*, Ber. Ges. Wiss. Leipzig **58** (1906), 106–164, **59** (1907), 84–159.
[3] *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914, 64 + 476

Hessenberg G.

- [1] *Grundbegriffe der Mengenlehre*, Göttingen, 1906. (8 + 220, Abh. Fries'schen Schule 487–706).

Kuratowski C.

- [1] *Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles*, Fund. Math. **2** (1921) 161–171.

Kurepa G.

- [1] *Sur les ensembles ordonnés*, C.R. Acad. Sci. Paris **198** (1934), p. 882. Paris **198** (1934), p. 882.
[2] *Ensembles ordonnés et ramifiés*, Thèse, Paris, 1935. Publ. Math. Univ. Belgrade **4** (1935), 1–138.
[3] *L'hypothèse de ramification*, C.R. Acad. Sci. Paris **202** (1936), 185–187.
[4] *Sur les relations d'ordre*, Acad. Sci. Zagreb Rad **201** (1938), 187–219, resp. Bull. Internat. **32** (1939), 66–76.
[5] *Ensembles linéaires et une classe de tableaux ramifiés*, (*Tableaux ramifiés de M. Aronszajn*), Publ. Math. Univ. Belgrade **6** (1937), 129–160.
[6] *Teorija skupova*, Zagreb, 1951; 12 + 444.
[7] *Sur la relation d'inclusion et l'axiome du choix de Zermelo*, Bull. Soc. Math. France **80** (1932), 225–232.

Mostowski A.

- [1] *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, Fund. Math. **32** (1939), 201–252.

Novotny M.

- [1] *Sur la représentation des ensembles ordonnés*, Fund. Math. **39** (1953), 97–102.

Sierpinski W.

- [1] *Sur un problème concernant les sous-ensembles croissants du continu*, Fund. Math. **3** (1922), 109–112.

- [2] *Sur les familles croissantes de sous-ensembles d'un ensemble dénombrable*, Enseign. Math. **30** (1931), 240–242.
- [3] *Hypothèse du continu*, Warszawa, 1934, 6 + 192.
- [4] *Exemple effectif d'une famille de 2 ensembles linéaires croissants*, Rend. Acad. Napoli **4**, 10, 1939/4.
- [5] *L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix*, Fund. Math. **34** (1947), 1–5.
- [6] *Sur une propriété des ensembles ordonnés*, Fund. Math. **36** (1949), 56–67.
- Tarski A.
- [1] *Sur les d'ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires*, Fund. Math. **16** (1930), 181–304.
- Zermelo E.
- [1] *Beweis, das jede Menge wohlgeordnet werden kann*, Math. Ann. **59** (1904), 514–516.

Accepted on February 21st, 1956, at the session of the Division of mathematical, physical and technical sciences.

GLOSSARY, NOTATIONS

(T. = theorem, L. = lemma, C. = corollary, D. = definition)

\Rightarrow ... implies

\sim ... Non.

\Leftrightarrow ... is equivalent.

! (factorial) ... D. 9.1.

R denoting a binary relation (e.g. an equality), R_1, R_2 denote the first and second parts of R respectively. In particular, if (3) denotes an equality, then $(3)_1 \Rightarrow (3)_2$ means that the first (left) part of (3) implies its second (right) part.

\subset ... D. 3.4.

\dagger ... D. 4.3.

\ddagger ... D. 3.2.

$C(1)$ = set of all unilateral limit points of C .

x^+ = immediate successor of x .

x^- = immediate predecessor of x .

$S_0 S_1$ or $S_0(S_1) \dots$ D. 1.4.

$2(\omega_\alpha) \dots$ D. 1.4.

$a^b = \sum_{x < b} a^x \dots$ D. 3.5.

$\{\alpha\}_\beta = \beta$ -sequence each term of which is α .

$(\cdot, x)_M$ resp. $(\cdot, x]_M$ is the set of all the $y \in M$ satisfying $y < x$ or $y \leq x$;

$(x, y)_M$ or $(y, x)_M$ is the set of all the points of M located between x and y .

Antichain v. Chain.

Chain (Antichain): each ordered set having no couple of distinct incomparable (comparable) points.

$\gamma \dots$ D. 3.1, D. 3.4.

C (as index) \dots T. 10.1.

cardinal ordering \dots D. 1.8.

Cogrediency \dots D. 9.2.

Characteristic function \dots D. 1.5.

$D \dots$ D. 7.6.

Digital function \dots §5.

$H_\alpha(\beta)$ is the set of all the ξ -sequences of ordinals $< \beta, \xi$ running over ordinals $< \omega_\alpha$ (cf. D. 3.6).

$i \dots$ D. 3.3.

$\iota \dots$ D. 3.4.

$I(\alpha) \dots$ D. 1.3.

$I(S; \leq) \dots$ D. 9.3.

$k \dots$ The cardinal number of (D. 1.1).

$k_1 \dots$ D. 2.1.

$K_1 \dots$ D. 7.5.

$k_2 \dots$ D. 2.2.

$k_D \dots$ D. 7.6.

$k_0 \dots$ D. 7.3.

$k_{\bar{0}} \dots$ D. 7.4.

$0 \dots$ D. 4.1.

o (as index) \dots T. 10.1.

$O, \bar{O} \dots$ D. 7.1, 7.2.

Ordered sum \dots D. 3.2.

Ordering; cardinal - D. 1.8; lexicographical - D. 3.3; natural - L. 3.1.

Ordinals as digits \dots §5.

Permutation \dots D. 9.1.

P_n (n number) \dots D. 1.10.

Preorder (operator o) ... D. 4.1.

PS ... D. 1.6.

$(PS; \subseteq)$... D. 1.7.

Separability degree ... D. 2.1.

Similarity - D. 1.9; strong - D. 9.2; weak - D. 4.1.

Sum; ordinal - D. 3.2; modulo 2: D. 4.3.

t order type of

T_c, T_0 ... T. 10.1.3.

Total order = chain

v = vacuous set

Z = Zermelo's choice axiom

ON A NEW RECIPROCITY, DISTRIBUTION AND DUALITY LAW

Introduction. One knows various operations on sets, e.g. join, intersections, limit, A -operation (Suslin), etc. In the present article we define, as an extension of operations we introduced in another paper (Kurepa [6,7]) several operations of considerable generality and importance. It turns out that the well-known *distribution law* (cf. §11) as well as the *De Morgan duality principle* (cf. §5) are very special cases of our theorems. Moreover, a new *reciprocity phenomenon* occurs (cf. §12). All depend on the interconnection between *maximal chains* and maximal antichains of ordered sets. By considering ordered sets one achieves considerable generality. By their use we get a *synthetic view* on (1) the *analytic operation*; (2) c -analytic operation (definition of complements of analytic sets); (3) the *distribution law*; (4) the duality law; and moreover, one arrives at (5) a *new reciprocity law*. In particular, in connection with the distributive law, the maximal chains and maximal antichains indicate respectively two distinct ways to reach the same result (cf. Theorems 4.2, 8.1). On the other hand, the parallel considerations of maximal chains and maximal antichains of S give rise to a new kind of interconnection of elements of $P^2 1$ (1 being any set; cf. the k -condition in §8). This in turn opens a broad way to new investigations by consideration of the elements of $P^\alpha 1$ instead of those of $P^2 1$. Our results may be interpreted in mathematical logic, too.

The results of this paper are connected to an idea we expressed in our Thesis [4, 135 n°40] (cf. Tarski [11]).

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Pacific J. Math. 7 (1957), 1125–1143

AUTHOR'S NOTE. Received September 8, 1953 and Revised form July 24, 1954. The main results of this paper were presented August 28, 1953, in Bruxelles at a Colloquium of Mathematical Logic (Bruxelles, August 18-19, 28–29, 1953).

The autor wishes to express his sincere thanks to the referee for his very attentive examination of this paper and for permissions to include here Theorems 4.4 and 10.1.

GLOSSARY AND NOTATION

Antichain; an ordered set having no couple of distinct comparable points.

Chain; an ordered set having no two distinct incomparable points.

1 or U means universal set.

γT (cf. 10.1)

Disjunctive family; a family composed of pairwise disjoint sets. ε' denotes "not ε ."[†]

j -connected (cf. 2.1)

k -condition (cf. 3.1, 8)

PS denotes the system of all subsets of S ; in particular, the void set v is an element of PS ; $P^2S = P(PS)$, $P^{\alpha+1}S = P(P^\alpha S)$, etc.

$\Omega \in \{O, O'\}$, $\bar{\Omega} \in \{\bar{O}, \bar{O}'\}$

$\cap' = \cup$, $\cup' = \cap$.

\prod denotes the combinatorial multiplication.

Ramified set; an ordered set the predecessors of each of whose points form a chain.

Ramified table or tree; an ordered set S with the property that if $x \in S$ then the set $(., x)_S$ is well ordered.

ρ being a relation, ρ_1, ρ_2, ρ_3 designates its first part, second part, third part, e.g., in the equality (2) we use $(2)_1$ to designate the first (left) part of (2); $(2)_2$ designates the second part of (2). If (2) is a binary relation for sets, then $(2)_1$ is the set on the left-hand side of (2).

$(x, .)_S$ denotes the set of all the points $y \in S$ such that $x < y$.

$(., x)_S$ denotes the set of all the points $y \in S$ such that $y < x$.

\perp denotes \cap or \cup .

v = empty set.

1. **The operator $(e, \perp.f)$.** Let $e \in P^2 1$ and $\perp \in \{\cap, \cup\}$. Let f be any mapping of 1. This means that, for each $x \in 1$, $f(x)$ is a well-determined set; of course it may happen that $f(x) = v$ (void); by f' we denote the mapping $x \rightarrow f'(x)$ which to each $x \in 1$ associates the complement $f'(x)$ of the set $f(x)$; the complement is taken in respect to any set $\supseteq f(x)$ ($x \in 1$). In the

[†] EDITORIAL NOTE: Here ε denotes the membership relation. From now on, instead of ε and ε' we use \in and \notin

case that $f(x)$ consists of one point, say $f(x) = \{a\}$, we write $f(x) = a$ as well as $f(x) = \{a\}$. Let \perp denote \cup or \cap ; let $\cup' = \cap$, $\cap' = \cup$.

We put

$$(1.1) \quad (e, \perp, f) = \perp'_{e_1 e_0} f(e_0) \quad (e_0 \in e_1 \in e).$$

In particular, we put, by convention,

$$(1.2) \quad (v, \cap, f) = v, \quad (v, \cup, f) = \text{universal set} \supseteq f(e) \text{ for each } e \in 1.$$

More explicitly (1.1) reads

$$(1.3) \quad (e, \cap, f) = \bigcup_{e_1} \bigcap_{e_0} f(e_0), \quad (e, \cup, f) = \bigcap_{e_1} \bigcup_{e_0} f(e_0)$$

where $e_0 \in e_1 \in e$. Thus, $e_0 \in 1, e_1 \in P1$.

The meaning of (E, \perp, f') , (F, \perp, f') is obvious. Thus, $f'(x)$ denotes the complement of $f(x)$. In particular, one has the De Morgan Theorem.

THEOREM 1.1. $(e, \perp, f)' = (e, \perp', f')$.

In what follows, we shall denote by

$$(1.4) \quad (e, e^*)$$

any ordered pair of elements of $P^2 1$. Given such a pair (e, e^*) we might consider various sets, as e.g.,

$$(1.5) \quad (e, \cap, f), \quad (e, \cap, f'), \quad (e, \cup, f), \quad (e, \cup, f'),$$

and similarly for e^* . In particular, we shall consider the sets

$$(1.6) \quad (e, \perp, f), \quad (e^*, \perp, f').$$

Obviously, given e, \perp, f , the previous sets are well determined. The problem is to know their interconnections.

2. j -connection of (e, e^*) .

THEOREM 2.1. *In order that for each f*

$$(2.1) \quad (e, \cap, f)' \supseteq (e^*, \cap, f') \quad \text{or} \quad (e, \cap, f) \supseteq (e^*, \cap, f'),$$

it is necessary and sufficient that

$$(2.2) \quad e_1 \cap e_1^* \neq v \quad (e_1 \in e, e_1^* \in e^*).$$

Proof of necessity (2.1) \Rightarrow (2.2). Suppose, on the contrary, that (2.2) does not hold; i.e., that there exist

$$(2.3) \quad e_{1_0} \in e, \quad e_{1_0}^* \in e^*, \quad \text{so that} \quad e_{1_0} \cap e_{1_0}^* = v.$$

Let f be the characteristic function of e_{1_0} such that $f(e_0) = 1 \Leftrightarrow e_0 \in e_{1_0}$. Since $e_{1_0} \in e$ and since $1 \in f(e_0)$ ($e_0 \in e_{1_0}$ one has obviously $1 \in f'(e_0)$). On the other hand, since $e_{1_0}^* \cap e_{1_0} = v, f(e_{1_0}^*) = v$ ($e_{1_0}^* \in e_{1_0}^*$), thus $f'(e_{1_0}^*) = 1$ ($e_{1_0}^* \in e_{1_0}^*$); in other words, $1 \in (2.1)_2$. Thus (2.3) implies $1 \in (2.1)_2 \setminus (2.1)_1$ which contradicts the hypothesis (2.1).

Proof of sufficiency. (2.2) \Rightarrow (2.1), that is, (2.2) \Rightarrow ($\xi \in (2.1)_2$) \Rightarrow $\xi \in (2.1)_1$). Now the relation $\xi \in (e^*, \cap, f')$ means that there is an e_1^* such that $\xi \in f'(e_0^*)$ ($e_0^* \in e_1^*$).

Again, let $e_1 \in e$; since $e_1 \cap e_1^* \neq v$ by hypothesis (2.2), let $z \in e_1 \cap e_1^*$; thus, $\xi \in f(z)$; consequently, for each $e_1 \in e$ there is an $e_0 \in e_1$ such that $\xi \in f(e_0)$. That means $\xi \in (e, \cap, f)$, that is, $\xi \in (e, \cap, f)'$.

Since the condition (2.2) is symmetrical with respect to e, e^* , we get the following.

THEOREM 2.2. *The f -identity $(e, \cap, f)' \supseteq (e^*, \cap, f')$ is equivalent to the f -identity $(e^*, \cap, f)' \supseteq (e, \cap, f)$.*

The last two theorems give rise to the following.

DEFINITION 2.1. An ordered pair (e, e^*) of elements of $P^2 1$ is said to be *j-connected*, symbolically $(e, e^*) \in (j)$ if

$$e_1 \cap e_1^* \neq v, \quad (e_1 \in e, e_1^* \in e^*).$$

THEOREM 2.3. *In order that (2.1) holds for each f , it is necessary and sufficient that the ordered pair (e, e^*) be j -connected.*

3. The k -condition. We will prove the following.

THEOREM 3.1. *In order that for each f one has*

$$(3.1) \quad (e, \cap, f)' \subseteq (e^*, \cap, f')$$

it is necessary and sufficient that for each $X \subseteq 1$ satisfying

$$(3.2) \quad X \cap e_1 \neq v \quad (e_1 \in e)$$

one has

$$(3.3) \quad PX \cap e^* \neq v,$$

that is, that there is an $e_1^* \in e^*$ such that $e_1^* \subseteq X$.

Proof of necessity. Let X satisfy (3.2). Let f be the characteristic function of X . Then (3.2) implies $v \notin \cap f(e_0)$, ($e_0 \in e_1$), for each $e_1 \in e$. Thus $v \in (3.1)_1$. As (3.1) holds, one has $v \in (3.1)_2$. Therefore there exists an $e_1^* \in e^*$ satisfying $v \in \bigcap_{e_0^* \in e_1^*} f'(e_0^*)$. Consequently, $f(e_0^*) = 1$ for each $e_0^* \in e_1^*$, and that means exactly that $e_1^* \subseteq X$.

Proof of sufficiency. If (3.2) \Rightarrow (3.3), then $\xi \in (3.1)_1$.

Let

$$(3.4) \quad X = \bigcup_{x \in 1} E(\xi \in f'(x))$$

that is, X denotes the set of all the $x \in 1$ for which $\xi \in f'(x)$. We see that (3.2) holds. In the opposite case, there would be an $e_{1_0} \in e$ such that $e_{1_0} \cap X = v$, thus $\xi \in f(e_0)$ ($e_0 \in e_{1_0}$) and therefore $\xi \in (3.1)_1$, contrary to the hypothesis that $\xi \in (3.1)_1$. The set (3.4) satisfying (3.2), there exists by supposition an element $e_{1_0}^* \in e^*$ such that $e_{1_0}^* \subseteq X$. That means that $\xi \in f'(e_0^*)$ ($e_0^* \in e_{1_0}^*$), that is, $\xi \in (3.1)_2$.

DEFINITION 3.1. The ordered pair (e, e^*) of elements of $P^2 1$ is said to satisfy the *k-condition*, symbolically

$$(3.5) \quad (e, e^*) \in (k),$$

provided the system

$$(3.6) \quad X \subseteq 1, \quad X \cap e_1 \neq v \quad (e_1 \in e)$$

implies

$$(3.7) \quad PX \cap e^* \neq v.$$

Thus Theorem 3.1 may be expressed in the following form.

THEOREM 3.2. *The relation $(e, e^*) \in (k)$ is equivalent to the f -identity*

$$(e, \cap.f)' \subseteq (e^*, \cap.f').$$

4. First fundamental theorem. Theorems 2.1 and 3.1 enable us to characterize the equality

$$(4.1) \quad (e, \cap.f)' = (e^*, \cap.f').$$

THEOREM 4.1 *The equality (4.1) is equivalent to the relation*

$$(4.2) \quad (e, e^*) \in (j) \wedge (k).$$

(The last relation means that (e, e^*) satisfies both (j) and (k)).

We transform the previous conditions using De Morgan's theorem (c.f. Theorem 1.1). We have $(e, \cap.f)' = (e, \cup.f')$ so that (4.1) reads

$$(e, \cup.f') = (e^*, \cap.f');$$

and considering f' instead of f we obtain

$$(e, \cup.f) = (e^*, \cap.f).$$

Consequently we have the following,

THEOREM 4.2. (First fundamental theorem). *Let (e, e^*) be a given ordered pair of elements of P^{21} ; then the following properties are pairwise equivalent:*

I. $(e, e^*) \in (j) \wedge (k)$

II. *For each mapping f of the set 1 the following duality law holds:*

$$\left(\bigcup_{e_1 \in e_0} f(e_0) \right)' = \bigcup_{e_1^* \in e_0^*} f'(e_0^*), \text{ that is, } (e, \cap.f)' = (e^*, \cap.f').$$

III. *For each mapping f of the set 1, one has the distributive law*

$$\bigcup_{e_1 \in e} \bigcap_{e_0 \in e_1} f(e_0) = \bigcap_{e_1^* \in e^*} \bigcup_{e_0^* \in e_1^*} f(e_0^*), \text{ that is, } (e, \cap.f) = (e^*, \cup.f).$$

IV. $(e^*, e) \in (j) \wedge (k)$

Proof. In fact, $I \Leftrightarrow II$ (Theorem 4.1) and $II \Leftrightarrow III$ as was shown by the application of the De Morgan theorem to $(\cup \cap f)'$. It remains to prove that IV is equivalent to I, II and III . First, the implication $I \Rightarrow III$ yields $IV \Rightarrow (e^*, \cap f) = (e, \cup f)$; from here, passing to complement III' of III : $(e^*, \cap f)' = (e, \cup f)'$ that is, $(e^*, \cup f') = (e, \cap f')$. Writing f' instead of f , one gets III . Thus $IV \Rightarrow III$. Conversely, $III \Rightarrow III'$ (by implication $III \Rightarrow I$) $\Rightarrow IV$.

The equivalence $I \Leftrightarrow IV$ gives the following

THEOREM 4.3. (Symmetry character of $(j) \wedge (k)$): *If $(e, e^*) \in (j) \wedge (k)$, then also $(e^*, e) \in (j) \wedge (k)$. In other words, if $(e, e^*) \in (j)$, then $(e, e^*) \in (k) \Leftrightarrow (e^*, e) \in (k)$.*

THEOREM 4.4. (Symmetry of the k -property¹). *If $(e, e^*) \in (k)$, then $(e^*, e) \in (k)$.*

Proof. To begin with, if e is the null set, then for every e^* , $(e, e^*) \in' (k)$ and $(e^*, e) \in' (k)$. And if the null set is a member of e , then for every e^* , $(e, e^*) \in (k)$ and $(e^*, e) \in (k)$. It remains to consider cases where no sets involved are null. Suppose that $(e, e^*) \in' (k)$. Then there exist an x such that for every $e_1 \in e$, $e_1 \cap x \neq v$, and for every $e_1^* \in e^*$, $e_1^* \setminus x \neq v$. Let $y = \bigcup_{e_1^*} (e_1^* \setminus x)$ ($e_1^* \in e^*$). Then for every $e_1^* \in e^*$, $y \cup e_1^* \neq v$; and if it can be proved that, for every $e_1 \in e$, $e_1 \setminus y \neq v$, it will follow that $(e^*, e) \in' (k)$. But for every $e_1 \in e$, $x_1 = e_1 \cap x \neq v$ and $x_1 \cap y = v$. Since $x_1 \neq v$, it follows that $x_1 \setminus y \neq v$ and therefore that $e_1 \setminus y \neq v$.

In what follows, the generality of Theorem 4.2 will be revealed. We will restrict ourselves to ordered sets. There we are naturally led to consider various operators which were the origin of the present investigations (cf. Kurepa [4, 6].)

5. Ordered sets, operators O, \bar{O}, O', \bar{O}' . Let S be any set ordered by \leq . The operators O, \bar{O}, O', \bar{O}' are defined in the following manner:

DEFINITION 5.1. OS designates the system of all *maximal chains* $\subseteq S$.

DEFINITION 5.1. $\bar{O}S$ designates the system of all *maximal antichains* $\subseteq S$.

DEFINITION 5.2. $O'S$ designates the system of all $X \in \bar{O}S$ such that

$$X \cap M \neq v \quad (M \in OS).$$

¹Theorem 4.4 and its proof are due to the referee.

DEFINITION 5.2. $\overline{O'S}$ designates the system of all $X \in OS$ such that

$$X \cap A \neq v \quad (A \in \overline{OS}).$$

We shall be aware of a certain reciprocity between notions chain and antichain, and in particular by passing from the system O, O' to the system $\overline{O}, \overline{O}'$.

To each ordered set S is associated the set consisting of

$$(5.1) \quad OS, \overline{OS}, O'S, \overline{O'S}$$

which are at most four elements of P^2S . The set (5.1) is of great importance. Its elements form in a certain sense the spatial forms along which certain operations are to be taken. Each element e of (5.1) is as it were a system of paths for operations $(e, \perp .f), (e, \perp', f)$, etc.

CONVENTION 5.1. The reciprocal of a statement s will be denoted \bar{s} . So the reciprocal of the Lemma 5.1 is denoted by Lemma 5.1. If X is a chain, then \overline{X} is an antichain, etc. Here is an example.

LEMMA 5.1. *In order that $X \in O'S$, it is sufficient that X is an antichain of S such that $X \cap M \neq v$ ($M \in OS$). In other words, if an antichain intersects each maximal chain of S it is necessarily a maximal antichain.*

The reciprocal results is as follows.

LEMMA 5.1. *In order that $X \in \overline{O'S}$, it is sufficient that X is a chain of S such that $X \cap A \neq v$ ($A \in \overline{OS}$). In the other words, if a chain X of S intersects each antichain of S , then X is necessarily a maximal one.*

Proof. Let X be an antichain satisfying $X \cap M \neq v$ ($M \in OS$). To prove that $X \in O'S$, it is sufficient to prove that X is a maximal antichain, i.e., that each $b \in S$ is comparable to some point of X . Now, let $b \in B \in OS$. Then the point $B \cap X$ exists and is the required point of X which is comparable to b .

Reciprocally, let X be a chain such that $X \cap A \neq v$ ($A \in \overline{OS}$). To prove that X is a maximal chain, suppose, on the contrary, that there is a chain $C \supset X$. Let $d \in C \setminus X$ and let $d \in D \in \overline{OS}$. Then necessarily $D \cap X = v$, because if $x \in D \cap X$, one would have two distinct comparable points d, x in the antichain D .

LEMMA 5.2. $O'S \subseteq \overline{OS}$, $\overline{O'S} \subseteq OS$. (Each of the signs \subseteq here may be = or \subset .) In particular there exists a non-void S such that²

$$(5.2) \quad O'S = v, \quad \overline{O'S} = v$$

EXAMPLE 5.1. Let σ_0 denote the system of all non-void bounded well ordered sets of rational numbers ordered by means of the relation \subseteq , where³
 (5.3) $x \subseteq y$ or $y \supseteq x$ means that x is an initial portion of y . In that case, $\overline{O'\sigma_0} = v$, because, e.g., there is no chain in σ_0 intersecting each row of σ_0 (cf. [4, p. 95]). It is provable that $O'\sigma_0 = v$.

As an example of reciprocity considerations let us prove the following lemmas (5.3 and $\overline{5.3}$) which are mutually reciprocal and which will occur in distributive laws (cf. Theorem 9.1, Cases 2, $\overline{2}$).

LEMMA 5.3. *If the maximal chains of S are pairwise disjoint, then the comparability relation in S is transitive, and conversely. Also*

$$(5.4) \quad O'S = \overline{OS} = \prod_M M,$$

where \prod denotes the combinatorial product of sets M , M running over OS ; and $OS = \overline{O'S}$.

Reciprocally we have the following.

LEMMA $\overline{5.3}$. *If the maximal antichains of S are pairwise disjoint, then the incomparability relation in S is transitive, and conversely. Also*

$$OS = \overline{O'S} = \prod_A A$$

where \prod denotes the combinatorial product of all the sets A , A running over \overline{OS} ; and $O'S = \overline{OS}$.

Proof of Lemma 5.3. If OS is disjoint, then as it is easy to show, the comparability relation in S is a congruence relation, and vice versa. Each $A \in \overline{OS}$ intersects each $M \in OS$ (thus $\overline{OS} = O'S$) in a single point, since on the one hand OS is disjoint and on other hand A is antichain: thus $A \in (5.4)_3 = \prod_M (M \in OS)$. Conversely, each $X \in (5.4)_3$ is an antichain because of the incomparability of each point of each $M \in OS$ to each point of

²According to W. Gustin, there exists a denumerable ramified set S satisfying (5.2) [cf. Gustin, *Math. Rev.* 14, (1953) 255 in connection with the review of Kurepa [8]].

³The relation \subseteq is the very basis of the theory of ramified sets (cf. [4]).

each $M_0 \in OS$, $M_0 \neq M$. But X is also a maximal antichain. Analogously one proves the reciprocal of Lemma 5.3, that is Lemma $\overline{5.3}$.

REMARK 5.1. On Lemma 5.1 and Lemma $\overline{5.1}$ is based a very general distribution law (cf. Theorem 9.1, Cases 2, $\overline{2}$).

6. Operations $(v, \cap.f)$, $(v, \cup.f)$ and $(\Omega, \perp.f)$ for each $\Omega \in (5.1)$ and each $\perp \in \{\cap, \cup\}$.

Let Ω be any element of the set

$$(6.1) \quad \{OS, O'S, \overline{OS}, \overline{O'S}\};$$

then $\Omega \in P^2S$; so that for each Ω and each $\perp \in \{\cap, \cup\}$, the operator

$$(6.2) \quad (\Omega, \perp.f)$$

is well defined. In the particular case that $\Omega = v$, we put

$$(6.3) \quad (v, \cup.f) = \text{universal set}, \quad (v, \cap.f) = \text{void set}$$

We shall consider ordered pairs (e, e^*) of elements of the set (6.1) and the corresponding sets (6.2) for $\Omega = e$ and $\Omega = e^*$, respectively.

EXAMPLE 6.1. Let

$$(6.4) \quad (T; \omega_0)$$

denote the system of all $< \omega_0$ -complexes (finite complexes) of ordinals $< \omega_0$ ordered by means of the relation \subseteq in (5.3). If f is a mapping of $(T; \omega_0)$ into the family of closed sets, then we can prove that $(O, \cap.f)$ and $(O', \cap.f')$, respectively, are the most general analytic set (A -set of Suslin) and the most general CA -set respectively (cf. [10, 1, 2]; also [9]).⁴

Example 6.1 shows the importance of the operations (1.1) even in particular cases (6.2) and $S = (T; \omega_0)$. (cf. [6]).

7. Some simple lemmas.

LEMMA 7.1. *Either $O'S = v$ or each element of $O'S$ intersects each element of OS ; and reciprocally, either $\overline{O'S} = v$ or $(\overline{OS}, \overline{O'S})$ is a j -connected ordered pair.*

Lemma 7.1 and Theorem 2.1 yield the following.

⁴In our book [5] we defined A -sets just as sets $(OS, \cap.f)$ for the choice of S and f as in Example 6.1.

THEOREM 7.1. $(OS, \cap.f) \subseteq (O'S, \cap'.f)$

and reciprocally,

$$(\overline{OS}, \cap.f) \subseteq (\overline{O'S}, \cap'.f).$$

In general, we have here the sign \subset instead of \subseteq . The duals of that relation hold also.

THEOREM 7.2. The two sets, $(OS, \cap.f)$, $(\overline{OS}, \cap'.f)$ may be non-comparable if S is ramified.

To see this, let D denote the set of all integers ordered as in this diagram:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \rightarrow & -4 & \rightarrow & -2 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 6 & \rightarrow & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & \searrow & -3 & \searrow & -1 & \searrow & 1 & \searrow & 3 & \searrow & 5 & \searrow & 7 & \searrow & \dots \end{array}$$

Obviously, the set D is ramified; for the sets $2D - 1$ and $2D$ of all odd and, respectively, even integers one has $2D - 1 \in \overline{OD}$, $2D \in OD$, $2D \cap (2D - 1) = \emptyset$.

Let f be the characteristic function of $2D - 1$; one proves then easily that $(OD, \cap.f') = \{1\}$, $(\overline{OD}, \cap'.f) = \{0\}$, and that proves Theorem 7.2.

8. Ordered sets and k -condition. If we consider the pair $(OS, O'S)$ or its reciprocal $(\overline{OS}, \overline{O'S})$, then the j -condition is satisfied; therefore one obtains Theorem 7.1. On the other hand, in general one has neither $(OS, O'S) \in (k)$ nor reciprocally $(\overline{OS}, \overline{O'S}) \in (\bar{k})$. For the sake of simplicity, we present the following.

DEFINITION 8.1. The condition $(OS, O'S) \in (k)$ will be denoted $S \in (k)$ and reciprocally. Thus

$$(8.1) \quad (OS, O'S) \in (k) \Leftrightarrow S \in (k)$$

$$(8.1) \quad (\overline{OS}, \overline{O'S}) \in (k) \Leftrightarrow S \in (\bar{k})$$

and we shall say that S satisfies the (k) -condition and the (\bar{k}) -condition respectively.

In particular, $S \in (k)$ means the statement that each set $\subseteq S$ which intersects each maximal chain of S contains a maximal antichain of S . Then Theorem 4.2. (implication I \Rightarrow III) yields the following

THEOREM 8.1. For each ordered set S satisfying the (k) -condition, one has the following distribution law⁵:

$$(8.2) \quad \prod_{e_1} \prod_{e_0} f(e_0) = \prod_A \prod_a f(a), \quad (e_0 \in e_1 \in OS, a \in A \in O'S)$$

⁵The converse holds also.

and reciprocally for $(\overline{8.2})$. (\perp designates \cap or \cup).

Usual distribution laws are special cases of (8.2). Thus if one takes the ordered set $S = \{1, 2, 3\}$ with diagram $\begin{matrix} & 2 & \\ & \uparrow & \\ 1 & & 3 \end{matrix}$ one has $OS = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $O'S = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ and the formula (8.2) yields $f(3) \perp' (f(1) \perp f(2)) = (f(3) \perp' f(1)) \perp (f(3) \perp' f(2))$.

Analogously, considering the set $\begin{matrix} & 2 & 4 & \\ & \uparrow & \uparrow & \\ & 1 & 3 & \end{matrix}$ one has the binomial form of the distribution law. For other cases of distribution, cf. §11.

9. Some classes of ordered sets satisfying (k) and (\overline{k}) . We are going to prove that the conditions $(k), (\overline{k})$ are satisfied by ordered sets of some general classes – a fact which will give us a general distribution and duality law.

THEOREM 9.1. *The conditions (k) and (\overline{k}) are satisfied, provided S satisfies at least one of the following conditions:*

- 1) S is a chain;
- $\overline{1}$) S is an antichain;
- 2) OS is disjoint, i.e., the elements of OS are pairwise disjoint (this is equivalent to the statement that the comparability relation is transitive in S);
- $\overline{2}$) The elements of \overline{OS} are pairwise disjoint (this is equivalent to the transitivity of the incomparability relation in S).

The cases 1), $\overline{1}$), 2), $\overline{2}$) are ranged according to relative importance. One sees that 1) and $\overline{1}$) as well as 2) and $\overline{2}$) are mutually reciprocal.

Let us prove, e.g., the case $\overline{2}$). At first, the elements of \overline{OS} being pairwise disjoint, by Lemma 5.3, we have $OS = \prod_A A$ ($A \in \overline{OS}$) and $\overline{OS} = O'S$. Now we prove $S \in (\overline{k})$. If no $A \in \overline{OS}$ were contained in an $X \subseteq S$, where X intersects each $M \in OS$, there would be a point $x(A) \in A \setminus X$ for each $A \in \overline{OS}$. The set $\bigcup_A x(A)$ ($A \in \overline{OS}$) would be a maximal chain of S which does not intersect X , contrary to the hypothesis on X .

REMARK 9.1. Later we shall see that the fact that each chain (antichain) satisfies (k) and (\overline{k}) is reflected in the fact that our duality theorem has as a special case the De Morgan duality theorem (cf. Theorem 13.1)

10. The case of ramified tables. At many opportunities we considered ramified tables, i.e., ordered sets satisfying the condition that for

each $x \in T$, the set $(., x)_T$ of all its predecessors in T is well ordered. Let us recall that for a table T ,

$$(10.1) \quad \gamma T$$

denotes the first ordinal number α such that there is no point $x \in T$ such that the order type of $(., x)_T$ is α ; γT is called rank or degree (order) of T .

THEOREM 10.1. *Each ramified table T satisfies (k); or explicitly and more precisely, let T be a set such that for each $x \in T$, the set $(., x)_T$ is well ordered. Let $X \subseteq T$ and $M \cap X \neq \emptyset$ ($M \in OT$). Then the set*

$$(10.1) \quad R_0 X$$

of all initial points of X is a maximal antichain of T ; moreover, $R_0 X$ intersects each maximal chain of T . Thus, $R_0 X \in O'T$.

THEOREM 10.2. *If $\gamma T < \omega_0$, then $T \in (\bar{k})$ and $OT = \overline{O'T}$, $\overline{OT} = O'T$. In particular, this holds for each finite table.*

Proof of Theorem 10.1. At first, $R_0 X \in \overline{OT}$. As $R_0 X$ has no pair of distinct comparable points, it is sufficient to show that each $t \in T$ is comparable to a point $x_0(t) \in R_0 X$. Now, by hypothesis, there exists at least one point $x(t) \in X$ comparable to t . Let $x_0(t)$ be the point in $R_0 X$ which is $\leq x(t)$. In fact, if $x_0(t) = x(t)$, or if $x(t) \leq t$, the comparability of t and $x_0(t)$ is obvious. On the other hand, if neither $x_0(t) = x(t)$ nor $x(t) \leq t$, then $x_0(t) < x(t)$, $t < x(t)$. Thus, $x_0(t), t$ belong to the set $(., x(t))_T$ which by the suppositions on T is a chain.

It remains to prove that $R_0 X$ intersects each $M \in OT$. Again, by hypothesis, there exists a point $m \in X \cap M$; then the point $m' \in R_0 X$ such that $m' \leq m$ is a point of M . The set $(., m)_T \cup M$ is a chain. By virtue of presupposed maximality of M , one has $(., m)_T \subseteq M$, thus $m' \in M$.

Proof of Theorem 10.2. At first we have the following

LEMMA 10.1 *If $\gamma T < \omega_0$, then $A \cap M \neq \emptyset$ ($A \in \overline{OT}, M \in OT$), thus $OT = \overline{O'T}, O'T = \overline{OT}$ (cf. [8]).*

Proof. Suppose, on the contrary, that T contains a maximal chain M and a maximal antichain A so that

$$(10.3) \quad A \cap M = \emptyset.$$

A being a maximal antichain of T , there exists for each $t \in T$ a point $\alpha(t) \in A$ such that $\{t, \alpha(t)\}$ is a chain; in particular, for each $m \in M$, the points $m, \alpha(m)$ are comparable. Now

$$(10.4) \quad m < \alpha(m),$$

which is proved as follows. Since $M \in OT$, M is an initial portion of T . Consequently, if (10.4) did not hold, M would then contain also the point $\alpha(m_0)$ for at least a point $m_0 \in M$. Thus, $\alpha(m_0) \in A \cap M$ contrary to (10.3). Therefore (10.3) \Rightarrow (10.4). Now, since $\gamma T < \omega_0$, the chain M is finite.

Let l be the last point of M ; l would be a last point of T also, contrary to the relation (10.4) for $m = l$. Thus the relation (10.3) is not possible, and Lemma 10.1 is proved.

To complete the proof of Theorem 10.2, we need to see that each $X \subseteq T$ satisfying

$$(10.5) \quad X \cap A \neq v \quad (A \in \overline{OT})$$

contains a maximal chain of T . This holds for every T and we have the following statement which is reciprocal to Theorem 10.1.

THEOREM 10.1⁶. *Every ramified table T satisfies the \bar{k} -condition: $T \in (\bar{k})$.*

Proof. Suppose X satisfies (10.5). Since $R_0T \in \overline{OT}$, we have

$$(10.6) \quad X_0 \equiv X \cap R_0T \neq v.$$

The set (10.6) is an initial portion of X , that is,

$$x \in (10.6) \Rightarrow (., x]_T \subseteq (10.6).$$

If X_0 contains a maximal chain of T , then Theorem 10.1 is proved. If $OX_0 \cap OT = v$, then

$$(10.7) \quad R_0(T \setminus X_0)$$

is a maximal antichain of T . As a matter of fact we have the following

LEMMA 10.2. *If I is an initial portion of a ramified table T such that*

$$(10.8) \quad OI \cap OT = v,$$

then

$$(10.9) \quad R_0(T \setminus I) \in \overline{OT}.$$

⁶Theorem 10.1 for $\gamma T \geq \omega$ is due to the referee.

To prove $(10.9)_1 \in \overline{OT}$, it suffices to show that each $i \in T$ is comparable to some point $i' \in (10.9)_1$. Obviously this holds for $i \in T \setminus I$. Suppose $i \in I$. Consider an M such that $i \in M \in OT$. By (10.8), $M \setminus I \neq v$. Let $P \in M \setminus I$ and let i' be the point such that $i' \in (10.9)_1$ and $i' \leq P$. Since T is ramified and $i < P$, it follows that $i < i'$.

To prove Theorem $\overline{10.1}$, let us consider the sets

$$(10.10) \quad X_0, X_1, \dots, X_\alpha, \dots$$

defined as follows

$$(10.11) \quad \begin{aligned} X_0 &= X \cap R_0 T, \quad X_1 = X_0 \cup (X \cap R_0(T \setminus X_0)) \\ X_\alpha &= X_{\alpha-1} \cup (X \cap R_0(T \setminus X_{\alpha-1})) \\ X_\alpha &= \bigcup_{\alpha_0} X_{\alpha_0} \quad (\alpha_0 < \alpha) \end{aligned}$$

depending upon whether α is isolated or a limit ordinal number.

Obviously, the sequence (10.10) is increasing and its terms are $\subseteq X$. Let δ be the first ordinal such that

$$(10.12) \quad X_\delta = X_{\delta+1}.$$

Of course, $\delta \leq \gamma T$.

We see that

$$(10.13) \quad OX_\delta \cap OT \neq v$$

and hence

$$(10.14) \quad OX \cap OT \neq v$$

because $X_\delta \subseteq X$.

First, each term of (10.10) is an initial portion of T -provable by an induction argument. Secondly, if the relation (10.13) were false, the set

$$(10.15) \quad R_0(T \setminus X)$$

by virtue of Lemma 10.2 would be a maximal antichain of T . By hypothesis on X (see (10.5)) there would be a point $z \in X \cap (10.15)$. Therefore

$$z \in X_{\delta+1}, \quad z \notin X_\delta$$

Hence, $z \in X_{\delta+1} \setminus X_\delta$ and $X_\delta \subset X_{\delta+1}$, contrary to (10.12). Hence (10.14) holds and Theorem 10.1 is proved.

11. General distribution laws. To see how the previous investigations are linked with distribution questions, let us prove the following distribution theorem which is the most general distribution law expressible in usual terms.

THEOREM 11.1. *Let \mathcal{F} be any non-void family of non-void sets $\subseteq 1, 1$ being a standard set. Then for each mapping f of the set 1 we have*

$$(11.1) \quad \bigcap_{X \in \mathcal{F}} \bigcup_{x \in X} f(x) = \bigcup_A \bigcap_{a \in A} f(a) \quad \left(A \in \prod_{X \in \mathcal{F}} X \right);$$

and dually.

Theorem 11.1 is a corollary to Theorem 4.2 (implication $I \Rightarrow III$). As a matter of fact, first the pair $(\mathcal{F}, \prod_{X \in \mathcal{F}} X)$ is j -connected; second it satisfies the k -conditions, as is easily provable.

A direct proof of Theorem 11.1 is as follows.

First, $(11.1)_1 \subseteq (11.2)_2$, that is, if $\xi \in (11.1)_1$ then $\xi \in (11.1)_2$. In fact $\xi \in (11.1)_1$ means $\xi \in \bigcup_{x \in X} f(x)$ ($X \in \mathcal{F}$), that is, there exists an $X_e \in X$ such that $\xi \in f(X_e)$, ($X \in \mathcal{F}$). Putting $A_e = \bigcup_X X_e$ ($X \in \mathcal{F}$), one has $\xi \in \bigcap_a f(a)$ ($a \in A_e$) and $A_e \in \prod_X X$, thus $\xi \in (11.1)_2$.

Second, $(11.1)_2 \subseteq (11.1)_1$; if $\xi \in (11.1)_2$, then $\xi \in (11.1)_1$. The relation $\xi \in (11.1)_2$ is equivalent to $\xi \in f(a)$ ($a \in A$) for some $A \in \prod_X X$; since $A \cap X \neq v$, this implies $\xi \in \bigcup_{x \in X} f(x)$ for each $X \in \mathcal{F}$, hence $\xi \in (11.1)_1$.

From the proof of Theorem 11.1 we obtain the following interesting result.

THEOREM 11.2. (cf. Theorem 2.1) *Let $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$ be any ordered pair of systems of sets $\subseteq 1$ such that*

$$(11.2) \quad X \cap X_0 \neq v \quad (X \in \mathcal{F}, X_0 \in \mathcal{F}_0);$$

then for each mapping f :

$$(11.3) \quad \bigcup_{X \in \mathcal{F}} \bigcap_{x \in X} f(x) \subseteq \bigcap_{x_0 \in \mathcal{F}_0} \bigcup_{x_0 \in X_0} f(x_0);$$

and dually,

$$\bigcup' \bigcap' f'(x) \subseteq' \bigcap' \bigcup' f'(x_0).$$

$X' \in \mathcal{F}' \cdot x_0' \in X_0'$

In general, one reads here \subset instead of \subseteq . The case $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ is not excluded. Therefore the relation (11.3) holds even if one or both sets $\mathcal{F}, \mathcal{F}_0$ are vacuous. In particular, (11.3) holds if $\mathcal{F} \in \{OS, O'S, \overline{OS}, \overline{O'S}\}$ and $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}'$ (obviously $(OS)'$ means $O'S$; $(O'S)' = OS$, $(\overline{O'S})' = \overline{OS}$, even if $O'S = v = \overline{O'S}$). Consequently, we have the following.

THEOREM 11.3. *If $\Omega \in \{O, \overline{O}, O', \overline{O'}\}$ then*

$$\bigcup_X \bigcap_x f(x) \subseteq \bigcap_{X'} \bigcup_{x'} f(x') \quad (x \in X \in \Omega S, x' \in X' \in \Omega' S)$$

and dually.

Passing to complements in the relation and using De Morgan formula, we have the following.

THEOREM 11.4. *For any $\Omega \in \{O, \overline{O}, O', \overline{O'}\}$:*

$$\bigcup_X \bigcap_x f(x)' \supseteq \bigcap_{X_0} \bigcup_{x_0} f'(x_0) \quad (x \in X \in \Omega S, x_0 \in X_0 \in \Omega' S).$$

The question of whether sets forming \mathcal{F} in Theorem 11.1 are pairwise disjoint or not disjoint is of no importance. However, without loss of generality, the system \mathcal{F} may be supposed disjoint. In fact, let to each $X \in \mathcal{F}$ be associated the set X_d of all ordered pairs (X, x) ($x \in X$); to each $x \in X$ we associate the pair (x, x) . Instead of \mathcal{F} we can consider the system \mathcal{F}_d of all the X_d ($X \in \mathcal{F}$). Now, the family \mathcal{F}_d is disjunctive and the system \mathcal{F}_d can be interpreted either as OS or as \overline{OS} . If one orders totally each X_d and if one orders the set $S = \bigcup_X X_d$ ($X \in \mathcal{F}$) so that each element of X_d is incomparable to each element of each other element of \mathcal{F}_d and if one leaves intact the ordering in each element of \mathcal{F}_d , then obviously

$$OS = \mathcal{F}_d, \quad O'S = \prod_y y \quad (y \in \mathcal{F}_d);$$

moreover $OS = \overline{O'S}$, $O'S = \overline{OS}$, the set satisfies the conditions (k) and (\bar{k}) and accordingly for the set S the distribution law (8.1) holds.

Combining Theorem 8.1 with Theorem 9.1, one has the following statements:

THEOREM 11.5 *If S is an ordered set of one of the cases 1, $\bar{1}$, 2, $\bar{2}$, in Theorem 9.1, then for each mapping f of S the following distribution law holds:*

$$(11.4) \quad \perp'_M \perp'_m f(m) = \perp_A \perp'_a f(a) \quad (m \in M \in OS, a \in A \in O'S);$$

and reciprocally. In (11.4) \perp denotes either \cap or \cup .

Theorems 9.1 and 10.1, 10.2 yield the following.

THEOREM 11.6. *For each ramified table T and each mapping f of T one has*

$$(11.5) \quad \frac{\perp' \perp}{M m}(m) = \frac{\perp \perp'}{A} f(a) \quad (m \in M \in OT, a \in A \in O'T);$$

and reciprocally.

12. A new duality law. We saw (Theorem 8.1) how the distribution law (11.4) is connected with the condition (\bar{k}) . Now we will see the interconnection of the distribution law and of (k) or (\bar{k}) with some duality laws. Let us suppose that for each f one has $(OS, \perp, f) = (O'S, \perp', f)$ (this happens if and only if $S \in (k)$; cf. Theorems 3.2, 4.1). In particular, since f is arbitrary, the same equality holds for the mapping f', f' being the complement of f ; thus $(OS, \perp, f') = (O'S, \perp', f')$. From here, passing to complements, one has

$$(OS, \perp, f')' = (O'S, \perp', f') = (O'S, \perp'', f'') = (O'S, \perp, f),$$

(by De Morgan's formula). Thus we have the following.

THEOREM 12.1. *General duality law. For each ordered set $S \in (k)$, one has*

$$(12.1) \quad (\Omega, \perp, f)' = (\Omega', \perp, f'); \quad \text{where } \Omega = OS \text{ or } O'S, \perp = \cap \text{ or } \cup.$$

Reciprocally, if $S \in (\bar{k})$, then for each mapping f of S :

$$(\overline{12.1}) \quad (\Omega, \perp, f)' = (\Omega', \perp, f').$$

Where, Ω denotes \overline{OS} or $\overline{O'S}$, $\perp = \cap$ or \cup .

It is interesting to observe that the converse of Theorem 12.1 holds also.

THEOREM 12.2. $\forall(f)(12.1) \Leftrightarrow S \in (k)$

$$\forall(f)(\overline{12.1}) \Leftrightarrow S \in (\bar{k}),$$

Let us express, e.g., the last equivalence directly.

THEOREM 12.3. *Given an ordered set S : in order that for each mapping f of S , one has*

$$(12.2) \quad \left(\bigcup_{A \in \bar{O}S} \bigcap_{a \in A} f(a) \right)' = \bigcup_{M \in \bar{O}'S} \bigcap_{m \in M} f'(m) \quad (A \in \bar{O}S, M \in \bar{O}'S),$$

it is necessary and sufficient that S satisfies the (\bar{k}) -condition (cf. Theorem 3.1).

13. Some special cases of the duality theorem.

THEOREM 13.1. *If S is a chain or an antichain, then the duality Theorem 12.1 yields the theorem of De Morgan.*

Let us consider an antichain S ; thus $\bar{O}S = \{S\}$; $\bar{O}'S$ is the system of all one-point sets $x \in S$. Then for each $M \in \bar{O}'S$, one has $M = \{x\}$ with $x \in S$; thus $\bigcap_{m \in M} f'(m) = f'(x)$ where $\{x\} = M$ and one has

$$(13.1) \quad \bigcup_{M \in \bar{O}'S} \bigcap_{m \in M} f'(m) = \bigcup_{M \in \bar{O}'S} f'(x) = \bigcup_{x \in S} f'(x)$$

On the other hand, as $\bar{O}S = \{S\}$,

$$\bigcap_{a \in A} f(a) = \bigcap_{s \in S} f(s)$$

and

$$(13.2) \quad \bigcup_{A \in \bar{O}S} \bigcap_{a \in A} f(a) = \bigcup_{A \in \{S\}} \bigcap_{s \in S} f(s) = \bigcap_{s \in S} f(s)$$

By virtue of (13.1) and (13.2) the equality (12.2) yields

$$\left(\bigcap_{s \in S} f(s) \right)' = \bigcup_{s \in S} f'(s)$$

and this is just the equality of De Morgan. Since each family, or set, may be considered as an antichain, we see that Theorem 12.3 (its sufficient condition) for S an antichain, gives the equality of De Morgan in its most general form.

THEOREM 13.2. For each ramified table T and each mapping f of T one has

$$(13.3) \quad (\perp'_M \perp'_m f(m))' = \perp'_A \perp'_a f'(a) \quad (m \in M \in OT, a \in A \in O'T, \perp \in \{\cap, \cup\})$$

In particular ($\perp = \cap$):

$$(13.4) \quad \left(\bigcup_{M} \bigcap_{m} f(m) \right)' = \bigcup_{A} \bigcap_{a} f'(a) \quad (m \in M \in OT, a \in A \in O'T),$$

and reciprocally

If one bears in mind the generality and importance of ramified tables (a tool for complete subdivisions or atomizations of sets), one is conscious of the importance and generality of Theorem 13.2.

REMARK 13.1. From a logical point of view it is very important that (13.4) as well as its reciprocal hold, especially for each table whose chains are finite.

Actually, we observe that such tables occur even in psychological processes, in subdivisions, evolution, etc. Thus it seems that the evolution processes follow a ramification scheme, as will be shown elsewhere.

REFERENCES

1. P. Alexandroff, *Sur l'invariances des ensembles complémentaires aux ensembles A*, Mat. Sb. **31** (1923), 310–318.
2. P. Alexandroff, *Sur les ensembles complémentaires aux ensembles A*, Fund. Math. **6** (1924), 160–165.
3. A. Fraenkel, *Abstract Set Theory*, Amstedram, 1953.
4. D. Kurepa, *Ensembles ordonnés et ramifiés*, Thèse. Paris, 1935. Publ. Math. Univ. Belgrade **4** (1935), 1–138.
5. D. Kurepa, *Teorija skupova*, Školska knjiga, Zagreb, 1951.
6. D. Kurepa, *Ensembles partiellement ordonnés*, Proc. Int. Congr. Math. 1950 **1** (1952), 460–461.
7. D. Kurepa, *Généralisation de l'opération de Suslin, de celle d'Alexandroff et de la formule de De Morgan*, Bull. Int. Acad. Sci. Zagreb **5** (1955), 97–107.
8. D. Kurepa, *On a characteristic property of finite sets*, Pacific J. Math. **2** (1952), 323–326.
9. W. Sierpinski, *Sur une généralisation des ensembles mesurables B*, Bull. Acad. Sci. Cracovie (1918), 161–167.
10. M. Suslin, *Sur une définition des ensembles mesurables B sans transfinitis*, C. R. Acad. Sci. Paris **164** (1917), 88.
11. A. Tarski, *Zur Grundlegung der Boole'schen Algebra I*, Fund. Math. **24** (1935), 177–198.

B. CARDINAL FUNCTIONS IN TOPOLOGY

- B[36] *Le problème de Souslin et les espaces abstraits*, C.R. Acad. Sci. Paris **203** (1936), 1049–1052.
- B[37] *Le problème de Souslin et les espaces abstraits*, C.R. Acad. Sci. Paris **204** (1937), 325–327.
- B[45] *Le problème de Souslin et les espaces abstraits*, Revista de Ciencias (Lima) **47** 453 (1945), 457–488.
- B[50] *La condition de Souslin et une propriété caractéristique des nombres réels*, C.R. Acad. Sci. Paris **231** (1950), 1113–1114.
- B[52] *Sur une propriété caractéristique du continu linéaire et le problème de Souslin*, Publ. Inst. Math. Belgrade **4** (1952), 97–108.
- B[62] *On an inequality concerning Cartesian multiplication*, in: *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra*, Proc. Symp. Prague, Sept., 1961, Prague, (1962), pp. 258–259.
- B[62a] *The Cartesian multiplication and the cellularity number*, Publ. Inst. Math. Belgrade (N.S.) **2** 16 (1962), 121–139.
- B[67] *Dendrity of spaces and of ordered sets*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. **2** 22 (1967), 145–162.

Kurepa's work on cardinal functions was motivated by his attempts to solve Souslin's celebrated problem which asks whether every linearly ordered continuum without uncountable family of pairwise disjoint intervals is isomorphic to the unit interval. For this purpose he introduced (A[35; C.3 footnote 11]) one of the most important cardinal functions ("degré de cellularité de E^n "), $c(E)$, as the supremum of cardinalities of families of disjoint open sets of the space E . Judging even by today's standards he still holds the best results about this cardinal function. At the early stage his results are mostly about the linearly ordered spaces. Section number 7 of A[35] contains several such functions among which the density (denoted by p_1E) and cellularity (denoted by p_2E) play the central role. He was able to isolate the following two central problems about these cardinal functions

- (P1) What is the relationship between p_1E and p_2E (i.e., between $d(E)$ and $c(E)$)?
- (P2) When is the supremum of p_2E (i.e., $c(E)$) attained?

Of course (P1) was the direct descendant of the Souslin problem, but (P2) required a new insight. It was the first instance of the well-known "sup = max" problem. In Lemmas 10 and 10' of A[35; §7] he proved the following useful fact

(S1) In studying (P1) and (P2) we may restrict ourselves to the class of linearly ordered continua.

In A[35; 12.C.3, Théorème 2] he proves the first important result concerning (P1), the inequality

$$(1) \quad d(E) \leq c(E)^+$$

which has recently culminated in one of the deepest results in the theory

$$(2) \quad d(X) \leq hc(X)^+ \quad \text{for compact } X,$$

due to B. E. Shapirovskii ([8]; see also [5]). (The inequality (1) was much later rediscovered by Hajnal and Juhász ([4]; see also [2; p. 222]).) In the same section ("Lemme 4 & 5" and "Théorème 3" of §11.4) one can find another remarkable fact, the first instance of the "sup = max" result

$$(3) \quad \text{If } c(E) \text{ is singular then it is attained.}$$

This result was later generalized to all spaces by Erdős and Tarski [3]. In B[36] he introduces another important concept known today under the name of "discrete separability"

(K₀) There is a countable family of discrete subspaces whose union is dense in the space.

This property was later studied in detail by the Russian School of Topology (see e.g. Arhangelskii [1]) and one of the finest results which goes along Kurepa's own reasons for studying this property was proved again by Shapirovskii ([9]):

$$(4) \quad dd(X) \leq t(X)^+ \quad \text{for compact } X.$$

The announcement B[37] is the beginning of Kurepa's study of the hereditary versions of the functions c and d . Relying on the previous work of Kuratowski and Sierpinski [6] he realized that this reduces to studying the numbers " $p_c\mathcal{G}(E)$ " and " $p_d\mathcal{G}(E)$ ", respectively, where $p_c\mathcal{G}(E)$ is the supremum of cardinalities of well-ordered chains of open sets of E while $p_d\mathcal{G}(E)$ is the supremum of cardinalities of conversely well-ordered chains of open sets of E i.e.,

$$(5) \quad p_c\mathcal{G}(E) = hL(E)$$

$$(6) \quad p_d\mathcal{G}(E) = hd(E).$$

After a series of papers on this subject he collected all his results in a single paper B[45] which unfortunately was not well noticed by others, so he republished it in a more comprehensive form as B[67]. Most of the results in B[45] are stated in their countable form because of their relevance to the Souslin's problem, while the corresponding results in B[67] are stated in their full generality:

- (7) $hd(E) = d(E)$ for every linearly ordered space E (B[45; Théorème 5], B[67; 4.5.3 and 5.1(i)])
 (8) $hL(E) = c(E)$ for every linearly ordered space E ((S1), B[45; Corollaire 4], B[67; 4.3.4(ii) and 5.1(i)])

These results were rediscovered later by Skula [10] and Lutzer and Bennett [7] (see also [2, p. 222]), respectively. Kurepa's approach in proving these results was quite elegant. He first notices that we may again restrict ourselves to linearly ordered continua so he deduced (7) and (8) from general inequalities which are true for every infinite *locally connected space* E relating $p_c\mathcal{G}(E)$ and $p_d\mathcal{G}(E)$ to the corresponding cardinal functions restricted to the family $\mathcal{CG}(E)$ of components of E . Namely, the basic observation is that if \mathcal{U} is a conversely well-ordered family of open subsets of a locally connected space E then the corresponding family \mathcal{CU} is a tree! It is interesting that even at this level of generality one obtains an equivalent formulation of the Souslin problem (see Théorème 2(c) of B[45]). Of course he also mentions many times (in B[36], B[45] and B[67]) that the implication " $hL(E) = \aleph_0 \rightarrow hd(E) = \aleph_0$ " for linearly ordered spaces E is yet another form of the Souslin problem.

The paper B[50] is one of Kurepa's most often cited papers in this area and it contains the discovery of yet another phenomenon, the non-productiveness of cellularity:

- (9) If E is a Souslin continuum, then $c(E^2) > c(E)$.

The elegant proof which has been since then imitated many times shows that, in fact (see B[52]),

- (10) $d(E) = c(E^2)$ for every linearly ordered space E .

So for every linearly ordered space

- (11) $c(E^2) \leq c(E)^+$.

It follows that for every linearly ordered space E the sequence $c(E^n)$ ($n = 2, 3, \dots$) is constant, a phenomenon which made a great impression on Kurepa (see D[53b]). It was definitely the driving force behind his discovery in B[62] and B[62a] of the following inequality, perhaps his deepest result about the function $c(X)$:

- (12) $c(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha) \leq \exp(\sup_{\alpha \in A} c(X_\alpha))$.

The proof was one of the first instances of the method of proving cardinal inequalities using partition relations, a method which has since then become one of the main tools in the subject (see [5]). The partition relation that Kurepa used to prove (12) is his "graph relation" (see explanation in the group C of this Selected works) which in the arrow notations is stated as

- (13) $(m^n)^+ \rightarrow (m^+, n^+)^2$.

Subsequent expositions of (12) would use instead the Erdős–Rado relation

$$(14) (2^n)^+ \rightarrow (n^+)_n^2$$

losing thus some of the power of the original argument which, among other things, shows that

$$(15) \text{ If } c(X) \leq n \text{ and } c(Y) \leq 2^n \text{ then } c(X \times Y) \leq 2^n.$$

Stevo Todorčević

REFERENCES

- [1] A. V. Arhangel'skii, *Bicomacta and unions of countable families of metric spaces*, Soviet Math. Dokl. **18** (1977), 165–169.
- [2] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann-Verlag, Berlin, 1989.
- [3] P. Erdős and A. Tarski, *On families of mutually exclusive sets*, Ann. of Math. **44** (1943), 315–329.
- [4] A. Hajnal and I. Juhasz, *Some remarks on a property of topological cardinal functions*, Acta Math. Hungar. **20** (1969), 25–37.
- [5] I. Juhasz, *Cardinal functions in topology ten years later*, Math. Centre tracts **123** (1980), Amsterdam.
- [6] K. Kuratowski and W. Sierpinski, *Le Théorème de Borel–Lebesgue dans la théorie des ensembles abstraits*, Fund. Math. **2** (1921), 172–178.
- [7] D. J. Lutzer and H. R. Bennett, *Separability, the countable chain conditions and the Lindelöf property in linearly orderable spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **23** (1969), 664–667.
- [8] B. E. Shapirovskii, *Canonical sets and character. Density and weight in compact spaces*, Soviet Math. Dokl. **15** (1974), 1282–1287.
- [9] ———, *Cardinal invariants in compact Hausdorff spaces*, Amer. Math. Soc. Translations (2) **134** (1987), 93–118.
- [10] L. Skula, *Hereditary m -separability of ordered spaces* (in Czech), Časopis Pěst. Mat. Fys. **90** (1965), 451–454.

LE PROBLÈME DE SOUSLIN ET LES ESPACES ABSTRAITS

Condition K_0 . Dans le cas où l'on ne sait pas si un espace abstrait est séparable¹, on peut se demander s'il vérifie au moins la condition K_0 , infiniment plus large que la condition de la séparabilité au sens de M. Fréchet, et que voici:

K_0 . Il y a une famille au plus dénombrable d'ensembles ISOLÉS (extraits de l'espace) dont la réunion est partout dense (dans l'espace).

THÉORÈME I. (a) Tout espace (\mathcal{E}) vérifie K_0 . (b) Tout espace bien ordonné vérifie K_0 ²

Je ne connais aucun espace (V) à caractère dénombrable qui ne vérifierait pas K_0 . Et pourtant, on a:

THÉORÈME II. Pour que la réponse au problème bien connu de Souslin soit affirmative, il faut et il suffit que tout espace ordonné dont chaque ensemble isolé est au plus dénombrable vérifie K_0 .

Espaces T (\mathcal{T}). On peut prouver que le problème de Souslin est équivalent au problème de savoir si un espace ordonné connexe dont tout ensemble isolé est au plus dénombrable est nécessairement un espace (\mathcal{E}) de M. Fréchet. Posons, dans cet ordre d'idées, un problème très instructif. Soient T un ensemble et \mathcal{T} une famille ramifiée de sous-ensembles de T ,

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. C.R. Acad. Sci. Paris 203 (1936), 1049-1052. (Note présentée par M. Jacques Hadamard ; Séance du 9 novembre 1936)

¹Pour la terminologie, voir Maurice Fréchet, *Espaces abstraits*, Paris, 1928, p. 289. En ce qui concerne le problème de Souslin, les ensembles et espaces ordonnés, voir Georges Kurepa, *Ensembles ordonnés et ramifiés*, Thèse, Paris, 1935. ou Publ. Math. Univ. Belgrade 4 (1935), 1-138). Rappelons qu'une famille d'ensembles est ramifiée si, A, B étant deux de ses éléments quelconques, on a $A \subset B$, $B \supset A$ ou $AB = O$; une famille ramifiée est monotone (disjonctive) si elle ne contient aucun couple d'éléments disjoints (non disjoints)

²M. Apert m'a signalé que l'espace K (voir Fréchet, loc. cit., p. 165, ne vérifie pas K_0 .

jouissant des propriétés suivantes: A , quel que soit le point a de T la famille $(., a)$ des éléments de \mathcal{T} contenant a est dénombrable, bien ordonnée par rapport à la relation \supset et, enfin, telle que $\prod(., a) = a$; B , toute sous-famille monotone ou disjonctive de \mathcal{T} est au plus dénombrable. En considérant tout élément de \mathcal{T} comme voisinage de chacun de ses points, l'espace (V) ainsi défini, $T(\mathcal{T})$, est-il nécessairement un espace (\mathcal{E}) ? (Ce problème est équivalent au problème de Souslin.)

THÉORÈME III. *Pour qu'un $T(\mathcal{T})$ soit un (\mathcal{E}) , il faut et il suffit qu'il vérifie K_0 .*

Espaces $\mathcal{E}[(\Omega)]$ et $\mathcal{P}[(\Omega)]$. Or tout $T(\mathcal{T})$ est un $\mathcal{E}[(\Omega)]$ dont la définition est analogue à celle des (\mathcal{E}) :

En désignant par (Ω) l'espace ordonné de Cantor des nombres ordinaux finis ou dénombrables, nous dirons qu'un espace, E , est un $\mathcal{E}[(\Omega)]$, en signe $E \in \mathcal{E}[(\Omega)]$, si l'on peut faire correspondre à tout couple de points, a, b , de E un point bien déterminé (a, b) , de (Ω) vérifiant ces conditions: $1^0(a, b) = (a, a)$ entraîne $a = b$; $2^0(a, b) = (b, a)$; 3^0 a, F étant, respectivement, un point et un ensemble quelconques de E , pour que a soit point d'accumulation de F , il faut et il suffit que, quel que soit l'ordinal $\alpha < (a, a)$, il y ait un point, a_α , de F distinct de a , vérifiant $\alpha < (a, a_\alpha) < (a, a)$; 1^0 bis, a, F étant, respectivement, un point et un ensemble quelconques, la relation $a \in \overline{F}$ entraîne $(a, a) \in (\overline{F}, \overline{F}), (\overline{F}, \overline{F})$ désignant la fermeture, dans (Ω) , de l'ensemble (F, F) des points (f, f) de (Ω) , f parcourant F .

Pour prouver que tout $T(\mathcal{T})$ est un $\mathcal{E}[(\Omega)]$ il suffit de désigner, a étant un point de $T(\mathcal{T})$, par (a, a) le type d'ordre de la famille $(., a)$ des éléments de \mathcal{T} contenant a ordonnés par \supset ; si $a \neq b$ sont deux points, $(a, b) = (b, a)$ sera le premier indice ν tel que $A_\nu \neq B_\nu$; A_ν désignant l'élément de $(., a)$ tel que le sous-ensemble ordonné de $(., a)$ à gauche de A_ν soit du type ordinal ν .

THÉORÈME IV. *La classe des espaces $\mathcal{E}[(\Omega)]$ est plus générale que la classe des (\mathcal{E}) ; en particulier, (Ω) est un $\mathcal{E}[(\Omega)]$ sans être un (\mathcal{E}) .*

Que $(\Omega) \in \mathcal{E}[(\Omega)]$, il suffit pour le voir de désigner, α, β étant deux ordinaux tels que $\alpha < \beta < \Omega$, par $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ le nombre α , et par (α, α) , le plus petit ordinal de seconde espèce $\geq \alpha$.

Je ne sais pas si $(\Omega) \in \mathcal{P}[(\Omega)]$ (voir ci-dessous).

Opérateurs \mathcal{E} et \mathcal{P} . D'une manière générale, E, M étant deux espaces, nous dirons que E est un $\mathcal{E}[M]$, en signe $E \in \mathcal{E}[M]$, si à tout couple de points, a, b , de E , l'on peut faire correspondre un point déterminé, (a, b) , de M , vérifiant les conditions O^1, O^2, O^3 et O^1' que voici: O^1 $(a, b) = (a, a)$ entraîne $a = b$; O^2 $(a, b) = (b, a)$; O^3 si $a \in E$ et $F \subseteq E$, pour que,

dans E , $a \in F$, il faut et il suffit que, dans M , le point (a, a) soit point d'accumulation d'au moins un sous-ensemble de l'ensemble (a, F) des points (a, f) de M , f parcourant F ; O^1) a, F étant, respectivement, un point et un ensemble de E , si dans E , $a \in F'$, alors, dans M , $(a, a) \in (\overline{F}, \overline{F})$ (voir ci-dessus).

Si M est un (V) de M. Fréchet, on peut barrer, dans O^3 , les mots "d'au moins un sous-ensemble".

M étant un (V_ω) au sens de M. Fréchet, E sera dit un espace $\mathcal{P}[M]$, en signe $E \in \mathcal{P}[M]$, s'il est un $\mathcal{E}[M]$ et s'il vérifie la condition O_0^4 : quel que soit le point a de E , on peut choisir la suite de voisinages $V_{(a,a)}^n \supseteq V_{(a,a)}^{n+1}$ ($n < \omega$), attachée, dans M , au point (a, a) , de sorte que, pour tout ordinal $n < \omega$, il existe deux ordinaux inférieurs à ω : $\varphi_a(n), \psi_a(n)$, tels que, en désignant par $S(a, V_{(a,a)}^n)$ l'ensemble des points b de E vérifiant $(a, b) \in V_{(a,a)}^n$, la relation $b \in S(a, V_{(a,a)}^{\varphi_a(n)})$ entraîne $S(b, V_{(b,b)}^{\psi_a(n)}) \subseteq S(a, V_{(a,a)}^n)$.

THÉORÈME V. M étant un (V_ω) , E étant un $\mathcal{P}[M]$ tel que l'ensemble $[E, E]$ des points (e, e) de M , e parcourant E , soit composé d'un point de M , pour que E soit un (\mathcal{P}) au sens de M. Fréchet, il faut et il suffit qu'il vérifie l'axiome de séparation de M. Hausdorff (pour assurer que E soit un (\mathcal{L}) de M. Fréchet).

THÉORÈME VI. Si M est un (V_ω) , tout $\mathcal{E}[M]$ est encore un (V_ω) .

Il serait très intéressant de savoir si, dans l'énoncé précédent, on peut, au lieu de " (V_ω) ", lire partout " (V_ω) vérifiant la condition K_0 ". En particulier, la condition K_0 est-elle vérifiée par tout $\mathcal{E}[(\Omega)]$? (si oui, cela entraînerait la réponse affirmative au problème de Souslin) ou tout au moins par tout $\mathcal{P}[(\Omega)]$?

Y a-t-il un $n < \omega$ tel que $(\Omega) \in \mathcal{E}[R_n]$, R_n désignant l'espace cartésien à n dimensions?

LE PROBLÈME DE SOUSLIN ET LES ESPACES ABSTRAITS

\mathcal{F} étant une famille d'ensembles, nous désignerons par $p_c\mathcal{F}$ et $p_d\mathcal{F}$ la borne supérieure des puissances des familles d'ensembles extraites de \mathcal{F} et bien ordonnées par rapport à \subset et \supset , respectivement; $p_s\mathcal{F}$ désignera la borne supérieure des puissances des familles disjonctives extraites de \mathcal{F} .

E étant un espace abstrait, on désignera par \mathcal{G} ou $\mathcal{G}(E)$ la famille de tous les ensembles ouverts de E; le signe $C\mathcal{G}$ ou $C\mathcal{G}(E)$ représentera la famille des *composants* des ensembles ouverts de l'espace.

En remarquant que, \mathcal{T} étant un tableau ramifié quelconque d'ensembles décroissants (croissants) appartenant à l'espace¹, la famille $C\mathcal{T}$ des composants des éléments de \mathcal{T} est encore un tableau ramifié d'ensembles décroissants (croissants); on peut démontrer le

THÉORÈME I. *Tout espace (V), localement connexe et infini, vérifie $p_c\mathcal{G} = p_cC\mathcal{G} + p_sC\mathcal{G}$ et $p_d\mathcal{G} \geq p_dC\mathcal{G} + p_sC\mathcal{G}$; pour que, pour tout espace (V) localement connexe et infini, $p_d\mathcal{G} = p_dC\mathcal{G} + p_sC\mathcal{G}$, il faut et il suffit que, quel que soit le tableau ramifié infini T, on ait $bT = pT^2$.*

Je ne connais aucun espace abstrait vérifiant $p_d\mathcal{G} > p_dC\mathcal{G} + p_sC\mathcal{G}$.

Remarquons que M. Sierpinski a prouvé l'existence d'un espace (S) vérifiant $p_c\mathcal{G} \neq p_d\mathcal{G}^3$; d'autre part, il y a des espaces homéomorphes d'un continu plan et vérifiant $p_c\mathcal{G} < p_sC\mathcal{G} > p_d\mathcal{G}$.

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. C.R. Acad. Sci. Paris 204 (1937), 325-327. (Note présentée par M. J. Hadamard; Séance du 25 janvier 1937)

AUTHOR'S NOTE. Voir aussi la Note des C.R. Acad. Sci. Paris 203 (1936), 1049-1052; la terminologie et les notations seront celles de cette même Note.

¹Nous dirons qu'une famille ramifiée \mathcal{F} d'ensembles est un *tableau ramifié d'ensembles décroissants (croissants)* si, pour tout $A \in \mathcal{F}$, la famille des $X \in \mathcal{F}$ vérifiant $X \supset A$ ($X \subset A$) est bien ordonnée par rapport à \supset (\subset).

²Cf. la Note des C. R. Acad. Sci. Paris 202 (1936), p. 185

³Voir Fund. Math. 2 (1921), p. 185.

COROLLAIRE. *Pour tout espace (V) localement connexe et infini vérifiant $p_c\mathcal{C}\mathcal{G} \leq p_s\mathcal{C}\mathcal{G}$, on a $p_c\mathcal{G} = p_s\mathcal{G}$.*

En combinant le corollaire précédent avec quelques théorèmes dûs à différents auteurs (voir ci-après), on obtient un théorème liant la condition $p_s\mathcal{C}\mathcal{G} \leq \aleph_0$, nous l'appellerons *la condition de Souslin*, avec d'autres conditions intervenant dans la théorie des espaces abstraits; voici son énoncé:

THÉORÈME II. *Pour tout espace de M. Hausdorff, localement connexe, parfaitement compact et vérifiant $p_c\mathcal{C}\mathcal{G} \leq p_s\mathcal{C}\mathcal{G}$, les conditions suivantes, $1^0, 2^0, \dots, 7^0$, sont deux à deux équivalentes; 1^0 $p_s\mathcal{C}\mathcal{G} \leq \aleph_0$; 2^0 $p_c\mathcal{G} \leq \aleph_0$; 3^0 Tout ensemble clairsemé est au plus dénombrable; 4^0 Tout ensemble infini non dénombrable contient un point de condensation; 5^0 Tout ensemble jouit de la propriété de Lindelöf⁴; 6^0 Tout G (\equiv ensemble ouvert) est un F_σ (\equiv somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés)⁵; 7^0 F étant un ensemble fermé quelconque, il y a une fonction réelle $f(x)$ continue partout (dans l'espace) et vérifiant $F \equiv E[f(x) = 0]$ ⁶*

Pour tout espace ordonné connexe, les conditions $1^0, 2^0, \dots, 7^0$ sont deux à deux équivalentes.

Pour que tout espace ordonné connexe vérifiant la condition de Souslin $p_s\mathcal{C}\mathcal{G} \leq \aleph_0$ — donc aussi les conditions $2^0, \dots, 7^0$ — vérifie encore $p_d\mathcal{G} \leq \aleph_0$, il faut et il suffit que la réponse au problème de Souslin soit affirmative.

Condition C_0 . Désignons par C_0 la condition suivante (vérifiée ou non par un espace):

Il y a une famille au plus dénombrable d'ensembles clairsemés (de l'espace) dont la réunion est partout dense (dans l'espace).

Je ne sais pas si C_0 équivaut à K_0 ; toutefois, il est légitime de remplacer K_0 par C_0 dans chacun des énoncés insérés dans la Note des *Comptes rendus*, 203, 1936, p. 1049; c'est une conséquence de l'égalité $p_c\mathcal{G} = \aleph_0$ vérifiée par tout espace ordonné connexe tel que $p_s\mathcal{G} = \aleph_0$.

PROBLÈME D'INERTIE. *F étant une famille d'ensembles vérifiant $p_c\mathcal{F} = p_d\mathcal{F}$, a-t-on nécessairement $p_c\mathcal{F}_\sigma = p_d\mathcal{F}_\sigma$ ⁷?*

La réponse affirmative au problème précédent entraîne une au problème de Souslin. En effet, \mathcal{F} désignant la famille des ensembles ouverts connexes d'un espace ordonné connexe quelconque vérifiant $p_s\mathcal{G} = \aleph_0$,

⁴Pour les conditions $2^0, 3^0, 4^0, 5^0$ voir le travail cité de M. Sierpinski, voir aussi K. Kenigui, *Fund. Math.* 21 (1933), 244-249.

⁵Voir P. Aleksandroff, P. Urysohn, *Proc. Acad. Amsterdam* 14 (1929), p. 39

⁶Voir N. Vedenisoff, *Fund. Math.* 27 (1936), 234-238

⁷ \mathcal{F}_σ désigne la famille des ensembles $\sum_{n < \omega} A_n$, ($A_n \in \mathcal{F}$).

on a, d'une part, $p_c\mathcal{F} = p_d\mathcal{F} = \aleph_0$, $p_c\mathcal{G} = \aleph_0$, $\mathcal{G} \equiv \mathcal{F}_\sigma$, et, de l'autre, la relation $p_d\mathcal{G} = \aleph_0$ entraîne la réponse affirmative au problème de Souslin.

Je remarque que la réponse affirmative au problème d'inertie entraîne l'égalité $p_cB = p_dB$ pour chaque classe B de M. Borel d'ensembles de nombres réels (remarquons que la relation $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ entraîne $p_cB = p_dB$).

Ajoutons que, \mathcal{F} désignant la famille des ensembles formés de nombres réels, MM. Lusin, Sierpinski et Hausdorff ont fait récemment de profondes recherches relatives aux nombres $p_c\mathcal{F}_\sigma$ et $p_d\mathcal{F}_\sigma$ ⁸. Alors que, d'après un théorème fondamental dû à Baire, on a $p_c\mathcal{F} = p_d\mathcal{F} = \aleph_0$, tout ce qu'on sait des nombres $p_c\mathcal{F}_\sigma$, $p_d\mathcal{F}_\sigma$ c'est que chacun d'eux est $> \aleph_0$.

⁸Voir par exemple N. Lusin, *Suites stationnaires*, Paris, 1935, et W. Sierpinski, *Hypothèse du continu*, Varsovie, 1934, p. 118.

LE PROBLÈME DE SOUSLIN ET LES ESPACES ABSTRAITS

Introduction

1. Michel Souslin, a posé le problème de savoir si un ensemble ordonné, continu, jouissant de la propriété que chaque famille d'intervalles deux à deux disjoints extraits de l'ensemble soit au plus dénombrable, est semblable à un ensemble de nombres réels.¹

Voici une autre forme du problème de Souslin.

Un espace ordonné² connexe vérifiant la condition que voici:

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Rev. Cienc. (Lima) N° 453-AÑO XLVII (1945), 457-488

AUTHOR'S NOTE. Dans C. R. Acad. Sci. Paris, 204 (1937), pp. 325-327 j'ai énoncé quelques résultats dont nous allons nous occuper et dont j'ai parlé Varsovie le 9 Avril 1937 à la Séance de la Société Polonaise de Mathématiques, Section Varsovie.

¹C'est N. Lusin qui a transmis le problème de son élève Souslin (1894-1919) à N. Sierpinski, lequel l'a inséré dans *Fundamenta mathematicae* (1, 1920, p. 223 problème 3); voir aussi *Waidomosci matematyczne* (24, 1920, pp. 93-96) et le livre de N. Sierpinski: *Nombres transfinis* (Paris 1926, p. 153).

Le problème de Souslin fut traité par moi dans la Thèse *Ensembles ordonnés et ramifiés* (Paris, 1935, pp. 1-138; aussi *Publ. Math. Univ. Belgrade*, 4 1935, 1-138).

A propos du problème de Souslin, rappelons le théorème de Cantor disant que toute famille d'intervalles disjoints de nombres réels est $\leq \aleph_0$ (cf. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin, 1932, p. 133)

²Pour la terminologie des espaces abstraits, voir Maurice Fréchet, *Espaces abstraits*, Paris, 1927 (aussi P. Aleksandrow-Hopf, *Topologie I*, Berlin 1935). H étant un ensemble ordonné, l'espace ordonné H est l'espace (V) qu'on obtient de l'ensemble ordonné, H en considérant dans celui-ci chacun de ses intervalles comme voisinage de tout point qui lui appartient (notons que l'ensemble de tous les points de H succédant à un point de H ou précédant un point de H est considéré aussi comme un intervalle de H).

D'une manière générale, un espace abstrait est ordonné s'il y a un ensemble ordonné H tel que l'espace soit homéomorphe de l'espace ordonné H. Par exemple, l'espace à zéro dimension de Baire est un espace ordonné puisqu'il est homéomorphe de l'espace ordonné des nombres irrationnels. Il faut bien différencier les deux notions: espace et ensembles ordonnés: dans un espace ou un ensemble ordonnés, on ne suppose aucune notion d'ordre et de point d'accumulation, respectivement. Si H est un ensemble ordonné et E un ensemble ordonné extrait de H, l'espace E défini comme une partie de l'espace ordonné H est, en général, distinct de l'espace ordonné E.

chaque famille d'ensembles ouverts deux à deux disjoints extraits de l'espace est au plus dénombrable

contient-il un ensemble au plus dénombrable partout dense?³

2. Dans ce qui suit, nous verrons que la condition précédente — nous l'appellerons *la condition de Souslin* — est intimement liée avec bien des conditions intervenant dans la théorie de espaces abstraits et des fonctions réelles (cf. n°1, 18 th. 3); en particulier, nous verrons que *la condition de Souslin est équivalente à celle que chaque suite croissante d'ensembles ouverts est au plus dénombrable*⁴ (cf. th. 4, équivalence $\beta_1 \rightleftharpoons \beta_2$).

La condition de Souslin est une conséquence de celle que toute suite décroissante d'ensembles ouverts est au plus dénombrable (cf. n° 2, 4).

Pour que, inversement, la condition de Souslin entraîne la dénombrabilité de chaque suite décroissante infinie d'ensembles ouverts, il faut et il suffit que la réponse au problème de Souslin soit affirmative (cf. n° 2, 42).

Par conséquent, le problème de Souslin est équivalent à celui-ci: *Si dans un espace ordonné connexe toute suite croissante d'ensembles ouverts est $\leq \aleph_0$, en est-il encore ainsi de chaque suite croissante d'ensembles fermés?*

Nous démontrerons que la réponse au problème que nous venons d'énoncer est affirmative, pourvu que les ensembles fermés y intervenant soient *dénombrables*, et que d'autre part, s'il en était ainsi pour des ensembles fermés *séparables*, il en serait encore ainsi pour des ensembles fermés quelconques (cf. th. 7 a et 7 b).

3. De là jusqu'à considérer les nombres $p_c G$, $p_d G$ (cf. ci-après n° 1, 15 formules (8), (9)), il n'y a qu'un pas.

René Baire a démontré que tout espace euclidien vérifie $p_c G = p_d G (= \aleph_0)$. La même égalité subsiste encore pour tout espace (V) définissable moyennant une famille au plus dénombrable de voisinages, comme l'a prouvé M. Fréchet.⁵ Par ailleurs, les mêmes méthodes fournissent l'égalité $p_c G = p_d G$ pour tout espace distancié.

D'autre part, M. Sierpinski⁶ a prouvé l'existence d'un espace (s) vérifiant $p_c G < p_d G$ et l'existence d'un autre espace (s) vérifiant $p_c G > p_d G$.

³L'équivalence des deux problèmes résulte du théorème de Cantor d'après lequel un ensemble ordonné continu contenant un ensemble dénombrable partout dense est semblable à un ensemble de nombres réels.

⁴N. C. Kuratowski a bien voulu m'observer qu'à l'époque où il s'occupait du problème de Souslin il connaissait l'équivalence.

⁵Loc. cit. ³) p. 234.

⁶Fund. Math. 3 (1921), 179–188; en particulier §§ 5 et 6.

Dans le présent travail, en nous servant des tableaux ramifiés⁷, nous prouverons, d'une part, que tout espace ordonné vérifie $p_c G < p_d G$ (cf. th. 8), et, d'autre part, que tout espace (V) localement connexe tel que $p_c \varphi G = p_d \varphi G$ vérifie $p_c G \leq p_d G$ (v. th. 2b), l'égalité identique dans chacun des deux cas étant équivalente à l'égalité $pT = bT$ (voir (4), (6)) pour tout tableau ramifié infini T (cf. th. 2c).

1. Définitions préliminaires

1.1. Tableaux ramifiés⁸

1.11. *Définitions des $T, R_\alpha T, \gamma T$.* Un ensemble T partiellement ordonné par une relation d'ordre est dit un *tableau ramifié* par rapport à la relation d'ordre si, quel que soit la point a de T , l'ensemble

(1) $(., a)_T$ de tous les points de T précédant le point a est bien ordonné (et donc pouvant être aussi vide).

Dans ce qui suit, T désignera un tableau ramifié quelconque.

En désignant, pour un nombre ordinal α , par

$$(2) \quad R_\alpha T$$

l'ensemble des points a de T pour chacun desquels le type ordinal de l'ensemble bien ordonné $(., a)_T$ est α , soit

$$(3) \quad \gamma T$$

le type d'ordre de l'ensemble bien ordonné des α vérifiant $R_\alpha T \neq \emptyset$.

Manifestement, le nombre ordinal γT est bien déterminé aussi bien que la suite

$$R_0 T, R_1 T, \dots, R_\alpha T, \dots, (\alpha < \gamma T);$$

en particulier, on voit que $R_0 T$ coïncide avec l'ensemble des premiers points de T .

On voit que

$$T = \sum_{\alpha} R_\alpha T, \quad (\alpha < \gamma T)$$

⁷Pour la terminologie, vois ci-après, n° 1.

⁸Cf. ma Thèse, p. 73 et p. 127 et note 1); aussi *C. R. Acad. Sci. Paris* 202 (1936), p. 185

et

$$T = \sum_a [a, \cdot)_T, \quad (a \in R_0 T),$$

en désignant, pour un $a \in T$, par $[a, \cdot)_T$ l'ensemble des $x \in T$ tels que $a \leq x$.

En désignant, pour un ensemble ou un ordinal X , par

$$(4) \quad pX \quad \text{ou} \quad p(X)$$

la puissance de X , on démontre sans peine le

LEMME 1. Si $pT \geq \aleph_0$, alors $pT = p(\gamma T)$. borne sup $pR_\alpha T$.
 $\alpha < \gamma T$

1.12. Définitions des $[a]_T, |a|_T$. Tableaux ram. dégénérés. Nombre bT . Pour un point a de T , nous désignerons respectivement par

$$(5) \quad [a]_T, \quad |a|_T$$

l'ensemble de tous les points x de T comparables à a , et vérifiant $(\cdot, x)_T = (\cdot, a)_T$, respectivement.

Par conséquent, $a \in [a]_T, a \in |a|_T$; et si $a \in R_\alpha T$, alors $|a|_T \subseteq R_\alpha T$.

Un tableau ramifié est dit *dégénéré* si, quel que soit $a \in T$, l'ensemble $[a]_T$ est un sous-ensemble ordonné de T . Par exemple, tout sous-ensemble ordonné de T est dégénéré, de même que l'est tout T ne contenant aucun couple de points distincts comparables.

Nous aurons besoin des nombres cardinaux

$$(6) \quad \begin{aligned} bT &= \text{borne sup}_x pX \\ p_c T &= \text{borne sup}_y pY \\ p_s T &= \text{borne sup}_z pZ \end{aligned}$$

X, Y, Z parcourant respectivement tous les sous-ensembles dégénérés de T , tous les sous-ensembles bien ordonnés de T , et tous les sous-ensembles de T dont chacun est composé de points deux à deux incomparables.

Evidemment, $bT \leq pT$; nous verrons comment peut s'exprimer l'égalité hypothétique $bT = pT$ pour tout T infini⁹.

⁹Dans la Thèse (p. 130) j'ai appelé *hypothèse de ramification* l'hypothèse d'après laquelle tout T contiendrait un sous-ensemble dégénéré de puissance bT , ce qu'on pourrait dire en s'exprimant que le nombre cardinal bT est atteint dans T . L'hypothèse est équivalente à celle que tout T infini a même puissance que l'un de ses sous-ensembles dégénérés (ibidem, p. 132); par conséquent, l'hypothèse entraîne $pT = bT$ pour T infini.

1.13. *Tableaux ramifiés d'ensembles.* Une famille d'ensembles est dite *ramifié* si pour tout couple de ses éléments A, B on a ou bien $A \supset B$, ou bien $B \subset A$ ou bien $A \cap B = \emptyset$.

Une famille ramifiée τ d'ensembles sera dite un *tableau ramifié croissant (décroissant)* si elle est un tableau ramifié par rapport à la relation $\subset (\supset)$, c'est-à-dire si, quel que soit l'élément A de τ , la famille des ensembles X de τ tels que $X \subset A$ ($X \supset A$) est bien ordonnée par $\subset (\supset)$. Dès lors, pour un tableau τ d'ensembles, les signes $\gamma\tau$, $R_\alpha\tau$, ($\alpha < \gamma\tau$), sont définis.

Ce qui facilite l'étude des τ croissants¹⁰ c'est le

LEMME 2. *Tout tableau ramifié croissant d'ensembles est dégénéré.*

1.14. *Composants (Opérateur φ).* Dorénavant, sauf avis contraire, les ensembles intervenant dans l'article, appartiendront à un espace (V) . Rappelons que, d'après M. Hausdorff, un sous-ensemble H d'un ensemble E est dit un *composant* de E si H est connexe et s'il n'y a aucun ensemble connexe H_0 tel que $H \subset H_0 \subsetneq E$.

Pour un ensemble E , nous désignerons par

$$(7) \quad \varphi E$$

la famille des composants de E et, pour une famille F , par

$$(7') \quad \varphi F$$

la famille des composants des éléments de F , chacun des composants n y comptant qu'une fois (de manière que la famille φF ne contienne pas d'éléments égaux).

Voici un théorème dont nous ferons fréquemment usage:

THÉORÈME 1. *τ étant un tableau ramifié d'ensembles croissant (décroissant), la famille $\varphi\tau$ est un tableau ramifié d'ensembles croissant (décroissant); de plus $p\tau \leq p\varphi\tau$.*

Le corollaire que voici montre combien est naturelle la notion de tableaux ramifiés d'ensembles:

COROLLAIRE 1. *S étant une suite croissante (décroissante) d'ensembles la famille φS est un tableau ramifié croissant (décroissant) d'ensembles tel que $pS \leq p\varphi S$.*

¹⁰ Dans la Thèse, je n'ai considéré que des τ décroissants que, j'ai appelés tableaux ramifiés d'ensembles, tout court.

La démonstration du th. résulte des propositions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que voici et qu'on prouve sans peine:

α_1 Pour tout ensemble E , la famille φE des composants de E est composée d'ensembles disjoints dont la somme est E ;

α_2 A, B étant deux ensembles vérifiant $A \subset B$, la famille φB contient un ensemble n'appartenant pas à φA ; de plus si $A_0 \in \varphi A, B_0 \in \varphi B$, alors ou bien $A_0 \subseteq B_0$, ou bien $A_0 B_0 = 0$;

α_3 A_0, B_0 désignant deux éléments de $\varphi \tau$ tels que $A_0 \subset B_0$, le tableau τ contient deux éléments A et B vérifiant $A_0 \subseteq A, B_0 \subseteq B, A \subset B$.

1.2 Familles $G, \varphi G$. Nombres $p_c G, p_d G, p_s G$.

F étant une famille d'ensembles, nous poserons¹¹

$$(8) \quad \begin{aligned} p_c F &= \text{borne sup } p S \\ p_d F &= \text{borne sup } p X^s \\ p_s F &= \text{borne sup } p Y, \end{aligned}$$

S, X, Y parcourant respectivement toutes les suites croissantes, décroissantes d'ensembles extraits de F , et toutes les familles d'ensembles disjoints extraits de F ¹².

Pour un espace E , nous désignerons par

$$(9) \quad G \quad \text{ou} \quad G(E)$$

la famille des ensembles ouverts extraits de l'espace.

Ainsi est parfaitement déterminée la signification de chacun des symboles.

$$(9') \quad G, \varphi G, p_i G, p_i \varphi G \quad \text{pour } i = c, d, s.$$

LEMME 3. On a $p_s G \leq p_c G, p_s G \leq p_d G$, pour tout espace (V)

Et maintenat voici un fait montrant l'intérêt de la connexité locale d'un ensemble (notion est due à M. Mazurkiewicz et à H. Hahn):

¹¹Les indices sont des initiales des mots croissant, décroissant, Souslin.

¹²C'est que d'habitude l'on désigne par G un ensemble ouvert quelconque.

LEMME 4. *Tout composant de tout ensemble ouvert extrait d'un espace (V) localement connexe est ouvert: $\varphi G \subseteq G$ ¹³.*

LEMME 5. *Tout espace (V) localement connexe infini vérifie*

- (a) $p_s \varphi G \leq p_c G, \quad p_s \varphi G \leq p_d G$
 (b) $p_c \varphi G \leq p_c G, \quad p_d \varphi G \leq p_d G, \quad p_s \varphi G = p_s G.$

Si l'espace n'est pas localement connexe, le lemm 5 ne subsiste pas nécessairement. En effet, M. Aronszajn a bien voulu me communiquer l'exemple d' un continu plan A vérifiant $p_c G = p_d G = \aleph_0$ et $p_s \varphi G = 2^{\aleph_0}$. Pour définir A , soient: $[0,1]$ l'ensemble des nombres réels x verifiant $0 \leq x \leq 1$, C l'ensemble triadique de Cantor extrait de $[0, 1]$, et, pour tout $x \in C$, S_x l'ensemble des points (x, y) du plan, y parcourant $[0, 1]$. On pose $A = [0, 1] + \sum_{x \in C} S_x$. Alors, d'après le théorème de Baire, $p_c G = p_d G = \aleph'_0$;

de même $p_s G = \aleph'_0$. Or, $p_s \varphi G = 2^{\aleph'_0}$; en effet, si $0 < a < b < 1$, soit G l'ensemble - appartenant à A et situé entre les droites $y = a, y = b$; manifestement, G est ouvert dans A , et la famille φG de ses composants coïncide avec la famille des intervalles $G S_x, (x \in C)$. Donc $p \varphi G = p C = 2^{\aleph'_0}$.

2. L'énoncé du théorème 2. Condition de Souslin

2.1. THÉORÈME 2. *a) Tout espace (V) localement connexe infini vérifie $p_c G = p_c \varphi G + p_s \varphi G$;*

b) Tout espace (V) localement connexe infini vérifie $p_d G \geq p_d \varphi G + p_s \varphi G$ (cf. (7'), (8), (9));

c) Pour que tout espace (V) localement connexe infini vérifie $p_d G = p_d \varphi G + p_s \varphi G$ il faut et il suffit que, quel que soit le tableau ramifié infini T , on ait $pT = bT$ (cf. (4), (6)).

Le démonstration du théorème 2 étant assez longue, nous l'exposerons à la fin de l'article (cf. n° 3).

Le lemm 4 et le th. 2 a) entraîne le

COROLLAIRE 2. *Tout espace (V) localement connexe infini tel que $p_c \varphi G \leq p_s G$ ¹⁴ vérifiera $p_c G = p_s G$.*

¹³cf. H. Hahn, *Fund. Nat.*2,1931, pp.189-192 et Fréchet, loc. cit.³⁾ p. 229. Les raisonnements de H. Hahn (idem p.192) montrent que dans le cas d'un espace (V) définissable moyennant \aleph_0 de voisinages, la réciproque du lemme 4 est vraie aussi.

¹⁴Je ne connais aucun espace localement connexe vérifiant $p_c \varphi G > p_s G$.

COROLLAIRE 3. *Pour tout espace (V) infini localement connexe tel que $p_c \varphi G \leq p_s G \leq \aleph_0$, on aura $p_c G \leq \aleph_0$.*

2.2. *Liens de la condition de Souslin avec d'autres conditions.* Si, pour un espace, $p_s G \leq \aleph_0$ (cf. (8), (9)), nous dirons que l'espace vérifie la condition de Souslin.

En combinant le corollaire précédent avec quelques théorèmes dûs à différents auteurs (voir ci-après), nous allons obtenir un théorème liant la condition de Souslin avec d'autres conditions:

THÉORÈME 3. *Pour tout espace de M. Hausdorff localement connexe, bicompat,¹⁵ les conditions $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_7$ que voici sont deux à deux logiquement équivalentes:*

- β_1 $p_s G \leq \aleph_0$ (condition de Souslin);
- β_2 $p_c G \leq \aleph_0$
- β_3 Tout ensemble clairsemé est au plus dénombrable;
- β_4 Tout ensemble infini non dénombrable contient un point de condensation;
- β_5 Tout ensemble jouit de la propriété de Lindelöf;
- β_6 Tout G (\equiv ensemble ouvert) est un F_σ (\equiv somme de $\leq \aleph_0$ ensembles fermés),
- β_7 F étant un ensemble fermé quelconque, il y a une fonction réelle $f(x)$ continue dans l'espace et telle que $F = \{x : f(x) = 0\}$.

Tout d'abord, M. Vedenisoff¹⁶ a prouvé que $\beta_7 \Leftrightarrow \beta_6$ pour tout espace bicompat de M. Hausdorff; d'après M. Alexandroff et Urysohn¹⁷, on a, dans les mêmes hypothèses, $\beta_6 \Leftrightarrow \beta_5$. Or, tout espace de M. Hausdorff, bicompat et vérifiant β_5 , est à caractère dénombrable et, par conséquent, un espace (S) de M. Fréchet¹⁸; alors, d'après Kuratowski-Sierpinski¹⁹ dans un espace pareil, les conditions β_5, β_4 sont équivalentes. De plus, d'après M. Sierpinski²⁰, pour tout espace (S), les conditions $\beta_4, \beta_3, \beta_2$ sont deux à deux équivalentes. Puisque, enfin, d'après le corollaire 3, $\beta_1 \Leftrightarrow \beta_2$, le th. 3 est établi.

¹⁵ Bicompat \equiv parfaitement compact (\equiv chaque couverture de l'espace est réductible à une couverture finie).

¹⁶ *Fund. Math.* 27 (1936), 234-238, en particulier, p. 238

¹⁷ *Proc. Acad. Amsterdam* 14 (1929), 38-39.

¹⁸ *Loc. cit.* 18) p. 35 p.65 th. 111; aussi *loc. cit.* 3) p. 254.

¹⁹ *Fundamenta math.* 2 (1921), 172-178, en particulier p. 176

²⁰ *Fund. Math.* 2 (1921), pp. 179-188, aussi K. Kunugui, *Fund. Math.* 21 (1933), 244-249.

2.3. *Condition de Souslin et espaces ordonnés.* Considérons un espace ordonné connexe vérifiant la condition de Souslin $p_s G \leq \aleph_0$; l'espace étant localement connexe, on aura $p_s \varphi G = p_s G$ et donc $p_s \varphi G = \aleph_0$; dès lors, d'après le th. 2a), $p_c G = \aleph_0$. L'espace pouvant être supposé bicomact²¹ ou peut appliquer le th. 3; on obtient le

THÉORÈME 4. *Pour tout espace ordonné connexe, les conditions $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\tau$ (intervenant dans le théorème 3) sont deux à deux équivalentes.*

COROLLAIRE 4. *Tout espace ordonné connexe tel que $p_s G = \aleph_0$ vérifie chacune des conditions $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\tau$*

2.4. *La condition $p_d G \leq \aleph'$ et le problème de Souslin.*

2.41. M. Sierpinski⁷⁾ a prouvé que, pour des espaces (S), les conditions $p_c G \leq \aleph_0$ et $p_d G \leq \aleph_0$ chevauchent, et que, pour un espace (S), la condition $p_d G \leq \aleph$ est équivalente à celle que tout ensemble E extrait de l'espace contienne un ensemble au plus dénombrable dans E (cf. loc. cit., §4). Or, on démontre facilement que, si un espace ordonné contient un ensemble au plus dénombrable partout dense, chaque ensemble E de l'espace jouit de la même propriété: E contient un sous-ensemble au plus dénombrable partout dense sur E . Dès lors, le

THÉORÈME 5. *Pour qu'un espace ordonné soit séparable, il faut et il suffit que $p_d G \leq \aleph_0$.*²²

Puisque tout espace séparable vérifie $p_s G \leq \aleph_0$ (G. Cantor), les théorèmes 4 et 5, combinés avec un théorème de Cantor, entraînent le

THÉORÈME 6. *Pour tout espace ordonné connexe, la condition $p_d G \leq \aleph_0$ entraîne chacune des conditions $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\tau$. Pour qu'inversement l'ensemble de celles-ci entraîne, pour un espace ordonné connexe quelconque, la condition $p_d G \leq \aleph_0$, il faut et il suffit que la réponse au problème de Souslin soit affirmative.*

2.42. *Une réduction du problème de Souslin.* Autrement dit, pour résoudre par l'affirmative le problème de Souslin, il faut et il suffit que un espace ordonné connexe quelconque vérifiant $p_c G \leq \aleph_0$, chaque suite

²¹En effet, soit H un ensemble ordonné tel que l'espace E soit homéomorphe de l'espace ordonné H (ct³); en ajoutant, au besoin, un premier ou un dernier point, ou les deux à H , et en désignant l'ensemble ordonné ainsi obtenu par H_0 , on peut substituer à l'espace donné l'espace ordonné H_0 qui est bicomact.

²²Une autre démonstration du th. 5 s'obtient de ce que, H désignant un ensemble ordonné de type d'ordre $2\aleph$, l'espace ordonné H : vérifie $p_d G = \aleph_0$ est séparable et contient topologiquement tout espace ordonné séparable.

croissante d'ensembles fermés (et non seulement chaque suite croissante d'ensembles ouverts) soit au plus dénombrable. Or, tout se que je peux faire là-dessus c'est le

THÉORÈME 7. a. Dans un espace ordonné connexe vérifiant $p_c G \leq \aleph_0$, chaque suite croissante d'ensembles fermés dénombrable est au plus dénombrable;

b. Si dans un espace ordonné connexe vérifiant $p_c G \leq \aleph_0$, chaque suite croissante d'ensembles fermés séparables est au plus dénombrables, il en est encore ainsi de chaque suite croissante d'ensemble fermés extraits de l'espace.

La démonstration du th. 7b résultant du n°3, 225 (voir ci-après), démontrons le théorème 7a.

2.421. Supposons, par impossible, qu'on puisse extraire d'un espace ordonné connexe tel que $p_c G = \aleph_0$ une suite croissante non dénombrable d'ensembles fermés dénombrables, soit

$$F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_\alpha \subset \dots, \quad pF_\alpha = \aleph_0, \quad (\alpha < \Omega).$$

En désignant par G_α le complémentaire (par rapport à l'espace) de l'ensemble F_α , nous aurons la suite décroissante d'ensembles ouverts

$$(S) \quad G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_\alpha \supset \dots, \quad (\alpha < \Omega).$$

D'après le th. 1, φS sera un tableau ramifié décroissant tel que $pS \leq p\varphi S$, et donc $p_\varphi S \geq \aleph_1$. L'espace ordonné étant connexe et donc localement connexe, on aura $\varphi S \subseteq \varphi G \subseteq G$. Vu $p_s G = \aleph_0 = p\varphi G$, la famille $R_\alpha \varphi S$ sera, quel que soit $\alpha < \gamma\varphi S$, au plus dénombrable; dès lors $\gamma\varphi S \geq \Omega$ et donc $\gamma\varphi S = \Omega$, et finalement $p\varphi S = \aleph_1$.

2.422. En écrivant, pour abrégé, R_α au lieu de $R_\alpha \varphi S$, démontrons que, en désignant par F^α le complémentaire de la somme des ensembles constituant la famille R_α , on a

$$pF^\alpha = \aleph_0 \quad \text{pour tout} \quad \alpha < \Omega.$$

En effet, soit $\alpha < \Omega$; en désignant pour un $A \in R_\alpha$ par α_A le plus petit indice ξ tel que A soit un composant de G_ξ il est évident que $\alpha \leq \alpha_A$; en posant

$$\alpha_0 = \text{borne sup}_A \alpha_A, \quad (A \in R_\alpha),$$

on aura, la famille R_α étant au plus dénombrable, $\alpha_0 < \Omega$ et donc $\alpha \leq \alpha_0 < \Omega$.

Nous disons que $F^\alpha \subseteq F_{\alpha_0}$.

Dans le cas contraire, il existerait un point a de F^α n'appartenant pas à F_{α_0} c'est-à-dire appartenant à G_{α_0} et à fortiori à un composant, soit X , de G_{α_0} . Puisque $X \in \varphi S$, soit $X \in R_\beta$; on aurait nécessairement $\beta < \alpha$, et il y aurait un $A \in R_\alpha$ tel que $X \supset A$; donc $\beta < \alpha_A \leq \alpha_0$. Ainsi l'ensemble ouvert G_{α_0} aurait le composant X contenant au sens strict le composant A de l'ensemble G_{α_A} , ce qui est incompatible avec $G_{\alpha_A} \supseteq G_{\alpha_0}$, $\alpha_A \leq \alpha_0$.

On a donc $F^\alpha \subseteq F_{\alpha_0}$ et dès lors $pF^\alpha \leq \aleph_0$, les ensembles F_α étant, par hypothèse, dénombrables.

2.423. Il y a un indice $\nu < \Omega$ tel que, pour tout ξ entre ν et Ω , quel que soit $A \in R_\xi$, A contienne deux éléments de $R_{\xi+1}$.

Dans le cas contraire, il y aurait une infinité non dénombrable de couples d'éléments Y, Z de φS tels que $Y \supset Z$ sans qu'il y ait aucun $V \in \varphi S$ tel que $Y \supset V \supset Z$; en choisissant alors dans $Y - Z$ un ensemble ouvert, on obtiendrait une infinité non dénombrable d'ensembles, ouverts disjoints contrairement à l'hypothèse $p_c G = \aleph_0$ et donc à $p_s G = \aleph_0$ (cf. th. 3).

2.424. Il y a un indice $\mu < \Omega$ tel que, quel que soit $\mu < \alpha < \Omega$, tout élément $A \in R_\alpha$ contienne une infinité non dénombrable d'éléments de φS .

Sinon en désignant par τ la famille des $A \in \varphi S$ contenant $\leq \aleph_0$ éléments de φS , on aurait $p\tau = \aleph_1$, ce qui, vu les relations

$$p[A]_{\tau \leq \aleph_0}, \quad (A \in R_0\tau), \quad \sum_A [A]_\tau = \tau, \quad (A \in R_0\tau; \text{ cf. (2), (5)})$$

entraînerait la non dénombrabilité de $R_0\tau$ et à fortiori la relation $p_s G > \aleph_0$.

Quitte à supprimer les familles $R_0, R_1, \dots, R_\xi, \dots$, parcourant tous les indices (éventuels) inférieurs au plus grand des deux nombres ν, μ nous pouvons supposer que $\mu = \nu = 0$ c'est-à-dire que pour tout $\alpha < \Omega$ et pour tout $A \in R_\alpha$, A contient au moins deux éléments de $R_{\alpha+1}$ et une infinité dénombrable d'éléments de φS .

2.425. Quel que soit $A \in \varphi S$, A contient deux éléments de φS dont les fermetures sont sans point commun.

En effet, si $A \in R_\alpha$, il y a un $\alpha < \alpha_1 < \Omega$ tel qu'aucun élément de R_{α_1} n'ait une extrémité commune à A^{23} , sans que la famille des éléments de φS

²³Bien entendu, les éléments de φS étant connexes et pouvant être supposés extraits d'un ensemble ordonné E , chacun d'eux contient tous les points de E intermédiaires de deux points de E , pourvu que ceux-ci lui appartiennent.

ayant pour l'extrémité une même extrémité de A serait non dénombrable et décroissante. On en conclut facilement l'existence de deux éléments de φS appartenant à A et dont les fermetures sont disjointes.

2.426. Passons à la conclusion. Soient A_0, A deux éléments de φS dont les fermetures soient disjointes; soient A_{00}, A_{01} deux éléments de φS appartenant à A_0 dont les fermetures $\overline{A_{00}}, \overline{A_{01}}$, sont disjointes; d'une manière analogue on définit A_{10}, A_{11} . D'une manière générale, en supposant défini l'élément A_{i_0, i_1, \dots, i_k} de φS , nous définirons

$$A_{i_0 i_1 \dots i_k 0}, \quad A_{i_0 i_1 \dots i_k 1}$$

comme deux éléments quelconques de φS appartenant à $A_{i_0 \dots i_k}$ et dont les fermetures sont disjointes.

En désignant par F la famille des ensembles

$$\overline{A_{i_0}} \overline{A_{i_0 i_1}} \dots \overline{A_{i_0 i_1 \dots i_k}} \dots, \quad (i_k = 0 \text{ ou } 1, k = 0, 1, 2, \dots),$$

chacun de ceux-ci sera non vide (exception faite de deux d'eux au plus) et disjoint de tout autre élément de F ; on aura $pF = 2^{\aleph_0}$.

Or, soit $\alpha < \Omega$ tel que tout $A_{i_0 \dots i_k}$ appartienne à l'une des familles $R_0, R_1 \dots, R_\xi \dots, (\xi < \alpha)$, l'ensemble F_α complémentaire de la somme des éléments de R_α étant, comme nous avons vu au plus dénombrable, on en déduit que, exception faite de $\leq \aleph_0$ éléments de F (ceux qui sont points de F_α), tout élément de F appartient à un et un seul élément de R_α . Inversement, un élément de R_α ne pouvant contenir deux éléments de F , on en déduirait $pR_\alpha = pF - \aleph_0$, ce qui est impossible, vu les relations $pR_\alpha = \aleph_0 \quad pF = 2^{\aleph_0}$. C. q. f. d.

2.5 THÉORÈME 8. *Tout espace ordonné vérifie $p_c \varphi G = p_d \varphi G$ et $p_c G \leq p_d G$.*

L'égalité $p_c \varphi G = p_d \varphi G$ étant immédiate, prouvons que $p_c G \leq p_d G$. Pour cela, soit H un ensemble ordonné tel que l'espace donné soit homéomorphe de l'espace ordonné H (cf. 3). Soit H_0 l'ensemble ordonné qu'on obtient de l'ensemble ordonné H en y barrant un point dans tout couple de points consécutifs (éventuels) de H dont aucun n'est isolé et en intercalant un ensemble ordonné semblable des nombres réels entre tout couple de points consécutifs isolés de H . Alors on prouve sans peine que chacun des deux nombres $p_c G, p_d G$ est un même pour des espaces ordonnés H, H_0 . Or, l'espace ordonné H_0 est localement connexe. Il s'agit donc de prouver que $p_c G \leq p_d G$ pour tout espace ordonné localement connexe c'est-à-dire

que, quelle que soit la suite croissante S d'ensembles ouverts extraits d'un espace ordonné localement connexe, on ait $pS \leq p_d G$.

Or, d'après le corollaire 1, $pS \leq p\varphi S$; le tableau φS étant dégénéré (lemme 2), on a $p[A]_{\varphi S} \leq p_c \varphi G$ pour tout $A \in R_0 \varphi S$ ce qui, vu la relation $\varphi S = \sum_A [A]_{\varphi S}$, ($A \in R_0 \varphi S$) entraîne

$$p\varphi S \leq p_s \varphi G \cdot p_c \varphi G \leq p_d G \cdot p_d \varphi G \leq p_d G \cdot p_d G = p_d G.$$

2.6. Deux problèmes

2.61. J'avais posé le problème (loc. cit. 1) si pour une famille F d'ensembles quelconque l'égalité $p_c F = p_d F$ entraîne $p_c F_\sigma = p_d F_\sigma$ (F_σ désignant la famille des sommes de $\leq \aleph_0$ ensembles extraits de F).

Or, F désignant une famille infinie non dénombrable quelconque d'ensembles disjoints, il est clair que

$$p_c F = p_d F = 1, \quad p_d F_\sigma = \aleph_0, \quad p_c F_\sigma \geq \aleph_1, \quad \text{donc } p_c F_\sigma > p_d F_\sigma$$

Mais je ne sais pas si l'égalité $p_c F = p_d F$ entraîne $p_c F_\sigma \geq p_d F_\sigma$

S'il en était ainsi, la réponse au problème de Souslin serait affirmative. En effet, dans le cas d'un espace ordonné connexe tel que $p_c G = \aleph_0$, d'une part $p_c \varphi G = p_d \varphi G = \aleph_0$ et, d'autre part, $G = (\varphi G)_\sigma$, donc, par hypothèse, $p_c G \geq p_d G$, d'où $p_d G = \aleph_0$ ce qui, d'après le th. 5, entraîne la séparabilité de l'espace et dès lors la réponse affirmative au problème de Souslin.

2.62. Tout ensemble clairsemé extrait d'un espace vérifiant la condition de Souslin étant, d'après le th. 3, au plus dénombrable, il en résulte que chaque famille décroissante d'ensembles clairsemés extraits de l'espace est au plus dénombrable. En est-il encore ainsi de chaque suite croissante d'ensembles clairsemés? Ou, ce qui revient au même, F étant une famille monotone d'ensembles clairsemés extraits d'un espace ordonné vérifiant la condition de Souslin, la somme des éléments de F est-elle au plus dénombrable? Dans le cas des ensembles isolés, il en est bien ainsi, de même qu'il en est ainsi pour des ensembles clairsemés linéaires²⁴.

3. Démonstration du théorème 2 (voir ci-dessus, n°2),

3.1. Tout d'abord, d'après le lemme 5, si $i = c, d$, ou aura

$$p_i \geq p_i \varphi G, \quad p_i G \geq p_s \varphi G \quad \text{et dès lors} \\ p_c G \geq p_c \varphi G + p_s \varphi G, \quad p_d G \geq p_d \varphi G + p_s \varphi G.$$

²⁴Vois C. Kuratowski, *Fund. Math.* 3 (1922), 41-43; en particulier p. 42 en note. Aussi T. Zalcwasser, *ibidem* pp. 44-45 et W. Sierpinski, *ibidem*, pp. 46-49.

Ainsi est démontré le th. 2b; pour achever la démonstration du th. 2a, il suffit de prouver que $p_c G \leq p_c \varphi G + p_s \varphi G$ c'est-à-dire que, quelle que soit la suite croissante infinie $S \subseteq G$, on ait $pS \leq p_c \varphi G + p_s \varphi G$.

Or, d'après le corollaire 1, en désignant le tableau φS par S_1 , on aura $pS \leq pS_1$. Le tableau S_1 étant croissant, il est dégénéré (lemma 2), et, par conséquent, $pS_1 \leq pR_0 S_1 \cdot p\gamma S_1$. Les éléments de $R_0 S_1$ étant deux à deux disjoints et que $S_1 \subseteq \varphi G$, on aura $pR_0 S_1 \subseteq p_s \varphi G$ et donc

$$pS \leq p_s \varphi G \cdot p\gamma S_1.$$

Il s'agit de prouver que $p_s \varphi G \cdot p\gamma S_1 \leq p_s \varphi G \cdot p_c \varphi G^{25}$

Cela étant évident dans le cas où $p\gamma S_1 \leq p_c \varphi G$, il nous reste le cas où $p\gamma S_1 > p_c \varphi G$. Or, S_1 étant dégénéré et extrait de φG , les formules

$$S_1 = \sum_A [A]_{S_1}, \quad (A \in R_0 S_1), \quad p[A]_{S_1} \leq p_c \varphi G$$

entraînent, vu l'hypothèse $p\gamma S_1 > p_c \varphi G$,

$$pS_1 = pR_0 S_1 \text{ et donc } pS_1 \leq p_s \varphi G \text{ et donc } p\gamma S_1 \leq p_s \varphi G.$$

Bref, dans le cas où $p\gamma S_1 > p_c \varphi G$, on a $p_s \varphi G \cdot p\gamma S_1 = p_s \varphi G$ et dès lors

$$pS \leq p_s \varphi G \leq p_s \varphi G + p_c \varphi G.$$

Ainsi les théorèmes 2a, 2b sont démontrés.

3.2. Il nous reste encore à prouver le théorème 2c.

3.21. Démontrons, d'abord, que la condition du th. 2c, est suffisante c'est-à-dire que, pour tout espace (V) localement connexe, $p_d G = p_d \varphi G + p_s \varphi G$, pourvu que $pT = bT$ (f. (6) pour tout tableau ramifié infini T).

Pour ceci, il suffira d'après le th. 2b de prouver que $p_d G \leq p_s G + p_d \varphi G$ c'est-à-dire que, quelle que soit la suite infinie décroissante $S \subseteq G$, on ait $pS \leq p_s G + p_d \varphi G$.

Par hypothèse, φS étant un tableau ramifié infini, $p\varphi S = b\varphi S$, ce qui vu $pS \leq p\varphi S$ (cf. corollaire 1) entraîne $pS \leq b\varphi S$.

Distinguons les deux cas, suivant que le nombre infini $b\varphi S$ a un prédécesseur immédiat ou n'en a pas. Dans le dernier cas, il est manifeste

²⁵ C'est que si m, n sont deux nombres cardinaux quelconques > 0 dont au moins un est infini, alors $m + n = mn$.

que le tableau φS contient un tableau ramifié dégénéré, soit T , de puissance $b\varphi S$; en raisonnant sur T comme sur S_1 dans le n°3, 1, on démontre que $pS < p_s G + p_d \varphi G$.

L'égalité $p\varphi S = p\gamma\varphi S \cdot \text{borne sup}_{\alpha < \gamma\varphi S} pR_\alpha \varphi S$ entraînant au moins l'une des relations

$$p\varphi S = p\gamma\varphi S, \quad p\varphi S = \text{borne sup}_{\alpha} pR_\alpha \varphi S, \quad (\alpha < \gamma\varphi S)$$

on aura, dans le second cas où $p\varphi S$ n'a pas un prédécesseur immédiat au moins une des relations $p\varphi S \leq p_d \varphi G$, $p\varphi S \leq p_s \varphi G$ et dès lors $p\varphi S \leq p_d \varphi G + p_s \varphi G$. 3.22. *La nécessité de la condition du th. 2c*

3.221. En supposant que

$$(10) \quad p_d G = p\varphi G + p_s \varphi G \quad (\text{cf. (7), (8), (9)})$$

pour tout espace (V) localement connexe, nous allons prouver que

$$(11) \quad pT = bT \quad (\text{cf. (6)})$$

pour tout tableau ramifié infini T .

Supposons, par impossible, qu'il existe un tableau ramifié infini T vérifiant

$$(12) \quad pT > bT \text{ et donc } pT > p_c T, \quad pT > p_s T \text{ (cf. (6) dans } n^0 1, 12)$$

Notre but sera atteint lorsque nous aurons prouvé l'existence d'un espace (V) localement connexe - l'espace sera même un espace ordonné - qui ne vérifie pas (10).

Chacun des ensembles $R_\alpha T$, ($\alpha < \gamma T$) étant dégénéré, la relation

$$pT = p\gamma T \cdot \text{borne sup}_{\alpha} pR_\alpha T, \quad (\alpha < \gamma T)$$

entraîne, vu (12), l'inégalité $pT > \text{borne sup } pR_\alpha T$ et dès lors $pT = p\gamma T$. Chacun des ensembles $(\cdot, a)_T$, ($a \in T$; cf. (1)) étant bien ordonné et donc puissance $< p_c T$, le nombre $p_c T$ est l'aleph qui précède immédiatement l'aleph $p\gamma T$. Autrement dit, $p\gamma T$ est de la forme $\aleph_{\beta+1}$, β étant un ordinal ≥ 0 . Le cas général étant analogue au cas où $\beta = 0$, nous ne traiterons que le cas où $pT = \aleph_1$.

Bref, nous traiterons le cas où

$$(13) \quad pT = \aleph_1, \quad \gamma T = \omega_1, \quad bT = \aleph_0, \quad p_c T = \aleph_0 \quad (\text{cf. (3), (4), (6)}).$$

3.222. Il y un indice $\alpha_0 < \omega_1$ tel que $p[a]_T = \aleph_1$ pour tout $a \in R_{\alpha} T$ et tout $\alpha_0 < \alpha < \omega_1$.

En effet, en désignant par T_0 l'ensemble des $a \in T$ vérifiant $p[a]_T < \aleph_1$, on aura $pT_0 < \aleph_1$; sinon on aurait $pT_0 = \aleph_1$, $p[a]_{T_0} < \aleph_1$, ($a \in T_0$) ce qui, vu $T_0 = \sum [a]_{T_0}$, ($a \in R_0 T_0$) entraînerait $pR_0 T_0 = \aleph_1$ et à fortiori $p_s T_0 > \aleph_1$ et donc $p_s T \geq \aleph_1$, $bT \leq \aleph_1$, contrairement à (13).

On a donc $pT_0 < \aleph_1$ et notre α_0 peut-être n'importe quel indice $< \omega_1$ tel que tout élément de T_0 appartienne à l'un des ensembles $R_{\xi} T$, ($\xi_1 < \alpha_0$).

Quitte à supprimer dans T les ensembles $R_0 T, \dots, R_{\xi} T, \dots$, ($\xi_1 \alpha_0$) et à désigner le tableau des $R_{\alpha_0 + \xi} T$, ($\xi < \omega_1$) par T , nous supposons que $\alpha_0 = 0$ et que donc

$$(14) \quad p[a]_T = \aleph_1, \quad (a \in T).$$

3.223. Quel que soit $a \in T$, il y a un indice $\beta_a < \omega_1$ tel que $pR_{\alpha}[a]_T = \aleph_0$ pour tout α vérifiant $\beta_a < \alpha < \omega_1$.

En effet, si pour un $a \in T$ l'on avait $pR_{\alpha}[a]_T < \aleph_0$ pour tout $\alpha < \aleph_1$, il y aurait, à cause de (14), un nombre $n < \aleph_0$ tel qu'à partir d'un indice $\beta < \omega_1$ chacun des ensembles $R_{\alpha}[a]_T$ ou $\beta < \alpha < \omega_1$ soit composé de n points, ce qui entraînerait l'existence d'un $x \in [a]_T$ tel que l'ensemble $[x]_T$ soit bien ordonné²⁶ ce qui, vu (14), entraînerait $p_c T \geq \aleph_1$, contrairement à (13).

Ainsi l'existence du nombre β_a est prouvé.

3.2231. Nous allons construire une suite transfinie croissante d'ordinaux $\nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_{\xi} < \dots$, ($\xi < \omega_1$) telle que tout point de $R_{\nu_{\xi}} T$ ait une infinité de successeurs dans chacun des ensembles $R_{\nu_{\alpha}} T$, ($\xi < \alpha < \omega_1$).

Pour ce, il suffira comme on s'en rend facilement compte de poser

$$\nu_0 = \underset{a}{\text{borne sup}} \beta_a, \quad (a \in R_0 T)$$

$$\nu_1 = \underset{a}{\text{borne sup}} \beta_a, \quad (a \in R_{\nu_0} T)$$

$$\nu_{\alpha} = \text{borne sup} \beta_a, \quad (a \in R_{\nu_{\alpha-1}} T) \text{ si } \alpha \text{ est de première espèce } < \omega_1$$

et

²⁶Pour la démonstration complète, voir Thèse, p. 78 th. 4.

$\nu_\alpha =$ borne sup β_ξ , ($\xi < \alpha$) si α est de seconde espèce et $< \omega_1$.

En posant $T_0 = \sum_\alpha R_{\nu_\alpha}$, ($\alpha < \omega_1$), on voit que T_0 vérifie (13), (14) et que

$$pR_\alpha T_0 = \aleph_0, \quad (\alpha < \omega_1), \quad p|a|_{T_0} = \aleph_0, \quad (a \in T_0; \text{ cf. (5) dans } n^0 1, 12)$$

Quitte à changer la notation, nous pouvons supposer que T lui-même vérifie la condition précédente c'est-à-dire que

$$(15) \quad pR_\alpha T = \aleph_0, \quad (\alpha < \omega_1), \quad p|a|_T = \aleph_0, \quad (a \in T).$$

Bref, nous supposons que T vérifie (13), (14), (15).

3.224. Ordonnons chacun des ensembles $|a|_T$, ($a \in T$)— lequel est d'après (15) dénombrable—de manière que son type d'ordre soit ω^* (\equiv l'inverse du type d'ordre des ordinaux $< \omega$)²⁷

L'ordonnance partielle primitive de T et les ordonnances des $|a|_T$, ($a \in T$) vont nous permettre, en les élargissant d'ordonner l'ensemble T . Pour ce, soient a, b deux points incomparables quelconques de T vérifiant $|a|_T \neq |b|_T$; dans le nouvel ordre a précédera b si, dans l'ensemble ordonné $|a'|_T$, a' précède b' , les points a', b' étant respectivement le prédécesseur de a et le prédécesseur de b tels que $a' \neq b'$, $|a'|_T = |b'|_T$ ²⁸. On vérifie sans peine que les points a', b' sont bien déterminés et que le procédé ordonne complètement l'ensemble T .

3.2241. En désignant par

(16) T_0 l'ensemble ordonné qu'on obtient ainsi, on démontre facilement qu'il jouit des propriétés suivantes:

- a. T_0 est dépourvu de points consécutifs;
- b. Quel que soit le sous-ensemble au plus dénombrable H de T_0 , il y a un intervalle de T_0 ne contenant aucun point de H ²⁹;
- c. Chaque famille d'intervalles disjoints extraits de T_0 est au plus dénombrable (puisque $bT = \aleph_0$; cf. (13))³⁰.

²⁷Bien entendu, si $b \in |a|_T$, on aura $|b|_T = |a|_T$ et l'ensemble $|a|_T$ doit être ordonné indépendamment de sa représentation $|a|_T$ ou $|b|_T$.

²⁸Cf. la notion d'ordonnance naturelle d'un T (Thèse, pp. 7 et 127).

²⁹V. Thèse, p. 128, lemme 1.

³⁰V. Thèse, p. 128, lemme 2

3.2242. Soit

(17) E l'ensemble ordonné qu'on obtient de l'ensemble ordonné T_0 en intercalant dans chaque lacune de T_0 un seul point, en précédant T_0 d'un point et en lui succédant un point.

Alors les propriétés a, b, c ci-dessus de l'ensemble ordonné T_0 entraînent les propriétés que voici de l'espace ordonné E (cf. 3)):

I Tout ensemble de puissance $\leq \aleph_0$ extrait de l'espace E est nulle part dense;

II $p_c G = p_d \varphi G = p_s \varphi G = \aleph_0$.

L'espace E étant localement connexe, on aura, par hypothèse (10), $p_d G = p_d \varphi G + p_s \varphi G$, ce qui, d'après II, entraîne

$$(18) \quad p_d G = \aleph_0.$$

2.225. Pour arriver à la contradiction, nous allons prouver l'existence d'une suite transfinie non dénombrable d'ensembles ouverts décroissants (jouissant même de la propriété remarquable que leurs complémentaires soient fermés et séparables (cf. n° 2, 42, th. 7b)).

Attachons à chaque segment s de l'ensemble ordonné E un sous-ensemble

(19) $\varphi(s)$ de s semblable au segment $[0, 1]$ des nombres réels; décomposons s suivant $\varphi(s)$ ³¹: à tout $a \in \varphi(s)$ faisons correspondre un $X_a \subset s$ tel que $a \in X_a$ et que pour tout point b de $\varphi(s)$ distinct de a , l'ensemble X_b soit à droite ou à gauche de l'ensemble ordonné X_a , suivant que le point b est à droite ou à gauche du point a . On voit que, pour tout $a \in \varphi(s)$, l'ensemble X_a est parfaitement déterminé; nous désignerons par

$$(20) \quad f(s) \quad \text{la famille de tous les } X_a, \quad (a \in \varphi(s)).$$

Définissons la suite

$$(21) \quad R_0 D, R_1 D, \dots, R_\alpha D, \dots \quad (\alpha < \omega_1).$$

$R_0 D$ sera famille composé de l'ensemble ordonné E lui-même; $R_1 D$ sera famille $f(E)$; E étant un segment (pourvu des deux extrémités), $R_1 D$

³¹Le procédé dont nous allons nous servir est ce que j'ai appelé ϑ -partition complète de l'ensemble ordonné E (v. Thèse, pp. 114 et 118).

est bien déterminé. D'une manière générale, soit $0 < \alpha < \omega_1$ et supposons que les familles $R_\xi D$, ($\xi < \alpha$) soient déterminées; construisons la famille $R_\alpha D$ comme il suit: si α est de première espèce, $R_\alpha D$ sera la famille des éléments des familles $f(s)$, s parcourant tous les éléments de la famille $R_{\alpha-1} D$ dont chacun a plus d'un point; si α est de seconde espèce, $R_\alpha D$ désignera la famille des ensembles

$$E_0 E_1 \dots E_\xi \dots, \quad (\xi < \alpha),$$

les E_ξ vérifiant $E_\xi \in R_\xi D$, $E_\xi \subseteq \prod_{\eta < \xi} E_0 E_1 \dots E_\eta$ (l'égalité n'ayant lieu que pour des ξ de seconde espèce).

Prouvons que $R_\alpha D$ existe. En effet, en désignant par ψ_ξ la famille des $X \in R_\xi D$ vérifiant $pX > 1$, on conclut à la suite de la propriété c de ci-dessus que $p\psi_\xi \leq \aleph_0$. D'autre part, s désignant un élément quelconque de ψ_ξ , s est un segment de E , et soit $\varphi_0(s)$ n'importe quel sous-ensemble dénombrable de l'ensemble $\varphi(s)$ (cf. (19)) tel qu'entre tout couple de points distincts de $\varphi(s)$ il y ait point de $\varphi_0(s)$. En posant

$$(22) \quad F_\alpha = \sum_s \varphi_0(s), \quad (s \in \psi_\xi, \quad \xi < \alpha),$$

il est clair que $pF_\alpha = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot p\alpha$, donc $pF_\alpha = \aleph_0$. On démontre facilement que l'ensemble F_α est partout dense sur l'ensemble des points dont chacun constitue un élément de l'une des familles $R_\xi D$, ($\xi < \alpha$). Dès lors, si la famille $R_\alpha D$ n'existait pas, tout point de E serait un élément de l'une des familles $R_\xi D$, ($\xi < \alpha$), ce qui voudrait dire que l'ensemble dénombrable F_α serait partout dense, contrairement à la propriété I de ci-dessus.

Ainsi, pur tout $\alpha < \omega_1$, $R_\alpha D$ existe et se compose de segments de l'ensemble ordonné E dont quelques-uns se réduisent à un point.

En désignant par

(23) G_α l'ensemble des points intérieurs à l'un des éléments de la famille $R_\alpha D$ compose de plus d'un point, G_α serait un ensemble ouvert et on aurait

$$G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_\alpha \supset \dots, \quad (\alpha < \omega_1)$$

contrairement à (18). C.q.f.d.

2.226. Pour tout $\alpha < \omega_1$, le complémentaire CG_α de l'ensemble G_α de (23) est fermé et séparable. C'est que CG_α est composé, d'une part, des points $a \in E$ tels que l'ensemble composé du point a appartienne à l'une des familles $R_\xi D$, ($\xi \leq \alpha$) et, d'autre part, des extrémités des segments de E appartenant à l'une des familles $R_\xi D$, ($\xi \leq \alpha$); et on voit sans peine que l'ensemble $F_{\alpha+1}$ (cf. (22)) est partout dense sur CG_α ; l'ensemble CG_α est donc séparable (cf. th. 7b).

LA CONDITION DE SOUSLIN ET UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES NOMBRES RÉELS

1. *Condition de Souslin.* Un espace vérifie la *condition de Souslin* si chaque famille de ses ensembles ouverts deux à deux disjoints est $\leq \aleph_0$.

2. *Le problème de Souslin* consiste à savoir si tout ensemble ordonné (abr. pour *totalelement ordonné*) continu vérifiant la condition de Souslin contient un sous-ensemble dénombrable partout dense (est donc semblable au continu linéaire). En dépit de grands efforts, le problème n'est pas encore complètement résolu. Nous allons voir qu'il est intimement lié à l'étude des produits (carrés) cartésiens d'espaces.

3. THÉORÈME 1. *Soit E un ensemble ordonné continu sans premier et sans dernier point: pour que E soit semblable à l'ensemble des nombres réels, il faut et il suffit que le carré E^2 vérifie la condition de Souslin (au lieu de E^2 , on peut mettre E^n pour un nombre naturel quelconque $n > 1$).*

COROLLAIRE (THÉORÈME 2). *Pour que la réponse au problème de Souslin soit affirmative, il faut et il suffit que, quel que soit l'espace ordonné continu E vérifiant la condition de Souslin, le carré E^2 la vérifie.*

4. La démonstration s'inspire de la considération géométrique suivante concernant le pavage d'un carré K : soit Δ une diagonale de K ; par deux droites coupant Δ à 45° , symétriques relativement à Δ , le carré K est partagé en quatre parties: deux carrés et deux rectangles. En répétant d'une façon appropriée le même procédé sur les nouveaux carrés, on obtient un pavage de K par des rectangles.

5. Le même procédé peut, dans le cas d'un ensemble ordonné continu E , être exprimé de la manière suivante: on considère une *bipartition complète* de E (cf. ma *Thèse, Ensembles ordonnés et ramifiés*, Paris, 1935,

p. 114), c'est-à-dire un système de portions non empiétantes de E tel que: 1° $E \in D$; 2° si $X \in \psi D$,¹ il y a une famille bien déterminée $f(X) \subseteq D$ composée de deux segments de E dont l'union égale; 3° si $\Phi \subseteq D$ est une chaîne (si $X, Y \in \Phi$, alors $X \subseteq Y$ ou $Y \subseteq X$), c'est-à-dire l'intersection des $X \in \Phi$ est un élément de D . Par un procédé de bipartitions successives, on prouve que D existe.

6. Ceci étant, la construction géométrique précédente se traduit par le fait intéressant que voici: la famille des *rectangles*

$$a \times [f(X) - a], \quad [a \in f(X), X \in \psi D],$$

forme un pavage complet du carré E^2 (abstraction faite d'un certain sous-ensemble de la diagonale principale de E^2). Ainsi, une bipartition complète de E d'une part et un pavage de E^2 d'autre part sont mutuellement liés.

Puisque l'ensemble des extrémités des X , ($X \in \psi D$), est partout dense, on conclut à la validité du théorème 1.

7. En étudiant le problème de Souslin je fus amené (cf. *Thèse*, p. 131) à énoncer l'hypothèse P_3 que voici (équivalente à celle dite *hypothèse de ramification*²:

*Dans chaque espace ordonné il y a une famille \mathcal{F} d'ensembles ouverts deux à deux disjoints et un ensemble A partout dense dont le cardinal est égal à celui de \mathcal{F} (cf. *Thèse*, p. 131).*

8. Le contenu essentiel de l'hypothèse précédente (le cas où l'infimum des cardinaux des A est de première espèce) est équivalent à l'hypothèse que voici:

Dans chaque ensemble ordonné continu il y a autant d'ensembles ouverts deux à deux disjoints qu'il y en a dans son carré.

On ne connaît aucun espace topologique infini pour lequel l'hypothèse précédente ne serait pas vérifiée.

¹Pour une famille d'ensembles \mathcal{F} , on désigne par $\psi\mathcal{F}$ la famille des $Y \in \mathcal{F}$ ayant plus d'un point. Cf. C. R. Acad. Sci. Paris 204 (1937), p. 325; *Rev. Cienc.* (1947), 457-488.

²*C.R. Acad. Sci. Paris* 202 (1936), p. 185.

SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DU CONTINU LINÉAIRE ET LE PROBLÈME DE SUSLIN

Le but de la Note sera d'établir le théorème que voici (quant à la terminologie voir ci-après)¹:

THÉORÈME 1. *Pour qu'un ensemble totalement ordonné continu E soit semblable à un ensemble linéaire, il faut et il suffit qu'il existe un nombre naturel $n > 1$ tel que l'ensemble $E^n = E \times E \times \dots \times E$ vérifie la condition de Suslin. Le problème de savoir si la proposition précédente subsiste encore dans le cas $n = 1$ coïncide avec le célèbre problème de Suslin.*²

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Publ. Math. Univ. Belgrade 4 (1952), 97-108

¹Le sujet de la Note faisait partie de mes conférences *On Suslin's problem et Sur le problème de Suslin* que j'avais faites à Harvard (27-9-1950), Ann Arbor (31-10-1950), Berkeley (24-11-1950) et à Lausanne (le 22-1-1951) respectivement.

L'esquisse de la démonstration du théorème se trouve dans ma Note *La condition de Suslin et une propriété caractéristique des nombres réels* (C.r. Paris, 231, 1113-1114 (1950)).

²J'ai publié plusieurs travaux concernant le problème de Suslin:

I. Voir: *Comptes rendus de l'Académie des Sciences à Paris*, 198 (1934), p. 703 et p. 882; 202 (1936), p. 185; 203 (1936) p. 1049; 204 (1937) p. 325; 205 (1937) p. 1033 et p. 1196.

II. *Ensembles ordonnés et ramifiés*. Thèse, Paris, 1935, pp. 1-138 (aussi *Publ. Math. Univ. Belgrade*, 4, (1935); *Ensembles linéaires et une classe de tableaux ramifiés* (*Tableaux ramifiés de M. Aronszajn*) *Ibidem*, 6 (1937), pp. 129-160).

III. *Une propriété des ensembles bien ordonnés linéaires*, (*Studia Mathematica*, Lavov 9 (1940), 23-42).

IV. *Über eine Eigenschaft von Systemen linearer wohlgeordneter Mengen* (*Math. Annalen*, 118 (1942), 578-587).

V. *Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés* (*Revista de Ciencias: Lima*, Año 42, (1940), 827-846; año 43 (1941), 483-500); *Le problème de Suslin et les espaces abstraits* (*Ibidem* Año 47, pp. 457-488).

VI. *Ensembles de suites dénombrables d'entiers* (*Contribution au problème de Suslin*) (*Bull. Ac. Sci. U.R.S.S.* avec la traduction en russe, 11 (1947), 59-74).

VII. *L'hypothèse du continu et le problème de Suslin*, *Publ. Inst. Math. Belgrade* 5 (1948), 26-36).

COROLLAIRE 1. *Pour que la réponse au problème de Suslin soit affirmative, il faut et il suffit que l'espace $E \times E$ vérifie la condition de Suslin, dès que l'espace ordonné continu E la vérifie.*

Dans le 3 on montrera un lien inattendu entre une subdivision complète de E d'une part et d'un pavage rectangulaire de $E \times E$ d'autre part.

Dans le 4 on définira le *produit pur de deux ensembles partiellement ordonnés* et on verra comment le théorème précédent s'exprime dans le nouveau langage. Dans le 5 on prouvera une proposition intéressante due à Sv. Kurepa concernant les courbes de Peano et le problème de Suslin. On indiquera, enfin, que les considérations de la Note ne constituent qu'une partie de recherches demandant à trouver des liens entre deux ensembles (espaces) d'une part et leur produit combinatoire d'autre part.

1. Définitions

Définition 1.1. Soit E un ensemble totalement ordonné; l'espace ordonné E c'est l'espace constitué des points de l'ensemble E dans lequel l'adhérence \bar{X} de tout $X \subseteq E$ est définie comme l'ensemble des points $a \in E$ tels que, quel que soit l'intervalle ouvert I de E contenant a , on ait

$$I \cap X \supset v \quad (v = \text{l'ensemble vide}).$$

Définition 1.2. Soit n un nombre naturel > 1 et E_1, E_2, \dots, E_n une suite de n ensembles (parmi lesquels on peut avoir des égaux); on définit le "parallélépipède"

$$(1) \quad E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$$

comme l'ensemble des transformations uniformes f de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ vérifiant $f(\nu) \in E_\nu$, ($\nu \leq n$), c'est-à-dire l'ensemble (1) est constitué des "complexes ordonnés"

$$(2) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (x_\nu \in E_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n),$$

la transformation f pouvant être désignée encore par

$$(3) \quad f(1), f(2), \dots, f(n).$$

En particulier, on considère le "cube"

$$(4) \quad E \times E \times \dots \times E \equiv E^n;$$

et sa "diagonale" constituée des points (x, x, \dots, x) , $(x \in E)$.

On pose également

$$(5) \quad E^1 = E.$$

Définition 1.3. E étant un espace abstrait définissable au moyen des voisinages, l'espace E^n est constitué des points de E^n , tout point $f \in E^n$ ayant des voisinages de la forme $V(f(1)) \times V(f(2)) \times \dots \times V(f(n))$, les $V(f(i))$, parcourant indépendamment les voisinages du point $f(i) \in E$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Définition 1.4. Nous dirons qu'un espace vérifie la *condition de Suslin* (ou qu'il jouit de la *propriété de Suslin*) si chaque famille d'ensembles ouverts deux à deux disjoints et extraits de l'espace est soit finie soit dénombrable (cf. Kurepa, C. R. Acad. Sci. Paris 204 (1937), 326 et Rev. Cienc. Lima 47, p. 458 et 469).

2. Démonstrations du théorème précédent

2.1. *La condition du théorème est nécessaire;* c'est que E étant un ensemble ordonné continu, quel que soit $n > 1$ (et même pour $n = 1$), l'espace E^n vérifie la condition de Suslin, l'espace E^n contenant un ensemble dénombrable partout dense, conséquence de la propriété analogue de l'espace $E^1 = E$: A étant un sous-ensemble dénombrable de E partout dense dans E , l'ensemble $A^n = A \times A \times \dots \times A$ est dénombrable et partout dense dans E^n .

2.2. *La condition du théorème est suffisante:* E étant un ensemble ordonné continu tel qu'il existe un entier $n > 1$ tel que l'espace E^n vérifie la condition de Suslin, l'espace ordonné E contient un ensemble dénombrable partout dense et dès lors, d'après un théorème de Cantor, est semblable à un ensemble linéaire. La démonstration fait usage de ceci: Si l'on partage un segment quelconque S de E en deux segments contigus: le segment gauche S_0 et le segment droit S_1 et qu'on considère le rectangle $S_1 \times S_0$ (fig. 1) alors, à une bipartition successive de plus en plus serrée de E , correspondra dans $E \times E$ un réseau

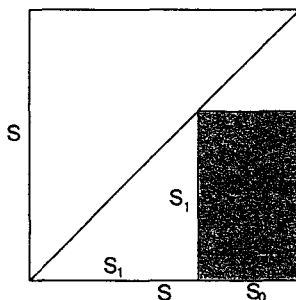


Fig. 1

de rectangles *non empiétants*. La figure 2 montre $1 + 2 + 2^2 + 2^3$ rectangles d'ordre 0, 1, 2, 3 respectivement, résultant de bipartition de E et des trois itérations successives du même procédé sur des segments qu'on obtient ainsi. La démonstration complète résultera des lemmes 1-17 que nous allons passer en revue.

LEMME 1. *L'espace E^n vérifiant la condition de Suslin, l'espace $E^{(n-1)}$ la vérifie également.*

Dans le cas contraire, l'espace $E^{(n-1)}$ contiendrait une famille infinie non dénombrable Φ d'ensembles ouverts deux à deux disjoints; si alors I est un intervalle ouvert quelconque de l'ensemble ordonné E , la famille $\Phi \times I$ des $X \times I$, ($X \in \Phi$) serait une famille infinie non dénombrable d'ensembles ouverts deux à deux disjoints extraits de E^n , contrairement à l'hypothèse que E^n vérifie la condition de Suslin. En appliquant le lemme précédent $n - 1$ fois, on obtient le

LEMME 2. *Si l'espace E^n vérifie la condition de Suslin, l'espace E^ν la vérifie également, quel que soit le nombre $\nu < n$; en particulier, l'espace E et le carré E^2 vérifient la condition de Suslin, dès qu'elle est vérifiée par un E^n avec $n \geq 2$.*

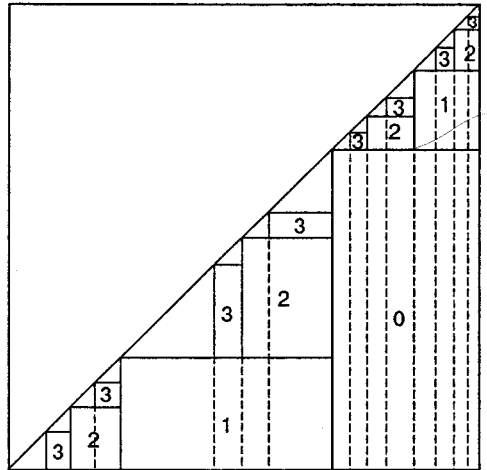


Fig 2.

LEMME 3. *Toute famille de segments de E bien ordonnée par rapport à la relation \supseteq (\subset) est finie ou dénombrable.*

En effet, les intérieurs des ensembles $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ des éléments consécutifs A, B de la famille étant deux à deux disjoints, le lemme 3 résulte de ce que l'ensemble E vérifie la condition de Suslin.

Prouvons que l'ensemble ordonné E contient un *ensemble dénombrable partout dense*. On peut supposer que E possède un point initial et un point terminal.

Ceci étant, appliquons sur l'ensemble ordonné E le procédé de bipartition: chaque segment S de E sera décomposé en deux segments ayant en commun un seul point intérieur à S ; la famille de ces deux segments là étant désignée par

$$(6) \quad f(S),$$

définissons par récurrence les familles

$$(7) \quad D_0, D_1, \dots, D_\xi, \dots, \quad (\xi < \gamma)$$

de segments de E comme il suit:

D_0 sera la famille $\{E\}$ constituée de l'ensemble donné E ;

D_1 sera la famille des segments appartenant à la famille $f(X): (X \in D_0)$; donc $D_1 = f(E)$; d'une façon générale, soit α un ordinal > 0 tel que les familles

$$D_0, \dots, D_\xi, \dots, \quad (\xi < \alpha)$$

soient définies, quel que soit $\xi < \alpha$; définissons D_α .

Si $\alpha - 1$ existe, on posera

$$D_\alpha = \bigcup_X f(X), \quad (X \in D_{\alpha-1});$$

donc la famille D_α est constituée des segments de E obtenus en partageant tout élément de $D_{\alpha-1}$ en deux segments contigus; bien entendu, si un $X \in D_{\alpha-1}$ est constitué d'un point - ce qui arrivera seulement dans le cas où le nombre ordinal $\alpha - 1$ est dépourvu de son prédécesseur immédiat alors, $f(X)$ ne se définit pas - ou si l'on veut, on pose $f(X) = v$ (vide).

Si $\alpha - 1$ n'existe pas, on définira D_α comme la famille des ensembles

$$(9) \quad \bigcap_\xi X_\xi, \quad (\xi < \alpha)$$

les X_ξ vérifiant

$$(10) \quad (X_\xi \in R_\xi \text{ et } X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_\xi \supseteq \dots), \quad (\xi < \alpha).$$

Bien entendu, si une suite pareille n'existe pas, cela voudra dire que D_α est vide:

$$D_\alpha = v$$

Ainsi, par récurrence transfinie, on définit D_α pour tout ordinal α (dans un instant, nous verrons qu'à partir d'un $\gamma < \omega_1$, les D_α sont vides). On obtient ainsi la suite

$$(11) \quad D_0, D_1, \dots, D_\alpha, \dots,$$

et l'ensemble

$$(12) \quad D = \bigcup_{\alpha} D_\alpha$$

de segments de E appartenant à l'une des familles (11); l'ensemble vide et les segments uniponctuels de E s'y présentent aussi, comme nous le verrons bientôt.

Pour tout $\Phi \subseteq D$ nous désignerons par

$$(13) \quad \Psi\Phi$$

la famille des éléments de Φ ayant plus d'un point. En particulier, ΨD sera l'ensemble des segments non uniponctuels appartenant à l'une des familles (11).

En ordonnant par \supseteq la famille D et la famille ΨD , on obtient les ensembles partiellement ordonnés

$$(14) \quad (D; \supseteq), \quad (\Psi D; \supseteq)$$

respectivement.

LEMME 4. *Quel que soit l'ordinal α , la famille D_α est ou bien vide ou bien se compose de segments de E n'empiétant pas les uns sur les autres (bien entendu, on peut en avoir des uniponctuels).*

Le lemme se démontre par récurrence. Il en est de même du

LEMME 5. *Quels que soient les ordinaux α, β , les D_α, D_β sont sans éléments communs.*

LEMME 6. *Quels que soient les ordinaux $\alpha < \beta$, la relation $B \in \Psi D_\beta$ (et donc $\Psi D_\beta \supset v$) entraîne l'existence d'un et d'un seul élément $A \in D_\alpha$ vérifiant $A \supset B$.*

En effet, le lemme est évident si $0 = \alpha < \beta = 1$; soit $\eta > 1$ un ordinal tel que $\Psi D_\eta \supset v$ et que le lemme 6 subsiste toutes les fois que $\alpha < \beta < \eta$;

prouvons qu'il en est de même si $\beta \leq \eta$. Si $\eta - 1$ existe, on aura, à la suite de (8) et (13):

$$\Psi D_\eta = \bigcup_X f(X), \quad (X \in \Psi D_{\eta-1});$$

dès lors, chaque élément de ΨD_η a un seul prédécesseur immédiat dans

$$\Psi D_{\eta-1}$$

et donc dans

$$\bigcup_\xi \Psi D_\xi, \quad (\xi < \eta).$$

De plus, il est évident que le non empiètement des éléments de

$$\Psi D_{\eta-1}$$

entraîne le non empiètement des éléments de ΨD_η .

Si $\eta - 1$ n'existe pas, les éléments de ΨD_η sont de la forme (9) et le fait à démontrer en résulte immédiatement.

Ainsi, par récurrence, le lemme 6 est démontré complètement.

LEMME 7. *Si $X \in \Psi D$, alors $f(X) \subseteq \Psi D$; $f(X)$ est l'ensemble des successeurs immédiats de X dans ΨD .*

LEMME 8. *Si A, B sont deux éléments de ΨD tels que $A \supset B$, alors l'un et seulement l'un des éléments de $f(A)$ contient B .*

Le lemme résulte des lemmes 6 et 7.

LEMME 9. *Quels que soient $D_\alpha \supset v$ et $A \in D_\alpha$; l'ensemble $(-\infty, A)$ des éléments X de D vérifiant $X \supset A$ est bien ordonné par rapport à la relation \supseteq et son type d'ordre est égal à α (autrement dit, l'ensemble partiellement ordonné $(\Psi D; \supseteq)$ est un tableau ramifié dont les rangées coïncident avec des ΨD_α).*

Le lemme 9 résulte des lemmes 6 et 7.

LEMME 10. *Quels que soient $a \in E$ et l'ordinal ξ , D_ξ contient au plus deux éléments contenant a ; en posant*

$$a(\xi) = \bigcup X, \quad (X \in D_\xi \text{ et } a \in X),$$

$a(\xi)$ est soit vide (v) soit un segment de E ; si $a(\xi) \supset v$, alors

$$(16) \quad a(\beta) \supset a(\xi) \quad \text{pour tout ordinal } \beta < \xi.$$

Tout d'abord, si D_ξ contenait trois éléments distincts A, B, C , contenant a , au moins deux des trois segments A, B, C chevaucheraient, contrairement au lemme 4. Par conséquent, $a(\xi)$ est soit vide soit un segment de E . Enfin, le reste du lemme 10 se démontre par récurrence.

LEMME 11. *Quel que soit $a \in E$, il y a un ordinal γ_a vérifiant*

$$(17) \quad \gamma_a < \omega_1$$

$$(18) \quad a \notin \bigcup_X X, \quad (X \in \psi D_{\gamma_a})$$

et tel que les ensembles

$$(19) \quad a(\xi), \quad (\xi < \gamma_a)$$

constituent une famille bien ordonnée par rapport à \supseteq vérifiant

$$(20) \quad \bigcap_{\xi} a(\xi) = \{a\}, \quad (\xi < \gamma_a).$$

Si l'on avait un $a \in E$ tel que $a(\xi) \supseteq v$ pour tout $\xi < \omega_1$, on en déduirait, d'après le lemme 10, que les $a(\xi)$, ($\xi < \omega_1$) constituent une suite infinie non dénombrable de segments strictement décroissants de E , contrairement au lemme 3.

Ceci étant, il suffit de désigner par γ_a le premier nombre ordinal ξ tel que la famille ΨD ne contienne aucun élément contenant a , pour se rendre compte de la validité du lemme 11.

Du lemme 11 on déduit immédiatement le

LEMME 12. *L'ensemble constitué des extrémités des $X \in \Psi D$ est partout dense dans E .*

Posons $\gamma = \sup_a \gamma_a$, ($a \in E$); à la suite de la relation (17), on aura $\gamma \leq \omega_1$; il est essentiel que c'est le signe $<$ qui s'y présente nécessairement (cf. le lemme 15).

LEMME 13. *Quel que soit $\alpha < \gamma$, la famille ΨD_α est finie ou dénombrable.*

C'est que les intérieurs des $X \in \psi D_\alpha$ sont deux à deux disjoints.

LEMME 14. *Si X, Y sont deux éléments distincts de ΨD , les "rectangles" $X_1 \times X_0, Y_1 \times Y_0$ de E^2 n'empiètent pas l'un sur l'autre (nous y*

désignons respectivement par X_0, X_1 la section initiale et la section finale de X , les deux segments X_0, X_1 constituant la famille $f(X)$ (cf. (6)).

En effet, le lemme est évident si les deux segments X, Y sont nonempiétants; reste encore le cas où $X \supset Y$ ou $Y \supset X$. Si $X \supset Y$ donc aussi $X \supset Y_i$, ($i = 0, 1$), l'un et seulement l'un des X_0, X_1 , soit X_0 , contient Y (v. le lemme 8); dès lors $X_0 \supset Y_0 \cup Y_1$; par conséquent, X_1 et Y_1 sont nonempiétants; il en est alors de même des rectangles $X_1 \times X_0, Y_1 \times Y_0$; l'empiètement de deux rectangles ayant lieu dans le cas et seulement dans le cas où empiètent aussi bien les premières projections et les secondes projections des rectangles.

LEMME 15. *Le carré $E \times E$ contient $k(\Psi D)^3$ d'ensembles ouverts deux à deux disjoints.*

En effet, faisons correspondre à tout $X \in \Psi D$ l'intérieur du rectangle $X_1 \times X_0$ (pour la signification de X_0 et X_1 voir le lemme 14); la correspondance étant biunivoque, le lemme 15 est une conséquence immédiate du lemme 14.

LEMMA 16. *L'ensemble ΨD est dénombrable.*

Que le cardinal $k\Psi D$ de ΨD soit $\leq \aleph_0$, cela résulte du lemme 15 et de l'hypothèse que $E \times E$ vérifie la condition de Suslin; que d'autre part, $k\Psi D \geq \aleph_0$, cela résulte du fait que $\gamma \geq \omega_0$ et que les ΨD_α , ($\alpha < \gamma$), sont deux à deux sans éléments communs.

LEMME 17. *L'ensemble E contient un ensemble dénombrable partout dense.*

En effet, d'après le lemme 15, l'ensemble ΨD est dénombrable; il en est donc de même de l'ensemble des extrémités des $X \in \Psi D$; cet ensemble étant, d'après le lemme 11, partout dense dans E , la démonstration du lemme 16 est accomplie.

Finalement l'ensemble ordonné continu E contenant un ensemble dénombrable partout dense, E est, d'après un théorème classique de Cantor, semblable à un ensemble linéaire. *C. q. f. d.*

3. Pavage du carré $E \times E$.

En considérant les rectangles $A \times B$, ($A, B \in f(X)$, $X \in \Psi D$, avec $A \neq B$) on obtient un pavage du carré $E \times E$: les rectangles (2.3) ne chevauchent pas et épuisent le carré $E \times E$.⁴

³ kX = le cardinal de X .

⁴Le pavage n'atteint pas un certain sous-ensemble de la diagonale facile à reconstruire.

Il est utile de faire le procédé analogue en se servant de subdivisions successives à 3, 4 etc. parties.

D'une façon générale, $T = (T; \supseteq)$ étant un tableau ramifié *complet* d'ensembles décroissants (cf. Thèse, pp. 81-85), M étant la réunion des $X \in T$, alors les rectangles $A \times B$, ($A, B \in f(X)$, $X \in T$ avec $1 < kX =$ le cardinal de X et $A \neq B$) constituent un pavage du carré $M \times M$ dont on a enlevé un certain sous-ensemble de la diagonale; $f(X)$ y désigne l'ensemble des successeurs immédiats de X dans $(T; \supseteq)$.

On trouve ainsi un lien intime entre des subdivisions complètes d'un ensemble M d'une part et de certains pavages de $M \times M$ d'autre part.

4. Produit pur de deux ensembles partiellement ordonnés

$(K; \leq_1)$, $(M; \leq_2)$ étant ensembles partiellement ordonnés, le produit pur de K et M sera l'ensemble $(K \times M; \leq)$ avec la condition que pour les éléments $(x; y)$, (x', y') de $(K \times M; \leq)$ la relation $(x, y)\rho(x', y')$ soit équivalente au système $x\rho_i x'$; $y\rho_i y'$, ($i = 1, 2$), ρ désignant un élément quelconque de $\{=, <\}$.

On démontre que le produit pur de deux ensembles partiellement ordonnés est partiellement ordonné; en particulier, le carré pur $(E \times E; \leq)$ d'un ensemble partiellement ordonné est un ensemble partiellement ordonné dont la diagonale est un sous-ensemble semblable à l'ensemble E lui-même.

Le théorème et le corollaire précédents peuvent alors s'exprimer de la façon suivante⁵:

THÉORÈME 4.1. *Pour qu'un ensemble ordonné continu E soit semblable à un ensemble linéaire, il faut et il suffit que chaque famille d'intervalles (extrémités exclues) deux à deux disjoints et extraits du carré pur de E soit au plus dénombrable.*

5. La condition de Suslin et les continus de Peano.

En se basant sur le théorème I Svetozar Kurepa en a déduit un autre que voici:

THÉORÈME 5.1. *Soit E un ensemble ordonné continu muni du point initial et du point final et vérifiant la condition de Suslin; pour que E soit semblable à un ensemble linéaire, il faut et suffit que pour chaque entier $n > 1$, l'espace E soit un transformé continu univoque de E .*

⁵Il est instructif de subdiviser a priori non pas E mais la diagonale de $E \times E$ et d'en reconstruire le pavage du carré.

Que les conditions du théorème 5.1 soient nécessaires c'est justement le contenu d'une proposition bien connue de Peano concernant des courbes remplissant un carré, un cube etc. Or, les conditions du théorème 5.1 sont encore suffisantes: si elles sont vérifiées par E , E est semblable à un ensemble linéaire. Cela résulte du théorème 1, puisque des conditions du théorème 5.1 on déduit que E^n vérifie la condition de Suslin.

En effet, dans le cas contraire, on aurait une famille infinie non dénombrable F de "cubes" deux à deux sans points communs et extraits de E^n . Soient $I \in F$ et i un point intérieur de I ; alors, par hypothèse, il existe une transformation f uniforme continue de E sur E^n ; si alors i_0 est un point du sous ensemble $f^{-1}(i)$, la continuité de f au point i_0 entraîne l'existence d'un voisinage I_0 de i_0 dans E se transformant dans le voisinage I de i :

$$fI_0 \subseteq I.$$

Les $I \in F$ étant deux à deux disjoints, il en seraient de même des I_0 , ($I \in F$), la transformation f étant uniforme ce qui voudrait dire que les I_0 , ($I \in F$) constitueraient une famille infinie non dénombrable d'intervalles de E deux à deux disjoints, contrairement à ce que, par supposition, E vérifie la condition de Suslin.

A ce propos il est bien intéressant de remarquer ceci. D'une part, on sait que la découverte des courbes de Peano c'est-à-dire des courbes remplissant une aire suscitait une grande surprise. D'autre part, on voit que la non-existence d'une "courbe" remplissant le carré $E \times E$, c'est-à-dire la non-existence d'une transformation uniforme continue d'un ensemble ordonné continu borné E vérifiant la condition de Suslin sur son carré $E \times E$ est équivalente à la réponse négative au problème de Suslin. Ainsi pour des E pareils, le phénomène de Peano (le fait que E^2 soit un transformé continu de E) est même caractéristique pour le continu linéaire.

On peut même se demander si un ensemble ordonné continu borné E tel que E^2 soit un transformé continu de E soit nécessairement semblable à l'ensemble des nombres réels x tels que $0 \leq x \leq 1$.

6. En terminant, ajoutons que nous ne connaissons aucun couple d'espaces jouissant de la propriété de Suslin dont le produit topologique cesserait de vérifier la condition de Suslin; il en est de même de la propriété lindelöffienne ou de la condition que tout ensemble ouvert soit un F_σ ou que tout ensemble isolé soit $\leq \aleph_0$. Dans le cas des espaces ordonnés, *chacun de ces problèmes est d'une manière équivalente lié au problème de Suslin.*

Il y là un ensemble de problèmes à explorer les liens entre un ensemble (espace) et son carré.

ON AN INEQUALITY CONCERNING CARTESIAN MULTIPLICATION

1. For a family F of sets let DF be the supremum of the cardinal numbers of disjointed subfamilies of F . Let F^{I^2} be the set of all the cartesian products $X \times Y$ with $X, Y \in F$. Analogously, for any ordinal number r let I^r be the interval of the ordinals $< r$ and let F^{I^r} be the system of the cartesian products of all r -sequences of members of F .

2. For a space S let GS be the system of all the open sets of G ; we put $DS = D(GS)$; $DS^{I^r} = D(G(S^{I^r}))$; the number DS is called the cellularity or disjunction degree of the space S .

The question arises to find the relations between the numbers DF^{I^r} ($r = 1, 2, \dots$) for any set family F and particularly for $F = GS$, S being any given topological space.

3. Let (G, ρ) be a binary graph i.e. G is a set and ρ is a binary reflexive and symmetrical relation in G . Let I be a non void set and for every $i \in I$ let (G_i, ρ_i) be a binary graph; we define the product of the graphs (G_i, ρ_i) as (G, ρ) , where $G = \prod G_i$ and where for $x, y \in G$ the relation $x\rho y$ means $\bigwedge_i x_i \rho_i y_i$, i.e. for every $i \in I$ one has $x_i \rho_i y_i$ (let us remind that $x \in \prod G_i$ means that x is a mapping of I such that $x_i \in G_i$ for every $i \in I$). Let $k_c(G, \rho)$ (resp. $k_{\bar{c}}(G, \rho)$ or $k_a(G, \rho)$) be the supremum of the cardinal numbers of chains (resp. antichains) of (G, ρ) .

The problem arises to find the connections between the numbers $k_a G^{I^r}$ and $k_a G$.

4. THEOREM. For any set system F with infinite DF one has: $(DF)^n \leq DF^{I^n} \leq 2^{DF}$ for any natural number n . (II) For any ordinal α there is a system F_α of sets such that $DF_\alpha = \aleph_\alpha$, $DF_\alpha^{I^2} = 2^{\aleph_\alpha}$, and consequently $DF_\alpha < D(F_\alpha^{I^2})$.

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra*, (Proceedings of the Symposium held in Prague in September, 1961), Prague, 1962, pp. 258-259

5. THEOREM. For any binary graph (G, ϱ) one has $(k_a G)^n \leq k_a G^{I^2} \leq 2^{k_a G}$; if $k_a G \geq \aleph_0$, then $k_a G^{I^n} \leq 2^{k_a G}$ for every natural number n .

6. THEOREM. For any metrical infinite space S and any positive integer n one has $k_a S = k_a S^{I^n}$.

7. THEOREM. For totally ordered sets O the relation (1) $k_a O = k_a O^{I^2}$ is equivalent to the following reduction principle: Every infinite ramified set R of regular cardinality kR contains a degenerated subset D of cardinality kR (any ordered set O in which every principal ideal $O(., x) = \{y; y < x; y \in O\}$ is a chain is said to be ramified; O is degenerated if both: principal ideals and dual principal ideals of O are chains). The relation (1) is connected to the well-known Suslin problem.

8. Problem. As yet one does not know any topological infinite space S satisfying $DS < DS^{I^2}$; the problem is to exhibit such a space.

THE CARTESIAN MULTIPLICATION AND THE CELLULARITY NUMBER

1. Introduction

There are many questions in connection with the cartesian multiplication of the sets, structures etc. In particular, the question is to find how some property of the cartesian product is induced by the analogous property of the factors. Some classical facts show that big differences may occur between the factors and the product. E.g. the problem of measure on the line R and in the square (plane) R^2 are of a different kind then the problem of the measure in the space R^3 or in space R^n for $n > 2$. The problem whether the cardinality kE^2 of infinite sets E equals kE is equivalent to the choice axiom.

In this article we shall examine a particular number – the cellularity number cX ($= \text{cel } X$) where X is any family of sets, any topological space or structure, in order to see how the cellularity of the product depends on the cellularity of the factors. At the same time, we shall become aware how the complete answer to the problem is connected with the tree hypothesis, and with the general continuum hypothesis. At this opportunity it is interesting to observe that the chain \times antichain hypothesis holds for every square or hypersquare of every tree or ramified set.

In the present first part of the paper main results are contained in theorems 3.4; 3.7; 4.10; 5.4; 5.6; 5.8 and 6.4.

2. Cellularity of a system of sets

2.1. For any system S of sets we define the cellularity $c = cS = \text{cel } S$ of S by the relation

$$c = \sup_{\Phi} k\Phi,$$

Φ consisting of pairwise disjoint sets belonging to S ; $k\Phi$ means the cardinality of Φ .

2.2. For any space E the cellularity cE of E is defined as the cellular number of the family of all open sets of the space E .

2.3. For any totally ordered set O the cellularity cO of O is defined as the cellular number of the system of sets of the form

$$O[x, \cdot) = \{y; x \leq y; \{x, y\} \subseteq O\}, \quad O(\cdot, x] = \{y; y \leq x; \{x, y\} \subseteq O\}$$

$$O(x, y) = \{z; x < z < y \text{ or } x < z < y; \{x, y, z\} \subseteq O\}.$$

3. Cartesian multiplication of sets and families of sets

3.1. *Definition.* Let I be any set of > 1 elements (the members of I shall serve as indices); for any $i \in I$ let X_i be a nonvoid set; the cartesian product of the sets X_i is the set $Y = \prod_{i \in I} X_i$ consisting of all single-valued functions f on I such that for every $i \in I$ one has $f(i) \in X_i$; i.e.

$$Y = \prod_{i \in I} X_i = \left\{ f; f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i, f(i) \in X_i \right\};$$

for $f, g \in Y$ one defines $f = g \Leftrightarrow f(i) = g(i)$ ($i \in I$).

In particular, for any ordinal number α one defines the hypercube X^α as the set of all the α -sequences of members in X ; X^0 means the empty set.

3.2. Let I be a nonvoid set and F a mapping on I such that, for every $i \in I$, F_i is a nonempty family of nonvoid sets; the cartesian product of the families F_i is the family $F^{.I}$ of the products $\prod_{i \in I} X_i$ where $X_i \in F_i$ ($i \in I$). In particular, for any ordinal α and any family F of sets one defines $F^{. \alpha} = F^{.I^\alpha} = \left\{ \prod_i X_i; X_i \in F, i < \alpha; I^\alpha \text{ means the set of all the ordinal numbers } < \alpha \right\}$.

$F^{.2}$ consists of all the products $X_0 \times X_1$ where X_0, X_1 run independently through F . One proves readily the following lemma.

3. LEMMA. For every disjoint (antidisjoint) family F of sets one has $(cF)^{kI^\alpha} = c(F^{.I^\alpha})$.

3.3. *Definition.* A family of sets is called disjoint (antidisjoint), provided its members are pairwise disjoint (nondisjoint).

3.4. MAIN THEOREM. (I) For any family F of sets and any natural number n the relation $cF \geq \aleph_0$ implies

$$(1) \quad (cF)^n \leq c(F^{.n}) \leq 2^{cF};$$

(II) For any ordinal number α there exists a system F of sets such that

$$(2) \quad cF_\alpha = \aleph_\alpha, (cF^{.2}) = 2^{\aleph_\alpha}$$

Therefore the evaluation in (1) is the best one.

3.5. *Proof of the theorem 3.4. (I)1.* The first relation (1) is obvious because for every disjoint system d of sets in F we have the system d^r in F^r that is disjoint and of cardinality $\geq kd$. Therefore, we have still to prove the second relation in (1). The proof will be carried out by induction relative to n .

First of all the relation (1) holds for $n = 2$. The proof of this fact is quite characteristic. We have to prove that every disjoint system D of sets in $F^{.I2}$ is of cardinality $\leq 2^{cF}$.

2. Now, let D be any disjoint system of the family $F^{.I2}$; this means that $X, Y \in D \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$ or $X = Y$.

Now, $X = X_0 \times X_1, Y = Y_0 \times Y_1, X_0, X_1, Y_0, Y_1$, being elements of F . The relation $(X_0 \times X_1) \cap (Y_0 \times Y_1) = \emptyset$ is equivalent to the disjunction $X_0 \cap Y_0 = \emptyset \vee X_1 \cap Y_1 = \emptyset$.

Let $(D; \rho)$ be the binary graph supported by D and where the relation $X \rho Y$ means that $X_0 \cap Y_0 = \emptyset$ holds. Thus if C is a ρ -chain in $(D; \rho)$, then $C_0 = \{X_0; X \in C\}$ is a disjoint system of F and therefore $kC_0 \leq cF$. If \bar{C} is an antichain in (D, ρ) , then $\{X, Y\} \in \bar{C}$ implies the negation $X \rho' Y$ of $X \rho Y$ i.e. that $X_0 \cap Y_0 \neq \emptyset$ and consequently $X_1 \cap Y_1 = \emptyset$; this means that again $\bar{C}_1 = \{X_1; X \in \bar{C}\}$ is a disjoint system in F . Consequently, every chain as well as every antichain of (D, ρ) is $\leq F$. In virtue of our graph theorem we have $kD \leq 2^{cF}$ (cf. [4, 3 Theorem 0.1 p. 82 and [4, 4 Theorem 6.2.2]). This holding for every disjoint system D in $F^{.2}$ one has $\sup_D kD \leq 2^{cF}$ i.e., $cF^{.2} \leq 2^{cF}$. Consequently, the theorem holds for $n = 2$.

3. Now, suppose that r is any natural number > 2 and the relation (1) holds for any natural number $n < r$; let us prove that (1) holds for $n = r$ too. Now, let D be any disjoint system in $F^{.n}$; then for $X = (X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_{r-1}) \in F$ and $Y = (Y_0 \times Y_1 \times \cdots \times Y_{r-1}) \in F$ the disjunction $X \cap Y = \emptyset$ means

$$(X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_{r-2}) \cap (Y_0 \times Y_1 \times \cdots \times Y_{r-2}) = \emptyset$$

or $X_{r-2} \cap Y_{r-2} = \emptyset$.

With respect to the relation (3) the subset D of F^r is a binary graph; by an argument like in 2 one proves that the induction hypothesis implies that every chain of this graph is $\leq 2^{cF}$ and that every antichain of the graph is $\leq cF$; in virtue of the graph theorem we infer that $kD \leq (2^{cD})^{cD} = 2^{cD}$; this holding for every D , the operator sup yields (1). And this was to be shown.

3.6. *Proof of the theorem 3.4.(II).* Let α be any ordinal number and let $M = Q(\omega_\alpha)$ be the system of all the ω_α -sequences of rational numbers ordered by the principle of the first differences: for any 2 different such sequences a, b let $i = i(a, b)$ be the ordinal such that $a_{i'} = b_{i'}$ for every ordinal $i' < i$ and $a_i \neq b_i$; we put $a < b$ if and only if $a_i < b_i$.

3.6.1. LEMMA. $kQ(\omega_\alpha) = \aleph_0^{\aleph_\alpha} (= 2^{\aleph_\alpha})$.

3.6.2. M is a chain with respect to the relation $<$ and every interval of M has 2^{\aleph_α} points.

In fact let $a = (a_\nu)_\nu, b = (b_\nu)_\nu$ be 2 distinct elements of M ; hence $i = i(a, b) < \omega_\alpha$ and either $a_i < b_i$ or $a_i > b_i$; if then c is any element of M such that $c_i \in Q(a_i, b_i)$, $i(a, c) = i(b, c)$, one has $c \in M(a, b)$; in particular, the ω_α -sequence $c_{i+1}, c_{i+2}, \dots, c_{i+\omega'_\alpha}$, might be any ω_α -sequence of rational numbers.

3.6.3. LEMMA. *Any increasing (decreasing) sequence in M is of cardinality $\leq \aleph_\alpha$.*

First of all the set M contains a ω_α -sequence as well as an ω_α^* -sequence; such are e.g. the sequences:

$$a^\zeta = \{1\}_\zeta + \{0\}_{-\zeta+\omega_\alpha} \quad (\zeta < \omega_\alpha)$$

$$b^\zeta = \{0\}_\zeta + \{1\}_{-\zeta+\omega_\alpha} \quad (\zeta < \omega_\alpha).$$

Further let us suppose that $(M, <)$ contains a well-ordered subset W of cardinality $> \aleph_\alpha$. In particular we might suppose that the type of W be $\omega_{\alpha+1}$. Now, every member x of W is an ω_α -sequence (x_ζ) with $x_\zeta \in Q$; for any pair x, y of distinct members of M let $i(x, y)$ be the first ordinal ν such that $x_\nu \neq y_\nu$. The ordinal $i(x, y)$ is like a *proximity degree (or dual distance)* between x, y and one proves readily that

$$(1) \quad x < y < z \Rightarrow i(x, z) = \inf\{i(x, y), i(y, z)\}.$$

This relation is like triangular relation.

Consequently, for every member $x \in W$ we have a nondecreasing monotone sequence

$$(2) \quad i(x, y), \quad (y \in W(x, \cdot)).$$

of ordinal numbers $< \omega_\alpha$; let $g(x)$ be the first $y > x$ in W such that $i(x, gx)$ equals the infimum of the numbers (2). In other words

$$(3) \quad i(x, gx) = \inf i(x, y), \quad (y \in W(x, \cdot)).$$

The relations (1) and (3) yield the following relation

$$(4) \quad i(x, y) = i(x, g(x)), \quad (y \in W(g(x), \cdot)).$$

Geometrically, the relation (4) means that the terminating interval $W(gx, \cdot)$ of W is located on the "sphere" $S(x, r^*)$, the center and the dual radius r^* of which are x and $r^* = i(x, gx)$ respectively; at the same time, gx is the first point of $W(x, \cdot)$ located on this sphere.

Now, by induction procedure we shall prove that the space $(W; i)$ (or ordered set $(W, <)$) would contain a subset $K = (k_0 < k_1 < \dots)$ of cardinality $\aleph_{\alpha+1}$ of points with a *constant mutual proximity* δ or there would be a decreasing sequence of cardinality $\aleph_{\alpha+1}$ of "spheres" (or terminating intervals of $(W, <)$) having no point in common. None of these possibilities might occur in the present case. For the last eventuality the thing is obvious; as to the first eventuality, the set K would be a well-ordered subset of $(W, <)$ and for every 2-point-set $\{x, y\} \subset K$ one would have $i(x, y) = \delta$; the set K of all the δ^{th} coordinates x_δ of members x of K would be a subset of $(W, <)$ isomorphic with $(K, <)$ - absurd.

To start with, let $k_0 = W_0$; put $k_1 = W_{i(k_0, gk_0)}$ (cf. (3)); suppose that ν is an ordinal $< \omega_{\alpha+1}$ and that decreasing "spheres" $S(k_\zeta; r_\zeta^*) = W(gk_\zeta, \cdot)$ ($\zeta < \nu$) with $r_\zeta^* = i(k_\zeta, gk_\zeta)$ are defined; we put $k_\nu = W_{i(k_{\nu-1}, gk_{\nu-1})}$ or $k_\nu = \sup_{\zeta < \nu} k_\zeta$, according as $\nu - 1$ is limit or nonlimit ordinal. The construction of k_ν is well determined for every $\nu < \omega_{\alpha+1}$ and one sees by induction argument that really

$$(5) \quad S(k_\nu, r_\zeta^*) = W(gk, \cdot) \text{ for every } \nu < \omega_{\alpha+1};$$

in other words

$$(6) \quad i(k_\nu, y) = r_\zeta^* = i(k_\nu, gk_\nu) \text{ for every } y \in W(gk_\nu, \cdot).$$

The function $\nu \rightarrow r_\xi^*$ is a monotone non decreasing function of $I\omega_{\alpha+1}$ into $I\omega_\alpha$. Let r^* be the supremum of the ordinals r_ξ^* . On a has

$$(7) \quad r^* \leq \omega_\alpha.$$

Now, the relation $r^* = \omega_\alpha$ would imply that some ω_α -sequence of segments $W(gk^\zeta, \cdot)_\zeta$ would have a void intersection (take e.g. k^ζ as first k_ν satisfying $i(k_\nu, gk_\nu) = r_{*\zeta}^*$); in other words the ω_α -sequence gk^ζ would be cofinal with the $\omega_{\alpha+1}$ -sequence W — absurd.

The relation

$$(8) \quad r^* < \omega_\alpha.$$

does not hold either. Namely, if the number r^* is isolated, there would be $r^* = r_\mu^* = i(k_\mu, gk_\mu)$ for a $\mu < \omega_{\alpha+1}$; if r^* is not isolated, then for some strictly increasing sequence $r_{n_\zeta}^* = i(k^\zeta, g(k^\zeta))$ of cardinality $\leq \aleph_\alpha$ there would be $r^* = \sup r_{n_\zeta}^*$; in either case one concludes that $r^* = r_\nu^*$ for every ν of the final section $S = K(z, \cdot)$, where $z = k_\mu$ or $z = \sup k^\zeta$. According to (6) this means that $i(k_\nu, y) = r^* = i(k_\nu, gk_\nu)$ for every $y \in W[z, \cdot)$. Therefore by (3) we infer that all distinct points in $W[z, \cdot)$ have the same mutual proximity — the number r^* . This fact implies that the set $W[z, \cdot)$ we defined above is a subset of Q isomorphic to $W[z, \cdot)$ and W — absurd.¹

3.6.4. *A partial order associated to the linear order $(M; <)$.*

Let $x \rightarrow ux$ ($x \in M$) be a normal well-ordering uM of M i.e., such that uM is not equivalent to any of its proper initial portions; in other words let $u = ux$ be a one-to-one mapping of M onto the segment of ordinal numbers corresponding to an initial ordinal ω_β . Let then the partial order \prec in M be defined as superposition of the orders $<$ and u :

$$a \preceq b \text{ means } a \leq b \text{ and } ua \leq ub.$$

1. *Every chain C in $(M; \prec)$ is of cardinality $\leq \aleph_\alpha$.*

In fact C is a well-ordered subset in $(M; <)$ and in virtue of 3.6.3. C is $\leq \aleph_\alpha$.

2. *Every antichain A in $(M; \prec)$ is of cardinality $\leq \aleph_\alpha$.*

As a matter of fact, A is a decreasing sequence in $(M; <)$ and in virtue of 3.6.3 A is $\leq \aleph_\alpha$.

¹The foregoing proof of Lemma 3.6.1 represents a space-theoretical wording (using abstract distance or abstract proximity) of the theorem XIV in Hausdorff [1].

3.6.5. Let $x \in M$ and (cf. Sierpiński [5])

$$E_x = \{\{x, x'\}; x' \in M, x' \prec x \text{ or } x \prec x'\}.$$

The mapping $x \rightarrow E_x$ is biunique. For if $y \in M$ and e.g. $x < y$ let then $z \in M(x, y)$ and $uz > \sup\{ux, uy\}$ one has $x \prec y$ and thus $\{x, y\} \in E_x$; on the contrary $\{x, y\} \notin E_y$, because $y \notin \{x, z\}$.

3.6.6. Let $F = \{E_x; x \in M\}$. Then $kF = kM = 2^{\aleph_\alpha}$.

3.6.7. We consider the graph $(F; D)$, D being the disjunction relation. Every antichain as well as every chain of the graph $(F; D)$ is $\leq \aleph_\alpha$.

In fact let A be an antichain in $(F; D)$; let E_x, E_y be two distinct elements of A ; then $\{x, y\} \neq \emptyset$ and $E_x \cap E_y \neq \emptyset$; let $\{x, x'\} = \{y, y'\}$ be an element of E_x and E_y ; then $x' = y, y' = x$; consequently, the points x, y are \prec -comparable in M ; and vice versa, if x, y are 2 distinct \prec -comparable points of $(M; \prec)$, then $E_x \cap E_y \neq \emptyset$. If $E_x \cap E_y = \emptyset$, then x, y are not \prec -comparable:

$$x \neq y(\cdot \prec) \Leftrightarrow E_x \cap E_y = \emptyset$$

$$x \equiv y(\cdot \prec) \Leftrightarrow E_x \cap E_y \neq \emptyset.$$

Consequently, to every \prec -chain C in $(M; \prec)$ corresponds a J -chain consisting of the elements E_x ($x \in C$); to every \prec -antichain A corresponds the disjoint system E_x ($x \in A$).

As a consequence of 3.6.3. one has therefore 3.6.7.

3.6.8. **The system G of sets.** For any $x \in M$ let $G_x = \{\{x, y\} \neq \emptyset; y \text{ is } \prec\text{-incomparable to } x\}$ i.e., $(x < y \wedge ux > uy) \vee (x > y \wedge ux < uy)$. Let $G = \{G_x; x \in M\}$.

1. Every chain and every antichain in $(G; D)$ is $\leq \aleph_\alpha$. Again, $x \neq y(\cdot \prec) \Leftrightarrow G_x \cap G_y \neq \emptyset$ i.e., $x \text{ comp. } y \Leftrightarrow G_x \cap G_y = \emptyset$.

3.6.9. $F \cdot \cap \cdot G = \emptyset$ i.e., $x \in F \wedge y \in G \Rightarrow x \cap y = \emptyset$.

3.6.10. **Family H.** Let $H = F \cup G$; the family $(H; D)$ is the required family: every D -chain and every D -antichain is $\leq \aleph_\alpha$.

Now H^{I^2} contains a disjoint system of kM elements because the sets $H_i = E_i \times G_i$ ($i \in M$) are pairwise disjoint. As a matter of fact, let $x \neq y$ and $x, y \in M$; then either x, y are comparable or incomparable in M ; if x, y are comparable, then G_x, G_y are disjoint and so are the sets H_x, H_y ; if x, y are incomparable, the sets E_x, E_y are disjoint and so are also the sets H_x, H_y . The theorem 3.3. (II) is proved.

3.7. THEOREM. For every family F of sets and every ordinal number α we have (1) $cF = cF^{I_2}$ provided $cF = 1$;

(2) $(cF)^{k\alpha} \leq cF^{I\alpha} \leq kF^{k\alpha}$; if $cF > 1$, then for some ordinal α_0 of cardinality $\leq kF$ we have

(3) $(cF)^{k\alpha} = cF^{I\alpha}$ for every ordinal $\alpha \geq \alpha_0$.

The relation (1) is obvious; the first relation in (2) is a consequence of the fact that cartesian product of a disjoint system of sets is again a disjoint system of sets. The second relation in (2) is obvious because the cellularity of any family of sets is less than or equals to the cardinality of the same family; on the other hand, the cardinality of $F^{I\alpha}$ equals $(kF)^{k\alpha}$. Therefore, the relations (2) hold. Finally, if $kF \leq k\alpha$, then $kF^{k\alpha} = 2^{k\alpha}$, and therefore according to (2) we have $cF^{I\alpha} \leq 2^{k\alpha}$; this relation joint with the relation $2^{k\alpha} \leq (cF)^{k\alpha}$ and the first relation in (2) yields the requested equality (3).

3.8. THEOREM. For any ordered pair (a, b) of cardinal numbers a, b there exists a family F of sets and some ordinal number α such that $a = cF$ and $cF^{I\alpha} \geq b$.

As a matter of fact, we can consider any disjoint family F of cardinality a ; then for some α we have $a^{k\alpha} \geq b$ and consequently $(cF)^{k\alpha} \geq b$.

3.9. THEOREM. For any F and sets A, B we have

$$kA = kB \Rightarrow cF^A = c(F^B)$$

$$kA \leq kB \Rightarrow cF^A \leq c(F^B).$$

As a matter of fact let t be a one-to-one mapping of A into B ; and let D be a disjoint system in F^A ; for $f \in D$ we define $t = t(f)$ in this way

$$f : A' \rightarrow fA', \text{ where } fA' \in F;$$

the antidomain tA of t is a part of B ; to every mapping $f : A \rightarrow F$ we define the mapping $\nu_f : B \rightarrow F$ as the one which equals ft^{-1} in tA and which, in $B \setminus tA$, equals a constant $b \in B \setminus tA$. Then $\nu_f \in F^B$.

To every disjoint set D in F^A corresponds an equivalent system $\nu_D = \{\nu_f : f \in D\}$ in F^B . If $tA = B$, then the mapping $f \rightarrow \nu_f$ is an isomorphism from F^A onto F^B .

3.10. THEOREM. Let A, B be any sets and F a family of sets; then $cF^{(A \cup B)} \leq s^i$, where $s = \sup\{a, b\}$, $i = \inf\{a, b\}$, $a = cF^A$, $b = cF^B$. If the product ab is infinite, then $cF^{(A \cup B)} \leq 2^{\sup\{a, b\}}$.

We shall consider the case that A, B are nonempty disjoint sets. Then every member $x \in F^{(A \cup B)}$ is the set of functions $g \mid (A \cup B)$ where for

$i \in A \cup B$ one has $g_i \in x_i$, x_i being a member of F . Let g_A be the corresponding subfunction in A and let x_A be the set of all these subfunctions g_A ; analogously one has g_B and x_B . For any set $S \subseteq F^{(A \cup B)}$ one has the "projections"

$$S_A = \{x_A; x \in F^{(A \cup B)}\}, \quad S_B = \{x_B; x \in F^{(A \cup B)}\}.$$

In particular, for every disjoint set D in $F^{(A \cup B)}$ we have D_A, D_B . For any members X, Y of $F^{(A \cup B)}$ the relation $X \cap Y = \emptyset$ means

$$(1) \quad X_A \cap Y_A = \emptyset \quad \text{or}$$

$$(2) \quad x_B \cap y_B = \emptyset.$$

Let $X \rho Y$ means (1) i.e., that $X_A \cap Y_A = \emptyset$. Then D is a graph relative to the relation ρ . Let L be a ρ -chain in D ; this means that

$$(3) \quad \{X, Y\}_\neq \subseteq L \Rightarrow \{X_A, Y_A\} \subseteq L_A \text{ and } X_A \cap Y_A = \emptyset$$

and that L_A is a disjoint system in D_A . Now, the family D_A is isomorphic to a subsystem of the family F^A , therefore

$$(4) \quad kL_A \leq a \quad (= cF^A).$$

Because of relations (3), the correspondence $X \in L \rightarrow X_A \in L_A$ is onto and one-to-one: $kL = kL_A$ what jointly with (4) yields $kL \leq cA$ for every ρ -chain L in the graph $(A; \rho)$.

Analogously, one proves that every antichain M of (D, ρ) yields disjoint system M_B of cardinality kM ; since $kM_B \leq cF^B$ this means that every antichain in (D, ρ) is of cardinality $\leq b = cF^B$. Consequently, by the graph-chain-antichain-theorem we have the requested relation.

3.11. THEOREM *If r is a natural number and F a set family then*

$$(1) \quad cF^{I \cdot r} = 2^{cF} \Rightarrow cF \cdot I(r+n) = cF^{I \cdot r} \quad (2)$$

for every integer n .

Proof. The proof is carried out by induction relative to n . Let D be a disjoint system in $F^{I(r+1)}$; then

$$(3) \quad \{X, Y\}_\neq \subseteq D \Leftrightarrow$$

$$(X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_{r-1} \cap (Y_0 \times Y_1 \times \cdots \times Y_{r-1} = \emptyset \vee X_r \cap Y_r = \emptyset).$$

Let $X \rho Y$ means that (3) occurs; then to every ρ -chain $L \subseteq D$ corresponds the disjoint chain L_{I_r} -projection of L into the product F^{I_r} ; consequently $kL_{I_r} \subseteq cF^{I_r}$ and according to the assumption (1) we have $kL_{I_r} \leq 2^{cF}$; again $kL = kL_{I_r}$ and thus $kL \leq 2^{cF}$. Consequently, every chain of the graph (D, ρ) is $\leq 2^{cF}$. Analogously, one proves that every antichain of (D, ρ) is $\leq cF$. Hence $kD \leq (2^{cF})^{cF} = 2^{c^2F}$.

The implication (1) \Rightarrow (2) is thus proved for every r and $n-1$; writing in particular $r+1, r+2, \dots$ instead of r , the implication (1) \Rightarrow (2) is proved for $n = 1, 2, 3, \dots$ i.e. for every n .

3.12. PROBLEM Let F be a system of sets and n a natural number satisfying $\aleph_0 \leq cF^{I_n} = cF^{I(n+1)}$; is there a one-to-one mapping of $F^{I(n+1)}$ into F^{I_n} which conserves both disjointness and jointness of sets? In other words, is then the disjunction graph $(F^{I(n+1)}; D)$ isomorphic to a subgraph of $(F^{I(n)}; D)$?

4. Disjoint systems in $F_1 \cdot \times \cdot F_2$

4.1. F_1, F_2 being set families, let Δ be a disjoint system (or D -chain) in the product

$$(1) \quad F_1 \cdot \times \cdot F_2 = \{x_1 \times x_2; x_1 \in F_1 \wedge x_2 \in F_2\}$$

Let $pr_1 \Delta = p_1 \Delta$ and $p_2 \Delta$ be the first and the second projection of Δ respectively. For any $a \in pr_1 \Delta$ we have the following antiprojection of a into Δ : $p_1^{-1} \Delta(a, \cdot) = \{(a, y); y \in F_2 (a, y) \in \Delta\}$; for any subset $A \subseteq F_1$ we have the corresponding first antiprojection of A into Δ defined by

$$p_1^{-1} \Delta(A, \cdot) = \bigcup_{a \in A} \{p_1^{-1} \Delta(a, \cdot)\}.$$

Analogously, one defines the second antiprojection of any $B \subseteq F_2$ in this way:

$$p_2^{-1} \Delta(\cdot, B) = \bigcup_{b \in B} \{p_2^{-1} \Delta(\cdot, b)\},$$

where $p_2^{-1} \Delta(\cdot, b) = \{(x, b); x \in F_1, (x, b) \in \Delta\}$. By an argument we used in section 3 one proves readily the following items.

4.2. LEMMA. For every $a_1 \in F_1$ the first antiprojection $p_1^{-1} \Delta(a_1, \cdot)$ in Δ yields the disjoint second projection $p_2 p_1^{-1} \Delta(a_1, \cdot)$; therefore the cardinality of this set as well as that of $p_1^{-1} a_1$ is $\leq cF_2$. The first antiprojection in Δ of any jointed system C in F_1 is a disjoint system in F_2 ; the p_2 -projection

of $p_1^{-1}C$ is a one-to-one mapping yielding a disjoint system of cardinality $\leq cF_2$ in F_2 .

4.3. LEMMA. Let $T = T(\Delta_1)$ be any tree or ramified table of the family (F, \supseteq) ; then every D -chain in T is $\leq cF_1$ and every J -chain of T is $\leq cF_2$. If the number $s = \sup\{cF_1, cF_2\}$ is infinite, then one knows that

(1) $kT \leq s^e$; where $s^e \in \{s, s^+\}$; in particular the tree hypothesis yields $s^e = s = cF_1 \cdot cF_2$ and therefore

(2) $kT \leq cF_1 \cdot cF_2$.

4.4. For every $x_1 \in \Delta_1$ let

(3) $\Delta_1(\cdot, x_1]_{\geq q}$; denotes the system of all the members of Δ_1 , each joint with x_1 and none contained as a proper part of x_1 ; then one has the star number $S\Delta_1(\cdot, x_1]$ as the minimal number of chains in (3) exhausting (3). Each J -chain in (3) being $\leq cF_2$ (Lemma 4.2), we infer that

(3) $k\Delta_1(\cdot, x_1)_q \leq cF_2 \cdot S\Delta_1(\cdot, x_1)_q$, ($x_1 \in \Delta_1$) and hence

(4) $k\Delta_1(\cdot, x_1]_q \leq cF_2 \cdot s_1F_1$, where

(5) $s_1F_1 = \sup S(\cdot, x]_q$; the number s_1F_1 is called the *left local star number of the family* $(F_1; \supseteq)$.

4.5. Now, as a consequence of the choice axiom it is easy to prove the existence of a subtree $T = T(\Delta_1)$ of Δ_1 that is *quasi-cofinal* with Δ_1 in the sense that²

$$(6) \quad \Delta_1 = \bigcup_{t \in T} \Delta_1(\cdot, t]_{\geq q};$$

this means that to every $x \in \Delta_1$ corresponds some $t \in T$ such that x meets t but is not a proper part of t^1 . By induction the rows T_0, T_1, \dots of such a T are defined in this way; T_0 is any maximal disjoint system in Δ_1 , for every $t_0 \in T_0$ let ft_0 be any maximal disjoint system in A_1 each member of ft_0 being a proper subset of t_0 ; one puts

$$T_1 = \bigcup ft_0, (t_0 \in T_0) \text{ etc.}$$

Putting for every ordinal α

$$T^\alpha = \bigcup_{\zeta} T_\zeta \quad (\xi < \alpha)$$

one sees that T^α is a tree; if T is quasi-cofinal with Δ_1 , we put $T^\alpha = T$; if T^α is not quasi-cofinal to Δ_1 , we construct T_α as $\bigcup ft_{\alpha-1}$ ($t_{\alpha-1} \in T_{\alpha-1}$)

²This fact was found also by S. Mardesić.

if the ordinal α is of the first kind; if α is a limit ordinal > 0 , we consider every joint decreasing α -sequence C^α of members of T^α and consider any maximal disjoint system fC^α of $\Delta_1 \setminus \bigcup \Delta_1(\cdot, t)_{\geq q}$, each being a proper part of every member of C^α . One puts then

$$T = \bigcup_{C^\alpha} fC^\alpha$$

(one sees that the construction for nonlimit α is reducible to this construction using C^α , because for every $t_{\alpha-1} \in T_{\alpha-1}$ the α -sequence of oversets of $t_{\alpha-1}$ in T^α is such that $ft_{\alpha-1}$ serves as fC^α).

4.6. This being done let $T(\Delta_1)$ be any quasi-cofinal subtree of Δ_1 . The decomposition (6) yields jointly with (4)

$$(7) \quad k\Delta_1 \leq kT \cdot cF_2 \cdot s_1F_1.$$

The relation (7) by (1) yields

$$(8) \quad k\Delta_1 \leq c^\varepsilon \cdot cF_2 \cdot s_1F_1.$$

Going back from Δ_1 to Δ the relation (8) in virtue of Lemma 4.2. gives

$$(9) \quad k\Delta \leq cF_1 \cdot s^\varepsilon \cdot cF_2 \cdot s_1F_1.$$

This holding for every D -chain Δ of $F = F_1 \cdot \times \cdot F_2$, one concludes that

$$(10_1) \quad cF (= \sup_{\Delta \subset F} k\Delta) \leq cF_1 \cdot s^\varepsilon \cdot cF_2 \cdot s_1F_1.$$

4.7. Analogously, considering the second projection Δ_2 of Δ , one proves that

$$(10_2) \quad c(F_1 \cdot \times \cdot F_2) \leq cF_2 \cdot s^\varepsilon \cdot cF_1 \cdot s_1F_2.$$

4.8. The relations (10₁), (10₂) yield by multiplication:

$$(11) \quad (cF)^2 \leq (cF_1 \cdot cF_2)^2 \cdot (s^\varepsilon)^2 \cdot s_1F_1 \cdot s_1F_2.$$

4.9. If s is infinite, then cF is infinite also and $(cF)^2 = cF$ and the exponents 2 in (11) could be dropped; we obtain $cF \leq s \cdot s^\varepsilon \cdot s_1$ where $s_1 = \sup\{s_1F_1, s_1F_2\}$. Since $s \leq s^\varepsilon$ we have $s \cdot s = s^\varepsilon$ and consequently

$c \leq s^\epsilon \cdot s_1$. Since obviously $c_1, c_2 \leq c$ thus $s \leq c$ and we have proved the following relation

$$(12) \quad s \leq cF \leq s^\epsilon \cdot s_1.$$

4.10 THEOREM. (I) Let I be a finite index set (e.g. the interval In of ordinals $< n$, where n is a given finite ordinal); let $F_i, (i \in I)$ be a finite sequence of nonvoid set systems such that at least one of the cellular numbers cF_i be infinite; then $s \leq c \prod_i F_i \leq s^\epsilon \cdot s_1$, where $s = \sup_i cF_i = \sup_i s_1 F_i$, and $s^\epsilon \in \{s, s^+\}$. In particular for any set system G and any natural number n one has $cG \leq c(G^n) \leq (cG)^\epsilon \cdot s_1$.

(II) One has $s^\epsilon = s$ if and only if the tree hypothesis

$$k_c T \leq s \text{ and } k_{c'} T \leq s \Rightarrow kT \leq k_c T \cdot k_{c'} T$$

is true or false.

Since the theorem (II) was proved else (Kurepa [1, p. 106 theor. 1]), let us prove the theorem (I).

We just proved that the theorem (I) holds if the index set I has 2 members; by induction argument one sees that the same conclusion holds for any finite set I .

Let us prove the theorem (I) if I has 3 members 1,2,3. Let Δ be any D -chain in $F (= F_1 \cdot \times \cdot F_2 \cdot \times \cdot F_3)$ and Δ_{12} and Δ_3 its projections into $F_1 \cdot \times \cdot F_2$ and F_3 respectively. For any tree T in Δ_{12} that is quasi-cofinal with Δ_{12} we have (like in (7)):

$$(13) \quad k\Delta_{12} \leq kT \cdot cF_3 \cdot s_1(F_1 \cdot \times \cdot F_2).$$

We have to evaluate the factors kT, s_1 in (13). First of all,

$$(14) \quad s_1(F_1 \cdot \times \cdot F_2) \leq s_1 F_1 \cdot s_1 F_2.$$

As a matter of fact, for any $x_1 \in F_1$ let A_1 be a system of J -chains of sets $\in F_1$ exhausting $F_1(\cdot, x_1) \supseteq_q$; analogously, for $x_2 \in F_2$ one has a family A_2 of jointed systems of sets-members in $F_2(\cdot, x_2) \supseteq_q$ exhausting this family. Then we have the element $x_1 \times x_2 \in F_1 \cdot \times \cdot F_2$ and the system $A_1 \cdot \times \cdot A_2$; all elements of this system are J -chains, each quasi-containing $x_1 \times x_2$ and the system exhausts $F_0 = F(\cdot, x_1 \times x_2) \supseteq_q$; because if $M_1 \times M_2$ is any member of F_0 q -containing $x_1 \times x_2$, then M_i q -contains x_i and for some $J_i \in A_i$ we

have $M_i \in J_i$ and hence $M_1 \times M_2 \in J_1 \times J_2 \in A_1 \cdot \times \cdot A_2$. In this way we proved that

$$s(F_1 \cdot F_2)(\cdot, x_1 \times x_2)_{\supseteq q} \leq sF_1(\cdot, x_1)_{\supseteq q} \times sF_2(\cdot, x_2)_{\supseteq q};$$

from here allowing x_1, x_2 to vary in F_1, F_2 respectively and taking sup we have the requested relation (14).

The relation (13), (14) yield

$$(15) \quad k\Delta_{12} \leq kT \cdot cF_3 \cdot s_1F_1 \cdot s_1F_2.$$

4.11. LEMMA. Let $s_{12} = \sup\{cF_1, cF_2\}$; every chain and every antichain of every tree $T \subset F_1 \cdot \times \cdot F_2$ is $\leq s_{12}^\epsilon$; also $kT \leq s_{12}^\epsilon$.

In the opposite case there would be a tree T_a in F of cardinality $\geq s_{12}^{\epsilon+}$; now obviously, $w_d(F_1 \cdot \times \cdot F_2) \leq w_dF_1 \cdot w_dF_2$, where w_dA for any family A of sets denotes the supremum of cardinalities of strictly decreasing sequences of sets in A . Since kT_a is greater than the cardinality of any tree in F_1 or in F_2 , and since this fact is not due to J -subchains of trees, it should be due to D -subchains, and the tree should contain an antichain $\geq s_{12}^{\epsilon+}$, in contradiction with 4.3.

The relation (15) and Lemma 4.11 imply $k\Delta_{12} \leq s_{12}^\epsilon \cdot cF_3 \cdot s_1F_1 \cdot s_1F_2$.

From here, going back to Δ :

$$(16) \quad k\Delta \leq (s_{12}^\epsilon \cdot cF_3 \cdot s_1F_1 \cdot s_1F_2) \cdot cF_3.$$

Now, let $s = \sup_i cF_i$ and $s_1 = \sup_i s_1F_i$; then $s_{12} \leq s$, $cF_3 \leq s$ and therefore $s_{12}^\epsilon (cF_3)^2 = s^\epsilon$; again $s_1F_1 \cdot s_1F_2 \leq s_1$ and the relation (16) yields $k\Delta \leq s^\epsilon s_1$. This proves the theorem for $I = 1, 2, 3$. By induction argument one proves the theorem for every finite index set I . Q.E.D.

The foregoing theorem, by particularization implies the following.

4.12. THEOREM. Let I be a finite index set and $F_i (i \in I)$ a sequence of nonvoid systems with $\sup_i cF_i = s = \infty$; if $s_1F_i \leq s$, then $s \leq c \prod_i F_i \leq s^\epsilon$. Such a case holds particularly if F_i is a system of intervals of a totally ordered set $O_i (i \in I)$; in this case one has $s_1F_i \leq 2$.

As a matter of fact any system S of intervals overlapping a given interval x of a given totally ordered set equals $S_1 \cup S_2$, where S_1 denotes all the members of S containing the left extremity of x and where S_2 denotes all the members of S each containing the right extremity of x ; obviously, S_i is jointed.

5. Cartesian multiplication of topological spaces

5.1. *Definition of cartesian multiplication of spaces*³. For every $i \in I$ let X_i be a topological space; the cartesian product X of sets X_i of points of X_i will be called the *topological product of spaces* X_i provided for every point $x \in X$ the neighborhoods are defined in the following way; let I_0 be a *finite part of* I ; for every $i_0 \in I_0$ let $O(i_0)$ be neighborhood of the point x_{i_0} in the space X_{i_0} ; for every $i \in I$ let X_i^+ be $O(i)$ or X_i , according as $i \in I_0$ or $i \in I \setminus I_0$; the cartesian product of all the sets X_i^+ is called neighborhood of the point x . This neighborhood depends on the finite set $I_0 \subseteq I$ and on the neighborhoods $O(i_0)$ in X_{i_0} for $i_0 \in I_0$. The stress in the foregoing definition is the finiteness of subsets I_0 of I .

5.2. The neighborhoods could be defined in this way also. For a point x_i on the i^{th} coordinate axis let $p_i^{-1}(x_i)$ be the i^{th} antiprojection of x_i into the space i.e. the set of the points x of the space, the i^{th} coordinate of which is just the point x_i of the space X_i . For a subset S_i of the space X_i we define the i^{th} antiprojection $p_i^{-1}S_i$ as the union of all the sets $p_i^{-1}x_i$ ($x_i \in S_i$). In other words, the set p_i^{-1} is the anti-projection of S_i in the direction of the X_i -axis. Then the foregoing neighborhood is the intersection of the open sets like this.

$$(1) \quad \bigcap p_{i_0}^{-1}(Ox_{i_0}) \quad (i_0 \in I_0).$$

Marczewski-Szpilrajn [1] proved that if the topological spaces X_i are of countable weight each, then the weight of the cartesian product X is countable too. The phenomenon is a general one and we have the following.

5.3. THEOREM. *For every topological T_2 -space S and every nonvoid index set I the cellularity of the cartesian hyper-cube S^I equals $(cS)^{kI}$ for $w \cdot kI < \aleph_0$; if $kI \cdot w \geq \aleph_0$, then $\sup\{\aleph_0, cS\} \leq cS^I \leq w$, where the weight w ($= wS$) of the space S is defined as the infimum of cardinal numbers of neighborhood bases of the space S .*

The theorem 5.3 is a special case of the following theorem (in the wording of the theorem put $X_i =$ fixed space S for every $i \in I$).

5.4. THEOREM *Let I be a nonvoid set and X_i , for every $i \in I$, a topological space. Let wX_i denote the weight number of the space X_i and*

³We shall consider topological T_2 -spaces i.e., Fréchet's V -spaces satisfying the Hausdorff's T_2 -condition of separation. The T_2 -separation condition means that for any 2-point set $\{a, b\}$ there is a neighborhood $V(a)$ of a and a neighborhood $V(b)$ of b such that $V(a) \cap V(b) = \emptyset$.

$w = \sup wX_i$; then for the cellularity number cX of the cartesian product $X = \prod_i X_i$ one has:

$$(2) \quad kI \cdot w < \aleph_0 \Rightarrow \prod_i cX_i = cX$$

$$(2') \quad kI \cdot w \geq \aleph_0 \Rightarrow \sup\{\aleph_0, \sup_i cX_i\} \leq cX \leq w.$$

5.5. Proof of the theorem 5.4.

1. *First case:* The number of factors X_i is finite and every X_i is finite. In this case, obviously $cX_i = kX_i = wX_i$ and $cX = kX = wX$; since $kX = \prod_i kX_i$, the preceding relations yield the requested implication (2).

Second case: $kI \cdot w \geq \aleph_0$. Now, it is obvious that if kI is infinite and every factor has at least 2 points, then the number $c(= cX)$ can not be finite. Therefore we have still to consider the case when the weight of every factor is infinite, irrespectively to what happens with kI .

Let c denotes the number cX . First of all, $c \geq cX_i$ for every $i \in I$ and hence $c \geq c_s (= \sup cX_i)$. As a matter of fact, let D_i be any disjoint system of open sets of the space X_i ; putting $\{i\} = I_0$ and taking $O_i \in D_i, O_j = X_j$ for $j \in I \setminus \{i\}$, one gets a system of cardinality kD_i of open sets $\prod_{x \in I} O_x$ of the space X ; therefore $c \geq kD_i$ and $c \geq cX_i (= \sup_{D_i \subset X_i} kD_i)$ for every $i \in I$. The relations $c \geq cX_i$ imply $c \geq \sup c_i$ i.e., $c \geq c_s$. Therefore the requested relation (2') will result of the impossibility of the relation $c > w$. Obviously we can suppose also that $w \geq \aleph_0$.

5.5.2. Now, suppose on the contrary that $c > w$ and that there exists a disjoint system D of open sets of the space X such that

$$(2) \quad kD > w \geq \aleph_0.$$

One might suppose that the members of D are of the form (1), where I_0 is a (variable) finite subset of I (it is sufficient to choose an element of the form (1) in each member of D and consider the system of the selected elements). For every $i \in I$ let B_i be a basis of neighborhoods of the space X_i such that

$$kB_i = wX_i \quad (:= w_i).$$

This being done, let n be any natural number and let D_n be the system of all the members (1) in D such that $kI_0 = n$. Obviously $D = \bigcup_n D_n (n < \omega)$

and since, by (2), the system D is not countable there exists an integer m such that also

$$(4) \quad kD_m > w.$$

5.5.3. Let $x = \Pi X_i^+$ ($i \in I$) be a particular member of D_m ; then the set I_{om} of the points $i \in I$ such that $X_i^+ \neq X_i$ is a well determined finite subset of m points of I . The members of D_m being pairwise disjoint one has in particular $x \cap y = \emptyset$ for every $y \in D_m \setminus \{x\}$; this means that for every such y one has $x_i \cap y_i = \emptyset$ for some $i = i(y) \in I_{om}$ because $x_i \cap y_i \neq \emptyset$ for every $i \in I \setminus I_{om}$. The mapping

$$(5) \quad f : D_m \rightarrow I_{om}.$$

is a single-valued mapping of the set D_m of cardinality $> \aleph_0$ into a finite m -point set $I_{om} = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$. Therefore for some $j_1 \in I_{om}$ there exists a subset D_m^o of D_m in which the mapping (4) equals j_1 and so that $kD_m^o = kD_m$. Now, let us consider the p_{j_1} -projection of the set D_m^o into the space X_{j_1} ; this mapping is a single-valued mapping of the set D_m^o of cardinality $> w$ into the basis B_{j_1} of w_{j_1} members of the space X_{j_1} . Since $kD_m^o > w \geq w_{j_1}$, one infers that for some member $O'_{j_1} \in B_{j_1}$ and for some subset D_{m_1} of D_m^o one would have $pr_{j_1} D_{m_1} = O'_{j_1}$, $kD_{m_1} > w$.

5.5.4. Substituting D_{m_1} for D_m and $I_{om} \setminus \{j_1\}$ for I_{om} the argument of 4.4.3. shows that for: some point $j_2 \in I_{om} \setminus \{j_1\}$, some subset D_{m_2} of D_{m_1} and some neighborhood $O_{j_2}' \in B_{j_2}$ one has

$$f \upharpoonright D_{m_2} = j_2, \quad pr_{j_2} D_{m_2} = O_{j_2}', \quad kD_{m_2} > w.$$

The induction procedure would go on: there would be a subset D_{m_3} of D_{m_2} , a point $j_3 \in I_{om} \setminus \{j_1, j_2\}$ and an $O_{j_3}' \in B_{j_3}$ such that

$$f \upharpoonright D_{m_3} = j_3, \quad pr_{j_3} D_{m_3} = O_{j_3}', \quad kD_{m_3} > w; \quad \text{etc.}$$

The m -th step of the induction procedure would yield: a disjoint subset D_{mm} of D_{mm-1} , a point $j_m \in I_{om} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_{m-1}\}$ and a member $O_{j_m}' \in B_{j_m}$ such that

$$(6) \quad f \upharpoonright D_{mm} = j_m, \quad pr_{j_m} D_{mm} = O_{j_m}', \quad kD_{mm} > w.$$

Now, for every index $i \in I \setminus I_{om}$ we have $pr_1 D_{mm} = X_i$; therefore $x \in D_{mm} \Rightarrow X_{j_\mu}^+ = O_{j_\mu}'$ for $\mu = 1, 2, \dots, m$ and $X_i^+ = X_i$ for $i \in I \setminus I_{om}$;

consequently $kD_{mm} = 1$, in contradiction with the last relation in (6). This contradiction proves the theorem.

5.5.5. *Remark.* Let us consider the cellularity numbers $cF^{I\alpha}$ (F and α being any system of sets, and any ordinal number) and the numbers $cS^{I\alpha}$ (S being any topological space); in the first case, as α is increasing so is also the corresponding cellularity; on the contrary, in the case of hyper-cubes of any topological space S the cellularity numbers are always less than or equal to the weight wS of S .

5.5.6. COROLLARY. *For any topological T_2 -space S satisfying $cS = wS$ one has $cS^I = cS$ for every nonvoid set I . In particular, $cS^\alpha = cS$ for any positive ordinal α , irrespective whether α is finite or transfinite. In particular this holds provided S is a metric space or if S is a totally ordered space in which the cellularity equals the separability number of the space.*

A consequence of the corollary 5.5.6 for metric spaces is this one:

5.5.7. *The hypercube M^I of any metric space M with $kI > \aleph_0$ is not a metric space; in particular the real cube $[0, 1]^{I(\omega_1)}$ or $\{0, 1\}^{I(\omega_1)}$ are not metric spaces.*

5.5.8. COROLLARY. *For every topological space S the set consisting of the cellularity numbers cS^α running through ordinal numbers is well determined and has at most wS numbers (cf. theorems 3.7; 3.8; 5.8(ii)).*

5.6. Comparison between cS and cS^n for any space S .

THEOREM. (I) *For any topological space S one has $cS \leq cS^2 \leq \inf\{2^{cS}, (cS)^\varepsilon \cdot sS\}$ for every ordinal $n < \omega$.*

(II) *For any ordered pair of topological spaces S_1, S_2 we have $s \leq c(S_1 \times S_2) \leq 2^s, Tr(S_1) \cdot s_1 S_1, Tr(S_2) \cdot s_1 S_2$ where $s = \sup\{cS_1, cS_2\}$, $Tr S_1 = \inf kT$, T being quasi-cofinal subset of the family of open sets of S_1 (cf. §4.4 and §4.5).*

(III) *For any ordered pair of totally ordered spaces S_1, S_2 one has $s \leq c(S_1 \times S_2) \leq s^\varepsilon$, where $s^\varepsilon \in \{s, s^+\}$; the relation $s^\varepsilon = s$ is equivalent to the tree hypothesis.*

The proof is like one of Theorem 3.4. (1) in 3.5.2.; cf also 3.10. and 4.9; 4.10.

5.7. In connection with the results 3.4. (1), 4.4. and 4.6. let us indicate that there are spaces S_{\aleph_1} satisfying $cS < wS$; such a space is the cartesian product $[0, 1]^{\aleph_1}$ of \aleph_1 real segments $[0, 1]$; the cellularity and the weight of this product are \aleph_0, \aleph_1 respectively.

5.7.1. THEOREM. *For any ordered pair (a, b) of cardinal infinite numbers there is a topological space S such that $cS \leq a \leq b \leq wS$. Such a space*

is the cartesian product of $k\alpha$ real segments $[0, 1]$ where α is any ordinal of cardinality $\geq b$.

5.7.2. Here is also a space S satisfying $cS < wS$ and which was given by Inagaki as the solution of a problem in my doctoral thesis. Let R^* be the set of members of a one-to-one ω_1 -sequence x_α ($\alpha < \omega_1$) of real numbers x_α ; the set R^* is topologized by considering for any $\alpha < \omega_1$ as neighborhoods of x_α the sets of the form $V^*(x_\alpha) = \{x_\beta; x_\beta \in V(x_\alpha); \alpha \leq \beta < \omega_1\}$, $V(x_\alpha)$ being any ordinary neighborhood of x_α . The space (R^*, v^*) so obtained has the cellularity \aleph_0 and weight \aleph_1 .

5.8. MAIN THEOREM. (I) For any topological space S satisfying $cS \geq \aleph_0$ and every index set I the cellularity of the cube S^I is $\leq 2^{cS}$ i.e., $\text{cel } S \leq \text{cel } S^I \leq (\text{cel } S)^{\text{cel } S}$.

(II) The general continuum hypothesis implies $\text{cel } S^I \in \{\text{cel } S, (\text{cel } S)^+\}$.

5.8.1. Proof. First of all we proved that the theorem (1) holds provided $kI = 2$, e.g. $I = \{1, 2\}$ and even for $kI < \infty$ (cf. theorem 3.11).

Now we shall prove the theorem (1) for every I .

5.8.2. LEMMA. Let m be any positive integer $1 < m \leq kI$ and Δ any disjoint system of open sets of S^I satisfying $ksx = m$ for every $x \in \Delta$; then $k\Delta \leq 2^{cS}$; here sx denotes the greatest subset I_0 of the index set I satisfying $x(i) \neq S(i \in I_0)$.

We shall prove the lemma by induction argument on m . Suppose that the lemma holds for every natural number $< m$; let us prove that it holds also for m . Assume on the contrary that there exists a disjoint system Δ of cardinality $> 2^{cS}$ and such that $ksx = m$ for every $x \in \Delta$. Since the set Δ is disjoint, the set of sx ($x \in \Delta$) is jointed; namely, if $x, y \in \Delta, x \neq y$, then $x \cap y = \emptyset$ what means that for some $i \in I$ one has $x_i \cap y_i = \emptyset$; this means that $x_i \neq S \neq y_i$ i.e., $i \in sx \cap sy$, hence $sx \cap sy \neq \emptyset$. Now, let $e \in \Delta$; for every $a \in se$ let $\Delta(a)$ be the system of all the members x of Δ satisfying $a \in sx$. Then

$$\Delta = \bigcup_a \Delta(a) \quad (a \in se).$$

Since the set se has just m members, one of the sets $\Delta(a)$ has $k\Delta$ points; let a_0 be such an element of se :

$$k\Delta(a_0) = k\Delta > 2^{cS} \text{ and } a_0 \in se.$$

Let us consider the disjoint set system $\Delta(a_0) = A$. Let us structurize A by defining that for $x, y \in A$ the relation xry means $x_i \cap y_i = \emptyset$ for some $i \in sx \cap sy \setminus \{a_0\}$.

Let L be an r -chain in $(A; r)$; then L is a disjoint set in S^I ; moreover, let L_1 be the system of sets x_0 where for every $x \in L$ one denotes by x_0 the set obtained from x by substituting the a_0 -factor of x by the space S . The mapping $x \in L \rightarrow x_0$ is one-to-one; let $L_0 = \{x_0; x \in L\}$. Then L_0 is disjoint system of sets of S_I such that

$$(1) \quad ksx_0 = m - 1 \quad (x_0 \in L_0). \text{ Namely, } sx_0 = sx \setminus \{a_0\}.$$

Now, by induction hypothesis the relations (1) imply that $kL_0 \leq 2^{cS}$, what jointly with $kL_0 = kL$ implies the requested relation $kL \leq 2^{cS}$. In other words every r -chain L in (A, r) is $\leq 2^{cS}$; therefore also the k_c -number of (A, r) is $\leq 2^{cS}$. On the other hand every antichain L' in (A, r) is $\leq cS$ because if $x, y \in L'$ and $x \neq y$, then $x_i \cap y_i \neq \emptyset$ for $i \in sx \cap sy \setminus \{a_0\}$ and therefore $x_{a_0} \cap y_{a_0} = \emptyset$. In other words to every antichain L' in (A, r) corresponds a well determined disjoint system in S , of cardinality kL' .

In virtue of the chain-antichain theorem for graphs one concludes that $k\Delta \leq (2^{cS})^{cS} = 2^{c^2S}$ i.e., $k\Delta \leq 2^{c^2S}$. Q.E.D.

5.8.3. *Proof of the theorem (I).* For any natural number n let $\Delta_n = \{x; x \in \Delta, ksx = n\}$. Then the sets Δ_n exhaust Δ ; since by hypothesis $k\Delta > 2^{c^2S}$, then for some integer n one would have necessarily $k\Delta_n > 2^{c^2S}$, in contradiction with the foregoing lemma, because every member x of Δ_n satisfies $ksx = m$.

5.8.4. The theorem 5.8. (II) is an obvious consequence of the theorem 5.8. (I) and the general continuum hypothesis.

6. On the cartesian multiplication of ordered graphs

6.1. *Definition.* Let (1) $(O_i, <_i)$ ($i \in I$) be a family of ordered sets; the *cartesian product* or the *cardinal product* of the sets (1) is the set $(O, <)$ where $O = \prod_i O_i$ ($i \in I$) and where for $x, y \in O$ one has $x \leq y$ in $O \Leftrightarrow x_i \leq_i y_i$ in O_i ($i \in I$).

Analogously one defines the cartesian product of any nonempty family of graphs (G_i, r_i) on substituting in the preceding definition G_i for O_i and r_i for $<_i$; r_i means any binary relation that is either symmetrical (for *symmetrical graphs*) or antisymmetrical (for *oriented graphs*).

One proves readily the following.

6.2. **THEOREM.** *The cartesian product of any system of ordered sets is an ordered set; if every factor is ramified (a tree, a chain), the product need not be so.*

We are especially interested in knowing the connections between the cellularity number of the product and the cellularity numbers of the factors. In this respect the notion of ramified sets and particularly of ramified tables or trees is of special importance.

6.3. *Definition of a node.* Every maximal subset S of a ramified set R such that

$$(1) \quad x, y \in S \Rightarrow S(., x) = S(., y)$$

is called a *node* of S .

6.4. THEOREM. Let R be any ramified set i.e. any ordered set $(R; <)$ in which $R(., R)$ is a chain; let I be any nonempty index set; let $f, g \in R^I$; then $f \leq g$ in R^I means $f_i \leq g_i$ in R for every $i \in I$; if $f \neq g$ and if the set $fI = \{f_i; i \in I\}$ lays in a node of R as well as does gI and if $kfI > 1$, $kgI > 1$, then $f \parallel g$ i.e., neither $f \leq g$ nor $f \geq g$. The conclusion holds also provided R contains a subset M such that fI lays in a node of M .

Proof. Since by hypothesis the set fI is located in a node of R , the chain $R_f = R(., f_i)$ is well determined and does not depend on a particular choice of i in I . Analogously, one has $R_g = R(., g_i)$ for $i \in I$. Let

$$(2) \quad C = R_f \cap R_g.$$

The set C is a chain in R and is initial section of the chains R_f, R_g .

Case (i). C is a proper subset of both R_f and R_g . Then there is an $a \in R$ and $b \in R$ such that $a \parallel b$, $C. < a < f_i$ and $C. < b < g_i$. Hence $f_i \parallel g_i$, for one has not e.g. $f_i < g_i$, because antichain $\{a, b\}$ would be $< g_i$, contrary to the ramification condition on R . Thus $f_i \parallel g_i$, and consequently $f \parallel g$.

Case (ii). $C = R_f$

(ii) 1. *Subcase:* $C \neq R_g$. Then $R_f < g_i$ for some $i \in I$ and there exists one (and only one) point $a' \in R$ satisfying

$$(3) \quad a' \sim f_i, a' < g_i \quad (x \sim y \text{ means to be in a same node}).$$

Namely, f_i is in the node following C and the chain R_g intersects this node. Hence we have (3). Since $kfI > 1$ we have $f_j \neq a'$ for some $j \in I$; thus $f_j \parallel a'$ and $f_j \parallel g_i$ ($i \in I$); in particular $f_j \parallel g_j$ i.e. $f \parallel g$.

(ii) 2. *Subcase:* $C = R_g$ i.e. $R_f = R_g$. Since $f \neq g$, $f_i \neq g_i$ for some $i \in I$; thus $f_i \parallel g_i$, because f_i, g_i are 2 members of the same node of R ; the relation $f_i \parallel g_i$ implies $f \parallel g$ by definition. The theorem is proved.

6.4.1. *Remark.* By counterexamples one might prove that both conditions: (i) R is ramified, (ii) f, g are not constant in I are necessary: dropping either of them, one could have $f \leq g$ or $f > g$.

6.4.2. *Remark.* If R is any ramified subset of a ramified set $(R', <)$, then again any two elements f, g of R^I such that f, g satisfy, with respect to R , the conditions of the preceding theorem:

$$fI \text{ is a part of a node of } R \text{ and } kfI > 1$$

$$gI \text{ is a part of a node of } R \text{ and } kgI > 1$$

then f, g are incomparable both in R^I and in R'^I .

6.5. The applications of the preceding considerations concern particularly *ramified collections of sets* i.e., collections of sets containing no pair of *interlaced sets* (two sets A, B are interlaced, if both sets $A \setminus B$ and $B \setminus A$ are nonempty).

6.6. We have in particular the following theorem as a particular case of the preceding general theorem (consider I to have just 2 points):

THEOREM. *Let F be any family of sets; let F^{I^2} be the set of the cartesian products $x_0 \times x_1$ where $x_0, x_1 \in F$. If R is any ramified subfamily of F [i.e., $X, Y \in R \Rightarrow X \subseteq Y \vee X \supseteq Y \vee (X \cap Y = \emptyset)$] such that to every $X \in R$ corresponds an $X' \in R$ satisfying $X \cap X' = \emptyset$ and that X, X' have the same predecessors i.e., supersets in R , then the sets $X \times X'$ ($X \in R$) are mutually disjoint.*

Direct proof. Suppose (3) $(X \times X') \cap (Y \times Y') \neq \emptyset$ for some $X, X' \in R$ and some $Y, Y' \in R$. The X, Y are comparable; X', Y' as well.

Suppose the case $X \subseteq Y$, hence $X' \subseteq Y'$ because X, X' have in R same predecessors. Since $Y' \cap Y = \emptyset$ then Y' is disjoint from X and X' , contrary to the hypothetical comparability of X', Y' . The impossibility of other cases is proved in an analogous way.

COROLLARY. *Let R be a ramified set and N_0R the set of nodes of R each containing at least 2 points. Then the system*

$$\bigcup_x [X \times X \setminus \text{diag}(X \times X)] \quad (X \in N_0R)$$

is an antichain in the cartesian square R^2 of R .

6.7. **THEOREM.** *For any square or hypersquare of a tree or ramified set R the chain \times antichain relation holds:*

$$kI > 1 \Rightarrow kR^I \leq k_c R^I \cdot k_{c'} R^I.$$

First of all if R itself satisfies the chain \times antichain relation, then so does R^I . If R does not satisfy this relation then it contains a tree T of the same cardinality (every T which is cofinal with R is such); T contains (cf. Kurepa [1, p. 109]) a subtree t of cardinality kT ($= kR$) and such that every isolated node of t at least 2 points (cf. the ambiguous tables in Kurepa (1)); according to theorems 6.4 and 6.6 some subtree t_0 of cardinality kt^I of t^I is "normal" i.e., satisfies the chain \times antichain relation; since $t_0 \subseteq R^I$, $kt^I = kR^I$, R^I is normal, too.

6.7.1. *Remark.* Of course, if for some index set I such that $kI > 1$, every subtree of R^I satisfied the chain \times antichain relation (R being any ramified set), the tree hypothesis would hold; and vice versa.

6.8. For symmetrical graphs we have theorems that read like the ones we formulated and proved for set systems (we define the cellularity cG of a graph as the supremum of cardinalities of its antichains). E.g. it is legitimate to substitute "symmetrical graph G " instead of family F of sets" in the wording of statements: 3.4, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 4.10 etc.

BIBLIOGRAPHY

- [1] P. Erdős, R. Rado: *A partition calculus in set theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **62** (1956), 427-489.
- [2] E. Hausdorff: *Grudzüge einer Theorie der geordneten Mengen*, Math. Analen **65** (1908), 435-505.
- [3] T. Inagaki: *Les espaces abstraits et les ensembles ordonnés*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. 1 **8**(2-3) (1940), 145-162.
- [4] D. Kurepa: *Ensembles ordonnés et ramifiés*, Thèse, Paris (1935), Publ. Math. Univ. Belgrade **4** (1935), 1-138,
Sur une propriété caractéristique du continu et le problème de Suslin Publ. Inst. Math. **4** (1952), 97-108.
On binary symmetrical relations or graphs, Dissertationes Slov. Ac. Sci. Ljubljana IV **4** (1953), 67-80-92.
On the cardinal number of ordered sets and of symmetrical structures in dependence on the cardinal number of its chains and antichains, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Zagreb **14** (1959), 183-203.
- [5] W. Sierpiński: *Sur un problème de la théorie générale des ensembles*, Fund. Math. **33** (1945), 301-302.
- [6] E. Szpilrajn: (= E. Marczewski): *Заметка о декартовых топологических пространствах*, Доклады АН СССР **31**(16) (1941), 525-527.
Separabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques, Fund. Math. **34** (1947), 127-143.

DENDRITY OF SPACES AND OF ORDERED SETS

The aim of this paper is to examine the supremum of cardinalities of some sets connected with a topological space. Especially, we want to know the supremum of cardinalities of trees, of increasing F -sets, G -sets and analogous numbers for decreasing trees. In order to examine the situation for the most general V -spaces, i.e. spaces defined by neighborhoods, or equivalently by closure satisfying the isotony condition and the condition that the closure of the empty set is empty, we consider systems of sets, well ordered by inclusion, which are not necessarily closed, but in simple cases are connected with closed sets (cf. the definition of the number F_C in 4.2.2 and of F_D in 4.3.1).

The main results are contained in theorems 1.1 (equality of $\text{dr } M$, $\text{dr}^* M$, $\text{cel} M$, wM for metric spaces), 2.2 (the same for pseudometric spaces), 3.6 (equality of sep , w , dr , dr^* for R -spaces), 4.2.4 (ii) (equality of dr , Sep , $k_c(F)$ for idempotent V -spaces), 4.3.4 (equality $\text{dr}^* V = \text{dp } V = k_d(FV)$).

0. Dendrity of ordered sets and spaces. Definitions

0.1. *Definition of dr .* For any ordered set (O, \leq) we define the dendrity $\text{dr}(O, \leq)$ of (O, \leq) as the supremum of cardinalities kT of trees T^1 contained in (O, \leq) , i.e. $\text{dr}(O, \leq) = \sup kT$, T being any subtree of (O, \leq) ; instead of $\text{dr}(O, \leq)$ we shall write also $\text{dr } O$.

0.1.1. In particular, for every family H of sets we have the ordered sets (H, \supseteq) , (H, \subseteq) and the corresponding numbers $\text{dr}(H, \supseteq)$, $\text{dr}(H, \subseteq)$.

0.2. *Definition of dual dendrity dr^* .* We put $\text{dr}^*(O, \leq) = \text{dr}(O, \geq)$.

Obviously, for any tree T we have $\text{dr } T = kT$ (= cardinality of T). For any ordered set (O, \leq) the number $\text{dr}(O, \leq)$ is well determined.

BIBLIOGRAPHICAL NOTE: Glasnik Mat. Fiz. Astr. **2(22)** (1967), 145–162 (Received Jan. 16, 1967).

¹Recall that a tree is any ordered set (O, \leq) such that for every $a \in O$ the set $O(, a) = \{x; x \in O, x < a\}$ is a well-ordered subset of (O, \leq) .

0.3. *Dendritivity* $\text{dr } S$ of a space S . For any space S we denote by GS the system of all open sets of the space; the *dendritivity* of S is, by definition, the number $\text{dr } S \stackrel{\text{def}}{=} \text{dr } (GS, \supseteq)$.

We shall see that $\text{dr } S = \text{Sep } S$ (we distinguish $\text{Sep } S$ from $\text{sep } S$; cf. 2.2, 2.3, 2.4 (ii)).

0.4. *Dual dendritivity* $\text{dr}^* S$ of a space is defined by $\text{dr}^* S = \text{dr } (GS, \subseteq)$. We shall see that $\text{dr}^* S = \text{dp } S$ (cf. 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4 (ii)).

0.5. S being a space, let FS be the system of all closed sets of S ; the numbers $\text{dr } (FS, \supseteq)$, $\text{dr } (FS, \subseteq)$ are well defined and easily evaluated to be $1 + \kappa S$ for every V -space satisfying $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

0.6. PROBLEM. *Is there a space S for which (one of) the numbers $\text{dr } S, \text{dr}^* S$ (is) are not reached?*

The corresponding problem for ordered sets or general set systems is answered in the affirmative. E.g., for every infinite well ordered set (W, \leq) we have $\text{dr}^*(W, \leq) = \text{dr } (W, \geq) = \aleph_0$, although there is no infinite increasing sequence in (W, \geq) ².

For the corresponding ordered space W (interval topology) one has $\text{dr } W = \text{dr}^* W$, as it easily shown.

1. Metric spaces

M shall denote any metric space.

1.1. THEOREM. *For every metric space M we have*

$$\text{cel } M = \text{sep } M = wM = \text{dr } M = \text{dr}^* M \quad (\text{cf. §1.2}).$$

The equality $\text{cel } M = wM$ was proved by Haratomi [1]. Therefore, it is sufficient to prove the equality $wM = \text{dr } M$.

1.2. At first, $wM \leq \text{dr } M$. As a matter of fact, let

$$S_0, S_1, \dots, S_n, \dots \quad (n < \varphi)$$

be a system of wM disjoint open sets. If for any $n < \varphi$ we put

$$G_n = \bigcup_m S_m \quad (m < n)$$

²Each time a supremum of ordinal (cardinal) numbers is involved, one has to examine whether this supremum is reached under given conditions (cf. the wording of the ramification hypothesis stating that for every tree (T, \leq) the number bT is reached in (T, \leq) ; bT is the supremum of cardinalities of degenerated trees $\subset (T, \leq)$; (an ordered set is degenerated provided the comparability relation is transitive).

one obtains a strictly decreasing φ -sequence of G -sets; this sequence being a tree (T, \supseteq) one has $\text{dr } M \geq k\gamma T = \omega M$, i.e. $\text{dr } M \geq \omega M$. Assume the contrary that $\text{dr } M > \omega M$ and that consequently there exists some tree (T, \supseteq) of open sets of M satisfying

$$kT > \omega M. \quad (1)$$

1.3. Every row $R_n T$ being a system of disjoint open sets the cardinality of $R_n T$ is $\leq \text{cel } M$; the disjoint partition of T into rows $R_n T$ ($n < \gamma T$), γT denoting the ordinal *height or rank* of T , we infer that

$$kT = k\gamma T \text{ and that consequently} \quad (2)$$

$$\gamma T \geq \omega_{\alpha+1} \text{ provided } k\omega_{\alpha} = \omega M. \quad (3)$$

1.4. The relation $\gamma T > \omega_{\alpha+1}$ does not hold, because otherwise one would have some $X \in R_{\omega_{\alpha+1}} T$; now, all members Y of T such that $Y \supset X$ would constitute a subchain of (T, \supseteq) of cardinality $\aleph_{\alpha+1}$, in contradiction with the Baire statement that every strictly decreasing sequence of G -sets in M has $\leq \omega M$ members.

1.5. *The relation $\gamma T = \omega_{\alpha+1}$ does not hold neither.*

As a matter of fact, let B be any set everywhere dense ($\bar{B} = M$) and such that $kB = \text{sep } M = \aleph_{\alpha}$ ($\equiv \omega M$). For every $b \in B$ there exists some index $n(b) < \omega_{\alpha+1}$ ($= \gamma T$) such that b belongs to no member of $R_{n(b)} T$ (in the opposite case, all members of T containing b would form a chain of cardinality $k\gamma T = \aleph_{\alpha+1}$, contrary to Baire's statement). Let $n = \sup_{b \in B} n(b)$.

Since, for $b \in B$, we have $n(b) < \omega_{\alpha+1}$ and since $kB = \aleph_{\alpha}$, we infer that $n < \omega_{\alpha+1}$. If then $\gamma T = \omega_{\alpha+1}$, the row $R_{n+1} T$ would contain a member X which is an open set of the space M ; therefore, there would be some $b_0 \in B \cap X$; consequently $n(b_0) = n + 1$, i.e. $n(b_0)$ would be greater than the supremum of all the numbers $n(b)$, for $b \in B$, which is absurd.

1.6. *The number $\text{dr}^* M$ equals ωM .*

As a matter of fact, every increasing tree (T, \subseteq) of sets is composed of a family of chains $T[X, \cdot] = \{Y; Y \in T, X \subseteq Y\}$, ($X \in R_0 T$); these chains are mutually incomparable, i.e. every member of one chains is disjoint with every member of another chain. Since $kR_0 T \leq \text{cel } M \leq \omega M$ and since $kT[X, \cdot] \leq \omega M$ (Baire's theorem), we infer that $kT \leq \omega M \cdot \omega M = \omega M$, i.e. $kT \leq \omega M$; consequently, $\text{sup } kT \leq \omega M$, i.e. $\text{dr}^* M \leq \omega M$. To prove the dual relation $\text{dr}^* M \geq \omega M$, it is sufficient to consider any isolated set $I = \{i_0, i_1, \dots\}$ of cardinality ωM and to associate with every $n < \omega_{\alpha}$ a neighborhood $O_n(x_n)$ having no other point of I but x_n in common and, for every $n < \omega_{\alpha}$ to put $G_n = \bigcup_{m < n} O_m(x_m)$ in order to obtain a strictly increasing ω_{α} -sequence of G -sets.

2. The case of pseudo-metric spaces

2.1. THEOREM. *If M is any metric or pseudo-metric space, then*

$$\text{sep}M = wM = \text{cel}M \quad (1)$$

(for pseudo-metric spaces, see Kurepa [1], [8], [10] and Papić [3]).

2.1.1. If M is metric, the relation (1) was proved earlier. Therefore, let us assume that $M \in (D_\alpha)$ for some regular initial number ω_α .

2.1.2. Then the space M is definable by means of neighborhoods forming a decreasing tree (T, \supseteq) of sets of rank ω_α each nonisolated point x of M yielding the intersection $\{x\}$ of the ω_α -sequence of decreasing sets $\in T$ (cf. Papić [3, théorème 2, p. 218]). Consequently, if M is not isolated, there is some nonisolated point x of M and the ω_α -sequence of all members $X_n \in T$ such that $x \in X_n$ ($n < \gamma M = \omega_\alpha$). Now, for $n < \omega_\alpha$ we have $X_n \supset X_{n+1}$; on the other hand, the set $X_n \setminus X_{n+1} = X_n \cup CX_{n+1}$ is open, the members of T being closed and open (cf. Papić [1, p. 31]). Therefore, one has \aleph_α disjoint open sets

$$X_n \setminus X_{n+1} \quad (n < \omega_\alpha)$$

and consequently, $\text{cel}M \geq k\omega_\alpha$ for every $M \in (D_\alpha)$.

On the other hand, T is a basis of neighborhoods and $kT = wM$. Since $kT \leq \text{Sup } kR_\alpha T \cdot \gamma T \leq \text{cel}M \cdot \aleph_\alpha = \text{cel}M$, we obtain the relation $wM = kT \leq \text{cel}M$ and thus

$$wM = \text{cel}M, \quad (2)$$

the inequality $wM < \text{cel}M$ being absurd.

Relation (2) is the main part in relation (1) in the theorem, because obviously, $\text{cel}M \leq \text{sep}M \leq wM$.

2.2. THEOREM. *For every regular ω_α and every pseudo-metric space $M \in (D_\alpha)$ the dendrity number $\text{dr} M$ equals $\text{cel}M$:*

$$\text{cel}M = \text{sep}M = wM = \text{dr} M = \text{dr}^* M \quad (\text{cf. Theorem 1.1}).$$

At first, let us prove the following generalizations of Baire's theorems concerning well-ordered decreasing (increasing) systems of G -sets of metric spaces.

2.2.1. THEOREM. *The number $\text{sep}M$ equals the supremum of cardinalities of increasing sequences of F -sets:*

(1) $\text{sep}M = \sup kF$, F being any increasing sequence of F -sets in the space.

Proof. We have to prove that in (1) the symbol $=$ means \leq and \geq .

At first, let $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_\nu \subset \dots$ ($\nu < \sigma$) be any strictly increasing sequence of closed sets in the space M of separability $\text{sep}M$; then $k\sigma \leq \text{sep}M$; otherwise, $k\sigma > \text{sep}M$; now, the sets $F_{\nu+1} \setminus F_\nu$ ($\nu < \sigma$) being nonempty disjoint sets, one would have a σ -sequence a_ν of pairwise distinct point $a_\nu \in F_{\nu+1} \setminus F_\nu$ ($\nu < \sigma$). Now, the set F_ν being closed, there would be a neighborhood O_ν of a_ν such that $O_\nu \cap F_\nu = \emptyset$; therefore, the members of the σ -sequence O_ν ($\nu < \sigma$) would be pairwise distinct sets. Since obviously, it is permitted to assume the sets O_ν to be members of a neighborhood basis B of minimal cardinality wS , and since $wS = \text{sep}S$ for every pseudo-metric space S , the cardinality kB of B would be $\geq k\sigma > \text{sep}S$, i.e. $wS > \text{sep}S$, which is absurd.

On the other hand, let $a_0, a_1, \dots, a_\nu \dots$ ($\nu < \omega_\beta$) be normally well-ordered set of $\text{sep}M$ points, which is everywhere dense. We say that $k\omega_\beta = (1)_2$. As a matter of fact, we have the increasing sequence

$$F_\nu = \text{cl}\{a_0, a_1, \dots, a_\xi, \dots\}_{\xi < \nu}$$

of closed sets containing necessarily $\text{sep}M$ distinct members; in other words, there is a strictly increasing sequence of $\text{sep}M$ closed sets; this means that in (1) the symbol $=$ is replaceable by \leq .

Analogous considerations lead to the following

2.2.2. THEOREM. *For every pseudo-metric space $M_\alpha \in (D_\alpha)$ the number $\text{sep}M_\alpha$ equals the supremum of cardinalities of all strictly decreasing sequences of closed sets.*

2.3. The proof of Theorem 2.2.2 runs like the one of the Theorem 2.2.1.

3. R -spaces and the corresponding numbers w , sep , cel and dr .

3.1. Every R -space R is defined by neighborhoods which are comparable or disjoint (as concerns R -spaces, see Kurepa [4], [7], [10] and Papić [1]–[5]). According to Papić [1, théorème 3] every R is definable by a decreasing tree of sets.

3.2. The question of relations between the numbers $\text{cel}R$, wR is connected with the ramification hypothesis.

3.3. We shall assume that Fréchet's T_1 -separation axiom holds for R ; therefore, we shall deal with T_1 - R -spaces R , defined by some trees T of sets

such that for every $x \in R$ the intersection of all members of T containing x is the one-point set $\{x\}$.

3.4. Since every member of T is *clopen* (closed and open) we infer that for any $A, B \in T$ the set $A \setminus B$ is clopen too. Therefore, if $A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ ($n < \beta$) is any well ordered decreasing system of members of T , then the sets $A_n \setminus A_{n+1}$ ($n < \beta$) are open and disjoint. Therefore, $k_c R \leq \text{cel}R$, $k_d R \leq \text{cel}R$. On the other hand, the sets of rows $R_n T$ being pairwise disjoint, the decomposition of T into rows $R_n T$, ($n < \gamma T$) yields

$$kT \leq \text{cel}T \cdot k\gamma T, \quad \text{i.e.} \quad wR \leq \text{cel}R \cdot k\gamma T.$$

Now, the number $k\gamma T$ is either $\text{cel}R$ or $(\text{cel}R)^+$; therefore

$$\text{cel}R \leq wR \leq (\text{cel}R)^+,$$

i.e. we have the following

3.5. THEOREM. For every T_1 R -space R we have $wR \in \{\text{cel}R, \text{cel}^+R\}$.

3.6 THEOREM. For any T_1 R -space R we have $\text{cel}R \leq \text{sep}R = wR = \text{dr}R = \text{dr}^*R$.

Proof. The first relation $\text{cel}R \leq \text{sep}R$ is obvious.

3.6.1. If $wR = \text{cel}R$, then $\text{sep}R = \text{cel}R = wR$.

3.6.2. If $wR = \text{cel}^+R$, then R is definable by a tree T of neighborhoods, such that γT is an initial ordinal number and $kR_n T < k\gamma T$ for every $n < \gamma T$. Then $kT = k\gamma T$.

3.6.3. Assume γT regular. Then $kT = \text{sep}R$ because if B is a set of $\text{sep}R$ points, such that $\bar{B} = R$, then to every point $b \in B$ corresponds some index $n(b)$ such that no member of $R_{n(b)}T$ contains the point b . If $kB < k\gamma T$, then the number $n = \sup_{b \in B} n(b)$ would be $< \gamma T$, and no member X of $R_{n+1}T$ would contain any point of B , which is absurd, because X as an open set should contain some point of B . Consequently, $kB = k\gamma T$.

3.6.4. If γT is singular, again the relation $kB < k\gamma T$ does not hold, because this relation would imply the existence of some ordinal number δ such that $kB < k\delta < k\gamma T$, the number γT being initial. Now, let $X \in R_\delta T$; then the chain $T(\cdot, X)$ is of cardinality $k\delta > kB$ and would yield a disjoint system of open sets $X_\xi \setminus X_{\xi+1}$ ($\xi < \delta$), where $X_\xi \supset X$ and $X_\xi \in R_\xi T$. In either case $kB = kT$, i.e. $\text{sep}R = wR$.

3.6.5. There still remains to prove $wR = \text{dr}R$. Now, let $T(G)$ be any decreasing tree of open sets of the space R ; we have to prove that $kT(G) \leq wR$, i.e., that the inequality $kT(G) > wR$ does not hold. First

of all, every row of $T(G)$ is $\leq \text{cel}R$, the members of $R_\xi T(G)$ being disjoint G -sets.

3.6.6. Every decreasing sequence S

$$G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_\xi \supset \dots \quad (\xi < \beta)$$

in any R -space R has $\leq wR$ members.

As a matter of fact, since every G_ξ is a union of a subsystem of the basis B of neighborhoods of the space R , let us define for every $\xi < \beta$ a member $a_\xi \in G_\xi \setminus G_{\xi+1}$ and a member $V_\xi \in B$ such that $a_\xi \in V_\xi$ and $V_\xi \subseteq G_\xi$. We obtain a mapping $f : S \rightarrow B$, $fG_\xi = V_\xi$; the mapping f being one-to-one, we infer that $kS \leq wR (= kB)$.

Similarly one proceeds for every increasing sequence of G -sets.

3.6.7. Let $wR = k\omega_\beta$; since every chain from $(T(G), \supseteq)$ is $\leq k\omega_\beta$ one has

$$\gamma T(G) \leq \omega_{\beta+1}. \quad (*)$$

If the sign \leq in $(*)$ means $<$, all is proved, because $kR_\alpha T(G) \leq \text{cel}R \leq \omega R$, and therefore, $kT(G) \leq wRk\gamma T(G) = \aleph_\beta = wR$. Therefore, let us assume $\gamma T(G) = \omega_{\beta+1}$. This equality is not possible neither, as is readily shown by the argument like the one in section 3.6.3.

3.6.8. The proof of the equality $\text{dr}^*R = wR$ runs like the corresponding proof in 1.6 for metric spaces M .

3.7. THEOREM. For every T_1 R -space R one has

$$\text{dr} R = \text{dr}^*R \quad \text{and} \quad \text{dr} R \in \{\text{cel}R, \text{cel}^+R\}.$$

Theorem 3.7 is a consequence of Theorems 3.5 and 3.6. The question whether necessarily $\text{dr} R = \text{cel}R$ is connected with the ramification hypothesis, or rather with the rectangle hypothesis stating that for every tree T , one has $kT \leq k_c T \times k_a T$ ($k_a T$ is the supremum of cardinalities of all antichains $\subseteq T$).

3.8. COROLLARY. For every T_1 R -space, in particular for every pseudo-metric and for every metric space, one has $\text{dr} = \text{dr}^*$.

4. V -spaces

4.1. According to Fréchet, every V -space V is definable either by neighborhoods or by any isotone closure, such that $\bar{\emptyset} = \emptyset$.

Let FV [resp. GV] be the system of all closed [open] sets in

$$\begin{aligned} (FV, \supseteq), & \quad (FV, \subseteq) \\ (GV, \supseteq), & \quad (GV, \subseteq) \end{aligned}$$

and the corresponding dendrity numbers.

We shall see how the numbers $\text{dr } V = \text{dr } (GV, \supseteq)$, $\text{dr}^* V = \text{dr } (GV, \subseteq)$ depend on density and dispersion properties of subspaces of V (cf. 4.2.4 (ii), 4.3.4 (ii). See also 0.5).

4.2. *Functions Sep and F_C for spaces.* The main aim of this section shall be to establish the equality 4.2.4 (ii).

4.2.1. *Definition.* $\text{Sep} V = \inf_n n$ being such a cardinal that every subspace S of V be n -separable in the sense that for some $X \subseteq S$, one has $kX \leq n$ and $\overline{X} \supseteq S$; in other words $\text{Sep} V = \text{Sup}_S \text{sep} S$ designating any subspace of V . The spaces satisfying $\aleph_0 = \text{sep} S = \text{Sep} S$ are called *hereditarily \aleph_α -separable*.

4.2.1.1. **PROBLEM.** Is the number $\text{Sep} S$ reached for every space S ?

4.2.2. *Definition.* $F_C V = \sup k f W$, $W = \{W_n\}_{n < \alpha}$ being any strictly increasing well-ordered system of sets, such that $n < (\gamma W)^- \Rightarrow \neg(W_n \supseteq W_{fn})$ for some ordinal fn satisfying $n < fn \leq (\gamma W)^-$.

4.2.3. **THEOREM.** *For every topological V -space for which*

$$\text{Sep} V + F_C V \geq \aleph_0 \tag{0}$$

we have

$$\text{Sep} V = F_C V \tag{1}$$

Proof. We shall prove that neither

$$\text{Sep} < F_C \tag{2}$$

nor

$$\text{Sep} > F_C. \tag{3}$$

According to the assumption (0) the number $\text{Sep} V + F_C V$ is infinite. Then one of the relations $\text{Sep} V \geq \aleph_0$, $F_C V \geq \aleph_0$ holds.

2. *Case $\text{Sep} V > \aleph_0$; put $\text{Sep} V = \aleph_\alpha$.*

2.1. Assume that (2) holds, i.e. that $k\omega_\alpha < F_C V$ and that consequently there exists some $\omega_{\alpha+1}$ -sequence of increasing sets

$$F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset \dots \quad (n < \omega_{\alpha+1})$$

and some ordinal function f mapping every $n < \omega_{\alpha+1}$ into some f_n between n and $\omega_{\alpha+1}$ such that $\neg(\overline{F}_n \supseteq F_{f_n})$ ($n < \omega_{\alpha+1}$); consequently

$$F_{f_n} \setminus \overline{F}_n \neq \emptyset, \text{ for every } n < \omega_{\alpha+1}. \quad (4)$$

2.2. We define a set $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n, \dots\}$ ($n < \omega_{\alpha+1}$) in the following way. Let p_0 be a point in $F_{f_0} \setminus \overline{F}_0$. Let $n < \omega_{\alpha+1}$ and suppose that a strictly increasing n -sequence φ_m ($m < n$) of ordinals $< \omega_{\alpha+1}$ as well as an one-to-one n -sequence of points p_m be defined, such that $p_m \in F_{f_m} \setminus \overline{F}_m$; let f_n be the first ordinal such that $p_m \in F_{f_n}$ ($m < n$), and $n < f_n$, $F_{f_n} \setminus \overline{F}_n \neq \emptyset$. We define p_n as any point satisfying

$$p_n \in F_{f_{\varphi(n)}} \setminus \overline{F}_{\varphi(n)}.$$

The number $\omega_{\alpha+1}$ being regular the construction of p_n for every $n < \omega_{\alpha+1}$ is secured in virtue of (4). The points p_n being pairwise distinct, we have

$$kP = k\omega_{\alpha+1}.$$

2.3. The subspace P of V is not \aleph_{α} -separable, because for any subset X of P such that $kX < \aleph_{\alpha+1}$ there exists some $r < \omega_{\alpha+1}$ such that $X \subseteq F_r$, $p_n \notin \overline{F}_n$. These relations would imply $\overline{X} \subseteq \overline{F}_r$ and thus $F_{f_r} \setminus \overline{X} \supseteq F_{f_r} \setminus \overline{F}_r$; consequently, since $p \in F_{f_r} \setminus \overline{F}_r$, we have $p_r \in F_{f_r} \setminus \overline{X}$, and this means exactly that the subset X of P would not be everywhere dense in the subspace P of V ; thus, $\text{sep}P > \text{Sep}V$, which is absurd. The relation (3) holds neither.

2.4. On the contrary, we have

$$F_cV \geq \text{Sep}V. \quad (5)$$

As a matter of fact, let X be any subspace of V . We define a most extensive sequence $W = \{X_0 \subset X_1 \dots\}$ of subsets of X in the following way. Let $p_0 \in X$ and $X_0 = \{p_0\}$; by induction let $X_n = \{p_0, p_1, \dots, p_m, \dots\}_{m < n}$, where $p_m \in X \setminus \overline{P}_m$, $P_m = \{p_0, p_1, \dots, p_e, \dots\}_{e < m}$. Putting $f_n = n + 1$, for every $n < (\gamma W)^-$, the sets W , fW are of the same cardinality and have $\geq \text{sep}X$ members each. Since for every $n < (\gamma W)^-$ we have

$$p_{n+1} \in X_{n+1} \setminus \overline{X}_n,$$

i.e. the conditions of the definition 4.2.2 are satisfied for $X_n = F_n$, $f_n = n + 1$ and we infer that $F_c \geq k\gamma W (\geq \text{sep}X)$. The negation of (2) and the relation (5) yield the requested equality (1).

4.2.4. THEOREM. For every idempotent³ V -space V such that the number $\text{Sep}V + F_cV$ is infinite, one has

- (i) $\text{Sep}V = F_cV = k_c(FV, \subseteq) = k_d(GV, \supseteq)$.
- (ii) $\text{sep}V \leq \text{dr}V = \text{Sep}V = k_c(FV, \subseteq) \leq wV$.

Relations (i) are direct consequences of Theorem 4.2.3 and of the fact that for any idempotent space the members of W in Definition 4.2.2 may be assumed to be closed sets (thus also $fn = n + 1$).

As to the relation (ii) the question arises on kT for any subtree of (GV, \supseteq) ; since every chain in T is $\leq \text{Sep}V$ (this is the content of Theorem 3), and since obviously every antichain of T is $\leq \text{Sep}T$, the question is to decide that $kT = \text{Sep}^+S$ does not hold. The disproof of the last equality is like the argument in 1.5.

4.3. Functions F_D and dp for spaces.

4.3.1. Definition. $F_D S = \text{Sup} k f W$; $W = (W_n \supset W_1 \cdots \supset W_n \supset \dots)_{n < \gamma W}$ denotes any strictly decreasing well-ordered family of sets, such that for any $n < (\gamma W)^-$ one has some fn such that $n < fn < \gamma W$ and

$$\neg(W_n \subseteq \overline{W}_{fn}); \quad (1)$$

one puts $fW = \{fx; x \in W\}$ (cf. T. Inagaki [2, p. 198]). For idempotent spaces (condition $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$) the conditions on members of W are equivalent to the condition that they are closed (in the notation for F_D , F stands for closed (fermé) and D for decrease).

4.3.2. Definition of dispersity $\text{dp}S$ of S .

We put $\text{dp}S = \text{sup} kX$, X being any dispersed set in the space, i.e. such one in which the empty set is the unique dense subset.

4.3.3. THEOREM. For any topological V -space V we have

$$\text{dp}V = F_D. \quad (2)$$

We shall prove that neither

$$\text{dp}V < F_D V \quad \text{nor} \quad (3)$$

$$\text{dp}V > E_D V. \quad (4)$$

4.3.3.1. Let us prove that (3) does not hold. Assume, by contradiction, that (3) holds, and that for some V we have $\text{dp}V = k\omega_\alpha$ and that there

³The space is idempotent provided $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$, for every subset X of the space.

exists some $\omega_{\alpha+1}$ -sequence W of sets W_n ($n < \omega_{\alpha+1}$) and a mapping $n < \omega_{\alpha+1} \rightarrow fn \in (n, \omega_{\alpha+1})$ satisfying (1). Since γW is regular, one has $kfW = kW (= \aleph_{\alpha+1})$.

Let us define a set

$$P = \{p_0, p_1, \dots, p_n, \dots\}_{n < \omega_{\alpha+1}} \quad (5)$$

in the following way. Let p_0 be any point of the nonvoid set $W_0 \setminus \overline{W}_{f_0}$. Let $0 < n < \omega_{\alpha+1}$ and assume that the set $\{p_0, \dots, p_m, \dots\}_{m < n}$ of cardinality kn be defined such that $p_m \in W_{gm} \setminus \overline{W}_{fgm}$ for some strictly increasing n -sequence $g_0 < g_1 < \dots < g_n < \dots$ of ordinals $< \omega_{\alpha+1}$. Let $r_n = \sup_{m < n} fgm$.

Then $r_n < \omega_{\alpha+1}$ because $fgm < \omega_{\alpha+1}$ for every $m < n$ and because $n < \omega_{\alpha+1}$. We consider the number $fr_n > r_n$, and the nonempty set $W_{r_n} \setminus \overline{W}_{fr_n}$; we denote by p_n any point such that $p_n \in W_{r_n} \setminus \overline{W}_{fr_n}$. By induction, the set P is defined. At the same time we see that

$$p_n \notin \overline{P}_n, \quad (6)$$

where $P_n = \{p_s; n < s < \omega_{\alpha+1}\}$ because, by construction, one has $P_n \subseteq W_{fn}$ and $p_n \notin \overline{W}_{fn}$. Therefore, the set P would be dispersed, i.e. if X is any set satisfying

$$X \subseteq P, X \subseteq \text{Der}X, \text{ then } X = \emptyset. \quad (7)$$

In the opposite case, there would be some nonvoid X satisfying (7); let then p_r be the first member of X in the well-ordered set (5); then the relations (7) would imply $p_r \in \text{Der}X$, and consequently $p_r \in \overline{P}_r$, which contradicts (6). Consequently, the assumption (3) would yield a dispersed set X of cardinality $\aleph_{\alpha+1} > \aleph_\alpha = \text{dp}V$, and this is contradiction. Therefore, (3) does not hold.

4.3.3.2. Let us prove that (4) holds neither. Let V be any space; put $F_D V = k\omega_\alpha$. Assume, by absurdity, that the space V contains a dispersed set X of cardinality $> \omega_\alpha$. Without loss of generality we may suppose $kX = \aleph_{\alpha+1}$. Let

$$X = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots\}_{n < \omega_{\alpha+1}} \quad (8)$$

be a well ordering of X .

4.3.3.3. There should be a kX -limit point in X ; i.e. there exists some $a \in X$ such that for every neighborhood $O(a)$ of a one has

$$kO(a) \cap X = kX (= \aleph_{\alpha+1}). \quad (9)$$

In the opposite case, to every $x_n \in X$ there would correspond some $O_n(x_n)$ such that

$$k(O_n(x_n) \cap X) < kX. \quad (10)$$

This would enable us to form a $\omega_{\alpha+1}$ -sequence F_n ($n < \omega_{\alpha+1}$) in the following way.

At first, let $F_0 = X$; assume $0 < n < \omega_{\alpha+1}$ and assume F_m ($m < n$) be defined; let r_n be the first member in (8) of the set $X \setminus \bigcup_{m < n} O_{r_m}(x_{r_m})$; putting $F_n = X \setminus \bigcup_{m < n} O_{r(m)}(x_{r_m})$, the set F_n would be defined for every $n < \omega_{\alpha+1}$. One sees that F_n ($n < \omega_{\alpha+1}$) should be a strictly decreased sequence of sets such that $F_n \setminus \overline{F_{n+1}} \neq \emptyset$, contradicting the assumed equality $F_D V = \aleph_{\alpha}$.

4.3.3.4. Let X_m be the set of all the kX -limit points belonging to X . According to 4.3.3.3 the set X_m is not empty. We say that X_m is dense in itself.

As a matter of fact, let $R = X \setminus X_m$.

4.3.3.5. Then $kR < \aleph_{\alpha}$; the proof is indirect and runs like the one in 4.3.3.3.

4.3.3.6. Now, let $b \in X_m$; every $O(b)$ contains kX points of $X = R \cup X_m$; i.e.

$$\begin{aligned} k[O(b) \cap (R \cup X_m)] &= \aleph_{\alpha+1} \\ k[O(b) \cap R] + k[O(b) \cap X_m] &= \aleph_{\alpha+1} \\ k[O(b) \cap X_m] &= \aleph_{\alpha+1} - k[O(b) \cap R] \end{aligned}$$

and thus according to 3.3.5 one should infer that

$$k[O(b) \cap X_m] = \aleph_{\alpha+1} = kX$$

for every $b \in X_m$ and every neighborhood $O(b)$ of b ; in other words, X_m would be nonvoid dense-in-itself subset of the dispersed set X , which is absurd. This finishes the proof of Theorem 4.3.3.

4.3.4. THEOREM. For every idempotent V -space V one has

- (i) $\text{dp } V = F_D V = k_d(FV, \supseteq) = k_c(GV, \subseteq)$,
- (ii) $\text{dr}^* V = \text{dp } V = k_d(FV, \subseteq) = k_c(GV, \subseteq) \leq wV$.

The relations are direct consequences of Theorem 3.3 and of the fact that for any idempotent space the members of W in Definition 3.1 may be assumed to be closed sets (and also to have $fn = n + 1$). Concerning the relations (ii), one has to evaluate kT for every subtree T of (GV, \subseteq) ; since every chain in T is $\leq dpV$ (cf. Theorem 3.3), and since every antichain of T and particularly R_0T is $\leq dpV$ we infer that $kT \leq dpV \cdot dpV = dpV$; therefore, also $\sup_T kT \leq dpV$; the sign of equality holding here in virtue of Theorem 3.3 for the simplest case, that T is a chain, i.e. without noncomparable members.

4.3.5. COROLLARY. *For every idempotent V -space, the equality $drV = dr^*V$ is equivalent to the equality $SepV = dpV$ (cf. 4.2.1, 4.3.2).*

The corollary is implied by Theorems 4.2.4 (ii), 4.3.4 (ii).

4.4. Systems $(\varphi GV, \subseteq)$, $(\varphi GV, \supseteq)$.

4.4.1. φ -operator. For any set E in the V -space V let φE be the family of components of E (every member of φE is a most extensive connected subset of E). For a family H of sets, let

$$\varphi H = \bigcup_E \varphi E \quad (E \in H).$$

In particular, for the family GV of all the open sets in V we have the system $\varphi GV = H$ and the numbers $dr(H, \supseteq)$, $(dr(H, \subseteq)$.

Earlier we proved the following theorem and the following corollary:

4.4.2. THEOREM. (a) *For every infinite locally connected space V one has*

$$k_c(GV, \subseteq) = k_c(\varphi GV, \subseteq) + cel\varphi GV.$$

(b) *For every infinite locally connected V -space V we have*

$$k_d(GV, \supseteq) \geq k_d\varphi GV + cel\varphi GV.$$

(c) *In order that for every infinite locally connected V -space V one has $k_dGV = k_d\varphi GV + cel\varphi GV$, it is necessary and sufficient that every infinite tree T satisfies $kT = bT$ (Kurepa [5, Theorem 2, p. 468]).*

4.4.2.1. COROLLARY. *Every infinite locally connected V -space V satisfying $k_c\varphi GV \leq celG$ satisfies $k_cGV = celV$ (Ibidem, Corollary 2, p. 469)⁴.*

⁴The paper was written before World War II and was printed during the War; because of the War, I had no opportunity to read the paper. Therefore, the paper contains many misprints as well as some material errors. E.g. the wording of Theorem 1, p. 464 is false for increasing trees τ because some member $X \in \varphi\tau$ may contain also incomparable members of $\varphi\tau$; this error does not affect the implications involved.

Now, using these results, we shall prove the following.

4.4.3. THEOREM. *Every infinite locally connected V -space satisfying*

$$k_c\varphi GV \leq \text{cel}V \quad (0)$$

satisfies

$$\text{dr}^*V = \text{cel}V \quad (1)$$

and

$$\text{sep}V = \text{dr}V \geq k_d\varphi GV + \text{cel}V. \quad (2)$$

As a matter of fact, let T be any increasing tree of G -sets of V ; then

$$T = \bigcup_{X \in R_0T} T[X, \cdot];$$

for every $X \in R_0T$ the system $T[X, \cdot]$ is a chain; and according to the Corollary 5.2.1. we have $kT[X, \cdot] \leq \text{cel}V$. Since R_0T is a disjoint system of G -sets, $kR_0T \leq \text{cel}V$ and the partition (1) yields $kT \leq kR_0T \cdot \text{cel}V = \text{cel}V$, i.e. $kT \leq \text{cel}V$. Therefore, also

$$\sup_T kT \leq \text{cel}V \quad (T \subseteq (GV, \subseteq))$$

and consequently $\text{dr}(GV, \subseteq) \leq \text{cel}V$. The dual relation of the last one being obvious, the requested equality (1) is established. The relations (2) are implied by the Theorem 4.2.4 and the Theorem 4.4.2.b.

4.4.4. *On the condition $k_c\varphi GV \leq \text{cel}V$ (Mardešić example).* This condition arose in the Corollary 5.2.1; then I added "Je ne connais aucun espace localement connexe vérifiant $p_c\varphi G > p_s G$ " (i.e. $k_c\varphi G > \text{cel}G$, Kurepa [5, p. 469]). Now here is an example of such a space exhibited by S. Mardešić in 1962.

Let $I = R[0, 1]$ be the real unit interval and

$$X = \prod_{\alpha} I_{\alpha} \quad (I_{\alpha} = I, \alpha < \omega_{\xi})$$

for some $\xi < \aleph_0$. Then X is a locally connected continuum. One has $\text{cel}X = \aleph_0$ (Marczewski [1], [2], cf. also D. Kurepa [5, 5.5.6]). On the other hand, let

$$F_n = \left(\prod_{0 \leq \mu < n} O_{\mu} \right) \times \left(\prod_{n \leq \nu < \omega_{\xi}} I_{\nu} \right), \quad O_{\mu} = O \in I_{\mu}.$$

Then F_n is closed and obviously F_n , $n < \omega_\xi$, is a strictly decreasing ω_ξ -sequence of closed sets; therefore, the complements $U_n = X \setminus F_n$ yield an ω_ξ -sequence of strictly increasing G -sets, and one sees that U_n is connected. Thus $U_n \in \varphi G$. Consequently $k_c \varphi GX \geq \aleph_\xi > \aleph_0 = \text{cel} X$.

4.5. *The relation between sep and Sep. Function Is.* Obviously, $\text{sep} \leq \text{Sep}$, i.e. for every space S we have

$$\text{sep} S \leq \text{Sep} S \quad \text{and} \quad (1)$$

$$\text{sep} S \leq \text{Is} S \leq \text{Sep} S, \quad \text{where} \quad (2)$$

4.5.1. *Definition.* $\text{Is} = \text{Sup}_I kI$, I being any isolated set in the space S .

4.5.2. There are spaces S for which the sign \leq in (1) means $=$ (such are metric spaces, pseudo-metric spaces, R -spaces, etc.); but there are spaces S for which $\text{sep} S < \text{Sep} S$. Such is the space of Kuratowski [1] consisting of real numbers and for which the closure operator K is defined by

$$KX = \text{Der}(-X) \cup X.$$

This space (R, K) is separable but $\text{Is}(R, K) = \text{Sep}(R, K) = c$ because, e.g., the set of all positive numbers is isolated.

4.5.3. **THEOREM.** *For every totally ordered space C we have $\text{sep} C = \text{Is} C = \text{Sep} C$.*

As a matter of fact, let S be any subspace of C . If B is any subset of C , such that $kB = \text{sep} C$ and $\overline{B} = C$, we shall prove that S contains a subset S_0 of cardinality $\leq kB$ and such that S_0 be everywhere dense in S , in the sense that every open nonvoid interval of S contains a point of S_0 . Now, let $I(S)$ be the set of all the isolated points of S ; then to every $x \in I(S)$ we associate an open interval I_x of S , such that x be no extremal point of I_x and $x \in I_x$, and that the intervals I_x ($x \in I(S)$) be pairwise disjoint (cf. Kurepa [6, Theorem 1.1]). Every corresponding coextensive interval $C(I_x)$ of C contains a point of B ; B satisfying $\overline{B} = C$; this can be done in such a way that the intervals CI_x ($x \in I(S)$) be pairwise disjoint. Therefore,

$$kI(S) \leq k \left(b \cap \bigcup_{x \in I(S)} CI_x \right). \quad (3)$$

On the other hand, let us consider the remaining set $S \setminus I(S) = R$; every $y \in R$ is non isolated in S ; therefore, it is possible to associate with y an

interval $O_B(y)$ with extremal points in B ; again, it is possible to associate with $O_B(y)$ some element $s(O_B(y)) \in O_B(y) \cap S$. Let

$$S_0 = \bigcup I(S) \cup \bigcup_{y \in R} \{s(O_B(y))\}; \quad (4)$$

S_0 is a subset of S everywhere dense in S and, as a consequence of (3), (4), one proves readily that $kS_0 \leq kB$.

5. Totally ordered spaces

5.1 THEOREM. (i) *Every totally ordered space C satisfies*

$$\text{dr } C \in \{\text{cel } C, \text{cel}^+ C\}, \quad \text{dr}^* C = \text{cel } C, \quad \text{dr } C = \text{sep } C; \quad (1)$$

(ii) *The identity*

$$\text{dr} = \text{dr}^* \quad (2)$$

for totally ordered space is equivalent to the tree rectangle hypothesis stating that

$$kT \leq k_c T \cdot k_d T, \quad \text{for every tree } T. \quad (3)$$

1. Let us consider the case that C is connected and consequently also locally connected. Since in this case $k_c \varphi GC \leq \text{cel } C$, Theorem 4.4.3 implies

$$\text{dr}^* V = \text{cel } C. \quad (4)$$

2. On the other hand, $\text{sep } C = \text{Sep } C$ (cf. Theorem 4.5.3); therefore, by Theorem 4.4.3 we infer that

$$\text{sep } C = \text{dr } C. \quad (5)$$

3. Now, by successive subpartitions of C one proves that

$$\text{sep } C \in \{\text{cel } C, \text{cel}^+ C\} \quad (6)$$

(cf. D. Kurepa, Thèse 2, p. 121, Theorem e). From (5), (6) we obtain the first relation of (1).

4. In our Thesis we proved that (3) is equivalent to $\text{cel } C = \text{sep } C$ for chains (cf. $P_2 \Leftrightarrow P_5$ in Théorème fondamental, p. 132). In virtue of (1), this means exactly that the identity (2) for chains and the identity (3) for trees are equivalent.

5. If the chain C is not connected, the filling of holes of C and of gaps of C by single points and sets of type $\lambda \equiv tR$ respectively yields a connected chain \tilde{C} for which the numbers occurring in the theorem are the same as for C ; the theorem being proved for \tilde{C} one concludes that proof of Theorem 5.1 is finished.

BIBLIOGRAPHY

- B. Dushnik, *Concerning Fréchet limit spaces*, Fund. Math. **23** (1939), 162–165.
- K. Haratomi, *Über hoherstufige Separabilität und Kompaktheit* (Erster Teil), Japan J. Math. **8** (1931), 113–141.
- T. Inagaki, [1] *Le problème de Souslin et les espaces abstraits*, J. Fac. Sci. Hokaido Imp. Univ. Ser. I **7** (1939), 191–201.
- [2] *Quelques propriétés des espaces abstraits*, Ibidem **9** (1940), 193–208.
- K. Kuratowski, *Une remarque sur les classes (L) de M. Fréchet*, Fund. Math. **3** (1922), 41–43.
- D. Kurepa,
- [1] *Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo-distancés*, C. R. Acad. Sci. Paris **198** (1934), 1563–1565.
- [2] *Ensembles ordonnés et ramifiés* (Thèse, Paris 1935), Publ. Math. Univ. Belgrade **4** (1935), 1–138.
- [3] *L'hypothèse de ramification*, C. R. Acad. Sci. Paris **202** (1936), 185–187.
- [4] *Sur les classes (E) et (D)*, Publ. Math. Univ. Belgrade **5** (1936), 124–132.
- [5] *Le problème de Souslin et les espaces abstraits*, Rev. Cienc. Lima **47** (1945), 457–488.
- [6] *Prinjedbe o apstraktnim prostorima*, Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn. **296** (1953), 95–103.
- [7] *Sur l'écart abstrait*, Glasnik Mat.–Fiz. Astr. **11** (1956), 105–134.
- [8] *Cartesian multiplication and the cellularity number*, Publ. Inst. Math. Beograd **2** (1962), 121–139.
- [9] *On the existence of pseudometric non totally orderable spaces*, Glasnik Mat.–Fiz. Astr. **18** (1963), 183–194.
- [10] *Distanza numerica. Distanza non numerica*, Publ. Seminario Matematico Bari **91** (1963), 23 pp.
- E. Minczewski,
- [1] *Заметка о декартовых топологических пространствах*, Докл. Акад. Наук СССР **31** (1941), 525–527.
- [2] *Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques*, Fund. Math. **34** (1947), 127–143.
- E. W. Miller, *On certain properties of Fréchet L-spaces*, Fund. Math. **26** (1936), 116–119.
- P. Papić,
- [1] *Sur les espaces admettant une base ramifiée de voisinages*, Glasnik Mat.–Fiz. Astr. **8** (1953), 30–40.

- [2] *Sur une classe d'espaces abstraits*, Ibidem **9** (1954), 197–216.
- [3] *Sur les espaces pseudo-distanciés*, Ibidem **9** (1954), 217–228.
- [4] *Quelques propriétés des espaces totalement ordonnés et des espaces de la classe R* , Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjet. **302** (1957), 171–196.
- [5] *Sur l'ordinabilité d'espaces de la classe R* , Glasnik Mat.–Fiz. Astr. **18** (1963), 75–84.

C. PARTITION CALCULUS IN SET THEORY

- C[37] *L'hypothèse du continu et les ensembles partiellement ordonnés*, C. R. Acad. Sci. Paris **205**, 1937, 1196–1198.
- C[39] *Sur la puissance des ensembles partiellement ordonnés*, C.R. Soc. Sci. Varsovie Cl. Math. **32**, 1939, 61–67, as reproduced in Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **14** (1959), 205–210.
- C[53] *On reflexive symmetric relations and graphs*, Acad. Sci. Art. Slovenica C. III Ser. A, Dissertationes IV/4 1952–3, 81–92.
- C[59] *On the cardinal number of ordered sets and of symmetrical structures in dependence of the cardinal numbers of its chains and antichains*, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **2 14** 1959, 183–203.

Kurepa's work in the Partition Calculus comes from a quite different angle from that of Erdős and his collaborators. Erdős' school was starting from Ramsey's theorem in its graph theoretic form and was trying to generalize it in the context of infinite graphs. Kurepa C[37] was starting from a result of Hausdorff [1] and Urysohn [2] about the size of linearly ordered sets and wanted to generalize it to partially ordered sets and other binary relations. Thus the early results of Kurepa and Erdős are frequently contrapositives to each other. For example, a typical result of Erdős and his collaborators would say that a large graph must contain large independent set or a large complete subgraph, while the corresponding result of Kurepa would give a bound on the cardinality of any graph without large independent or complete subgraphs. Thus Kurepa's fundamental relation (C[37], C[39])

$$(1) \quad pE \leq (2p_s E)^{p_o E}$$

(s = antichain, o = well-ordered or conversely well-ordered subset, p = "puissance"), together with its general and extremely elegant proof anticipates many of the results proved later by others. Kurepa (C[37], C[39]) also shows that (1) is best possible by exhibiting some examples among which one finds the famous example of the poset on the reals obtained by intersecting the usual ordering of the reals and a well-ordering. Today this poset is known under the name of "Sierpinski's poset" because of the paper of Sierpinski [4] appearing four years earlier which produces

a symmetrical relation R on ω_1 with the property that in any uncountable subset of ω_1 one can find a pair of related and a pair of unrelated elements. The relation R was generated by a 1 – 1 sequence $r(\alpha)$ ($\alpha < \omega_1$) of reals as follows: $\alpha R \beta$ iff $r(\min(\alpha, \beta)) < r(\max(\alpha, \beta))$. Sierpinski never looked at his relation as a comparability relation of some partial ordering. In fact, on pp. 190–191 of his book [9] one finds a question easily answered by the “Sierpinski poset”! It is rather remarkable that Kurepa uses the same idea of intersecting a given binary relation with a well-ordering also in proving (1) because this enables him to reduce the problem to a well-founded partial ordering or a well-founded binary relation. In this case (1) becomes

$$(2) \quad pE \leq (2p_s E)^{p \circ E}.$$

To prove (2) he simply defines a 1 – 1 mapping Φ from the family \mathcal{L} of all chains of E which are maximal in the initial part they generate into the tree

$$(3) \quad M^{<\gamma} = \bigcup_{\xi < \gamma} M^\xi$$

where γ is the supremum of order types of chains of E , and M is any set of cardinality $2p_s E$. The construction of the embedding Φ clearly does not use the transitivity of the binary relation of E but Kurepa, being preoccupied with partial order at this stage of his career, does not make this explicit. It was only after the war that he learns about Sierpinski’s paper [4] and realizes that he has in fact solved the problem of Knaster about symmetrical relations to which [4] was devoted. The publication C[53] was made merely to point out this fact. What Sierpinski left unresolved from Knaster’s problem in today’s terminology can be stated as

$$(4) \quad \text{Does } \omega_2 \rightarrow (\omega_1)_2^2?$$

What Kurepa (C[37], C[39], C[53]) proved and called “the fundamental relation” or “graph relation” in today’s terminology can be stated as

$$(5) \quad (m^n)^+ \rightarrow (m^+, n^+)^2, \quad (m, n \text{ infinite}).$$

He also points out in C[39] the existence of a partial ordering E of size m^n for every such m and n witnessing that (5) is best possible i.e., that

$$m^n \not\rightarrow (m^+, n^+)^2.$$

However, he does not point out that the existence of the 1 – 1 map $\Phi: \mathcal{L} \rightarrow M^{<\gamma}$ above also gives immediately another familiar relation

$$(7) \quad \omega_1 \rightarrow (\omega_1, \omega + 1)^2$$

but he was well aware (se e.g. C[37; V]) of the well-known application of (7) to the theory of partial orderings published a few years later by Dushnik and Miller [5]. In the meantime Erdős [6] published a proof of the relation

$$(8) \quad \aleph_{x+2} \rightarrow (\aleph_{x+2}, \aleph_{x+1})^2$$

assuming $2^{\aleph_x} = \aleph_{x+1}$. The results of Erdős [6] were restated later in [7] using the arrow notation but still under the assumption of some form of GCH. It was not until the seminal paper [8] of Erdős and Rado that the results were stated in their proper form without the restriction on a dimension or a number of colors. Thus, both Sierpinski and Erdős were too preoccupied with the GCH to state their results in proper form. For example, Sierpinski [4] does not point out that he can answer his version of the Knaster problem (4) assuming non-CH, which is a bit ironical because $\omega_2 \rightarrow (\omega_1)_2^2$ turned out to be *equivalent* to CH, a fact which Sierpinski would probably greatly appreciate. On the other hand Kurepa was quite free from CH which can be clearly seen, for example, on the basis of his remark V in C[37] (see also D[53b; footnote 8]).

Kurepa learned about the work of Ramsey and of Erdős and Rado in the early 50's and mentions this in the note added in proof of C[53] and publishes another paper C[59] summarizing his view of the partition calculus after that of Erdős and Rado [8]. It is interesting that there is no information in [8] about Kurepa's work but according to the footnote on p. 465 of [8] (related to the negative relation (6)) one sees that a contact did exist. Kurepa's paper C[59] had some influence on later presentations of the partition calculus because trees and tree-argument are more explicit in his work than in the work of Erdős and Rado at that time. For example, Erdős and his collaborators make "The Ramification Lemma" explicit much later in [10].

Stevo Todorčević

REFERENCES

- [1] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (1914), Leipzig 1914.
- [2] P. S. Urysohn, *Un théorème sur la puissance des ensembles ordonnés*, *Fund. Math.* **6** (1924), 278.
- [3] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, *Proc. London Math. Soc.* **2** **30** (1928), 338–384.
- [4] W. Sierpinski, *Sur un problème de la théorie des relations*, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **2** (1933), 285–287.
- [5] B. Dushnik and E. W. Miller, *Partially ordered sets*, *Amer. J. Math.* **63** (1941), 600–610.
- [6] P. Erdős, *Some set-theoretic properties of graphs*, *Revisa Univ. Tucuman Ser A* **3** (1942), 363–367.

- [7] P. Erdős and R. Rado, *A problem on ordered sets*, J. London Math. Soc **28** (1953), 426–438.
- [8] ———, *A partition calculus in set theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **62** (1956), 427–489.
- [9] W. Sierpinski, *Cardinal and ordinal numbers*, PWN, Warszawa, 1957.
- [10] P. Erdős, A. Hajnal and R. Rado, *Partition relations for cardinal numbers*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **16** (1965), 93–196.

L'HYPOTHÈSE DU CONTINU ET LES ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS

I. Nombres $bE, p_cE, p_dE, p_sE, p_0E$. Soit E un ensemble partiellement ordonné quelconque; si $pE = 0$, nous poserons $p_cE = p_dE = p_sE = 0$; si $E \neq 0$, nous poserons $p_cE = \sup pF$, F parcourant tous les sous-ensembles bien ordonnés de E ; $p_dE = \sup pF$, F parcourant tous les sous-ensembles inversement bien ordonnés de E ; $p_sE = \sup pF$, F parcourant tous les ensembles de E , dont chacun est composé de points deux à deux incomparables; $p_0E = \max(p_cE, p_dE)$;

$$bE = \max(p_cE, p_dE, p_sE) = \max(p_0E, p_sE).$$

Ceci étant, on peut établir la relation fondamentale

$$(1) \quad bE \leq pE \leq (2p_sE)^{p_0E}.$$

II. Fonction $N(\alpha)$. Soit α un nombre ordinal quelconque (par exemple $\alpha = 0$); nous poserons:

$\aleph_{N(\alpha)} = \sup pE$, E parcourant tous les ensembles partiellement bien ordonnés vérifiant $bE \leq \aleph_\alpha$, ceux-ci étant deux à deux distincts au point de vue de l'ordre (E est dit *partiellement bien ordonné* si chacun de ses sous-ensembles ordonnés est bien ordonné).

Alors

$$(2) \quad 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{N(\alpha)} \quad \text{donc} \quad N(\alpha) \geq \alpha + 1.$$

En particulier, pour que l'hypothèse du continu soit vraie (c'est-à-dire pour que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$), il faut et suffit que $N(0) = 1$.

III. Fonction $n(\alpha)$. Posons, pour tout nombre ordinal α .

$\aleph_{n(\alpha)} = \sup pE$, E parcourant tous les ensembles partiellement ordonnés vérifiant $bE \leq \aleph_\alpha$, et dont chacun vérifie la condition suivante:

Quel que soit le point a de E , l'ensemble $(., a)_E$ de tous les points de E dont chacun précède a est *bien ordonné*, autrement dit:

$\aleph_{n(\alpha)} = \sup pT$, T parcourant tous les *tableaux ramifiés*, T vérifiant $bT \leq \aleph_\alpha$, ceux-ci étant deux à deux distincts au point de vue de l'ordre.

Alors

$$(3) \quad \alpha \leq n(\alpha) \leq \alpha + 1; \quad \text{en particulier, } n(0) = 0 \text{ ou } 1,$$

l'hypothèse $n(0) = 0$ étant équivalente à l'hypothèse que la réponse au problème de Souslin¹ est affirmative.

Bref, quel que soit le nombre ordinal

$$(4) \quad \alpha \leq n(\alpha) \leq \alpha + i \leq N(\alpha); \quad \text{donc } n(\alpha) \leq N(\alpha).$$

Il est intéressant de remarquer que, quel que soit le *tableau ramifié* infini T , tel que $pT = \aleph_\zeta$, ζ étant 0 ou un ordinal de seconde espèce, on aura $bT = pT$, alors que nous ne savons même pas prouver que, quel que soit l'ensemble partiellement bien ordonné non dénombrable E vérifiant $bE \leq \aleph_0$, la puissance pT ne soit un aleph inaccessible².

IV. Nombre γE , ensembles $R_\alpha E$. Soient E un ensemble partiellement bien ordonné non vide et F un sous-ensemble non vide de E ; il y a un (et donc un seul) sous-ensemble $R_0 F$ de F composé de points deux à deux incomparables et tel que, quel que soit le point éventuel x de $F - R_0 F$, il y ait un point de $R_0 F$ précédant le point x . En particulier, $R_0 E$ existera; nous poserons $R_1 E = R_0(E - R_0 E)$; d'une manière générale, soit α un ordinal tel que, pour tout $\xi < \alpha$, le sous-ensemble non vide $R_\xi E$ est bien déterminé; si $E \neq \sum_{\xi < \alpha} R_\xi E$, nous poserons $R_\alpha = R_0 \left(E \sum_{\xi < \alpha} R_\xi E \right)$; si $E = \sum_{\xi < \alpha} R_\xi E$, on posera $\gamma E = \alpha$ et l'on ne définira pas $R_\alpha E$.

V. Ceci étant, supposons que $bE \leq \aleph_0$; par conséquent, $pR_\alpha E \leq \aleph_0$ pour tout $\alpha < \gamma E$; si de plus, $pR_\alpha E < \aleph_0$ pour tout $\alpha < \gamma E$, on peut

¹Voir la nouvelle édition (1937) du tome I des *Fundamenta Mathematicae*, p. 223 et 248.

²Un aleph \aleph_α est *inaccessible* s'il n'est pas la somme de moins de \aleph_α nombres cardinaux $< \aleph_\alpha$ et si, de plus, le nombre α est 0 ou un ordinal de seconde espèce.

prouver que $pE \leq \aleph_0$. Mais, dans le cas général où $pR_\alpha E = \aleph_0$ pour tout $\alpha < \gamma E$ et où $pE > \aleph_0$, nous ne savons pas prouver que pT soit de la forme $\aleph_{\alpha+1}$ ni même que pE n'est pas inaccessible (bien entendu, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, on aura $pE = \aleph_1$; et vice versa).

SUR LA PUISSANCE DES ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS

Réimpression d'une note composée en 1937 et publiée en 1939 dans les *Comptes rendus des Séances de la Société des Sciences et des lettres de Varsovie, classe III*, 32 (1939), 62-67, avec un résumé en polonais, p. 61. La note fut présentée par M.W. Sierpiński dans la séance du 24 janvier 1939. Étant publié immédiatement avant la guerre 1939-45, l'article n'a pas été enregistré dans les journaux référentifs et nous le reproduisons ici fidèlement à cause de l'importance que nous attachons à son contenu. En particulier, le théorème et la démonstration du théorème sont immédiatement généralisables aux graphes (c'est-à-dire aux ensembles munis d'une relation symétrique) et d'autre part on y fait un usage essentiel de la fabrication des ordres partiels à partir des ordres totaux ce qui est la base même de la définition de la dimension des ensembles partiellement ordonnés au sens de Dushnik-Miller.

La terminologie et les notations sont celles dont je me servais à cette époque-là et diffèrent de la terminologie et des notations actuelles.

M. Sierpiński a posé le problème¹ de savoir si un ensemble ordonné dont tout sous-ensemble bien ordonné croissant ou décroissant est au plus dénombrable est d'une puissance $\leq 2^{\aleph_0}$. Paul Urysohn a résolu le problème par l'affirmative². Or, M. Hausdorff a observé à Urysohn que le théorème ainsi établi résulte des considérations qu'il avait faites en 1907 dans les *Leipziger Berichte*, Bd 59, pp. 84-159, et qu'il avait reproduites en 1914 dans son ouvrage *Grundzüge der Mengenlehre* (Ch. VI, § 7 et § 8). En effet, M. Hausdorff établit, implicitement, dans son livre que la puissance d'un ensemble ordonné est $\leq 2^{\aleph_\xi}$ pourvu que chacun de ses sous-ensembles bien ordonnés, croissants ou décroissants, soit d'une puissance $\leq \aleph_\xi$ ³). Dans la Thèse⁴, j'ai donné une démonstration du théorème de M. Hausdorff différent de celles de M. Hausdorff et d'Urysohn.

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. *Glasnik Mat.-Fiz. Astr.* 14 (1959), 205-210

¹Voir *Fund. Math.* 2 (1921), p. 286, problème 12.

²Voir *Fund. Math.* 5, (1924), 14-19.

³Pour cela, voir *Fund. Math.* 6 (1924), p. 278 où Paul Urysohn se rapporte aux travaux de M. Hausdorff.

⁴*Ensembles ordonnés et ramifiés*, pp. 114-118, en particulier, p. 118, th. I (Paris 1935; aussi *Publ. Math. Univ. Belgrade* 4 (1935) avec la même pagination).

Le but du présent travail sera d'établir un théorème analogue pour des *ensembles partiellement ordonnés*. Voici son énoncé:

En désignant pour un ensemble X par

$$pX \text{ la puissance de } X, \tag{1}$$

posons, pour un ensemble partiellement ordonné E ,

$$p_0 E = \supp_F F. \tag{2}$$

$$\bar{p}_s E = \supp_G G, \tag{3}$$

F, G parcourant respectivement tous les ensembles bien ordonnés croissants ou décroissants extraits de E , et tous les sous-ensembles de E composés de points deux à deux incomparables; alors

$$pE \leq (2\bar{p}_s E)^{p_0 E} \tag{4}$$

Dans le cas des E ordonnés, on a $p_s E = 1$, et la formule (4) se réduit au théorème de M. Hausdorff.

Avant de passer à la démonstration de notre théorème, posons, pour un E partiellement ordonné,

$$p_c E = \supp_F F, \tag{5}$$

$$p_d E = \supp_G G, \tag{6}$$

F, G parcourant tous les sous-ensembles bien ordonnés de E , croissants et décroissants respectivement (par conséquent, $p_0 E = \max(p_c E, p_d E)$), et désignons, pour un $a \in E$, par

$$(\cdot, a)_E \text{ l'ensemble des points de } E \text{ précédant le point } a \text{ et par} \tag{7}$$

$$(\cdot, a]_E \text{ l'ensemble } (\cdot, a)_E \text{ augmenté du point } a. \tag{7'}$$

⁵Le théorème est énoncé dans C.R.Acad. Sci. Paris 205 (1937), p. 1196, formule (1).

A. Cas particulier où tout sous-ensemble ordonné de E est bien ordonné.

LEMME. B étant un ensemble partiellement ordonné dont tout sous-ensemble ordonné est bien ordonné, on a

$$pB \leq (2p_s B)^{p_c B} \quad (\text{cf. (1), (3), (5)}). \quad (8)$$

1. Manifestment, l'ensemble

$$R_0 B \quad (9)$$

des points de B dont aucun n'est précédé par un point de B est bien déterminé et ses points sont deux à deux incomparables; de même, F étant un sous-ensemble ordonné (et donc bien ordonné) de B , soit

$$F_B \quad (10)$$

l'ensemble $R_0 B$ ou l'ensemble des premiers points de l'ensemble des points de B succédant à tout point de F suivant que F est vide ou non vide (bien entendu, si B ne contient aucun point succédant à tout point de F , F_B est vide); évidemment, les points F_B sont deux à deux incomparables.

Par conséquent, en désignant par

$$X \text{ l'un des ensembles (9), (10), on aura } pX \leq p_s B \quad (\text{cf. (1), (3)}); \quad (11)$$

dès lors,

$$\left\{ \begin{array}{l} M \text{ étant un ensemble quelconque tel que} \\ pM = p_s B, \text{ on aura} \end{array} \right. \quad (12)$$

$$pX \leq pM, \quad (13)$$

ce qui veut dire qu'il y a une transformation biunivoque de l'ensemble X en un sous-ensemble de M ; nous en désignerons l'une quelconque par

$$\varphi(a, X), \quad (a \in X). \quad (14)$$

2. Soit

$$\mathcal{L} \quad (15)$$

la famille de tous les sous-ensembles bien ordonnés *maxima* non vides extraits de l'un des ensembles

$$(\cdot, a)_B (\cdot, a]_B$$

a parcourant B (cf. (7), (7')). L étant un élément de \mathcal{L} , soient α le type d'ordre de l'ensemble bien ordonné L et

$$a_0, a_1, \dots, a_\xi, \dots, (\xi < \alpha) \tag{16}$$

les points de L dans leur bon ordre.

En désignant, pour tout $\xi < \alpha$ par L^ξ l'ensemble bien ordonné des $a_\eta (\eta < \xi)$, faisons correspondre à L le complexe

$$\begin{aligned} \Phi(L) &\equiv (m_0, m_1, \dots, m_\xi, \dots)_{\xi < \alpha} \text{ où} \\ m_0 &= \varphi(a_0, R_0B), \dots, m_\xi = \varphi(a_\xi, (L^\xi)_B) \end{aligned} \tag{17}$$

$(L^\xi)_B$ désignant, d'après (10), l'ensemble des premiers points du sous-ensemble de B dont tout point succède à L^ξ .

Passons aux conclusions.

3. L, L_1 étant deux éléments distincts de \mathcal{L} , les complexes $\Phi(L), \Phi(L_1)$, sont distincts⁶.

$$(c_0, \dots, c_\xi, \dots)_{\xi < \gamma}, (d_0, d_1, \dots, d_\xi, \dots)_{\xi < \delta}$$

ne sont égaux que si $\gamma = \delta$ et $c_\xi = d_\xi$ pour tout $\xi < \gamma$.

Distinguons deux cas, suivant que $LL_1 = 0$, ou $LL_1 \neq 0$.

Dans le cas où $LL_1 = 0$ soient a le premier point de L et b le premier point de L_1 ; a, b étant donc deux points distincts de R_0B (cf. (9)), $\varphi(a, R_0B), \varphi(b, R_0B)$ seront deux points distincts de M (cf. (12), (14)). Les complexes $\Phi(L), \Phi(L_1)$ commençant, d'après (17), par les points $\varphi(a, R_0B), \varphi(b, R_0B)$ respectivement, on aura bien $\Phi(L) \neq \Phi(L_1)$.

Dans le cas où $LL_1 \neq 0$, soient

$$\begin{aligned} l_0, l_1, \dots, l_\xi, \dots, (\xi < \alpha) \\ l'_0, l'_1, \dots, l'_\xi, \dots, (\xi < \beta) \end{aligned}$$

⁶Bien entendu, deux complexes.

les points de L, L_1 dans leurs bons ordres, respectivement; ν étant le premier indice tel que $l_\nu \neq l'_\nu$ il est évident que l'ensemble F des points l_0, \dots, l_μ, \dots , ($\mu < \nu$), est un sous-ensemble ordonné *maximal* extrait de $(\cdot, l_\nu)_B$ (cf. (7)) et que l_ν, l'_ν sont deux points distincts de l'ensemble F_B (cf. (10)). Par conséquent,

$$\varphi(l_\nu, F_B) \neq \varphi(l'_\nu, F_B) \text{ et dès lors } \Phi(L) \neq \Phi(L_1),$$

le rang ν des complexes $\Phi(L), \Phi(L_1)$ étant occupé par $\varphi(l_\nu, F_B), \varphi(l'_\nu, F_B)$ respectivement (cf. (14), (17)).

Bref, en désignant par

$$\varphi(\mathcal{L}) \text{ la famille des complexes } \Phi(L), (L \in \mathcal{L}), \text{ les familles} \quad (18)$$

$\mathcal{L}, \Phi(\mathcal{L})$ ont une même puissance, la transformation $\Phi(L), (L \in \mathcal{L})$ étant biunivoque:

$$p\alpha = p\Phi(\alpha) \text{ (cf. (1), (15), (18)).} \quad (19)$$

4. Or, la puissance, pour un certain ordinal α , des complexes.

$$(m_0, m_1, \dots, m_\xi, \dots)_{\xi < \alpha} \quad (m_\xi \in M)$$

étant égale à $(pM)^{p\alpha}$, on aura

$$p\Phi(\alpha) \leq \sum_{\alpha} (pM)^{p\alpha}, \quad (p\alpha \leq p_c B)$$

et donc

$$p\Phi(\alpha) \leq (pM)^{p_c B}, \quad p_c B \leq (2pM)^{p_c B},$$

ce qui, vu (12) et (19), entraîne

$$p\alpha \leq (2p_s B)^{p_c B} \text{ (cf. (1), (3), (5), (15)).} \quad (20)$$

5. Or

$$pB \leq p\alpha. \quad (21)$$

En effet, en désignant pour tout point $a \in B$ par $L(a)$ un certain ensemble ordonné *maximal* extrait de $(\cdot, a)_B$ (cf. (7')), $L(a)$ sera un élément de la famille \mathcal{L} (cf. (15)), et manifestement $L(a) \neq L(a')$ pour tout $a' \in B$, pourvu que $a \neq a'$.

Finalement, la formule (8) du Lemme résulte des formules (20), (21).

B. Cas général d'un ensemble partiellement ordonné quelconque

Soient E un ensemble infini ordonné partiellement par rapport à une relation binaire \prec et

$$a_0, a_1, \dots, a_\xi, \dots, (\xi < \psi, a_\xi \neq a'_\xi, \text{ pour } \xi < \xi' < \psi) \quad (22)$$

une bonne ordination quelconque de E ⁷⁾

$$p\psi = pE^{7)}. \quad (22')$$

6. Soit

$$B \quad (23)$$

l'ensemble des points $a_\xi, (\xi < \psi)$, ordonné partiellement par la relation ρ que voici:

$$a_\xi \rho a_\eta \quad (24)$$

équivalent à ce que $a_\xi \prec a_\eta$ et $\xi < \eta < \psi$. Manifestement

$$pB = pE. \quad (25)$$

De plus, B est partiellement ordonné par ρ et chacun de ses sous-ensembles ordonnés par ρ est bien ordonné par ρ et à fortiori par rapport à la relation initiale \prec ; dès lors, B remplissant la condition du Lemme,

$$pB \leq (2p_s B)^{p_c B}$$

et donc, d'après (25) et la relation évidente $p_c B \leq p_c E$,

$$pE \leq (2p_s B)^{p_c E}. \quad (26)$$

7. Prouvons que

$$p_s B \leq (2p_s E)^{p_d E} \text{ (cf. (3), (6)).} \quad (27)$$

Pour cela, soit N un sous-ensemble quelconque de B composé de points deux à deux incomparables par rapport à ρ (cf. (24)); soient a_μ, a_ν deux points distincts de N avec $\mu < \nu$, la notation de ceux-ci étant celle de la suite

⁷⁾Nous admettons donc la possibilité d'une bonne ordination de E .

(22). De la définition (24), on conclut sans peine que, ou bien $a_\nu < a_\mu$ ou bien a_μ, a_ν sont deux points incomparables par rapport à la relation initiale \prec . Si alors le signe $a_\mu \sigma a_\nu$ équivaut à ce que $\mu < \nu < \psi$, $a_\nu < a_\mu$, l'ensemble N sera partiellement ordonné par la relation σ et on s'aperçoit, d'une part, que tout sous-ensemble de N ordonné par σ est encore bien ordonné par rapport à σ , ce qui, d'après le Lemme, entraîne

$$pN \leq (2p_s N)^{p_c N}; \quad (28)$$

et, d'autre part, que tout sous-ensemble de N ordonné par σ est un sous-ensemble de E bien ordonné par \prec ; dès lors, $p_c N \leq p_d E$, ce qui, joint à (28) et à la formule évidente $p_s N \leq p_s E$, entraîne $pN \leq (2p_s E)^{p_d E}$, d'où résulte (27) immédiatement.

8. Les formules (26), (27) donnant

$$pE \leq (2p_s E)^{p_c E \cdot p_d E} \quad (29)$$

la formule (4) de notre théorème en résulte immédiatement. En effet, les deux nombres cardinaux $p_c E, p_d E$ (cf. (5), (6)) sont, les deux, soit finis soit transfinis. Dans le second cas,

$$p_c E \cdot p_d E = \max(p_c E, p_d E) = p_0 E$$

et donc (29) entraîne (4); dans le premier cas, soit n l'entier $p_c E = p_d E = p_0 E$. En posant $R_1 E = R_0(E - R_0 E)$ et $R_i E = R_0(E - \sum_{k=0}^{i-1} R_k E)$ pour tout $i \leq n$ (cf. (9)), il est manifeste, d'une part, que chacun des ensembles $R_0 E, R_1 E, \dots, R_{n-1} E$ est composé de points deux à deux incomparables par rapport à \prec et dès lors $p R_i E \leq p_s E$, et, d'autre part, que $E = R_0 E + R_1 E + \dots + R_{n-1} E$. On en conclut que $pE \leq p_s E \cdot n$ et, d'autant plus, $pE \leq (2p_s E)^n$.

Ainsi le théorème est complètement démontré.

9. Nous pouvons nous demander encore si la formule (4) constitue la meilleure approximation de pE , au sens que, quels que soient deux nombres cardinaux infinis m, n , il y aurait un ensemble partiellement ordonné E vérifiant

$$p_s E = m, p_0 E = n, pE = (2m)^n.$$

Dans le cas des E ordonnés, il en est bien ainsi. En effet, soit n un nombre cardinal infini quelconque et φ le premier ordinal de

puissance n ⁸⁾ soit E l'ensemble des complexes $(a_0, a_1, \dots, a_\xi, \dots)_{\xi < \varphi}$ ($a_\xi = 0$ ou 1), ordonné de telle manière que $(a_0, a_1, \dots, a_\xi, \dots)_{\xi < \alpha}$ précède $(a'_0, a'_1, \dots, a'_\xi, \dots)_{\xi < \alpha}$ si et seulement si, d'une part, il y a un $\xi < \varphi$ vérifiant $a_\xi \neq a'_\xi$ et de l'autre si, en désignant par η le premier indice vérifiant $a_\xi \neq a'_\xi$ l'on ait $a_\eta = 0, a'_\eta = 1$. Alors on prouve sans peine que E est ordonné et que $p_0 E = n, pE = 2^n$.

⁸⁾C'est-à-dire nous admettons que n est un aleph.

ON REFLEXIVE SYMMETRIC RELATIONS AND GRAPHS

The reflexive symmetric relations occur very frequently since e.g. congruence and comparability relations are reflexive and symmetric. The study of such relations is connected with that of *graphs*, each graph G or $(G; \rho)$ consisting of a set G and a binary relation ρ which is reflexive and symmetric in the set. Of course, every subset of a graph is also a graph. The points $x, y \in G$ are *connected* (resp. *disconnected* or *disjoint*), provided $x\rho y$ (resp. x non ρy).

A graph is *connected* (resp. *disconnected*) provided every couple of the distinct points is so. Each one-point-set and vacuous set is considered as connected (disconnected).

Example 0.1. An important class of graphs is linked with ordered sets, the comparability relation being graph relation.

Example 0.2. In a similar way, the union of the incomparability relation and the identity is a graph relation.

Example 0.3. Every family F of sets is a graph relatively to the union ρ of $=$ and the disjunctive relation if for $A, B \in F$

$$A\rho B \iff A = B \text{ or } A \cap B = v.^1$$

With every graph $(G; \rho)$ we shall associate the cardinal numbers $k_c G, k_s G$ as follows.

$$(0.1) \quad k_c G = \sup_X kX$$

$$(0.2) \quad k_s G = \sup_Y kY$$

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Acad. Sci. Art. Slovenica, cl. III, Sev. A., Dissertationes IV/4, (1952-1953), 81-82. (Presented during the session of 23.10.1952)

¹ v denotes the vacuous set.

X, Y respectively running over all connected and disconnected subsets of G , respectively and

$$(0.3) \quad kS \text{ or } \overline{S}$$

denoting the cardinal number of any set S .

The purpose of the paper is to prove the following.

THEOREM 0.1. *For any graph $G = (G; \rho)$ one has*

$$(0.4) \quad kG \leq (2k_s G)^{k_c G}.$$

For any aleph \aleph_α and any cardinal number $n \leq 2^{\aleph_\alpha}$ there is a graph $g = g(\aleph_\alpha, n)$ such that

$$(0.5) \quad k_c g \leq \aleph_\alpha, k_s g \leq \aleph_\alpha, kg = n;$$

in particular (for $n = 2^{\aleph_\alpha}$) there is a graph M_α such that

$$(0.6) \quad k_c M_\alpha = \aleph_\alpha = k_s M_\alpha, kM_\alpha = 2^{\aleph_\alpha}.$$

Remark 0.1. For any integer $n \geq 2$ one can consider graphs of order n in a set S i.e. symmetric subsets of S^n ; then one can prove a theorem similar to the theorem 0.1.

THEOREM 0.2. *The statement is obtained from that of Th. 0.1 by specification that G is a family of nonvoid sets and that $\rho = \rho_1$ where*

$$(0.7) \quad A \rho_1 B \Leftrightarrow A = B \text{ or } A \cap B = v.^2$$

THEOREM 0.3. *The statement is obtained from that of Th. 0.1 by specification that G is a family of nonvoid sets and that $\rho = \rho_2$ where*

$$(0.8) \quad A \rho_2 B \Leftrightarrow A \cap B \neq v.^3$$

²Let us observe that every graph $(G; \rho)$ is isomorphic (similar) with a graph occurring in the theorem 0.2. To prove it, let us define the mapping N (cf. Marczewski [1 §3]) so that, for any $x \in G$, $N(x)$ be the system consisting of x and of the sets $\{x, x'\}$ ($x' \in G, x' \text{ non } \rho x$); NG denoting the set of all the $N(x)$ ($x \in G$), one sees that N is a similarity that is a one-to-one mapping of G onto NG such that for any $x, y \in G$ the relation $x \rho y$ holds if and only if the relation $N(x) \rho_1 N(y)$ holds.

COROLLARY 0.1. *If every connected and every disconnected subgraph of a graph G is $\leq \aleph_0$, the cardinal number of G is $\leq 2^{\aleph_0}$; in other words: if every nondenumerable infinite subset of a graph G contains both a couple of distinct connected points and a disconnected couple of distinct points, then $kG \leq 2^{\aleph_0}$.*

COROLLARY 0.2. *Any ordered set $M = (M; \leq)$ satisfies*

$$(0.9) \quad kM \leq (2k_s M)^{k_c M}$$

with $k_c M = \sup_C kC$, $k_s M = \sup_A kA$, C , A respectively running over all chains and anti-chains⁴ of M respectively.

The corollary 0.2 is a special case of a theorem according to which the relation (0.4) holds also in the case when $k_c M$ denotes the supremum of the cardinals of increasing and decreasing well-ordered chains $\subseteq M$ (v. Kurepa [1], [3, §20]). The corollary 0.2 was the starting point of the present article.

On a problem of Sierpinski. The corollary 1 is to be compared with a passage by Sierpinski [1] concerning the following problem of Knaster. *Does there exist a nondenumerable infinite graph G so that each infinite nondenumerable subgraph of G contains both: two distinct connected points and two distinct disconnected points.*

Having solved in affirmative Knaster's problem for the case $kG = \aleph_1$, Sierpinski adds:

"Il me semble difficile à résoudre le problème de Knaster pour un champ⁵ E dont la puissance est $> \aleph_1$ (par exemple pour $E = \aleph_2$)."

Now, it is obvious that every graph G satisfying the Knaster's condition, that is that each subgraph $> \aleph_0$ contains distinct connected points and distinct disconnected points is such that the numbers $k_s G$, $k_c G$ are $\leq \aleph_0$ and thus $kG \leq 2^{\aleph_0}$. Consequently, if the continuum hypothesis $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ holds, the answer to Sierpinski's question is negative; and vice versa.

³Every graph $(G; \rho)$ is isomorphic (similar) with a graph $(G'; \rho_2)$; namely, let, for any $x \in G$, $S(x)$ be the system consisting of x and all the sets $\{x, x'\}$ ($x' \in G, x' \rho x$); SG denoting the set of all $S(x)$ ($x \in G$), the mapping S is a similarity between $(G; \rho)$ and $(SG; \rho_2)$, then S is a one-to-one mapping such that the relation $x \rho y$ holds if and only if $S(x) \rho_2 S(y)$ holds.

⁴Anti-chain means an ordered set without distinct comparable points.

⁵We should say: graph E .

1. Operators E, δ . Let $G = (G; \rho)$ by any graph and $X \subseteq G$; let

$$(1.1) \quad EX \text{ or } E(X; G)$$

be the set of all points of G each of which is connected with every $x \in X$; putting $E\nu = \nu$, the operator E is defined for every graph $(G; \rho)$ and for every subgraph of $(G; \rho)$.

For a given $X \subseteq G$ we may consider the system of all *disconnected* subgraphs of X ; does there exist a maximal one? (maximal meaning that each point of the graph is connected with at least one point of the concerned subgraph). Let

$$(1.2) \quad x_0, x_1, \dots, x_\beta, \dots \quad (\beta < \omega_\alpha)$$

be a well-ordering of X ; then by defining inductively the *maximal* sequence

$$(1.3) \quad y_0, \dots, y_\eta, \dots$$

so that $y_0 = x_0, \dots, y_\eta =$ the first term in (1.2) disconnected with every $x_\zeta (\zeta < \eta)$, one sees that the points (1.3) constitute a maximal disconnected subgraph, say δX , of X .

LEMMA 1.1. *Each graph X contains a maximal disconnected subgraph δX ; thus*

$$X = \bigcup_a E(a) \quad (a \in \delta X).$$

Remark 1.1. The proof of the Lemma 1.1 is backed upon the choice axiom; the converse is also true so that the lemma 1.1 is logically equivalent with the Zermelo's axiom (to prove it, it suffices to consider the graphs of the example 0.3 and to apply a theorem by Vaught[1]).

LEMMA 1.2. *For each $X \subseteq G$ so that*

$$(1.4) \quad \delta(EX \setminus X) \neq \nu$$

one has

$$(1.5) \quad EX = \bigcup_a E(X \cup \{a\}), [a \in (4.5)].$$

At first, EX contains each $E(X \cup \{a\})$, the last set consisting of all points $x \in G$ connected both with X and with a : thus $(1.5)_1 \supseteq (1.5)_2$. On the

other hand, if one had a point $x \in EX$ belonging to no $E(S \cup \{a\})$, the point x would be disconnected with every $a \in (1.4)$; since each a is connected with every point of X , one should have $x \in EX \setminus X$ what is meaningless since each point of $EX \setminus X$ is connected with at least a point of (1.4).

2. Ranged sets W are ordered sets such that each nonvacuous chain $\subseteq W$ has a minimal (initial) element. If for any nonempty W one defines the initial row $R_0 W$ as the set of all initial points of W then writing

$$(2.1) \quad R_\alpha W = R_0 \left(W \setminus \bigcup_{\xi} R_\xi W \right) \quad (\xi < \alpha)$$

for any ordinal α and denoting by γW the first ordinal ν such that $R_\nu W = \nu$ (= vacuous set), one has the sequence $R_\alpha W$ ($\alpha < \gamma W$) of the rows of W ; obviously,

$$(2.2) \quad W = \bigcup_{\alpha} R_\alpha W \quad (\alpha < \gamma W)$$

In particular, S being a system of sequences then defining the relation \leq so that for $A, B \in S$

(2.3) $A \leq B$ means that A is an initial segment of B , the set $(S; \leq)$ is ranged and moreover is *ramified*: no point of S is preceded by two incomparable points.

3. Definition of the sets D_α . We are going to define a system D of connected subsets of G so that finally each point of G will be contained in at least one element of D . To start, let $D_0 = \nu$ (= vacuous set) and let

$$(3.1) \quad D_1$$

be the maximal system of 1-point pairwise disconnected sets; thus D_1 is consisting of monopunctual sets

$$(3.2) \quad (a_0) \quad (a_0 \in \delta G)$$

D_2 is defined as follows: for each $(a_0) \in D_1$ we consider the set $E(a_0)$ of all the points of D that are connected with a_0 ; let us consider the sets

$$(a_0, a_1) \quad (a_1 \in \delta) \quad (E(a_0) \setminus \{a_0\});$$

the system of all such 2-sequences is, by definition, the system D_2 . In order to define D_3 one considers any $(a_0, a_1) \in D_2$ the set $E(a_0, a_1)$ and the set $\delta(E(a_0, a_1) \setminus \{a_0, a_1\})$; one defines the 3-sequences

$$(a_0, a_1, a_2) (a_2 \in \delta(E(a_0, a_1) \setminus \{a_0, a_1\}));$$

by varying $(a_0, a_1) \in D_2$ the system of all such 3-points sequences is D_3 . Analogously, one defines $D_4, \dots, D_n, D_{n+1} \dots$ provided such systems exist. If for any $n < \omega$ the system D_n is defined and if the sets $E_n = \bigcup (x \in D_n)$ exhaust the set G, D_ω will not be defined altogether; if the union of all $E_n (n < \omega)$ is proper subset of G, D_ω will be defined as consisting of all maximal ω -sequences of the set $\bigcup_n (x \in D_n)$ ordered by (2.3). That D_ω is nonempty, one concludes in the following manner. By hypothesis, there is a point $x \in G \setminus \bigcup_{n < \omega} E_n$; since each point of G is connected with some point of δG , according to (3.2) there is a $(a_0) \in D_1$ such that $x \in E(a_0)$; analogously, there is $(a_0, a_1) \in D_2$ such that $x \in E(a_0 a_1)$; inductively one concludes that there is for any $1 < n < \omega$ a sequence $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in D_{n+1}$ such that $x \in E(a_0, \dots, a_n) (n < \omega)$. Consequently, $x \in E(a_0, a_1, \dots, a_n) (n < \omega)$; the ω -sequence $a_2 a_1 \dots a_n \dots$ is a requested sequence; the set of all such sequences will be denoted D_ω . Now we may proceed to general construction. Let $1 < \alpha$ be any ordinal number such that for any $\xi < \alpha$ the system D_ξ is defined so that the following conditions hold:

1 (ξ). For each $0 < \xi < \alpha$ the set D_ξ consists of some ξ -sequences of pairwise connected points of G ;

2 (ξ). The set

$$(3.3) \quad T_\alpha = \bigcup_{\xi} D_\xi \quad (\xi < \alpha)$$

is ranged relatively to the relation (2.3), and

$$(3.4) \quad R_\xi T_\alpha = D_\xi \quad (\xi < \alpha);$$

3 (ξ). For each $0 < \xi < \alpha$

$$G = \bigcup_x E(x) \quad (x \in T_\xi);$$

consequently, each point $p \in G$ is connected with at least one element belonging to T_ξ .

For each $X \in D_\xi$, X is a ξ -sequence; let

$$(3.5) \quad VX$$

be the set of all values taken by X , i.e. VX is the union of all terms of X ; thus $VX \subseteq G$.

If incidentally the set

$$(3.6) \quad \bigcup X(X \in T_\alpha)$$

is $= G$, the process is achieved; if $(3.6) \neq G$, we are going to define D_α . If $\alpha - 1$ exists, let $(a_0 \dots a_\xi \dots)_{\xi, \alpha-1} \in D_{\alpha-1}$ such that

$$(3.7) \quad \delta(E(a_0 \dots a_\xi \dots) \setminus \{a_0 \dots a_\xi \dots\}) \neq \nu, (\xi \in \alpha - 1);$$

then we consider the sets

$$(3.8) \quad (a_0, \dots, a_\xi, \dots, a_{\alpha-1}) (a_{\alpha-1} \in (3.7));$$

D_α will be defined as the system of all sets (3.8), the sequences $(a_0 \dots a_\xi)$ running over $D_{\alpha-1}$, so that (3.7) holds.

If α is of the second kind ($\alpha - 1$ does not exist), D_α will consist of all α -sequences $(a_0 \dots a_\xi \dots)$ ($\xi < \alpha$) such that for $0 < \xi < \alpha$ one has $(a_0 \dots a_\xi \dots)_{\eta > \xi} \in D_\xi$; in other words, D_α consists of all maximal α -sequences of the ordered set T_α (cf. 3.3).

One proves in both cases that the condition 1(a) - 3(a) are satisfied. Let us prove e.g. that 3(α) holds. At first, if $\alpha - 1$ exists, then according to 3($\alpha - 1$) one has

$$(3.9) \quad G = \bigcup_X VX \cup \bigcup_Y EY (X \in T_{\alpha-1}, Y \in D_{\alpha-1}).$$

Now if

$$(3.10) \quad \delta(E(Y) \setminus Y) \neq \nu$$

then

$$(3.11) \quad EY = \bigcup_a E(Y, a) (a \in (3.10)) \text{ (cf. Lemma 1.1);}$$

(Y, a) denoting the sequence obtained from Y by adding a as the terminal point. Since $T_{\alpha-1} \subseteq T_\alpha$, the relations (3.9), (3.10) imply the statement $3(\alpha)$. It remains the case that $\alpha - 1$ does not exist. Let us consider the set (3.6); if it is equal to G , the statement $3(\alpha)$ holds; if on the contrary (3.6) is a proper subset of G , let x be a point of G not belonging to (3.6); all turns out to prove that there is a $Y \in D_\alpha$ such that $x \in EY$. Now, by hypothesis there is a $(a_0) \in D_1$ so that $x \in E(a_0)$; if $0 < \xi < \alpha$ and if $A_\zeta \in D_\zeta$ ($0 < \zeta < \xi$) are the elements connected with x and so that $A_1 < A_2 < \dots < A_\zeta < \dots$, let us define A_ξ so that $A_\xi \in D_\xi, x \in EA_\xi$ and $A_\eta < A_\xi$ ($\eta < \xi$); if ξ is of the second kind, it is sufficient to put $A = \bigcup A_\eta$ ($\eta < \xi$); if $\xi - 1$ exists, the lemma 1.1, applied to the set $A_{\alpha-1}$ implies the existence of A_ξ .

Thus in all cases the condition $3(\alpha)$ holds.

4. The number γ . Proof of the first part of the theorem 0.1.

Let

(4.1) γ be the first ordinal number $\nu > 0$ so that $D_\nu = v$ (vacuum) and thus

$$(4.2) \quad G = \bigcup_X \bigvee V X \quad (x \in T_\nu = \bigcup_{\xi < \nu} D_\xi).$$

Of course the number γ exists; e.g. if the ordinal ν is such that $k\nu > k_c G$, then $D_\nu = v$: otherwise, one should have a $x \in D_\nu$ and x would be a connected ν -sequence $\subseteq G$ thus $kx = k\nu > k_c G$, contrary to the definition of the number $k_c G$. Thus

$$(4.3) \quad G = \bigcup_x \bigvee V X \quad (x \in T_\gamma)$$

where

$$(4.4) \quad T_\gamma = \bigcup D_\xi \quad (\xi < \gamma).$$

LEMMA 4.1. $k\gamma \leq 2^{k_c G}$.

Namely, for any $0 < \xi < \gamma$ and $x \in D_\xi$, x is a connected subset of G so that $kX = k\xi$; consequently, either $k\gamma = k_c G$ or $k\gamma$ succeeds immediately to $k_c G$.

LEMMA 4.2. $kD_\xi \leq (k_S G)^{k\xi}$ ($0 < \xi < \gamma$).

Let S be a set so that

$$(4.5) \quad kS = k_S G,$$

consequently, for any disconnected subset $X \subseteq G$ there is a 1-1 mapping

$$(4.6) \quad f_X \text{ of } X \text{ into } S: \text{ if } a \in X \text{ then } f(a) \in S.$$

In particular, for any $Y \subseteq G$ the set δY being disconnected one has the mapping $f_{\delta Y}$ into S .

Now, let us consider an ordinal $0 < \xi < \gamma$ and the set D_ξ consisting of ξ -sequences

$$(4.7) \quad (a_0, \dots, a_\eta \dots) \quad (\eta < \xi < \gamma)$$

with $a_0 \in \delta G$; $a_\eta \in \delta(E(a_0 \dots a_\eta \dots)_{\eta < \xi}) \setminus \{a_0 \dots a_\eta \dots\}_{\eta < \xi}$; substituting each a_0 by $f_{\delta G}(a_0)$ and each a_η by $f_{Z(a)}$, where

$$Z = \delta(E(a_0 \dots a_\eta \dots)_{\eta < \xi}) \setminus \{a_0 \dots a_\eta \dots\}_{\eta < \xi}$$

one obtains a one-to-one mapping of D_ξ into the set $S(\xi)$ of all ξ -sequences of points of S ; thus $kD_\xi \leq kS(\xi) = kS^{k\xi} = (k_S G)^{k\xi}$ and the lemma 4.2 is proved.

The equality (4.3) implies

$$(4.8) \quad kG \leq \sum_X kX, \quad (X \in T_\gamma);$$

X being a connected subset of G one has $kX \leq k_c G$ and (5.1) implies

$$(4.9) \quad kG \leq k_c G \cdot kT_\gamma.$$

On the other hand, according to (4.4):

$$\begin{aligned} kT_\gamma &= k \bigcup_{\xi < \gamma} D_\xi \leq \sum_{\xi < \gamma} kD_\xi \leq (\text{in virtue of L. 4.2}) \leq \sum_{\xi < \gamma} (k_S G)^{k\xi} \\ &\leq \sum_{\xi < \gamma} (k_S G)^{k_c G} \leq k\gamma \cdot (k_S G)^{k_c G} \leq (\text{cf. L. 4.1}) \leq 2^{k_c G} \cdot (k_S G)^{k_c G} \\ &= (2k_S G)^{k_c G}. \end{aligned}$$

Accordingly, the relation (4.9) becomes

$$kG \leq k_c G. (2k_S G)^{k_c G} = (2k_S G)^{k_c G},$$

what proves the first part of the Theorem. Now, we shall prove the remainder of the Theorem 0.1.

5. The sets M_α, M' . Let M_α be the set of all uniform mappings of the set $[0, \omega_\alpha)$ of all ordinals $< \omega_\alpha$ into the set R of rational numbers; consequently, M_α consists of all ω_α -sequences of rational numbers.

LEMMA 5.1. $kM_\alpha = 2^{\aleph_\alpha}$.

Namely, $kM_\alpha = \aleph_0^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$. Let

$$(5.1) \quad M' = (M_\alpha; \leq_1)$$

be (the first difference) ordering of M_α so that for $f, g \in M_\alpha$ the relation $f <_1 g$ means the existence of an ordinal φ satisfying

$$f_\varphi < g_\varphi \quad f_\xi = g_\xi \quad (\xi < \varphi).$$

LEMMA 5.2 *The set M' is a chain; if $a, b \in M'$ and $a \neq b$ then⁶ $k(a, b)_{M'} = 2^{\aleph_\alpha}$.*

At first, it is obvious that M' is without noncomparable points; in particular a, b being 2 distinct points, if φ is the first ordinal satisfying $a_\varphi \neq b_\varphi$, one has (in R) either $a_\varphi < b_\varphi$ (thus $a <_1 b$) or $a_\varphi > b_\varphi$ (thus $a >_1 b$). Now, if c is any point of M_α so that $c_\xi = a_\xi$ ($\xi < \varphi$), $c_\varphi \in (a_\varphi, b_\varphi)_R$, one has $c \in (a, b)_{M'}$, no matter what are the values c_ξ ($\varphi < \xi < \omega_\alpha$); consequently, the cardinal of the set of all such points c is 2^{\aleph_α} and thus $k(a, b)_{M'} \geq 2^{\aleph_\alpha}$ what in virtue of the lemma 5.1 implies the lemma 5.2.

LEMMA 5.3. *The cardinal number of every subset $S \subseteq M'$ which is ranged or whose dual is ranged is $\leq \aleph_\alpha$. In particular, M' contains a set S so that $kS = \aleph_\alpha$ and that respectively $(S; \leq_1)$ and $(S; \geq_1)$ are well ordered.*

The validity of Lemma 5.3 is a consequence of the Theorem XIV in Hausdorff [1].

6. The sets $(M_\alpha; \leq), (M_\alpha; \rho)$. Let us well order the set M_α and let

$$(6.1) \quad a(0), \dots, a(\xi), \dots \quad (\xi < \omega_\zeta, k\omega_\zeta = 2^{\aleph_\alpha})$$

⁶ $(a, b)_{M'}$ denotes all points of M' located between a and b .

be a normal well ordering μM_α of M_α ; for any $v \subseteq X \subseteq M_\alpha$, μX is well determined and has a minimal element; let \leq_2 be the order relation which transfers M_α into the ordering (6.1). Finally, let

$$(6.2) \quad (M_\alpha; \leq)$$

be the superposition (cf. Kurepa [2, p. 487 on the bottom]) of the two orderings (M_α, \leq_1) , (M_α, \leq_2) that is to say that for $x, y \in M_\alpha$ the relation

$$(6.3) \quad x \leq y \text{ means } x \leq_i y \text{ (} i = 1, 2\text{)}.$$

Consequently, $(M_\alpha; \leq)$ is a partial ordering of M_α and one has the

LEMMA 6.1. *Each chain (anti-chain) of $(M_\alpha; \leq)$ is $\leq \aleph_\alpha$.*

Namely, every chain C of $(M_\alpha; \leq)$ is ranged by \leq since it is well ordered by \leq_2 thus C is a well-ordered subset of (M_α, \leq_1) and by the Hausdorff's lemma 5.3. is $C \leq \aleph_\alpha$. Similarly, one proves that each antichain $A \subseteq (M_\alpha; \leq)$ is $\leq \aleph_\alpha$. Then if

$$a(\beta_0) <_2 a(\beta_1) <_2 \dots a(\beta_\eta) <_2 \dots (\eta < \tau)$$

are the points of A so as they occur in (6.1), A is in $(M_\alpha; \leq)$ an increasing τ -sequence - then

$$a(\beta_0) >_1 a(\beta_1) >_1 \dots;$$

consequently A is in $(M_\alpha; \leq_1)$, a descending τ -sequence and therefore is $\leq \aleph_\alpha$ (cf. lemma 5.3).

In conclusion $(M_\alpha; \leq)$ is a ranged set each chain of which as well as anti-chain of which is $\leq \aleph_\alpha$ and that $kM_\alpha = 2^{\aleph_\alpha}$. Consequently, if $(M_\alpha; \leq)$ is considered as a graph $(M_\alpha; \rho)$ so that $a\rho b$ means that either $a \leq b$ or $b \leq a$ then $(M; \rho)$ is so that $kM_\alpha = 2^{\aleph_\alpha}$ and $k_S(M; \rho) = \aleph_\alpha = k_c(M_\alpha; \rho)$, what proves (0.6).

Finally, it remains to prove the relation (0.5). Now, \aleph_α being arbitrary, let n be any cardinal number $\leq 2^{\aleph_\alpha}$; let g be any subset of $(M_\alpha; \rho)$ satisfying $kg = n$; obviously, g satisfies the relations (0.5).

So the Theorem 0.1 is proved.

BIBLIOGRAPHY

- [1] F. Hausdorff, *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*, Math. Annalen, **65** (1908), 435-505.
- [2] D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, 1936.

- [3] D. Kurepa, [1] *Sur la puissance des ensembles partiellement ordonnés*, C.R. Soc. Sci., Classe Math. Warszawa **32** (1939) 61–67.
[2] *Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés II*, Rev. Cienc., Lima, **437** (1941), 483–500.
[3] *Teorija skupova*, Zagreb, 1951.
- [4] (Szpilrajn) E. Marczewski, *Sur deux propriétés des classes d'ensembles*, Fund. Math., Warszawa, **33** (1945), 303–307.
- [5] W. Sierpinski, *Sur un problème de la théorie des relations*, Ann. Scuola Norm. Sup., Sci. Mat. Fis., Pisa, Serie II, **2** (1933), 285–287.
- [6] R.L. Vaught, *On the equivalence of the Axiom of Choice and a maximal principle*, Bull. Amer. Math. Soc. **58** (1952), 66.

Remark (added 11.11.1954). The present paper is a part of results about which the author gave the following 3 talks:

- 6.9.1952 in Munich at the Kongress der Deutschen Mathematikervereinigung (München, 4.–8.9. 1952).
- 24.2.1953: Faculté des Sciences, Paris.
- 3.12.1952 Zagreb, Colloquium of the Society of Mathematicians and Physicists of Croatia.

The results were obtained in may 1950 (and were to be presented in a talk in USA) when the author was anxious to give a new proof of a theorem he published earlier [v. Kurepa C.R. Acad. Sci. Paris **205** (1937), 1196–1198 “la relation fondamentale (1)” and Kurepa [1], [3, § 20].

In the meantime the author was acquainted with the following papers connected with results:

- [1] F.P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. (2) **30** (1928), 338–384 ; also F.P. Ramsey: *Foundations of Mathematics*, London, 1932 resp. 1950, 18 + 292, pp. 82–111.
- [2] P. Erdős, *Some set-theoretical properties of graphs*, Rev. Univ. Tucuman Ser. A **3** (1942), 363–367.
- [3] P. Erdős, R. Rado, *A problem on ordered sets*, J. London Math. Soc. **28** (1953), 426–438.
- [4] B. Jones, *On the separation of the set of pairs of a set*, Elisha Mitchell Sci. Soc., **68** (1952), 44–45.

ON THE CARDINAL NUMBER OF ORDERED SETS AND OF SYMMETRICAL STRUCTURES IN DEPENDENCE ON THE CARDINAL NUMBERS OF ITS CHAINS AND ANTICHAINS

Introduction¹

The cardinal number kS (resp. kG) of an ordered set S (of a graph G) depends on the cardinal numbers of its *chains* and *antichains*. A particular kind of ordered sets – *tree or ramified tables* T – was considered in our *Thesis* (Kurepa [1]) in connection with the Suslin problem, when I was lead to the *hypothesis that kT is the supremum of k_cT and k_cT^2* (for definitions see the glossary). Another kind of this problematics is related to the question whether the numbers k_cS , k_c^-S are reached. In this connection we proved that every infinite “narrow” tree T contains a chain of the same cardinality as the set T itself (cf. Kurepa [1, p. 80 Th. 5^{bis}], also in Kurepa [8] where the same theorem with its proof are reproduced). As far as we know both kinds of these problems were considered for the first time in our *Thesis*.

The next step was the same problematics for general *ordered sets*. The question was resolved in 1937 (cf. “*relation fondamentale*” (1) in Kurepa [3]; and [4]). In particular, kS depends exponentially upon k_cS and one has $kS \leq (2k_c^-S)^{k_cS}$ (cf. § 5). The proof of this item is extendible to binary

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Glasnik Mat.-Fiz. Astr., 14 (3) (1959).

¹We have delivered the following lectures on the subject matter:

1. Über binäre symmetrische Relation, Munich, 06.9.1952 (Congress of the “Deutsche Mathematikervereinigung”).
2. O simetričnim relacijama i grafovima, Zagreb, 03.12.1952 (Colloquium, Društvo matematičara i fizičara NR Hrvatske).
3. Sur les relations binaires, Paris, 24.02.1953 (Faculté des Sciences).
4. O kombinacijama, Zagreb 17.03.1954 (Colloquium, Društvo matematičara i fizičara NR Hrvatske).

²The Suslin problem is equivalent to the problem whether every tree is countable if each of its chains and antichains is countable (Kurepa [1, pp. 106 (passage b), 124, 132]).

symmetrical relations as I found this in 1950. I thought that the same result should hold for n -ary symmetrical relations (Kurepa [6], [7]); therefore, I postponed a complete publication of this paper which was intended to be published in the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* after my lecture of 09.9.1952 in Munich and after I sent a part of it for publication (Kurepa [6]). In 1952 I lectured on the same subject in Paris, at the Faculty of Sciences; then I was informed by G. Riguet about the work of Ramsey [1], P. Erdős [1] and R. Rado. Anyway I have delayed the publication of my paper hoping to extend the theorem 7.2 (resp. 9.2) in the same form writing I_r instead of I_2 (resp. writing r instead of 2), for any integer $r > 1$ (cf. Kurepa [7]) and not only to have evaluation of kS contained in the theorem 8.3 (resp. 9.4). I was stopped, also, by the problem we mention in § 10, about the existence of the number $R(r, n, \aleph_\alpha)$ for finite r and n . Moreover, I had the idea to gather all the results and publish them in a separate monograph.

Now, that I was informed by P. Erdős that Hajnal proved that the evaluation of kS in theorem 8.3 (resp. 9.4) is the best possible one, I decided to publish this paper jointly with a reproduction of my original paper [4]. Obviously, there are connections between my papers and those of Erdős - Rado. It is instructive to notify how the *tree considerations* are playing an important role in the theory of *general symmetrical relations* (cf. §§ 3.2; 6.2, 8.4.5). We stress also the idea of *product of relations*: this idea played an essential role in our proofs.³

1. Definitions and notations

1.1. *Definition.* For an ordered set $(S; <)$ let ΓS denote the first ordinal number which is not representable in $(S; <)$.

In other words, $I \Gamma S$ denotes the system of all ordered types of well ordered subsets of the ordering $(S; <)$.

1.2. ΓS^* denotes $\Gamma(S; >)$. Consequently, $I \Gamma S^*$ denotes the order types of inversely well ordered subsets of $(S; <)$.

1.3. $K_c S$ resp. $K_c^- S$ denotes the first cardinal number not representable as chain resp. as antichain in $(S; <)$.

1.4. In particular, let $W_c S$ denote the first cardinal not representable as a well-ordered subset of $(S; <)$; $W_c S^* = W_c(S; <)$.

³The idea of intersection of relations is the very basis of dimension theory of ordered sets in the sense of Dushnik-Miller.

1.5. *Definition.*

$$w_c S = (W_c S)^-, w_d S = (W_c S^*)^-;$$

$$k_a S = k_c S = (K_c^- S)^{-.*}$$

1.6. Analogously, for every *binary graph* $(G; \rho)$ let

$$K_c G \text{ resp. } K_c^- G = K_a G$$

denote the first cardinal number which is not representable as a chain resp. as an antichain of the graph $(G; \rho)$ ⁴

$$\text{Let } k_c G = (K_c G)^-, k_a G = (K_a G)^-.$$

1.6. *The R-operator.* Let X be a part of an ordered set $(S; <)$. We denote by RX any *maximal antichain* of X such that $RX \supseteq R_0 X$; $R_0 X$ denotes the set of all the *initial points* of X i.e. $R_0 X = \{x \mid x \in X, X(\cdot, x) = \emptyset\}$.

Analogously, for any graph $(G; \rho)$ and $X \subseteq G$ we denote by RX any maximal antichain of X .

1.7. *Numbers NS, nS.*

For a chain C of $(S; <)$ let $S(C, \cdot)$ denote the set of all the points x of S satisfying $C < x$ i.e. $y < x$ for each $y \in C$. In particular, $S(\emptyset, \cdot) = R_0 S$. We denote by $N(S; <)$ or NS the first cardinal number $> kRS(C, \cdot)$ for each chain $C \subseteq S$. We denote by $n(S, <)$ or nS the number $(NS)^-$.

2. **Trees or ramified tables**

2.1. *Definition.* An ordered set T is said to, be a *tree* or a *ramified table*, provided for every point $x \in T$ the set $T(\cdot, x)$ is a *well ordered* subset of T . The void set \emptyset , is a tree, too.

2.2. *Definition.* Let $R_\alpha T$ be the set of all the points $x \in T$ such that the set $T(\cdot, x)$ be of order type α .

2.3. *Definition.* The first ordinal such that $R_\alpha T = \emptyset$ is called the *height* or the *rank* γT of T .

^{*}) EDITORIAL NOTE: If N is a cardinal number, then N^- denotes the maximal cardinal $< N$ if it exists; otherwise $N^- = N$.

⁴ ρ is a binary symmetric relation in the set G . If a subset of G has no pair of ρ -comparable (resp. ρ -incomparable) distinct elements, this subset is referred to as an *antichain* (resp. *chain*) of the graph $(G; \rho)$.

2.4.1. One has this disjointed partition of T in rows $R_\alpha T$ of T :

$$T = \bigcup_{\alpha} R_\alpha T, \quad (\alpha < \gamma T)$$

$$kT = \sum_{\alpha} kR_\alpha T, \quad (\alpha < \gamma T),$$

from which it follows that

$$kT \leq mT \cdot k\gamma T \text{ with } mT = \sup_{\alpha} kR_\alpha T.$$

and the more $kT \leq k_\alpha T \cdot k\gamma T$ each row being an antichain.

2.4.2. One of our hypotheses (cf. Kurepa [1]) states that

$$kT \leq k_a T \cdot k_c T$$

for every tree R . This hypothesis is equivalent to the positive answer to the *general Suslin problem*: each ordered chain C contains a set of cardinality sC which is everywhere dense in C .⁵

2.5. LEMMA. For every $\gamma' < \gamma T$ the set $R_{\gamma'} T$ is not empty; there exists at least one point x such that order type of $T(\cdot, x)$ is γ' .

2.5.1. $\gamma T = \Gamma T$.

2.6. A node of a tree T is each maximal subset in which the mapping $x \rightarrow T(\cdot, x)$ is constant. In particular, $R_0 T$ is a node of T .

2.6.1. LEMMA. For any tree T the cardinal NT or N is the first cardinal number $> kX$, X being any node of T .

2.7.1. THEOREM. For each $\alpha < \gamma T$ one has $kR_\alpha T \leq (k\alpha)^{a_\alpha}$ where k_α, a_α are cardinals satisfying $k_\alpha \leq N^-$, $a_\alpha \leq k(1 + \alpha)$. Any tree T is similar to a subset of the set $T(n; \gamma)$ of all the sequences of length $< \gamma T$ of ordinals $< \omega(n)$ ordered by \dashv relation⁶. One has $kT(n, \gamma) = \sum n^{k_\alpha}$, $(\alpha < \gamma)$.

The proof is carried out by induction.

2.7.2. THEOREM. There are two mappings $\alpha \rightarrow k_\alpha, \alpha \rightarrow a_\alpha$ of $I\gamma T$ into cardinals such that $k_\alpha \leq n$, $a_\alpha \leq k(1 + \alpha)$ and $kT \leq \sum_{\alpha} (k_\alpha)^{a_\alpha}$ $(\alpha < \gamma T)$

⁵ sC denotes the supremum of the cardinals kF , F being a disjointed system of open nonempty intervals of C .

⁶ $x \dashv y$ means: x is a proper initial part of y . Recall (see 1.7.) that $n = nT$ is defined to be $(NT)^-$ and that $\omega(n)$ is the initial ordinal of cardinality n .

The theorem is a consequence of the disjointed partition $T = \bigcup_{\alpha} R_{\alpha}T$ ($\alpha < \gamma T$) and of 2.7.1.

2.7.3. THEOREM.

$$kR_{\alpha}T \leq (nT)^{w_c T} \quad (\alpha < \gamma T) \quad \text{and} \quad kT \leq (nT)^{w_c T} w_c T;$$

in particular $kT \leq (nT)^{w_c T}$ provided $nT > 1$.

The theorem is a consequence of 2.7.2.

2.8. THEOREM. (a) Let T be a tree and $N = NT$ the first cardinal number greater than any node of T . There exist two γT -sequences of cardinals

$$k_{\alpha} \leq N^{-}, \quad a_{\alpha} \leq k(1 + \alpha), \quad a_{\alpha} < K_c \quad (\alpha < \gamma T) \quad (1)$$

such that

$$kT \leq \sum_{\alpha} (k_{\alpha})^{a_{\alpha}} \quad (\alpha < \gamma T). \quad (2)$$

If N is regular one could request, moreover, that

$$k_{\alpha} < N \quad \text{for every} \quad \alpha < \gamma T; \quad (3)$$

(b) The general continuum hypothesis implies that for any regular cardinal N there exist two mappings on IK_c :

$$x \rightarrow k_x \text{ into } IN \quad \text{and} \quad x \rightarrow a_x \text{ into } IK_c$$

such that

$$kT \leq \sum_x (k_x)^{a_x} \quad (x \in IK_c). \quad (4)$$

2.8.1. *Proof.* The coexistence of the relations (1) and (2) was proved in §2.7.1; only it remains to prove that the condition $a_{\alpha} < K_c$ might be required. Now, $\sup k\gamma' \leq k_c \leq k\gamma T$. If γ is not initial, then $k_c = k_{\gamma}$ and one could suppose $a_{\alpha} < K_c$. Let, therefore, γ be initial. If $k_c < k_{\gamma}$, then $k\gamma' \leq k_c$ thus $a_{\alpha} < K_c$. There remains the case $k_c = (k\gamma)^{-} = k\gamma$; then $k\gamma' < k_c$. Thus in any case we could demand that $a_{\alpha} < K_c$.

2.8.2. Let us prove (2) under assumptions (4) for any regular N . Let $n = N^{-}$. We have $n \leq N$. If $n < N$, it is sufficient to put $k_{\alpha} = n$, $a_{\alpha} = k(1 + \alpha)$. Therefore, let us consider the case $n = N$. One has either $kT = k\gamma T$ or $kT > k\gamma T$. In the first case it is sufficient to put $k_{\alpha} = 1$ and $a_{\alpha} = 1$ for every $\alpha < \gamma T$: the relations (1), (2) hold good. In the second case $kT > k\gamma T$ we have $kT = mT$ with $mT = \sup kR_{\alpha}T$, ($\alpha < \gamma T$). Now, either

$n \geq k\gamma T$ or $n < k\gamma T$. If $n \geq k\gamma T$ we put $k_0 = kR_0T$, $k_1 = \sum_{x \in R_0T} kR(x, \cdot)$.

Let $0 < \alpha < \gamma T$ such that the cardinals $k_{\alpha'}, a_{\alpha'}$, be defined and that

$$kR_{\alpha'}T \leq \sum (k_{\alpha'})^{\alpha'} \quad (\alpha' < \alpha) \tag{5}$$

If α is of the second kind we put

$$k_\alpha = \sup k_{\alpha'}, \quad a_\alpha = k(1 + \alpha);$$

the number $n (= N)$ being regular and $> kT$ one has $k_\alpha < n$ and obviously $kR_\alpha T \leq k_\alpha^{k(1+\alpha)}$. Let now α be of the first kind. Then the cardinal $kR_{\alpha-1}T$ is either $< n$ or $\geq n$. In the first case we put $k_\alpha = \sum kRT(x, \cdot)$, ($x \in R_{\alpha-1}T$), $a_\alpha = k(1 + \alpha)$; in the second case put $k_\alpha = k_{\alpha-1}$. In both cases the numbers k_α, a_α are determined and one sees that the equation obtained from (5) by the substitution $\alpha \rightarrow \alpha + 1$ holds.

2.8.3. Now, we shall prove that the domain of the mappings $x \rightarrow k_x$, $x \rightarrow a_x$ might be the set IK_c of cardinals $< K_c$ (instead the set $I\gamma T$ of ordinals $< \gamma T$), provided both N be regular and the general continuum hypothesis is holding.

We have to consider two alternatives, according as the number $k_c = K_c^-$ is reached or not reached.

2.8.3.1. k_c is reached i.e., there is a chain of cardinality k_c . Then $k_c = k\gamma$ or $k_c < k\gamma$. Let $k_c = k\gamma$. If $N \leq k_c$ then $k_x^{k_c} \leq k_c^{k_c} = 2^{k_c}$ and $\sum 2^{k_c} = 2^{k_c} \cdot k_c = 2^{k_c}$ i.e., (4) holds. If $N > k_c$, then $k_x < N \Rightarrow k_x^{k_c} \leq N$ and $N^{k_c} = N$ (N is regular, and the continuum hypothesis is assumed!) and $kT \leq N$ - again (4) is satisfied.

If $N^- < N$, then $N^- \geq k_c$ and $(N^-)^{k_c} \leq N$; if N^- is regular, then $(N^-)^{k_c} = N^-$ and $kT \leq N^-$ i.e., $kT = N^-$ - all right!

If N^- is singular, then $(N^-)^{k_c}$ is either N^- or N ; in both cases $kT = (N^-)^{k_c} = \sum_{T^{k_c}} (N^-)^{k_c}$.

2.8.3.2. k_c is reached and $k_c < k\gamma$; then $\text{ind } k_c + 1 = \text{ind } k\gamma$, where $\alpha = \text{ind } \aleph_\alpha$. The preceding reasoning applies in this case too.

2.8.3.3. k_c is not reached: $k_c = K_c = K_c^- = k\gamma T$ being initial. We have these alternatives: $N \leq k_c$ and $N > k_c$.

2.8.3.3.1. If $N \leq k_c$, then $k_x < k_c$ and one could take $\alpha_{\gamma'} \geq k_{\gamma'}$, thus $k_{\gamma'}^{\alpha_{\gamma'}} = 2^{\alpha_{\gamma'}}$. Therefore, $kT \leq \sum_{\gamma'} 2^{\alpha_{\gamma'}}$. Now, $\alpha_{\gamma'} < k_c$ and consequently $2^{\alpha_{\gamma'}} \leq k\gamma = \aleph_\lambda$. On the other hand one proves readily this

LEMMA. To every γ -sequence of cardinals $b_{\gamma'} < \aleph_\lambda$ corresponds a λ -sequence of cardinals $d_{\lambda'} < \aleph_\lambda$ such that

$$\sum_{\gamma'} b_{\gamma'} \leq \sum_{\lambda'} d_{\lambda'}. \tag{*}$$

As a matter of fact $cf\omega_\lambda = cf\lambda$. On the other hand the number $(*)_1$ is $\leq \aleph_\lambda$; now, the number $(*)_2$ might be \aleph_λ , although $d_{\lambda'} < \aleph_\lambda$.

2.8.3.3.2. Let us now consider the case $N > K_c$. We might suppose $k_{\gamma'} > a_{\gamma'}$ and $k_{\gamma'}$ to be regular and therefore $k_{\gamma'}^{a_{\gamma'}} = k_{\gamma'}$ (continuum hypothesis!) and finally $kT \leq N^-$.

Now, $N^- \leq N$. The relation $N^- = N$ is not possible: otherwise one would have $kT = N$ and the number $kT (= N)$ would be the sum of a γ -sequence of numbers $< N$ - absurd, N being regular. Therefore, necessarily $N^- < N$; and in this case it is sufficient to put $k = N^-$, $a_x = 1$ for any $x \in IK_c$, to convince us that relation (4) holds.

The theorem is completely proved.

2.8.4. Remark. If N is not regular, the relation (2) might be false under the assumption (3). This is shown by a tree T satisfying $\gamma T = 2$, $R_0T = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$, $kRT(a_{\omega'}, \cdot) = \aleph_{\omega'}$.

3. Ranged sets

3.1. Definition. An ordered set B is ranged provided each of its chains is well ordered.

3.1.1. LEMMA. The set R_0B of all the initial points of a ranged set is a maximal antichain of B i.e., $R_0B = RB$ (cf. § 1.6).

3.2. A tree TB associated to B (cf. Kurepa [4, §2]). Let us consider the sets

$$B(\cdot, x] \quad (x \in B).$$

The maximal chains of any of these sets form a well defined family of chains of $(B; <)$; we shall denote it by TB or more explicitly $(TB; \dashv)$ where the relation \dashv means "to be an initial segment of"; in other words if X, Y are sequences or well ordered sets then $X \dashv Y$ means that X is a beginning part of Y ; in particular $X \dashv Y$ means $X \dashv Y$ and $X \neq Y$ i.e., X is a proper initial portion⁷ of Y .

By induction argument one sees that

⁷The symbols \dashv, \dashv replace the symbols $\leq, \leq_k, <$ of some of my previous papers.

- 3.2.1. LEMMA. $R_0TB = \{a_0\}$, ($a_0 \in R_0B$)
 $R_1TB = (a_0, a_1)$, ($a_0 \in R_0B$, $a_1 \in R_0T(a_0;)$) and for every $\alpha < \Gamma B$
 $R_\alpha TB = \{X \pm (a) \mid X \in R_{\alpha-1}TB, a \in R_0B(X, \cdot)\}$ provided $\alpha \in I$
 $R_\lambda TB = \{\sup C \mid C \text{ being any maximal } \lambda\text{-chain in } \langle \bigcup_\alpha R_\alpha TB, \vdash \rangle\}$

By definition, $\sup C$ means the least sequence s such that $x = \vdash s$ for every $x \in C$.

3.2.2. $\Gamma TB = \Gamma B$

3.2.3. $k_cTB = k_cB$

3.2.4. $NTB = NB$, $nTB = nB$.

3.3. THEOREM ON RANGED SETS. For each ranged set $(B; <)$ we have $kB \leq (nB)^{k_cB} \cdot k_cB$. In particular $kB \leq (nB)^{k_cB}$ provided $nB > 1$.

The theorem is an immediate consequence of the obvious relation $kB \leq k(TB)$ and of the 2.7.3, 3.2.2, 3.3.3 and 3.2.4.

Since $nB \leq k_cB$ the theorem 3.3 implies this corollary:

3.3.1. COROLLARY. For any ranged set B one has $kB \leq (2k_\alpha B)^{k_cB}$ (cf. Kurepa [4 Lemma p. 63]).

3.3.2. THEOREM. (a) For any ranged set B there are two ΓB -sequences of cardinal numbers $k_\alpha \leq (NB)^-$, $a_\alpha \leq k(1 + \alpha)$, $a_\alpha < K_c$, ($\alpha < \Gamma B$) such that $kB \leq \sum_\alpha (k_\alpha)^{a_\alpha}$ ($\alpha < \Gamma B$). If N is regular, one could require that, moreover, $k_\alpha < NB$, ($\alpha < \Gamma B$).

(b) The general continuum hypothesis implies that for any regular N there exist two mappings on $IK_c : x \rightarrow k_x$ into IN and $x \rightarrow a_x$ into IK_c such that $kB \leq \sum (k_x)^{a_x}$, ($x \in IK_c$).

The theorem is implied by Th. 2.8 and the lemmas 3.2.2, 3.2.4.

3' G-ranged sets

Let \rightarrow be a binary antisymmetrical relation; this means that for distinct points a, b the relations $a \rightarrow b$ and $b \rightarrow a$ are not possible (the relation $a \rightarrow a$ is not excluded; the transitive property of \rightarrow is not excluded either).

3'.1. Definition. An oriented graph is any ordered pair $(S; \rightarrow)$ of a set S and antisymmetrical binary relation \rightarrow in S .

3'.2. A g -ranged set is any oriented graph $(G; \rightarrow)$ in which every nonvoid chain C has an initial element i.e., an element e such that $e \rightarrow x$ for every $x \in C$.

3'.3. For any $X \subseteq G$ let RX be a maximal antichain containing every initial point of X .

For any ranged set $(G; \rightarrow)$ and any $X \subseteq G$ the antichain RX is well determined just like for ranged sets $(B; <)$.

3'.4. *Dual g -ranged set* of (S, \rightarrow) is the structure (S, \leftarrow) where $a \leftarrow b$ means $b \rightarrow a$.

3'.5. The preceding considerations on ranged sets hold for g -ranged sets too.

4. Ordered chains

4.1. Let E be a chain and w a normal well ordering of E . Let B be the set E ordered by *superposition* of the given order in E and the well-order w . B is a ranged set and

$$K_c B \leq W_c E \quad (1)$$

$$K_a B \leq W_d E \quad (2)$$

$$\Gamma G \leq \Gamma E \quad (3)$$

Let us prove (2). Let A be any antichain in B . Now, in the well order w , the set A is well ordered; the same set A in the given chain E is inversely well ordered, – otherwise A would be no antichain in B : any couple of distinct points of A are distinctly ordered in E and w .

Since $kE = kB$ on applying the theorem 3.3 we conclude that

$$kE \leq (w_d E)^{w_c E}.$$

Analogously on considering the order $(S, >)$ instead of the order $(S; <)$ we see that $w_d(S, >) = w_c(S, <)$, $w_c(S, >) = w_d(S, <)$ and the preceding relation yields

$$kE \leq (w_c E)^{w_d E}.$$

Thus we have the following result.

4.2. THEOREM. *For every totally ordered set E we have $kE \leq a^b$ where $a = \sup\{w_c E, w_d E\}$, $b = \inf\{w_c E, w_d E\}$.*

4.2.1. COROLLARY. *For every ordered chain E we have $kE \leq 2^a$, $a = \sup\{w_c E, w_d E\}$. (Hausdorff).*

The theorem 4.2 is a strengthening of the preceding corollary. E.g. if for a chain $w_c E = 2^{\aleph_0}$, $w_d E = \aleph_0$, then the theorem yields $kE \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$; by the corollary one has weaker majorization $kE \leq 2^{2^{\aleph_0}}$.

4.3. *Remark.* As application of the theorem 3.3.2 one gets a corresponding statement for ordered chains.

4.4. *The s-number of a chain E.* For a family F of sets let SF be the first cardinal $> kD$, D being any disjointed system of sets which are elements of F . We put $sF = (SF)^-$. Thus sF is the supremum of kD , D having the same meaning. For an ordered set E we denote by SE , sE respectively the numbers SF , sF , F meaning the family of all the open intervals of E .

4.4.1. LEMMA. For any ordered chain E , $sE \geq w_c E$, $sE \geq w_d E$.

4.4.2. THEOREM. $kE \leq 2^{sE}$.

The theorem is a corollary of 4.2.1 and 4.4.1.

5. Ordered sets

5.1. Let $(E; <)$ be any ordered set (partially or totally ordered); let w mean a *normal well-order* of E . Let (B, ρ) mean the ordering of E obtained as the product of the orderings $(E, <)$ and w i.e., $x \rho y$ means that x precedes y in $(E; <)$ and in w . The set $(B; \rho)$ is ranged. By theorem 3.3 we have

$$kB \leq (nB)^{k_c B} k_c B. \tag{1}$$

Now, $k_c B \leq w_c(E, <)$; therefore

$$kB \leq (nB)^{w_c E} w_c E. \tag{2}$$

On the other hand

$$nB \leq k_a(B, \rho). \tag{3}$$

Now, let A be any antichain in $(B; \rho)$; let $(A; \sigma)$ be the order of A obtained as the product of the orders of A in $(E, >)$ and in w . The set $(A; \sigma)$ in ranged and obviously

$$\begin{aligned} K_a(A, \sigma) &\leq K_a(E, <) \text{ i.e., } k_a(A, \sigma) \leq k_a E \\ k_c(A, \sigma) &\leq k_c(E, >) = k_d(E, <) = k_d E \end{aligned} \tag{4}$$

By the theorem 3.3 we have, therefore,

$$kA \leq (k_a A)^{w_c A} \cdot w_c A \leq (k_a E)^{w_d E} w_c A \tag{5}$$

Taking here the supremum with respect to the antichain A in (A, ρ) one gets

$$k_a B = \sup kA \leq (k_a E)^{w_d E} w_d A. \quad (6)$$

and formula (2) yields

$$kB \leq [(k_a E)^{w_d E} w_d A]^{k_c B} w_c B = (k_a E)^{w_d E \cdot w_c E} (w_d E)^{w_c B}$$

i.e., (since $kB = kE$):

$$kE \leq (k_a E)^{w_c E w_d E} (w_d E)^{w_c E}. \quad (7)$$

By permuting the indices c and d , one gets another similar formula. Therefore, we have the following theorem.

5.2. THEOREM ON ORDERED SET. *Putting for any ordered set E*

$$x = \sup\{w_c E, w_d E\}, \quad y = \inf\{w_c E, w_d E\}$$

we have

$$kE \leq (k_a E)^x \cdot x^y. \quad (8)$$

5.2.1. COROLLARY. *For any chain E we have $kE \leq x^y$ (put in (8) $k_a E = 1$; cf. Theorem 4.2).*

5.2.2. COROLLARY. *For any ordered set E we have $kE \leq (2k_a E)^x$, $x = \sup\{w_c E, w_d E\}$ (cf. relation (4) in Kurepa [4]).*

As a matter of fact $x^y \leq x^x = 2^x$, and the relation (8) yields $kE \leq (k_a E)^x 2^x = (2k_a E)^x$. Q.E.D.

6. Binary symmetrical relations. Graphs

6.1. As an immediate generalization of preceding considerations on *ordered sets* one has the corresponding results for *binary graphs* $(G; \rho)$. The role of the comparability (resp. incomparability) relation in ordered sets is played now by any binary *symmetrical* relation ρ . Obviously, in this case the numbers W_c, W_d are to be replaced by the number K_c defined as the first cardinal number $> kC$, C being any ρ -chain of the graph $(G; \rho)$. Analogously, K_a or K_c^- is the least cardinal $> kA$, A being any *antichain* of the graph.

6.1.1. *Dual graph* $(G; \rho^*)$ of a graph $(G; \rho)$ is obtained from $(G; \rho)$ by permuting the connection and the disconnection relation:

$$a \rho^* b \Leftrightarrow a \text{ non } \rho b.$$

Consequently,

$$k_c(G, \rho) = k_c^-(G; \rho^*)$$

$$k_c^-(G, \rho) = k_c(G; \rho^*).$$

6.2. To every graph $(G; \rho)$ we associate a tree $(TG; \Rightarrow)$ in the following way (cf. §3.2). Let w a normal well order of the set G ; let the relation \rightarrow mean the product of the ρ -relation and of the well-order relation w i.e., $a \rightarrow b \Leftrightarrow a \rho b$ and $wa < wb$. Then for any \rightarrow -chain C we have the set

$$G(C, \cdot) = \{x | x \in G \setminus C, c \rightarrow x \text{ for every } c \in C\}$$

as well as the set $RG(C, \cdot)$ of the first points of $G(C, \cdot)$. Then to every $a \in G$ one associates a \rightarrow -chain $C(a) = C_0, C_1(a), \dots$ such that $a \in C(a)$ and $C'(a) \rightarrow a$, where $C'(a) = C(a) - \{a\}$ and that $C_\xi(a) \in RG(\{C_0(a); \dots; C_\xi(a)\}, \cdot)$. The set $C(a)$ is a maximal \rightarrow -chain of the set $G(\cdot, a]$. The length $\gamma C(a)$ of $C(a)$ is $\leq \omega(a)$, $C(a)$ being also a ρ -chain, one has necessarily $\gamma C(a) \leq \omega(k_c)$. The tree TG will be formed of the chains $C(a)$, ($a \in G$) and ordered by the relation \Rightarrow .

6.2.1. LEMMA. *The sets (G, ρ) and $(TG; \dashv)$ are connected by the relations:*

$$kG \leq kTG \tag{1}$$

$$\gamma TG \leq \omega(k_c) \tag{2}$$

$$NTG \leq K_a G \tag{3}$$

Let us prove for instance the last relation. Let C be a chain in $(TG; \Rightarrow)$; then $\bigcup_{X \in C} X = X'$ is a chain in $(G; \rightarrow)$; the set $G(X', \cdot)$ and its initial row R are well determined; R is a ρ -antichain and one sees that the elements $X' \cup \{x\}$, ($x \in R$) form the node $R(TG(C, \cdot))$ of $(TG; \dashv)$.

6.2.2. THEOREM. *For any graph $(G; \rho)$ one has $kG \leq x^y$, where $x = \sup\{k_a G, k_c G\}$, $y = \inf\{k_a G, k_c G\}$.*

As a matter of fact, 2.7.3 and 6.2.1 imply

$$kG \leq (k_a G)^{k_c G} \cdot k_c G.$$

Now, for dual graph (G, ρ^*) the analogous relation yields $kG \leq (k_c G)^{k_a G} \cdot k_a G$. And the last two formulas yield the required formula of the theorem.

6.2.3. THEOREM. Let $(G; \rho)$ be a graph of cardinality $> 2^{\aleph_\alpha}$; then G contains a ρ -chain or a ρ -antichain of cardinality $> \aleph_\alpha$.

This is a direct consequence of theorem 6.2.2.

7. On symmetrical mappings with two variables

7.1. Definition. Let $I2 = \{0, 1\}$; for any set S let S_{11}^{I2} be the set of all the ordered pairs (x, y) such that $x \in S, y \in S$ and $x \neq y$.

7.2. THEOREM. Let S be any set and f a symmetrical mapping of S_{11}^{I2} into In ,⁸ where for a given number n we denote by In the set of numbers $< n$. If $kS > 2^{\aleph_\alpha}$ and $n < \omega$, then there exists a subset X of S such that $kX > \aleph_\alpha$, and that f be constant in X_{11}^{I2} . The conclusion need not hold provided $kS \leq 2^{\aleph_\alpha}$ or provided f be nonsymmetrical, regardless of the number kS .

7.2.1. Proof. The proof will be carried out by the induction argument on n .

First step: $n = 2$. Let us denote the relation $f(a, b) = 0$ by $a \rho b$; then we have the graph $(S; \rho)$ and the wording " X is a chain (antichain) in $(S; \rho)$ " is equivalent to the wording $X_{11}^{I2} \subseteq \{f^{-1}0\}$, (resp. $\{f^{-1}1\}$). Therefore, the theorem 6.2.3 implies the theorem 7.2 for $n = 2$.

Second step: let $2 < n < \omega$ and suppose that the theorem 7.2 holds for every $n < l$. We shall prove that it holds also for $n = l$. For this, let $a \sigma b$ mean $f(a, b) = l - 1$. One gets the graph $(S; \sigma)$. We have these alternatives: *First case:* S contains a σ -chain X of cardinality $> \aleph_\alpha$; this means that the theorem holds for $n = l$. *Second case:* every σ -chain in $(S; \sigma)$ is $\leq \aleph_\alpha$. In this case, S contains necessarily an σ -antichain A of cardinality $> 2^{\aleph_\alpha}$; in the opposite case, one would have $kA \leq 2^{\aleph_\alpha}$ for every σ -antichain. In virtue of the theorem 6.2.2 one would have $kS \leq (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$, contrary to the hypothesis. Consequently, there exists a σ -antichain A of cardinality $> 2^{\aleph_\alpha}$; this means that the restriction of f contains a subset X of cardinality $> \aleph_\alpha$ such that f is constant in X_{11}^{I2} . Finally, the theorem holds for $n = l$, too. Thus it holds for each $n < \omega$.

7.2.2. On the other hand, let M_α be the set, ordered alphabetically, of ω_α -sequences of rational numbers and ω a normal well-order of M_α . If we put $f(a, b) = 0$ if and only if a precedes b and $wa < wb$, and $f(a, b) \neq 0 \Leftrightarrow f(a, b) = 1$ then f is a mapping of M_α^{I2} into $I2$ which is not constant in every square of cardinality $> \aleph_\alpha$; the cardinal number of M_α is $\aleph_0^{\aleph_\alpha}$ i.e., 2^{\aleph_α} . Thus the condition $kS > 2^{\aleph_\alpha}$ of the theorem is necessary.

⁸i.e., $f(x, y) = f(y, x)$.

7.2.3. On the other hand, let S be any set and f a mapping of S^{I^2} onto I^2 such that $f(a, b) \neq f(b, a)$ for $a \neq b$. Then f is not constant on the square X^{I^2} for each $X \subseteq S$, $kX > 1$. Thus the symmetry condition of f in the theorem is necessary.

7.2.4. *Remark.* I thought that by induction the argument of theorem 7.2 works also for I^r instead of I^2 for any integer $r > 1$. (cf. Kurepa [6], [7]; cf. also the theorems 8.3 and 8.4, 9.4, 9.5 and the remark 9.6).

8. On Symmetrical mappings

8.1. *Definition.* Let (A, B) be any ordered pair of sets and A_{11}^B or $A_{11}(B)$ the set of all the one-to-one mappings of B into A . In particular, r being any ordinal number, A_{11}^r denotes all the one-to-one r -sequences of elements of A .

By definition we put $A = A_{11}^1$.

8.2. *Definition.* Let (m, n) be any ordered pair of numbers and r any ordinal $< \omega$; we define $m_r n$ in the following way:

$$m_0 n = n, \quad m_1 n = m^n, \quad m_{x+1} = m^{m_x n}$$

For example $3_2 4 = 3^{3^4}$

8.3. MAIN THEOREM. *Let S be a set, r be a positive integer and \aleph_α be any aleph. If there exists a symmetrical mapping f of S_{11}^r into a set M of cardinality m such that for $X \subseteq S$,*

$$kfX_{11}^r = 1 \quad \text{implies} \quad kX \leq \aleph_\alpha;$$

then $kS \leq m_{r-1} \aleph_\alpha$.

The theorem is equivalent to the following theorem.

8.4. THEOREM. *For any positive integer r and set S let f be a symmetrical mapping of S_{11}^r into a set of cardinality m . If $m \leq \aleph_\alpha$ and $kS > m_{r-1} \aleph_\alpha$, there exists a subset X of S such that $kX > \aleph_\alpha$ and such that f is constant on X_{11}^r .*

Therefore, it suffices to prove theorem 8.4. The proof will be carried out by induction on r .

8.4.1. The theorem holds for $r = 1$: if a set of cardinality $> m_0 \aleph_\alpha$ ($= \aleph_\alpha$) is mapped by f into M with $kM \leq \aleph_\alpha$, then f is constant on a subset of S of cardinality $> \aleph_\alpha$. In the opposite case, we would have $k\varphi^{-1}a \leq \aleph_\alpha$

for each $a \in M$ and the relation $\bigcup_{a \in M} kf^{-1}a = S$ would imply $kM \cdot \aleph_\alpha \geq kS$ i.e., $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha \geq kS$, contrary to the hypothesis $kS > \aleph_\alpha$.

Let now e be any integer > 1 and suppose that the theorem 8.3 holds for each $r < e$; we shall prove that it holds for $r = e$ too.

8.4.2. Let

$$\dots w_0, w_1, w_2, \dots \quad (w)$$

be a 1-1 mapping of $I\omega_{(ks)}$ onto S . For every $a \in S$ we define a subsequence $C(a)$ of points $x \in S$ satisfying $\neg wx \leq \neg wa$.⁹ We put

$$C(w_0) = (w_0), C(w_1) = (w_0w_1), \dots, C(w_{e-2}) = (w_0, w_1, \dots, w_{e-2}).$$

For any other point $a \in S$ we put $a_0 = w_0, a_1 = w_1, \dots, a_{e-2} = w_{e-2}$ and define a_{e-1} as the first element x in the well-order (w) such that $f(s_{e-1}x) = f(s_{e-1}a)$, where $s_{e-1} = a_0a_1 \dots a_{e-2}$. Let α be an ordinal such that the α -sequence $a^\alpha = (a_{\alpha'})_{\alpha'}$ be defined and that each of its e -subsequences s satisfies $f(s) = f(s'a)$, where s' means the sequence s without its last term. We define then a_α as the first element $x \in S, \neg x \leq \neg wa$ in (w) such that $f(yx) = f(ya)$ for each $(e-1)$ -subsequence y of a^α .

The formation of $C(a)$ is finished when the point a becomes an element of $C(a)$.

8.4.3. Obviously $\gamma C(a) \leq \gamma wa$.

8.4.4. The mapping $a \rightarrow C(a)$ ($a \in S$) is one-to-one. First of all note that the mapping is uniform, too. As a matter of fact if x, y are distinct elements of S then either $\neg wx < \neg wy$ or $\neg wx > \neg wy$. In the first case one has $x \in C(x), y \notin C(x)$; in the second case, $x \notin C(y), y \in C(y)$; thus $C(x) \neq C(y)$.

8.4.5. Let $T = TS$ be the tree whose elements are all the initial portions of the sequences $C(a)$, ($a \in S$); we order TS by \neg .

8.4.6. Every node of T is $\leq m$ i.e., for every sequence $s = a_0a_1 \dots \dots a_{\alpha'} \dots$ the number of the sequences of the form sx satisfying $sx \in T, x \in S$ is $\leq m$. In fact, for every subsequence y of $(e-1)$ terms of s and every value $v \in M$ let $\{-f(y)v\}$ mean the set of all the x satisfying $x \in S, f(yx) = v$. For a given $v \in M$ the intersection of all these sets is well determined as well as its first element u ; u depends upon s and v i.e., $u = u(s; v)$. It might happen that for some $v \in M$ the point $u(s; v)$ does not exist; anyway the immediate followers of s in T are of the form $s, u(s; v), v$ running through M ; therefore, the number of these followers is $\leq m$. Q.E.D.

⁹The relations $w_\alpha = x, \alpha = \neg wx$ are equivalent by definition.

8.4.7. One has

$$kT \leq \sum_{\alpha} m^{k\alpha}, (\alpha < \gamma, \gamma < \sup \gamma C(a), a \in S).$$

This is an immediate consequence of 4 and 2.7.1.

8.4.8. *There exists an $a \in S$ such that $kC(a) > m_{e-2}N_{\alpha}$ ($= b$). In the opposite case, for every $a \in S$ one would have $kC(a) \leq b$ and $\gamma C(a) < \omega_{(b)+1}$ thus*

$$kT \leq \sum_{\alpha < \omega_{(b)+1}} m^{k\alpha} = N_{(b)+1} \cdot m^b = (m_{e-1}N_{\alpha})^+ \cdot m_{e-1}N_{\alpha} = m_{e-1}N_{\alpha}$$

Hence $kT \leq m_{e+1}N_{\alpha}$ which is in contradiction with $kS \leq kT$ and $kS > m_{e-1}N_{\alpha}$. This proves the relation (1).

8.4.9. Now, the definition of $C(a)$ implies that

$$f(s) = f(sa) \text{ for every } e\text{-sequence } s \text{ of } C(a). \tag{2}$$

In this way we get a determined symmetrical mapping

$$x \rightarrow f(xa) \quad (x \in C(a)_{11}^{I(e-1)}) \tag{3}$$

The relation (1) enables us to apply the induction hypothesis: the set $C(a)$ contains a subset X of cardinality $> N_{\alpha}$ such that the mapping (3) is constant in $X_{11}^{I(e-1)}$. This means, in virtue of (2) that also the mapping f is constant in X_{11}^{Ie} . Q.E.D.

8.5. *Remark on the symmetry condition.* The symmetry condition in theorem 8.3, 8.4 is needed.

In fact, let S be any set and f a mapping of S onto $I2$ such that $f(x, y) \neq f(y, x)$ for every $x, y \in S, x \neq y$. Then f is not constant on the set X_{11}^{Ie} for each $X \subseteq S, kX > 1$.

8.6. *Remark.* For $r = 2$ the condition $kS > m_1N_{\alpha}$ is needed: there exists a set S such that $kS = 2^{N_{\alpha}}$ and a symmetrical mapping of S_{11}^{I2} into $I2$ which is not constant in $X_{11}(I2)$ for each subset X of cardinality $> N_{\alpha}$.

As a matter of fact let $S = Q(\omega_{\alpha})$ be a system of all the ω_{α} -sequences of rational numbers ordered by the principle of the first differences; S is a chain, each interval of S has $kS = 2^{N_{\alpha}}$ points and every strictly increasing (decreasing) sequence in S is of cardinality $\leq N_{\alpha}$. Now, let w be a normal well ordering of S . Let then the order relation $<$ be defined in S as the

superposition (product) of the preceding two orderings of S : $a \prec b$ means that a precedes b in $(S; <)$ and in $(S; w)$. Then each chain (antichain) in $(S; \prec)$ as well-ordered (resp. a dually well-ordered) subset of $(S; <)$ is \aleph_α , although $kS = 2^{\aleph_\alpha}$ (cf. Kurepa [18]). If then $f(a, b) = 0$ means that a, b are in $(S; \prec)$ comparable relative to \prec and if $f(a, b) = 1$ means that the points a, b are incomparable relative to \prec , then we are dealing with a symmetrical mapping f of $S_{11}^{I_2}$ into I_2 and which is not constant in $X_{11}^{I_2}$ for each $X \subseteq S$ with $kS > \aleph_\alpha$.

9. On combinations

9.1. *Definition.* For any set S and any cardinal number n let $\binom{S}{n}$ denote the system of all subsets of S , of cardinality n each.

If S, M are sets, then $\binom{S}{M}$ denotes the set of all the subsets of S , of cardinality kM each.

If $n > kS$ and if $kM > kS$, one puts $\binom{S}{n} = \emptyset = \binom{S}{M}$. Any mapping f of $\binom{S}{n}$ is a symmetrical mapping of $S_{11}(B)$, where $kB = n$.¹⁰

Therefore the results of § 7 and 8 imply the following statements.

9.2. **THEOREM.** *Let \aleph_α be given. In order that for each mapping f of $\binom{S}{2}$ into M of cardinality $\leq \aleph_\alpha$ there exists a subset X of S such that $kX > \aleph_\alpha$ and that f be constant in $\binom{X}{2}$ it is necessary and sufficient that $kS > 2^{\aleph_\alpha}$ (cf. § 7).*

9.3. **THEOREM.** *Let \aleph_α be given. In order that for each partition P of $\binom{S}{2}$ into m classes there exists a subset X of S of cardinality $> \aleph_\alpha$ and such that $\binom{X}{2}$ be entirely contained in one class of the partition, it is necessary and sufficient that $kS > 2^{\aleph_\alpha}$.*

The statement 9.3. is equivalent to the statement 9.2. as it is visible from the correspondence $fx = A \Leftrightarrow x \in A \in P$, ($x \in \binom{S}{2}$). One gets in this way a mapping of $\binom{S}{2}$ into the set P which takes now the role of the set M in statement 9.2.

9.4. **THEOREM.** *Let S, r, \aleph_α be any set, any positive integer and any aleph, respectively; if there exists a mapping f of $\binom{S}{r}$ into a set M of cardinality m such that for every $X \subseteq S$,*

$$kf \binom{X}{r} = 1 \text{ implies } kX \leq \aleph_\alpha,$$

¹⁰A mapping f of $S_{11}(B)$ is symmetrical provided $fg = fbg$ ($g \in S_{11}(B)$, $b \in B!$); $B!$ denotes the set of all the permutations of B .

then $kS \leq m_{r-1}S$.

The theorem 9.4 is a special case of the theorem 8.3.

9.5. THEOREM. For any set S , any cardinal number \aleph_α , any positive integer r and any f mapping $\binom{S}{r}$ into a set M of cardinality $m \leq \aleph_\alpha$; if $kS > m_{r-1}\aleph_\alpha$, (where $m_0\aleph_\alpha = \aleph_\alpha$, $m_1\aleph_\alpha = m^{\aleph_\alpha}$, $m_{x+1} = m^{m_x\aleph_\alpha}$) then there exists a subset X of S such that $kX > \aleph_\alpha$ and such that f is constant on $\binom{X}{r}$.

The theorem is an immediate consequence of § 7.5.

Remark. The converse of the theorem 9.4 holds too for $r = 1, 2$ (cf. § 8.6).¹¹

10. Problems

10.1. PROBLEM. Let \aleph_α be given. Does there exist a cardinal number $R(\aleph_\alpha)$ such that for every set S and for every mapping f of $\binom{S}{\aleph_\alpha}$ into I_2 the relation $kS > R(\aleph_\alpha)$ implies the existence of a set X in S , such that f is constant on $\binom{X}{\aleph_\alpha}$.

10.2. PROBLEM. Let m, \aleph_α be given cardinals. Let S be any set and f any mapping of $\binom{S}{\aleph_\alpha}$ into I_2 ; if every set $X \subseteq S$ such that f is constant on $\binom{S}{\aleph_\alpha}$ is of cardinality $\leq m$, determine $\sup kS$.

10.3. GENERAL PROBLEM. Let a, m, c be given numbers (each finite or infinite); let us consider any set S , the set $\binom{S}{a}$ and any mapping f of $\binom{S}{a}$ into a set M of cardinality $\leq m$. Does there exist - and determine it - a number $R = R(a, m, c)$ such that the relation $kS > R$ implies that for any mapping f of $\binom{S}{a}$ into M there exist a subset X of S of cardinality $> c$ such that f is constant on $\binom{X}{a}$? For example, $R(2, 2, \aleph_\alpha) = 2^{\aleph_\alpha}$ and $R(2, n, \aleph_\alpha) = 2^{\aleph_\alpha}$ for each $1 < n \leq \aleph_0$. We thought that $R(a, n, \aleph_\alpha) = 2^{\aleph_\alpha}$ for any finite $a > 1$ (cf. Kurepa [6], [7]); which resulted into a delay of publication of this paper since 1952.

BIBLIOGRAPHY

B. Dushnik, E.W. Miller, [1] *Partially ordered sets*, Amer. J. Anal. Math. **63** (1941), 600-610.

P. Erdős, *Some set-theoretical properties of graphs*, Rev. Univ. Tucuman Ser. A **3** (1942), 363-367.

¹¹I was told by P Erdős, that the converse of this was recently (1959) proved by Hajnal for each positive integer r .

-
- P. Erdős, R. Rado, *A partition calculus in set theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **62** (1956), 427–489.
- Đuro Kurepa, [1] *Ensembles ordonnés et ramifiés*, Thèse, Paris (1935), (Publ. Math. Univ. Beograd **4** (1935), 1–138).
- [2] *Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés*, C.R. Acad. Sci. Paris **205** (1937), 1033–1035.
- [3] *L'hypothèse du continu et les ensembles partiellement ordonnés*, Ibidem, 1196–1198.
- [4] *Sur la puissance des ensembles partiellement ordonnés*, C. R. Soc. Sci. Varsovia Ci. Math. **32** (1939), 61–67.
- [5] *Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés*, Rev. Cienc. Lima **437**, año 42 (1940), 827–846; año 43 (1941), 483–500.
- [6] *On binary symmetrical relations or graphs*, Dissertationes, Slov. Acad. Sci. Ljubljana **4** (1953), 67–92.
- [7] *On symmetrical binary relations*, Bull. Sci. Yougoslavie **2** (1954), 9.
- [8] *On regressive function*, Z. Math. Logik Grund. Math. **4** (1958), 148–156.
- [9] *On two problems concerning ordered sets*, Glasnik Mat.- Fiz. Astr. **13** (1958), 229–234.
- W. Sierpinski, [1] *Sur un problème de la théorie des relations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Sci. Mat. Fis. Pisa Ser. II **2** (1933), 285.
- F.P. Ramsey, [1] *Collected Papers*, London (1932) resp. 1950, 18+292.
- P. Turan, [1] *On the theory of graphs*, Colloq. Math. **3** (1955), 19–30.
- K. Zarankiewicz, [1] *Sur les relations symétriques dans l'ensemble fini*, Colloq. Math. **1** (1947), 10–14.

D. AXIOMATIC SET THEORY

- D[36] *L'hypothèse de ramification*, C.R. Acad. Sci. Paris **202** (1936), 185–187.
- D[52] *Sur la relation d'inclusion et l'axiome de choix de Zermelo*, Bull. Soc. Math. France **80** (1952), 225–232.
- D[53] *Über das Auswahlaxiom*, Math. Ann. **126** (1953), 381–384.
- D[53a] *Sur une hypothèse de la théorie des ensembles*, C.R. Acad. Sci. Paris **236** (1953), 564–565.
- D[53b] *Sur un principe de la théorie des espaces abstraits*, C.R. Acad. Sci. Paris **236** (1953), 655–657.
- D[58] *Ein Lemma über Transformationen*, Math. Nachr. **19** (1958), 186–189.
- D[59] *General continuum hypothesis and ramifications*, Fund. Math. **37** (1959), 29–33.

Kurepa's work on the Axiom of Choice is contained mainly in D[52] (and D[53]) where he considered maximality principles associated with several binary relations among sets such as the overlap relation ($x \setminus y \neq \emptyset$ & $y \setminus x \neq \emptyset$ & $x \cap y \neq \emptyset$), non-overlap relation ($x \setminus y = \emptyset$ or $y \setminus x = \emptyset$ or $x \cap y = \emptyset$), and non-disjointness ($x \cap y \neq \emptyset$). He showed that all three of the corresponding maximality principles are equivalent to AC. However, he also considered what is today known under the name of *Kurepa's Principle*, the maximality principle associated to the incomparability relation ($x \not\subseteq y$ and $y \not\subseteq x$) and showed, in ZF^0 , that AC is equivalent to the join of KP and OP, the Ordering Principle which states that every set can be linearly ordered. (Here ZF^0 is the Zermelo–Fraenkel axiomatic system without the Foundation Axiom). Thus, Kurepa's Principle can serve as an elegant supplement to the Ordering Principle which itself is not strong enough to imply the full Axiom of Choice, as shown by A. Mostowski [9]. Kurepa asked in many occasions whether KP is, in fact, equivalent to AC. In [2], U. Felgner showed that in full ZF, KP and AC are indeed equivalent. On the other hand, J. D. Halpern [4] (see also [3]) showed that in ZF^0 alone KP does not imply AC. Kurepa's Principles are further studied in [10] (see also [8]).

Kurepa's first serious mathematical encounter with the Continuum Hypothesis happened during the course of his study of well-founded posets E ("ensemble partiellement bien ordonnés"; see [7] for an interesting historical discussion of this

subject) which do not have uncountable chains nor antichains. Namely, by considering the rank-decompositions of such posets

$$E = \bigcup_{\xi < \alpha} R_\xi E, \quad \alpha = \gamma E$$

he noticed that he can provide a bound on the cardinality of E only under the assumption:

(1) $R_\xi E$ is finite for every $\xi < \gamma E$.

(In fact, he proved that E is countable in this case; see C[37; V] or A[48a].) But in the general case he remarked that he could not even prove that $|E|$ is of the form $\aleph_{\alpha+1}$ or that it cannot be a (weakly) inaccessible cardinal. Since he has proved (C[37]) that $|E| \leq \mathfrak{c}$, the presence of the Continuum Problem in this subject became apparent together with its unprovability. In fact, he was quite explicit about the possibility of the continuum being any cardinal of cofinality $\neq \omega$ and, in particular, about the possibilities of the continuum being equal to \aleph_1 , \aleph_{ω_1} , or the first inaccessible cardinal (see D[53b; footnote 8]). (Compare this with the post-Cohen discussion of the Continuum Hypothesis [1].) He was also interested in the Sierpinski-style work on CH i.e., in providing interesting equivalents of CH as the papers D[58] and D[59] show.

Kurepa was also a rich source of various "Hypotheses" one of which, KH, has been already discussed in the Part A. Already in his "Thèse" A[35] he listed twelve such "Postulates" all equivalent to his own version of the general Souslin problem:

(P₅) Every linear ordering E has a family of size $d(E)$ of pairwise disjoint intervals.

The first on the list, his favored one, is the *Ramification Hypothesis*,

(P₁) Every tree T contains a "degenerate" subtree of the maximal possible size.

(D is "degenerate" if for every d in D the set of all points of D comparable to d forms a chain of D .) Another elegant "Principle" is the *Reduction Principle*:

(P₂) Every infinite tree is equinumerous with one of its chains or antichains.

He expressed as early as A[35] or D[36] the conjecture that these statements are indeed postulates independent of the usual axioms of set theory (see also D[53b; 2]). The work of Tennenbaum [12], Jech [5], Jensen [6] and Solovay-Tennenbaum [11] showed that the most important special case of (P₂), the Souslin Hypothesis, is indeed independent of ZFC. But Kurepa's Ramification Hypothesis and especially its variants in D[53a] and D[53b] are still wide open.

REFERENCES

- [1] P.J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, W.A. Benjamin, New York, 1966.
- [2] U. Felgner, *Die Existenz wohlgeordneter, Konfinaler Teilmengen in Ketten und das Auswahlaxiom*, Math. Zeitschr. 111 (1969), 221-232.
- [3] —————, *Models of ZF Set Theory*, Springer-Verlag, 1971.
- [4] J. D. Halpern, *Ph. D. Thesis*, Berkeley, 1962.
- [5] T. J. Jech, *Nonprovability of Souslin's Hypothesis* Comment. Math. Univ. Carolinae 8 (1967), 291-305.
- [6] R. B. Jensen, *Souslin's Hypothesis is incompatible with $V = L$* , Notices Amer. Math. Soc. 15 (1968), 935.
- [7] J. B. Kruskal, *The theory of well-quasi ordering: A frequently discovered concept*, J. Combinatorial Theory 13 (1972), 297-305.
- [8] G. H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice*, Springer-Verlag, 1982.
- [9] A. Mostowski, *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, Fund. Math. 32 (1939), 201-252.
- [10] H. Rubin and J. Rubin, *Equivalents of the Axiom of Choice*, North-Holland, Amsterdam, 1963.
- [11] R. M. Solovay and S. Tennenbaum, *Iterated Cohen extensions and Souslin's problem*, Ann. of Math. 94 (1971), 201-245.
- [12] S. Tennenbaum, *Souslin's problem*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 59 (1968), 60-63.

L'HYPOTHÈSE DE RAMIFICATION

Le but de cette Note est, tout d'abord, de mettre au point quelques résultats antérieurs, puis de simplifier quelques définitions que nous avons données ailleurs¹.

1. En désignant par $<$ une relation d'ordre quelconque (c'est-à-dire une relation binaire, antisymétrique et transitive) *tout ensemble E peut être considéré comme partiellement ordonné* (ou *semi-ordonné*) *par rapport à la relation $<$* , en indiquant par $a||b$ que a, b sont deux points distincts de E tels qu'on n'a pas $a < b$ ni $b < a$. Si $a||b$ (donc aussi $b||a$), on dira que a, b sont *incomparables* par rapport à $<$ ²; si l'on n'a pas $a||b$, c'est-à-dire si: ou bien $a \equiv b$ ou bien $a < b$ ou bien $b < a$, on dit que a, b sont *comparables*. Si E ne contient aucun couple de points distincts *comparables* (*incomparables*), E sera dit *disjonctif* (*ordonné ou monotone*)³. En particulier, si E a un point au plus, il sera considéré comme ordonné, bien ordonné et disjonctif. Si tout sous-ensemble *ordonné* de E est bien ordonné, E sera dit *partiellement bien ordonné*⁴.

2. E sera dit un *tableau* (*ensemble*) *ramifié* si, quel que soit le point a de E , l'ensemble de tous les points de E *précédant* a est *bien ordonné*

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. C.R. Acad. Sci. Paris 202 (1936), 185-187. Séance du 20 janvier 1936. Note présentée par M. Émil Borel

¹Voir: *Ensembles ordonnés et ramifiés*, Thèse, Paris, 1935; Publ. Math. Univ. Belgrade 4 (1935), 1-138.

²Sans craindre aucune ambiguïté, nous supprimerons, par la suite, la phrase "par rapport à $<$ ".

³Noter que E peut être ordonné par rapport à une relation d'ordre et disjonctif par rapport à une autre relation d'ordre.

⁴La théorie d'ensembles partiellement ordonnés s'impose d'elle-même dans le but d'avoir une théorie unique des nombres cardinaux et des types d'ordre (G. Cantor), des types de dimension (M. Fréchet), des types de continuité (W. Sierpinski), etc. (cf. aussi F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1914, p.139). *Il importe de savoir définir, d'une façon naturelle, l'opération de dérivation des sous-ensembles de E* . Nous tâcherons de le faire dans un autre travail [cf. loc. cit. (1^{re} note), 8, A.7]

(ordonné)⁵. E sera dit *dégénéré* si, pour tout point a de E , l'ensemble de tous les points de E comparables à a est ordonné. Par conséquent, E est un tableau ramifié dégénéré s'il est dégénéré et tableau ramifié. L'ensemble vide sera considéré comme un tableau dégénéré.

Les notions de: sous-ensembles ramifiés, de sous-tableaux ramifiés dégénérés, de sous-tableaux disjonctifs de E , etc., s'entendront d'elles-mêmes.

3. T étant un tableau ramifié, désignons par bT la borne supérieure des puissances pU , U parcourant la classe des sous-tableaux ramifiés dégénérés de T . Nous formulerons alors:

L'HYPOTHÈSE DE RAMIFICATION: *Quel que soit le tableau ramifié T , la borne supérieure bT est atteinte dans T , c'est-à-dire qu'il existe un sous-tableau dégénéré de T ayant la puissance bT .*

On démontre que l'hypothèse précédente est équivalente à celle-ci: Soit A un arbre généalogique quelconque⁶ vérifiant ces deux conditions: quel que soit l'élément a de A , 1° A contient au moins trois éléments distincts ayant les mêmes prédécesseurs que a ; 2° dans chaque génération de A , sauf dans celle à laquelle appartient a , il y a un élément en parenté directe avec a ; alors, on peut choisir de chaque génération de A un seul élément et cela de manière que les éléments ainsi obtenus soient deux à deux en parenté collatérale [cf. la notion descente disjonctive, [loc. cit. (1^{re} note), p. 93 et 136].

L'hypothèse de ramification est équivalente à chacune des trois propositions suivantes:

α . Le théorème inséré dans la Note des C. R. Acad. Sci. Paris 198 (1934), p. 882;

β . Le "théorème fondamental" inséré dans la Note des C. R. Acad. Sci. Paris 199, (1934) p. 112;

γ . Tout tableau infini a même puissance que l'un de ses sous-tableaux dégénérés⁷.

Voici une conséquence immédiate de l'hypothèse de ramification: *tout tableau infini non dénombrable contient un sous-tableau infini dégénéré non*

⁵Au lieu de: ensemble ramifié et tableau ramifié, on pourrait dire aussi: ensemble rangé et bien rangé, respectivement.

⁶Toutefois, on convient que A est composé d'individus d'un seul sexe de telle sorte que la relation être époux n'y existe pas.

⁷Comparer l'énoncé (8) à la définition de R. Dedekind des ensembles infinis.

dénombrable proposition que nous ne savons ni prouver ni réfuter⁸, et qui est équivalente à l'hypothèse que la réponse au problème bien connu de Souslin est affirmative [loc. cit. (1^{re} note), p. 124].

4. Remarquons que l'hypothèse de ramification est dans une certaine correspondance avec l'hypothèse de Cantor, et il semble qu'aucune d'elles n'est réductible aux axiomes courants de la théorie des ensembles. En particulier, il nous semble que l'hypothèse de M. Lusin⁹ est incompatible avec l'hypothèse de ramification de même qu'elle est incompatible avec l'hypothèse de Cantor [cf. aussi loc. cit. (1^{re} note), p. 135].

⁸Il en est de même de ce cas particulier: chaque famille infinie non dénombrable F d'ensembles bien ordonnés de nombres rationnels contient une sous-famille infinie non dénombrable f dont aucun élément n'est une partie initiale d'aucun autre élément de f .

⁹Fund. Math. 25, (1935) p. 109-131.

SUR LA RELATION D'INCLUSION ET L'AXIOME DE CHOIX DE ZERMELO

On connaît plusieurs propositions dont chacune est équivalente à l'axiome

$$(0.1) \quad Z$$

de choix de Zermelo; telles sont, par exemple, le lemme de Zorn (voir Bourbaki [1, p. 37]; Birkhoff [2, p. 42]; Witt [6]), l'existence d'une chaîne maximale dans chaque ensemble ordonné (voir Birkhoff [2, p. 42]), l'existence d'une chaîne maximale dans chaque famille F d'ensembles ordonnée par rapport à \subseteq , l'existence d'une famille disjonctive maximale dans chaque $(F; \subseteq)$ (voir Vaught [5]), etc. Dans ce qui suit nous considérerons en particulier la relation d'inclusion \subseteq et quelques relations se rattachant à \subseteq : nous prouverons quelques propositions nouvelles équivalentes à Z en donnant une solution partielle d'un problème (cf. le problème général 4.2 ci-après) dont la considération est, nous semble-t-il, intéressante au point de vue logique.

Notations. Dans ce qui suit

$$(0.2) \quad v, F$$

désigneront respectivement l'ensemble vide (le vacuum) et une famille infinie quelconque d'ensembles non vides quelconques. Si au début d'une formule on a affaire au symbole (F) , il faut le lire "*quelle que soit F* " ou "*pour chaque F* ", F ayant, bien entendu, la signification de tout à l'heure.

1. Les relations K, D, I de comparabilité, de disjonction et d'empiétement, entre ensembles. Pour deux ensembles non vides A, B , l'un et seulement l'un des trois cas que voici se présente:

K. A et B sont comparables: $A \subseteq B$ ou $B \supseteq A$, ce que l'on peut désigner par AKB ;

D. A et B sont disjoints: $A \cap B = v$, ce que nous désignerons par ADB ;

I. A et B sont empiétants: $A \setminus B \neq v \neq B \setminus A$, ce qu'on peut désigner par AIB .

2. Les propositions KF, DF, IF . Si ρ désigne l'une des relations K, D, I , c'est-à-dire si $\rho \in \{K, D, I\}$, l'on peut considérer la proposition ρF que voici, F ayant la signification (0.2):

PROPOSITION ρF OU $\rho(F)$. *F contient une sous-famille maximale, soit F_ρ , dont les éléments distincts sont en relation ρ*

$$A, B \in F_\rho, \quad A \neq B \Rightarrow A\rho B.$$

Que F_ρ soit maximale, cela signifie que dans $F \setminus F_\rho$ il n'y ait aucun élément en relation ρ avec chaque élément de F_ρ .

Remarque. Si F ne contient aucun couple d'éléments distincts en relation ρ , cela signifie que quel que soit $A \in F$ la famille $\{A\}$ joue le rôle de F_ρ . Ainsi, on a les propositions KF, DF, IF .

Manifestement,

$$(2.1) \quad Z \Rightarrow (F)(\rho F) \quad (\rho = K, D, J),$$

(F) signifiant "quelle que soit F ", F ayant la signification de (0.2). Autrement dit, quelles que soient la relation $\rho \in \{D, I, K\}$ et la famille F , l'axiome Z de Zermelo entraîne l'existence d'une sous-famille maximale $F_\rho \subseteq F$ dont les éléments distincts sont en relation ρ . Par ailleurs, nous venons de mentionner que

$$(2.2) \quad (F)(KF) \Rightarrow Z \quad (\text{cf. Birkhoff [1, p. 42]}),$$

$$(2.3) \quad (F)(DF) \Rightarrow Z \quad (\text{cf. Vaught [5]}).$$

Nous prouverons qu'on a aussi le

THÉORÈME 2.1:

$$(2.4) \quad (F)(IF) \Rightarrow Z.$$

En conséquence, les propositions

$$(2.5_1) \quad Z, (F)(KF), (F)(DF), (F)(IF).$$

sont deux à deux équivalentes.

Pour prouver (2.4), il suffit d'après (2.3), de prouver l'équivalence

$$(2.5_2) \quad (F)(DF) \Leftrightarrow (F)(IF).$$

Tout d'abord, $(2.5_1) \Rightarrow (2.5_2)$, c'est-à-dire le premier membre de (2.5) en implique le second. En effet, faisons correspondre (cf. Marczewski [3, §3]) à chaque $X \in F$ la famille $N(X)$ ayant comme ses éléments: l'ensemble X et les

$$(2.6) \quad \{X, X'\} (X' \in F, X' \text{ non } IX).^1$$

NF désignant la famille des

$$(2.7) \quad N(X), (X \in F),$$

la transformation (2.7) est une correspondance biunivoque entre F et NF . C'est que $X \in N(X)$ et $X \notin N(Y)$ si $X \neq Y \in F$. Pour la même raison, les éléments de NF sont ou bien disjoints ou bien empiétants. En particulier, si pour deux éléments $X, Y \in F$, on a $N(X) \cap N(Y) = \nu$, on n'a pas d'après (2.6) X non IY ; par conséquent, on a XIY . Autrement dit Φ étant une famille disjonctive $\subseteq NF$, les éléments $N^{-1}(A)$ ($A \in \Phi$) sont deux à deux en relation I ; en particulier, à une sous-famille *disjonctive maximale* de NF correspond ainsi une sous-famille *empiétante maximale* de la famille considérée F .

D'autre part, prouvons la conclusion inverse $(2.5_2) \Rightarrow (2.5_1)$. Pour cela, considérons la transformation

$$(2.8) \quad E(X) (X \in F).$$

$E(X)$ désignant pour chaque $X \in F$ la famille composée de X et des familles

$$\{X, X'\}, (X' \in F, X' \text{ non } IX).$$

¹Bien entendu, $\{X, X'\}$ se compose de X et X' comme ses éléments uniques; en conséquence, X' parcourant F de manière que $X' \text{ non } IX$, on aura $\{X, X'\} \in N(X) \setminus \{X\}$ et *vice versa*.

Comme tout à l'heure, on prouve que (2.8) est une application biunivoque entre F et l'ensemble EF des $E(X)$, X parcourant F . En particulier, si $X, X' \in F$, alors

$$(2.9) \quad XDX' \equiv E(X)IE(X').$$

Par conséquent, la famille EF contenant une sous-famille empiétante maximale, soit F_0 , la famille $E^{-1}F_0$ des $E^{-1}Y$ ($Y \in F_0$) est une sous-famille disjonctive maximale de F . c.q.f.d.

3. Relations $\bar{D}, \bar{I}, \bar{K}$ de non-comparabilité, de non-disjonction, de non-empiètement. Propositions $\bar{D}F, \bar{I}F, \bar{K}F$. Les relations $\bar{D}, \bar{I}, \bar{K}$ respectivement les négations de K, D, I sont donc définies par les égalités suivantes:

$$(3.1) \quad A\bar{K}B \equiv (\text{ni } A \subseteq B, \text{ ni } B \subseteq A),$$

$$(3.2) \quad A\bar{D}B \equiv A \cap B \neq \nu,$$

$$(3.3) \quad A\bar{I}B \equiv \text{non } (AIB) \equiv ADB \text{ soit } AKB.$$

On peut alors considérer les propositions

$$(3.4) \quad \bar{D}F, \bar{I}F, \bar{K}F,$$

aussi bien que les propositions

$$(3.5) \quad (F)(\bar{D}F), (F)(\bar{I}F), (F)(\bar{K}F),$$

lesquelles évidemment résultent de l'axiome Z .

THÉORÈME 3.1. *Alors que chacune des propositions $(F)(\bar{D}F)$; $(F)(\bar{I}F)$ est équivalente à l'axiome Z de Zermelo, nous ne savons pas s'il en est encore ainsi de $(F)(\bar{K}F)$. Toutefois, on a*

$$(3.6) \quad (V) \cap (F)(\bar{K}F) \equiv Z,^2$$

(V) ou V désignant la proposition suivante:

PROPOSITION (V). *Chaque ensemble peut être totalement ordonné.*³

²C'est-à-dire Z est équivalent à ce que subsistent à la fois (V) et $\bar{K}F$ pour chaque F .

³D'après Mostowski [4], on n'a pas (V) $\Rightarrow Z$.

COROLLAIRE 3.1. *Chacune des propositions $(F)(\overline{D}F)$, $(F)(\overline{I}F)$ entraîne (en passant par Z , par exemple) la proposition $(F)(\overline{K}F)$.*

Notation. Φ étant une famille non vide de propositions, l'intersection (le produit) des propositions $\varphi \in \Phi$, c'est la proposition

$$(3.7) \quad \bigcap_{\varphi \in \Phi} \varphi$$

subsistant si et seulement si chaque proposition $\varphi \in \Phi$ subsiste. D'une manière duale, on définit l'union (la somme)

$$(3.8) \quad \bigcup_{\varphi \in \Phi} \varphi$$

subsistant si et seulement si au moins une proposition $\varphi \in \Phi$ subsiste. En particulier, φ, ψ étant deux propositions, les propositions

$$(3.9) \quad \varphi \cap \psi, \quad \varphi \cup \psi$$

s'entendent d'elles-mêmes. Par exemple,

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \overline{K} &= D \cup I, & \overline{D} &= I \cup K, & \overline{I} &= K \cup D \\ K &= \overline{D} \cap \overline{I}, & D &= \overline{I} \cap \overline{K}, & I &= \overline{K} \cap \overline{D}. \end{aligned}$$

3.1. Tout d'abord,

$$(3.1.1) \quad Z \Leftrightarrow (F)(\overline{D}F).$$

Pour cela, il suffit, d'après l'implication (2.3) de Vaught, de prouver que

$$(3.1.2) \quad (F)(\overline{D}F) \Leftrightarrow (F)(DF).$$

Or, l'équivalence (3.1.2) résulte d'un théorème de Marczewski [3, §5], d'après lequel les relations D, \overline{D} sont isomorphes. En effet, en considérant la transformation E définie par (2.8), on a affaire à une transformation biunivoque entre F et EF et ne jouissant de la propriété que pour $A, B \in F$, la relation ADB subsiste si et seulement si $E(A)\overline{D}E(B)$. Ceci étant, prouvons $(3.1.2)_1 \Rightarrow (3.1.2)_2$; la famille EF contenant, d'après $(3.1.2)_1$, une famille maximale antidisjonctive, soit $\Phi, E^{-1}\Phi$ sera une famille maximale disjonctive de F , ce qui prouve que $(F)(DF)$ subsiste. D'une façon analogue, en

permutant les mots "antidisjonctive" et "disjonctive", on arrive à la conclusion $(3.1.2)_2 \Rightarrow (3.1.2)_1$.

3.2. Prouvons l'implication

$$(3.2.1) \quad (F)(\overline{DF}) \Rightarrow (F)(\overline{IF}).$$

Pour cela, il suffit de considérer la transformation (2.7); à une famille maximale $\Phi \subseteq NF$ d'éléments deux à deux non disjoints correspond ainsi la famille $N^{-1}\Phi$ maximale d'éléments non empiétant extraits de F .

Réciproquement,

$$(3.2.2) \quad (F)(\overline{IF}) \Rightarrow (F)(\overline{DF}).$$

La démonstration en est analogue à celle de 3.2.1

Les relations (2.3) de Vaught, (3.1.2), (3.2.1) et (3.2.2) impliquent ceci:

$$(3.2.3) \quad Z \Rightarrow (F)(DF) \Rightarrow (F)(\overline{DF}) \Rightarrow (F)(\overline{IF}).$$

3.3. Pour achever la démonstration du théorème 3.1 il nous reste à prouver que

$$(3.3.1) \quad (V) \cap (F)(\overline{KF}) \Rightarrow Z.$$

LEMME 3.3.1. *La proposition $(F)(\overline{KF})$ entraîne la proposition (\overline{K}) que voici:*

PROPOSITION (\overline{K}) . *Chaque ensemble ordonné $(M; \leq)$ contient une antichaine maximale (antichaine veut dire: ordonné sans points distincts comparables).*

En effet, F désignant la famille des

$$(3.3.2) \quad (-\infty, x]_M \quad (x \in M),$$

$(-\infty, x]_M$ étant l'ensemble des $x' \in M$ vérifiant $x' \leq x$, on voit que les ensembles ordonnés $(M; \leq)$, $(F; \subseteq)$ sont isomorphes, la transformation (3.3.2) en étant une similitude; en particulier, chaque famille maximale de F avec des éléments, non comparables - dont l'existence est assurée par \overline{KF} - provient d'un sous-ensemble de $(M; \leq)$, lequel est une antichaine maximale dans $(M; \leq)$ comme étant isomorphe d'une antichaine maximale de $(F; \subseteq)$; le lemme (3.3.1) est ainsi prouvé.

Or,

$$(3.3.3) \quad (V) \cap (\overline{K}) \Rightarrow Z.$$

En effet, soit F une famille non vide quelconque d'ensembles non vides; il s'agit de prouver l'existence d'un sous-ensemble

$$E \subseteq \bigcup_X X \quad (X \in F)$$

tel que E contienne un et seulement un point de chaque $X \in F$. Tout d'abord, à la suite de l'hypothèse (V), chaque $X \in F$ peut être considéré comme une chaîne, mettons $(X; \leq_X)$; soit alors fX l'ensemble des paires ordonnées

$$(3.3.4) \quad (X, a) \quad (a \in X);$$

l'ensemble fX sera ordonné par le principe de première différence: si $a, b \in X$, alors

$$(X; a) \leq (X; b) \text{ dans } fX \iff a \leq_X b \text{ dans } X.$$

Ceci étant, soit

$$F_0 = \bigcup_X fX \quad (X \in F);$$

ordonnons F_0 par \leq de manière que, pour $(X; a), (X'; a') \in F_0$, l'on ait

$$(X; a) \leq (X'; a') \text{ dans } F \iff a, a' \in X = X', \quad a \leq a' \text{ dans } X.$$

Évidemment, l'ensemble $(F_0; \leq)$ est ordonné et l'on voit que chaque fX en est une chaîne maximale. Or, d'après la proposition (\overline{K}) l'ensemble ordonné $(F_0; \leq)$ contient une antichaîne maximale, soit \overline{L} ; d'autre part, pour aucun $X \in F$, l'ensemble

$$(3.3.5) \quad L \cap f(X)$$

n'est vide; l'ensemble (3.3.5) étant à la fois une chaîne et une antichaîne en tant qu'appartenant à fX et à \overline{L} respectivement, l'ensemble (3.3.5) est monopointuel; à cause de la forme (3.3.4) des éléments de fX on en conclut que l'unique point de (3.3.5) est de la forme

$$(3.3.6) \quad (X; \varphi(X))$$

$\varphi(X)$ désignant le point unique de X tel que $(3.3.6) \in (3.3.5)$. En désignant, enfin, par E l'ensemble des $\varphi(X) (X \in F)$, on voit bien que E est l'ensemble demandé, étant donné qu'il contient un et un seul point de chaque $X \in F$, à savoir le point $\varphi(X)$.

3.4. Remarque sur les relations D, I et K . A propos du comportement précédent des relations D, I, K , il y a intérêt à signaler ceci. D'une part, les relations D, I sont des relations binaires symétriques les plus générales dans le sens que, pour $\alpha \in \{D, I\}$, quelle que soit la relation binaire symétrique ρ définie dans un ensemble E , il y a une transformation φ_α faisant correspondre à tout $x \in E$ un ensemble non vide $\varphi_\alpha(x)$ telle que l'on ait l'équivalence

$$x, y \in E, x \neq y, x\rho y \Rightarrow \varphi_\alpha(x)\alpha\varphi_\alpha(y)$$

(voir Marczewski [3, §2 et 5]).

D'autre part, la proposition analogue pour la relation K ne subsiste pas. En effet, soit $(S; \leq)$ un ensemble ordonné; si pour $x, y \in S, x \parallel y$ signifie qu'on n'ait ni $x \leq y$, ni $x \geq y$, on a la relation symétrique \parallel dans E ; si alors, il existait une transformation φ faisant correspondre à tout $x \in S$ un ensemble non vide $\varphi(x)$ tel que l'on ait

$$x, y \in S, x \parallel y \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y), \varphi(x)K\varphi(y),$$

on en déduirait une extension totale d'ordre $(S; \leq)$ par la relation \leq_1 signifiant

$$x \leq_1 y \Rightarrow (x \leq y) \cup (\varphi(x) \subset \varphi(y)).$$

De même, si l'on définit \leq_2 de manière que

$$x \leq_2 y \Rightarrow (x \leq y) \cup (\varphi(x) \supset \varphi(y)),$$

l'ensemble $(S; \leq_2)$ est totalement ordonné; la superposition des ordonnances $(S; \leq_1), (S; \leq_2)$ coïnciderait avec l'ordre donné $(S; \leq)$, ce qui ne serait pas possible si la dimension de celui-ci était > 2 , comme, par exemple, si $(S; \leq)$ coïncide avec l'ensemble des points et côtés d'un triangle (polygone) ordonné par \subseteq (c'est-à-dire ordonné par incidence).

4. L'ensemble T . Problèmes. Soit

$$(4.1) \quad T = \{D, \bar{D}, I, \bar{I}, K, \bar{K}\};$$

pour chaque ensemble non vide $S \subseteq T$, on a [cf. (3.7), (3.8)] des relations bien définies

$$\bigcup_{\varphi \in S} \varphi, \quad \bigcap_{\varphi \in S} \varphi;$$

en particulier, pour chaque famille F non vide d'ensembles non vides, on a des propositions bien définies

$$\bigcup_{\varphi \in S} \varphi F, \quad \bigcap_{\varphi \in S} \varphi F.$$

PROBLÈME 4.1. A-t-on

$$(4.1) \quad (\overline{D}F) \Rightarrow IF \cup KF^4?$$

D'une manière analogue, a-t-on

$$(4.2) \quad \overline{I}F \Rightarrow DF \cup KF,$$

$$(4.3) \quad \overline{K}F \Rightarrow DF \cup IF?$$

Nous venons de voir (th. 3.1) que, abstraction faite du cas où S se compose de \overline{K} comme son élément unique, on a

$$(F) \left(\bigcap_{\varphi \in S} \varphi F \right) \Rightarrow Z;$$

dans tous les cas si $\nu \neq S \subseteq T$, alors⁵

$$(F) \left(\bigcap_{\varphi \in S} \varphi F \right) \Rightarrow Z.$$

Dans cet état de choses, il y a lieu de poser le problème suivant:

⁴Bien entendu, $\overline{I} = D \cup K$ [cf. (3.10)]. Explicitons (4.1): si une famille F contient une famille maximale d'ensembles non disjoints, contient-elle nécessairement une famille maximale d'ensembles deux à deux: *a.* empiétants; *b.* comparables; et réciproquement.

⁵Quant au (V), voir th. 3.1.

PROBLÈME 4.2. Si $v \subset S \subseteq T$, a-t-on

$$(4.4) \quad (F) \left(\bigcup_{\varphi \in S} \varphi F \right) \Rightarrow Z ?$$

ou, du moins,⁵

$$(4.5) \quad (V) \cap (F) \left(\bigcup_{\varphi \in S} \varphi F \right) \Rightarrow Z ?$$

En particulier, a-t-on

$$(4.6) \quad (F)(DF \cup IF \cup KF) \Rightarrow Z ?$$

ou, du moins,

$$(4.7) \quad (V) \cap (F)(DF \cup IF \cup KF) \Rightarrow Z ?$$

De même, est-ce que pour chaque $X \in \{D, I, K\}$, on a

$$(F)(XF \cup \bar{X}F) \Rightarrow Z ?$$

En particulier, a-t-on

$$(4.6)_1 \Rightarrow Z ?$$

ou, d'une manière explicite, est-ce que l'axiome Z est une conséquence de l'hypothèse $(4.6)_1$ disant que chaque famille F d'ensembles non vides contient une famille maximale F_0 telle que l'on a bien

$$A, B \in F_0, A \neq B \Rightarrow ADB$$

ou bien

$$A, B \in F_0, A \neq B \Rightarrow AIB$$

ou bien

$$A, B \in F_0, A \neq B \Rightarrow AKB ?$$

Est-ce que cela subsiste au moins en supposant encore (V) ? C'est-à-dire a-t-on $(4.7)_1 \Rightarrow Z$?

Il y là un complexe de problèmes bien intéressants au point de vue logique ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, 2^e édition, New-York, 1948 p. 14–284.
- [2] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématiques*, 1^{re} partie, livre I (Théorie des ensembles), Paris, 1939, p. 8–51.
- [3] E. Marczewski (Szpilrajn), *Sur deux propriétés des classes d'ensembles*, Fund. Math. **33** (1945), 303–307.
- [4] A. Mostowski, *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, Fund. Math. **32** (1939), 201–252.
- [5] R.L. Vaught, *On the equivalence of the Axiome of choice and a maximal principle*, Bull. Amer. Math. Soc. **58** (1952), 66.
- [6] E. Witt, *Beweisstudien zum Satz von M. Zorn*, Math Nachrichten, Berlin, **4** (1951), 434–438.

ÜBER DAS AUSWAHLAXIOM

1. M sei eine durch \leq geordnete Menge¹. Die Menge aller maximalen Ketten bzw. maximalen Antiketten von M (vgl. Kurepa [1, 2]) werde durch

$$(1) \quad OM \text{ bzw. } \bar{O}M$$

bezeichnet. Mit Hilfe des Auswahlaxioms läßt sich zeigen, daß die Mengen $OM, \bar{O}M$ nicht leer sind, weil dann die folgenden Prinzipien beweisbar sind:

(K) *Das Prinzip der Existenz maximaler Ketten: Jede geordnete Menge enthält eine maximale Kette* (cf. Hausdorff [1, p. 140], Birkhoff [1, p. 42]).

(\bar{K}) *Das Prinzip der Existenz maximaler Antiketten: Jede geordnete Menge enthält eine maximale Antikette.*

Bekanntlich ist das Auswahlaxiom mit dem Prinzip der Existenz maximaler Ketten äquivalent (vgl. Birkhoff [1, p. 43]). Dagegen ist offen, ob auch (\bar{K}) und das Auswahlaxiom äquivalent sind.

2. Eine einfache Folge des Auswahlaxioms bz. des Totalwohlordnungsprinzips ist das folgende Prinzip:

(V) *Total oder Vollordnungsprinzip: Jede Menge kann totalgeordnet werden.*

Nach Mostowski [1] ist (V) schwächer als das Totalwohlordnungsprinzip, da das Zermelonnche Princip aus (V) nicht ableitbar ist.

3. THEOREM 3.1. *Das Auswahlaxiom ist äquivalent mit dem logicshen Produkt der Prinzipien (\bar{K}) und (V), d.h. aus dem Auswahlaxiom folgen (\bar{K}) und (V) und umgekehrt: Aus (\bar{K}) und (V) folgt das Auswahlaxiom.*

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Math. Annalen 126 (1953), 381-384

¹Wir wenden die folgenden Redeweisen an (cf. Witt [1]): *geordnet*, bisher teilweise geordnet; *wohlgeordnet*, bisher teilweise wohlgeordnet, d. h. jede nichtleere Teilmenge von vergleichbaren Elementen besitzt ein erstes Element; *voll- oder totalgeordnet* oder *Kette*, bisher geordnet; *total- oder vollwohlgeordnet*, bisher wohlgeordnet; *total- oder vollantigeordnet* oder *Antikette*, bisher ohne ungleiche vergleichbare Elemente.

Es ist hinreichend, aus (\bar{K}) und (V) das Zermelosche Prinzip abzuleiten.

Es sei also

$$(1) \quad F$$

irgendeine nichtleere Menge nichtleerer Mengen. Es ist die Existenz einer Menge S nachzuweisen, die mit jedem $X \in F$ einen einzigen Punkt gemeinsam hat. Nach (V) kann jedes $X \in F$ als vollgeordnet vorausgesetzt werden. Nun betrachten wir für jedes $X \in F$ die Menge

$$(2) \quad fX$$

aller geordneten Paare

$$(3) \quad (X, a), \quad a \in X,$$

die so geordnet werden, daß

$$(4) \quad (X, a) \leq (X, a')$$

in fX genau dann gilt, wenn $a, a' \in X$ und $a \leq a'$ in X . Man sieht, daß fX vollgeordnet ist. Man bilde nun

$$(5) \quad F_0 = \bigcup_X fX, \quad X \in F.$$

In F_0 werde eine Ordnung so eingeführt, daß

$$(6) \quad (X, a) \leq (X', a')$$

in F_0 genau dann gilt, wenn $X = X'$, $a, a' \in X$ und $a \leq a'$ in X . Nach (\bar{K}) enthält F_0 eine maximale Antikette A ; man sieht, daß A aus jedem $fX (X \in F)$ genau einen Punkt

$$(7) \quad (X, \varphi(X))$$

enthält. Die Menge S aller Punkte $\varphi(X)$ hat also mit jedem $X \in F$ genau einen Punkt gemeinsam, womit das Zermelosche Prinzip bewiesen ist.

4. Fixpunktfreie Permutationen und das Auswahlaxiom.

4.1. S sei eine nichtleere Menge und f eine eindeutige Abbildung von S auf sich. Mit $x \in S$ sei

$$(1) \quad [x]_f = \bigcup_n f^n(x), \quad n \in D, \quad {}^3$$

$$(2) \quad f^0(x) = x, \quad f^{n+1}(x) = f^{\pm 1}(f^n(x)).$$

Die Ordnung von f ist das Infimum der Kardinalzahlen

$$(3) \quad k[x]_f, \quad x \in S. \quad {}^4$$

4.2. Für jede natürliche Zahl n betrachten wir nun die folgende Aussage:

$\Pi[n]$ (*Permutationsprinzip*): In jeder Menge, die mindestens n Punkte enthält, gibt es eine fixpunktfreie Permutation der Ordnung $\geq n$.

THEOREM 4.2. $\Pi[3]$ ist eine Folge des Auswahlaxioms.

Wegen der Voraussetzung des Auswahlaxioms reicht es hin, $\Pi[3]$ für jeden Anfangsabschnitt $W = [0, \alpha)$ von Ordnungszahlen mit $\alpha > 2$ zu beweisen. Für endliche W leistet die zyklische Permutation das Verlangte. Wenn W unendlich ist, so können wir voraussetzen, daß jeder Punkt von W unendlich viele Nachfolger besitzt; andernfalls ordne man W so um, daß man die Kette W_0 aller $x \in W$ mit endlich vielen Nachfolgern vor die Restmenge setzt. Im Falle der Menge $N = 1, 2, 3, \dots$ der natürlichen Zahlen genügt es, die folgende Permutation zu betrachten:

$$p(3n - 2) = 3n, \quad p(3n - 1) = 3n - 2, \quad p(3n) = 3n - 1.$$

Ist W eine beliebige unendliche Menge, so zerlegen wir W so in ω -Abschnitte, daß zwei Punkte $x, y \in W$ dann und nur dann in demselben Abschnitt liegen, wenn

$$(4) \quad k[x, y]_W < \aleph_0. \quad {}^5$$

Da jeder Abschnitt X von W der Folge $N = 1, 2, 3, \dots$ ähnlich ist, kann man die Permutation p von N in X übertragen; führt man das für jeden

³Die Bezeichnung D für die Menge der ganzen Zahlen ist das Initial von Differenz. Sie erinnert an die Entstehungsweise der ganzen Zahlen.

⁴Die Kardinalzahl einer Menge X werde durch kX bezeichnet.

⁵ $[a, b]_S$ bedeutet die Menge aller $x \in S$, die zwischen a und b liegen oder mit a oder b gleich sind.

maximalen ω -Abschnitt von W aus, so gewinnt man eine fixpunktfreie Permutation von W von der Ordnung ≥ 3 .

5. *Das Auswahlaxiom und die Zerlegung einer Menge M in fremde höchstens abzählbare Mengen.*

Sei f eine Permutation von S . Wird $[x]_f$ wie in 4 erklärt, so liefert $[x]_f$ eine *Zerlegung* (Partition) von S , d.h. mit $x, y \in S$ ist entweder $[x]_f = [y]_f$ oder $[x]_f \cap [y]_f = \emptyset$ (leer). Sei nämlich $z \in [x]_f \cap [y]_f$, so gibt es ein $k \in D$ und ein $k' \in D$, so daß

$$\begin{aligned} f^k(x) &= z = f^{k'}(y), \text{ also } f^k(x) = f^{k'}(y), \text{ also} \\ x &= f^{k'-k}(y); \text{ d.h. } x \in [y]_f \text{ und daher} \\ &[x]_f \subseteq [y]_f. \end{aligned}$$

Analog beweist man die duale Inklusion.

Insbesondere folgt, falls f eine Ordnung ≥ 3 hat, daß jedes $[x]_f$ ($x \in S$) mindestens drei Punkte enthält. Das Permutationsprinzip $\Pi[3]$ zieht also die folgende Aussage nach sich:

5.1. *$P[3, \aleph_0]$ (Partitionsprinzip): Jede unendliche Menge ist zerlegbar in disjunkte Teilmengen X derart, daß*

$$3 \leq kX \leq \aleph_0.$$

Umgekehrt kann man den folgenden Satz beweisen:

THEOREM 5.2. *Aus dem Partitionsprinzip $P[3, \aleph_0]$ folgt das Permutationsprinzip $\Pi[3]$.*

M sei irgendeine Menge mit mindestens drei Elementen und P eine Partition von M mit

$$(1) \quad M = \bigcup_X X, \quad 3 \leq kX \leq \aleph_0 \quad (X \in P).$$

Da jedes $X \in P$ höchstens abzählbar ist und mindestens 3 Punkte enthält, gibt es in ihm eine fixpunktfreie Permutation f_x der Ordnung ≥ 3 (X ist durch eine ähnliche Transformation φ_x auf einen Anfangsabschnitt $\varphi_x X$ der Zahlenreihe $[0, \omega)$ abbildbar). Definiert man dann eine Abbildung f von M auf sich so, daß f in jedem $X \in P$ mit f_x übereinstimmt, so ist f eine gewünschte Permutation von M .

Man kann 5.1 und 5.2 zusammenfassen in

THEOREM 5.3. *Für jede Menge, die mindestens drei Punkte enthält, ist das Permutationsprinzip $\Pi[3]$ äquivalent mit dem Partitionsprinzip $P[3, \aleph_0]$.*

Offen ist die Frage, ob aus $\Pi[3]$ das Auswahlaxiom folgt (und somit $\Pi[3]$ ein Äquivalent für das Auswahlaxiom darstellt), ob für zwei verschiedene natürliche Zahlen n, n' die Prinzipien $\Pi[n]$ und $\Pi[n']$ äquivalent sind und ob insbesondere $\Pi[2] \Rightarrow \Pi[3]$.

6. *Die Anzahl der Permutationen unendlicher Mengen und das Auswahlprinzip.* Wenn für jede Kardinalzahl a die Fakultät von a

$$a!$$

als die Kardinalzahl von der Menge $S!$ aller Permutationen von S bedeutet, wo $kS = a$, so hat man den

SATZ 3.1. *Es ist $a! = 2^a$ für jedes Aleph a .*

Der Beweis des Satzes 3.1. ist nicht schwer; in einem anderen Aufsatze werde ich 3 verschiedene Beweise geben und zugleich durchanalysieren, insofern ich dieselben nicht auf beliebige unendliche Kardinalzahlen a übertragen kann. In diesem Zusammenhang können wir noch das folgende Problem formulieren.

Problem 6.1. Wenn für jede unendliche Kardinalzahl a die Gleichung $a! = 2^a$ vorausgesetzt wird, ist dann das Auswahlprinzip beweisbar?

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, 2nd edition. New York, 1948.
- [1] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.
- [1] D. Kurepa, *Sur les ensembles partiellement ordonnés*, Proc. Internat. Math. Congres Cambridge Mass. 460 (1950); bis 461 (1952).
- [2] D. Kurepa, *On a characteristic property of finite sets*, Pacific J. Math. 2 (1952).
- [1] A. Mostowski, *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, Fund. Math. (1939) 32, 201-252.
- [1] R. L. Vaught, *On the equivalence of the Axiom of Choice and a maximal principle*, Bull. Amer. Math. Soc. 58 66 (1952).
- [1] E. Witt, *Beweisstudie zum Satz von M. Zorn*, Math. Nachrichten 4 (1951) 434-438

SUR UNE HYPOTHÈSE DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

On ajoute une nouvelle hypothèse, P_{13} , au fond équivalente à chacune des hypothèses P_1, \dots, P_{12} considérées auparavant en connexion avec le problème de Souslin généralisé.

C'est en 1934 que, paraît-il, on s'est pour la première fois exprimé sur la réponse à donner au problème de Souslin: j'avais publié¹ que la réponse devait être affirmative, c'est-à-dire que *chaque chaîne ordonnée continue vérifiant la condition de Souslin contiendrait un sous-ensemble dénombrable partout dense* et serait donc semblable à un ensemble de nombres réels. Peu après j'avais énoncé (avec une indication de démonstration) un théorème plus général affirmant l'égalité des cardinaux k_1E, k_2E pour chaque chaîne ordonnée dense E, k_1E étant l'infimum des cardinaux des sous-ensembles $\subseteq E$ partout denses dans E, k_2E étant le supremum des cardinaux kX des familles X composées d'intervalles disjoints et extraits de E ². Plus tard, j'ai énoncé³ un "théorème fondamental" (avec une "démonstration") concernant des tableaux ramifiés d'ensembles (\equiv familles \mathfrak{F} d'ensembles non-chevauchants telles que pour chaque $x \in \mathfrak{F}$ l'ensemble des $Y \in \mathfrak{F}$ vérifiant $Y \supseteq X$ soit une chaîne bien ordonnée par rapport à \supseteq). Or, en rédigeant ma Thèse⁴ je m'aperçus de lacunes dans mes démonstrations des propositions précédentes. En même temps, je fus à même d'indiquer 12 propositions (hypothèses ou postulats) P_1, P_2, \dots, P_{12} deux à deux équivalentes dont l'une, P_5 , affirmait l'existence d'une famille disjonctive d'intervalles

BIBLIOGRAPHICAL NOTE: C.R. Acad. Sci. Paris **236** (1953), 564-565 (Note présentée par M. Henri Villat).

¹C.R. Acad. Sci. Paris **198** (1934), p. 703.

²*Ibid.*, **198** (1934), p. 882.

³*Ibid.*, **199** (1934), p. 112.

⁴*Ensembles ordonnés et ramifiés*, (Thèse, Paris) 1935; voir aussi Publ. Math. Univ. Belgrade, **4** (1935), p. 1-138.

non vides, la famille devant avoir la puissance $k_1 E$ (E chaîne dense quelconque) (l'hypothèse P_5^1 correspondant au cas $k_1 E = \aleph_1$ était au fond ledit "théorème" donnant la réponse affirmative au problème de Souslin). Des hypothèses $P_1 - P_{12}$ l'hypothèse P_2 est bien saisissante et affirme l'égalité du cardinal kT de tout tableau infini T avec l'un de ses sous-tableaux dégénérés (c'est-à-dire dans lequel la relation de comparabilité est transitive). Remarquons qu'un T est tout ensemble partiellement ordonné tel que, quel que soit $x \in T$, l'ensemble des prédécesseurs de x dans T est une chaîne bien ordonnée $\subseteq T$.

En 1950 j'ai trouvé une hypothèse de plus, disons P_{13} , au fond équivalente à chacune des P_1, \dots, P_{12} ; la voici:

HYPOTHÈSE P_{13} . *Quelles que soient la chaîne continue E et la famille transfinie disjointive de rectangles ouverts de $E \times E$, la chaîne E contient une famille de puissance égale à celle de \mathfrak{F} , d'intervalles deux à deux disjoints.*

L'hypothèse particulière P_{13}^1 qui s'en déduit en y spécifiant que le cardinal de \mathfrak{F} soit $= \aleph_1$ est équivalente à l'hypothèse P_5^1 de tout à l'heure⁵.

⁵C.R. Acad. Sci. Paris 231 (1950), p. 1113; voir aussi Publ. Math. Univ. Belgrade 4 (1952), p. 97-108, où se trouve la liste de mes 16 travaux concernant le problème de Souslin. Cf, aussi T. Inagaki, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. (Sapporo) 8 (1939), p. 25-49, 145-162.

SUR UN PRINCIPE DE LA THÉORIE DES ESPACES ABSTRAITS

Nous allons formuler un principe de projection $\Pi(G)$ pour les espaces abstraits. Ce principe généralise notre proposition P_{13} d'une Note précédente¹; P_{13} sera formulée encore en se servant d'une fonction ordinale n^2 . Celle-ci combinée avec des fonctions ordinales dyadiques se prête bien à donner l'idée de grandes possibilités au sein du transfini.

1. La multiplication cartésienne d'espaces est une opération des plus importantes pour fabriquer de nouveaux espaces à partir d'espaces donnés. Or, il y a des propriétés importantes d'espaces, pour lesquelles on ne sait ou l'on ne peut pas décider si elles se conservent par ladite multiplication; telles sont par exemple: la propriété lindelöffienne, le supremum des cardinaux des ensembles isolés d'espaces, le degré de cellularité d'espaces³, etc. Puisque, dans le cas où ces propriétés ne se conserveraient pas, on aurait affaire à des espaces bien bizarres, il y a lieu de formuler un principe (postulat) et rechercher s'il est vrai, faux ou indépendant dans chaque classe particulière d'espaces. Il nous semble que ce principe occupe une place à part dans la théorie des espaces abstraits. Le voici:

PRINCIPE $\Pi(G)$ DE PROJECTION. *Quelle que soit la famille disjointive Φ d'ensembles ouverts extraits du carré cartésien d'un espace infini E_1 , celui-ci contient une famille disjointive de puissance égale à celle de Φ et composée d'ensembles ouverts, en formules ³ $s(E_1^2) = sE_1$.*

BIBLIOGRAPHICAL NOTE: C.R. Acad. Sci. Paris, **236** (1953), 655-657 (Note présentée par M. Maurice Fréchet au séance du 16 février 1953).

¹C.R. Acad. Sci. Paris **236** (1953), 564.

²C.R. Acad. Sci. Paris **205** (1937), 1196.

³E étant un espace, GE ou $G(E)$ est la famille des ensembles ouverts $\subseteq E$. Pour une famille \mathcal{F} d'ensembles, $s\mathcal{F}$ désigne le supremum des cardinaux kH des familles disjointives $H \subseteq \mathcal{F}$. Le cardinal $s(GE)$ sera désigné aussi sE et s'appelle le degré de cellularité de E (cf. notre Thèse, Paris, 1935, p. 131; aussi C.R. Acad. Sci. Paris **204** (1937), 325).

Le principe $\Pi(G)$ est démontrable pour la classe des espaces distanciés aussi bien que pour celles des espaces totalement bien ordonnés. Dans le cas des espaces totalement ordonnés, $\Pi(G)$ coïncide avec notre proposition P_{13} ¹ [qu'on exprime encore en disant que $n(\alpha) = \alpha$ pour tout ordinal α ²] ou encore avec l'hypothèse que, quel que soit l'ensemble ordonné T dont aucun point n'est précédé de deux points incomparables, on ait $kT = \sup kX$, X parcourant la famille des chaînes et des antichaînes $\subseteq T$ (antichaîne veut dire: ne contenant aucun couple de points distincts comparables).

Étant donné que la formulation de l'hypothèse en se servant de la fonction n est très commode, voici la définition de celle-ci.

2. A chaque ordinal α on associera l'ensemble ordonné $C(\alpha)$ comme il suit⁴. $C(\alpha)$ sera composée de toutes les $\omega_{\alpha+1}$ -suites d'ordinaux $< \omega_\alpha$ et de toutes les sections commençantes de cells-ci; $C(\alpha)$ sera ordonné par le procédé disant qu'un $x \in C(\alpha)$ précède $y \in C(\alpha)$ si, et seulement si x est une section commençante de y . Ceci étant, soit $n(\alpha)$ l'un des nombres $\alpha, \alpha + 1$ ^{2,5}; si pour tout ordinal α l'on postule l'égalité $\aleph_{n(\alpha)} = \sup kX$, [$X \subseteq C(\alpha)$, chaque chaîne $\subseteq X$ et chaque antichaîne $\subseteq X$ est $\leq \aleph_\alpha$], alors notre "théorème" (hypothèse)⁵ de 1934 et 1935 s'exprime par $n(\alpha) = \alpha$ pour tout α ; en particulier, notre hypothèse $n(0) = 0$ est équivalente à la réponse affirmative au problème de Suslin⁶. C'est que, comme nous l'avons remarqué ailleurs⁷ nous croyons que notre hypothèse (n_0) disant que $n(\alpha) = \alpha$ pour tout ordinal α est plutôt un postulat indépendant d'autres axiomes courants de la théorie des ensembles. L'hypothèse (n_0) est la plus simple parmi d'autres et en particulier impliquant $n(0) = 0$ correspond dans ce cas à notre idée d'un temps mathématique s'écoulant sans cesse continûment de telle sorte qu'il soit le seul continu maniable n'admettant aucune infinité non dénombrable de durées séparées. Mais l'hypothèse simple (n_0) est infiniment moins riche que l'hypothèse (n_1) disant que $n(\alpha) = \alpha + 1$ pour tout ordinal α , et en particulier que $n(0) = 1$. Même, δ étant une "hyper-suite" dyadique quelconque - pour tout $\alpha, \delta(\alpha) \in \{0, 1\}$ - on peut considérer l'hypothèse ($n_0 + \delta$) disant que $n(\alpha) = \alpha + \delta(\alpha)$ pour tout α . Les hyper-suites constantes 0 et 1 redonnent resp. (n_0) et (n_1) comme

⁴Cf. Bull. Acad. Sci. U.R.S.S., s. math. 11 (1947), 59-74.

⁵Voir Thèse, p. 105 (th. 1) et p. 132; aussi C.R. Acad. Sci. Paris 202 (1936), 185.

⁶Voir A. Denjov, C.R. Acad. Sci. Paris 236 (1953), 437.

⁷Voir Thèse, p. 2, 134; aussi C.R. Acad. Sci. Paris 202 (1936), 187.

deux cas extrêmes d'une immensité inconcevable d'hypothèses montrant des possibilités logiques incroyables au sein du transfini⁸.

3. THÉORÈME. *Pour tout espace infini E pour lequel le principe $\Pi(G)$ s'applique, la suite $s(E^n)$ ($1 \leq n < \omega_0$) est constante⁹.*

Sans recourir explicitement à $\Pi(G)$ ce théorème est démontrable pour des espaces distanciés et des espaces totalement bien ordonnés; pour des chaînes ordonnées infinies E la suite $s(E^n)$ ($2 \leq n < \omega$) est constante. Le cas des espaces particulièrement intéressants relativement à $\Pi(G)$, c'est le cas des espaces uniformes.

4. Le principe $\Pi(G)$ est à comparer au théorème qu'on prouve sans se servir de $\Pi(G)$ et que voici: *Quel que soit l'ordinal α , il y a deux familles $\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}'_\alpha$ d'ensembles vérifiant*

$$s\mathcal{F}_\alpha = \aleph_\alpha = s\mathcal{F}'_\alpha \quad s(\mathcal{F}_\alpha \times \mathcal{F}'_\alpha) = 2^{\aleph_\alpha}.$$

Ce théorème généralise celui de M. Sierpinski¹⁰, qu'on obtient en y substituant zéro et \aleph_1 au lieu de α et 2^{\aleph_α} respectivement.

5. On peut envisager encore le principe \mathcal{J} qu'on obtient à partir de $\Pi(G)$ en y remplaçant les familles considérées par des ensembles isolés.

⁸D'une façon analogue, en posant $2^{\aleph_0} = \aleph_{N(0)}$, nous croyons qu'on peut prendre pour $N(0)$, n'importe quel ordinal > 0 non final avec ω_0 , en particulier, on peut poser $N(0) = 1, \omega_1$ ou $N(0) =$ le premier ordinal inaccessible [cf. loc. cit. 2].

⁹A ce propos, cf. E. Marczewski, Fund. Math. 34 (1947), 127-143.

¹⁰Fund. Math. 33 (1945), 299-302.

EIN LEMMA ÜBER TRANSFORMATIONEN

Gewidmet zur treuen und freundlichen Erinnerung an den Kollegen H.L. Schmid

1. Für eine Menge S und eine Kardinalzahl r sei $\binom{S}{r}$ die Menge aller Teilmengen von S , die r Elemente haben: $\binom{S}{r} = \{x \mid x \subseteq S, kx = r\}$; kx bezeichnet die Kardinalzahl von x . Falls $r > kS$ ist, sei $\binom{S}{r} = \emptyset$ (leere Menge).

2. LEMMA. Sei f eine Abbildung von S in $\binom{S}{2}$; d.h., daß $f(x)$ für jedes $x \in S$ eine wohlbestimmte Untermenge von $\binom{S}{2}$ ist. Sei:

$$I_2 \quad \{x\} \subseteq \bigcup y \quad (y \in f(x), x \in S);$$

$$II_2 \quad \text{Wenn } y \in \binom{S}{2}, \text{ dann } y \in \bigcup_{x \in y} f(x);$$

III₂ (n) $kf(x) < n$, n bezeichne dabei eine Kardinalzahl.

Dann ist

$$(1) \quad kS \leq 2n^2; \text{ insbesondere } kS \leq n, \text{ falls } n \geq \aleph_0.$$

2.1. Beweis. Setzen wir voraus, (1) sei nicht erfüllt, also

$$(2) \quad kS > 2n^2.$$

Sei eine Teilmenge von S , so daß

$$(3) \quad kY = n$$

$$(4) \quad Z = \bigcup x, \quad (x \in f(x), y \in Y);$$

dann ist

$$(5) \quad n \leq kZ \leq n \cdot n \cdot 2.$$

Nach (2) und (5) hätte man $S \setminus Z \neq \emptyset$; sei dann

$$(6) \quad a \in S \setminus Z.$$

Als Folge von I_2 hat man $Y \subseteq Z$, also auch $a \notin Y$; d.h. $y \neq a$ und daher $\{y, a\} \in \binom{S}{2}$ für jedes $y \in Y$. Nach II_2 hat man

$$(7) \quad \{y, a\} \in f(y) \cup f(a).$$

Wäre nun $\{y, a\} \in f(x)$ für ein $y \in Y$, so wäre ein Summand x in (4), und daher $a \in Z$, entgegen (6). Also ist für kein $y \in Y$ $\{y, a\} \in f(y)$; nach (7) bedeutet das, daß für jedes $y \in Y$ $\{y, a\} \in f(a)$ gilt; daher müßte entgegen der Bedingung III_2 $(n) kf(a) \geq kY = n$, d.h. $kf(a) \geq n$ sein.

Man hat also nicht (2) sondern (1). Wenn n unendlich ist, gilt $2n^2 = n$, und die Relation (1) wird $kS \leq n$.

Somit ist das Lemma vollständig bewiesen.

2.2. Bemerkung. Es ist zu beachten, daß in der Voraussetzung $III_2(n)$ das Zeichen $<$ steht, während in der Behauptung die Relation \leq vorkommt.

3. Allgemeiner haben wir folgenden

SATZ. Seien S eine Menge und n, r positive Kardinalzahlen.

Sei f eine Abbildung von S in $\binom{S}{r}$, so daß folgende 3 Bedingungen erfüllt sind:

$$I_r \quad \{x\} \subseteq \bigcup y \quad (y \in f(x), x \in S);$$

$$II_r \quad \text{Wenn } y \in \binom{S}{r}, \text{ dann } y \in \bigcup_{x \in y} f(x);$$

$$III_r \quad (n) \quad kf(x) < n \text{ für jedes } x \in S.$$

Falls dann $r \leq n \geq \aleph_0$ ist, so gilt

$$(1) \quad kS \leq n.$$

3.1. Der Beweis ist ähnlich dem vorangegangenen Beweise des Lemmas. Wäre (1) nicht wahr, so könnten wir wie vorher die Mengen Y und Z betrachten. Man hätte

$$n \leq kZ \leq n \cdot n \cdot r, \quad Z \subseteq S,$$

und die Kardinalzahl von $S \setminus Z$ wäre größer als $r - 1$. Sei dann A eine Untermenge von $S \setminus Z$, so daß $kA = r - 1$. Aus $Y \subseteq Z$ folgt $A \cap Y = \emptyset$. Daher ist

$$(2) \quad (y) \cup A \in \binom{S}{r} \quad (y \in Y).$$

Nach II_r hätte man

$$(y) \cup A \in f(y) \cup \bigcup_a f(a) \quad (a \in A, y \in Y).$$

Gäbe es nun ein $y \in Y$ mit $(y) \cup A \in f(y)$, so wäre $(y) \cup A$ ein Summand in (2.4) und daher $A \subseteq Z$, entgegen $A \subseteq S \setminus Z$. Also wäre für jedes $y \in S$

$$(3) \quad (y) \cup A \in \bigcup_a f(a) \quad (a \in A).$$

Betrachten wir die Menge

$$(4) \quad \bigcup_a f(a) \quad (a \in A).$$

Die Kardinalzahl derselben ist kleiner als $n \cdot kA = n(r - 1) = n$, also gilt

$$(5) \quad k(4) < n.$$

Andererseits ziehen die Relationen (2) und (3) und die Bedingung II_r die folgende Relation nach sich: $y \in (4)$ für jedes $y \in Y$. Demnach ist $Y \subseteq (4)$ und $k(4) \geq kY = n$, d.h. $k(4) \geq n$, entgegen der Ungleichheit (5).

3.3. Hier kann man in bezug auf $< n$ und $\leq n$ in $\text{III}_r(n)$ und (3.1) dasselbe wie in §2.3 bemerken.

4. Bemerkungen.

4.1. Für jede Menge S gibt es eine Abbildung f von S in $\binom{S}{r}$, so daß die Bedingungen I_r und II_r befriedigt sind: Es genügt, für jedes $x \in S$ durch $f(x)$ die Menge aller $y \in \binom{S}{r}$ mit $x \in y$ zu bezeichnen. Somit hat man, wenn man von der Bedingung $\text{III}_r(n)$ absieht, keine Einschränkung in bezug auf kS .

4.2. Derselbe Schluß gilt, wenn man von der Bedingung II_r absieht: Es genügt, durch $f(x)$ ein $y \in \binom{S}{r}$ mit $x \in y$ zu bezeichnen.

5. Für eine Ordinalzahl α sei $I(\alpha)$ bzw. $I[\alpha]$ die Menge aller Ordinalzahlen $< \alpha$ bzw. $\leq \alpha$.

5.1. LEMMA. Für jede Ordinalzahl $\alpha > 2$ gibt es eine Abbildung f von $I(\alpha)$ in $(I_2^{(\alpha)})$, so daß die Bedingungen $I_2, II_2, III_2(k\alpha)$ befriedigt sind. Wenn außerdem $\alpha \geq \omega$ ist, so gibt es für jedes $0 < r < \omega$ eine Abbildung f_r von $S = I(\alpha)$ in $(I_r^{(\alpha)})$, so daß $I_r-III_r(k\alpha)$ befriedigt sind.

Man kann f_r folgendermaßen definieren: $f_r(\nu) = \{0, 1; r - 1\}$ für $0 \leq \nu < r$; für jedes $r \leq \nu < \alpha$ sei $f_r(\nu) = (I_r^{(\nu)})$.

5.2. KOROLLAR. Für jede natürliche Zahl $r > 0$ gibt es eine Abbildung von $I(\omega_1)$ in $(I_r^{(\omega_1)})$, so daß die Bedingungen $I_r, II_r, III_r(\aleph_1)$ befriedigt sind.

6. SATZ. Die Gleichheit $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ ist logisch gleichwertig mit folgender Aussage:

Es gibt eine Menge S von der Mächtigkeit 2^{\aleph_α} und eine Abbildung f_2 von S in $(\binom{S}{2})$, so daß die Bedingungen $I_2, II_2, III_2(\aleph_{\alpha+1})$ befriedigt sind.

Der Satz ist eine Folge von Satz 3 und Lemma 5.1.

Ist insbesondere $\alpha = 0, S = R$ (= die Menge aller reellen Zahlen), so kann man jedes $\{a, b\} \in (\binom{R}{2})$ als abgeschlossenes Intervall $[a, b]_R$ von R deuten, und aus Satz 6 folgt folgender

6.1. SATZ. Die Kontinuumhypothese $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ist logisch äquivalent mit folgender Aussage P :

P Jeder reellen Zahl x kann man ein abzählbares¹ System $f(x)$ von Segmenten von R so zuordnen, daß $x \in y$ für jedes $y \in f(x)$ und dabei kein Segment von R ausgeschlossen ist².

6.2. Sei S eine Menge von einer Mächtigkeit > 1 ; damit $kS = \aleph_{\alpha+1}$, ist notwendig und hinreichend, daß eine Abbildung f_2 von S in $(\binom{S}{2})$ existiert, so daß die Bedingungen $I_2, II_2, III_2(\aleph_{\alpha+1})$, nicht aber $III_2(n)$ für $n < \aleph_\alpha$ befriedigt sind.

¹Abzählbar bedeutet: endlich oder von der Mächtigkeit \aleph_0 .

²W. Sierpinski, *Sur une propriété de la droite équivalente à l'hypothèse du continu*, *Ganita* 5 (1954), 113–116. Die vorliegende Note wurde durch diese Arbeit von W. Sierpinski veranlaßt.

GENERAL CONTINUUM HYPOTHESIS AND RAMIFICATIONS*

1. **Introduction and summary.** Let \mathcal{W} be a well-ordered set; for any set S , let

$$(1) \quad S(\mathcal{W}) \text{ or } S^{\mathcal{W}}$$

denote the system of all functions on \mathcal{W} to S ; in particular, if α, β are ordinal numbers, let $\alpha(\beta)$ be set of all the β -sequences of ordinals $< \alpha$, i.e.

$$(2) \quad \alpha(\beta) = I\alpha(I\beta).$$

For example, $2(\omega_1)$ is the set of all the ω_1 -sequences of digits 0, 1.

Let us put

$$(3) \quad TS(\mathcal{W}) = \bigcup_X S(X),$$

X running over all initial segments of \mathcal{W} . Consequently, $T2(\omega_1)$ is the set of all the dyadic sequences whose length is $\leq \omega_1$. The set (3) is regarded as ordered by the relation

\Rightarrow meaning: *to be initial portion of.*

In particular \neg means \Rightarrow and \neq .

One easily proves that the set (3) is a *tree*, i.e. that for every point x of (3) the set of all the elements each of which is $\neg x$ is well ordered.

BIBLIOGRAPHICAL NOTE: Fund. Math. 47 (1959), 29–33 (Received 30 06 1958).

*The second part of the results was presented 23.12.1953 in Belgrade at the Mathematics Institute of the Serbian Academy of Sciences. For the first part see Kurepa [2].

The investigation of sets $T2(\omega_\sigma)$ and, in general, of sets of the form (3) is very important and involves enormous difficulties. In particular, we showed that *the problem whether every non countable subset of $T2(\omega_1)$ contains an uncountable chain or an uncountable antichain is equivalent to the Suslin problem* (cf. Kurepa, [1, p. 106,124, 132, $P_4 \leftrightarrow P_5$]).

In particular, the following two propositions are mutually equivalent:

(A) *Every subset S of $T2(\omega_1)$ of cardinality \aleph_1 such that every antichain of S is $\leq \aleph_0$ contains a chain of cardinality \aleph_1 ;*

(S) *Every linearly ordered dense set such that every system of its disjoint intervals is $\leq \aleph_0$ is similar to a set of real numbers ordered according to their magnitude.*

Now, it is extremely interesting that the continuum hypothesis can be equivalently expressed in terms of sets $T2(\omega_\sigma)$ and in connection with the existence of some chains in subsets of $T2(\omega_\sigma)$. In particular we shall prove the following theorem (cf. Theorem 3.2).

THEOREM. *The continuum hypothesis $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ is equivalent to this statement*

(D₀) *If an initial portion P of length ω_2 of $T2(\omega_2)$ contains no chain with \aleph_1 1-s, i.e. if for every chain $C \subseteq P$ the set $\sup C$ contains $< \aleph_1$ times the digit 1, then P contains a chain of cardinality \aleph_2 (obviously composed mainly of 0-s).*

This theorem is a corollary to a general theorem dealing with analogous sets $T2(\omega_\sigma)$ (cf. the main theorem 3.1).

The proof of the theorem is based on a theorem (Theorem 2.1 below) on regressing functions proved in another paper (Kurepa [2]).

2. Auxiliary theorems. In another paper we have proved the following theorem [2, Theorem 3.2].

THEOREM 2.1. *Let ω_σ be a regular initial uncountable ordinal number. Let $S_{\omega'_\sigma}$ be a sequence of nonvoid pairwise disjoint sets so that $kS_{\omega'_\sigma} < k\omega_\sigma$. Let M be a set of cardinality \aleph_0 of ordinals $< \omega_\sigma$ such that in the space I_{ω_σ} of ordinals $< \omega_\sigma$ the complement of M contains no closed set of cardinality $k\omega_\sigma$. Let f be a mapping of $M_0 = \bigcup S_\mu$ ($\mu \in M$) into $S = \bigcup S_{\omega'_\sigma}$ such that $x \in S_\mu$, $\mu > 0$, imply $fx \in S_{\beta(\mu,x)}$ with $\beta(\mu,x) < \mu$ ($\mu \in M$). Then there exists a $y \in fM_0$ satisfying $k\{f^{-1}y\} = k\omega_\sigma$, i.e. f is constant in a set of cardinality \aleph_σ .*

On the basis of this theorem we have proved the following theorem.

THEOREM 2.2. *Let T be a system of sequences of ordinals $< \omega_\sigma^-$ such that every initial segment of every element of T belongs to T ; let ω_σ be such that ω_σ^- is regular and that $1 \leq kR_\alpha T < \aleph_\sigma$ ($\alpha < \omega_\sigma$). If no ordered chain of T contains \aleph_σ^- digits $\neq 0$, then T contains a ω_σ -chain (terminating necessarily with 0's). (Cf. Kurepa [2, Theorem 4.1].*

Remark. It is interesting to observe that the elements of sequences forming T might be composed of digits 0, 1 only. Some elements of T might be sequences of digits $\neq 0$ only; but what matters is the existence of a chain of cardinality \aleph_σ of elements of T all terminating with 0's.

THEOREM 2.3. *Let T be a tree every node of which is $< \aleph_\sigma^-$ and $1 \leq kR_{\omega_\sigma} T < \aleph_\sigma^-$. Let us suppose that \aleph_σ^- is regular and that there exists a mapping f of T into $I\omega_\sigma^-$ such that:*

- 1° f is one-to-one in every knot of T ;
- 2° the set $\{f^{-1}0\}$ of points of T each of which is transformed into 0 intersects every chain of T whose cardinality is \aleph_σ^- .

Then the tree T contains a chain of cardinality \aleph_σ .

As a matter of fact the existence of the preceding function f enables us to give a representation of T in the form of a system of sequences occurring in theorem 2.2. Let $x \in T$ and $T(\cdot, x) = \{y \mid y \in T, y \leq x\}$. Then fx as well as fx' is an ordinal for every $x' \leq x$; then $fT(\cdot, x)$ is a sequence of ordinals $< \omega_\sigma^-$ and one easily proves that the system $S = \{fT(\cdot, x) \mid x \in T\}$ is the required set of sequences: the mapping $x \rightarrow fT(\cdot, x)$ is a similarity between T and S .

The system S is a tree of the kind we examined in Theorem 2.2, except that the length of every element of S is an isolated ordinal; joining to S also the initial portions of the second kind of every element of S , one gets a system T_0 like that in theorem 2.2. And one sees that T_0 contains a chain of cardinality \aleph_σ ; therefore the tree S as well as the given tree T contains a chain of cardinality \aleph_σ , which is what was required.

And now we are going to prove the main result of this paper.

3. Main theorem.

THEOREM 3.1. *For any ordinal α the following statements (C_α) and (D_α) are mutually equivalent:*

$$(C_\alpha) \quad 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

(D_α) *Let D be an initial portion of the tree $T\omega_\alpha(\omega_{\alpha+2})$ composed of all functions on $I\omega_{\alpha+2}$ into $I\omega_\alpha$. If the length of D is $\omega_{\alpha+2}$ and if D contains*

no chain with more than \aleph_α digits $\neq 0$, then D contains a $\omega_{\alpha+2}$ -sequence (obviously terminating with 0's each).

Proof of Theorem 3.1. (C_α) implies (D_α).

At first, let us prove the following lemma.

LEMMA 3.1. Relation (C_α) implies

$$(4) \quad kR_\nu D \leq \aleph_{\alpha+1} \quad (\nu < \omega_{\alpha+2}).$$

As a matter of fact we infer by induction that first of all

$$kR_\nu D \leq \sum_{\nu' \leq \nu} \aleph_\alpha^{k\nu'};$$

therefore, in particular

$$kR_{\omega'_{\alpha+1}} D \leq \sum \aleph_\alpha^{k\omega'_{\alpha+1}} \leq \aleph_\alpha^{N_\alpha} = (\text{by hypothesis } (C_\alpha)) = \aleph_{\alpha+1}.$$

Hence, relation (4) holds for $\nu < \omega_{\alpha+1}$. Suppose now that

$$\omega_{\alpha+1} \leq \zeta < \omega_{\alpha+2}$$

and that (4) holds for every $\nu < \zeta$; let us prove (4) also for $\nu = \zeta$. If ζ is isolated, all is obvious. If $cf\zeta = \omega_{\alpha+1}$, then in virtue of the supposition in (D_α), every element x of $R_\zeta D$, being a ζ -sequence of ordinals of $I\omega_\alpha$, terminates with a $\omega_{\alpha+1}$ -sequence of 0's; therefore

$$kR_\zeta D \leq \sum kR'_\zeta D \leq (\text{by induction hypothesis}) \leq \aleph_{\alpha+1} k\zeta = \aleph_{\alpha+1}.$$

It remains to prove the case $1 < \tau < \omega_{\alpha+1}$ where $\tau = cf\zeta$. Then let $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{\tau'} < \dots$ be an increasing τ -sequence of ordinals converging to ζ . Then every x of $R_\zeta D$ is the supremum of a well-determined τ -sequence $x^{\beta'_{\tau'}} \in R_{\beta_{\tau'}} D$.

Now the number of all such τ -chains is $\leq \prod_{\tau'} kR_{\beta_{\tau'}} D \leq$ (by hypothesis) $\leq \prod_{\tau' < \tau} \aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_{\alpha+1}^{N_\alpha} =$ (by hypothesis (C_α)) $= (2^{N_\alpha})^{N_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Consequently, relation (4) holds.

Now, the length of D is, by hypothesis, $\omega_{\alpha+2}$; consequently, in virtue of (4) we get

$$1 \leq kR_\nu D < \aleph_{\alpha+2} \quad (\nu < \omega_{\alpha+2}).$$

Moreover the cardinal $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha+2}^-$ is regular. And since supposition on (D_α) , D contains no chain with more than \aleph_α digits $\neq 0$, the hypotheses of Theorem 2.2 are satisfied; accordingly, the tree D contains a chain of cardinality $kD = \aleph_{\alpha+2}$. The implication $(C_\alpha) \rightarrow (D_\alpha)$ is proved.

3.2. (D_α) implies (C_α) . Let us suppose on the contrary that $2^{\aleph_\alpha} > \aleph_{\alpha+1}$ although (D_α) holds. Then in particular the set $2(\omega_\alpha)$ of cardinality 2^{\aleph_α} of all dyadic ω_α -sequences would contain a subset X of cardinality $\aleph_{\alpha+2}$. Let $s(x)$ ($x \in X$) be one-to-one function of X onto $I\omega_{\alpha+2}$; every such x being a dyadic ω_α -sequence, let us consider the sequence

$$hx = x + \{0\}_{sx}$$

obtained by a juxtaposition of x and the constant $s(x)$ -sequence composed of 0's; of course the length γhx of hx equals $\gamma x + s(x) = \omega_\alpha + s(x)$. To distinct elements x of X correspond in this way distinct sequences $h(x)$'s. Then let D be the system of all initial segments of those $h(x)$'s, x running over X . The set D would be on initial portion of $2(<\omega_{\alpha+2})^1$ and no supremum of a chain of D would have more than \aleph_α digits 1 in its representation. According to the statement (D_α) the set D would contain a $\omega_{\alpha+2}$ -chain, which contradicts the fact that obviously every chain in D is $< \aleph_{\alpha+2}$. The theorem 3.1 is completely proved.

As a particular case of theorem 3.1 we have the following one.

THEOREM 3.2. *The continuum hypothesis $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ is equivalent to the following proposition:*

Let T be any tree of height ω_2 ; if there is a mapping f of T into $I2 = \{0, 1\}$ such that f is one-to-one in every node of T and if $\{f_1^{-1}\}$ contains no chain of cardinality $> \aleph_0$, then T (and in particular $\{f^{-1}0\}$) contains a chain of cardinality \aleph_2 .

Notation. For any number α , $I\alpha$ denotes the set of numbers $< \alpha$. For any number α , α' runs over $I\alpha$. kX denotes the cardinality of X . $cf\alpha$ is the minimal ordinal β such that α is the supremum of a β -sequence of numbers $< \alpha$; if $a^- < a$ exists, then $cf\alpha = 1$. a^- is the supremum of numbers $< a$.

For an ordered set S and an ordinal α , $R_\alpha S$ denotes the set of all the points x of S such that the set $S(\cdot, x)$ is similar with $I\alpha$.

A node of S is every maximal subset X of S such that sets $S(\cdot, x)$ ($x \in X$) are equal mutually.

¹Obviously, $\alpha(<\beta)$ denotes the union of all the sets $\alpha(\beta')$, β' , running over $I\beta$.

BIBLIOGRAPHY

- [1] D. Kurepa, *Ensembles ordonnés et ramifiés*, (Thèse Paris), 1935, et Publ. Math. Univ. Beograd 4 (1935), p: 1-138.
- [2] *On regressing functions*, Z. Math. Logik Grundlag Math. 4 (1958), 148-157.

E. GENERAL TOPOLOGY

- E[33] *Sur les espaces distanciés séparables généraux*, C.R. Acad. Sci. Paris **197** (1933), 1276–1278
- E[34] *Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudodistanciés*, C.R. Acad. Sci. Paris (1934), 1563–1565
- E[36] *Sur les classes E et D*, Publ. Math. Univ. Belgrade (1936), 124–132
- E[36a] *Le problème de Souslin et les espaces abstraits*, C.R. Acad. Sci. Paris **203** (1936), 1049–1052
- E[37] *Un critère de distanciabilité*, Mathematica (Cluj) **13** (1937), 59–65
- E[56] *Sur l'écart abstrait*, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. (2) **9**(2) (1956), 105–134
- E[63] *On the existence of pseudometric non totally orderable spaces*, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. (1963), 183–192
- E[76] *Genesis of uniform spaces*, Math. Balkanica **6** (1976), 99–106
- E[79] *A classification of topological spaces. Z-number of spaces*, Publ. Inst. Math. (N.S.) **25** (39) (1979), 79–89

I have chosen ten papers of Đuro Kurepa with topics in general topology (one of them, B[45], appears in the Section B on cardinal functions in topology). I know that the choice is rather subjective and not complete and that the work he has done in general topology is still in a solid base of further development of this branch of mathematics. Let us now give a short review of the ten papers.

The paper E[33] is the first one published by Kurepa. Passing from the transfinite ordinal number $\omega_0 = \omega$ and cardinal number \aleph_0 to transfinite initial ordinal numbers ω_α and cardinal numbers \aleph_α , he generalized several fundamental notions such as derivation, closure, compactness, separability, convergence and completeness – and applied this to the class of distancial (metric) spaces (espaces distanciés) (D) of M. Fréchet. Influenced by the french mathematical school of that time, and especially by the work of M. Fréchet, Kurepa continued the activity of generalizing mathematical

notions. So in E[34] he defined the pseudo-distancial spaces (espaces pseudo-distanciés) generalizing the class (\mathcal{D}) of M. Fréchet: in place of positive reals as the range of the distance-function, Kurepa puts an arbitrary totally ordered set. In 1945–46 M. Fréchet considered a similar class of spaces under the name “les espaces écartisés” and proved that they are completely regular. It is interesting that M. Fréchet, mentor of Kurepa, on that occasion did not mention the early papers of Kurepa. Several years after the Second World War, M. Fréchet visited Belgrade and during a conference on this subject, acknowledged the fault. This class of abstract spaces is since then known also under the name of “Kurepa–Fréchet spaces”. It is worth mentioning also that in 1947 A. Appert and J. Colmez – each one at his own way – made a farther generalization: instead of totally ordered scales they introduced the partially ordered ones. Using this they succeeded in characterizing the uniform spaces of A. Weil by means of partially ordered distance. On the other hand, in his thesis, directed by Professor Kurepa, P. Papić (1954) made a thorough study of the class of Kurepa’s pseudo-distancial spaces, revealing thus many of their properties. More details and further reference about this area of general topology, the reader may find in §12 of the reviewer’s book [1].

In E[36] Kurepa introduced a new generalization of the range of the distance-function. The range is now a set M with a special structure and using this Kurepa gave a topological characterization of both classes (\mathcal{E}) and (\mathcal{D}) of M. Fréchet. This immediately give rise to a further generalization of these two classes of spaces by putting any initial transfinite ordinal number ω_α in place of the initial ordinal number $\omega_0 = \omega$, obtaining, thus, two new classes of spaces (\mathcal{E}_α) and (\mathcal{D}_α) such that $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$ and $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$. It is interesting that the second class (\mathcal{D}_α) has been considered by Kurepa already in E[34]. In E[37], using some of his results from E[36], Kurepa gave a new topological characterization of the class (\mathcal{D}) of M. Fréchet which may be regarded as an anticipation of the theorem of A. Weil [3] that a uniform space is metrizable if and only if its uniformity has a countable base.

In E[36a] Kurepa gave a new generalization of the range M of the distance-function defining the operators (opérateurs) $\mathcal{E}[M]$ and $\mathcal{D}[M]$ as classes of abstract spaces E defined by means of the M -distances (M -écarts) with the domain $E \times E$ and the range M , where M is some given abstract space. Under the direction of Professor Kurepa the author of these lines studied these classes in his doctoral dissertation “Apstraktan razmak i uniformne strukture” (Abstract distance and uniform structures) (1955) and proved, for example, that T-spaces (abstract spaces by which the carrier

T is a ramified set) are in the class $\mathcal{E}[M]$, where M is a space of ordinal numbers (see [1] for farther reference). The paper E[56] of Kurepa is an extensive treatise where the operators $\mathcal{E}[M]$, $\mathcal{D}[M]$ are considered again and where several problems are proposed. In connection with this the author of this review was able to find necessary and sufficient conditions under which the class of eT -spaces is included in the class $\mathcal{E}[M] \wedge 0_1$, (the class of spaces where the corresponding M -distance $f: T \rightarrow M$ verifies Kurepa's condition of continuum by σ^1 ;

$$a \in \bar{A} \Rightarrow f(a, a) \in f(A, A),$$

where for $A \subset T$ we let $f(A, A) = \{f(b, b) : b \in A\}$, and where M is a space of ordinal numbers (see my book [1] for further references)). In his thesis (1935) Kurepa has defined ramified families of sets and in E[36] proved that every abstract space of the class (\mathcal{E}) which has a ramified base of neighborhoods is in the class (\mathcal{D}). The neighborhood spaces with ramified neighborhood bases have been denominated by P. Papić as spaces of the class R , or R -spaces. Concerning the class of R -spaces we recommend the reader to see particularly the paragraph 5. of Kurepa's paper E[56]. P. Papić discovered many properties of R -spaces and, in particular, in his paper [2] he proved: "In order that an R -space X be homeomorphic to a totally ordered space, it is necessary and sufficient that X has a ramified base B having no compact members in any stratum of the second kind". Using this, in E[63] Kurepa produced a pseudo-distancial space of the class (D_1) which is not totally orderable. Moreover, he proved that for every regular ordinal number α there exists a space in the class (D_α) which is not homeomorphic to a totally ordered space. I recommend the reader to carefully read Kurepa's paper E[76] where he gives some comments on the history of uniform spaces. In the paper E[79] Kurepa introduces yet another new notion – the stellarity number, or the Z -number, and uses this to classify topological spaces.

Zlatko P. Mamuzić

REFERENCES

- [1] Z.P. Mamuzić, *Introduction to General Topology*, P. Nordhoff, Gronningen, (1963), 1-159.
- [2] P. Papić, *Sur l'ordinabilité d'espaces de la classe R*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. Ser. II 18 (1963), 75-84.
- [3] A. Weil, *Sur les espaces uniformes et sur la topologie générale*, Act. Sci. Ind. Paris 551 (1937).

SUR LES ESPACES DISTANCIÉS SÉPARABLES GÉNÉRAUX

Définitions. Pour un nombre ordinal α la fonction $\tau(\alpha)$ - le type-limite de α - est le plus petit nombre ordinal tel que α soit la limite d'une suite $\tau(\alpha)$ de nombres ordinaux inférieurs à α . Le dérivé \aleph_α de l'ensemble A , que nous désignerons par $D_\alpha A$, est l'ensemble de points \aleph_α de A , c'est-à-dire l'ensemble de points a (appartenant ou non à A) tels que $pV_a A \geq \aleph_\alpha$ pour tout voisinage V_a de a (pA signifie la puissance de A). L'ensemble de fermeture \aleph_α de A est, par définition, $F_\alpha A = A + D_\alpha A$. Un espace E est dit séparable \aleph_α de genre β s'il existe un ensemble A tel que: 1° $pA = \aleph_\alpha$; 2° $A \subseteq E$ subseteq $F_\beta A$; l'ordre de séparabilité de genre β est le plus petit nombre $s_\beta E$ tel que E soit séparable $\aleph_{s_\beta E}$ de genre β . Un espace est compact \aleph_α si pour tout son ensemble A on a $D_\alpha A \neq 0$ toutes les fois que $pA \geq \aleph_\alpha$. Si pour un espace distancié E l'ensemble de ces points mutuellement distant $\geq \varepsilon$ pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ à la puissance $< \aleph_\alpha$, l'espace est dit borné \aleph_α . Si un espace distancié U contient isométriquement tout espace distancié séparable \aleph_α et si $sU = \alpha$ (cf. théorème I), il s'appelle universel \aleph_α . Si pour une métrique ρ toute suite ω_α fondamentale est convergente, ρ est dite complète \aleph_α . La suite $\{a_\varphi\}_{\varphi < \omega_\alpha}$ est fondamentale si l'on peut faire correspondre à tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\psi < \omega_\alpha$ tel que $\rho(a_\varphi a_{\varphi'}) < \varepsilon$ pour $\varphi, \varphi' > \psi$. Si au moins une métrique qui convient à un espace E est complète \aleph_α , il est dit complet \aleph_α lui-même¹.

Dans ce qui suit nous nous bornerons aux espaces distanciés.

THÉORÈME I. $s_0 E = s_1 E = \dots = s_\gamma \equiv sE$, $\aleph_\gamma = pE$.

THÉORÈME II. E est séparable \aleph_ξ pour tout ξ tel que $\aleph_{sE} \leq \aleph_\xi \leq$

$\aleph_{sE}^{\aleph_0}$.

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. C.R. Acad. Sci. Paris 197 (1933), 1276-1278. (Note présentée par M. Émile Borel, au séance du 27 novembre 1933).

¹Voir M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Gauthier-Villars, 1928. p. 66 et suiv.; K. Haratomi, Japan J. Math. 8, p. 113, et 9 (1932), p. 1; A. Appert, C. R. Acad. Sci. Paris, 196 (1933), p. 1971; P. Urysohn (rédigé par P. Alexandroff), Bull. Sci. Math. 51 (1927), p. 43.

THÉORÈME III. Si E est compact $- \aleph_\alpha$ et si l'on accepte l'hypothèse du continu $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il est aussi compact $- \aleph_\xi$, $\aleph_\alpha \leq \aleph_\xi \leq \aleph_{\aleph_0}^{\aleph_0}$.

THÉORÈME IV. La propriété "complet $- \aleph_\alpha$ " entraîne complet $- \aleph_\xi$ pour tout ξ tel que $\alpha \leq \xi < \alpha'$, α' étant le premier nombre inaccessible $> \alpha$.²

Les propriétés sont équivalentes:

THÉORÈME V. 1° Séparable $- \aleph_\alpha$; 2° compact $- \aleph_{\alpha+1}$; 3° pour tout A clairsemé $- \aleph_\alpha$ on a $pA \leq \aleph_\alpha$; 4° pour tout A isolé $- \aleph_\alpha$ on a $pA \leq \aleph_\alpha$; 5° toute suite croissante ou décroissante d'ensembles fermés ou ouverts a au plus \aleph_α de terms différents; 6° toute couverture est réductible à une subcouverture de puissance $\leq \aleph_\alpha$.

THÉORÈME VI. 1° Compact $- \aleph_\alpha$; 2° borné $- \aleph_\alpha$ et complet $- \aleph_\alpha$; 3° pour des α de seconde espèce: quelle que soit la suite $- \omega_{\tau(\alpha)}$ d'ensembles fermés et de puissances $\geq \aleph_\alpha$ et tous en relation d'inclusion, il y a au moins un point en commun; 4° α tel que $\tau(\alpha) = \omega_0$: toute métrique qui convient à E est complète $- \aleph_\alpha$; 5° sous l'hypothèse du continu: tout ensemble, tiré de E , ayant la puissance $\geq \aleph_\alpha$ donne lieu à au moins un point d'accumulation maximée.

THÉORÈME VII. Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et $\omega_0 < \tau(\alpha) < \alpha$, il n'existe aucun espace compact $- \aleph_\alpha$.

THÉORÈME VIII. Sous l'hypothèse généralisée de continus $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, on peut construire, pour tout α , un espace U^α universel $- \aleph_\alpha$.

En terminant, nous voulons souligner que les questions de cette nature sont étroitement liées à la théorie des nombres transfinis qui, à son tour, peut-être facilitée par de telles considérations "géométriques". On peut dire la même chose en ce qui concerne les espaces $\{L_\alpha\}$ pour lesquels l'opération de dérivation est définie par des suites $- \omega_\alpha$ de points, ou bien les espaces $\{V_\alpha\}$, c'est-à-dire les espaces (V) de caractère local α , etc., on peut leur adjoindre aussi des dimensions et mesures transfinies. D'ailleurs, tout cela n'est qu'un cas très particulier des transfinitaux formels généraux dont l'étude se pose si naturellement à l'esprit humain. Nous y reviendrons à une autre occasion.

Énonçons encore ce théorème qui se dégage des considérations précédentes:

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ on a, pour tout α , $\aleph_\alpha^{\aleph_0} < \aleph_{\alpha+\omega_0}$.

²Ce sont les solutions non singulières de l'équation $\omega_\eta = \eta$; leur existence est très douteuse.

³Cf. Niemytzki-Tychonoff, *Fund. Math.* 12 (1928), p. 118.

TABLEAUX RAMIFIÉS D'ENSEMBLES. ESPACES PSEUDO-DISTANCIÉS

I. Soit T un tableau dont la α -ième ligne est composée des ensembles $G_{a_0 a_1 \dots a_\alpha}$ si α est de première espèce et des $G_{a_0 \dots a_\xi} = \prod_{\xi < \alpha} G_{a_\alpha \dots a_\xi}$ si α est de seconde espèce, les indices $a_0, a_1, \dots, a_\xi, \dots$ parcourant respectivement des ensembles $\{a_0\}, \{a_1\}, \dots, \{a_\xi\}, \dots$. Deux complexes d'indices des ensembles de T , A, B sont des ensembles bien ordonnés tels que: *ou bien* $AB = o$, et alors $G_A G_B = o$; *ou bien* l'un constitue un morceau initial de l'autre par exemple, $B = Aa_\xi a_{\xi+1} \dots$ et alors $G_A - G_B \neq o$ sauf dans le cas où G_A, G_B se composent d'un même point a et alors $G_A = G_{Aa} = G_{Aaa} = \dots \equiv a$ ou sont tous deux des ensembles vides, donc $G_A = G_{A0} = G_{A00} = \dots \equiv o^1$. Sous ces conditions, T sera appelé *tableau ramifié d'ensembles*. Le plus petit nombre γ tel que la γ -ième ligne de T ne contient que des points simples ou des zéros s'appelle le *rang* de T .

THÉORÈME. *T'étant un tableau ramifié d'ensembles, son rang γ est bien déterminé; il existe une suite d'ensembles, $\{E_\alpha\}$, telle que: 1° E_α est un élément de la α -ième ligne de T ; 2° $E_\alpha - E_\beta \neq o$ pour chaque $\alpha < \beta$ et chaque $\beta \leq \gamma$.*

II. E désignera un ensemble ordonné continu et limité²

$$D = (D_0, D_1, \dots, D_\chi, \dots)$$

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. C. R. Acad. Sci. Paris 198 (1934), 1563-1565 (Note présentée par M. Hadamard).

¹Si dans une ligne de T se trouvent deux ensembles vides et si les complexes des indices respectifs ne coïncident pas, ces zéros sont considérés comme des ensembles disjoints.

²Pour la terminologie, voir ma Note des C.R. Acad. Sci. Paris 198 (1934), p. 882, dans laquelle, *dans tous les raisonnements*, il faut remplacer la phrase: « suite fondamentale de segments de E » par la phrase « suite fondamentale d'intervalles de E ». Une suite bien ordonnée $s = \{\nu_\varphi\}$ d'intervalles décroissants de E est dite *fondamentale* si $p \Pi \nu_\varphi \equiv p \Pi V_\varphi = 1$ ou o , V_φ désignant la fermeture rel. E de ν_φ ; deux telles suites $\{\nu_\varphi^1\}, \{\nu_\varphi^2\}$ sont dites *équivalentes* si à chaque ν_φ^1 correspond un ν_ψ^2 tel que $\nu_\varphi^1 \supset \nu_\psi^2$ et vice versa.

un développement complet de E , des développements partiels $D_0, D_1, \dots, D_\alpha, \dots$ étant composés des termes d'ordre resp. $0, 1, \dots, \alpha$ de D : $E_{a_0}, E_{a_0 a_1}, \dots, E_{a_0 a_1 \dots a_\alpha}, \dots$ dont l'ensemble constitue le tableau horizontal H du développement D de E ; le tableau vertical V de D est formé des arguments du développement D : $F, F_{a_0}, \dots, F_{a_0 a_1 \dots a_v}, \dots$. Le signe $\varphi(x)$ désignera le premier nombre α tel que le point x de E se trouve dans la α -ième ligne de H .

THÉORÈME a) Il y a au moins un développement complet D de E ; b) le tableau horizontal H de D est ramifié; c) le développement complet D est déterminé d'une manière unique par son tableau vertical V ; d) l'ensemble de points des arguments effectifs de D est dense dans E ; e) la fonction $\rho(x)$, $x \in E$ est uniforme et possède un maximum qui est égal au rang γ du tableau horizontal H de D .

III. Un ensemble quelconque E est dit *espace pseudo-distancié* ou *espace* de la classe (Δ) si l'ensemble de couples de points de E peut être considéré comme un ensemble ordonné $\mathcal{M} = \{(x, y)\}$, $x, y \in E$ tel que: 1° (x, x) est le premier élément ζ de \mathcal{M} pour tout $x \in E$, et *vice versa*, si $(x, y) = \zeta$, alors $x \equiv y$; 2° $(x, y) = (y, x)$ pour chaque x et y de E ; 3° il existe une fonction univoque $\eta = \varphi(\xi)$, $\xi, \eta \in \mathcal{M}$ telle que $\varphi(\xi) \rightarrow \zeta$ si $\xi \rightarrow \zeta$; si $(x, y) < \varepsilon$, $(y, z) < \varepsilon$ alors $(x, z) \leq \varphi(\varepsilon)$ pour chaque x, y, z de E ; 4° pour qu'un point a de E soit point d'accumulation d'un ensemble $F \subset E$, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble $G \subset F$ tel que $(a, y) \rightarrow \zeta$ si y parcourt G^3 .

Si $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \dots > \varepsilon_v > \dots \rightarrow \zeta$, $v < \omega_\alpha$, ω_α étant régulier, des signes ε_v jouent le rôle des nombres arbitrairement petits et les nombres ω_α , N_α le rôle des nombres ω_0 , N_0 dans le cas des espaces distanciés. On a ainsi des classes $(\Delta^0), (\Delta^1), \dots, (\Delta^\alpha), \dots$, ω_α étant régulier, qui n'ont en commun que des certains espaces pseudo-distanciés composés des points isolés. En particulier, la classe (Δ^0) contient la classe (\mathcal{D}) de M . Fréchet⁴.

D'une manière générale, en partant d'une certaine classe d'espaces abstraits et en leur attribuant un rôle actif de paramétrisation, on arrive à de nouvelles classes d'espaces abstraits. Dans le cas des espaces distanciés et pseudo-distanciés, le rôle des espaces actifs est joué respectivement par des ensembles de nombres réels non négatifs et par des ensembles ordonnés limités du côté gauche.

³Evidemment, plusieurs couples de points de E peuvent coïncider dans \mathcal{M} .

⁴Rend. Palermo 22 (1906), p. 18; *Espaces abstraits*, Paris. 1928, p. 61 at 218. Si $(\Delta^0) - (\mathcal{D}) \neq 0$, la classe (Δ^0) fournirait une réponse affirmative à deux questions de M. Fréchet (*Espaces abstraits*, p. 190 et 193).

IV. *Toute proposition mathématique est une fonction logique des variables: ensemble et élément*⁵.

⁵Pour l'axiomatique du mot *ensemble*, voir E. Zermelo, *Fund. Math.* **16** (1930), p. 28; cf. aussi E.W. Huntington, *Trans. Amer. Math. Soc.* **6** (1905).

SUR LES CLASSES (\mathcal{E}) et (\mathcal{D})

L'objet de ce travail est: de donner une nouvelle définition des classes (\mathcal{E}) et (\mathcal{D}) de M. Fréchet¹, d'indiquer quelques cas de distanciabilité (\equiv métrisation) d'espaces abstraits², et, enfin, de poser un problème équivalent³ au célèbre problème de Souslin.

I.1. Classes (\mathcal{E}), Nous désignerons par M_0 un espace abstrait quelconque contenant un point t_0 vérifiant la condition suivante: C_0 . Il existe

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Publ. Math. Univ. Belgrade 5 (1936), 124–132.

¹D'après M. Fréchet, un espace abstrait² E est dit une *classe* (\mathcal{E}) si l'on peut faire correspondre à tout couple de points, a, b , de E un nombre réel, ab , appelé *écart de a et de b* , jouissant des propriétés suivantes:

1° $ab = ba$;

2° $ab = 0$ équivaut à $a = b$;

3° Pour qu'un point a de E soit un point d'accumulation d'un sous-ensemble F de E , il faut et il suffit que F contienne une suite de points deux à deux distincts, $a_0 \dots a_n \dots$, tels que a soit le seul point x de E tel que la suite des nombres réels xa_n , ($n = 0, 1, \dots$), converge vers 0.

E est dit *distanciable* ou une classe (\mathcal{D}) [plus précisément une classe (\mathcal{D}_0)] si l'espace E peut être défini moyennant un écart régulier c'est-à-dire si, en sus des conditions 1°, 2° et 3°, on a celle-ci:

4° On peut faire correspondre à tout nombre réel $x > 0$ un nombre réel $f(x) > 0$ tel que $\lim f(x) = 0$, et que, quels que soient les points a, b, c de E et le nombre réel positif x , les inégalités $ab < x$, $bc < x$ entraînent $ac < f(x)$.

Remarquons que la définition primitive de M. Fréchet des classes (\mathcal{D}) différerait de la précédente, la condition 4° ayant été remplacée par celle-ci:

Quels que soient les points a, b, c de E , on a $ab \leq ac + bc$.

L'équivalence des deux définitions – que M. Fréchet croyait comme très probable dès 1910 – a été prouvée, pour la première fois, par M. Chittenden en 1916 (voir Maurice Fréchet, *Espaces abstraits*, Paris 1928; p. 213).

²Un ensemble, E , est dit un *espace abstrait*, s'il y a un procédé faisant correspondre à tout $F \subseteq E$ un $F' \subseteq E$, appelé le dérivé de F . Si $F' \subseteq (F + G)'$, pour tout $F \subseteq E$ et pour tout $G \subseteq E$. E est dit une *classe* (\mathcal{V}) de M. Fréchet (*loc. cit.* pp. 167 et 179).

Pour d'autres définitions équivalentes des espaces abstraits, voir un article de M. Antoine Appert (*Mathematica (Cluj)* 11 (1935), pp. 229–246).

³Deux problèmes P, Q sont dits équivalents si l'hypothèse que la réponse à P soit affirmative entraîne la réponse affirmative à Q ; et réciproquement.

une suite (de type ordinal $\omega \equiv \omega_0$)⁴ de sous-ensembles, W_n , ($n < \omega$), de M_0 tels que:

a) $W_{n+1} \subseteq W_n$, ($n < \omega$) et $\prod_{n < \omega} W_n = t_0$;

b) Pour que $t_0 \in F'$, ($F \subseteq M_0$), il faut et il suffit que, pour tout $n < \omega$, W_n contienne un point de F distinct de t_0 .

Ceci étant, nous allons démontrer le

THÉORÈME 1. *Pour qu'un espace abstrait, E , soit une classe (\mathcal{E}) [ou plus précisément (\mathcal{E}_0)], il faut et il suffit qu'il existe un point t_0 appartenant à un espace abstrait M_0 vérifiant la condition C_0 , et qu'on puisse faire correspondre à tout couple de points a, b de E un point, (a, b) , de M_0 vérifiant ces conditions:*

$$1' (a, b) = (b, a); \quad 2' (a, b) = t_0 \text{ équivaut à } a = b;$$

3' a, F étant respectivement un point et un sous-ensemble quelconques de E , pour que $a \in F'$, il faut et il suffit que F contienne un ensemble S tel que a soit le seul point x de E tel que, quel que soit l'indice $n < \omega$, l'ensemble $S - a$ contienne un point a_n tel que $(a, a_n) \in W_n$.

Notation. Dans ce qui va suivre, (a, b) , ab désigneront un point quelconque appartenant respectivement à un certain M_0 ou, en particulier, à l'ensemble des nombres réels ≥ 0 .

Que la condition du théorème soit nécessaire, c'est bien évident; en effet, il suffit de désigner par M_0 : l'ensemble des nombres réels, par t_0 : le zéro, et par W_n : l'ensemble des nombres réels x tels que $0 \leq x < \frac{1}{n+1}$, ($n < \omega$).

Prouvons que la condition est suffisante c'est-à-dire s'il existe un écart vérifiant 1', 2' et 3', il en existe aussi un vérifiant les conditions 1°, 2° et 3° de la note¹.

Posons $aa = 0$ pour tout $a \in E$; a, b étant deux points distincts quelconques de E , nous poserons $ab = \frac{1}{n+1}$, n étant le plus petit indice $\nu < \omega$ tel que $(a, b) \notin W_\nu$; il est clair que l'entier n est bien déterminé. Nous disons qu'on obtient ainsi un écart définissant l'espace. Nous contenterons de prouver que la condition 3° de la note¹ est vérifiée.

Tout d'abord, si $a \in F'$, $F \subseteq E$, en égard à 3', l'ensemble $F - a$ contient un ensemble S tel que a soit le seul point $x \in E$ jouissant de la propriété que, $n < \omega$ étant donné, il y ait un $a_n \in S$ tel que $(x, a_n) \in W_n$;

⁴ ω (ou ω_0) désigne le plus petit nombre ordinal infini c'est-à-dire le type ordinal de l'ensemble des entiers positifs.

de plus, on peut supposer qu'aucun des ensembles $W_{n+1} - W_n$, ($n < \omega$), ne contienne une infinité de points (a, s) , ($s \in S$). On en conclut facilement que a est le seul point x de E tel que les nombres réels xs , ($s \in S$), convergent vers 0.

Inversement soient $a \in E$ et $F \subseteq E$ tels que $F - a$ contienne un sous-ensemble S jouissant de la propriété que a soit le seul point x de E tel que l'ensemble des nombres réels xs , s parcourant S , converge vers 0; prouvons que a est le seul point x de E tel que, $n < \omega$ étant donné, l'ensemble S contienne un point a^n , tel que $(x, a^n) \in W_n$ c'est-à-dire $a \in F'$. En effet, il y a un entier $N > n$ et un point $a_N \in S$ tel que $aa_N = \frac{1}{N+1}$; cela veut dire précisément que $(a, a_N) \in W_{N-1}$; en posant $a_N = a^n$, on aura $(a, a^n) \in W_N$ puisque $W_n \supseteq W_{N-1}$.
C. q. f. d.

I.2. Classes (D). En se servant de notations précédentes désignons par $4'$ la condition que voici:

$4'$ Il y a une fonction $\varphi(n)$ faisant correspondre à tout ordinal $n < \omega$ un ordinal $\varphi(n) < \omega$ telle que $\varphi(n) \rightarrow \omega$ si $n \rightarrow \omega$ et que, quels que soient les points a, b, c de E et l'ordinal $n < \omega$, les relations $(a, b) \in W_n$, $(b, c) \in W_n$ entraînent $(a, c) \in W_{\varphi(n)}$.

THÉORÈME 2. *Si, dans le texte du théorème 1, on remplace partout le signe (E) par le signe D et si, au texte ainsi modifié, l'on ajoute la condition $4'$, on obtiendra, de nouveau, un théorème (caractérisant les classes (D)).*

Il suffit de voir que 4° , en note¹, est une conséquence des $1', 2', 3'$ et $4'$.

Soit x un nombre réel quelconque > 0 ; si $x \geq 1$, posons $f(x) = x$; si $0 < x < 1$, soit $n(x)$ l'entier vérifiant $\frac{1}{n(x)+1} < x \leq \frac{1}{n(x)}$ et posons $f(x) = \frac{1}{\varphi(n(x))+1}$, $\varphi(n)$ satisfaisant à $4'$; prouvons que $f(x)$ satisfait à 4° , ab étant défini comme tout à l'heure: $ab = \frac{1}{n+1}$, n étant le premier ordinal $\nu < \omega$ tel que $(a, b) \notin W_\nu$.

Que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, c'est bien manifeste; prouvons encore que si $0 < x < 1$, $ab < x$, $bc < x$, alors $ac < f(x)$, pour tout triple de points a, b, c de E . En effet, si $ab < x$, $bc < x$, $0 < x < 1$, on aura $ab < \frac{1}{n(x)}$, $bc < \frac{1}{n(x)}$; dès lors $(a, b) \in W_{n(x)}$ et $(b, c) \in W_{n(x)}$; à la suite de la condition $4'$, on aura $(a, c) \in W_{\varphi(n(x))}$ par conséquent $ac < \frac{1}{\varphi(n(x))+1}$ c'est-à-dire $ac < f(x)$.

Les deux théorèmes précédents nous rendent la possibilité de simplifier la définition des classes (E) et (D) en choisissant d'une manière aussi simple que possible l'espace "actif" M_0 et le "repère-point" $t_0 \in M_0$, par

exemple l'espace composé de 0 (qui sera alors notre point t_0) et des nombres rationnels $\frac{1}{n}$, ($0 < n < \omega$), ou l'espace des nombres ordinaux $\leq \omega_0$, le dernier choix étant susceptible de généralisations à des nombres transfinis (et réguliers) ω_α^5 .

En particulier, tout espace qui est une classe (\mathcal{E}) ou (\mathcal{D}) et qui n'est pas isolé peut jouer le rôle de M_0 , t_0 désignant un point non isolé quelconque de l'espace. Par conséquent, le zéro dans la définition courante des classes (\mathcal{E}) et (\mathcal{D}) peut être remplacé (et alors partout!) par un nombre réel (ou complexe) quelconque.

II. Quelques cas de métrisation. On sait qu'il y a un espace qui est une classe (\mathcal{E}) sans être une classe (\mathcal{D}) (v. Fréchet, loc. cit. p. 215); il sera alors intéressant d'indiquer quelques cas où cette différence s'évanouit.

THÉORÈME 3. *Tout espace abstrait qui est une classe (\mathcal{E}) admettant une base ramifiée⁶ de voisinages, est une classe (\mathcal{D}).*

Désignons par \mathcal{G} une base ramifiée quelconque de l'espace considéré E . Si $a \in E$ et $n < \omega$, soit E_a^n un voisinage de a appartenant à \mathcal{G} et tel que $E_a^n \in S\left(a, \frac{1}{n+1}\right)$, $S\left(a, \frac{1}{n+1}\right)$ désignant l'ensemble de tous les points x de E tels que $ax < \frac{1}{n+1}$. En désignant par \mathcal{F}_n la famille des E_a^ν , ($a \in E, n \leq \nu < \omega$), on aura ceci:

α . Pour tout $n < \omega$, \mathcal{F}_n sera une *couverture* de l'espace E ; autrement dit, tout point de E est *intérieur* à un élément de \mathcal{F}_n ;

β . $\mathcal{F}_0 \cdots \mathcal{F}_n \cdots$, ($n < \omega$), est une *suite monotone de couvertures* de E ; autrement dit A, B étant deux éléments de \mathcal{F}_{n+1} ayant en commun un point intérieur, il y a un $C \in \mathcal{F}_n$ tel que $A + B \subseteq C$, pour tout $n < \omega$;

γ . $\mathcal{F}_0 \cdots \mathcal{F}_n \cdots$, ($n < \omega$), est une *suite complète de couvertures* de E , ce qui veut dire ceci: a étant un point quelconque de E , V_n désignant un élément quelconque de \mathcal{F}_n , ($n < \omega$), contenant a comme un point intérieur la suite $V_0 \cdots V_n \cdots$ jouit de la propriété que, quel que soit le voisinage V de a , il y ait un $V_n \subseteq V$.

⁵C'est ce que nous avons fait ailleurs (v. C. R. Acad. Sci. Paris 198 (1934), p. 1563, partie III) lorsque nous avons défini la notion d'espaces pseudo-distanciés; à cette époque-là, nous n'avons pas pu prouver que l'introduction des espaces M_0 ne donne rien de nouveau et que, en particulier, pour se servir d'une notation qui y est employée, les classes (Δ^0) et (\mathcal{D}) coïncident (*Ibidem*, partie III, en note).

Maintenant, nous croyons justifié l'emploi de l'indice o dans M_0, t_0, \mathcal{D}_0 , etc, la généralisation à un ω_α régulier quelconque étant immédiate.

⁶Chaque famille de voisinages définissant un espace abstrait est dite une base de l'espace. Une famille d'ensembles est dite ramifiée si, A, B étant deux de ses éléments quelconques on ait $A \subset B$ ou $B \subset A$ ou $AB = 0$.

La base \mathcal{G} étant ramifiée, les propriétés α, β sont évidentes; prouvons que la propriété γ subsiste aussi. Tout d'abord, on peut supposer que le voisinage V dont on parle dans γ soit un élément de la famille \mathcal{G}_0 des E_a^n , ($a \in E, n < \omega$), dont on vient de parler. La famille \mathcal{G} étant ramifiée et que $a \in V \cdot V_n$, ($n < \omega$), si la propriété γ ne subsistait pas, on aurait $V \subset V_n$, pour tout $n < \omega$ donc $V \subseteq \prod_{n < \omega} V_n$. Le cas où V ne contiendrait que le point a étant évident, supposons que V et donc $\prod V_n$ aussi ont au moins deux points; cette éventualité est impossible à cause de ceci:

Si $E^n \in \mathcal{F}_n$, l'ensemble $\prod_{n < \omega} E^n$ est composé d'un point au plus. Prouvons donc le dernier énoncé. Pour ceci, remarquons que $n < \omega$ étant donné, il y a un $a_n \in E$ et un ν_n tels que $n \leq \nu_n < \omega$ et $E^n = E_{a_n}^{\nu_n}$; par conséquent $\prod_{n < \omega} E^n = \prod_{n < \omega} E_{a_n}^{\nu_n} \subseteq \prod_{n < \omega} S\left(a_n, \frac{1}{\nu_n + 1}\right)$.

Le dernier ensemble ayant un point au plus⁷, il en sera ainsi aussi de l'ensemble $\prod E^n$ donc aussi de V , contrairement à l'hypothèse.

Finalement, les propriétés α, β, γ étant démontrées, il s'ensuit, d'après un théorème de M. Alexandroff et d'Urysohn (v. Fréchet, loc. cit. p. 220) que l'espace E est distanciable.

THÉORÈME 4. *Tout espace ordonné connexe qui est une classe (\mathcal{E}) est distanciable et, par conséquent, homéomorphe à un ensemble de nombres réels.*

Pour la démonstration du théorème 4, voir la dernière section de mon travail "*L'espace (Ω) n'est pas une classe (\mathcal{E})*" (ce tome p. 92).

Qu'il soit remarqué que je ne connais aucun espace ordonné qui serait une classe (\mathcal{E}) sans être, en même temps, distanciable.

THÉORÈME 5. *Soit E un espace abstrait admettant une base ramifiée⁶ au plus dénombrable, \mathcal{G} , de voisinages; pour que E soit distanciable, il faut et il suffit qu'il vérifie l'une quelconque des trois conditions P, Q, R que voici:*

P. L'espace E vérifie l'axiome de séparation de M. Fréchet⁸;

⁷S'il y en avait deux distincts, x, y , la suite des points a_n , ($n < \omega$), convergerait vers x et y , à la fois, puisque $\lim x a_n = \lim y a_n = 0$ si $n \rightarrow \omega$, ce qui est impossible à cause de la condition 3°.

⁸L'axiome de séparation de M. Fréchet dit: Quels que soient les deux points distincts, a, b , de E , il y a un ensemble $V_a \subseteq E - b$ contenant a comme un point intérieur et un ensemble $V_b \subseteq E - a$ contenant b comme s'énonce comme suit: a, b étant deux points distincts quelconques, il a un voisinage V_a de a et un voisinage V_b de b tels que $b \notin V_a$ et $a \notin V_b$ (L'axiome de M. Hausdorff exige de plus que $V_a V_b = 0$).

Q. Tout ensemble composé d'un seul point de l'espace E est dépourvu de points d'accumulation;

R. Quel que soit le point a de l'espace, la partie commune de tous les voisinages de a est composée du point a .⁹

Il est utile de prouver d'abord ce

LEMME. Dans tout espace E qui est une classe $(V)^2$, les trois conditions P , Q , R sont, deux à deux, équivalentes.

Nous allons prouver la chaîne des conclusions: $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow P$.

Tout d'abord s'il existait un ensemble, F , composé d'un point, x , de E et ayant un point d'accumulation, b , la relation $b \in F$ voudrait dire que tout voisinage de b contienne un point de F distinct de b ; par conséquent, tout voisinage de b contiendrait le point $x \neq b$ contrairement à l'hypothèse P .

D'autre part, a étant un point quelconque de E , si la partie commune des voisinages de a contenait un point $b \neq a$, a serait un point d'accumulation de l'ensemble composé du point b , contrairement à l'hypothèse Q .

Enfin, a , b étant deux points distincts de E , celui-ci vérifiant R , si tout voisinage de a contenait b , la partie commune des voisinages de a contiendrait également le point b , contrairement à R .

Ceci étant, revenons à un espace E vérifiant les conditions du théorème 5; à la suite du lemme, E vérifie les conditions P , Q , R .

Tout élément de la base \mathcal{G} dont on parle dans le théorème 5 est un ensemble ouvert de l'espace E ; dans le cas contraire, il y aurait un $G \in \mathcal{G}$ composé plus d'un point et un point $g \in G$ tels que tout voisinage de g appartenant à \mathcal{G} contiendrait G ; la dernière conclusion résulte de ce que la base \mathcal{G} est ramifiée; autrement dit, la partie commune de la famille des voisinages de g serait composée de plus d'un point, contrairement à R .

Ainsi, nous avons démontré que E est un espace accessible.

Prouvons que E est un espace régulier. F étant un ensemble fermé quelconque de E et a un point quelconque de $E - F$, il y a deux ensembles ouverts disjoints V_a et V_F tels que $a \in V_a$ et $F \subseteq V_F$. Tout d'abord, F étant fermé, il y a un voisinage V_a de a appartenant à \mathcal{G} et disjoint de F . D'autre part, f étant un point quelconque de F , il y a, à la suite de la condition P , un voisinage V_f de f tel que $a \notin V_f$; en posant $V_F = \sum_f V_f$, f

⁹Remarquons qu'aucune des conditions P , Q , R n'est une conséquence de ce que E admet une base ramifiée dénombrable.

parcourant F , l'ensemble V_F est ouvert, disjoint de V_a et contient F . Bref, l'espace considéré E est accessible régulier et admet une base dénombrable¹⁰; à la suite d'un théorème d'Urysohn-Tychonoff, (v. Fréchet, loc. cit. p. 220), E est distanciable. C. q. f. d.

Tout espace distancié étant, d'après M. Tietze, complètement normal (v. Fréchet, loc. p. 206), on a le

COROLLAIRE. *Tout espace abstrait vérifiant l'axiome de séparation de M. Fréchet⁸ et admettant une base ramifiée⁶ au plus dénombrable, est complètement normal.*

III. Les espaces $T(\mathcal{F})$. Pour terminer, posons le problème suivant:

Soient T un ensemble et \mathcal{F} une famille ramifiée⁶ de sousensembles de T jouissant des propriétés suivantes:

A. Quel que soit le point a de T , la famille des éléments de \mathcal{F} contenant a est: dénombrable, bien ordonnée par rapport à la relation d'inclusion \supset et, enfin, telle que la partie commune de ses éléments soit composée du point a ;

B. Toute sous-famille monotone de \mathcal{F}^{11} est au plus dénombrable;

C. Toute sous-famille disjonctive de \mathcal{F}^{11} est au plus dénombrable.

En considérant tout élément de \mathcal{F} comme voisinage de chacun de ses points, l'espace abstrait ainsi défini, $T(\mathcal{F})$, est-il nécessairement une classe (E) [et donc, à la suite du théorème 3, une classe (D)]?

On peut prouver que la réponse affirmative au problème précédent entraîne la réponse affirmative au problème bien connu de Souslin; et réciproquement¹².

¹⁰M. Fréchet dit d'un espace admettant une base dénombrable qu'il est *parfaitement séparable*; on sait qu'un espace séparable n'est pas nécessairement parfaitement séparable. D'autre part, l'étude des espaces $T(\mathcal{F})$ qu'on va définir dans la section III, nous a amené à généraliser la condition de séparabilité en énonçant la condition K_0 que voici:

Il y a une suite dénombrable d'ensembles isolés (appartenant à l'espace considéré) dont la réunion est partout dense (dans l'espace).

¹¹Une famille ramifiée d'ensembles est *monotone* (disjonctive) si elle ne contient aucun couple d'ensembles disjoints (non disjoints).

¹²Pour plus de détail là-dessus, voir Kurepa, *Ensembles ordonnés et ramifiés*. (Thèse, Paris, 1935): ou Publ. Math. Univ. Belgrade 4 (1935), 1-138), pp. 106 et 124: dans la terminologie qui y est employée, \mathcal{F} est un *tableau ramifié* de rang $\leq \omega_1$ et de puissance $\leq \aleph_1$, l'égalité éventuelle entraînant la réponse négative au problème précédent (et donc à celui-là de Souslin). Si \mathcal{F} est dénombrable, la réponse au problème est - on le déduit du théorème 5 - affirmative; et vice versa.

On peut prouver ceci: *Pour que \mathcal{F} soit dénombrable, il faut et il suffit que l'espace $T(\mathcal{F})$ vérifie la condition K_0 (que nous venons d'énoncer en note¹⁰).*

Je ne sais pas si le problème précédent est équivalent à au moins un des trois problèmes qu'on en-déduit en y barrant respectivement B , C , et, B et C , à la fois.

Remarquons que l'étude des espaces $T(\mathcal{F})$ nous a amené à considérer une classe d'espaces s'intercalant entre les classes (\mathcal{E}) et (V_ω) de M. Fréchet.

UN CRITÈRE DE DISTANCIABILITÉ

Le but de ce travail est de démontrer le

THÉORÈME D_0 . *Pour qu'un espace abstrait, E , soit un espace (D_0) ¹ il faut et il suffit que:*

a) *Il existe une famille d'ensembles, W_0, \dots, W_n , ($n < \omega_0$)², telle que, pour tout $n < \omega_0$, $W_n \supseteq W_{n+1}$, et qu'il n'y ait qu'un point t , appartenant à chacun des ensembles de la famille;*

b) *Il existe un procédé faisant correspondre à tout couple de points, a, b , de l'espace un point bien déterminé, (a, b) , de l'ensemble-réunion $\sum_n W_n = W_0$, vérifiant les conditions 1', 2', 3₀, H₀, 4'₀ bis voici:*

1'. $(a, b) = t$ équivaut à $a = b$;

2'. $(a, b) = (b, a)$;

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. *Mathematica* (Cluj) 13 (1937), 59-65 (Reçu le 29 Octobre 1936.)

¹Un (D_0) veut dire un espace (D) c'est-à-dire un espace distancié (distançiable, métrique) au sens de M. Fréchet.

Pour la terminologie, voir Maurice Fréchet, *Espaces abstraits*, Paris, 1928, p. 289. Toutefois, rappelons qu'un espace est *distançiable* s'il est une classe (D) de M. Fréchet c'est-à-dire si l'espace peut être défini moyennant un écart, (a, b) , vérifiant la condition $(a, b) \leq (a, c) + (b, c)$, pour tout triple de points a, b, c de l'espace.

L'utilité de la notation (D_0) au lieu de (D) provient, dans le cas qui nous occupe, de ceci: Il est légitime de remplacer partout, dans l'énoncé du Théorème D_0 , l'indice 0 par un nombre ordinal α quelconque; on obtient ainsi le "Théorème D_α " définissant des *spaces* (D_α) dont l'étude est analogue à celle des espaces (D) de M. Fréchet (cf. la notation d'*espaces pseudo distanciés* dans ma Note des *C.R. Acad. Sci. Paris*, 198 (1934), 1563, section III).

On peut prouver ceci: α, β étant deux nombres ordinaux quelconques, pour que $(D_\alpha) \equiv (D_\beta)$ c'est-à-dire pour que tout espace (D_α) soit un espace (D_β) , et tout espace (D_β) un espace (D_α) , il faut et il suffit que $\tau_\alpha = \tau_\beta$ (rappelons que, ϕ étant un ordinal de seconde espèce, τ_ϕ désigne la borne inférieure des nombres η tels qu'il existe une suite strictement croissante d'ordinaux $\alpha\xi$, ($\xi < \eta$), inférieurs à ϕ et tendant vers ϕ ; si ϕ est de première espèce, alors $\tau_\phi = \phi$).

²Comme d'habitude ω_0 (ou ω) désigne le type d'ordre de l'ensemble des entiers positifs.

3₀. a, F étant respectivement un point et un ensemble quelconques de l'espace, pour que a soit point d'accumulation de F , il faut et il suffit que, pour tout $n < \omega_0$, l'ensemble F ait un point, a_n , distinct de a vérifiant $(a, a_n) \in W_n$;

4'₀ bis. a, n étant respectivement un point et un ordinal $< \omega_0$ quelconques, en désignant par $S(a, W_n)$ l'ensemble de tous les points b vérifiant $(a, b) \in W_n$, il y a deux ordinaux, $\phi(n), \psi(n)$, inférieurs à ω_0 et tels que la relation $b \in S(a, W_{\phi(n)})$ entraîne $S(b, W_{\psi(n)}) \subset S(a, W_n)$.

H₀. Quels que soient les points distincts a, b il y a un $n < \omega_0$ tel que les ensembles $S(a, W_n)$ et $S(b, W_n)$ soient disjoints.³

Remarque 1. On se rend facilement compte que l'ensemble des conditions 3₀ et H₀ est équivalent à la condition 3'₀ que voici:

3'₀. a, F étant respectivement un point et un ensemble, pour que a soit point d'accumulation de F , il faut et il suffit que F contienne un ensemble S jouissant de la propriété que a soit le seul point x de l'espace tel que, pour tout $n < \omega_0$, l'ensemble $S - x$ ait un point a_n vérifiant $(x, a_n) \in W_n$.

1. Ceci étant, passons à la démonstration de la première partie du théorème D_0 . Soit donc E un espace distancié quelconque; spécifions les signes intervenant dans l'énoncé du théorème et désignons, pour tout $n < \omega_0$, par W_n l'ensemble des nombres réels x tels que $0 \leq x \leq 1/n$; par conséquent, $0 = t$ et W_0 coïncide avec l'ensemble des nombres réels $x \geq 0$; on posera $\phi(n) = \psi(n) = 2n + 1$.

D'autre part, si (a, b) est une distance entre a et b , la relation $b \in S(a, W_{\phi(n)})$ est équivalente à $(a, b) < 1/(2n + 1)$; si, en plus, $c \in S(b, W_{\psi(n)})$ c'est-à-dire $(b, c) < 1/(2n + 1)$, on aura $(a, c) \leq (a, b) + (b, c) < 1/n$, et donc $c \in S(a, W_n)$; finalement, $S(b, W_{\psi(n)}) \subset S(a, W_n)$.

2. Avant de passer à la démonstration de la seconde partie du théorème D_0 , nous prouverons le lemme suivant:

LEMME. Est régulier tout écart (a, b) définissant un espace vérifiant la condition 4⁰ bis que voici:

4⁰ bis. Dans l'ensemble des nombres réels positifs $x > 0$, on peut définir trois fonctions réelles positives, finies ou infinies, $f_i(x)$, ($i = 1, 2, 3$), dont chacune tend vers 0 avec x et étant telles que, quels que soient les

³La condition H_0 s'exprime encore comme suit: L'espace vérifie l'axiome de séparation de M. Hausdorff. Dans le cas présent, le rôle de H_0 est celui d'assurer l'unicité de point-limite d'une suite "convergente" de points (pour que l'espace soit une classe (L) au sens de M. Fréchet).

trois points a, b, c de l'espace, les inégalités $(a, b) < f_1(x)$, $(b, c) < f_2(x)$ entraînent $(a, c) < f_3(x)$.

Autrement dit, par définition même d'un *écart régulier*, il s'agit de prouver l'existence d'une fonction, $f(x)$, positive, finie ou infinie, définie pour tout $x > 0$, tendant vers 0 avec x et étant telle que, quels que soient les trois points, a, b, c et le nombre x les inégalités $(a, b) < x$, $(b, c) < x$, entraînent $(a, c) < f(x)$.

Les lettres $x, f_i(x)$, ($i = 1, 2, 3$), a, b, c remplissant les conditions du lemme, désignons par $g(x)$ le plus petit des nombres $f_1(x), f_2(x)$. On voit que

$$(1) \quad g(x) > 0 \text{ si } x > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

et que

$$(2) \quad \text{les inégalités } (a, b) < g(x), (b, c) < g(x) \text{ entraînent } (a, c) < f_3(x).$$

Vu les relations (1), on prouve sans peine l'existence d'une suite décroissante de nombres réels positifs

$$(3) \quad x_1 > x_2 > \dots \rightarrow 0$$

tels que, en posant $y_n = g(x_n)$,

$$(4) \quad y_0 > y_1 > \dots \rightarrow 0.$$

Ceci étant, faisons correspondre à tout nombre réel $x > 0$ le signe $f(x)$ défini comme suit: si $y_0 < x$, $f(x)$ désignera le diamètre de l'espace c'est-à-dire la borne supérieure des nombres réels (a, b) , a, b parcourant les points de l'espace; si l'on n'a pas $y_0 > x$, on posera $f(x) = f_3(x_n)$, l'indice n vérifiant $y_{n+1} < x \leq y_n$.

Etant donné que $f_3(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, vu (3) et (4), on conclut que $f(x)$ est une fonction positive finie ou infinie, définie pour tout $x > 0$ et qu'elle tend vers 0 avec x . Prouvons, enfin, que a, b, c, x étant quelconques, les relations $(a, b) < x$, $(b, c) < x$, entraînent $(a, c) < f(x)$. La chose étant évidente dans le cas où $y_0 < x$, supposons que $y_n \geq x > y_{n+1}$; dans ce cas, les inégalités $(a, b) < x$, $(b, c) < x$ donnent

$$(a, b) < y_0 \equiv g(x_n), \quad (b, c) < y_n \equiv g(x_n).$$

Dès lors, vu (2), on tire $(a, c) < f_3(x_n)$ c'est-à-dire $(a, c) < f(x)$.

Rapporté d'un théorème de M. Chittenden affirmant la distanciabilité (métrisation) de tout espace définissable moyennant un écart régulier (v. Fréchet, loc. cit. p. 218), le lemme nous donne ce

CORROLAIRE. *Est distanciable tout espace définissable moyennant un écart vérifiant la condition 4⁰ bis ci-dessus.*

4. Prouvons ceci:

Toutes les fois qu'un espace vérifiant les conditions du Théorème D_0 a au moins un point d'accumulation, chacune des fonctions $\phi(n)$, $\psi(n)$, intervenant dans la condition $4'_0$ bis tend vers ω_0 avec n .

Supposons, par impossible, l'existence d'une suite d'ordinaux $n_k < n_{k+1} < \omega_0$ ($k < \omega_0$) tels que, par exemple, $m = \phi(n_k)$, ($k < \omega_0$), bien qu'il existe un point d'accumulation, soit a ; par conséquent, il y aurait un point $b \neq a$ appartenant, en particulier, à $S(a, W_m)$ où $m = \phi(n_k)$.

On en déduirait que pour tout $k < \omega_0$, le point b appartiendrait à $S(a, W_{n_k})$ donc aussi à l'ensemble $\prod_{k < \omega_0} S(a, W_{n_k})$ ce qui est impossible, le dernier ensemble étant composé du seul point $a \neq b$. Par un raisonnement analogue, on prouve que $\psi(n) \rightarrow \omega_0$ quand $n \rightarrow \omega_0$.

5. Démontrons maintenant que tout espace vérifiant les conditions du Théorème D_0 est un espace $(D_0) \equiv (D)$.

Le cas où l'espace n'aurait aucun point d'accumulation étant trivial, nous supposons qu'il y ait au moins un point non-isolé; dans ces conditions, un prouve facilement que, $n < \omega_0$ étant donné, il y a un $\nu > n$ tel que $W_n \supset W_\nu$; dès lors, nous pouvons supposer que

$$(5) \quad W_0 \supset W_1 \supset \dots \supset \dots, \quad (n < \omega_0).$$

D'autre part, d'après le n^0 2, on aura

$$(6) \quad \lim \phi(n) = \lim \psi(n) = \omega_0 \text{ quand } n \rightarrow \omega_0.$$

Ceci étant, soient a, b deux points distincts quelconques; nous poserons

$$(7) \quad aa = 0, \quad a'b = \frac{1}{n+1} \text{ si } (a, b) \in W_n \text{ sans que } (a, b) \in W_{n+1}.$$

On prouve facilement que le nombre ab défini par (7) peut jouer le rôle d'un écart de a et b , c'est-à-dire que, dans le cas où les signes intervenant dans l'énoncé du théorème ont la signification que nous leurs avons attribuée dans le n^0 1, le nombre ab défini par (7) vérifie les conditions $a, 1', 2', 3_0$ et H_0 .⁴

6. Nous allons prouver que l'écart ab est régulier. Pour ceci, il suffira, d'après le lemme précédent, de prouver que l'écart défini par (7) vérifie la condition 4^0 bis du lemme.

⁴Voir le théorème 1 dans mon article *Sur les classes (E) et (D)*, Pub. Math. Univ. Belgrade 5 (1936)

Tout d'abord, on déduit de (5) et (7) ceci:

$$(8) \quad ab < \frac{1}{n+1} \text{ équivaut à } (a, b) \in W_n.$$

Traduisons, alors, dans le langage de l'écart ab , la condition $4'_0$ bis du théorème; en particulier, comment exprimer la conclusion qui y intervient

$$(9) \quad \text{“Si } b \in S(a, W_{\phi(n)}) \text{ alors } S(b, W_{\psi(n)}) \subseteq S(a, W_n)\text{” ?}$$

ou celle-ci qui lui est équivalente

$$(10) \quad \text{“Si } b \in S(a, W_{\phi(n)}) \text{ et } c \in S(b, W_{\psi(n)}) \text{ alors } c \in S(a, W_n)\text{” ?}$$

La réponse y est fort simple. Eu égard à (8) et à ce que, par hypothèse la conclusion (1) est vraie, est vraie également la conclusion que voici:

$$(11) \quad \text{Si } ab < \frac{1}{\phi(n)+1} \text{ et } bc < \frac{1}{\psi(n)+1} \text{ alors } ac < \frac{1}{n+1}.$$

Dès lors, quel que soit le nombre réel positif x , sera juste la conclusion

$$(12) \quad \text{Si } ab < f_1(x), bc < f_2(x) \text{ alors } ac < f_3(x),$$

en posant $1 = f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$ si $x > 1$, et si x , vérifie $0 < x \leq 1$:

$$(13) \quad \begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{\phi(n)+1}, n \text{ étant le plus grand indice } \nu \text{ tel que} \\ &\quad \frac{1}{\phi(n)+2} < x \leq \frac{1}{\phi(n)+1}, \\ f_2(x) &= \frac{1}{\psi(n)+1}, n \text{ étant le plus grand indice } \nu \text{ tel que} \\ &\quad \frac{1}{\psi(n)+2} < x \leq \frac{1}{\psi(n)+1}, \\ f_3(x) &= \frac{1}{n+1}, n \text{ étant le plus grand indice } \nu \text{ tel que} \\ &\quad \frac{1}{n+2} < x \leq \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

L'existence des fonctions f_i , ($i = 1, 2, 3$), étant une conséquence immédiate des relations (6), nous concluons également, vu (6), que $f_i(x) > 0$ si $x >$

0, $f_i(x) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow 0$, ($i = 1, 2, 3$). Finalement, des relations (11) et (13), on conclut que la conclusion (12) est vraie.

Ainsi, nous trouvant dans les conditions du Lemme, nous concluons que l'écart ab défini par (7) et définissant l'espace E est régulier, ce qui, d'après le théorème précité de M. Chittenden (v. le corollaire précédent) entraîne la distanciabilité de E .

Et le théorème D_0 est complètement démontré. C.q.f.d.

Remarque 2. D'après ce qu'on a dit dans le n^o 5, il est légitime de barrer, dans l'énoncé du théorème D_0 , la condition $4'_0$ bis après avoir remplacé, parout dans l'énoncé, le signe " D " par le signe " E "; on obtient ainsi le

THÉORÈME E_0 caractérisant les espaces $(E_0) \equiv (E)$ de M. Fréchet⁵.

QUELQUES CAS PARTICULIERS: I. X étant un ensemble quelconque, désignons par X^{ω_0} , l'espace de toutes les suites $x = (x_0, x_n, \dots)$, ($x_n \in X, n < \omega_0$), en convenant de dire qu'un point $a = (a_0, \dots, a_n, \dots)$ de X^{ω_0} est point d'accumulation d'un $F \subseteq X^{\omega_0}$ si, $\nu < \omega_0$ étant quelconque et donné, l'ensemble F contient un (x_0, \dots, x_n) tel que $a_i = x_i$ pour tout $i < \nu$ sans que $a_n = x_n$ pour tout $n < \omega_0$; alors, l'espace X^{ω_0} est distanciable. Pour le voir, il suffit de désigner, pour tout $n < \omega_0$, par W_n l'ensemble des ordinaux entre n et ω_0 et de poser, quels que soient les deux points distincts $a^i = (a_0^i, \dots, a_n^i)$, ($i = 1, 2$), $(a^1, a^1) = \omega_0$ et $(a^1, a^2) = n$, n étant le plus petit ordinal $\nu < \omega_0$ tel que $a_\nu^1 \neq a_\nu^2$. Bien entendu, on considère $a^1 = a^2$ seulement dans le cas où $a_n^1 = a_n^2$ pour tout $n < \omega_0$.

En particulier, si X est dénombrable, X_0^ω est l'ainsi dit *espace à zéro dimension* de René Baire et est distanciable (cf. Fréchet, *loc. cit.* p. 118).

II. Dans un article,⁶ j'ai démontré un théorème dont l'énoncé s'obtient de l'énoncé du théorème D_0 en supposant, tout d'abord, que des W_n , ($n < \omega_0$), appartiennent à un espace quelconque et que $W_{n+1} \subset W_n$, pour tout $n < \omega_0$, ensuite que les conditions 3_0 et H_0 soient remplacées par la condition $3'_0$ (v. la Remarque 1) et enfin que la condition $4'_0$ bis soit remplacée par la condition $4'_0$ que voici:

$4'_0$. Il y a une fonction $f(x)$ faisant correspondre à tout ordinal $n < \omega_0$ un ordinal $f(n) < \omega_0$ telle que $f(n) \rightarrow \omega_0$ si $n \rightarrow \omega_0$ et que, quels que soient les points a, b, c de l'espace et l'ordinal $n < \omega_0$, les relations $(a, b) \in W_n$, $(b, c) \in W_n$ entraînent $(a, c) \in W_{f(n)}$.

⁵Quant à l'indice 0 dans (E) on peut répéter ce que nous venons de dire pour les espaces (D) en note ¹.

⁶Il s'agit du théorème dans *loc. cit.* ⁴.

Pour englober ce cas dans le théorème D_0 c'est-à-dire pour voir que la condition précédente résulte de la condition $4'_0$ bis, il suffit de désigner, pour un $n < \omega_0$ donné quelconque, par $\phi(n)$ le plus petit ordinal ν tel que $f(\nu) \geq n$ et de poser $\psi(n) = \phi(n)$.

Remarque 3. On peut toujours supposer que les ensembles W_n dont on parle dans le théorème D_0 appartiennent à l'espace qu'on considère lui-même; en effet, il suffit de désigner: par t un point quelconque, non isolé s'il y en a, de l'espace, et par W_0, \dots, W_n, \dots , ($n < \omega_0$), une suite de voisinages décroissants attachée au point t ; en particulier pour $n < \omega_0$ donné. W_n peut désigner l'ensemble des points de l'espace dont l'écart au point t est $< 1/n$.

Ainsi, tenant à la définition de M. Fréchet d'un écart, en débarassant celle-ci de ses éléments accidentels, nous avons obtenu une caractérisation *interne et topologique* des classes (D) et (E) essentiellement différente d'autres définitions connues et tendant vers un but analogue⁷.

La nouvelle définition est immédiatement généralisable à des classes (D_α) et (E_α) dont l'étude est analogue à celle des espaces $(D_0) \equiv (D)$ et $(E_0) \equiv (E)$. D'autre part, elle est un cas particulier de la notation des opérateurs E et D que nous avons définis ailleurs⁸.

⁷Au fond, il s'agit de trouver des *critères de distanciabilité* d'un espace appartenant à une classe d'espaces donnée; dans le cas des espaces accessibles, on connaît un critère de M. Alexandroff-Urysohn (v. Fréchet, *loc. cit.*, p. 220) et un critère dû à M. N. Aronszajn (v. Casimir Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa, 1933, p. 106)

⁸Voir la Note *Le problème de Souslin et les espaces abstraits* (C.R. Acad. Sci. Paris 203 (1936), 1049). Le théorème V. de celle-ci est, au fond, identique au théorème D_0 du texte.

SUR L'ÉCART ABSTRAIT

C'est en 1905 que M. Fréchet [1], [2] (cf. [3, p. 62]) a introduit *l'écart numérique* comme moyen de définir une classe d'espaces abstraits. En 1934 en généralisant les espaces métriques de M. Fréchet, Kurepa [1] a introduit *les espaces pseudo-métriques* en supposant que l'écart entre deux éléments de l'espace soit un point d'un ensemble totalement ordonné quelconque; en particulier, l'écart (a, a) d'un point de lui-même était un point jouant le rôle du nombre 0 dans la définition des écarts numériques. Les axiomes correspondants sont analogues aux axiomes respectifs dans le cas des espaces métriques. En 1936 Kurepa [4] [5] développa la Note [1] en donnant une nouvelle définition des espaces métriques susceptibles à une généralisation immédiate; c'est ainsi qu'à tout ordinal initial régulier ω_α il fit correspondre des classes E_α et D_α , le cas $\alpha = 0$ se réduisant aux espaces métriques et à ceux possédant un écart numérique, respectivement; en même temps Kurepa prouva que *les écarts totalement ordonnés sont réductibles aux écarts bien ordonnés* (ou inversement bien ordonnés).

En 1936 Kurepa [3] *introduisit l'écart tout à fait abstrait* (pas nécessairement ordonné) aussi bien que, en particulier, *la distance abstraite* en partant d'une transformation uniforme du carré $E \times E = E^2$ sur un espace ou une structure, utilisant l'idée émise préalablement (par exemple [1] fin de III) qu'une structure peut définir une autre structure, et en particulier en insistant sur l'idée qu'un espace (ou structure) soit définissable par quelques propriétés directes liées à l'ensemble ou aux ensembles attachés à l'espace.

Entretemps, vint l'ouvrage de A. Weil [1] sur les *espaces uniformes*. Nous prouverons que *ces espaces admettent un écart simple* (Th. 7.1); nous y reviendrons dans un autre endroit. A partir de 1945 M. Fréchet [3]–[5] s'est occupé des écarts totalement ordonnés dans le but de les rapprocher des espaces uniformes; R. Doss [1]–[3], J. Colmez [1]–[3], Appert [1] etc. considéraient aussi des écarts ordonnés et les liens de ceux-ci avec

des espaces uniformes. D'autre part, Kurepa [5] considéra des *espaces abstraits admettant une base ramifiée de voisinages* d'une part et les *espaces définissables par des tableaux ramifiés* de voisinages d'autre part. R. Doss trouva un lien entre les derniers espaces et les espaces pseudo-métriques non métriques; P. Papić prouva récemment que *chaque espace à une base ramifiée est définissable par un tableau ramifié*, ce qui simplifie l'étude de ces espaces-là.

Nous allons prouver que *tout espace pseudo-métrique vérifiant la condition (I') est métrique ou totalement ordonnable* (ou les deux), (cf. Th. 8.2.1) ce qui est à rapprocher de quelques considérations antérieurs. En particulier, *l'ordination alphabétique des complexes*, initiée par F. Bernstein [1] et développée surtout par F. Hausdorff [1] nous montrera un écart bien ordonné. La considération des *eT-espaces* (cf. § 1.4) ou *espaces-tableaux* que Kurepa a définis dans sa *Thèse* [2, p. 72]) donnera un exemple de plus d'une distance bien ordonnée. Il en est ainsi des *R-espaces* (v. ci-après 5.). La différence symétrique des ensembles est aussi un cas d'une distance abstraite. Dans l'ensemble des applications d'un ensemble donné S on peut définir aussi un *écart régulier* ou une *proximité régulière*.

En renvoyant à un ouvrage plus complet où nous exposerons plus amplement le sujet nous nous contentons de donner ici quelques résultats dont quelques uns datent depuis 19 ans (cf. aussi Menger [1], Price [1] et Kalisch [1]).

1. L'écart et l'écart dual (la proximité). Quelques types d'écarts. Soit $M = (M, -)$ un espace abstrait; cela veut dire qu'à tout $X \subseteq M$ on fait associer un ensemble, désigné par \bar{X} et faisant partie de M . Par conséquent, chaque espace représente une organisation de l'ensemble des points de l'espace. Cette organisation peut servir à définir d'autres organisations (structures).

1.1. *Écart abstrait. Proximité abstraite. Axiomes O^1, O^2, O^3, O^1' .* E étant un ensemble et M un espace (ou une structure quelconque) on considérera une application ρ de $E^2 = E \times E$ sur M ; cela veut dire que, pour tout $(a, b) \in E^2$, $\rho(a, b)$ est un point de M ; en particulier, $\rho(a, b) \in M$. Dans le cas général $\rho(a, b) \neq \rho(b, a)$; mais pour simplifier l'exposition nous nous restreindrons ici au cas symétrique où $\rho(a, b) = \rho(b, a)$. L'élément $\rho(a, b)$ peut être appelé *l'écart de b à partir de a* ou *la proximité de b à a* ou le *degré de proximité de b à a* . Le cas le plus connu de l'écart est celui où $\rho(a, b)$ est un nombre réel ≥ 0 (Fréchet 1905). Mais l'existence d'un écart abstrait quelconque entre les éléments de E peut entraîner une structure (organisation) au sein de E . De ces deux dénominations duales: *écart* et *proximité*,

l'une se prête mieux dans un cas, l'autre dans un autre cas. Le passage de l'une à l'autre se fait en permutant les signes $<$ et $>$ et en changeant convenablement les dénominations (par exemple: initial - terminal etc.). Indifféremment, on peut se servir des deux modes d'expositions, et parler donc de *M-écart* ou de *M-proximité*.

Pour simplifier, nous supposons que les axiomes O^1, O^2, O^3 que voici soient vérifiés (v. Kurepa [3]).

O^1 . (Axiome d'identité) $\rho(a, b) = \rho(a, a) \Rightarrow a = b$;

O^2 . (Axiome de symétrie) $\rho(a, b) = \rho(b, a)$.

Si M est un espace et si ρ est un M -écart dans E c'est-à-dire si $\rho(a, b) \in M, (a, b \in E)$ alors par l'axiome d'organisation O^3 que voici la structure de M se transforme en une structure sur E .

O^3 . Si $a \in E$ et $F \subseteq E$, alors a est contigu à F dans E , symboliquement $a \in \overline{F}$ si et seulement si $\rho(a, a)$ est contigu à $\rho(a, F)$ dans M :

$$a \in \overline{F} \Leftrightarrow \rho(a, a) \in \overline{\rho(a, F)}; \quad \text{ici } \rho(a, F) = \{\rho(a, x) \mid x \in F\}.$$

1.2. *Opérateur* $\mathcal{E}[M]$. Si pour un espace E il y a un espace (structure) M et un M -écart ρ tels que les axiomes O^1, O^2, O^3 soient vérifiés, nous dirons que l'espace E est un M -espace ou que E est définissable moyennant un écart abstrait symétrique extrait de M , ce que nous indiquerons par $E \in \mathcal{E}[M]$ ou tout simplement par $E[M]$. Enonçons tout de suite la condition $O^{1'}$ que voici (cf. Kurepa [3])¹:

$O^{1'}$. (condition de continuité) Si $\alpha \in E, F \subseteq E$ et si $\alpha \in \overline{F}$, alors

$$\rho(a, a) \in \overline{\rho(F, F)}; \quad \text{ici } \rho(F, F) = \{\rho(f, f) \mid f \in F\}.$$

Nous allons passer en revue quelques classes d'écart et de proximités. On peut parler de différentes espèces d'écart; on aura ainsi l'écart numérique, ordonné, bien ordonné, ensembliste, spatial; etc. suivant qu'il est un nombre, un point d'un ensemble ordonné, un ensemble, un point d'un espace etc.

2. Écart numérique. Écart bien ordonné.

2.1. *Écart numérique* (Fréchet [1]). Dans ce cas M est l'ensemble (ou plutôt l'espace) des nombres réels $\geq 0; \rho(a, a) = 0$.

¹Dans notre définition primitive la condition de continuité fut imposée à p l'espace considéré (v. Kurepa [3]).

2.2. *Écart totalement ordonné ou bien ordonné* (Kurepa [1], Fréchet [3] [4], Doss [1], Colmez [1]). M est un ensemble (ou l'espace) totalement ordonné avec un premier (ou dernier) point ζ ; on pose $\rho(a, a) = \zeta$; si en particulier $\zeta = \omega_\alpha$ et M est l'ensemble des ordinaux $\leq \omega_\alpha$, on obtient la classe E_α , le cas E_0 coïncidant avec la classe de Fréchet des écarts numériques (pour la démonstration v. Kurepa [4] [5]).

2.3. *Ordnation alphabétique et l'écart*. Soient ω_α un ordinal initial régulier et T une famille de ω_α -complexes d'éléments d'un ensemble C ; si l'on pose $i(a, a) = \omega_\alpha$ ($a \in T$) et si l'on désigne pour $a, b \in T$ par $i(a, b)$ le premier ordinal $\xi < \omega_\alpha$ tel que $a_\xi \neq b_\xi$, alors i est une proximité symétrique bien ordonnée. La métrique i jouit d'une propriété remarquable; c'est que si $a, b, c \in T$, on a le triangle $\{a, b, c\}$; dans la i -métrique ce triangle est isocèle; l'ensemble $i\{a, b, c\}$ des écarts $i(a, b)$, $i(b, c)$, $i(c, a)$ se compose de ≤ 2 éléments.

LEMME 2.3.1. $ki\{a, b, c\} \leq 2$. De plus $i(a, c) \geq \inf\{i(b, a), i(c, b)\}$ (cf. Kurepa, *Thèse*, p. 44 L. 5.1 et 5.4 relation (ρ)). Là, $i\{a, b, c\}$ désigne l'ensemble des $i(x, y)$ ($x, y \in \{a, b, c\}$, $x \neq y$).

En effet, dans le cas contraire, on aurait trois ordinaux distincts: $\alpha = i(b, c)$, $\beta = i(c, a)$, $\gamma = i(a, b)$; supposons que $\alpha < \beta < \gamma$; alors les relations $i(c, a) = \beta$, $c_{\beta-} = a_{\beta-}$, $\beta < \gamma = i(a, b)$, $a_{\gamma-} = b_{\gamma-}$ entraînent $b_{\beta-} = a_{\beta-} = c_{\beta-}$ donc $b_{\beta-} = c_{\beta-}$ donc (à cause de $\alpha < \beta$) en particulier $b_{\gamma-} = c_{\gamma-}$ contrairement à la définition de $\alpha = i(b, c)$. Le reste du lemme se démontre immédiatement.

Voici une conséquence bien utile concernant l'écart i :

LEMME 2.3.2 Si $i(a, b)$, $i(b, c) \geq \xi$ alors $i(a, c) \geq \xi$ et *dualement*².

Le lemme 2.3.2 s'ensuit immédiatement de la seconde partie du lemme 2.3.1. Le lemme 2.3.2 (ou plutôt son dual) fut utilisé surtout par R. Doss.

3. Condition (Δ) de triangle isocèle. Condition (J). Condition (Δ_2).

Pour un écart ordonné e et la proximité ordonnée i formulons la condition (Δ) et la condition duale (Δ^*) que voici:

Condition de triangle isocèle:

$$(\Delta) \quad e(a, b) \leq \sup\{e(a, c), e(c, b)\}$$

²Evidemment, ξ désigne un ordinal quelconque $\leq \omega_\alpha$; il va sans dire que $\{a, b, c\} \subseteq T$.

et dualement

$$(\Delta^*) \quad i(a, b) \geq \inf\{i(a, c), i(c, b)\}.$$

Les conditions (Δ) et (Δ^*) entraînent respectivement:

Condition (J) $e(a, b) < \xi, e(b, c) < \xi \Rightarrow e(a, c) < \xi$

Condition (J*) $i(a, b) > \xi, i(b, c) > \xi \Rightarrow i(a, c) > \xi$.

Condition (Δ_2) (cf. L. 3.1):

$$k\{ab, bc, ca\} \leq 2.$$

Là a, b, c sont points de l'espace considéré: k signifie "le cardinal de".

Il faut remarquer qu'on peut considérer la condition (Δ_2) indépendamment des conditions $(\Delta), (\Delta^*), (I), (I^*)$, et en particulier dans le cas où l'écart n'est pas totalement ordonné.

LEMME 3.1. *Si e vérifie (Δ) , alors*

$$e(a, x) = \xi, e(x, b) < \xi \Rightarrow e(a, b) = \xi.$$

Supposons par contre que $e(a, b) \neq \xi$, donc $e(a, b) < \xi$ ou $e(a, b) > \xi$. Le second cas ne peut pas avoir lieu, le triangle $\{a, x, b\}$ étant isocèle. Le premier cas $e(a, b) < \xi$ ne peut pas avoir lieu non plus, sans quoi on aurait $e(a, b) < \xi, e(b, x) < \xi$ et donc à la suite de J aussi $e(a, x) < \xi$, contrairement à l'hypothèse $e(a, x) = \xi$.

Considérons un espace E et les ensembles

- (1) $E(a; = \xi) = \{x | x \in E, ax = \xi\}$
- (2) $E(a; < \xi) = \{x | x \in E, ax < \xi\}$
- (3) $E(a; \leq \xi) = \{x | x \in E, ax \leq \xi\}$.

THÉORÈME 3.1. *Si l'espace vérifie (Δ) , les ensembles de la forme (1) sont deux à deux disjoints ou identiques. Les ensembles de la forme (2) forment une famille ramifiée; il en est de même des ensembles de la forme (3) aussi bien que de ceux qui sont de la forme $(2) \vee (3)$.*

Si $E(a; < \xi), E(a'; < \xi')$ ont un point p en commun, alors

$$(4) \quad \xi \leq \xi' \Rightarrow E(a; < \xi) \subseteq E(a'; < \xi').$$

On a

$$(5) \quad E(a; = \xi) = \bigcup_x E(x; < \xi), \quad (x \in E, ax = \xi).$$

Prouvons (4).

Premier cas: $\xi = \xi'$. Si alors $ax < \xi$, on aura aussi $a'x < \xi$, ce qui résulte des relations $ax < \xi$, $ap < \xi$. De même, si $a'x' < \xi'$, on aura $ax' < \xi$. Par conséquent, les sphéroïdes $E(a; < \xi)$, $E(a'; < \xi)$ sont disjoints ou identiques.

Second cas: $\xi \neq \xi'$, par exemple $\xi < \xi'$. D'après le premier cas on aura

$E(a; < \xi') \subseteq E(a'; < \xi')$, ce qui vu $E(a; < \xi) \subseteq E(a; < \xi')$ entraîne $E(a; < \xi) \subseteq E(a'; < \xi')$.

Le reste de la relation (4) se prouve aisément.

Prouvons encore la décomposition (5). Que $(5)_1 \subseteq (5)_2$ c'est bien évident. Prouvons la réciproque: si $p \in (5)_2$, alors $p \in (5)_1$. Or, $p \in (5)_2$ veut dire qu'il existe un point $x \in E$ vérifiant $ax = \xi$, $xp < \xi$; à la suite du lemme 3.1 on aura $ap = \xi$ donc $p \in (5)_1$.

4. eT -espaces (ou espaces-tableaux) et l'écart abstrait. T -espaces.

4.1. *Les eT -espaces.* Soit T un arbre c'est-à-dire un tableau ramifié non vide: un ensemble ordonné tel que pour tout $x \in T$ l'ensemble ox ou $(-, x)_T$ des prédécesseurs de x dans T soit bien ordonné. Nous posons $\gamma x = t(ox) = \text{type d'ordre de } ox$; le rang, la longueur, ou l'indice γT de T est défini par $\gamma T = t\{\gamma x | x \in T\}$, t y indique "le type d'ordre de". La rangée $R_\alpha T$ de T se définit par $R_\alpha T = \{x | x \in T, \gamma x = \alpha\}$. Ces notions étaient considérées dans Kurepa [2]. Nous y avons considéré (p. 72) T comme un espace de la façon suivante. Soit $a \in T$; si a n'a aucun prédécesseur, l'ensemble $\{a\}$ sera le seul voisinage de a ; il en sera de même si a possède un prédécesseur immédiat. Dans chaque autre cas soit $z < a$; alors $V(a) = 1z - 1a, 1a$ ou $(a, -)$ désignant l'ensemble des points de T succédant à a :

$$1a = \{y | y > a, y \in T\}.$$

On obtient ainsi la famille des voisinages de a .

En se servant de cette famille de voisinages on définit la contiguïté de a d'un ensemble $X \subseteq T$ d'une façon bien connue $a \in \overline{X}$ équivaudra à ce que chaque voisinage de a contient un point de X . En faisant ainsi pour tout $a \in T$, on obtient un espace bien défini. La classe des espaces pareils c'est, par définition, la classe des eT -espaces (cf. [1, p. 72]).

Nous considérons encore la condition (N) que voici:

(N) Si a, b ont les mêmes prédécesseurs et si l'ensemble de ceux-ci n'a pas un dernier élément, alors $a = b$; symboliquement:

$$(a, b) \in T, \alpha a = \alpha b, \gamma a \in (II) \Rightarrow a = b.$$

Sans mention expresse du contraire, on supposera que par la suite T vérifie (N).

LEMME 4.1.1. Chaque eT -espace peut être défini au moyen d'un écart bien ordonné de manière que chaque triangle soit isocèle et que la conditionn (Δ^*) soit vérifié pour chaque triple de points distincts (cf. Lemmas 2.3.1, 2.3.2).

En effet, définissons

$$(a, a) = \gamma a \text{ ou } \gamma a + 2 \text{ suivant que } \gamma a \in (II) \text{ ou } \gamma a \in' (II)$$

$$(a, b) = t((-a] \cap (-, b]) \text{ si } a \neq b.$$

Alors les axiomes O^1, O^2, O^3 sont démontrables.

$$O^1 \quad a \neq b \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Leftarrow \end{matrix} (a, b) \neq (a, a).$$

On a $(a, a) \in \{\gamma a, \gamma a + 2\}$. Si $(a, a) = \gamma a$, considérons les deux cas, suivant que $a < b$ ou $\sim (a < b)$. Si $a < b$, $(a, b) = \gamma a + 1 > \gamma a = (a, a)$; si $\sim (a < b)$, alors $(-a] \cap (-, b] \subseteq (-, a)$; l'égalité y ne peut avoir lieu que si le noeud $|a|$ de seconde espèce est multiponctuel, cas que nous excluons à la suite de la condition (N). Reste le cas où $(a, a) = \gamma a + 2$; ce cas est bien simple puisque $(a, b) < \gamma a + 2$ pour chaque $b \neq a$.

O^2 $(a, b) = (b, a)$; c'est évident.

O^3 Pour que $a \in \overline{F}$, il faut et il suffit que tout voisinage $V(a, a)$ de (a, a) contient un (a, f) de $(a, F) = \{(a, x) \mid x \in F\}$.

La propriété un O^3 est évidente étant donné que pour tout $z < a$ on a

$$(1) \quad 1z - 1a = \{x \mid x \in T, \gamma z + 1 < (a, x) \leq (a, a)\}.$$

Tout d'abord $(1) \subseteq (1)_2$. En effet, soit $b \in (1)_1$. On a deux cas, suivant que $z < b \leq a$ ou $b \in' (z, a]$. Si $z < b < a$, alors $\gamma z < \gamma b < \gamma a$ donc $\gamma z + 1 < \gamma b + 1 \leq \gamma a$ donc $\gamma z + 1 < (a, b) \leq (a, a)$ et par conséquent $b \in (1)_2$.

Reste le cas où $b \in' (z, a]$; soit alors b' le premier point de (z, a) vérifiant $b' \parallel b$ donc $(-, b') < b$. Par conséquent $(a, b) = t(-, a] \cap (-, b] = t(-, b') = \gamma b' \in [\gamma z + 1, (a, a)]$ donc $(a, b) \in (1)_2$. Ainsi donc $(1)_1 \subseteq (1)_2$.

Dualement $(1)_2 \subseteq (1)_1$. En effet, soit ξ un ordinal $< (a, a)$; soit $x, x \in T$ un point quelconque tel que

$$(2) \quad \xi + 1 \leq (a, x) \leq (a, a).$$

Soit $a_\xi \in R_\xi[a]$; on a $\xi < (a, a)$ et le point a_ξ est bien déterminé et vérifie (2) pour $x = a_\xi$ puisque $(a_\xi, a) = \gamma a_\xi + 1 = \xi + 1 < (a, a)$. Aucun x vérifiant (2) ne peut précéder a_ξ ; c'est que si $x < a_\xi$, alors $x < a_\xi < a$ et $(a, x) = t(-, x) = \gamma x + 1 < \xi + 1$ puisque $\gamma x < \gamma a_\xi = \xi$. On n'a pas $x \parallel a_\xi$ non plus; c'est que si $x \parallel a_\xi$, alors $(a, x) \leq t(-, a_\xi) = \xi$. De même si x vérifie (2), alors $\sim (a < x)$, sans quoi $(a, x) = \gamma a + 1 > \gamma a = (a, a)$. Bref, nécessairement, si $x \in (1)_2$, alors $x \in (1)_1$.

Prouvons que chaque triangle est isocèle: a, b, c étant 3 points distincts, on aura

$$(a, b) \geq \inf\{(a, c), (c, b)\}.$$

En effet, on aura

$$(3) \quad (-, a] \cap (-, c] \subseteq (-, c]$$

$$(4) \quad (-, b] \cap (-, c] \subseteq (-, c].$$

Par conséquent, les ensembles $(3)_1, (4)_1$ sont comparables: on aura ou bien $(3)_1 \subseteq (4)_1$ ou bien $(3)_1 \supset (4)_1$ et des lors $(a, b) = (a, c)$ et $(a, b) = (b, c)$. Q.E.D.

LEMME 4.1.2. Soit $a \in \overline{F}$ avec $a \in T, F \subseteq T$; soit h un procédé faisant correspondre à $f \in F$ un ensemble non vide $h(f)$ vérifiant $h(f) \subseteq [f, -) \setminus [a, -)$; si $hF = \bigcup_{x \in F} h(x)$, on aura aussi $a \in \overline{hF}$ et vice versa: $a \in \overline{F} \Leftrightarrow \overline{hF}$.

La preuve en est immédiate.

Dans le cas général, un eT -espace ne vérifie pas la condition $O^{1'}$. Par exemple, en considérant la famille σ_0 des ensembles bien ordonnés non vides bornés extraits de l'ensemble ordonné de nombres rationnels, l'ensemble σ_0 étant ordonné par la relation \leq disant "est une portion initiale de", l'ensemble σ_0 est un arbre de rang ω_1 et on s'assure que l'espace abstrait $e\sigma_0$ ne vérifie pas la condition $O^{1'}$.

Des lors, on a le suivant:

PROBLÈME 4.1.1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un eT -espace vérifie la condition $O^{1'*}$

*Entretemps, Z. Mamuzić a résolu ce problème (cf. ce Glasnik p. 96).

Remarque dès à présent que chaque eT -espace est homéomorphe d'un espace totalement ordonné (cf. Théorème 9.10).

4.2. T -espaces. A étant un arbre définissons le T -espace A de la manière suivante:

Soit $p \in A$; si $\gamma p \in'$ (II), alors $\{p\}$ sera le voisinage de p .

Si $\gamma p \in$ (II), soit $p_0 \in A$, $p_0 < p$; posons

$$A(p_0, p| = \{y | y \in A, p_0 < y, \gamma y \leq \gamma p\}.$$

L'ensemble $A(p_0, p|$ sera considéré comme voisinage de p .

En faisant varier p_0 et p , on obtient ainsi une famille d'ensembles définissant ce que nous appellerons le T -espace A .

Par exemple, à l'arbre σ_0 de tout à l'heure correspond le T -espace σ_0 ; il nous semble que cet T -espace n'admet pas un écart bien ordonné, contrairement à ce qui se passe avec le eT -espace σ_0 .

Les R -espaces.

Rappelons d'abord qu'un système d'ensembles est *ramifié* pourvu que ses éléments soient comparables ou disjoints. Un système ramifié T est un *tableau ramifié* si pour chaque $X \in T$ la famille des $Y \in T$ vérifiant $Y \supset X$ est bien ordonné par rapport à la relation \supset . T étant un tableau ramifié d'ensembles, on peut considérer chaque $X \in T$ comme voisinage de chaque $x \in X$; l'ensemble $\bigcup X (X \in T)$ devient ainsi un espace. Ces espaces sont appelés les R -espaces.³

En particulier on peut considérer le cas où T vérifie ces deux conditions (cf. aussi les T complets dans Kurepa [2, pp. 81-84]):

T_1 . Pour chaque point p , la famille $T(p)$ des $X \in T$ vérifiant $p \in X$ a l'ensemble $\{p\}$ comme l'intersection de ses éléments.

$$(T_1) \quad \bigcap T(p) = \{p\}.$$

(C) Pour chaque chaîne $K \subseteq T$ on a ceci:

Si $k \cap K > 1$, alors $\bigcap K \in T$.

³cf. Kurepa [3, p. 1050] et [5, p. 128] ("espaces admettant une base ramifié de voisinages" et les $\mathcal{T}(T)$ -espaces). P. Papić [1]-[3] a étudié de plus près ces espaces et a prouvé en particulier que la supposition du bon ordre de chaque chaîne extraite d'un système ramifié ne présente aucune restriction essentielle. La dénomination R -espace provient de P. Papić [1]-[3].

LEMME 5.1. Si T vérifie (T_1) et (C) , alors chaque noeud N_2 de T est constitué d'un seul élément de T .⁴

Ceci étant on a (cf. Kurepa [3, p. 1050]) le

THÉORÈME 5.1. Soit S un espace définissable moyennant un tableau ramifié d'ensembles, T , tel que chaque élément de T soit voisinage de chacun de ses points. Si l'espace vérifie l'axiome (T_1) de separation de Fréchet (pour chaque $a \in E$ la famille $T(a)$ des voisinages de a possède pour l'intersection l'ensemble $\{a\}$, alors l'espace S admet un écart bien ordonné, vérifiant la condition du triangle isocèle tel que, en particulier, $S \in \mathcal{E}[\gamma T)$ et $(a, b) \geq \inf\{(a, c), (c, b)\}$, $(a, b, c \in S)$.

Tout d'abord, pour chaque $a \in S$ soit γa le type d'ordre de l'ensemble $T(a)$ des éléments de T contenant le point a . Pour que a soit nonisolé, il faut et il suffit que l'ordinal γa soit de seconde espèce: $\gamma a \in (II)$.

Définissons l'écart (a, b) des points $a, b \in S$ comme il suit:

$$(a, b) = t(T(a) \cap T(b)).$$

Prouvons que les trois axiomes O^1, O^2, O^3 sont vérifiés.

$$(O^1) \quad (a, a) = (a, b) \Rightarrow a = b.$$

En effet, la relation $(a, b) = (a, a)$ implique

$$T(a) \cap T(b) = T(a)$$

et qu'en particulier $a, b \in X$ pour chaque $X \in T(a)$. Or, l'intersection des $X \in T(a)$ étant $\{a\}$, à la suite de l'hypothèse que l'axiome de Fréchet soit vérifié, on en déduit que $a = b$.

Vérifions la condition (Δ^*) du triangle isocèle. Tout d'abord,

$$(1) \quad T(a) \cap T(b) \subseteq T(b)$$

$$(2) \quad T(c) \cap T(b) \subseteq T(b).$$

Par conséquent, les ensembles $(1)_1, (2)_1$ sont portions initiales de la chaîne $T(b)$; on a donc soit $(1)_1 \subseteq (2)_1$ soit $(1)_1 \supset (2)_1$ et dès lors respectivement $(a, b) = (a, c)$ et $(a, c) = (b, c)$.

⁴Chaque ensemble maximal $X \subseteq T$ dont les éléments possèdent les mêmes prédécesseurs s'appelle un noeud de T . Un noeud X est de seconde espèce ou un N_2 , si l'ordinal β vérifiant $X \subseteq R_\alpha T$ est de seconde espèce.

O^2 . $(a, b) = (b, a)$ - c'est évident.

O^3 . *Nécessité*: $\{a\}$, $F \subseteq S$, $a \in \overline{F}$ \Rightarrow pour chaque ordinal $\alpha < (a, a)$ il y a un point $a_\alpha \in S$ vérifiant $\alpha < (a, a_\alpha) \leq (a, a)$. En effet, il suffit de désigner par a un point quelconque de l'élément de $R_{\alpha+1}T$ contenant le point a .

Suffisance: Si pour chaque $\alpha < (a, a)$ l'ensemble F contient un élément a_α tel que $(1) \alpha < (a, a_\alpha) \leq (a, a)$, alors $a \in \overline{F}$, c'est-à-dire que

$$T_\xi(a) \cap F \neq \emptyset; \quad (\xi < \gamma a).$$

Or, (1) veut dire que la partie commune de $T(a)$, $T(a_\alpha)$ est d'un type d'ordre $\in (\alpha, \gamma a]$; en particulier $R_\alpha T(a)$ contient le point a_α de F . Puisque α est quelconque $\leq \gamma a$, on en déduit que $a \in \overline{F}$.

Quant à la condition de continuité $O^{1'}$ elle n'est pas vérifiée dans le cas général. En particulier, considérant le cas où chaque famille disjonctive de T soit $\leq \aleph_0$ l'espace correspondant vérifie $O^{1'}$ au moins pour une base T si et seulement si $\gamma T < \omega_1$; contrairement à ce que nous avons écrit (Kurepa [3, p. 1050]) qu'alors nécessairement S vérifie $O^{1'}$, cette assertion est équivalente au problème de Suslin, comme P. Papić a bien voulu me remarquer et en connexion avec quelques discussions initiées par Z. Mamuzić. D'après Papić, la condition $O^{1'}$ pour un R -espace S vérifiant $S \in E(\gamma T)$ équivaut à ce que, quel que soit $a < \gamma T$, l'union des éléments de $R_\alpha T$ soit à la fois ouverte et fermée (bien entendu, chaque élément de T est ambigu, c'est-à-dire fermé et ouvert).

6. Les espaces bien ordonnés et écarts abstraits.

α étant un ordinal soit $I(\alpha)$ l'ensemble des ordinaux $< \alpha$.

THÉORÈME 6.1. *L'espace bien ordonné $I(\omega_\alpha)$ peut être défini par un $< \omega_\alpha$ de telle sorte que la condition $O^{1'}$ aussi bien que celle du triangle isocèle subsistent; symboliquement: $I(\omega_\alpha) \in E[I(\omega_\alpha)] \cap O^{1'}$, et $(a, b) \geq \inf\{(a, c), (c, b)\}$.*

Pour s'en assurer, définissons, pour $a, b \in I(\alpha)$ l'écart (a, b) de la façon suivante:

$$(a, b) = \inf\{a, b\} + 1 \quad \text{si } a \neq b$$

$$(a, a) = a \quad \text{ou } a + 2, \quad \text{suivant que } a \in (II) \quad \text{ou } a \in' (II).$$

Les axiomes $O^1, O^2, O^3, O^{1'}$ sont vérifiés.

$$O^1 \quad (a, b) = (a, a) \Rightarrow a = b.$$

Il s'agit de prouver qu'on n'a ni $a < b$ ni $a > b$. Premier cas: $a < b$ donc $(a, b) = a + 1$. Or $(a, a) = a$ ou $a + 2$ et aucun de ces nombres n'est égal à $a + 1 = (a, b)$. Reste le cas $a > b$ donc $(a, b) = b + 1 \leq a$. Si $b + 1 < a$, alors $b + 1$ n'est ni a ni $a + 2$ donc $(a, b) \neq (a, a)$; si $b + 1 = a$, alors $(a, a) = a + 2$ et de nouveau $(a, b) \neq (a, a)$.

O^3 . *Nécessité*: si $a \in F'$ et si $\alpha < (a, a)$ alors il y a un point $a_\alpha \in F \setminus \{a\}$ tel que $\alpha < (a, a_\alpha) < (a, a)$. Tout d'abord, si $a \in F'$ on a $(a, a) = \alpha \in II$. Si $\alpha < a$, soit a_α un ordinal de F situé entre α et a ; alors $(a_\alpha, a) = a + 1$ est situé entre α et a .

Suffisance: Si pour tout $\alpha < (a, a)$ l'ensemble F contient un point $a_\alpha \neq a$ vérifiant $(2) \alpha < (a, a_\alpha) < (a, a)$ alors $a \in F'$. Tout d'abord, on voit que $(a, a) \in II$ et donc $a \in II$: d'autre part, les relations (2) impliquent que $\alpha < a_\alpha < a$ et cela veut dire exactement que $a \in F'$.

O^1 : Si $a \in \overline{F} \Rightarrow (a, a) \in \overline{(F, F)}$. Il suffit de considérer le cas où $a \in F'$. Donc $a \in II$ et $(a, a) = a$. Si alors pour tout $\alpha < a$ l'on désigne par a_α un point de F tel que $\alpha < a_\alpha < a$, on aura $(a_\alpha, a_\alpha) \in \{a_\alpha, a_\alpha + 2\}$ donc en tous les cas $\alpha < (a_\alpha, a_\alpha) < (a, a)$ ce qui veut dire précisément que $(a, a) \in (F, F')$.

Le reste du théorème 6.1 se prouve comme la partie correspondante dans L. 2.3.1, 2.3.2, 4.1, T. 5.1.

COROLLAIRE 6.1 $I(\omega_1) \in E[I(\omega_1)] \cap O^1$.

Ce corollaire se trouve dans la Note [8] mais la construction de l'écart y est mal faite.

COROLLAIRE 6.2 $I(\omega_2) \in E[I(\omega_1)] \cap O^1 \cap (\Delta^*)$.

En particulier, la proximité définie ci-dessus vérifie la condition (J^*) . Cela constitue la réponse à une question posée dans notre Note [3, p. 1051]: il suffit de poser $\varphi_\alpha(n) = n = \psi_\alpha(n)$.

Remarque 6.1. Chaque espace bien ordonné est un eT -espace.

PROBLÈME 6.1. *A-t-on $I(\omega_1) \in E[R_n]$ pour un entier n ?*

Répondant à un problème de Kurepa, Papić a prouvé que $I(\omega_1) \in E[R_n] \cap O^1$. R_n y désigne l'espace cartésien à n dimensions.

LEMME 6.1. *Soit β un nombre ordinal. Si $\beta < \omega_1$, l'espace $I(\beta)$ est métrique admettant un écart à un seul zéro vérifiant la condition (Δ) (donc aussi (J) et (Δ_2)). Et réciproquement.*

Que $I(\beta)$ soit métrique c'est bien connu. Il s'agit de voir de plus que la métrique puisse satisfaire Δ . Or, d'une part $I(\beta)$ est un R -espace de rang $\leq \omega$ (Papić [3, pp. 38-40], [4, Th. 9]). D'autre part, $I(\beta)$ étant un

R -espace, il admet un écart vérifiant Δ (cf. L. 4.1.1); en particulier, $I(\beta)$ étant définissable par un arbre T de rang $\leq \omega$, l'écart a un seul zéro: il suffit de poser $i(x, x) = \omega$, $i(x, y) = i(T(x), T(y))$ si $x \neq y$.

Le réciproque résulte de ce que si $\beta \geq \omega_1$, l'espace $I(\beta)$ n'est pas distanciable.

7. L'écart abstrait et les espaces uniformes.

7.1. *Espaces uniformes.* Soit E un espace uniforme (cf. Bourbaki [1], A. Appert-Ky Fan [1]) c'est-à-dire un espace (V) tel que pour chaque $a \in E$ la famille des voisinages de a coïncide avec la famille des ensembles

$$V(a) = \{b \mid b \in E, (a, b) \in V\}.$$

V parcourant une structure uniforme U relativement à $E \times E$; cela veut dire que U est un filtre dans $E \times E$ ayant ces 3 propriétés:

1. $\Delta \subseteq V$ ($V \in U$); là $\Delta = \{(a, a) \mid a \in E\}$;
2. $V \in U \Rightarrow V^{-1} \in U$;
3. Si $V \in U$, il y a un $W \in U$ vérifiant $WW \subseteq V$.

De plus, nous supposons que l'espace soit *séparé* c'est-à-dire que

$$\Delta = \bigcap V \quad (V \in U).$$

D'après un résultat de Z. Mamuzić si l'espace n'est pas séparé, on peut prouver que l'espace ne vérifie pas la condition O^1 . Comme on sait, nous pouvons supposer que $V = V^{-1}$ pour chaque $V \in U$ (cf. Bourbaki [1, ch. 2]).

THÉORÈME 7.1.1. *Tout espace uniforme séparé E est définissable moyennant un écart abstrait admettant un seul zéro; de plus, l'écart vérifie la condition de régularité O^4 ci-après.*

En effet, introduisons d'abord la famille consistant des ensembles

$$V/2 = \{(a, b) \cup (b, a) \mid (a, b) \in V\}.$$

Par conséquent, si $x \in V/2$, x est de la forme $(a, b) \cup (b, a)$ où $a, b \in E$ et en particulier $(a, b) \in V$. On voit que $A \subseteq V/2$ et que

$$\Delta = \bigcap_V V/2 \quad (V \in U).$$

Ceci étant, définissons l'écart u de la façon suivante:

$$u(a, a) = \Delta \quad (a \in E),$$

$$u(a, b) = (a, b) \cup (b, a) \quad \text{pour chaque } \{a, b\} \neq \emptyset \subseteq E.$$

En définissant l'ensemble M comme celui dont les éléments sont de la forme

$$\Delta \quad \text{ou} \quad (a, b) \cup (b, a)$$

l'écart u représente bien une application univoque de $E \times E$ sur M ; les ensembles $V/2 (V \in U)$ seront considérés comme voisinages du "zero" $t_0 = \Delta$.

Prouvons que les axiomes O^1-O^3 sont vérifiés. Ceci est évident pour les axiomes O^1 et O^2 , reste l'axiome O^3 .

Nécessité. Soient $(a), X \subseteq E$ et $a \in \overline{X}$ dans l'espace uniforme E . Cela veut dire pour tout $V \in U$, il y a un point $(a, b) \in V$ avec $b \in X$ donc $b \in V(a)$. Par conséquent $u(a, b) = (a, b) \cup (b, a) \in V/2$; autrement dit, quel soit le "voisinage" $V/2$ de Δ dans M , il y a un point $b \in X$ tel que $u(a, b) \in V/2$ donc $u(a, a) \in u(a, X)$ et ceci, par définition, veut dire que a est contigu à X (relativement à l'écart u).

Suffisance. Réciproquement, supposons que, quel que soit $V/2$ il y a un point $b \in X$ tel que $u(a, b) \in V/2$ donc $(a, b) \cup (b, a) \in V/2$; or, cela veut dire que $(a, b), (b, a) \in V$ donc $(a, b) \in V$ et $b \in V(a)$; c'est-à-dire a est contigu à X dans la topologie uniforme aussi.

7.2. Écart abstrait régulier. Axiome O^4 . Dès le commencement, M. Fréchet [1], [2] considérait des écarts réguliers numériques; par définition, un écart numérique est régulier s'il existe une fonction réelle f de variable réelle telle que $f(x) \geq 0$ ($0 \leq x \leq \infty$) et que $f(x) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow 0$. Plusieurs auteurs se sont occupés d'écarts réguliers (cf. Appert-Ky Fan [1, ch. IV]).

La régularité de l'écart abstrait dans le cas où l'ensemble des zéros est monoponctuel, s'énonce par l'axiome O^4 que voici:

AXIOME O^4 . *Quel que soit le voisinage X de "zero" ζ , il y a un voisinage Y de ζ tel que, quel que soit $a \in E$ les relations $u(a, b), u(b, c) \in Y$ entraînent $u(a, c) \in X$.*

L'équivalence de la condition O^4 et de l'axiome U_3 sur les structures est manifeste.

Tout d'abord $O^4 \Rightarrow U_3$. En effet, $u(a, b) \in Y, u(b, c) \in Y$ impliquent en particulier $(a, b) \in W, (b, c) \in W$ où $Y = W/2$; d'autre part, $u(a, c) \in X$ implique $(a, c) \in V$ où $V/2 = X$. Ainsi donc $(a, b), (b, c) \in W \Rightarrow (a, c) \in V$.

Réciproquement, $U_3 \Rightarrow O^4$. Tout d'abord, $(a, b) \in W$ implique $u(a, b) \in W/2$; de même $(b, c) \in W \Rightarrow u(b, c) \in W/2$; $(a, c) \in V \Rightarrow u(a, c) \in V/2$; donc l'implication $(a, b), (b, c) \in W \Rightarrow (a, c) \in V$ entraîne l'implication $u(a, b), u(b, c) \in Y/2 \Rightarrow V/2$. Q.E.D.

Ainsi le théorème 7.1.1 est complètement démontré.

8. Espaces pseudo-distanciés.

8.1. Conditions (R) et (I'). (Voir Kurepa [1], [4], [5], Fréchet [2], [3], [4], [5], Appert-Ky Fan [1], Papić [1]–[5]). Soit ω_α un ordinal initial régulier; la classe (D_α) des espaces fut définie par Kurepa comme celle admettant un écart dual symétrique bien ordonné $\leq \omega_\alpha$ vérifiant la condition de régularité que voici:

Condition (R). Il y a une fonction φ faisant correspondre à tout ordinal $n < \omega_\alpha$ un ordinal $\varphi(n) < \omega_\alpha$ de manière que

$$(a, b), (a, c) > \varphi(n) \Rightarrow (b, c) > n$$

pour chaque triple de points de l'espace.

Remarque 8.1. La régularité globale précédente est équivalente à la régularité locale que voici: à chaque point a de l'espace et à chaque ordinal $n < \omega_\alpha$ correspond un ordinal $\varphi_a(n) < \omega_\alpha$ tel que

$$(a, b), (a, c) > \varphi_a(n) \Rightarrow (b, c) > n.$$

quels que soient les points b, c de l'espace.

Ce fait est dû à Niemycki [1] pour $\alpha = 0$ (cf. Appert-Ky Fan [1, p. 78]) et à Doss [3] pour $\alpha > 0$.

Exemple 8.1.1. Soit ω_α un nombre ordinal initial non cofinal à ω_0 . Considérons un R -espace S défini par un tableau T d'ensembles de rang ω_α ; supposons que S ait au moins un point de caractère \aleph_α . Désignons par S_0 l'espace qu'on déduit de S en y déclarant comme isolé chaque point x de S , tel que la famille des $Y \in T$ vérifiant $\{x\} \subseteq Y$ soit cofinale à 1 ou à ω_β , avec $\beta < \alpha$. Alors S_0 est un D_α -espace.

En effet, soit $i(x, x) = \omega_\alpha$; soit, pour $x \neq y$, $i(x, y)$ le type d'ordre de l'intersection $T(x) \cap T(y)$. On voit bien que i est une pseudodistance dans l'espace S_0 . Ainsi par exemple, la condition (R) de régularité est une conséquence immédiate de ce que pour chaque triple $a, b, c \in S$ l'ensemble

$$\{i(a, b), i(b, c), i(c, a)\}$$

possède au plus deux points; il en résulte que la fonction φ dans l'énoncé (R) peut être supposée être l'identité.

Conditions (I') (I'_m) . Soit m un nombre cardinal > 1 . Nous dirons qu'un espace E vérifie la condition (I'_m) relativement à une base B définissant l'espace E si la conclusion que voici subsiste:

(I'_m) . Si pour un ensemble $X \subseteq E$ tel que $kX < m$ la base B contient une famille monotone d'ensembles $\supset X$ dont l'intersection est égale à X , alors l'ensemble X n'est pas isolé.

Nous dirons qu'un espace vérifie (I'_m) s'il existe une base de l'espace pour laquelle la condition (I'_m) est vérifiée.

Pour abrégé nous écrirons (I') au lieu de (I'_{\aleph_0}) .

Nous dirons qu'un espace E vérifie (I') au point p de l'espace relativement à la famille F de voisinages définissant l'espace au point p , si l'on peut conclure que $p \in E'$ du moment que la famille F contient une famille (monotone) de voisinages de p distincts de $\{p\}$ et ayant $\{p\}$ pour l'intersection.

Si relativement à une base B de voisinages, l'espace vérifie (I'_m) pour chaque point d'un ensemble X , on dira que relativement à B l'espace vérifie (I'_m) dans l'ensemble X .

On dira qu'un tableau ramifié d'ensembles T vérifie (I'_m) si pour chaque ensemble X de puissance $< m$ la relation éventuelle

$$(8.1.1) \quad \bigcap (-X)_T = X$$

implique

$$(8.1.2) \quad X \cap E' \neq v.$$

Il va sans dire que

$$(8.1.3) \quad (-X)_T = \{Y \mid Y \in T, Y \supset X\}.$$

et que X peut ne pas appartenir à T .

LEMME 8.1.1 Pour qu'un tableau ramifié d'ensembles, T , vérifiant les conditions (T_1) et (C) vérifie la condition (I') , il faut et il suffit que la condition (n_2) que voici ait lieu:

$$(n_2) \quad \text{Chaque élément de seconde espèce de } T \text{ est infini.}$$

Nécessité. Soit X un élément de seconde espèce; d'après la condition (C) on aura $X = \bigcap (-, X)_T$. Si alors X n'était pas infini, la condition (I') impliquerait que X n'est pas isolé. Or, X étant un ensemble ambigu, cela voudrait dire que $X \neq v$; cependant, T vérifiant (T_1) , le dérivé de l'ensemble fini X est nécessairement vide. Par conséquent, X est infini.

Suffisance: (n_2) implique (I') . Soit donc X un ensemble fini $\subseteq E$ vérifiant (8.1.1). On a donc $kX < \aleph_0$; si de plus $kX > 1$, la condition (6) entraînerait $X \in T$. Or, la famille (8.1.3) n'ayant pas un terme minimal, on en déduirait que l'ordinal ξ vérifiant $X \in R_\xi T$ serait de seconde espèce. A cause de (n_2) cela voudrait dire que $kX > \aleph_0$ - absurdité. On a donc nécessairement $kX = 1$; à cause de (n_2) on a $X \in T$; si $X = \{x\}$, la relation (8.1.1) implique $x \in E'$! Ainsi le lemme 8.1.1 est démontré.

Voici un procédé bien simple de fabriquer un espace qui ne vérifie pas la condition (I'_2) relativement à une base: Soient S et X un V -espace et un sous-ensemble du dérivé E' respectivement; soit F une famille de voisinages définissant l'espace S . Ceci étant, considérons un ensemble non vide $X \subseteq S'$; soit F_1 la famille qu'on obtient de F en y adjoignant les ensembles (a) ($a \in X$) donc

$$F_1 = F \cup \bigcup_a ((a)) \quad (a \in X).$$

Soit $S(X)$ le V -espace défini par la famille F_1 . L'espace $S(X)$ ne vérifie pas la condition (I') relativement à la famille F_1 dans aucun point $a \in X$. C'est que manifestement

$$(a) = \bigcap_{V(a)} V(a) \quad (V(a) \in F, (a) \subset V(a)),$$

donc $a \in S'$; d'autre part, le point a est isolé dans l'espace $S(X)$, l'ensemble uniponctuel (a) y étant un voisinage de a .

En particulier, B_0 étant l'espace de Baire, à zéro dimension, X étant un sous-ensemble de $B_0 = B'_0$ tel que $B_0 \setminus X$ soit $> \aleph_0$ et partout dense, l'espace $B_0(X)$ est bien défini. L'espace $B_0(X)$ est un R -espace de rang minimal ω_0 . Remarquons que $B_0(X) \in (D_0)$. Un fait analogue subsiste en y remplaçant l'indice 0 par un ordinal α .

8.2. Énoncé du Théorème.

THÉORÈME 8.2.1 *Soit E un espace pseudo-distancié, donc d'une classe (D_α) . Supposons que l'espace E vérifie l'une et donc les deux conditions que voici:*

- 1) Condition (I') .
- 2) Condition (n_2) : *chaque élément de seconde espèce d'une base T de l'espace est infini.*

Alors l'espace est métrique (cas $\alpha = 0$) ou totalement ordonnable ou les deux.

Problème 8.2.1. Existe-t-il pour chaque ordinal α un espace pseudo-distancié $E_\alpha \in (D_\alpha)$ non distanciable qui ne soit pas totalement ordonnable?

Tout d'abord, la classe (D_0) coïncide avec la classe des espaces métriques de Fréchet (pour la démonstration v. Kurepa [4], [5]. Quant aux classes (D_α) pour $\alpha > 0$, R. Doss [3] a prouvé que la condition de régularité (R) est équivalente à la condition disant que la fonction φ soit l'identité. R. Doss en a déduit que l'espace considéré est définissable par un tableau ramifié de voisinages c'est-à-dire que chaque classe (D_α) pour $\alpha > 0$ est un R -espace. En particulier, en définissant le sphéroïde $S(a, > \xi)$ comme l'ensemble des points dont le degré de proximité à partir de a soit $> \xi$ (a, ξ parcourant respectivement l'espace donné et l'ensemble des ordinaux $\leq \omega_\alpha$), le système de ces sphéroïdes est un tableau ramifié d'ensembles, définissant l'espace donné E : l'espace E est un R -espace où $\gamma T = \omega_\alpha$.

8.3. Quelques propriétés concernant les R -espaces

Nous allons indiquer quelques propriétés des R -espaces.

Soient donc E un R -espace et T un tableau ramifié d'ensembles définissant l'espace E . Pour chaque $a \in E$ on a la famille $T(a)$ des $X \in T$ vérifiant $a \in X$ et on supposera que: $\{a\} = \bigcap X (X \in T(a))$.

$T(a)$ est une suite strictement décroissante d'ensembles qu'on désignera $T_0(a) \supset T_1(a) \supset \dots \supset T_\xi(a) \dots$ ($\xi < \gamma T(a)$). Donc

$$\{a\} = \bigcap_{\xi} T_\xi(a); \quad (\xi < \gamma T(a)).$$

Evidemment, l'union des éléments de T est égale à l'ensemble E .

LEMME 8.3.1. *Chaque portion droite, P , de T telle que $\bigcup x = E$ ($x \in P$) est une base de l'espace E .⁵*

Il s'agit de prouver: si $x \in E$, chaque $V(x) \in T(x)$ contient un élément de $P(x)$. Or, l'union des éléments de P étant E , il y a un $A(x) \in P$ tel que $x \in A(x)$. Puisque aussi $x \in V(x)$ donc $x \in V(x) \cap A(x)$ les ensembles $V(x), A(x)$ sont comparables (T est un tableau ramifié): on a soit $A(x) \subseteq V(x)$ soit $A(x) \supset V(x)$. Dans le premier cas, tout est déjà prouvé; dans le second cas aussi puisque $V(x) \in P$ étant donné que $A(x) \in P$ et que P est une portion droite de T .

Voici une propriété élémentaire de l'espace E :

⁵Chaque sous-famille F de T telle que pour chaque $X \in F$ on a $(x, -) \subseteq F$ s'appelle portion droite de T ; bien entendu $[x, -]_T = \{y | y \in T, x \supseteq y\}$.

LEMME 8.3.2. *Chaque $X \in T$ est un ensemble ambigu: X est à la fois ouvert et fermé.*

Que X soit ouvert c'est bien évident; prouvons que X est fermé; dans le cas contraire, on aurait un point $a \in X' \setminus X$; on aurait en particulier $a \in V(a) \setminus X$ et $V(a) \cap X \neq v$ et dès lors, T étant ramifié, $V(a) \supseteq X$ pour chaque $V(a) \in T(a)$, contrairement à la supposition (T_1) . D'une façon analogue on prouve le

LEMME 8.3.3. *Si $X, Y \in T$, l'ensemble $X \setminus Y$ est ambigu.*

LEMME 8.3.4. *Soit F une chaîne extraite de T ; si l'intersection I des éléments de F contient un élément de T , l'ensemble I est ambigu.*

L'ensemble I est fermé en tant que l'intersection des fermés appartenant à F . D'autre part, considérons la famille $I^+ = R_0(I, -)$. Celle-ci est une décomposition disjonctive de I , chacun des éléments de I^+ étant ouvert; I^+ est également ouvert, étant donné que I est la réunion des éléments de I^+ .

Remarque 8.3.1. Dans ce qui suit nous supposons, sauf mention expresse du contraire que les deux conditions (T_1) et (C) soient satisfaites: (cf. 5).

8.4. Condition (δN_2) et (N_2) .

Soit T un tableau ramifié définissant un espace pseudo-métrique E vérifiant I' ou (n_2) . Prouvons le

LEMME 8.4.1. *La base T vérifie la condition (δN_2) : Chaque élément X de seconde espèce est l'union d'une famille infinie δX d'espaces ambigus deux à deux disjoints.*

Tout d'abord, d'après la remarque 8.3.1 on peut supposer que pour chaque $X \in T$ de seconde espèce l'intersection des $Y \in T$ vérifiant $Y \supset X$ soit égal à X . Ceci étant, considérons un élément quelconque X de seconde espèce de T ; à la suite de la condition (I') ou (n_2) l'ensemble X est infini. Si de plus $X' = v$, on aura $(p) \in T$ pour chaque $p \in X$ et on désignera par δX la famille des (p) ($p \in X$). Si par contre $X' \neq v$, posons $X_1 = [X, -)_T$; on aura $\gamma X_1 > \omega_0$. Soient $Y \in R_{\omega_0} \psi X_1$ et $Y_n \in R_n X_1$ vérifiant $Y_n \supset Y$.

On a évidemment

$$(1) \quad Y_0 = X = \bigcup_n (Y_n \setminus Y_{n+1}) \cup \bigcap_n Y_n \quad (n < \omega_0)$$

$$(2) \quad Y = \bigcap_n Y_n \quad (n < \omega_0), \quad Y = \bigcup R_0(Y, -)_T, \quad Y_n = (Y_n \setminus Y_{n+1}) \cup Y_{n+1}$$

$$(3) \quad Y_n \setminus Y_{n+1} = \bigcup Z_n \quad (Z_n \in R_0(Y_n, -)_T, \quad Z \neq Y_{n+1}).$$

Cela montre que la décomposition de X provenant de (1), (2) et (3) est une partition demandée δX de l'espace X .

Ceci étant, définissons inductivement la base T' de la manière suivante. Posons $T'_n = R_n T$ pour $n \leq \omega$. Soit ν un ordinal tel que les sous-ensembles T'_ν . Pour cela, considérons l'ensemble

$$(4) \quad T' \bigcup_x (-, X]_T \quad (X \in \bigcup_{(\nu_0 < \nu)} T'_{\nu_0}).$$

Si l'ensemble (4) est vide, on posera

$$(5) \quad T' = \bigcup_{\nu_0} T'_{\nu_0} \quad (\nu_0 < \nu)$$

et le procès sera terminé. Si l'ensemble (4) est $\neq \nu$, considérons la rangée initiale $R_0(4)$ de (4). Si $\nu \in II$, on posera

$$(6) \quad T'_\nu = R_0(4).$$

Si $\nu \in II$, on posera

$$(7) \quad T'_\nu = \bigcup_x (\{X\} \cup \delta X), \quad (X \in R_0(4)),$$

δX ayant la signification de tout à l'heure.

En désignant par ν le premier ordinal tel que l'ensemble (4) soit vide, la famille T' est parfaitement définie par (5).

On prouve aisément que T' est une sous-famille de T équivalente à T ; en particulier, quel que soit le point p et $p \in V(p) \in T$, il y a un $W(p) \in T'$ tel que $p \in W(p) \subseteq V(p)$. En effet, soit ξ le premier ordinal tel que la famille T'_ξ ne contienne aucun $X \supset V(p)$. Par conséquent, pour chaque $\xi_0 < \xi$ on a un $A_{\xi_0} \in T'_{\xi_0}$ tel que $A_{\xi_0} \supset V(p)$; on aura

$$\bigcap_{\xi_0 < \xi} A_{\xi_0} \supseteq V(p)$$

et forcément c'est le signe = qu'il faut y pendre; pour l'élément $Y \in T'_{\xi+1}$ tel que $p \in Y$, on aura $Y \subset V(p)$.

De plus, on se rend compte que la base T' vérifie la condition (C) disant que, pour tout $X \in T'$ de seconde espèce on a $\bigcap(-, X) = X$.

On voit que la base T' vérifie la condition (N_2) que voici:

Condition (N_2) . *Chaque élément de seconde espèce possède une infinité de successeurs immédiats:*

$$(8) \quad X \in T', \gamma X \in (II) \Rightarrow kR_0(X, -)_{T'} \geq \aleph_0.$$

8.5. *Démonstration du théorème 8.2.1.*

Prouvons d'abord le

LEMME 8.5.1. *Chaque espace isolé E est totalement ordonnable. Si E est infini, on peut à notre gré disposer du comportement de E aux extrémités: l'espace ordonné peut être limité, illimité ou limité d'un seul côté, gauche ou droite.*

Le cas $kE < \aleph_0$ étant trivial supposons $kE = \aleph_\alpha$. Pour avoir un espace illimité, de type \leftrightarrow , on considère le type d'ordre $t_\alpha = (\omega_0^* + \omega_0)\omega_\alpha$; alors chaque application biunivoque de ce type d'ordre sur E est une homéomorphie. Pour réaliser les trois autres cas, on considère les ordres:

$$\begin{aligned} &\omega_0 + t_\alpha \\ &t_\alpha + \omega_0^* \\ &\omega_0 + t_\alpha + \omega_0^*. \end{aligned}$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème 8.2.1.

8.5.1. *Ordnation naturelle* (cf. Kurepa [2, p. 127]).

On peut supposer que le tableau T vérifie les conditions C (cf. L. 8.5.1) (N_2) de (8.4.8) et que $E \in T$; donc $R_0T = \{E\}$.

On va ordonner totalement la famille des $T(p)$ ($p \in E$); l'ordination sera une généralisation naturelle de l'ordination alphabétique et sera induite par les ordinations totales des $X \in \psi T$ de première espèce.

L'ordre total demandé $(E; <)$ sera résultat d'ordinations successives $(E, <_\alpha)$ de plus en plus extensives. Chaque élément $X \in \psi T$ sera une portion ambiguë X_c de la chaîne $(E, <)$.

La caractéristique de l'ordination alphabétique de E consiste justement dans le fait que chaque $X \in T$ devient une portion X_c de la chaîne. L'un des caractères $< - >, \leftarrow, \rightarrow, | - |$ de la portion X_c dans la chaîne $(E, <)$ sera déterminé dès qu'on arrivera à considérer l'élément $X \in \psi T$. C'est ainsi que par exemple chaque $X \in \psi T$ de première espèce sera de type $| - |$, c'est-à-dire deux points notés mX, MX seront assignés à X et seront le point initial et le point terminal de la portion X_c dans la chaîne $((E, <))$.

Autrement dit chaque élément $X \in \psi T$ de première espèce sera limité. Il va sans dire que

- (1) $Y \subset X, mX \in Y \Rightarrow mX = mY$
 (2) $Y \subset X, mX \in Y \Rightarrow MX = MY.$

Le comportement aux extrémités de X_c pour un $X \in \psi T$ de seconde espèce est induit par le comportement des éléments de $(-, X)_T$, au moins si l'on tient à l'ordination alphabétique. C'est pour cela qu'il faut considérer des $X \in T$ de seconde espèce. Or, pour pouvoir disposer aux extrémités de X d'une façon arbitraire, il suffit que X soit décomposable en une infinité d'éléments de T , c'est-à-dire que T vérifie (N_2) (cf. L. 8.4.1, 8.5.1). Cette condition est assurée par la condition (I') ou (n_2) dans le cas des espaces pseudo-distanciés (v. L. 8.4.1).

En particulier, si X est dans T de seconde espèce, on arrangerá le comportement de X_c aux extrémités de telle manière à empêcher que l'extrémité éventuelle de la chaîne X_c soit point d'accumulation de l'ensemble $E \setminus X$.

8.5.2. *Procédé (P)*. Soit D une famille non vide d'ensembles deux à deux disjoints. Le procédé (P) appliqué à D consistera des 3 opérations que voici:

1. Ordonner totalement le système D par une relation $< (D)$ pour obtenir une chaîne isolée

$$C^0 D = (D; < (D)).$$

2. Pour chaque $X \in \psi D$ déterminer les points mX, MX de X de la façon indiquée ci-dessus; donc X_c sera d'un type $1 + \dots + 1$.

3. Ordonner l'ensemble $S = \bigcup D$ par la relation $(< D)$ définie à partir de $< (D)$ comme il soit:

3.1. Pour chaque $X \in D$, les points mX et MX sont, le point initial et le point terminal de X dans $(S; (< D))$;

3.2. Si $X, Y \in D$, alors

- (1) $X \leq (D)Y$ dans $C^0 D \Leftrightarrow X \cdot ((\leq D) \cdot Y$ dans $(S; (\leq D))$ où
 (2) $X \cdot (\leq D) \cdot Y \Leftrightarrow x(\leq D)y$ ($x \in X, y \in Y$).

Pour chaque $X \in \psi T$ on appliquera le procédé (P) à l'espace X et à sa base $(X, -)_T$. Cela veut dire en particulier que la famille

$$R_0(X, -)_T$$

sera totalement ordonnée par une relation d'ordre propre, soit $\leq (N)$ et que la chaîne (3) sera d'un type d'ordre $1 + \dots + 1$ pour chaque $X \in \psi T$ de première espèce.

Soient alors x, y deux points distincts de l'espace. Considérons la chaîne $T(x) = \{T_\xi(x)\}_\xi$ des voisinages de x et la chaîne $T(y) = \{T_\eta(y)\}_\eta$ des voisinages de y appartenant à la base T . Soit

$$(4) \quad i = i(x, y)$$

le premier indice n tel que $T_n(x) \neq T_n(y)$ et donc $T_n(x) \cap T_n(y) = v$. Forcément, à la suite de la condition C , le nombre $i(x, y)$ est de première espèce. Par conséquent, l'élément $X = T_{i-1}(x) = T_{i-1}(y)$ est bien déterminé aussi bien que la chaîne correspondante (3). Alors on définira

$$(5) \quad x \leq y \Leftrightarrow T_{i-1}(x) < (X)T_{i-1}(y).$$

On prouve facilement que l'ensemble ordonné $(E; ,)$ ainsi obtenu est une chaîne. Au fond, il s'agit d'une généralisation naturelle de l'ordination alphabétique des complexes $T(p)$, ($p \in E$).

8.5.3. *Difficultés concernant les noeuds de seconde espèce.* Dans le cas général, l'espace donné E n'est pas homéomorphe de l'espace ordonné $(E; <)$ ainsi obtenu. C'est que chaque $X \in T$ est un sous-espace ambigu de l'espace E , alors que dans la chaîne $(E; <)$ cette propriété subsiste nécessairement seulement si $\gamma X \in (II)$, n'est pas ouverte dans la chaîne $(E; <)$. C'est pour cette raison que si $\gamma X \in (II)$, le procédé (P) sera appliqué à X avec la précaution supplémentaire à assurer l'ambiguïté de la chaîne X_c . Procédons par récurrence.

Pour faciliter le langage posons

$$(1) \quad X_0 = R_0(X, -)_T, (X \in \psi T).$$

Ceci étant, appliquons le procédé (P) au système R_0T . On obtient ainsi l'ensemble ordonné

$$(2) \quad (E; < R_0T) \text{ désigné aussi par } (X \in \psi T).$$

Pour chaque $X \in \psi R_1T$ appliquons le procédé (P) au système X_0 ; soit

$$(3) \quad (E; <_1)$$

l'ordination ainsi induite dans E ; par conséquent, l'ordination (3) est la réunion des relations d'ordre

$$(4) \quad \leq_0, \leq (X_0). \quad (X \in \psi R_1 T).$$

D'une façon analogue on définit dans E la relation \leq_2 comme la réunion des relations

$$\leq_0, \leq_1, \leq (X_0), \quad (X \in \psi R_2 T).$$

Supposons que $\alpha < \gamma T$ et que les ordinations

$$(5) \quad (E; \leq_\xi) \quad (\xi < \alpha)$$

de plus en plus extensives soient définies; définissons alors

$$(6) \quad (E; \leq_\alpha).$$

Si $\alpha \in I$, la relation \leq_α sera la réunion des relations

$$(7) \quad \leq_\xi \quad (\xi < \alpha)$$

$$(8) \quad \leq (X_0) \quad (X \in R_\alpha \psi T).$$

Autrement dit, \leq_α est l'extension de la relation $\leq_{\alpha-1}$, par des relations (8).

Si $\alpha \in II$, on considérera d'abord la relation

$$(9) \quad \leq^\alpha = \bigcup \leq_\xi \quad (\xi < \alpha).$$

Pour chaque $X \in R_\alpha \psi T$ on appliquera le procédé (P) à X_0 avec la précaution que voici.

Si

$$(10) \quad (-, X)_{(E; \leq^\alpha)}$$

n'a pas un dernier point, X_0 n'aura pas un premier point; et dualement; si

$$(11) \quad (X, -)_{(E; \leq^\alpha)}$$

n'a pas un point initial, la chaîne X_0 n'aura pas un point terminal. L'ensemble X_0 étant infini, on peut toujours satisfaire à ces deux conditions (cf. L. 8.5.1).

Bref, on a ainsi une suite d'ordinations

$$(12) \quad (E; <_\alpha) \quad (\alpha < \gamma T)$$

de plus en plus amplifiées.

8.5.4 *Homéomorphie demandée.* Soit

$$(1) \quad (E; \leq)$$

la réunion des ordres (8.3.12). C'est la chaîne demandée.

On se rend facilement compte que l'ordre $(E; \leq)$ est celui qu'on obtient dans E en y transplantant par la transformation $T(a) \rightarrow a$ l'ordre total de l'ensemble OT des chaînes maximales $\subseteq T$, l'ordre dans OT étant alphabétique.

L'espace donné E est homéomorphe de l'espace totalement ordonné $(E; \leq)$. La transformation identique en est une homéomorphie.

Ce fait résultera des deux propositions que voici:

LEMME 8.5.4.1. *Si $x \in V(x) \in T$, il y a un intervalle ouvert $I(x)$ de la chaîne (1) tel que*

$$(2) \quad x \in I(x) \subseteq V(x).$$

LEMME 8.5.4.2. *Si $x \in E$ et si $I(x)$ est un intervalle ouvert de la chaîne (1) tel que $x \in I(x)$, alors il y a un $V(x) \in T$ vérifiant*

$$(3) \quad x \in V(x) \subseteq I(x).$$

Prouvons le lemme 8.5.4.1. Pour un $x \in E$ désignons, s'il existe, par x^- le point qui dans la chaîne (1) précède immédiatement le point x . Dualement, soit x^+ le point de (1) qui succède immédiatement au point x .

LEMME 8.5.4.3. *Si $x = mV$, $V \in T$, alors x^- existe, sauf si $x = mE$. Et dgalement: si $x = MV$, $V \in T$, alors x^+ existe, sauf si $x = ME$.*

En effet, soit $x = mV$, $V \in T$. Soit $A \in T$ tel que $x = mA$, $\gamma A \in' (II)$ et que γA soit minimal. Soit $A \in X_0$. Si $mX = x$, alors $\gamma X \in (II)$ et en vertu de la condition (N_2) , le point x^- existe. Si l'on n'a pas $mX = x$, alors dans la chaîne X_0 l'élément A de celle-ci a un prédécesseur immédiat, soit A^- ; alors $MA^- = x^-$.

On prouve le dual d'une façon analogue.

Ceci étant, prouvons le lemme 8.5.4.1. Il s'agit de déterminer les extrémités de l'intervalle $I(x)$ en question.

Si $x = mA$, $A \in T$, on prendra le point x^- pour l'extrémité gauche de $I(x)$. Si x n'est pas de la forme mA , $A \in T$, le point⁶ $mV(x)$ servira comme l'extrémité gauche de $I(x)$.

Il nous reste encore à prouver le lemme 8.5.4.2. Soient donc $x \in E$ et $I(x)$ un intervalle ouvert de (1) contenant x . Si $\{a\} \in T$, on peut prendre $\{a\} = V(a)$.

Supposons que

$$(4) \quad I(x) = (x', x'').$$

Puisque $x \in (x', x'')$, on voit que

$$(5) \quad i(x', x'') = \inf\{i(x', x), i(x, x'')\}.$$

Soit alors

$$(6) \quad \beta = \sup\{i(x', x), i(x, x'')\}.$$

On aura

$$(7) \quad T_\beta(x) \subseteq I(x).$$

En effet, pour chaque $p \in T_\beta(x)$, on aura $p \in (x', x'')$ – conséquence des égalités $i(x', p) = i(x', x)$, $i(p, x') = i(x, x'')$.

Ainsi le théorème 8.2.1 est prouvé.

9. Quelques cas d'ordinabilité totale d'espaces.

La démonstration précédente du théorème 8.2.1 s'applique pour démontrer le

THÉORÈME 9.1 *Chaque R -espace vérifiant la condition (N_2) (resp. (δN_2)) est totalement ordonnable.*

Ce théorème est à rapprocher du théorème de P. Papić provenant du théorème 9.1 en y remplaçant la condition (N_2) (resp. (δN_2)) par la condition β disant ceci:

Condition β . *Aucun élément $X \in T$ de seconde espèce n'est compact.*

⁶Bien entendu, dans le lemme 8.5.4.1 on peut toujours supposer que $\gamma V(x) \in I$ étant donné que, d'après la supposition, la base T vérifie la condition (C).

En particulier on a le

THÉORÈME 9.2. *Chaque R -espace vérifiant T_1 défini par un tableau T de rang $\leq \omega_0$ est totalement ordonnable.⁷*

THÉORÈME 9.3. *Chaque R -espace E admettant une base $\leq \aleph_0$ est totalement ordonnable.*

Tout d'abord E est métrique, E étant un R -espace vérifiant T_1 et ayant une base $\leq \aleph_0$ (v. Kurepa [5, th. 5]). Ensuite, chaque R -espace métrique est totalement ordonnable (Papić [3, th. 10]).

THÉORÈME 9.4. *Chaque R -espace compact E vérifiant T_1 est une chaîne ordonnée limitée.*

Tout d'abord, l'espace E est définissable par un tableau T de voisinages tel que $\gamma T \leq \omega_0$ et $kR_n T < \aleph_0$ pour chaque $n < \gamma T$ (v. Papić [1, L. 5.6]). En vertu du théorème 9.2 ou théorème 9.3, l'espace E est totalement ordonnable. Chaque ordination naturelle de la famille OT des chaînes maximales $\subseteq T$ fournit une chaîne C dont l'espace est homéomorphe de l'espace E . Il en résulte en particulier que C est limité. En effet, d'après le procédé P du 8.5.2 on peut supposer que $E \in T$ et alors les points mE, ME sont le point initial et le point terminal de la chaîne C .

Ensuite, C ne présente aucune lacune. En effet, soit I une portion initiale de C ; désignons pour chaque $n < \gamma T$ par V_n l'élément de $R_n T$ tel que ou bien V coupe I et $C \setminus I$ ou bien que V_n soit cofinal à I . Alors le point $\bigcap V_N$ est ou bien le point terminal de I ou bien le point initial de $C \setminus I$.

THÉORÈME 9.5. *Soit E un R -espace vérifiant la condition (I') ou (n_2) relativement à un arbre T de voisinages; soit $T_k = \bigcup [X, -]_T$, X parcourant la famille des $X \in T$ compacts [de seconde espèce] vérifiant $kX' \geq 1$. Si alors l'ensemble $E_k = \bigcup X$ ($x \in T_k$) est fermé, l'espace E est une chaîne ordonnée.*

Le théorème 9.5 se déduit d'une façon simple du théorème 9.6 que voici.

THÉORÈME 9.6. *Soient E un R -espace, T un arbre de voisinages définissant E et*

$$(1) \quad T_c = \bigcup [X, -]_T$$

⁷C'est un des premiers résultats que P. Papić et Kurepa ont trouvé indépendamment l'un de l'autre en 1953 lorsque Kurepa avait cru avoir démontré l'ordinabilité totale de chaque espace pseudodistancié nondistanciable et lui, indépendamment, un mois après celle des R -espaces vérifiant T_1 .

X paracourant la famille des éléments compacts de seconde espèce de T . Si l'ensemble

$$(2) \quad E_c = \bigcup X \quad (X \in T_c)$$

est fermé, l'espace E est totalement ordonnable.

Tout d'abord, l'ensemble E_c est ouvert, étant donné que E est l'union d'ensembles ouverts $X \in T$. Par conséquent, si E_c est encore fermé l'ensemble E_c est ambigu. Cet ensemble est un sous-espace ambigu défini par la base T_c . Or, chaque $X \in T_c$ étant compact, l'espace ambigu X admet une base $B(X)$ de rang $\leq \omega_0$ (v. Papić [1, L. 5]). En particulier, il en résulte que la famille

$$(3) \quad \bigcup B(X) \quad (X \in R_0 T_c)$$

est une base de l'espace E_c et que le rang de (3) soit $\leq \omega_0$. En vertu du Th. 9.2 il existe une chaîne L_1 telle que l'espace E_c soit homéomorphe de l'espace totalement ordonné L_1 . D'autre part, considérons le complémentaire

$$(4) \quad E \setminus E_c = CE_c$$

de l'ensemble E_c . C'est un ensemble ambigu, comme complémentaire de l'ambigu E_c . Or, l'ensemble (4) engendre un espace défini par la famille

$$(5.) \quad T \setminus T_c$$

Cete famille vérifie la condition β de Papić et d'après le dit théorème de Papić il existe une chaîne L_2 telle que l'espace (4) soit homéomorphe de l'espace L_2 .

Maintenant, il s'agit encore de la question si l'on peut disposer des ordinations des espaces L_1, L_2 de manière que chacun d'eux soit ambigu dans la somme ordonnée $L_1 + L_2$. Il en est bien ainsi.

En effet, l'espace E est ou bien compact ou non compact. Si E est compact, la chaîne ordonné L_1 est nécessairement d'un type $| - |$ donc $1 + \dots + 1$. Si E_c n'est pas compact, on peut disposer librement de son comportement aux extrémités. Le même raisonnement s'applique à L_2 . On en déduit facilement qu'on peut supposer les ordres L_1, L_2 de manière que chacun des espaces L_1, L_2 soit ambigu dans l'espace ordonné correspondant à la chaîne

$$L_1 + L_2.$$

Bien entendu, l'ordre y est défini de manière que L_1 y précède L_2 . Q.E.D.

THÉORÈME 9.7. Si l'espace $E \in (R)$ possède un seul point d'accumulation, soit a , E possède une partie infinie D isolée fermée (ce qui se présentera par exemple dans ces deux cas:

- 1) $kE > \aleph_0$; 2) $kE = \aleph_0$

et E non compact), on peut exiger que la chaîne L soit limitée ou illimitée ou d'avoir une seule extrémité, initiale ou terminale.

En effet, $\{a\} = \bigcap T_\xi(a)$ ($\xi < \omega_\alpha$) et on aura

$$T_0(a) = \{a\} \cup \bigcup_{\xi} (T_\xi(a) \setminus T_{\xi+1}(a)).$$

L'ensemble $E \setminus T_0(a)$ étant ambigu, on peut le considérer vide et alors

$$E = \{a\} \cup \bigcup_{\xi} (T_\xi(a) \setminus T_{\xi+1}(a)).$$

L'ensemble $T_\xi(a) \setminus T_{\xi+1}(a)$ est isolé et on peut l'ordonner à devenir une chaîne L_ξ du type $k(T_\xi(a) \setminus T_{\xi+1}(a))$ ou $(\omega^* + \omega)\omega_{\nu_\xi}$, suivant que $k(T_\xi(a) \setminus T_{\xi+1}(a))$ est fini ou $= k\omega_{\nu_\xi}$; alors la chaîne $L = (\sum_{\xi} L_\xi) + \{a\}$, ($\xi < \omega_\alpha$) par transformation identique, est homéomorphe de l'espace E .

Pour achever la démonstration, enlevons à la chaîne L un ensemble dénombrable isolé fermé D dont on y parle; soit τ le type d'ordre du reste de la chaîne L . Disons qu'un type d'ordre est de forme 00, 01, 10 ou 11, suivant qu'il n'a aucune extrémité ou seulement l'extrémité droite ou seulement l'extrémité gauche ou les deux. Si τ_0 est le type demandé à l'espace E , on le déduira de τ de façon indiquée dans le tableau que voici:

a) Le type τ est de la forme 01:

type demandé τ_0
doit être un

Représentation de τ_0

- 00 \longleftrightarrow
01 $\longleftarrow|$
10 $\longrightarrow|$
11 $\longleftarrow|$

(on ordonne D à devenir ω et on le met après τ)
 $\tau + \omega$
 $\omega^* + \tau$
 $\omega^* + \tau + \omega$
 $\omega + \tau$

b) τ est un 11

- 00 $\omega^* + \tau + \omega$

01	$\omega^* + \tau$
10	$\tau + \omega$
11	$\omega + \omega^* + \tau$

Remarquons que dans le cas $kE = \aleph_0$ l'un des ensembles $T_n(a) \setminus T_{n+1}(a)$ est infini et on peut le prendre pour D . Si $kE > \aleph_0$, on peut prendre

$$D \subseteq \bigcup_n (T_n(a) \setminus T_{n+1}(a)) \quad (n < \omega_0),$$

THÉORÈME 9.8. *Si le dérivé E' d'un R -espace E défini par un tableau T est séparable simultanément c'est-à-dire s'il existe une famille disjonctive $F \subseteq T$ telle que*

$$k(X \cap E') = 1 \quad (X \in F).$$

l'espace E est totalement ordannable.

Soit $Y = C \cup X$, ($X \in F$); Y est un ensemble isolé; considérons alors le système $H = F \cup \bigcup_y \{\{y\}\}$, ($y \in Y$). Ordonnons H à devenir une chaîne isolée L ; nous en déduisons une chaîne E_c en remplaçant dans L chaque élément $X \in F \cap L = F$ par un ordonnement total X_c de l'ensemble X de manière que X_c soit limité et que $X'_c = X' = X \cap E'$. La transformation identique de E en E_c est une homéomorphie entr E et l'espace ordonné E_c .

THÉORÈME 9.9. *(L'ordinabilité totale des eT -espaces). Chaque eT -espace est totalement ordonnable si et seulement si l'espace vérifie l'axiome T_1 de Fréchet ou si chaque noeud de seconde espèce de l'arbre correspondant est monoponctuel.*

Il suffit d'ordonner chaque noeud N de première espèce de T à devenir une chaîne isolée limitée, soit $(N; < (N))$ et d'y appliquer l'ordination naturelle. C'est-à-dire, a, b étant deux points distincts, considérons les éléments a_i, b_i ou $i = i(a, b) = t(-, a] \cap (-, b]$; nécessairement, les points a_i, b_i appartiennent à un même noeud N de T ; on pose alors $a < b$ si et seulement si $a_i < (N)b_i$ dans le noeud N . Soit C la chaîne ainsi obtenue. Prouvons que l'espace eT est homéomorphe de l'espace ordonné C .

Soit $x \in T$. Si $x' < x'' < x$, alors $(x'', x]_c \subseteq S(x', x]$.

Réciproquement, soit $I = (a, b)_c$ un intervalle de la chaîne C contenant x tel que $a < (C)x < (C)b$; ici $\leq (C)$ désigne la relation d'ordre de la chaîne C . Alors, I contient un sphéroïde $S(x; \xi)$. La chose étant évidente si $\gamma x \in' II$, supposons que $\gamma x \in II$. Soit $\xi = \sup(i(a, x), i(x, b))$; on a $\xi \geq i(a, b)$ et on voit bien que $S(x; > \xi) \subseteq I$.

10. Problèmes.

Dans ce qui précède nous avons considéré parmi d'autres ces espaces:

- 1) Espaces totalement ordonnables,
- 2) Espaces pseudo-métriques non métriques,
- 3) R -espaces,
- 4) eT -espaces,
- 5) T -espaces,

Le problème se pose de pousser plus à fond l'étude des interconnexions entre ces espaces.

La liste précédente pourrait s'augmenter des espaces ramifiés et des espaces ordonnés. Voici par exemple la définition des espaces ramifiés (cf. Kurepa [6, p. 72]):

Soit S un ensemble ramifié c'est-à-dire un ensemble ordonné jouissant de la propriété que pour tout $a \in S$ l'ensemble $(-, a)_s$ est une chaîne. A chaque $a \in S$ on va attacher les ensembles de la forme $(x, Y)_s = \{a\} \cup \bigcup_{y \in Y} (x, y)$ comme voisinages de a ; ici $x \in oa$; Y dénote une antichaine maximale quelconque de $1 a$.

Voir aussi les problèmes 4.1, 6.1, 8.2.1. Sur cela nous reviendrons dans un autre papier.

INDEX

Ambigu = être à la fois ouvert et fermé;

Arbre 4,5. (v. T);

Axiomes $O^1, O^2, O^3, O^{1'}$: 1.1; O^4 : 7.2;

Condition: (C) 8.3; (c_1) – (c_5) , (Δ) , (Δ_2) : 3; (I') : 8.1; (N) : 4; (n_2) : 8.1;

(N_2) : 8.4; (ν) : 8.1; (R) : 8.1; (T_1) : 8.3;

D-espace: 8.1;

Écart: abstrait 1.1; – et espaces bien ordonnés 6; –et espaces uniformes 7;

M – – 1.1; – numérique 1.1; – régulier 7.1; – totalement ordonné 1.2;

Espace: – D : 8.1; eT –: 4; – pseudo-distanciés: 8; R – –: 5; T –: 4;

Noeud: chaque sous-ensemble maximal A de T vérifiant $(-, x) = (-, y)$ si $x, y \in A$;

Opérateur \mathcal{E} : 1.2;

Ordination: – alphabétique 1.3; – naturelle 8.5.1;

Proximité: 1.1;

Ramifié: ensemble – 10; espace –: 10;

Régularité: 8.1;

Tableau ramifié: 4.5 (v. T).

Dénotations

kX = le cardinal de X ;

$\in' =$ non \in ;

$\psi F = \{X \mid X \in F, kX > 1\}$;

$\varphi F = \{X \mid X \in F, kX = 1\}$

RT 4;

T 4.5;

$T(a)$ 8.1;

γT 4;

$oa = (-, a) = \{x \mid x < a\}$;

$la = (a, -) = \{x \mid x > a\}$;

$a \in (II)$ veut dire que a est seconde espèce;

$i(a, b)$ 3;

n_- désigne l'élément variable $< n$.

R étant le symbole pour une relation binaire, on désigne par R_1, R_2 respectivement le premier et le second terme de la relation R .

BIBLIOGRAPHIE

- A. Appert, Ky Fan, *Espaces topologiques intermédiaires*, Hermann, Paris, 1951, 160.
- F. Bernstein, *Untersuchungen aus der Mengenlehre*, Halle 1901 und Math. Ann. **61** (1905), 117-155.
- N. Bourbaki, *Topologie générale III*, Hermann, Paris, 1940.
- J. Colmez, [1] *Espaces à écart généralisé régulier*, C. R. Acad. Sci. Paris **224** (1947), 372.
- [2] *Sur les espaces à écart*, C. R. Acad. Sci. Paris **228** (1949), 156.
- [3] *Sur divers problèmes concernant les espaces topologiques, Les espaces à écarts-problème de Wiener sur les transformations continues*, Portugaliae Math. **6** (1947), 119-244; Math. Rev. **10** (1949), 557.
- R. Doss, [1] *Sur la condition de régularité pour l'écart abstrait. Écart abstrait symétrique et régulier*, C. R. Acad. Sci. Paris **223** (1946), 14-16, 1087-1088.
- [2] *Sur la théorie de l'écart abstrait de M. Fréchet*, Bull. Sci. Math. (2) **71** (1947), 110-122; Math. Rev. **9** (1948), 605.
- M. Fréchet, [1] *La condition d'écart et le calcul fonctionnel*, C. R. Acad. Sci. Paris **140** (1905), 772-774.
- [2] *Sur quelques points du calcul fonctionnel*. Thèse Paris, 1906; Rend. Circ. Mat. Palermo **22** (1906), 1-74.
- [3] *Espaces abstraits*, Paris, 1927, 12 + 296.
- [4] *La notation d'uniformité et les écarts abstraits*, C. R. Acad. Sci. Paris **221** (1945), 337-339.
- [5] *De l'écart numérique à l'écart abstrait*, Portugaliae Math. **5** (1946), 121-131.
- [6] *Sur les espaces à l'écart régulier et symétrique*, Bol. Soc. Portugal. Math. **1** (1947), 25-28.
- F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914, 6 + 476.

- G. K. Kalish, *On uniform spaces and topological algebra*, Bull. Ann. Math. Soc. **52** (1946), 936–939.
- G. Kurepa, [1] *Tableaux ramifiés d'ensembles*, *Espaces pseudodistanciés*, C. R. Acad. Sci. Paris **198** (1934), 1563–1565.
- [2] *Ensembles ordonnés et ramifiés*, Thèse Paris, 1935, 1–138; Publ. Math. Univ. Beograd **4** (1935), 1–138.
- [3] *Le problème de Suslin et les espaces abstraits*, C. R. Acad. Sci. Paris **203** (1936), 1049–1052.
- [4] *Un critère de distanciabilité*, Mathematica Cluj **13** (1937), 59–65.
- [5] *Sur les classes (E) et (D)*, Publ. Math. Univ. Belgrade **5** (1936), 124–132.
- [6] *Teorija skupova*, Zagreb, 1951, 22 + 444.
- K. Menger, *Untersuchungen über allgemeine Metrik*, Math. Ann. **100** (1928), 75–163.
- M. Niemytski, *On the third axiom of metric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **29** (1927), 507–513.
- P. Papić, [1] *O prostorima sa razvrstano uređenom bazom okolina*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. **8** (1953), 30–43.
- [2] *Sur une classe d'espaces abstraits*, C. R. Acad. Sci. Paris **236** (1953), 1843–1845.
- [3] *Pseudodistancijalni prostori*, Thèse, Zagreb, 1953, 79
- [4] *Sur une classe d'espaces abstraits*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. **9** (1954), 197–216.
- [5] *Sur les espaces pseudo-distancés* (Ibidem, 217–218).
- B. Price, *A generalization of a metric space with applications to spaces whose elements are sets*, Amer. J. Math. **63** (1941), 46–56.

ON THE EXISTENCE OF PSEUDOMETRIC NON TOTALLY ORDERABLE SPACES

1. *Pseudometric spaces* generalize metric spaces; for every regular ordinal number ω_α we have the class (D_α) of spaces S which are defined by means of a dual distance function in $I(\omega_\alpha + 1)$, i.e., such that for every $a, b \in S$ one has the ordinal number $i(a, b) \leq \omega_\alpha$ (cf. Kurepa [1]–[7], in particular [7, p. 117], and Papić [1]–[6], in particular [5, p. 217]). In particular, for $\alpha = 0$ one has the class (D_0) which coincides with the class of metric spaces (cf. Kurepa [4, Théorème D_0] and [5, Théorème 1]). As to (D_α) -spaces for $\alpha > 0$ the problem is whether they exist without being totally orderable (cf. Kurepa [6, Problème 8.2.1, p. 119] and Papić [6, p. 196]).

In connection with a theorem of Papić in [7] we shall now exhibit pseudo-metric non-totally orderable spaces.

2. THEOREM *There exists a pseudo-metric space $S_1^0, S_1^0 \in (D_1)$, which is not totally orderable.*

2.1. First we shall define a *tree* μ (cf. D. Kurepa [6, p. 146, §6.3]). The set μ consists of all the complexes $a = (a_0 a_1 \dots a_{n-1})$ of ordinal numbers $< \omega_1$ ordered by the following relation $<$: if a, b are two distinct points of μ , we define $a < b$ to mean that either

$$\gamma a = \gamma b \text{ and } a(\cdot, a_{\gamma a-1}) = b(\cdot, b_{\gamma a-1}), \quad a_{\gamma a-1} < b_{\gamma a-1}$$

or $\gamma a = \gamma b$ and $a < b(\cdot, b_{\gamma a})$; in particular, if $\gamma a = \gamma b = 0$ then $a < b$ means that $a = (a_0), b = (b_0), a_0 < b_0$.

BIBLIOGRAPHICAL NOTE: Glasnik Mat.-Fiz. Astr. 18 (1963), 184–194 (Received May 9 1963).

EDITORIAL NOTE: Repeating and unnecessary tags are omitted

2.2. One proves readily that $(\mu, <)$ is tree of height ω_1 ; the initial row $R_0\mu$ consists of the sequences

$$(0), (00), (000), \dots, (0)_n, \dots, (n < \omega_0).$$

2.3. For every $a \in \mu$ the set of immediate followers of a consists of the sequences

$$a_0^+ = (a_0 a_1 \dots a_{n-1} + 1), (a^+ 0), (a^+ 00), \dots$$

2.4. The set $\mu(\cdot, a)$ of predecessors of a consists of the sequences

$$(a'_0), (a_0 a'_1), \dots, (a_0 a_1 \dots a_{n-2} a'_{n-1}),$$

a'_ν running through the interval of the ordinal numbers $< a_\nu$. Consequently the ordinal type of $\mu(\cdot, a)$ is $a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$.

2.5. *Every row of $(\mu, <)$ has \aleph_0 points.* The proof is carried out by transfinite induction; the same fact is provable also by observing that for every $\alpha, \alpha < \omega_1$ and every $k > \omega$ the number of solutions of the relation $a_0 + a_1 + \dots + a_k = \alpha$ is $\leq \aleph_0$.

2.6. *Every point $a, a \in \mu$, is contained in a maximal \aleph_1 -chain of μ .* Such a chain is this one

$$C(a) = \mu(\cdot, a) \cup \bigcup_{\xi} \{(a_0 a_1 \dots a_{n-2} \xi)\}, \quad (\xi < \omega_1).$$

3. *Set $M\mu$. Spaces $(M\mu, i), (M\mu, O)$.*

3.1. Let $M\mu$ denote the set of all the maximal subchains of $(\mu, <)$, each of cardinality \aleph_1 .

3.2. *Space $(M\mu, i)$.* We topologize $M\mu$ in the following way. For $x, y \in M\mu$ we define

$$i(x, y) = \text{the order type of } x \cap y.$$

One sees that one gets a pseudo-metric (D_1) -space, say $(M\mu, i)$, and that in particular $i(x, x) = \omega_1$, for every $x \in M\mu$.

3.3. The same space is also definable in the following way. For every member $m \in (\mu, <)$ we consider the portion $\mu|m|$ consisting of all points of μ , each comparable to m ; we consider the set Om of all the maximal chains, each of cardinality \aleph_1 and contained in $\mu|m|$. The sets $Om (m \in \mu)$

are considered as a basis of neighborhood; every Om is considered as a neighborhood of every of its points. One gets in this way a space, say $(M\mu, i)$ the identity mapping being a homeomorphism. The space $(M\mu, i)$ or the space $(M\mu, O)$ shall be denoted by S_1 .

3.4. Now, the system O of neighborhoods Om is a tree of sets and the space is an R -space. The space satisfies the δN_2 -condition, i.e., every member of the second kind of the tree O is the union of an infinite disjoint family of other members of O ; therefore, the space $(M\mu, O)$ is totally orderable (cf. Kurepa [7, Theor. 9.1]).

3.5. *Remark.* The elements of $M\mu$ as well as the members of the spaces $(M\mu, i), (M\mu, O)$ shall be considered also as ω_1 -sequences of points of μ .

4. *The space $(M\mu, i)$, i.e., the space $(M\mu, O)$ is pseudo-compact, dense in itself and totally orderable. In particular, every subset M of cardinality $\geq \aleph_1$ admits an accumulation point.*

4.1. If M contains a subset M_1 of cardinality \aleph_1 of sets of 2-sequences $(a_0 a_1)$, then the sequence $x = (a_0)_{a_0}$ ($a_0 < \omega_1$) is a cluster point of M_1 ; as a matter of fact let x, y be two different elements of M_1 ; the terminating elements of x and y are of the form $(x_0 \omega_1)$ and $(y_0 \omega_1)$ respectively; one has $x_0 \neq y_0$ for $x_0 = y_0$ implies $\mu(\cdot, (x_0)) = \mu(\cdot, (y_0))$ and the relations

$$x = \mu(\cdot, x) \cup \bigcup_{\xi} \{(x_0 \xi)\}, \quad (\xi < \omega_1),$$

$$y = \mu(\cdot, y) \cup \bigcup_{\xi} \{(y_0 \xi)\}, \quad (\xi < \omega_1),$$

would imply $x = y$; contrary to the hypothesis. Therefore, $x_0 \neq y_0$. Consequently, as x runs through M_1 , the number x_0 runs through a set $\text{Pr}_0 M_1 = \{a_0; a_0 \text{ being the } 0\text{-th coordinate of sequences } a, a \in \mu, \text{ such that } a \in y \in M_1\}$ of ordinal numbers and $k\text{Pr}_0 M_1 = \aleph_1$; this means that the i -proximity between the member $e = (\xi)_{\xi < \omega_1}$ of $M\mu$ and the member $x \in M_1$ of $M\mu$ is $\geq x_0$; for every ordinal $\beta < \omega_1$ and almost every $x \in M_1$ we have $i(e, x) \geq \beta$. Consequently $e \in M_1'$.

4.2. In a general way we have the projections

$$\text{Pr}_0 M, \text{Pr}_1 M, \text{Pr}_2 M_1 \dots, \quad (1)$$

where for every ordinal ν , $\nu < \omega$, we define $\text{Pr}_\nu M = \{a_\nu; a_\nu \text{ being the } \nu\text{-th coordinate of sequences } a, a \in \mu \text{ such that } a \in y \in M\}$. Since $kM \geq \aleph_0$

one of the sets (1) has $\geq \aleph_1$ points. Let ν be the *first index* such that $k\text{Pr}_\nu M \geq \aleph_1$. One has $0 \leq \nu \leq \omega$. The case $0 = \nu$ was considered in 4.1; therefore let us now consider the case $0 \leq \nu < \omega$. Since the set M has $\geq \aleph_1$ points and since M is the union of the antiprojections Pr_n^{-1} ($n < \omega$), one sees that for some ν -sequence $a = (a_0 a_1 \dots a_{\nu-1})$ of ordinals $< \omega_1$ there exists a set $A_\nu, A_\nu \subseteq \text{Pr}_\nu M$ such that $kA_\nu \geq \aleph_1$ and that for every $\alpha_\nu, \alpha_\nu \in A_\nu$, the set M contains a member

$$L = L(\alpha_\nu), \quad (2)$$

the initial part of which contains the left portion $l(\alpha_\nu u, \mu)$ determined in the tree $(\mu, <)$ by $(a_0 a_1 \dots a_{\nu-1} a_\nu)$. As $a_\nu \rightarrow \omega_1$, this left portion of the tree of $(\mu, <)$ finishes to embrace $(a_0 a_1 \dots a_{\nu-1}, \xi)$, for every $(\xi < \omega_1)$; therefore the corresponding member L_0 of $M\mu$, such that $(a_0 a_1 \dots a_{\nu-1}, \xi) \in L_0$, ($\xi < \omega_1$), is an accumulation point of M . As a matter of fact, if ξ, η are members of A_ν , then $\xi < \eta \Rightarrow l(\xi, \mu) \subset l(\eta, \mu)$, and the chain L_0 is the union of the chains $l(\xi, \mu)$:

$$L_0 = \bigcup_{\xi} l(\xi, \mu) \quad (\xi \in A_\nu). \quad (3)$$

Therefore the incidence (proximity) degree i satisfies

$$i(L(\xi), L_0) \geq i(L(\xi), l(\xi, \mu)). \quad (4)$$

Since the last number is $\geq \xi$, we have

$$i(L(\xi), L_0) \geq \xi. \quad (5)$$

On the other hand, if $\xi < \nu$, then $L(\xi) \neq L(\eta)$; therefore, $L(\xi) \neq L_0$ (at most for one ξ one can have $L(\xi) = L_0$) and the relation (5) implies that the member L_0 of $M\mu$ is an accumulation point of the set consisting of the points $L(\xi)$ of M ; therefore $L_0 \in M'$, which was to be shown – the space $(M\mu, O)$ is pseudo-compact.

4.3. Obviously, the space S_1 is dense in itself. The total orderability of S_1 was mentioned in 3.4.

5. Now, for every λ of the second kind and $\lambda < \omega_1$ one considers a maximal λ -chain l_λ of $(\mu, <)$ (the existence of such a chain l_λ is an immediate consequence of the fact that $(\mu, <)$ is a ramified sequence¹ of height ω_1 and of breadth \aleph_0 and that every point has \aleph_0 immediate followers); we adjoin

¹i.e., that for every $m \in \mu$ we have $\gamma\mu | m| = \gamma\mu (= \omega_1)$.

$\{l_\lambda\}$ as an element to the tree (O, \supset) of 3.4, and get a tree T consisting of the elements $\{l_\lambda\}$ ($\lambda < \omega_1$, λ of the second kind) and of sets obtained from the elements of the tree O by adjoining l_λ to every member of l_λ . In other words, let A be the system of all the sets l_λ ($\lambda < \omega_1$); then $A \subset T$ and every member of $T \setminus A$ is the union of a member x of (O, \supset) and of the system F_x of all the members $y \in A$ such that the set x contains some term of the sequence y . One proves readily that (T, \supset) is a tree of sets. The tree T defines again a (D_1) -space, say S_1^0 in which every l_λ is isolated; the space S_1^0 is pseudo-compact, but is not totally orderable, as was proved in Papić [7]. And this proves Theorem 2.

6. Set $M\mu_{\alpha+1}$; spaces $S_{\alpha+1}^0$. For any ordinal α we consider an analogous construction. We start from a system S of cardinality \aleph_0 of mutually incomparable chains, each of the order-type $\omega_{\alpha+1}$; let

$$H_0 = \bigcup_{X \in S} X$$

then H_0 is a tree (a degenerated one). To every $x_0 \in H_0$ we associate a tree gx_0 , similar to H_0 , and let follow x_0 by gx_0 ; for $x_0 \neq x'_0$ the sets gx_0, gx'_0 are chosen disjoint and incomparable. The set

$$H_1 = H_0 \cup \bigcup_{x_0} gx_0 \quad (x_0 \in H_0)$$

is ordered in such a way that the order $(H_0, <)$ is extended so that gx_0 follows $H_0(\cdot, x_0)$ without changing the order of gx_0 , otherwise no new comparability case is introduced. For every $x_1 \in H_1 \setminus H_0 = \bigcup_{x_0} gx_0$ ($x_0 \in H_0$) we consider a

set gx_1 similar to $(H_0, <)$ and let it follow x_1 and consequently also $H_1(\cdot, x_1)$; no other new comparability situation is introduced; one gets so the set

$$H_2 = H_0 \cup \bigcup_{x_0} gx_0 \cup \bigcup_{x_1} gx_1 \quad (x_0 \in H_0, x_1 \in \bigcup_{x_0} gx_0);$$

one pushes further an analogous construction of the sets $H_3, H_4, \dots, H_n, \dots$ for every ordinal $n < \omega_0$; the union of the sets H_n is the requested tree $(\mu_{\alpha+1}, <)$. For $\alpha = 0$ one gets something isomorphic to the tree of 2.1.

The tree $(\mu_{\alpha+1}, <)$ has analogous properties as the tree $(\mu, <)$ for $\alpha < 0$. All considerations on $(\mu, <)$ are transferable to $(\mu_{\alpha+1}, <)$; in particular, the set $M(\mu_{\alpha+1}, <)$ of all the maximal subchains, each of cardinality $\aleph_{\alpha+1}$, is a $(D_{\alpha+1})$ -space which is pseudo-compact, dense in itself, totally orderable

and is contained in a pseudo-compact $(D_{\alpha+1})$ -space $S_{\alpha+1}^0$ with $\aleph_{\alpha+1}$ isolated points which is not homeomorphic to any totally orderable space.

7. *The case of (D)-spaces for inaccessible initial ordinals.*

We shall again construct a ramified sequence μ_α of height ω_α and of breadth $\sup_{\xi < \omega_\alpha} k\xi$

$$\gamma\mu_\alpha = \omega_\alpha \sup_{x < \omega_\alpha} kR_x\mu_\alpha = \sup_{x < \omega_\alpha} kx$$

and so that the set of immediate followers of every $a \in \mu_\alpha$ has $\sup\{\aleph_0, k\gamma a\}$ elements, i.e.,

$$kR_0\mu_\alpha(a \cdot) = \sup\{\aleph_0, k\gamma a\};$$

γa is defined by $a \in R_{\gamma a}(\mu_\alpha, \cdot)$. We start by ordered set H_0 which is the union of \aleph_0 incomparable chains, each of the type ω_α ; to every

$$x_0 \in H_0 = \bigcup_X X, \quad (X \in N_0)$$

we associate a degenerated tree-sequence $g(x_0)$ of breadth = $\sup\{\aleph_0, k\gamma x_0\}$ and of height ω_α ; we let $g x_0$ follow to $H_0(\cdot, x_0]$ so that $g x_0$ be incomparable to every member of the set $H_0 \cup \bigcup_{x_0} g x_0 = H_1$; to every $x_1 \in H_1 \setminus H_0$ one associates a degenerated tree-sequence $g x_1$ as previously; one considers the set $H_2 = H_1 \cup \bigcup_{x_1} g x_1$, one puts $g x_1$ after $H_1(\cdot, x_1)$ and let it be incomparable to $H_2 \setminus g x_1$; one gets so a tree $(H_2, <)$; one constructs in an obvious way $H_3, (H_3, <)$, etc.

The union of the sets H_n ($n < \omega$) gives rise to requested tree $(\mu_\alpha; <)$ and then to the requested (D_α) -space $M(\mu_{\alpha+1})$. The construction and proofs run like those in the case $\alpha = 1$.

8. **Main theorem.** In this way we have the following result.

8.1. **THEOREM. (MAIN THEOREM).** *For every regular ordinal α there exists a (D_α) -space S_α^0 which is not homeomorphic to a totally ordered space.*

8.2. *Remark.* For singular initials ω_λ the class D_λ of the pseudo-metric spaces coincides with the class $D_{cf\alpha}$; therefore, the word "regular" in the foregoing theorem could be dropped; one gets again a correct statement.

8.3. The foregoing theorem proves that the class of pseudo-metric non metric spaces has its own particular position; in particular, they are not included into the class of totally orderable spaces.

On the other hand, pseudo-metric non-metric spaces are a proper subclass of R -spaces i.e., spaces definable by means of ramified bases. E.g., let B_α denote (cf. Kurepa [7, p. 119]) the set of all ω_α -sequences of ordinals $< \omega_\alpha$; the set B_α is topologized by means of the incidence distance $i(x, y) \leq \omega_\alpha$ in the foregoing sense (cf. 3.2(1)); the space B_α is a (D_α) -class in which the triangular relation has a specific isoscelity form: $i(a, b) \geq \xi \wedge i(b, c) \geq \xi \Rightarrow i(a, c) \geq \xi$ (cf. also Kurepa [7, p. 107, §2.3.]). For $\alpha > 0$ and $\text{cf } \alpha \neq \omega_0$ the space B_α is an R -space and is analogous to Baire's space B_0 .

For any $X \subseteq B_\alpha$ let $B_\alpha(X)$ be the set B_α topologized in such a way that the neighborhoods of every member of X are single-point sets and the neighborhoods of any point in $B_\alpha \setminus X$ are the same as in the space B_α . In particular, if X is a subset of the space B_α such that $B_\alpha \setminus X$ be of cardinality $\leq \aleph_\alpha$ and everywhere dense in the space B_α , then the space $B_\alpha(X)$ is not of the class D_α , although it is an R -space and definable by a tree of sets of minimal rank just $\omega_\alpha + 1$; in particular $B_0(X) \notin D_0$ (cf. Kurepa [7, p. 119], where the sign $>$ should be read \leq).

9. *Connexions between pseudo-metric spaces and totally orderable spaces.*

9.1. Let α be any ordinal number; in virtue of Theorem 2 and 8.1, there exists, for $\alpha > 0$, a space S_α^0 of the class D_α which is not totally orderable; the statement holds also for $\alpha = 0$; it is sufficient to consider the space $S_0^0 = R^2 =$ Euclidean plane.

9.2. On the other hand, there is a totally orderable space O which is not pseudo-metric;² such is the space of ordinal numbers $\leq \omega_1$.

9.3. Finally, for every ordinal α there exists a space A_α of the class D_α which is totally orderable: it is sufficient to consider the space $A_0 = R =$ real continuum, for $\alpha = 0$; for $\alpha > 0$ it is sufficient to consider any space of the class D_α containing no isolated point. As a matter of fact we have the following

9.4. THEOREM (i). *Every pseudo-metric non metric space that is dense in itself is totally orderable.*

(ii) *Every R - T_1 -space in which the weight at every point is $\geq \aleph_1$ is totally orderable.³*

²Note that every metric space is considered as a pseudo-metric space

³This was one of the first results obtained by P. Papić and the present author in connection with the totally ordered spaces and R -spaces and pseudo-metric spaces (cf. also D. Kurepa [7, p. 126], footnote⁷).

9.4.1. *Proof of (i).* If E is any pseudo-metric space, let B be a tree of sets defining E . Then every member $X \in R_\lambda B$, for a nonisolated ordinal λ , satisfies the following (δN_2) -condition: X is the union of an infinite disjoint family of closed-open sets (cf. Kurepa [7, p. 121]; also Papić [6, p. 179]).

As a matter of fact, it is sufficient to consider the system $Y = R_\omega B_1(X, \cdot)$; one sees readily that this system is infinite, its union X_0 equals X (otherwise every point of $X \setminus X_0$ would be isolated) and every member of Y is closed-open. Therefore by a previous theorem (Kurepa [7, Theor. 9.1]) the space E is totally orderable.

9.4.2. Let us prove the part (ii) of the statement 9.4 for any R - T_1 -space E . Let again B be tree-base of sets defining E ; let $X \in R_\lambda B$, λ of the second kind. Let us consider the subtree $Y = B(X, \cdot) = \{A : A \in B, A \subset X\}$. If for some integer n the row $R_n Y$ is infinite, it is sufficient to consider the family $R_n Y$, because Y is the union of the closed-open members of the disjoint family $R_n Y$. Let us now consider the remaining case

$$kR_n Y < \aleph_0 \quad (n < \omega). \tag{1}$$

Let $M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n \supset \dots$ be a strictly decreasing ω -sequence such that $M_n \in R_n Y$; then obviously there exists a member $P_{n+1} \in R_{n+1} Y$ such that $P_{n+1} \subseteq M_n \setminus M_{n+1}$; now, we form the system Z in this way:

$$Z = (R_0 Y \setminus \{M_0\}) \cup (fM_0 \setminus \{P_1\}) \cup (fM_1 \setminus \{P_2\}) \cup \dots \cup \bigcap_{\omega < n} M_n, \tag{2}$$

where for any x we denote by fx the system of all the immediate followers of x .

9.4.3. One proves readily that the system Z is disjoint, covers X and that the members of Z are closed-open.

As a matter of fact, every member A of Y has at least two followers; in the opposite case, one would have $kfA \leq 1$. Now, the case $kfA = 0$ would imply that every member of A is isolated, in contradiction to the hypothesis that E has no isolated points. The equality $kfA = 1$ does not hold either, because one would have $A \supset \bigcup fA$, in opposition to the equality $A = \bigcup V$ ($V \in fA$), this equality being implied by the hypothesis that the space is a T_1 -space (as a matter of fact, if $a \in A \setminus \bigcup fA$, A would be the smallest neighborhood of a and therefore for any $b \in A \setminus \{a\}$, every Ob would intersect every Ob). Consequently, $kfA > 1$; therefore, the height $\gamma Y = \gamma B(A, \cdot)$ is $\geq \omega$; since by hypothesis $kR_n Y < \infty$ ($n < \omega$), one

concludes that the ω -chain $M_0 \supset M_1 \supset \dots$ exists and that the relation (2) holds.

The members of Z pairwise disjoint and constitute a partition of X .

One has $Z \subseteq T$. This being obvious for every member in (2) but the last one $M = \bigcap_{n < \omega} M_n$, let us consider the set M . If $kM > 1$, then $M \in T$ by virtue of the condition C . The case $kM = 1$ is not possible because this would mean that $M = \{m\}$, for some $m \in E$, and that the local weight of m is \aleph_0 , in contradiction to the hypothesis that $w(x) > \aleph_0$ for every $x \in E$. There remains the case: $M = \text{empty set}$; in this case the relation (2) obviously holds.

Let us prove that the member $M = \bigcap_n M_n$ of Z is closed and open. M is closed as the intersection of the closed sets M_n . The set M is open; this is true if M is empty. If A is nonempty, let $a \in M$. The sets M_n are neighborhoods of a ; there exists also a neighborhood $V(a)$ of a such that $M_n \supset V(a)$ for every $n < \omega$; otherwise, for almost every $n < \omega$ one would have $M_n \subset V(a)$ and the ω -sequence $M_n (n < \omega)$ should be a local basis at a , contrary to the hypothesis that the local weight of the space is $> \aleph_0$ at every point.

9.4.4. Therefore the condition (δN_2) is satisfied and the space E is totally orderable. Q.E.D.

9.5. THEOREM. *Let E be an R -space; if one of the sets E' (the derivative of E) or $E \setminus E'_1$ is finite, the space E is totally orderable; here E'_1 denotes the set of all the points of E , each of a character $\geq \aleph_1$.*

Proof. Let $kE' < \aleph_0$; for every $x \in E'$ let $V(x)$ be a closed-open neighborhood of x such that the sets

$$V(x) \quad (x \in E') \tag{3}$$

be pairwise disjoint. Each of the subspaces $V(x)$ in (3) is totally orderable (cf. Kurepa [7, Theor. 9.7]). Also the isolated closed set

$$E \setminus \bigcup_x V(x) \quad (x \in E') \tag{4}$$

is totally orderable. The ordinal sum of the totally orderable spaces (3) and (4) is a totally orderable space homeomorphic to the given space E .

If the complement of E'_1 is finite, the space E is totally orderable – this is implied by Theorem 9.4.

9.5.1. *Remark.* The set E'_1 in Theorem 9.4 (ii) may not be replaced by the set E' as it has been remarked by P. Papić.

THEOREM. *If ω_α is regular and $> \omega_0$, if $E \in D_\alpha$ and*

$$(kE' < \aleph_\alpha) \vee (k(E \setminus E') < \aleph_\alpha), \tag{1}$$

the space E is totally orderable.

Proof. *Case $kE' < \aleph_\alpha$;* in this case the set E' is simultaneously separable by open sets. Namely, if T is a tree-basis of the rank ω_α defining the space E , then for every $x \in E'$ we have the family $T(x)$ of all the members of T each containing the point x . The order-type of the decreasing chain

$$(T(x) \cap T(x')) \quad (x, x' \in E', x \neq x') \tag{2}$$

is $< \omega_\alpha$; let β be the supremum of the ordinal numbers (2); since by hypothesis $kE' < \aleph_\alpha$ and since \aleph_α is regular the number β is $< \omega_\alpha$; the sets

$$T_{\beta+1}(x) \quad (x \in E'),$$

where $T_{\beta+1}(x) \in R_{\beta+1}T \cap T(x)$ are mutually disjoint. By Theorem 9.8. in Kurepa [7], the space E is totally orderable.

Case $k(E \setminus E') < \aleph_\alpha$. In this case the set E_i of isolated points of the space E is located in some portion $T_\beta = \bigcup_{\xi < \beta} R_\xi T$, where β is an ordinal number $< \omega_\alpha$. The derivative E'_i of the set E_i is empty. The last property is implied by the fact that character of every point of the space is 0 or \aleph_α . The subspace $CE_i = E \setminus E_i$ is totally orderable as well as E_i ; the ordinal sum of the last two orderings yields a totally ordered set that is homeomorphic to the space E .

9.6.1. **COROLLARY.** *For every regular number $\omega_\alpha > \omega_0$ and every non-linearly orderable space $E \in D_\alpha$ one has both*

$$kE' \geq \aleph_\alpha, \tag{1}$$

$$k(E \setminus E') \geq \aleph_\alpha. \tag{2}$$

9.6.2. *On the other hand, for every regular initial ω_α there exists a (D_α) -space S_α that is linearly orderable and satisfies both (1) and (2).*

Such a space S_α is e.g. the cardinal sum of an antichain A of cardinality $\leq \aleph_\alpha$ and of the (D_α) -space B_α of 8.3; in particular one might define in S_α the dual distance i in such a way that for any this particular space

$E = (S_\alpha, i)$ one has $E' = B_\alpha, E \setminus E' = A$; consequently the conditions (1) and (2) are satisfied.

In the statement 9.6.3. one might require in addition that the set $E \setminus E'$ is everywhere dense.

As a matter of fact, let B_α^0 be the set consisting of all the ω_α -sequences of ordinals $< \omega_\alpha$ and of all the $(\beta + 1)$ -sequences

$$s = (s_0, s_i, s_s) \quad (3)$$

such that $s_\xi < \omega_\alpha$, for $\xi < \beta$ and $s_\beta = \omega_\alpha$, the number β running through the ordinals $< \omega_\alpha$. For any $x, y \in B_\alpha$ we define the incidence degree $i(x, y)$ by setting $i(x, x) = \omega_\alpha$ and $i(x, y) = n$, where n is the first ordinal satisfying $x \neq y$. One proves readily that (B_α^0, i) is a (D_α) -space E , in which the space (B_α, i) is embedable by means of the identity mapping. The derivative of (B_α^0, i) is B_α , and the set $E_i = E \setminus E'$ of all the isolated points of E consists of all the sequences (3), β running through the ordinals $< \omega_\alpha$.

One sees that the set E_i is everywhere dense and that the conditions (1) and (2) are satisfied.

BIBLIOGRAPHY

D. Kurepa,

- [1] *Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo-distanciés*, C. R. Acad. Sci. Paris **198** (1934), 1563–1565.
- [2] *Ensembles ordonnés et ramifiés* (Thèse Paris), Publ. Math. Univ. Belgrade **4** (1935), 1–138.
- [3] *Le problème de Souslin et les espaces abstraits*, C. R. Acad. Sci. Paris **230** (1936), 1049–1052.
- [4] *Un critère de distanciabilité*, Mathematica (Cluj) **13** (1937), 59–65.
- [5] *Sur les classes (E) et (D)*, Publ. Math. Univ. Belgrade **5** (1936), 124–132.
- [6] *A propos d'une généralisation de la notion d'ensembles bien ordonnés*, Acta Math. **75** (1942), 139–150.
- [7] *Sur l'écart abstrait*, Glasnik Mat.–Fiz. Astr. **11** (1956), 105–134.
- [8] *On rank decreasing functions*, in: *Essays on the Foundations of Mathematics dedicated to Fraenkel*, Jerusalem, 1961, 248–258.

P. Papić

- [1] *O prostorima sa razvrstano uredenom bazom okolina*, Glasnik Mat.–Fiz. Astr. **8** (1954), 30–43.
- [2] *Sur une classe d'espaces abstraits*, C. R. Acad. Sci. Paris **236** (1953), 1843–1845.
- [3] *Pseudodistancijalni prostori*, Thesis, Zagreb, 1953, p. 1-79.

-
- [4] *Sur une classe d'espaces abstraits*, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **9** (1954), 197-216.
 - [5] *Sur les espaces pseudodistanciés*, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **9** (1954), 217-228.
 - [6] *Quelques propriétés des espaces totalement ordonnés et des espaces de la classe R* , Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn. **302** (1957) resp. Cl. Math. **6** (1957), 189-196 (in Serbian 171-187).
 - [7] *Sur l'ordinabilité des espaces R* , Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **18** (1963), 75-84.

GENESIS OF UNIFORM SPACES

1. (E, M) being an oriented pair of a set E and of a structure M , a general ecart in E with values in M was defined as any mapping

$$(1.1) \quad e : E^2 \rightarrow M$$

satisfying some conditions; one spoke of an M -ecart¹. The essential item was the "abstract" definition of a spheroid: for any point $a \in E$ and any vicinity $V_{e(a,a)}^n$ of $e(a, a) \in M$ we have the corresponding spheroid:

$$(1.2) \quad \dots S(a, V_{(a,a)}^n) \text{ l'ensemble des points } b \text{ de } E \text{ vérifiant } (a, b) \in V_{(a,a)}^n.$$

(v. Kurepa [1936d, p. 1051₁₀₋₉], [1937a, p. 60¹³].

1.3. In other words, the set $V_{(a,a)}^n$ was considered as a radius r of a spheroid.

2. **Spheroids.** And so in 1936 the following paralelism appeared: the spheroid $S(a, r)$ with center a and radius r is defined:

for any real number $r > 0$ $S(a, r) = \{b : b \in E, d(a, b) < r\}$ (Fréchet [1906, p. 21 · 34]).	for any set-radius r $S(a, r) = \{b : b \in E, d(a, b) \in r\}$ (Kurepa [1936c Th. 1], [1937a] condition 4 ₀ ' bis, [1936d, p. 1051 ₁₀]).
--	---

BIBLIOGRAPHICAL NOTE: Math. Balkanica 6 (1976), 99–106 (Received 10. Okt. 1976)

EDITOR'S COMMENT: The four lines abstract of this paper is not reproduced here. Several corrections of the English of this paper is also made.

¹In Kurepa [1936 d] one reads: "nous dirons que E est un $\mathcal{E}[M]$, en sign $E \in \mathcal{E}[M]$, si à tout couple de points a, b , de E l'on peut faire correspondre un point déterminé, (a, b) , de M , vérifiant les conditions $0^1, 0^2, 0^3$ que voici: $0^1(a, b) = (a, a)$ entraine $a = b, 0^2(a, b) = (b, a), \dots$ "

3. A very suggestive case.

3.1. In the papers Kurepa [1936c], [1936d], [1937c], the general ecart from a point a to a point b was denoted (a, b) ; it is very natural to consider the simplest case suggested by this symbolism i.e. $(a, b) \in E \times E$, i.e. $M = E^2$ and $r \subset E^2$.

3.2. The required symmetry condition $(a, b) = (b, a)$ implies a structuralisation of E^2 and of r ; in other words, $(a, b)(b, a)$ are to belong both to r : Every radius r is a symmetric set with respect to the diagonal $\Delta(E^2)$ of E^2 .

3.3. Since the center of the spheroid belongs to the spheroid the preceding condition means that $(a, a) \in r$.

3.4. On the other hand, the elementary geometrical requirement

(3.5) *For any point a as center and for any radius r the corresponding spheroid exists²*

implies $(a, a) \in r$ for every $a \in E$, i.e.

$$(3.6) \quad \Delta(E^2) \subset r$$

Consequently, the "trivial" case of our general ecart yields the relation (3.6) for radii r .

3.7. In the same note Kurepa [1936d, p. 105₁₄₋₉] the following *uniformity condition* O_0^4 was considered:

O_0^4 *For any point $a \in E$ and any radius r there are radii $\phi(r), \psi(r)$ such that*

$$b \in S(a, \phi(r)) \Rightarrow S(b, \psi(r)) \subset S(a, r).$$

In other words,

$$(3.8) \quad (a, b) \in \phi(r), (b, c) \in \psi(r) \Rightarrow (a, c) \in r$$

3.9. Now it is a very natural approach to examine the case that $\phi(r) = \psi(r) := r'$ as well as to assume that the intersection of two set radii $\phi(r), \psi(r)$ contains a (set) radius r' .

²cf. the third postulate of Euclide γ' και παντι κεντρω και διαστήματι κύκλου γράρεσθαι (Στοιχεια, I) (Et ut quouis centro radioque circulus describatur (Ελεμεντα I))

3.10. In other words, the radius $r' \subset E^2$ attached to $r \subset E^2$ satisfies

$$(a, b), (b, c) \in r' \Rightarrow (a, c) \in r.$$

Thus "the trivial" case of our general ecart backed on elementary geometrical image requires the following

3.11. **Uniformity condition.** Radii r are sets such that

$$(3.12) \quad \Delta(E^2) \subset r \subset E^2$$

and that to every r corresponds some r' satisfying

$$(3.13) \quad r' \circ r' \subset r,$$

where, for $A, B \subset E^2$, one denotes by $A \circ B$ the composition of A and B , i.e.

$$A \circ B := \{z : z \in E \wedge (a, z) \in A \wedge (z, b) \in B\}.$$

3.14. Briefly, the identity case of our general ecart from the year 1936 jointly with current obvious elementary requirements imply that radii r are some Δ -symmetrical sets located between the diagonal $\Delta(E^2)$ and the square E^2 such that to every radius r is assigned some radius r' satisfying $r' \circ r' \subset r$; the spheroid $S(a, r)$ is the second projection of the intersection $r \cap (a, E)$, $(a, E) := \{(a, x) : x \in E\}$.

3.15. If one refers to Weil [1938, p. 11] we see that our radii r are the Weil's "entourages" of the diagonal $\Delta(E^2)$ and that the preceding trivial E^2 -ecart yields precisely the uniform space E defined by the r 's.

4. **What is the place of metric spaces inside the class of uniform spaces?** The answers were given by Kurepa [1936d p. 1051, Théorème V], [1937a, p. 59 Théorème D_0] and by Weil [1938 p. 16], respectively (Weil did not quote my papers; it is to be remarked that the papers had very attractive titles³).

³Here are some facts. The manuscripts of our papers [1936c]; [1936d], [1937a] were sent from Glina (Jugoslavija) to A. Bilimović (Beograd) the 1936:09:30:3, to M. Fréchet (Paris) the 1936:10:10:6, and to P. Sergescu (Cluj, Romania) the 1936:10:12:1, respectively; the reprints were available in November 1936 [for 1936d], November 1937 for [1936d] and the 1937:04:19 for [1937a]; in particular, the reprints of [1937a] were sent from Romania to Glina and forwarded to me to Warszawa where I got them the 1937. In Warszawa, Germany and in Paris (in Paris I stayed 1937:05:02:0 - 1937:06:15:2). I gave to various people the reprints of the paper [1937a].

EDITORIAL NOTE: Kurepa's notation 1936:09:30:3 means: 1936, September 30, Wednesday; and similarly.

5. Elimination of the countable. We used the index 0 in order to indicate that the considerations involved the countable case and the number \aleph_0 ; in general case the transition $0 \rightarrow \alpha$, i.e. from ω_0 to ω_α is obvious; in this way, the countable was incorporated into something more general. From my first paper published in 1933 such considerations were occurring. E.g. For example I considered already in 1933 a problem (not published) known now as Sikorski's problem (v. Sikorski [1950 p. 132¹¹⁻¹²]); such considerations lead me to orderable ecart (Kurepa [1934c III]) and general ecart in [1936d]. In my lecture of 1928:12:12 in Varićak's Mathematical Seminar in Zagreb I had idea to consider passive and active spaces, structures... and their interrelationships for a given oriented couple (E, M) of such objects. This idea was perhaps the reason that V. Varićak asked me to prepare myself for additional studies in France with M. Fréchet.

In particular, our aim was to find a nice way in the transition

Countable \rightarrow Any cardinality.

As we saw, the notion of M -ecart was a solution of this problem, in particular for the simplest case of non-numerical ecart (i.e. the case $M = E^2$); the elementary requirements on spheroids yield uniformity as bases of filters explicitly stated by Cartan [1937d], [1937b]; when he begins his Note [1937a] by "Malgré les services rendus en topologie par la considération des suites dénombrables, leur emploi n'est pas adapté à l'étude des espaces généraux. Nous voulons indiquer ici quel est l'instrument qui semble devoir les remplacer" (v. Cartan [1937a 595₁₆₋₁₃]). It should well fitted to quote here the papers Kurepa [1933, 1934c, 1936d, 1937a].

In our conversations and correspondences with V. Varićak and M. Fréchet and in conversations with J. Hadamard we communicated several times on such items before the year 1937.

6. Diameter of any set in a M -space (E, v) .

6.1. If (E, v) is an M -space, then we have also the set $\{ab : a, b \in E\}$ of all values of the variance v . We call this set the diameter of E or the range of the variance v it $\text{diam } E$ or $v(E^2)$, if the variance (ecart) involved is $v : E^2 \rightarrow M$. Analogously, for every set $\emptyset \subsetneq A \subset E$ we have the set $\text{diam } A := v(A^2) := \{v(a, b) : (a, b) \in A^2\}$; this set is called the diameter of A . In other words $\text{diam } A := \{xy : (x, y) \in A^2\}$.

6.2. **Diameter of a spheroid.** In particular, for any point $a \in E$ and any radius $r(a)$ we have the corresponding ball (spheroid) $S(a, r(a))$

and the diameter $\text{diam } S(a, r(a))$. In elementary geometry the diameter of any ball is the double of its radius; it is natural to accept the following.

6.3. Axiom on diameters. For any spheroid $S(a, r)$ there is a concentric spheroid $S(a, r_a)$ of diameter $\subset r(a)$. In other words, for any radius $r(a)$ assigned to a there is a radius, say $1/2 r(a)$, such that

$$(\text{diam}) \quad ab \in 1/2 r(a) \wedge ac \in 1/2 r(a) \Rightarrow bc \in r(a).$$

6.4. Of course, we assume that $v(a, a)$ i.e. aa belongs to every radius so that $\Delta(E^2) \subset r(a)$ for every $a \in E$ and that any two spheroids with a as center contain a spheroid with the same center a . In other words, for any point a the ordered set $(R(a), \supset)$ of all radii assigned to a is a right-directed ordered set.

6.5. LEMMA. $ab \in 1/2 r(a) \Rightarrow ba \in r(a)$, i.e. $1/2 r \subset r^{-1}$.

Proof. Specify $a = c$ in the relation (diam); we get

$$(6.5.1) \quad ab \in 1/2 r(a) \wedge aa \in 1/2 r(a) \Rightarrow ba \in r(a).$$

Since $aa \in 1/2 r(a)$ is assumed to hold, the relation (6.5.1) yields precisely what we wanted by the lemma 6.5.

6.6. LEMMA For radii r_0 and r ,

$$(6.6.1) \quad r_0 \subset 1/2 r \cap 1/4 r \text{ implies } r_0 \circ r_0 \subset r, \text{ i.e.}$$

$$(6.6.2) \quad ab \in r_0 \wedge bc \in r_0 \Rightarrow ac \in r.$$

Proof. Since $ab \in r_0$, (6.6.1) implies $ab \in 1/2 r$ and thus $ba \in 1/2 r$ (by Lemma 6.5). Since $bc \in r_0$ (6.6.1) implies $bc \in 1/2 r$; in other words, we have $ba \in 1/2 r, bc \in 1/2 r$; if we then apply the diameter axiom at the point b , we get precisely the requested relation $ac \in r$ in (6.6.2).

Remark. Lemma 6.6 coincides with the statement U'_{III} in (Weil [1938, p. 8]).

7. Simple condition that the M-variance $v : E^2 \rightarrow M$ be constant on the diagonal $\Delta(E^2)$.

7.1. For the numerical ecart or variance it was always assumed that $aa = 0$ whenever $a \in E$.

As on obvious specification of our general M -ecart (Kurepa [bf 1936d]) it is natural to specialize $aa = bb$, for every $(a, b) \in E^2$. And so in the

structure M we have a point $0 := 0(M) = 0(M, v) := aa$ for every $a \in E$ depending on M and on the mapping (variance) v .

7.2. The simplest is to assume M to be a space defined by a system (r) of neighborhoods such that for every $x \in M \setminus \{0\}$, one has $\{x\} \in (r)$; consequently, the set $M \setminus \{0\}$ is isolated in the space M ; to avoid the triviality of M being isolated, one has to assume that $\{0\} \notin (r)$, thus $\{0\} \notin V_0$, where V_0 is the family of all neighborhoods of 0 such that $V_0 \subset (r)$.

7.3. For simplicity, one assumes that the intersection of any two neighborhoods of same point $m \in M$ contains a neighborhood of m , i.e. that any basis (V_m, \supset) of neighborhoods of m is right directed.

7.4. We assume also that if M is a space, than M is also a T_1 -space.

7.5. Each $r \in V_0$ is a set $\in 0$ and for every $a \in E$ we have the corresponding spheroid $S(a, r)$; all these spheroids constitute a neighborhoods basis of the point $a \in E$.

7.6. **Stripes.** For every $r \in V_0$ we have the corresponding stripe $v^{-1}(r) := \{(x, y) : (x, y) \in E^2, v(x, y) \in r\}$.

One verifies that the stripes $v^{-1}(1)$ ($r \in V_0$) are precisely entourages of the diagonal $\Delta(E^2)$ of E^2 and in particular this family of stripes satisfies the conditions U'_I, U'_{II}, U'_{III} in (Weil [1938, p. 8]), i.e.

$$(7.6.1) \quad \bigcap v^{-1}(r) = \Delta(E^2), \quad (r \in V_0)$$

$$(7.6.2) \quad \forall r_1 \in V_0 \forall r_2 \in V_0 \exists r \in V_0 v^{-1}r \subset v^{-1}(r_1) \cap v^{-1}(r_2)$$

$$(7.6.3) \quad \forall r \in V_0 \exists r_0 \in V_0 r_0 \circ r_0 \subset r.$$

Proof. As to (7.6.1) since $(7.6.1)_2 \subset (7.6.1)_1$ let us prove the dual, i.e. $(7.6.1)_1 \subset (7.6.1)_2$. Now if $(a, b) \in (7.6.1)_1$ i.e. $v(a, b) \in r$ for all $r \in V_0$, thus $v(a, b) \in \bigcap_{r \in V_0} r = \{0\} = v(a, b)$; in particular, $v(a, b) = v(a, a)$, thus $a = b$ by the Axiom 0^1 (Kurepa [1936 d]). The relation (7.6.2) is simply another way of writing the uniformity condition 0^4 :

$$0^4 \quad \forall r \in V_0 (\exists \phi(r) \in V_0) b \in S(a, \phi(r)), c \in S(b, \phi(r)) \Rightarrow c \in S(a, r).$$

(condition $4_0'$ p. 126 in Kurepa [1936c, cf. 0_0^4 p. 1051] Kurepa [1936d]; condition $4_0'$ bis p. 60 in (Kurepa [1937]); by a typographical error, the index was deleted in $4_0'$; cf. p. 64₂₋₁ in Kurepa [1937a]).

7.7. General metric spaces. $D[M]$ -spaces. $D[M]$ -spaces or abstractly metrizable spaces are defined as $\mathcal{E}[M]$ -spaces provided also the following uniformity condition be satisfied.

To every $r \in V_0$ there are $\phi_1(r), \phi_2(r) \in V_0$ such that $b \in S(a, \phi_1(r)) \Rightarrow S(b, \phi_2(r)) \subset S(a, r)$; or equivalently (taking $V_0 \in r' \subset \phi_1(r) \cap \phi_2(r)$): To every $r \in V_0$ corresponds $r' = \phi(r) \in V_0$ such that $b \in S(a, r') \Rightarrow S(b, r') \subset S(a, r)$ (cf. Kurepa [1936d, p. 1051]).

In other words $v(a, b) \in r' \wedge v(b, c) \in r' \Rightarrow v(a, c) \in r$ or equivalently in stripes $v^{-1}r' \circ v^{-1}r' \subset v^{-1}r$; the last relation is precisely the U'_{III} condition (Weil [1938, p. 8]).

7.8. Consequently, obvious particularization of the $D[M]$ -spaces $E(v \mid \Delta(E^2)$ is a constant $0 \in M, M \setminus \{0\}$ is isolated) – the regularity of v in the sense to satisfy 0^4) implies that E is a uniform space (Weil [1938]) without any quotation of our results [1933], [1934], [1936], [1937].

7.9. Our designation $D[M]$ was motivated to indicate that results of Fréchet D -spaces are reasonably transferable to our $D[M]$ -spaces; this translation is so much obvious that we did not perform it in particular paper(s).

On the other hand, our approach to uniform spaces as $D[M]$ -spaces is more appropriate than the approach by entourages, because our language is the language of the elementary mathematics, replacing number as radius by a set as a radius.

7.10. Ordered ecart (variance). Let (M, \leq) be any left-oriented ordered set with least non isolated member 0 ; let $V := \{M \setminus [x, \cdot)_{(M, \leq)} : 0 < x \in M\}$ ⁴ and $V_x := \{x\}$ for $x \in M \setminus \{0\}$; considering V_m as a neighborhood basis of m for every $m \in M$, M becomes a topological space $(M, -)$. The corresponding $D[M]$ -spaces coincide with uniform spaces (a fact proved by Colmez [1947] without quotation to my papers); this case of $D[M]$ -spaces is certainly the simplest one coming after the case in (Kurepa [1934]) where (M, \leq) was totally ordered.

7.10.1. Ramified distances. We do not know whether the case of ordered variance is really more general than the case of a *ramified* variance, i.e. the case when $M = (E, \leq)$ and for every $a \in E$ the set $(\cdot, a)_{(E, \leq)}$ of all predecessors of a is a chain. Anyway, it is worthwhile to characterize spaces with ramified distances (in 1934 I had discussions with Fréchet on ramified distances).

⁴ $[x, \cdot)_{(M, \leq)} := \{y \in M, x \leq y\}$.

7.10.2. *Ramified distances are more general than totally orderable distances.*

E.g. it is sufficient to consider a point O , a set I of cardinality $> \aleph_0$ of ordinal numbers, to associate to every $i \in I$ a chain L_i obtained from the order type ω_i^* so that each limit member α be replaced by $(\alpha, 0) < (\alpha, 1) < \dots < (\alpha, n) < \dots$, to define $L_i \parallel L_j$, whenever $\{i, j\} \neq \emptyset \subset I$ and to consider the set $(R, \leq) := \{0\} \cup \bigcup_i L_i$ in which O is declared to be the least member and so that relation \leq means the union of all relations \leq_i ($i \in I$), \leq_i is the total order relation in L_i and is the incomparability everywhere else. The space (R, \leq) has O as the unique accumulation point; $R \setminus \{0\}$, for $(x, y) \in R^2$, whatever be $0 \notin \{x, y\}$, the space R is an $M[R]$, without to be some D_α ; thus R has a ramified distance (obviously the ordered set (R, \leq) is ramified).

7.11. Instead of the locution " E is a $D[M]$ " one could speak more explicitly of $[E, v, M, O, V_0, \phi]$ where $v : E^2 \rightarrow M$ satisfying $v(a, a) = 0 \in M$ whenever $a \in E$; V_0 is a neighborhood basis of 0 in the space M in which $M \setminus \{0\}$ is isolated and $\bigcap_{r \in V_0} r = \{0\}$; ϕ is a mapping $r \in V_0 \rightarrow \phi(r) \in V_0$ satisfying the condition 0^4 .

7.12. **Example: uniform continuity of mappings.** $((E, d), (E', d'))$ being an oriented couple of D -spaces, a mapping $f : E \rightarrow E'$ is said to be *uniformly continuous* provided for every real number $\varepsilon > 0$ there exists a real $0 < \delta = \delta(\varepsilon)$ such that $d(x, y) < \delta, (x, y) \in E^2 \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Analogously: $((E, v, M, 0, V(0)), (E', v', M', 0', V'(0'))$ being an oriented couple of $D(M)$ -spaces, a mapping $f : E \rightarrow E'$ is said to be uniformly continuous provided for every $\varepsilon \in V'(0)$ there is a $\delta \in V(0)$ such that

$$v(x, y) \in \delta, (x, y) \in E^2 \Rightarrow v'(f(x), f(y)) \in \varepsilon.$$

7.13. **Total boundedness.** A metrical space (E, d) is totally bounded provided for every number $\varepsilon > 0$ there exists a finite set $X \subset E$ such that $S(X, \varepsilon) = E$, where $S(X, \varepsilon) := \bigcup_{a \in X} S(a, \varepsilon)$. Analogously, $(E, v, M, 0, V(0))$ is totally bounded provided for every $\varepsilon \in V(0)$ there exists a finite set $X \subset E$ such that $S(X, \varepsilon) = E$. Etc.

Remark. There were other considerations of $\mathcal{E}[M]$ and $D[M]$ -spaces, especially in connection with uniform spaces (v. Kalish [1946], Appert-Ky Fan [1951], Antonovski-Boltjanski-Sarimsakov [1966] starting in 1960); v. also Engelgel [1975 ch. 8]. None of these papers quotes my papers of 1936 and 1937.

We plan to present matters in a separate book.

BIBLIOGRAPHY

- A. Appert, Ky Fan, [1950], *Espaces topologiques intermédiaires. Problème de la distanciation*, Actualités scient. 1121 (Paris 1951), 180 pp.
- N. Bourbaki, [1940], [1951] *Eléments de Mathématique*, 20:1 Les Structures fondamentales de l'Analyse. Livre 3 Topologie générale; ch. 1. Structures topologiques. ch. 2. Structures uniformes. 1951, Paris, Hermann & Cie, Actualités Scientifiques (1940) pp. VIII+132+II 1951 II+188
- H. Cartan,
 [1937] *Théorie des filtres*, C. R. Acad. Sci. Paris 205 (1937), 595–598.
 [1937b] *Filtres et ultrafiltres*, C. R. Acad. Sci. Paris 205 (1937), 777–779.
- E. W. Chittenden, [1917] *On the equivalence of ecart and voisinage*, Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917), 161–166.
- J. Colmez, [1947] *Sur divers problèmes concernant les espaces de Wiener...*, Portugalie Math. 6 (Lisboa 1947), 119–244.
- R. Engelking, [1975] *Topologia ogólna*, Bibl. Mat., Warszawa, 1975.
- M. Fréchet,
 [1906] *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Thèse, Paris 1906; Rend. Circ. Mat. Palermo 72 (1906), 1–74.
 [1910] *Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel*, Rend. Circ. Mat. Palermo 30 (1910), 1–26.
 [1927] *Les espaces abstraits*, Paris, 1927, 12+296.
 [1945] *La notion d'uniformité et les écarts*, C. R. Acad. Sci. Paris 221 (1945), 337–339.
- D. Kurepa,
 [1933] *Sur les espaces distanciés séparables généraux*, C. R. Acad. Sci. Paris 197 (1933), 1276–1278.
 [1934c] *Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudodistanciés*. C. R. Acad. Sci. Paris 198 (1934), 1563–1565.
 [1936d] *Sur les classes (E) et (D)*, Publ. Math. Belgrade 5 (1936), 124–132.
 [1936d] *Le problème de Souslin et les espaces abstraits*, C. R. Acad. Sci. Paris 203 (1936), 1049–1052.
 [1937a] *Un critère de distanciability*, Mathematica (Cluj) 13 (1937), 59–65.
 [1956] *Sur le écart abstrait*, Glasnik Mat. Fiz. 11 (1956), 105–134.
 [1963e] *Distanza numerica. Distanza non numerica*, Publ. Seminario Mat. Bari 91 (1963), 23.
- Z. P. Mamuzić,
 [1960] *Uvod u opštu topologiju I*, Matematička biblioteka, 17.
 [1963] *Introduction to General Topology*, Noordhoff, Groningen, 1963, pp. 1–159.
- R. Sikorski, [1950] *Remarks on some topological spaces of high power*, Fund. Math. 37 (1950), 125–136.
- A. Weil, [1938] *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Actual. Sci. Industr. 551 (1938), 40.

A CLASSIFICATION OF TOPOLOGICAL SPACES. Z-NUMBER OF SPACES

0.0. There are many classifications of topological spaces with respect to various criteria as e.g. the weight wS , separability sS , cellularity $cS, \chi S, \dots$. In this note we shall exhibit a special and very instructive classification that is founded on *stellar number* or *Z-number of spaces* (v. § 1.1)

0.1. When one considers any oriented pair (A, B) of sets then we have the following alternative:

- (i) A, B are overlapping i.e. such that $A \setminus B \neq \emptyset \neq B \setminus A$,
- (ii) A, B are not overlapping i. e. $A \subset B \vee B \subset A \vee A \cap B = \emptyset$.

0.2. We examined the last disjunction and defined *ramified system of sets* or *pseudotrees of sets* as any system F of sets such that F contains no couple of overlapping members [1934, p. 112], [1935, p. 81].

0.3. A particular case of ramified systems was the case of *trees* or *tables of sets* i.e. ramified systems (T, \supset) of sets in which every nonempty subfamily G has a *complete initial* R_0G i.e. a subsystem S of pairwise disjoint members such that for every $Y \in G \setminus S$ some $Y_0 \in R_0G$ satisfies $Y_0 \supset Y$ (of course Y_0 depends on Y). In other words, every subsystem G has a disjoint refinement R_0G having the same union; therefore R_0G consists of all greatest members of G .

0.4. In Kurepa [1936b, p. 1030], [1936d, p. 128], [1956, p. 130, § 10] were considered topological spaces definable by a neighborhood basis \mathcal{R} that was a tree of sets or a pseudotree of sets, each member V of \mathcal{R} being considered as neighborhood of every point $x \in V$. Every open cover

B in such a space R has a refinement B_0 of local order 2 in the sense that every point $x \in R$ has a neighborhood $O(x)$ such that

$$(0.5) \quad |\{V \therefore V \in B_0, \quad O(x) \cap V \neq \emptyset\}| < 2.$$

\therefore means "such that".

In the case that T_1 -space is definable by a tree T of sets, it is sufficient to represent every member of the cover B by members of the tree T of sets involved; one obtains a subsystem T_0 of T which is an open refinement of B ; the first level R_0T_0 of T_0 is an open cover refining B and is of order 2 because any two distinct members of R_0T_0 are disjoint.

0.6. Papić [1953a, T. 3] proved that the case of ramified basis is equivalent to the case of tree basis; in a series of papers he studied such R -spaces i.e. spaces definable by ramified neighborhoods. Such spaces were studied also by Arhangel'skiĭ [1962], [1963], [1977], Arhangel'skiĭ-Filipov [1972], Nyikos [1975], [1976], [1977].

1. Stellar number or stellarity of a space

1.0. Now, it is very natural to consider, for any cardinal number n , a condition obtained from (0.5) writing n instead of 2. Doing so we have the following.

1.1. *Definition.* For any topological space E let $Z(E)$ be the least cardinal number n such that to every open cover C of the space corresponds a refining open cover C_0 of the space such that for every point $p \in E$ and some neighborhood $O(p)$ of p one has

$$(1.1.1) \quad |\{X \therefore X \in C_0, \quad O(p) \cap X \neq \emptyset\}| < n.$$

The cardinal $Z E$ is well determined and is called *the stellar number* or *the star number*, *the Z-number* or *stellarity* of the space.

In the literature the most known case is that $Z = \aleph_0$ (Aleksandroff) [1924]. Definition 4⁰, Dieudonné [1944] and $Z = 2$ (Kurepa) [1936b,d], [1956a], Papić [1953a,b,c], [1954a,b], [1957], [1963], [1977].

1.1.2. $Z(X, a)$. If $a \in X$ let $Z(X, a)$ mean *the least* cardinal number n such that every open cover C of X has an open refined cover C' such that some $O(a)$ meats $< n$ members of C' . One checks readily that

$$(a) \quad ZX = \sup_{a \in X} Z(X, a).$$

As a matter of fact, in opposite case there would be an open cover C of X such that for every refined open cover C' every $O(a)$, for some $a \in X$, meets $\geq n$ members of C' , therefore would be $Z(X, a) \geq n^+$, contradicting the definition (a).

2. Class Z_n . The title of this paper concerns the classification of topological spaces according to their star number Z , the corresponding classes will be denoted by Z_n . In other words, for a given cardinal number n we denote by

$$(2.1) \quad Z_n$$

the class of all topological spaces V whose star number equals n . We shall see how disparate spaces could belong to a same stellar class.

2.2. For a space E the relation $Z(E) = n$ could be written also in the form $Z_n(E)$; in other words $Z_n E \Leftrightarrow ZE = n$.

2.3. If not stated otherwise, we shall assume that T_1 -axiom is holding.

3. Examples and statements. The content of 0.4 and 0.5 could be expressed in the following way.

3.1. THEOREM. Any T_1 -space having a tree or a pseudotree as a neighborhood basis is of the class Z_2 .

The converse of 3.1 reads like this:

3.1.1 THEOREM. Every Z_2 -space E in which an open neighborhood basis \mathcal{B} has the property that:

(M) the intersection of all members of any monotone subfamily M is open or a singleton is definable by a tree \mathcal{J} of open neighborhoods.

Proof. First, one checks readily that both properties for a space: to be Z_2 and to have the property (M) are hereditary, i.e. that if a space is Z_2 and (M) so also every subspace is Z_2 and (M). Further, let us find a tree basis for every $Z_2 \wedge (M)$. To start with let \mathcal{J}_0 be an open refining cover (of \mathcal{B}) of order 2; \mathcal{J}_0 is a disjoint open partition of the space and refines \mathcal{B} . If, incidentally, \mathcal{J}_0 is already a tree basis, the procedure is finished: \mathcal{J}_0 is a requested tree \mathcal{J} . If \mathcal{J}_0 contains some member of cardinality > 1 , each such member X as a subspace of E has $X \cap \mathcal{B} = \{X \cap B : B \in \mathcal{B}\}$ as a basis and has a disjoint refining cover $f(X)$; let $\mathcal{J}_1 := \bigcup f(X)$, $X \in \mathcal{J}_0$, $|X| > 1$. $S_2 := \mathcal{J}_0 \cup \mathcal{J}_1$ is a tree; in general, let β be an ordinal such that $S_\beta := \bigcup_{\alpha < \beta} \mathcal{J}_\alpha$ is a \supset -tree satisfying $R_\alpha S_\beta = \mathcal{J}_\alpha$ ($\alpha < \beta$). If S_β is a neighborhood basis of E equivalent to \mathcal{B} , let us define \mathcal{J}_β and $S_{\beta+1} = S_\beta \cup \mathcal{J}_\beta$. If $\beta^- < \beta$,

we consider every $X \in \mathcal{J}_{\beta-1}$, $|X| > 1$ and define $f(X)$ as previously and define $\mathcal{J}_\beta := \bigcup_X f(X)$ ($X \in \mathcal{J}_{\beta-1}$, $|X| > 1$). If $\beta^- = \beta$ we consider every decreasing chain L of order type β so that $L \cap \mathcal{J}_\alpha \neq \emptyset$ ($\alpha < \beta$); the intersection $\bigcap L$ (by the condition (M)) is a singleton or is open; we define $\mathcal{J}_\beta := \{\bigcap L : L \text{ is a maximal chain in } (S_\beta, \supset) \text{ and } |\bigcap L| > 1\}$.

Let γ be the first ordinal such that $\mathcal{J}_\gamma = \emptyset$; then $\bigcup_{\alpha < \gamma} \mathcal{J}_\alpha := \mathcal{J}$ is a requested tree base of the space E and one has $R_\alpha \mathcal{J} = \mathcal{J}_\alpha$ ($\alpha < \gamma$).

3.2. Example. The star number of the space Q of rational numbers in the interval topology equals 2.

As a matter of fact, it is easy to get for Q a ramified basis of neighborhoods, because every open interval of (Q, \leq) is the union of a disjoint finite system of intervals with irrational end points.

3.3. Example. The triadic discontinuum T is a Z_2 -space.

As a matter of fact let D be the dyadic segmentation of $[0, 1]$ i. e. D is the system of all closed intervals of the form $[0, 2^{-1}]$, $[2^{-1}, 1]$, $[2^{-2}, 2^{-2}]$, $[2^{-1}, 3 \cdot 2^{-2}]$, $[3 \cdot 2^{-2}, 1]$, ...

Then the system $B := D \cap T$ is a ramified basis of T .

Since T is not extremally disconnected we have the following statement.

3.4. LEMMA. *Not every Z_2 -space is extremely disconnected.*

3.5. THEOREM. *Every compact space as well as every paracompact space are of the class $\leq Z_{\aleph_0}$; in particular, every metric space is of class $\leq Z_{\aleph_0}$.*

The last part of Theorem 3.5 is a result of A.H. Stone [1958]; (v. M.E. Rudin [1969] for an extremely short proof); the spaces of the class $Z \leq \aleph_0$ were called paracompact spaces (Dieudonné [1944]).

3.6. THEOREM. *Any compact totally ordered space $L := [a, b]$ satisfies $Z(L) \leq 3$; in particular, $ZI = 3$ where $I = [0, 1]$.*

Proof. Let \mathcal{B} be any open cover of L ; decompose every $G \in \mathcal{B}$ in connex components i.e. in intervals; we get so a refinement \mathcal{B}_0 of \mathcal{B} ; every member of \mathcal{B}_0 is an interval of the chain L . Since L is compact, there is a finite subcover \mathcal{B}_{00} of \mathcal{B}_0 ; members of \mathcal{B}_{00} are intervals of L . Now, let us define a refinement \mathcal{B}_1 of \mathcal{B}_{00} and a neighborhood $O(x)$ for every $x \in L$ in the following way. Let $\{I_0\} := \bigcup_X X$, $\inf L \in X \in \mathcal{B}_{00}$; since \mathcal{B}_{00} is finite, one has $I_0 \in \mathcal{B}_{00}$. If $I_0 = L$, put $\{I_0\} := \mathcal{B}_1$, $O(x) = I_0$ for $x \in L$. If $I \neq L$, and $a := a_0$, $I_0 := L[a_0, b]$, let I_1 be the most extensive interval of (L, \leq)

such that $b_0 \in I_1 \in \mathcal{B}_{00}$. If $b \in I_1$, it suffices to put $B_1 := \{I_0, I_1\}$ and $O(x) := I_1$ for every $x \in I_1 \setminus I_0$. If $b \notin I_1$ let $I_1 := L(a_1, b_1)$.

3.6.1. Let us define an open interval I_2 in the following way. First, let I'_2 be the most extensive member of \mathcal{B}_{00} such that $b_1 \in I'_2$. First case: $b \in I'_2$; let then $I_2 := L(a'_2, b]$; obviously, $a_0 < a_1 < b_0 \leq a'_2 < b_1 < b$; if moreover $b_0 < a'_2$ or if $b_0 = a'_2$ and moreover $L(a'_2, b]$ has a minimal member, we define $a_2 := a'_2$, $Oa_2 = L(a_1, a_2]$ and $O(x) = I'_2 := I_2$ for every $x \in I'_2$. If $b_0 = a'_2$ and of $L(a'_2, b]$; then $B_1 := \{I_0, I_1, I_2\}$ is a requested refining cover, because it is sufficient to see

$$\begin{aligned} O(x) &= I_2 \quad \text{for every } x \in I_2 \\ O(x) &= L(a_1, a_2) \quad \text{for } b_0 \leq x < a_2 \\ O(a_2) &= L(b_0, b_1). \end{aligned}$$

One checks readily that, for every $x \in L$, $O(x)$ meets less than 3 members of $\{I_0, I_1, I_2\}$.

3.6.2. By recursive arguments, let $k > 2$ be any integer and assume that an open refining $\{I_0, I_1, \dots, I_k\}$ of \mathcal{B}_{00} be defined such that it covers an initial interval L_k of $L[a, b]$ and that to every $x \in L_k$ corresponds some open interval $O(x)$ of L_k intersecting < 3 members of $\{I_0, I_1, \dots, I_k\}$. If $L_k = L$, all is proved; if $L_k \neq L$, let us define also an interval $I_{k+1} := L(a_{k+1}, b_{k+1})$ in a similar way as it was performed for $k = 1$ in 3.6.1.

Now the system \mathcal{B}_{00} of intervals of L is finite; therefore the preceding construction of intervals I_0, I_1, \dots stops at some step n .

In contrast to the case of compact chains one has the following.

3.7. THEOREM. *For any regular ordinal $\omega_\nu > \omega_0$ the ordered space $I(\omega_\nu)$ of all ordinals $< \omega_\nu$ satisfies*

$$(3.7.1) \quad ZI(\omega_\nu) = \aleph_{\nu+1}.$$

Proof. As a matter of fact, let \mathcal{B} be any set of intervals (α, β) covering the space $I(\omega_\nu)$; we say that for every cover \mathcal{B}_0 refining \mathcal{B} one has $|\mathcal{B}_0| \geq \aleph_\nu$ and that there exists a number $\alpha < \omega_\nu$ such that every $O(\alpha)$ intersects $\geq \aleph_\nu$ members of \mathcal{B}_0 . First of all, the relation $|\mathcal{B}_0| < \aleph_\nu$ does not hold because \mathcal{B}_0 being a refinement of \mathcal{B} is bounded $\subset I(\omega_n u)$; therefore the relation $|\mathcal{B}_0| < \aleph_\nu$ would imply $\sup \bigcap \mathcal{B} < \omega_\nu$ — absurdity, because $\bigcup \mathcal{B}_0 = I(\omega_\nu)$, \mathcal{B}_0 being a cover.

Secondly, let us define a function $\varphi : I(\omega_\nu)$ in the following way: for every $\alpha < \omega_\nu$ let $\varphi(\alpha) = \inf I - 1$, I being the first member of \mathcal{B}_0 such that $\alpha \in I$; then the function φ is such that $\varphi(0) = 0$ and $\varphi(\alpha) < \alpha$ for every ordinal $0 < \alpha < \omega_\nu$; according to a general result (v. Alexandroff-Urysohn [1929, p. 95], Kurepa [1935, p. 16]) there is an ordinal $\xi < \omega_\nu$ such that the set $\varphi^{-1}\{\xi\} := \{\alpha \cdot \alpha < \omega_\nu, \varphi(\alpha) = \xi\}$ is cofinal to ω_ν ; in other words, every $O(\xi)$ intersects \aleph_ν members of \mathcal{B}_0 , and this fact means that (3.7.1) holds.

3.7.1. Remark. The statements 3.6, 3.7 imply that the function $E \rightarrow ZE$ need not be increasing, because e.g. $Z[0, \omega_1] = 3$, $Z[0, \omega_1] = \aleph_2$

3.8. THEOREM. *Let $I = R[0, 1]$ = the set of real numbers such that $0 \leq x \leq 1$; then for every cardinal number $n > 0$ we have*

$$(3.8.1) \quad \begin{aligned} ZI^n &= 2 + n && \text{if } n < \aleph_0 \\ ZI^n &= \aleph_0 && \text{if } n \geq \aleph_0. \end{aligned}$$

Proof. A well known theorem of Lebesgue [1922] states that for sufficiently small real numbers $r > 0$ every open cover of I^n , the members of which have a diameter $< r$, contains $1 + n$ members X_0, X_1, \dots, X_n such that the corresponding closures meet, i.e.

$$(3.8.2) \quad \overline{X}_0 \cap \overline{X}_1 \cap \dots \cap \overline{X}_n \neq \emptyset.$$

Now for every point $p \in (3.8.2)_1$ we have $p \in \overline{X}_\nu$ ($\nu \leq n$) i.e. every neighborhood $O(p)$ intersects X_ν ($\nu \leq n$); this means exactly $ZI^n \geq 2 + n$; on the other hand, there are covers e.g. with "bricks" of the form $Y_0 \times Y_1 \times \dots \times Y_{n-1}$, where $Y_n \times Y_{n-1}$ are intervals of $R[0, 1]$ where no more than $1 + n$ members meet.

The last fact is proved inductively. For $n = 1$, it is sufficient to consider any $m \in N$ and the "vertices" $a_0 = 0, a_1 = (2m)^{-1}, a_2 = 2(2m)^{-1}, \dots, a_{2m} = 1$, and the corresponding intervals of the form

$$Y_0 = [i(2m)^{-1}, (i + 1)(2m)^{-1}] \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 2m - 1).$$

Assume that (3.8.1) holds for $k = n$; let us prove it also for $n = k + 1$. For that let P_k be any finite "brick" cover of I^k with the corresponding Z -number $2 + k$; every brick $X \in P_k$ is of the form

$$(a) \quad Y_0 \times Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_{k-1};$$

let us define a brick cover P_{k+1} of I^{k+1} . The multiplication of all bricks (a) with intervals Y_k yields a brick cover P of I^{k+1} with the Z -number twice greater, thus $4 + 2k$. Now the members of P are partitioned in parallel layers $y_k = \text{const}$; P_{k+1} is obtained from P in this way: all layers of an even rank of P remain unaltered and are the corresponding layers of P_{k+1} ; the layers of rank $1, 2, 3 \dots$ of P are modified so that every old interior vertex x becomes the center of a new brick of the same "dimension"; in this way, x is contained in a single new brick instead to be a common point to $2 + k$ old bricks of the same rank; therefore the Z -number of x equals $1 + (2 + k)$ i.e. $2 + (k + 1)$ what proves that (3.8.1) holds also for $n = k + 1$ as well. The cases $n = 2, 3$ could be illustrated by simple diagrams.

The second formula of (3.8.1) holds also (for $n \geq \aleph_0$) because I^n is a compact space; on the other hand, every compact space X satisfies $ZX \leq \aleph_0$.

3.9. Product and elementary open sets

3.9.1. Let us consider any index set I ; for every $i \in I$ let X_i be a topological space; then for the topological product $X := \prod_{i \in I} X_i$ the "elementary open" sets $G = \prod_{i \in I} \text{pr}_i G$ (where for every $i \in I$ the i -th projection $\text{pr}_i G$ of G means either X_i or some open set $\subset X_i$, the last case occurring \aleph_0 times) constitute an open basis in X . Obviously, for any oriented pair (G, G') of elementary open sets in X we have

$$G \subset G' \Leftrightarrow \text{pr}_i G' \quad (i \in I)$$

$$G \cap G' = \emptyset \Leftrightarrow \text{pr}_i G \cap \text{pr}_i G' = \emptyset \quad \text{for at least one } i \in I.$$

3.9.2. Now, let C be a finite open cover of the product space $X = \prod_{i \in I} X_i$ for I infinite. We may assume that every member of C is elementary. Consequently, C being finite, all but a finite number of factors G_i , of every $G \in C$ being either X_i or U_i , where U_i is an open set of X_i , are X_i . In other words, there is a finite set $F \subset I$ ($I =$ the index set) such that for every $G \in C$ one has $x \in I \setminus F = \text{pr}_x G$ equals X_x .

3.9.3. Let us consider the particular case that $X_i = \{0, 1\}$ for every $i \in I$; then X is compact; and every open cover contains a finite subcover C_0 that might be assumed to consist of elementary open sets. Then for every $G \in C_0$ such that for some $f \in F$ one has $G_f = \{0, 1\}$ we consider the refining $G(f)$ replacing G by $G(f, 0)$ and $G(f, 1)$ obtained from G replacing G_f by 0 and 1 respectively. Doing so for every $G \in C$ and every $f \in F$, we obtain a refining cover C' . Let now, $x \in X$ be given; let us denote by $O(x)$ the elementary neighborhood of x such that for every $f \in F$ one has

$\text{pr}_f O(x) \in \{0, 1\}$. Then $O(x)$ meets just one member of C' , what proves that $ZX = 2$. In other words we have the following.

3.9.4. THEOREM. $Z\{0, 1\}^n = 2$ for every positive cardinal number n .

3.9.5. COROLLARY. $Z\{0, 1\}^n = \dim\{0, 1\}^n + 2$.

3.9.6. It is not allowed to replace $\{0, 1\}$ in corollary 3.9.5 by E , where $\dim E = 0$, because one knows that $\dim E = 0 \Rightarrow \dim E^n = 0$ for every cardinal number $n > 0$, while we have examples of spaces E such that $Z E = 2$ and $Z E^2 > \aleph_0$; such a space is e.g. the order subspace I^+ of the ordered space corresponding to the order type 2θ , where $\theta = 1 + \lambda + 1$ (λ is the order type the linear continuum (R, \leq) , (cf. Aleksandrov and Urysohn [1929, p. 6 space A_1]; D. Kurepa [1935, p. 32 Théorème II_7 for the case $E = R[0, 1]$], Kurepa [1938, p. 214, Teorem 10b], Kurepa [1939, p. 10 Th. 9b]; Sorgenfrey [1947]).

3.9.8. THEOREM. I^+ is a paracompact separable space of weight c . One has $ZI^+ = 2$ and $Z(I^+)^2 = c^+$.

Proof. Let C be any open cover of I^+ ; we may assume that members of C are intervals of $1 + 2\lambda$ of the form $[x, y)_{<}$; let us define a refining cover C_0 ; let A_0 be the system of all members X of C such that $0 \in X$; if $\bigcup A_0 = I^+$, it is sufficient to consider any ω -sequence $a_0 < a_1 < \dots$ cofinal to I^+ and denote $C_0 := \{(a_n, a_{n+1}) : n \in N\}$; for any $x \in [a_n, a_{n+1})$ let $O(x) = [a_n, a_{n+1})$; then $O(x)$ intersects only one member of C_0 , namely the member $[a_n, a_{n+1})$. If $\bigcup A_0 := P \neq I^+$, we define the subsystem $A_1 := \{X : X \in C, X \text{ contains the first element of } I^+ \setminus \bigcup A_0\}$: by inductive arguments one sees that there is a disjoint refining cover of C , what proves that $Z(1 + 2\lambda) = 2$. On the other side, let H be the system consisting of the complement CF of $F := \{(x, 1 - x) : 0 \leq x < 1\}$ and of the rectangles

$$(a) \quad I[x, x') \times I[y, y') \text{ where } x < x' \leq 1 \text{ and } y < y' \leq 1;$$

then H is an open cover of $I^+{}^2$. For every $n \in N$ let H_n be the system of all "rectangles" (a) such that the "sides" x', y' verify $(n + 1)^{-1} \leq \inf\{x', y'\} < n^{-1}$; then $\bigcup_n H_n = H \setminus \{F\}$; since $|H| = c$ and $\text{cf } c > \aleph_0$ we infer that some $n_0 \in N$ satisfies $|H_{n_0}| = c$; consequently, the set S of vertices of A_{n_0} located on F has c members. Therefore the set S^c of maximal condensation points of S is nonempty; one proves easily, that $|S^c| > \aleph_0$ and that the set S_0 of all points of S^c that are not condensation points from left as well as from right satisfies $|S_0| \leq \aleph_0$: therefore $|S^c \setminus S_0| = |S|$; let then $p_0 \in S^c \setminus S_0$; if $p_0 = (x_0, y_0)$ the points X_0, y_0 are both bilateral condensation points of $\text{pr}_1 S$ and $\text{pr}_2 S$ respectively; in other words for every x, y such that

$x_0 < x < 1, y_0 < y < 1$ one has $|R[x_0, x] \cap \text{pr}_1 S| = c, |R[y_0, y] \cap \text{pr}_2 S| = c$; therefore $O(p_0) := R[x_0, x] \times R[y_0, y]$ intersects c members of H ; this proves that $Z(I^{+2}, p_0) \geq c^+$, thus $ZI^{+2} = c^+$.

4. [-topology (resp.]-topology) of order chains

4.1. If (W, \leq) is any well-ordered set, then the corresponding interval topology is produced by the basis of open sets of the form

$$(4.2) \quad (\cdot, a]_{(W, \leq)} = \{y : y \in W, y \leq a\} \quad \text{resp.} \\ (x, a]_{(W, \leq)} = \{z : z \in W, x < z \leq a\}, \quad \text{where } a, x \in W.$$

4.3. A same kind of subsets are definable for *every* ordered chain (L, \leq) (and not only for well-ordered sets): For any ordered chain (L, \leq) one can consider the corresponding topological spaces $(L, \leq] := L]$ defined by the sets of the form

$$(\cdot, a]_{(L, \leq)} = \{y : x \in L, y \leq a\} \quad \text{and} \\ (x, a]_{(L, \leq)} = \{z : x < z \leq a, z \in L\}$$

as open neighborhood and $[(L, \leq) := (L, \leq)]$. In this notation the space I^+ of 3.9.6 reads (I, \leq) . Of course, for every ordered type t one has the corresponding topological spaces $t]$ and $[t$; the meaning of $1 + t, [1 + t := [(1 + t)$ is obvious; the same holds for $t + 1, t + 1] := (t + 1]$.

4.3. LEMMA. *If l is any order type of a chain without gaps, then*

$$Z[1 + l = 2 = Zl + 1].$$

Proof. Let H be any open cover of $l + 1] := E$; let us find a refining open disjoint cover H_0 of F by means of an inversely well-ordered subset $W := \{a_0 = 1 > a_2 > \dots\}$ in the following way. To start with, let $a_0 := 1$ and $1 \in X \in H$; if $X = E$, the procedure is finished; if $X \not\subset E$, let us consider $E \setminus X$; we have the cut $E \setminus X|X$; then $s := \sup(E \setminus X)$ and $i := \inf X$ are such that $s \leq i$ and $\{i, s\} \subset E$; moreover, either $i = s$ or $s^+ = i$ (i.e. the immediate follower of s is i).

Case $i = s$; Then $s \in E \setminus X$, because otherwise, $s \in X$; and the point s would be an accumulation point of $E \setminus X$; and therefore every neighborhood $(s', s]$ would contain some point of $E \setminus X$; in particular, the set X being open and since $s \in X$, the set X would contain at least one point of $E \setminus X$, what

is absurd. Consequently, $s \in E \setminus X$; we set $a_r := s$ and let X be any neighborhood of s , and $1 > s' \in E$ be such that $E(s', s] \subset X$.

Case $s < i$; thus $s \in E \setminus X, i \in X$; we set again $s := a_1$, etc. as in case $s = i$. Now, let us assume that an inversely well-ordered r^* -sequence $\{a_0 > a_1 > \dots > a_n\}_{n < r}$ be defined such that $\{(a_{n+1}, a_n)_{n < r}\}$ be a refining cover H with respect to the subset $\bigcup_{n < r} (a_n, a_0] := X$. Let us define a_r . If $r^- < r$, then handling with a_{r^-} as we did with a_0 , we consider any $Y \in H$ such that $a_{r^-} \in Y$; then we have the right portion $Y \cup X$ of the chain E ; this portion and its complement yield a cut $A|B$ of the chain; this cut is to be handled in a similar way as we did previously and so one gets a requested point $a_r \in E$.

If $r^- = r$, we consider the cut $((E \setminus X)|X, \text{etc.}$

The procedure goes on until a certain step, when W is obtained such that $\bigcup (a_{n+1}, a_n)_{(E, \leq)} = E; \{(a_{n+1}, a_n)\} := H_0$ is a requested disjoint cover refining H .

Remark. The assumptions that the chain L is without any gap is essential; it is so also as to the corresponding first (last) member in $[(1 + l)$ (resp. $l + 1$)).

4.4. THEOREM. *If an infinite totally ordered compact set (L, \leq) satisfies $dL < cf|L|$,¹ then the ordered sum $(L_s, \leq) := (L \leq) + (L, \leq)^*$, where $(L, \leq)^* := (L, \geq)$ satisfies (a) $Z[L_0] = 2$, (b) $Z[(L_0)^2] = |L_s|^+ = |L|^+$.*

Proof. The relation (a) was proved in 4.3L. In order to prove (b), let $f : L_s \rightarrow L_s$ be any strictly increasing mapping of (L_s, \leq) into itself, i.e. so that $x \in L_s \setminus \{\sup L_s\} \rightarrow x < fx \in L_s$ and $f(\sup L_s) = \sup L_s$. Let $x \in L_s \rightarrow x^* \in L_s$ be the symmetrical permutation of (L_s, \leq) ;² since obviously this mapping is continuous, the set $F := \{(x, x^*) : x \in L_s\}$ is a closed set in the square

$$(c) \quad [L_s \times [L_s;$$

in this square the "rectangle"

$$(d) \quad [x, fx) \times [x, fx)$$

¹The existence of ordered chains L that $dL < cf|L|$ was proved by Sierpinski [1922].

²The set (L_s, \leq) may be thought of as $L \times \{0, 1\}$ ordered so that $L \times \{0\} < L \times \{1\}$ and that

$$(x, 0) \leq (x', 0) \Leftrightarrow x \leq x' \Leftrightarrow (x', 1) \leq (x, 1).$$

Then $(x, i)^* := (x, 1 - i)$.

is open; the open system H of all these rectangles together with the complement CF of F is an open cover C of the square (c). Let now D be a subset of (L, \leq) so that $|D| = dL$, $\bar{D} = L$; then, obviously, the set $D_s^- := (D, \leq) + (D, \leq)^*$ is everywhere dense in (L_s, \leq) and satisfies $|D_s| = dL_s < \text{cf} L_s$. Let us now consider any open refining cover C_0 of C so that the members of C_0 be of the form $[x, d]$; then for every $x \in L_s$ one has a rectangle $y(x)$ of the form (d) such that $(x, x^*) \in y(x)$. For distinct points $x, x' \in L_s$ one has $y(x) \neq y(x')$. Moreover we may assume that $fx, fx^* \in D_s$.

In this way we obtain a system C_0 of rectangles (d) of cardinality $|L_s|$ with "sides" $fx, fx^* \in D_s^2$ the equality $(f(x), f(x^*)) = (u, v)$ holds for a subsystem C_{00} has $|L_s|$ points. Therefore $S^c \neq \emptyset$, where S^c is the set of all points of S that are points of *maximal* accumulation in the interval topology of the chain S ordered to be similar, by projection, to $(\text{pr}_1 S, \leq)$ (resp. to $(\text{pr}_2 S, \leq)$); one checks readily that $|S \setminus S^c| \leq dL$; therefore, $|S^c| = |S|$; one concludes that S contains at least one member $p_0 := (x_0, y_0)$ so that the points x_0, y_0 be bilateral maximal accumulation points in $(\text{pr}_1 S, \leq)$ and in $(\text{pr}_2 S, \leq)$ respectively. Therefore every neighborhood $O(p_0)$ intersects $|L|$ members of C_0 ; this means that $Z((L_s^2, p_0) \geq |L_s|^+$, thus $Z((L_s)^2 = |L_s|^+$.

4.5. COROLLARY. $(\check{Z}) \sup((L, \leq))^2 = \check{Z} (L, \leq)$ running through the class of all ordered chains that $Z(L, \leq) = 2$. $\sup_x f(X) = \check{Z}$ means that for any cardinal number n there is allowable X such that $f(X) \geq n$. In other words, $n < \check{Z} \Leftrightarrow n$ is a cardinal number.

The symbolical equality (\check{Z}) means that for any cardinal number n some allowable L satisfies $(\check{Z})_1 \geq n$.

E.g. the axiom of choice $\Leftrightarrow \sup_W |W| = \check{Z}$, W being well-ordered.

BIBLIOGRAPHY

P. Alexandroff, *Sur les ensembles de la première classe et les ensembles abstraits*, C.R. Sci. Paris 178 (1924), 185–187.

P. Alexandroff, P. Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verhandelingen der Kon. Akad. van Wetenschappen Amsterdam, I Sectie 14 (1929), 8–96.

A. В. Архангельский,

κ-мерные метризуемые пространства, Вестник Моск. Унив. Сер. Матем. мех. 2 (1926), 3–6.

О рангах систем множеств в размерности пространства, Fundamenta Math. Warszawa 52:3 (1963), 257–275.

О пространствах с базой большой ранг которой конечен, Вестник Москов. Унив., Сер. Мат. Мех. 2 (1977), 3–8.

- A. В. Архангельский, В. В. Филипов, *Пространства с базами конечного ранга*, Москва, Математический Сборник bf 87(129):3 (1972), 147-158.
- J. Dieudonné, *Une généralisation des espaces compacts*, J. de Math. Pures et Appl. Paris 23 (19944), 65-76.
- D. Kurepa,
Tableaux ramifiés, C. R. Acad. Sci. Paris 199 (1934), 112-114.
Ensembles ordonnés et ramifiés, Thèse, paris, 1935, Publ. Math. Belgrade 4 (1935), 1-138.
L'espace Ω n'est pas une classe E, Publ. Math. Belgrade 5 (1936), 92-99.
Sur les classes (E) et (D), Publ. Math. Belgrade 5 (1936), 124-132.
Le problème de Souslin et les espaces abstraits, C. R. Acad. Sci. Paris, bf 203 (1936), 1049-1052.
Sur l'écart abstrait, Glasnik Mat. Fiz. Zagreb 11 (1956), 105-134.
On $|m, n|$ - ramifications or $|m, n|$ - pseudotrees of sets, Submitted.
- H. Lebesgue, *Sur les correspondances entre les points de deux espaces*, Fundamenta Math. Warszawa 2 (1921), 256-285.
- P. J. Nykos,
Some surprising base properties in topology, Studies in topology, Proc. conf. Univ. North Caroline, Charlotte, N.C. 1974, 427-450. Academic press, N. Y. 1975. M. R. 51 (1967) # 4182 H. Chr. Reichel.
Set-theoretic topology, Papers, Inst Medicine and Math. Ohio Univ. Athens, Ohio 1975-6, 277-305, Academic Press, N. Y. 1977. M.R. 56 (1978) # 1264 Hans - Christian Reichel.
- P. Papić,
O prostorima sa razvrstano uređenom bazom okoline, Glasnik Mat. Fiz. Astr. Zagreb 8 (1953), 30-43.
Sur une classe d'espaces abstraits, C. R. Paris 236 (1953), 1843-1845.
Pseudodistancijski prostori, Thèse, Zagreb 1953, 79.
Sur une classe d'espaces abstraits, Glasnik Mat. Fiz. Astr. Zagreb 9 (1954), 197-216.
Sur les espaces pseudo -distanciés, ibidem, 217-228.
Quelques propriétés des espaces totalement ordonnés et des espaces de la classe R, "Rad" Jugosl. Akad. Zagreb bf 302 (1957), 171-196.
Sur l'ordonnabilité d'espaces de la classe R, Glasnik Mat. Fiz. Astr. Zagreb (2) 18 (1963), 75-84.
Espaces de la classe R, Proc. international on Topology and its Applications Beograd 3 (1977).
- M. E. Rudin, *A new proff that metric spaces are paracompact*, Proc. Amer. Math. Soc. 20:2 (1969), 603
- W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les sous-ensembles de continu*, Fund. Math. Warszawa 3 (1922), 109-112. \equiv *Oeuvres choisies II* Warszawa, 1975, 444-447.
- R. H. Sorgenfrey, *On the topological product of paracompact spaces*, Bull. Amer. Soc. 53 (1947), 631-632.
- A. H. Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 977-982. M.R. 10 (1949), 204 (J. Dieudonné).

F. NUMBER THEORY

- F[64] *Factorials of cardinal numbers and trees*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. **19** (1-2) (1964), 7–21.
- F[65] *On p -adic spaces of Hensel*, Publ. Inst. Math. (Beograd)(N.S.) **5**(19) (1965), 133–135.
- F[71] *On the left factorial function $n!$* , Math. Balkan. **1** (1971), 147–153.
- F[73] *Left factorial function in complex domain*, Math. Balkan. **3** (1973), 297–307.
- F[74] *On some new left factorial propositions, supplement 11 Problems*, Math. Balkan. **4** (1974), 383–386.
- F[74a] *Right and left factorials*, Boll. Unione Math. Ital. (4) **9** Supl. fasc. 2 (1974), 171–189

Professor Đuro Kurepa left a vast mathematical heritage, among which results and problems pertaining to Number theory played an important part. In what follows we wish to give a brief survey of Prof. Kurepa's number-theoretic work and some of the work that it inspired. For a more detailed account the reader is referred to our paper [IM].

Kurepa defined in F[71] an arithmetic function $K(n)$ that he denoted by $!n$ and called it the left factorial, by

$$K(n) = !n = \sum_{i=0}^{n-1} i!, \quad n \in N^+.$$

In the same paper, Kurepa asked if

$$(LFH) \quad (!n, n!) = 2, \quad n = 2, 3, \dots$$

This conjecture, known as the left factorial hypothesis, is still an open problem in number theory. The first mention of the left factorial function appeared already in F[64], where this function was defined for infinite cardinal

numbers as well. There are several statements equivalent to the LFH. Probably the most natural one is the following assertion, also found in Kurepa F[71]:

$$\forall n > 2 \ !n \not\equiv 0 \pmod{n}.$$

This formulation of the left hypothesis appears in Richard Guy's list of problems [Gu] as problem B44, and we shall call this statement also the LFH. It is not difficult to see that this form of the LFH can be reduced to primes (see F[71]), i.e. the LFH is equivalent to

$$(PH) \quad \forall p \in P \quad p > 2 \Rightarrow (!p, p) = 1$$

where P denotes the set of all primes.

There are many other equivalents of LFH as well as many identities involving $!n$ (see [Mi90], [Mi96], [StŽi], [Ša], [St], [Ca], [Gu], [Go], [Ži]). There are also several results which support the truth of the hypothesis LFH. For example, Kurepa showed in F[71] that there are infinitely many $n \in N$ for which LFH is true. Also, already in the seventies the conjecture is verified by use of computers by Slavić [SI] for $n < 1500$, and Wagstaff for $n < 50000$. medskip

In F[74], Kurepa asked several questions concerning the LFH so let us make comments on some of them. He introduced there the statement $H_4(s)$ in the following way:

$$(H_4(s)) \quad (n \geq 2 \wedge s \geq 1) \Rightarrow (K(n), K(n+s)) = 2, \quad n, s \in N^+.$$

Then Kurepa asked (F[74], Problem 2.9.) if LFH implies $H_4(s)$ for all $s \in N^+$. We note that this implication does not hold since, for example:

$$\begin{aligned} K(7) &= 874 = 2 \cdot 19 \cdot 23 \\ K(12) &= 43954714 = 2 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37313 \\ K(16) &= 1401602636314 = 2 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 491 \cdot 1832213 \\ K(25) &= 647478071469567844940314 = 2 \cdot 41 \cdot 103 \cdot 2875688099 \cdot 26658285041. \end{aligned}$$

The same examples also show that the strong left factorial hypothesis does not hold, as Kurepa formulated it in F[74]:

The numbers $K(n)/2$, $n = 2, 3, \dots$ are pairwise relatively prime.

In the same paper, Kurepa introduced the sequence of sets

$$A(r) = \{n \in N^+ \mid r < n, K(n) \equiv r \pmod{n}\}.$$

He asked there for a description of these sets, and in particular is there any r for which $A(r)$ is finite. He also asked if $A(3) = \emptyset$. We note here that $467 \in A(3)$.

Kurepa asked in F[71] if $!n$ is square-free, with the only exception $!3 = 2^2$. This hypothesis, which we shall call LFH2, is verified in [Mi90] for $n \leq 40$ by finding prime decompositions of $!n$ for $n < 40$. Also, it is proved there that for all $n \in N$, $!n$ is not divisible by p^2 if p is a prime less than 1223. Recently Živković found [Ži] that for prime $p = 54503$, $p^2 | !26540$, so this gives a negative solution to LFH2.

One of Kurepa's main achievements in connection with $K(n)$ is the fact that he succeeded to extend the values of this function to the complex domain. Namely recall that the gamma-function $\Gamma(z)$ is defined by

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0),$$

and for other values of the complex variable z by analytic continuation, furnished by the functional equation

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z + 1).$$

Since $\Gamma(n + 1) = n!$ for $n \in N$, it follows that

$$K(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \Gamma(i + 1) = \int_0^\infty e^{-t} \sum_{i=0}^{n-1} t^i dt = \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^n - 1}{t - 1} dt \quad (n \in N^+).$$

Hence for $\operatorname{Re} z > 0$ it makes sense to define

$$(3) \quad K(z) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^z - 1}{t - 1} dt,$$

and since one easily obtains

$$(4) \quad K(z) = K(z + 1) - \Gamma(z + 1),$$

then (4) provides analytic continuation of $K(z)$ to the whole complex plane. In particular, since $K(1) = \Gamma(1) = 1$, it follows that $K(0) = 0$. Kurepa F[71] defined $K(z)$ for arbitrary complex z by (3) and (4). In F[73] he established that $K(z)$ is a meromorphic function having only simple poles at the points $z = -1, -3, -4, -5, \dots$. The residue of $K(z)$ at $z = -1$ equals to -1 , and

at $z = -n$ ($n = 3, 4, 5, \dots$) it equals $\sum_{k=2}^{n-1} (-1)^{k-1}/k!$. Kurepa F[73] also studied the zeros of $K(z)$, and showed the asymptotic relations

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K(x)}{\Gamma(x)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K(x)}{\Gamma(x+1)} = 0.$$

Further results on $K(z)$ as a function of the complex variable z were obtained by Slavić [Sl] who proved, for example, that

$$K(z) = -\frac{\pi}{e} \cotg \pi z + \frac{1}{e} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!n} + C \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(z-n)$$

holds for all complex z , where $C = 0.577215 \dots$ is the Euler's constant.

Kurepa presented several problems in number theory at the Problem Session of the 5th Balkan Mathematical Congress, held in Belgrade, 1974. These problems are published as a supplement to F[74]. The first problem on this list concern the set

$$P(n) = \{x \in N^+ : \{x-2n, x, x+2n\} \subseteq P\}, \quad n \in N^+$$

where P is the set of prime numbers. Kurepa asked what are the properties of $P(n)$, and in particular:

P1. Is $P(1) = \{5\}$?

P2. Is there some $n \in N^+$ such that $P(n) = \emptyset$?

We note the following properties of the sequence $P(n)$. The set $P(n)$ is related to a part of Problem A6 in [Gu]. Namely, as noted there, it is not known whether there are infinitely many sets of three consecutive primes in an arithmetic progression, but S. Chowla has shown [Ch] this without the restriction to consecutive primes. Thus, as $x-2n, x, x+2n$ is an arithmetic progression, we have

$$\bigcup_{n \in N^+} P(n) \text{ is infinite.}$$

Further, assume $n = 3k + 1$, $k \in N$. Then $x - 2n \equiv x + 1 \pmod{3}$, and $x + 2n \equiv x + 2 \pmod{3}$, thus 3 divides $(x - 2n)x(x + 2n)$. If $x \in P(n)$ then $x - 2n = 3$, i.e. $x = 2n + 3$. Hence $P(n) = \emptyset$, or $P(n)$ is a one-element set, i.e. $P(n) = \{6k + 5\}$, where $6k + 5, 12k + 7 \in P$. For example, $P(1)$, $P(4)$, $P(7)$, $P(10)$ are one-element sets, while $P(13) = \emptyset$, and this answers questions P1 and P2.

The second problem Kurepa stated in his list concerns the sequence $s_n = p_n^2 - p_{n-1} - p_{n+1}$, where p_n is the n -th prime. Kurepa asked what could be the sign of the elements of this sequence. We note the following elementary inequality

$$p_n^2 > p_{n-1} + p_n + p_{n+1} \text{ if } p_n \geq 5.$$

Using this, we see that for all $p_n \geq 3$, $p_n^2 - p_{n-1} - p_{n+1} > 0$.

In the third problem of his list Kurepa considered the sequence defined by $\pi_n = p_n^2 - p_{n-1}p_{n+1}$, and asked what could be the sign of members of this sequence, and how often they take the same sign. First, let us note that obviously $\pi_n < 0$ or $\pi_n > 0$. Further, this question is related to Problem A14 in [Gu]. Namely, Erdős and Straus call the prime p_n *good* if $p_n^2 > p_{n-i}p_{n+i}$ for all $1 \leq i \leq n-1$. Pomerance [Po] proved that there are infinitely many good primes, and therefore there are infinitely many n such that $\pi_n > 0$. The last problem from Number theory in his list (Problem 4) involves the left factorial function, which was already extensively discussed.

Kurepa was also interested in other topics in Number Theory. We have chosen one such paper (F[65]) in order to illustrate these other interests.

Aleksandar Ivić and Žarko Mijajlović

REFERENCES

- [Ca] L. Carlitz, *A note on the left factorial function*, Math. Balkan. 5:6 (1975), 37–42.
- [Ch] S. Chowla, *There exists an infinity of 3-combinations of primes in A.P.*, Proc. Lahore Philos. Soc. 6 (2) (1944), 15–16.
- [Go] G. Gogić, *Parallel Algorithms in Arithmetic*, Master thesis, Belgrade University, 1991, (in Serbian).
- [Gu] R. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer-Verlag, 1981.
- [IM] A. Ivić, Ž. Mijajlović, *On Kurepa's problems in number theory*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 57(71) (1995), 19–28.
- [Mi90] Ž. Mijajlović, *On some formulas involving \ln and the verification of the \ln -hypothesis by use of computers*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 47(61) (1990), 24–32.
- [Mi96] Ž. Mijajlović, *Some recurrence formulas related to the differential operator θD* , to appear.
- [Po] C. Pomerance, *The prime number graph*, Math. Comp. 33 (1979), 399–408.
- [Sl] D.V. Slavić, *On the left factorial function of the complex argument*, Math. Balkan. 3 (1973), 472–477.
- [St] J. Stanković, *Über einige Relationen zwischen Fakultäten und den linken Fakultäten*, Math. Balkan. 3 (1973), 488–497.
- [StŽi] J. Stanković, M. Žižović, *Noch einige Relationen zwischen den Fakultäten und den linken Fakultäten*, Math. Balkan. 4 (1974), 555–559.
- [Ša] Z. Šami, *On the M-hypothesis of D. Kurepa*, Ibidem, 530–532.
- [Ži] M. Živković, *On Kurepa left factorial hypothesis*, Book of abstracts, Kurepa's Symposium, 27–28 May, 1996, Belgrade.

FACTORIALS OF CARDINAL NUMBERS AND TREES

1. Definition of Γn .

1.1. For any positive integer n the product

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \tag{1}$$

is denoted either by $\Gamma(n+1)$ (Euler) or by $\Pi(n)$ (Gauss) or by $n!$ (Charles Kramp, *Arithmétique universelle ou Algèbre*, 1808). A product like (1) may be defined for any cardinal number $n \geq 1$, no matter whether n is finite or transfinite.

1.2. *Definition.* For any cardinal number $a > 0$ we define

$$\Gamma 1 = 1 \quad \Gamma a = \prod_{0 < k < a} k.$$

1.3. *Example.* $\Gamma \aleph_0 = \prod k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot \dots = 2^{\aleph_0}$.

1.4. *Example.* $\Gamma \aleph_\omega = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot \dots \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_1 \cdot \dots \cdot \aleph_n \cdot \dots =$ (by associative law of multiplication) $= \prod n \prod \aleph_n = 2^{\aleph_0} \prod \aleph_n \geq \aleph_\omega$.

In other words

$$\Gamma \aleph_\omega \geq 2^{\aleph_0 \aleph_\omega}. \tag{1}$$

1.4.1. If one accepts the general continuum hypothesis, then the sign \geq in (1) means $>$, the equality

$$\Gamma \aleph_\omega = \aleph_\omega \tag{2}$$

being impossible. Namely from (2) one should have

$$(\Gamma \aleph_\omega)^{\aleph_0} = \aleph_\omega^{\aleph_0}, \quad \prod_{0 < n < \omega} n^{\aleph_0} = \aleph_\omega^{\aleph_0},$$

which together with $\aleph_n^{\aleph_0} = \aleph_n$, for $0 < n < \omega$, would yield

$$\Gamma \aleph_\omega = \aleph_\omega^{\aleph_0}, \tag{3}$$

and by (2)

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} = \aleph_0,$$

contradicting a König-Zermelo theorem.

1.5 *General continuum hypothesis G.* In what follows, we shall label by *G* statements that we shall prove assuming the following general continuum hypothesis:

(*G*) or *G*: If *n* is any transfinite cardinal number, the number 2^n follows immediately the number *n*, i.e. $2^n = n^+$.

1.5.1. E.g. in 1.4 one had the result

$$(G) \quad \Gamma \aleph_\omega = \aleph_{\omega+1}.$$

1.6. *Definition of the function $\omega_{[\alpha]}$.* For every ordinal α we put

$$\begin{aligned} \omega_{[\alpha]} &= \alpha, & \text{for } \alpha < \omega \\ \omega_{[\alpha]} &= \omega_{-\omega+\alpha}, & \text{for } \alpha \geq \omega \end{aligned}$$

(cf. Lemmas 5.2, 2.3). E.g., $\omega_{[3]} = 3$, $\omega_{[\omega]} = \omega_{-\omega+\omega} = \omega_0$, $\omega_{[\omega_1]} = \omega_{\omega_1}$.

The function carries, strictly increasingly, the ordinal hypersequence

$$O \quad 0, 1, 2, \dots$$

onto the cardinal-ordinal hypersequence

$$KO \quad 0, 1, 2, \dots, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$$

1.7. *Definition of $\aleph_{[\xi]}$,* for any ordinal ξ :

$$\begin{aligned} \aleph_{[\xi]} &= k\omega_{[\xi]}, & \text{i.e.} \\ \aleph_{[\xi]} &= \xi = k\xi, & \text{for } \xi < \omega, \\ \aleph_{[\xi]} &= \aleph_{-\omega+\xi}, & \text{for } \xi \geq \omega. \end{aligned}$$

The symbolism $\omega_{[\alpha]}$, $\aleph_{[\alpha]}$ permits to denote uniformly the number 0, finite numbers and transfinite numbers.

1.8. For any ordinal (cardinal) α let $\alpha^- = \sup_{\xi < \alpha} \xi$ and $0^- = 0$; α^+ is the immediate follower of α .

1.9. *Function ga.* We define $ga = a^{-+}$ for every ordinal (cardinal) number α .

1.10. For any ordinal α let $la = \sup\{\xi; \xi \leq \alpha \wedge \xi^- = \xi\}$. One sees that la is the greatest number of the second kind which is $\leq \alpha$.

1.11. For any cardinal number k we denote by $\omega(k)$ the first ordinal number of the cardinality k (the existence of $\omega(k)$, for every cardinal k , is equivalent to the choice axiom). E.g. $\omega(k) = k$, for $k = 0$, and for any positive integer k ; $\omega(\aleph_\alpha) = \omega_\alpha$, for every ordinal α ; $(G) \Rightarrow \omega(2^{\aleph_\alpha}) = \omega_{\alpha+1}$.

2. Some statements concerning functions Γn and ga .

The function $n \rightarrow \Gamma n$ is increasing but not strongly increasing (G) .

2.1. THEOREM. *For any transfinite cardinal number n one has $n^- \leq \Gamma n \leq n^{kIn} \leq 2^n$. In particular $G \Rightarrow n^- \Gamma n \leq n^+$, where n^+ denotes the immediate follower of n (thus $G \Rightarrow n^+ = 2^n$), n^- denotes the supremum of the cardinals $< n$ for any (cardinal) ordinal number n , In denotes all cardinal (ordinal) numbers $< n$ and kX denotes the cardinality of X .*

$$\Gamma n = \prod_{0 < a < n} a \tag{1}$$

Hence

$$\sup_{a < n} a \leq \prod_{1 < a < n} a \leq \prod_a n = n^{kIn},$$

and since $kIn \leq n$, we have $n^- \leq \Gamma n \leq n^n (= n^+, \text{ by } (G))$. The equalities:

$$(G) \quad \Gamma \aleph_0 = \aleph_1, \quad \Gamma \aleph_1 = \aleph_1, \quad \Gamma \aleph_2 = \aleph_1$$

show that the function Γ is not strongly increasing (G) .

2.2. THEOREM (0) *For every ordinal α we have*

$$\Gamma \aleph_\alpha = 2^{\aleph_0} \aleph_{l\alpha}^{kI\alpha} \aleph_{\alpha^-} \quad (\text{cf. 1.8, 1.10})^1;$$

(00) *For every ordinal α*

¹The theorem answers a question raised by S. Mardešić in connection with a problem of J. de Groot.

$G \Rightarrow \Gamma N_\alpha = 2^{N_0} N_{l\alpha}^{kl\alpha} = N_{g\alpha}$, where $g\alpha = \alpha^{-+}$; in other words, for any transfinite cardinal n

$$G \Rightarrow \Gamma n = n^{-+} \stackrel{\text{def}}{=} ((n^-)^-)^+ \quad (\text{cf. 1.8, 1.10}).$$

2.2.1. *Proof.* As a matter of fact, A. Tarski proved that

$$\prod_{\beta < \lambda} N_\beta = N_\lambda^{k\lambda}, \tag{1}$$

for any ordinal λ of the second kind (cf. Tarski [1 p. 11, Theor. 8], also Bachmann [1 p. 141 Theor. 7 and p. 142]). Now,

$$\Gamma N_\alpha = \prod_{0 < \xi < \omega} k\xi \prod_{\xi < \alpha} N_\xi = \left(\prod_{\xi < \omega} k\xi \right) \left(\prod_{\xi < l\alpha} N_\xi \right) (N_{l\alpha} \cdot N_{l\alpha+1} \cdot \dots \cdot N_{\alpha^-}),$$

the expressions in parentheses being here 2^{N_0} , $N_{l\alpha}^{kl\alpha}$ and N_{α^-} respectively (for the second expression cf. (1)); one concludes that Theorem (0) holds good.

Let us now deduce (00) from (0). We consider the number

$$-l\alpha + \alpha. \tag{2}$$

If this number is ≥ 2 , then $\alpha^{-+} = \alpha^-$ and $l\alpha + 1 \leq \alpha^-$; consequently

$$2^{N_0} N_{l\alpha}^{kl\alpha} N_{\alpha^-} = N_{\text{sup}\{1, l\alpha+1, \alpha^-\}} = N_{\alpha^-} = N_{g\alpha}.$$

If the number (2) is 0, then $\alpha^- = \alpha$ and $g\alpha = \alpha^{-+} = \alpha^+ = \alpha + 1$. On the other hand, the formula (0) yields $\Gamma N_\alpha = N_{l\alpha}^{kl\alpha}$ i.e. $\Gamma N_\alpha = N_{\alpha}^{k\alpha}$. This number is $> N_\alpha$, because $\alpha^- = \alpha$ (a consequence of the König-Zermelo theorem). The same number is $< N_{\alpha+1}$ (consequence of (G)); thus the number in (00) is $N_{\alpha+1} = N_{g\alpha}$.

There remains the case when the number (2) equals 1. Then $\alpha^- = l\alpha$, $\alpha^{-+} = l\alpha + 1 = \alpha$. The expression for ΓN_α in (0) yields then

$$N_1 N_{l\alpha}^{kl\alpha} N_{l\alpha}^{k\alpha} = N_\alpha = N_{g\alpha};$$

the reasoning is like the one in the latter case.

2.2.3. Another proof of Theorem 2.2.

2.3.1 *Proof.* First $\Gamma\aleph_\alpha \geq \aleph_\alpha^- = \aleph_{\alpha-}$. Therefore, for any cardinal number n :

$$\left(\prod_{0 < n < \aleph_\alpha} n \right)^m = (\Gamma\aleph_\alpha)^m \geq (\aleph_{\alpha-})^m.$$

Applying the distributive law of exponentiation (cf. F. Hausdorff [1 p. 41, formula (10)]) we get

$$\prod_n n^m \geq \aleph_{\alpha-}^m. \quad (1)$$

Put, in particular,

$$m = \alpha = \text{cardinality of } \text{cf } \omega_\alpha, \quad (2)$$

where $\text{cf } \omega_\alpha$ means the least ordinal β such that some β -sequence of ordinals $< \omega_\alpha$ has ω_α as its supremum. We have two cases

2.3.2. *First case:* $\alpha < \aleph_\alpha$, i.e. \aleph_α is singular and therefore $\alpha^- = \alpha$; the relation (1) should yield:

$$\prod_n n^\alpha \geq \aleph_\alpha^\alpha. \quad (3)$$

Now, by the König-Zermelo theorem (cf. Sierpiński [1, p. 183]), one has $\aleph_\alpha^\alpha \geq \aleph_{\alpha+1}$ and

$$(G) \Rightarrow \aleph_\alpha^\alpha = \aleph_{\alpha+1} \quad (4)$$

(cf. Tarski [1, p. 182, Lemma 2^a, p. 187, Lemma 4^a]). In 2.6 we shall prove this result.

On the other hand, the hypothesis (G) implies that

$$\prod_{0 < n < \aleph_\alpha} n = \prod_{\alpha < n < \aleph_\alpha} n, \quad (5)$$

where $\alpha = \text{pcf } \omega_\alpha$ and hence

$$\prod n^\alpha = \prod_{\alpha < n < \aleph_\alpha} n^\alpha. \quad (6)$$

Now, $\text{cf } \aleph_\alpha < n < \aleph_\alpha \stackrel{(G)}{\Rightarrow} n^\alpha \in \{n, n^+\}$. Therefore, (6) yields

$$\prod n^\alpha = \prod_n n = \Gamma\aleph_\alpha,$$

which jointly with (3) and (4) yields

$$(G) \quad \Gamma\aleph_\alpha \geq \aleph_{\alpha+1}. \tag{7}$$

Since, by Theorem 2.1, $\Gamma\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha^+ = \aleph_{\alpha+1}$, this relation and (7) imply $\Gamma\aleph_\alpha = \aleph_{\alpha+1} = \aleph_{g\alpha}$, because $g_\alpha = (\alpha^-)^- + 1 = \alpha^- + 1$ (notice that $\alpha^- = \alpha$).

2.33. *Second case:* $\alpha = \aleph_\alpha$, i.e. the number \aleph_α is regular. Then either $\alpha^- = \alpha$ (ω_α is inaccessible) or $\alpha^- < \alpha$, i.e. $\alpha = \gamma + 1$.

2.3.3.1. If $\alpha^- = \alpha$, then certainly

$$\prod_n 2 \leq \Gamma\aleph_\alpha \leq \prod_n \aleph_\alpha \quad (0 < n < \aleph_\alpha),$$

$$2^{kI\aleph_\alpha} \leq \Gamma\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha^{kI\aleph_\alpha};$$

\aleph_α being inaccessible, we have $kI\aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ and the preceding relation becomes

$$2^{\aleph_\alpha} \leq \Gamma\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha},$$

$$\aleph_{\alpha+1} \leq \Gamma\aleph_\alpha \leq \aleph_{\alpha+1}, \text{ i.e. } \Gamma\aleph_\alpha = \aleph_{\alpha+1} = \aleph_{g\alpha}.$$

2.3.3.2. If $\alpha^- < \alpha$, one has $\alpha = \alpha^- + 1$. We shall prove the formula 2.2 (00) by induction. Suppose that μ be an ordinal such that 2.2 (00) holds for every ordinal $\alpha < \mu$; let us prove that 2.2 (00) holds for $\alpha = \mu$. If $\mu^- = \mu$, the statement 2.2 (00) is already proved (for every α satisfying $\alpha^- = \alpha$).

If $\mu^- < \mu = \alpha$, then we have

$$\Gamma\aleph_\alpha = \Gamma\aleph_{\alpha^-+1} = \Gamma\aleph_{\alpha^-} \cdot \aleph_{\alpha^-} = \aleph_{g(\aleph_{\alpha^-})} \cdot \aleph_{\alpha^-} = \aleph_\alpha,$$

(by induction hypothesis), where $x = \sup\{\alpha^-, g(\alpha^-)\}$. Now, in any case we have

2.4. LEMMA. $\sup\{\alpha^-, g(\alpha^-)\} = g\alpha = \alpha^{--} + 1$.

Let us prove this lemma. One has either $\alpha^{--} < \alpha^-$ or $\alpha^{--} = \alpha^-$. If $\alpha^{--} < \alpha^-$, then $\alpha^{--} + 1 = \alpha^-$, hence $g\alpha = \sup\{\alpha^{--} + 1, \alpha^-\} = \alpha^{--} + 1$. If $\alpha^{--} = \alpha^-$, then $\alpha^{--} + 1 > \alpha^-$, hence $g\alpha = \sup\{\alpha^{--} + 1, \alpha^-\} = \alpha^{--} + 1$. This proves lemma, consequently, Theorem 2.2 is also proved.

2.5. THEOREM. For every ordinal α , let $g\alpha = \alpha^{-+}$, then

- (i) $g\alpha = \sup\{\alpha^-, g(\alpha^-)\}$ and
- (ii) $\alpha = \omega \cdot \xi \Leftrightarrow g\alpha = \alpha + 1,$ (1)
- $\alpha = \omega \cdot \xi + 1 \Leftrightarrow g\alpha = \alpha,$ (2)
- $\alpha = \omega\xi + r \wedge 1 < r < \omega \Leftrightarrow g\alpha = \alpha - 1.$ (3)

In other words, the function g is dilatating on limit numbers, stationary on immediate followers of limit numbers and retracting elsewhere.

Part ((i) of the theorem is Lemma 2.4 and is the transfinite analogue of the difference equation $\Gamma(x) = (x - 1)\Gamma(x_1)$, for the Euler's gamma function in classical analysis.

The proof of part (ii) is easy. E.g., let us prove the implication \Leftarrow in (1):

$$g(\alpha) = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha^{-+} + 1 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha^{-+} = \alpha \Rightarrow \alpha^- = \alpha$$

(otherwise, it should be $\alpha^- < \alpha$, which jointly with $\alpha^{-+} < \alpha^-$ would imply $\alpha^{-+} < \alpha$, contradicting $\alpha^{-+} = \alpha$).

2.6. THEOREM. For any ordinal α

$$\aleph_\alpha^{kcf\omega_\alpha} > \aleph_\alpha. \tag{1}$$

If $cf\omega_\alpha = \omega_\alpha$, i.e. if ω_α is regular, the relation coincides with the Cantor's inequality. Therefore, it is sufficient to consider the case when ω_α is singular, i.e. when $\omega_\beta = cf\omega_\alpha < \omega_\alpha$. Suppose that, on the contrary, one has

$$\aleph_\alpha^{kcf\omega_\alpha} = \aleph_\alpha. \tag{2}$$

Since

$$k\binom{\aleph_\alpha}{cf\omega_\alpha} = (2), \quad k\binom{\aleph_\alpha}{\aleph_{cf\omega_\alpha}} = \aleph_\alpha$$

(for cardinals $x \geq y$ we denote by $\binom{x}{y}$ the cardinality of the system of all subsets $Y \subseteq X$ such that $x = kX, y = kY$). Let then

$$S_\xi, \xi < \omega_\alpha, \tag{3}$$

be a normal well order of family of all the \aleph_β -pointsubsets of $I\omega_\alpha$ where $\omega_\beta = cf\omega_\alpha$. Let us define the (1-1)-sequence x_{ω_α} , as follows: x_0 is the first element of S_0, x_1 is the first element of the $S_1 \setminus \{x_0\}$; for any $\xi < \omega_\alpha$ we

define x_ξ as the first element of the first term $S_\eta \setminus \{x_0, \dots, x_\xi\}$, $\eta \geq \xi$. In this way, if

$$S_{\eta_\xi} \quad (\xi < \omega_\alpha) \tag{4}$$

is the subsequence of (3) consisting of all the terms S_η satisfying to

$$\sup S_\eta \cap \{x_{\omega_{\alpha'}}\}_{\alpha'} = \omega_\alpha$$

we get a one-to-one mapping

$$f : S_{\eta_\xi} \leftrightarrow x_\xi \quad (\xi < \omega_\alpha), x_\xi \in S_{\eta_\xi}. \tag{5}$$

Now, let A be a \aleph_β -subset of $I\omega_\alpha$, cofinal to ω_α . Every \aleph_β -subset of A is in the sequence (4) on the one hand; and, consequently, the mapping $f|B$ would associate biuniquely to every $X \in \binom{A}{\aleph_\beta}$ a point $fX \in A$ and one would have $k\binom{A}{\aleph_\beta} \leq kA$ i. e. $2^{\aleph_\alpha} \leq \aleph_\beta$, which is a contradiction.

3. Function I' and trees.

3.1. For any finite cardinal $n > 0$, the number

$$\Gamma(n^+) = n! \tag{1}$$

has an interesting interpretation as the cardinality of the set $S!$ of all the permutations of any set S satisfying $kS = n$

$$(kS)! = k(S!).$$

3.2. For any infinite set S one has $k(S!) = 2^{kS}$ (cf. D. Kurepa [5], where three proofs of this relation are given); therefore, the continuum hypothesis G implies

$$n! = n^+, \text{ for every transfinite } n. \tag{2}$$

Under the same hypothesis we proved

$$\Gamma n^+ = n^{+---+} \text{ (Theorem 2.2)} \tag{3}$$

If (1), (2) and (3) were coexistent, one would have

$$n^{+---+} = n^+, \text{ i.e. } n^{-+} = n^+,$$

and this formula is not valid for non-limit cardinals (cf. Kurepa [3, § 9, pp. 117–120], [3^a, § 9, pp. 61–62 and 3.4 § 8.4, pp. 16–17]).

3.3. An interpretation of Γn

3.3.1. The classical formula $n! = 1 \cdot \dots \cdot n$ can be interpreted also as

$$n! = kP(n), \quad (1)$$

where $P(n)$ denotes the set of all the functions

$$f : In \rightarrow In = \{x; x \text{ cardinal} < n\}, \quad (2)$$

which leave invariant every left ideal i of In .

3.3.2. If for every $f \in P(n)$ we consider also the restrictions (subfunctions)

$$f|i \quad (f \in P(n), i \subseteq In), \quad (1)$$

then it is natural to order the set $T(n)$ of the functions (1) by putting

$$f|i \leq f'|i' \Leftrightarrow i \subseteq i' \wedge f|i = f'|i. \quad (2)$$

One obtains in this way a tree $(T(n), <)$, all the maximal chains of which are of the form

$$f|In' \quad (n' = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

3.3.3. The tree $(T(n), <)$ has the following properties:

(i) $(T(n), \neg)$ has a least member O ;

(ii) If $x \in T$ and $kT(\cdot, x) < n^-$, then x has precisely $(k(\cdot, x))^+$ immediate followers;

(iii) Every maximal chain has n^- members.

The definition of a tree like $T(n)$ can be made also for every transfinite cardinal number n . In order to do it, we set several definitions and notations (cf. 1.6, 1.7).

4. Main theorem

4.1. THEOREM. Let n be any cardinal number > 0 and let $T = (T(n), <)$ be any ordered set satisfying the following four conditions:

(n_1) the set contains a least element, denoted O (hence $T = T[O, \dots] = \{x; x \in T \wedge O \leq x\}$);

(n_2) $x \in T(n) \setminus \{O\} \Rightarrow T(\cdot, x)$ is well ordered and of cardinality $< n^-$;

(n_3) if $x \in T$ and $kT(\cdot, x) < n^-$, then T contains $(\aleph_{(\gamma x)})^+$ immediate followers of x ; here γx is the order-type of $T(\cdot, x)$;

(n_4) the cardinality of every maximal subchain is n^- .

Then the following conclusions hold good:

(0) any two ordered sets satisfying the conditions (n_1), (n_2), (n_3), (n_4) are isomorphic;

(00) any ordered set satisfying (n_1), (n_2), (n_3), (n_4) is isomorphic to the ordered set $(P(n), \neg)$, consisting of all the strictly retracting (ordinal-number) mappings f satisfying $f0 = 0$, and $fx < x$, for $x \neq 0$, on all the nonvoid initial sections of

$$KO(\cdot, \omega(n)) = \{\omega(n); \alpha < \omega(n)\},$$

where for $f, g \in P(n)$ we set

$$f = |g \Leftrightarrow \text{Dom } f \subseteq \text{Dom } g \wedge f|_{\text{Dom } f} = g|_{\text{Dom } f}.$$

$$f \neg g \Leftrightarrow f = |g \wedge f \neq g;$$

(000) the cardinal number of the family of all maximal subchains of $(T(n), <)$ equals Γn . The general continuum hypothesis G implies that this number equals n^{-+} , for $n \geq \aleph_0$;

(0000) the height $\gamma T(n)$ (the order-type of the set of the numbers $kT(\cdot, x)$ ($x \in T$)) equals the order-type of all the main ordinals $< \omega(n)$; for every ordinal $0 < \alpha < \gamma T n$, let

(1) $R_\alpha T = \{x; x \in T, \gamma x = \alpha\}$, where γx is the order-type of $T(\cdot, x)$; then one has

(2) $kR_\alpha T = \Gamma(\alpha + 1)$, for $\alpha < \omega$, and

(3) $kR_\alpha T = \Gamma \aleph_{-\alpha'+\alpha}$, for $\alpha \geq \omega$.

4.2. Proof. First, we shall prove the part (00) of the theorem. The proof will be carried out by induction argument on numbers α occurring in (1); we shall define an isomorphism $i(n)$ from $T(n)$ onto $P(n)$ (cf. D. Kurepa [1, p. 202], [2, pp. 145-146]). To start with, let i_0 be the mapping of the first element of $(T(n), <)$ into the first element 0 of $P(n)$; i_1 will extend i_0 carrying the unique follower of 0 into the unique follower 00 of 0 in $P(n)$. If x_0, x_1 are the two elements of $R_2 T(n)$, we define the extension i_2 of i_1 by setting $i_2 x_0 = 000$, $i_2 x_1 = 001$.

Suppose that $0 < \alpha < \gamma T$ and that one has defined an increasing α -sequence i_{α_0} ($\alpha_0 < \alpha$) of isomorphisms from left sections

$$T(n)(\cdot, a_0) = \bigcup_{\xi < \alpha_0} R_{\xi} T(n)$$

onto the left sections

$$P(n)(\cdot, a_0) = \bigcup_{\xi < \alpha_0} R_{\xi} P(n)$$

of $(P(n), \dashv)$. We define i_{α} in the following way: If $\alpha^{-} = \alpha$, we define i_0 as the supremum of the isomorphisms i_{α_0} for every $x \in R_{\alpha} T(n)$ we put $i_{\alpha} x_{\nu} = i_{\nu} x_{\nu}$, $i_{\alpha} x = i_0 x_0 i_1 x_1 i_2 x_2 \dots i_{\alpha_0} x_{\alpha_0} \dots$ where the chain of all the predecessors of x is the well-ordered set

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{\alpha_0} < \dots$$

If $\alpha^{-} < \alpha$ (α is of the first kind), we consider in $R_{\alpha} T(n)$ the equivalence relation

$$x \sim y \Leftrightarrow T(n)(\cdot, x) = T(n)(\cdot, y),$$

and the corresponding partition $R_{\alpha} T(n) / \sim$ into disjoint classes N . Since every such class N consists of all followers of a determined member $z \in R_{\alpha^{-}} T$, we conclude, by condition (n_3) on $T(n)$, that $kN = (N_{(\alpha^{-})}^+)^+$. Let then

$$WN = (N_0, N_1, \dots, N_{\xi}, \dots) \quad (\xi < \omega(kN))$$

be the shortest well-ordering of N ; we get in this way the set

$$WN \quad (N \in R_{\alpha} T(n) / \sim)$$

containing a shortest well-ordering of every N . Now, since $R_{\alpha} T(n)$ is the union of all these N 's, we define an isomorphism i_{α} on $Tn(\cdot, \alpha)$ setting

$$i_{\alpha} | T(n)(\cdot, \alpha^{-}) = i_{\alpha^{-}} | T(n)(\cdot, \alpha^{-}), \quad i_{\alpha} | N_{\xi} = i_{\alpha-1} x^{-} \xi,$$

provided $x \in N$.

In either case one proves that i_{α} is an isomorphism from the set $T(n)(\cdot, \alpha]$ onto the set $P(n)(\cdot, \alpha]$. Consequently, the isomorphism i_{α} is defined for every $\alpha < \gamma T(n)$.

To conclude, we define the mapping $i|T(n)$ putting

$$ix = i_{\gamma x}x, \text{ for every } x \in (T(n), <).$$

Obviously, i is the requested isomorphism from $(T(n), <)$ onto $(P(n), \dashv)$. This proves Theorem 4.(00).

4.2 *Proof of 4.(0).* Let $(T(n), <)$, $(T'(n), <)$ be any ordered sets satisfying $(n_1)-(n_4)$. By 4.(00) there is an isomorphism i from $T(n)$ onto $P(n)$ as well as an isomorphism i' from $(T'(n), <)$ onto $(P(n), \dashv)$; the mapping $i'^{-1}i$ is an isomorphism from T onto T' .

4.3. In order to prove the remaining parts of the *Main Theorem* it is sufficient to prove them for the particular set $(P(n), \dashv)$.

4.4. Now, since obviously

$$n < n' \Leftrightarrow P(n) \subset P(n'),$$

it is natural to consider the minimal class P , the initial sections of which are the sets $(P(n), \dashv)$, for any cardinal number $n > 0$. (P, \dashv) is a hypertree. And we shall list some properties of (P, \dashv) .

5. On the hypertree (P, \dashv) .

5.1. *Definition.* The hypertree (P, \dashv) consists of all sequences

$$0 = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\xi, \dots \quad (\xi < \alpha) \tag{1}$$

(α and α_ξ being ordinals), ordered by the relation $=|$ "to be an initial segment of"; the sequences satisfy the following condition:

$$(P) \quad \alpha_\xi < \omega_{[\xi]} \text{ i.e. } \alpha_\xi \in I_{\omega_{[\xi]}}$$

and we have the following two lemmas.

5.2. LEMMA. *If α is any ordinal number, then $\omega_{[\alpha]}$ is the least ordinal number δ such that the cardinal numbers $< k\delta$ form a strongly increasing α -sequence; in other words, the ordered sets $(K(\cdot, k\omega_{[\alpha]}), <)$, $(O(\cdot, \alpha), <)$ are order-similar; K (resp. O) denotes the class of all the cardinal (resp. ordinal) numbers.*

5.3. LEMMA. *For $\omega^2 \leq \xi$ one has $\omega_{[\xi]} = \omega_\xi$, $N_{[\xi]} = N_\xi$.*

5.4. Consequently, if $\alpha \in P$ and if γx denotes the "length" of a such that $a = a_0a_1 \dots a_\xi \dots$ ($\xi < \gamma a$), then predecessors of any $a \neq 0$ are the only proper segments of a , i.e. $0 = a_0, a_0a_1, a_0a_1a_2, \dots$

5.5. For the set $R_0P(a, \cdot)$ of all the immediate followers of any $a \in (P, \dashv)$ we have $R_0P(a, \cdot) = \{aa_\gamma; a_\gamma < \omega_{[\gamma a]}\}$.

5.6. THEOREM. $kR_{\alpha+1}P = kR_\alpha P \cdot \aleph_{[\alpha]}$.

As matter of fact, we have the relation

$$R_{\alpha+1}P = \bigcup_{a \in R_\alpha P} R_0P(a, \cdot). \quad (1)$$

Since the right half-cones under the sign \bigcup in (1) are pairwise disjoint, Theorem 5.6 is a consequence of (1) and of the statement 5.5.

5.7. THEOREM. $kR_\alpha P = \Gamma \aleph_{[1+\alpha]}$, for every ordinal α ; in particular, if $\alpha \geq \omega^2$, then $kR_\alpha P = \Gamma \aleph_\alpha$.

We prove the theorem by an induction argument. The theorem is true $\alpha = 0$. Suppose that $\beta > 0$ is any ordinal such that Theorem 5.7 holds for every $\alpha < \beta$; we have to prove it for $\alpha = \beta$ too. If $\beta^- < \beta$, then formula 5.6, applied for $\alpha = \beta^-$, reads as follows:

$$kR_\beta P = kR_{\beta^-} P \cdot \aleph_{[\beta^-]} = \Gamma \aleph_{[\beta^-]} \aleph_{[\beta^-]} = \left(\prod_{0 < k < \aleph_{[\beta^-]}} k \right) \cdot \aleph_{[\beta^-]} = \prod_{k < \aleph_{[\beta^-]}} k = \Gamma \aleph_\beta.$$

If $\beta^- = \beta > 0$, statement 5.7 holds also, because $R_\beta P$ consists of all the β -sequencés a with $a_\xi < \omega_{[\xi]}$ and since the mapping $\xi \rightarrow \aleph_{[\xi]}$ maps the class of all the ordinals biuniquely and strictly increasingly onto the class of all cardinal numbers.

Since $\alpha \geq \omega^2$ implies $\omega[\alpha] = \omega\alpha$, the last part of Theorem 5.6 holds also.

5.8. (P, \dashv) as universal hypertree.

THEOREM. Every tree $(T, <)$ is isomorphic to a tree contained in the hypertree (P, \dashv) .

In fact, let

$$n = \sup_{x \subseteq T} kNx, \quad Nx = \{y; y \in (T, <), T(\cdot, y) = T(\cdot, x)\}.$$

Then we map in a one-to-one way i_0 the node R_0T of $(T, <)$ into a node N of P satisfying $kN \geq n$; for every $x \in R_0T$ we map biuniquely the node $R_0T(x, \cdot)$ into the node $R_0P(i_0x, \cdot)$. If $0 < \alpha < \gamma T$ is given and if for every ordinal $\alpha' < \alpha$ a mapping $i_{\alpha'}$ of $T(\cdot, \alpha')$ is performed, let us define also a mapping i_α of $T(\cdot, \alpha)$ as an extension of the isomorphism $i_{\alpha'}$ ($\alpha' < \alpha$).

If $\alpha^- < \alpha$, we define i_α in the following way:

$$i_\alpha|T(\cdot, \alpha) = i_{\alpha-1}|T(\cdot, \alpha). \tag{1}$$

$i_\alpha|R_\alpha T$ maps biuniquely every set $R_0T(x, \cdot)$ ($x \in R_{\alpha-1}T$) into the set $R_0P(i_{\alpha-1}, \cdot)$.

If $\alpha^- = \alpha$, we consider any maximal α -chain K of $T(\cdot, \alpha)$ and the set

$$\{x; x \in T, T(\cdot, x) = K\}; \tag{2}$$

we define i_α first on $T(\cdot, \alpha)$ as extending the mappings $i_{\alpha'}$, and then we define i_α on $R_\alpha T$ also as a biunique mapping of every set of the form (2) into a set $G(K)$ consisting of immediate followers of a point $p \in P$ satisfying $P(\cdot, p) = i_\alpha K$. i_α being defined for every $\alpha < \gamma T$, the supremum of the increasing family of isomorphisms i_α ($\alpha < \gamma T$) yields the requested imbedding of the tree $(T, <)$ into (P, \vdash) .

6. Function $!n$ for any cardinal number $n > 0$.

6.1. *Definition.* $!n = \sum_{k < n} k!$. E.g. $!1=1, !2=2, !3=0!+1!+2!=4, !4=!3+3!=4+6=10, !\aleph_0 = \aleph_0$.

6.2. **THEOREM.** (0) *For every cardinal number $n > 0$ one has*

$$!n \leq n! = \Gamma(n + 1); \tag{1}$$

(00) *for $n < \infty$ the equality*

$$!n = n! = \Gamma(n + 1) \tag{2}$$

holds if and only if $n = 0 \vee n = 1$;

(000) *if $n \geq \aleph_0$ then $!\aleph_\alpha = \sup_{k < \aleph_\alpha} k! \geq \aleph_\alpha < \aleph_\alpha! = 2^{\aleph_\alpha}$;*

(0000) *the general continuum hypothesis (G) implies*

$$!\aleph_\alpha = \aleph_\alpha \aleph_\alpha < \aleph_\alpha! = \aleph_{\alpha+1}.$$

We prove (1) by an induction argument. For $n = 0, 1$ one has (2); since $!3 < 3!$ one has $!3 + 3! < 3! + 3! < 3!4$, i.e. $!4 < 4!$. Similarly, $!n < n! \parallel >!n + n! < n! + n! < n!(n + 1)! \quad (n > 2)$,

$$!(n + 1) < (n + 1)!.$$

Consequently, for $0 < n < \aleph_0$, the sign \leq in (1) means $=$, for $n = 0 \vee n = 1$, and $<$, for $n \geq 3$.

Let n be any infinite cardinality. Since $k \rightarrow !k$ is an increasing mapping we have

$$!\aleph_\alpha = \sum_{k < \aleph_\alpha} k! = \sup k! \geq \aleph_\alpha.$$

On the other hand, since $\aleph_\alpha! = 2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$, one has $\aleph_\alpha! \geq \aleph_{\alpha+1}$, the continuum hypothesis implying $k < \aleph_\alpha \Leftarrow k! \leq \aleph_\alpha$; the remaining assertions in Theorem 6.2 are obvious.

7. Function $!n$.

7.1. *Definition.* For any cardinal number $n > 0$ let

$$!n \cdot n = \prod_{0 < k < n} k!.$$

E.g. $!.1 = 1$; $!.2 = 2$; $!.3 = 2$; $!.4 = 0! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3! = 12$; $!.5 = !4 \cdot 4! = 12 \cdot 24 > 5!$;

$$!\aleph_0 = \aleph_0! = 2^{\aleph_0}; \quad !\aleph_1 = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_0! = 2^{\aleph_0} = \Gamma\aleph_1.$$

7.2. THEOREM.

$$\begin{aligned} (0) \quad \aleph_0 > n > 4 &\Leftarrow !n > \Gamma(n+1), \\ (00) \quad n \geq \aleph_0 &\Leftarrow !n = \Gamma n \cdot n; \end{aligned}$$

In particular $!\aleph_\lambda = \Gamma\aleph_1$.

The proof (0) is obvious. Let us prove (00).

First case: n is alimit number. By definition,

$$\Gamma n = \prod_{0 < m < n} = \prod_{0 < m < m_0} \prod_{0 < k < m} = \prod_m \Gamma m = !n$$

(for limit numbers $n \geq \aleph_0$; cf. Bachmann, p. 143, Theorem 0).

Since $\Gamma n \geq n$, one has $\Gamma n \cdot n = \Gamma n$, for $n \geq \aleph_0$.

Second case. If n is of the first kind, say $\aleph_{\alpha+1}$, then

$$\begin{aligned} !\aleph_{\alpha+1} &= \prod_{n < \omega} n! \prod_{\xi < \alpha+1} \aleph_\xi! = 2^{\aleph_0} \prod_{\xi < \alpha+1} 2^{\aleph_\xi} \stackrel{G}{=} \aleph_1 \prod_{\xi < \alpha+1} \aleph_{\xi+1} = \\ &= \aleph_1 \cdot \Gamma\aleph_{\alpha+1} = \Gamma\aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_{\alpha+1}. \end{aligned}$$

REFERENCES

- H. Bachmann:
- [1] *Transfinite Zahlen*, Ergebnisse Math., Neue Folge 1, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955, VIII, 204.
- F. Bagemihl:
- [1] *Some theorems on powers of cardinal numbers*, Ann. Math. 49 (1948), 341-346.
- [2] *A theorem on infinite products of transfinite cardinal numbers*, Quart. J. Math. 14 (1948), 200.
- [3] *On the partial products of infinite products of alephs*, Amer. J. Math. 70 (1948), 207-211
- F. Hausdorff:
- [1] *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, New York 1949, VIII + 476.
- D. Kurepa:
- [1] *Ensembles ordonnés et ramifiés*, Thèse, Paris, 1935; Publ. Math. Beograd 4 (1935), 1-138.
- [2] *A propos d'une généralisation de la notion d'ensembles bien ordonnés*, Acta Math. 75 (1942), 139-150.
- [3] *O faktorijelima konačnih i beskonačnih brojeva*, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjetn. 296 (1953), 105-122.
- [3^a] *Über die Faktoriellen endlichen und unendlichen Zahlen*, Bull. Internat. Acad. Sci. Zagreb Classe Math. 4 (1954), 51-64.
- [4] *Sull'ipotesi del continuo*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino 18 (1958/1959), 11-20.
- W. Sierpiński:
- [1] W. Sierpiński, *Cardinal and ordinal numbers*, Monogr. Matematyczne Warszawa 36 (1957), 487.
- A. Tarski:
- [1] *Quelques théorèmes sur les alphas*, Fund. Math. 7 (1925), 1-14.
- [2] *Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certains opérations élémentaires*, 16 (1930), 181-304.

ON p -ADIC SPACES OF HENSEL

While all p -adic fields are pairwise nonisomorphic the p -adic complete spaces are pairwise homeomorphic.

1. Definition of p -adic spaces (cf. Hausdorff [1, p. 102]). Let p, θ be any natural prime number and any real number satisfying $0 < \theta < 1$ respectively. For any $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ (\mathbb{Q} denotes the set of rational numbers) let $r' = p(r)$ be the rational integer such that

$$(1) \quad r = p^{r'} s$$

where s is a rational number such that neither the numerator of s nor the denominator of s is divisible by p ; let

$$(2) \quad r \in \mathbb{Q} \longrightarrow \|r\| \equiv \|r\|_{\theta_p} = \theta^{-r'}, \quad \|0\| = 0.$$

The function (2) is a norm in \mathbb{Q} , i.e. the function is defined in \mathbb{Q} and has the following properties:

1. $\|x\| \geq 0$; 2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ and still more 3'. $\|x + y\| \leq \sup\{\|x\|, \|y\|\}$;
4. $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$.

2. The space $Q(\theta, p)$. Let $Q(\theta, p)$ be the space of rational numbers defined by means of the distance

$$\rho(x, y) = \rho_{\theta_p}(x, y) = \|x - y\|_{\theta_p} = \theta^{-p(x-y)}$$

3. The space $Q(\theta, p)$ is dense in itself. As a matter of fact, every number $q \in \mathbb{Q}$ is a point of accumulation of Q because e.g. the rational numbers $q - p^n = q_n$ converge to q :

$$\rho(q, q_n) = \|q - q_n\|_{\theta_p} = \|p^n\|_{\theta_p} = \theta^{-n} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

on the other hand, if p' is any prime number $\neq p$, then

$$\rho_{\theta_{p'}}(q, q_n) = \|p^n\|_{\theta_{p'}} = \theta^0 = 1$$

because p^n is not divisible by p' . Consequently, the set $E_p = \{p, p^2, p^3, \dots\}$ has 0 as limit point in the space $Q(p^{-1}, p)$ and has no limit point in the space $Q(\theta, p')$. Therefore the spaces $Q(\theta, p)$, $Q(\theta, p')$ are not isomorphic by means of the identity mapping. However they are isomorphic:

4. THEOREM. *For any pair p, q of prime numbers and for any $r \in Q \setminus \{0\}$ let $T_{pq}(r)$ be the number obtained from r by transposition of factors p, q . In other words, for every $r \in Q$ we have the mapping*

$$(1) \quad f_r : P \rightarrow D \text{ such that}$$

$$(2) \quad r = \prod_{p \in P} p^{f_r(p)};$$

P denotes the set of all the prime numbers; D is the set of integers. Then

$$(3) \quad \begin{aligned} T_{pq}(r) &= p^{f_r(q)} q^{f_r(p)} \prod_{x \in P \setminus \{p, q\}} x^{f_r(x)}, \\ T_{pq}(0) &= 0 \end{aligned}$$

is an isometry from $Q(\theta, p')$ onto $Q(\theta, q)$:

$$(4) \quad \|r\|_{\theta_p} = \|T_{pq}(r)\|_{\theta_q}.$$

As a matter of fact, we have the following transformations (we assume that $r \neq 0$):

$$\begin{aligned} (4)_2 &= \|T_{pq}(r)\|_{\theta_q} = \left\| T_{pq} \left(\prod_{x \in P} x^{f_r(x)} \right) \right\|_{\theta_q} \\ &= \left\| p^{f_r(q)} q^{f_r(p)} \prod_{x \in P \setminus \{p, q\}} x^{f_r(x)} \right\|_{\theta_q} = \theta^{-f_r(p)} = \left\| \prod_{x \in P} x^{f_r(x)} \right\|_{\theta_p} = (4)_1. \end{aligned}$$

Hence, (4) holds.

5. Equivalence of the norms $\|r\|_{\theta_p}$, $\|r\|_{p^{-1}}$. These two norms are equivalent in the sense that they produce C -homeomorphic spaces $Q(\theta, p)$, $Q(p^{-1}, p)$

5.1. We define: A metric space (M, ρ) is *C-homeomorphic* to a metric space (M', ρ') , symbolically $(M, \rho) \approx_c (M', \rho')$,

(1) if there exists a homeomorphism f from M onto M' by means of which the fundamental or Cauchy sequences are mutually associated: if $x_1, x_2 \dots$ is a Cauchy sequence in (M, ρ) , then $f(x_1), f(x_2), \dots$ is a Cauchy sequence in (M', ρ') .

Then we have

$$(2) \quad \begin{aligned} Q(\theta, p) &\approx_c Q(p^{-1}, p), \\ Q(\theta, q) &\approx_c Q(q^{-1}, q). \end{aligned}$$

Since $Q(\theta, p) \stackrel{\text{isom}}{=} Q(\theta, q)$, the relations (2) yield

$$(4) \quad Q(p^{-1}, p) \approx_c Q(q^{-1}, q)$$

Such a special homeomorphism between the spaces $Q(p^{-1}, p)$, $Q(q^{-1}, q)$ is the transformation (3) in the section 4.

6. Hensel spaces. Hensel spaces are defined as metrical completions $\overline{Q(p^{-1}, p)}$ of the spaces $Q(p^{-1}, p)$, p running through P .

For another $q \in Q$ we have the spaces $Q(q^{-1}, q)$, $Q(\theta, q)$. Then the continuous mapping

$$x \in \overline{Q(p^{-1}, p)} \longrightarrow fx \in \overline{Q(q^{-1}, q)}$$

satisfying $f|Q(p^{-1}, q) = T_{pq}|Q(p^{-1}, p)$ is a requested homeomorphism between the Hensel spaces $\overline{Q(p^{-1}, p)}$, $\overline{Q(q^{-1}, q)}$.

6.1. Consequently, up to isomorphism *there exists a single Hensel's complete space H over the field of rational numbers*. This space is not homeomorph to the space R of real numbers because $\dim R$ and $\dim H = 0$. The equality $\dim H = 0$ is implied by the special nonarchimedean condition 3' of the norm of spaces $Q(p^{-1}, p)$; the same condition holds also for the completion $\overline{Q(p^{-1}, p)}$ i.e. for the space H .

6.2. The foregoing *topological* poornes of Hensel's spaces is to be confronted with *the algebraic complete fields*

$$\overline{Q_p(+, \cdot)} \quad (p \in P)$$

are *pairwise nonisomorphic* (Mac Duffee [5, p. 199/201, theorems 91.2, 91.4]).

7. *Remark.* The fact that metrical spaces $Q(p^{-1}, p)$, $Q(q^{-1}, q)$ are homeomorphic is a special case of theorem by W. Sierpiński that *every metrical space which is dense-in-itself is homeomorphic to the ordered space of rational numbers*; (v. Sierpiński [6]; also Kuratowski [3, I p. 175]); but the accent in the present situation is that spaces are C -homeomorphic involving the isomorphism of the corresponding complete closures! E.g. the spaces $Q(p^{-1}, p)$, $(Q, <)$ are homeomorphic but are not C -homeomorphic.

BIBLIOGRAPHY

- [1] F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig, 1927, pp. 285.
- [2] K. Hensel, *Theorie der algebraischen Zahlen I*, Leipzig-Berlin, 1908, XI +349.
- [3] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa, 1958, XIII +494.
- [4] А. Г. Курош, *Лекции по общей алгебре*, Москва, 1962, pp. 396.
- [5] C. C. Duffee, *An Introduction to Abstract Algebra*, New York, 1940, VII +302.
- [6] W. Sierpiński, *Sur propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi*, *Fund. Math.* 1 (1920); nouvelle édition 1937, 11–16.

ON THE LEFT FACTORIAL FUNCTION $!n$ ¹

1. **Definition of $!n$ (left factorial of n).** For every (cardinal or ordinal) number n let

$$!n = 0! + 1! + \dots + m! + \dots, \quad (m < n), \text{ i.e.}$$

$$!n = \sum m!, \quad (m < n), \text{ with } 0! = 1.$$

The number $!n$ is called "*left factorial of n* " (to be distinguished from the n factorial, $n!$)². E.g.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800	39916800
$!n$	1	2	4	10	34	154	874	5914	46234	409114	4037914
(cf. 2.1) M_n	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

1.1. One has the following recursive formula:

$$!(n+1) = !n + !n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

We shall give some properties of the sequence $!n$, in particular in connection with its prime divisors (if not stated otherwise n, m, \dots , will be assumed to be natural numbers).

The main question is to know whether for every natural number $n > 2$ one has $M_n = 2$ (cf. 2.1) or equivalently whether $!n \not\equiv 0 \pmod{n}$.

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Math. Balkanica 1 (1971), 147–153.

¹Some results of this paper were presented at the 5th Congress of mathematicians, physicists and astronomers of Yugoslavia (Ohrid, 14–19.9.1970).

²The number $n!$ is defined as the cardinality $kS!$ of the set $S!$ of all permutations of S , S being any set of cardinality n .

1.2 LEMMA. *If $m|!n$ and $m \leq n$, then $m|m$.*³

As a matter of fact, it suffices to consider the case $m < n$; the relation $m < n$ implies

$$!n = !m + m! + (m + 1)! + \cdots + (n - 1)!$$

and therefore $!n$ is divisible by m .

1.3. LEMMA. *If the relations*

$$(1.3.1) \quad !n \equiv 0 \pmod{n}, \quad 2 < n \in N$$

are consistent, then $n \equiv 0 \pmod{m}$, $m \in N$ implies $!m \equiv 0 \pmod{m}$. In particular, the least number satisfying (1.3.1) should be an odd prime number.

As a matter of fact, the relation $m|!n$ implies $m \leq n$; let us consider the case $m < n$; then

$$!n = !m + B, \text{ where } B = m! + (m + 1)! + \cdots + (n - 1)!.$$

Since each term of B is divisible by m , and since $m|!n$, the number $!m = !n - B$ must be divisible by m .

The last section of the lemma is obvious.

1.3.1 COROLLARY. *There are infinitely many solutions of*

$$(1.3.1.1) \quad !n \not\equiv 0 \pmod{n}, \quad 2 < n \in N.$$

Since these relations are satisfied for $m = 3, 4, 5, 6, 7$, the same is so for $n = mk$ for every $k \in N$. Our hypothesis is that (1.3.1.1) holds identically.

1.3.2. *Problem* (Function r_n). For any natural number n let r_n be the least non negative integer which is congruent $!n \pmod{n}$. The problem is to investigate the function $n \rightarrow r_n$ and in particular to determine the values of r_n and the frequency of every term of the sequence r_1, r_2, r_3, \dots . Our hypothesis says that $r_n \neq 0$ for every $n > 2$, i.e. that for every natural number $n > 2$ one has

$$!n \not\equiv 0 \pmod{n} \quad (\text{cf. } H_2 \text{ in 2.4}).$$

1.4. LEMMA. *If $m|!n$ and $m < n \leq r$ then $m|r$.*

³The symbol $|$ means *divides*; \dagger is the negation of $|$.

The lemma is obvious because m divides $s!$ for every $s \geq n$.

1.5. LEMMA. *For any natural integer m satisfying (1) $m \nmid !m$ and any natural number n we have*

$$(2) \quad m \mid !n \Rightarrow m > n.$$

Proof. In the opposite case there would exist some m such that (1) holds and some n such that (2) does not hold, i.e. such that

$$(3) \quad m \mid !n, \quad m < n.$$

Now, from (3) one infers that m divides $!m$ too, because

$$(4) \quad !n = !m + m! + \dots + (n-1)!$$

every summand on the right-hand side of (4) except the first one is divisible by m , now, by hypothesis $m \mid !n$, and the relation (4) would imply $m \mid !m$, contradicting (1).

2. Function $n \rightarrow M_n$.

2.1. *Definition.* M_n denotes the greatest common divisor of

$$!n, n! \text{ i.e. } M_n = M(!n, n!).$$

2.2. LEMMA. *Every prime divisor of M_n divides M_{n+1} : One has $M_n \mid M_{n+1}$ for every $n \in N$.*

As a matter of fact the relation (1.1.1) implies that $M_n \mid !(n+1)$; since also $M_n \mid (n+1)!$ we infer M_n divides both $!(n+1)$ and $(n+1)!$ and hence also the greatest common divisor M_{n+1} of these two numbers.

2.2.1. COROLLARY. *The sequence M_n is increasing: $M_1 \leq M_2 \leq \dots$*

2.3. Our hypothesis states that $M_n = 2$ for $1 < n \in N$; this is connected with the determination of prime factors of $!n$. We have the following

2.4. MAIN THEOREM. *The following 3 statements are mutually equivalent:*

H_1 : M -HYPOTHESIS. *If $1 < n \in N$, then $M_n = 2$ where $M_n = M(!n, n!)$.*

H_2 : FACTORIAL INCONGRUENCE. *If $2 < n \in N$, then $!n \not\equiv 0 \pmod{n}$; in particular if p is odd and prime, then $!p \not\equiv 0 \pmod{p}$.*

H_3 : FACTOR HYPOTHESIS. *If $1 < n \in N$, then every prime divisor of $!n$ is 2 or $> n$.*

Proof. $H_1 \Rightarrow H_3$. In the opposite case, there would exist an integer $n > 2$ and a prime p dividing $!n$ and such that $p < n$. Therefore we have $p \mid !n$ and $p \mid n!$, i. e. $p \mid M_n$ and $M_n \geq p > 2$, contradicting the M -hypothesis.

$H_3 \Rightarrow H_2$. In opposite case, there would exist some $n > 2$ such that $n \mid !n$, therefore also $n \mid !r$ for every $r \geq n$, in particular for $r = n + 1$; in other words, n would be a divisor of $!(n + 1)$, although $n < n + 1$, contradicting the factor hypothesis H_3 .

$H_2 \Rightarrow H_1$. Let us assume $M_n > 2$ for some n ; let m be the smallest such n , i. e. $M_m > 2$ and $M'_m = 2$ for every $2 \leq m' < m$. Let p be an odd prime divisor of M_m . Consequently, p divides both $!m$ and $m!$. Therefore, $p \leq m$. If $p = m$, the relation $p \mid !m$ says that $p \mid !p$, in contradiction with H_2 . If $p < m$, we have $!m = !p + p! + (p + 1)! + \dots + (m - 1)!$ which gives

$$!p = !m - p! - (p + 1)! - \dots - (m - 1)!$$

Since every term on the right-hand side is divisible by p , so is the number $!p$ too, contradicting the factorial incongruence. The chain of implications $H_1 \Rightarrow H_3 \Rightarrow H_2 \Rightarrow H_1$ proves completely the theorem.

2.5. *A reduction of the factorial hypothesis.*

Since for every prime p

$$\begin{aligned} (p - 1)! &\equiv -1 \pmod{p} \\ (p - 2)! &\equiv 1 \pmod{p} \\ (p - 3)! &\equiv \frac{(p - 1)}{2} \pmod{p}^5 \end{aligned}$$

we have the following equivalence:

2.5.1 THEOREM. *For every prime number $p > 3$*

$$!p \not\equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p-4} \not\equiv \frac{1-p}{2} \pmod{p}.$$

3. **On the divisors of $!n$.**

According to the Main Theorem 2.2 our hypothesis says that every prime odd divisor of $!n$ should be $\geq n$. Therefore it is interesting to find some cases for which the corresponding induction argument holds.

⁵This is consequence of the result that for any prime p and any $0 \leq k < p$ one has $(n - k - 1)!k! \equiv (-1)^{k+1} \pmod{p}$ (Kirin [1]).

3.1. LEMMA. *If $p \nmid n'$ for every $n' \leq n$ and if $p \mid (n+1)$, then $p \geq n+1$.*

In the opposite case, there would be $p \leq n$. The relation $(n+1) = !n + n!$ proves then $p \mid n$ also, contradicting the assumption $p \nmid n$.

3.2. LEMMA. *Let n be a composite number and p an odd prime number. If for every $m < n$ one has*

$$p \mid m \Rightarrow p \geq m, \text{ then also } p \mid (n+1) \Rightarrow p \geq n+1.$$

Assume that $p \mid (n+1)$; one has to prove then $p \geq n+1$. One has two possibilities:

First case: $p \nmid n'$ for every $n' \leq n$; then $p \geq n+1$ in virtue of the preceding lemma.

Second case: there is some $m \leq n$ such that $p \mid m$; then by induction hypothesis $p \geq m$; we to prove that $p \geq n+1$. In the opposite case, it would be $p \leq n$ i. e. $m \leq p \leq n$; therefore $(n+1) = !m + A + n!$ with

$$A = m! + (m+1)! + \cdots + (n-1)!.$$

Since the numbers $(n+1)$, $!m$, $n!$ are divisible by p , so is the number A too; therefore $p \mid n$, and by the induction hypothesis $p \geq n$. This relation with $p \leq n$ implies $p = n$, absurdity, p being prime and n being composite. This contradiction proves the lemma.

We are not able to prove the statement analogous to lemma 3.2 for n being a prime number (the statement is just our Factor hypothesis H_2 in 2.4).

3.3. *Problem.* Is it the true that relation $m^2 \mid n$ has no solution for natural numbers $m, n > 1$? It is so at least for $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, and any $n > 1$.

3.4. *Function $s_k(n)$.*

Consider the sequence

$$0!, 1!, 2! \dots$$

and the sum of any consecutive n terms:

$$k! + (k+1)! + \cdots + (k+n-1)! \stackrel{\text{def}}{=} s_k(n).$$

Thus $s_0(n) = !n$. One could examine the new function $s_k(n)$. In particular, what are prime factors of $s_k(n)$?

4. The function $!z$ for complex numbers.

Consider the relation

$$(4.1) \quad \Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx - (a-1)! \text{ for } a \in N$$

for $a = 1, 2, \dots, n$. Adding all these relations we get

$$!n = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\sum_{a=1}^n x^{a-1} \right) dx, \text{ i.e.}$$

$$(4.2) \quad !n = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x^n - 1}{x - 1} dx.$$

We use the same relation to *define* the function

$$(4.3) \quad !z \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x^z - 1}{x - 1} dx$$

for every *complex* number z satisfying $\text{Re } z > 0$, and define in particular $!1 = 1$. Since

$$(4.4) \quad \frac{x^{z+1} - 1}{x - 1} = x^z + \frac{x^z - 1}{x - 1}$$

on multiplying (4.4) by e^{-x} and on integrating one has

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x^{z+1} - 1}{x - 1} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} x^z dx + \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x^z - 1}{x - 1} dx, \text{ i.e.}$$

$$(4.5) \quad !(z+1) = \Gamma(z+1) + !z.$$

In other words

$$(4.6) \quad !z = !(z+1) - \Gamma(z+1) = !(z+1) - z!$$

This relation enables us to define stepwise the function $!z$ also for z satisfying $\operatorname{Re} z \leq 0$.

5. Left factorial $!n$ for transfinite numbers.

5.1. This function was introduced in [4] for any cardinal (ordinal) number n . At the same time we proved also that the general continuum hypothesis (G.C.H.) implies

$$(5.1) \quad !n = n$$

for any cardinal transfinite number n (Kurepa [6 Th. 6.2 (0000)]).

5.2. On the other side, one knows (cf. Sierpiński [8]) that the G.C.H. implies the axiom of choice

$$\text{G.C.H.} \Rightarrow (5.1) \wedge Z.$$

5.3. The converse holds also: *The axiom of choice Z and the identity $!n = n$ for every infinite cardinality n imply the G.C.H.*

Proof. If the general continuum hypothesis did not hold, there would exist a cardinal transfinite number n such that for some cardinal transfinite number r

$$(5.2) \quad n < r < 2^n.$$

Now, $n < r$ implies $n! \leq !r$ which in connection with $n! = 2^n$ and (5.1) would imply $2^n \leq r$, contradicting the relation (5.2).

The foregoing results in 5.1 and 5.2 yield the following

5.4 THEOREM. *The general continuum hypothesis is equivalent to the identity $!n = n$ on transfinite cardinalities and the axiom of choice.*

5.4.1. *Problem.* We do not know whether it is legitimate to drop in the last theorem the words "and the axiom of choice". The problem is equivalent to the statement

$$n! = 2^n$$

for every transfinite cardinal number n .

REFERENCES

- [1] V. Kirin, *A note on Wilson theorem*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. Zagreb **17** (1962), 181–182.
- [2] D. Kurepa, *Über das Auswahlaxiom*, Math. Ann. **126** (1953), 381–384.

-
- [3] Đ. Kurepa, *O faktorijelima konačnih i beskonačnih brojeva*, Rad JAZU Zagreb **296** (1953), 105–112.
 - [4] Đ. Kurepa, *Über die Faktoriellen endlicher und unendlicher Zahlen.*, Bull. Internat. Ac. Sci. Jugosl., Zagreb, classe math. **4** (1954), 51–64.
 - [5] Đ. Kurepa, *Sull'ipotesi del continuo.*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino **18** (1958-9), 11–20.
 - [6] Đ. Kurepa, *Factorials of cardinal numbers and trees*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. Zagreb **19** (1964), 7–21.
 - [7] Đ. Kurepa, *O četiri funkcije*, 5. Kongres matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije, Ohrid (1970).
 - [8] W. Sierpiński, *L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome de choix*, Fund. Math. **34** (1947), 1–5.

LEFT FACTORIAL FUNCTION IN COMPLEX DOMAIN*

1. Introduction.

The left factorial function $!z$ or $!(z)$ or $K(z)$ was defined in Kurepa [1, p. 151] in the following way:¹

$$(1.1) \quad !z = !(z) = K(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^z - 1}{t - 1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

The function $!z$ satisfies the following difference equation

$$(1.2) \quad !(z + 1) - !(z) = \Gamma(z + 1),$$

where

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

In particular,

and

$Using the relations (1.1), (1.2) one might define the function $!(z)$ in the complex number plane and study its properties. Because of the formula (1.2)$

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Math. Balkanica **3** (1973), 297-307.

*Presented at the International Conference on Integral, Differential and Functional Equations (Bled, Jugoslavija, 29.5. - 02.6.1973) in connection with the first centenary of the birth of Josip Plemelj (11.12.1873. Bled - 22.5.1967. Ljubljana).

¹Following Stanković J. and Slavić D. $!z$ is denoted also $\lg K(z)$ or Kz .

every formula concerning the right factorial $\Gamma(z)$ yields the corresponding formula concerning $!(z)$. E.g. Euler's formula

$$(1.3) \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

yields

$$(1.3') \quad [!(z)-!(z-1)][!(1-z)-!(-z)] = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

saying that the left-hand side expression $(1.3')_1$ of (1.3') is a periodic function. In particular, for $z = 1/2$ the relation (1.3') gives

$$!(1/2)-!(-1/2) = \pi^{1/2}.$$

The function $!(z)$ has derivatives of every order; from (1.1) one gets:

$$(1.4) \quad !^{(k)}(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^z (\ln t)^k}{t-1} dt, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

The function $!z$ is meromorphic and has interesting properties.

2. The value $k(n^{-1})$ for $n \in N$.

2.1. For $z = n^{-1}$ the definition (1.1) gives

$$(2.1) \quad !(n^{-1}) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^{1/n} - 1}{t-1} dt.$$

Putting $t^{1/n} = v$, $t = v^n$ one gets

$$(2.2) \quad K(n^{-1}) = \int_0^{\infty} e^{-v^n} \frac{v-1}{v^n-1} n v^{n-1} dv = nE_n - nF_n,$$

where

$$(2.3) \quad E_n = \int_0^{\infty} e^{-v^n} dv = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(2.4) \quad F_n = \int_0^{\infty} e^{-v^n} \frac{v^{n-2} + v^{n-3} + \dots + v + 1}{v^{n-1} + v^{n-2} + \dots + v + 1} dv.$$

2.2. Functions $E_n(x)$, $F_n(x)$. In view of (2.3) and (2.4) it is natural to consider the functions

$$E_n(x) := \int_0^{\infty} e^{-v^n} dv \text{ for every } n \in N,$$

$$F_n(x) := \int_0^{\infty} e^{-v^n} \frac{v^{n-2} + v^{n-3} + \dots + v + 1}{v^{n-1} + v^{n-2} + \dots + v + 1} dv.$$

It seems that the numbers $!(n^{-1})$, F_n are not expressible in a closed finite form by means of known functions. In particular, concerning

$$!(1/2) = 2 \int_0^{\infty} e^{-v^2} \frac{v}{v+1} dv,$$

this number was calculated by means of electronic devices by D. Slavić, G. Milovanović, D. Tošić; they obtained $(1/2) \approx 0,56218655$.

3. Tabulation of $!(z)$.

On basis of the relation (1.2) and of the fact that the function $\Gamma(x)$ was calculated for many values, it suffices to calculate $!(x)$ for $0 < x \leq 1$ to calculate stepwise the value $!(x)$ for any x . G. Milovanović (University of Niš) tabulated $!(x)$ for $10^{-2} \leq x \leq 1$ for the step $h = 10^{-2}$; D. Slavić (University of Beograd) did the job for $-12 \leq x \leq 12$ and $h = 10^{-1}$.

4. Asymptotic equality of $K(x)$, $\Gamma(x)$.

The relation (1.4) for $k = 1$ implies

$$!(x) > 0 \text{ for every } x \in R[0, \infty).$$

Consequently, the function $!|R[0, \infty)$ is strictly increasing (from 0 to ∞).

4.1. THEOREM.

$$(4.1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K(x)}{\Gamma(x)} = 1, \quad \text{i.e. } K(x) \sim \Gamma(x) \quad \text{for } x \rightarrow \infty,$$

$$(4.2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K(x)}{\Gamma(x+1)} = 0.$$

Since $\frac{!(x)}{\Gamma(x)} = 1 + \frac{!(x-1)}{\Gamma(x)}$, the relation (4.1) is an immediate consequence of the relation (4.2); therefore it is sufficient to prove the relation (4.2).

Now, here is a proof of (4.2) due to D. Arandelović,

$$\begin{aligned} K(x) &= K(x - Ex + Ex) \\ &= K(x - Ex) + \sum_{i=1}^{Ex} (K(x - Ex + i) - K(x - Ex + i - 1)) \\ &= K(x - Ex) + \sum_{i=1}^{Ex} \Gamma(x - Ex + i) \\ &\leq K(1) + (Ex - 1)\Gamma(x - 1) + \Gamma(x) \\ &\leq 1 + (x - 1)\Gamma(x - 1) + \Gamma(x), \end{aligned}$$

hence

$$K(x) \leq 1 + 2\Gamma(x).$$

Therefore, for $x > 0$

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \frac{K(x)}{\Gamma(x+1)} &\leq \frac{1}{\Gamma(x+1)} + \frac{2\Gamma(x)}{\Gamma(x+1)} \quad \text{i.e.} \\ \frac{K(x)}{\Gamma(x+1)} &\leq \frac{1}{\Gamma(x+1)} + \frac{2}{x}. \end{aligned}$$

And obviously, (4.3) \Rightarrow (4.2).

4.1.1. *Remark.* My proof of (4.2) was based on the fact that the function $K(x)/\Gamma(x+1)$ is strictly decreasing in $\{3, 4, 5, \dots\}$.

Question. Is the function $K(x)/\Gamma(x+1)$ strictly decreasing in $R(2, \infty)$? (and therefore $K(x)/\Gamma(x+1) \downarrow 0$ for $x \uparrow \infty$).

4.2. Asymptotic behavior of $!(x)$ for $x \rightarrow \infty$. Since

$$!(x) \sim \Gamma(x) \quad \text{for } x \rightarrow \infty \quad (\text{Theorem 4.1}) \text{ and}$$

$$\Gamma(x) \sim \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{1/2} \left(\frac{x}{e}\right)^x \quad (\text{Stirling}),$$

we have the following

4.2.1. THEOREM. $!(x) \sim \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{1/2} \left(\frac{x}{e}\right)^x$ for $x \rightarrow \infty$.

5. Definition of the function $K(z)$ for any complex number z .

5.1. Stepwise extension of $K(z)$. So far the function $z \mapsto !(z)$ was defined for every z satisfying $\text{Re } z > 0$. Now using the difference equation $!(z+1) = !(z) + \Gamma(z+1)$ we define $K(z)$ by

$$K(z) = K(z+1) - \Gamma(z+1)$$

at first for z satisfying $\text{Re } z > -1$, then for $\text{Re } z$ such that $\text{Re } z > -2$, etc. In this way we obtain the function $K|C$ in the set C of complex numbers.

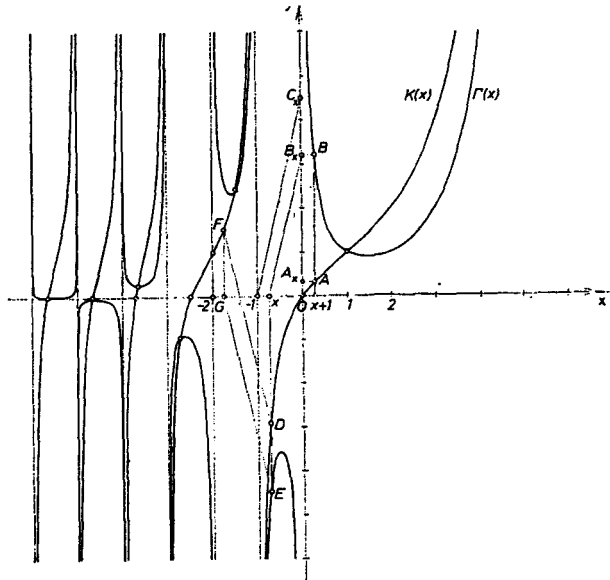
5.2. Like the right factorial function Γ the left factorial function $!(z)$ has only poles as singularity points in the set C . The pole 0, of Γ , is a regular point of K because

$$!(0) = !(1) - \Gamma(1) = 1 - 1 = 0 \quad \text{i.e.}$$

0 is a fixed point of $K(z)$.

Since $!(x) \rightarrow 0$ and $\Gamma(x) \rightarrow +\infty$ with $x \rightarrow +0$ one has $!(x) \rightarrow -\infty$ with $x \rightarrow -1+0$. This situation is plausible also from the following figure.²

²The figure was drawn by D. Slavić.



Denotation:

- $A = (x + 1, K(x + 1)),$
- $A_x = (0, K(x + 1)),$
- $B = (x + 1, \Gamma(x + 1)),$
- $B_x = (0, \Gamma(x + 1)),$
- $D = (x, K(x)),$
- $E = (x, \Gamma(x)),$
- $C_x = (0, -\Gamma(x)),$
- $G = (x - 1, 0),$
- $F = (x - 1, K(x - 1))$

In particular, for every $-1 < x < 0$ we have the corresponding value $x + 1$ between 0 and 1 on x -axis and the points $A = (x + 1, K(x + 1)), B = (x + 1, \Gamma(x + 1))$ and the segment AB of length $|\Gamma(x + 1) - K(x + 1)| = |\Gamma(x)|$. One has $\overrightarrow{A_x B_x} = K(x) \cdot \vec{e}_2$, where \vec{e}_2 is the unit vector of the y -axis.

Since $K(x + 1) < \Gamma(x + 1)$ for $x + 1 \in R(0, 1)$, we have $K(x) < 0$ for every $x \in R(-1, 0)$; moreover $K(x) > \Gamma(x)$ for $x \in R(-2, -1)$; therefore,

$$K(x) > 0 \text{ for } x \in R(-2, -1).$$

Let C_x be the point on the y -axis such that $\overrightarrow{x B_x} \parallel -\overrightarrow{1 C_x}$; then

$$\overrightarrow{Ox} : \overrightarrow{O(-1)} = \overrightarrow{O B_x} : \overrightarrow{O C_x}, \quad \text{i.e.} \quad -x = \Gamma(x + 1) : y(x),$$

where $\overrightarrow{O C_x} = y(x) \vec{e}_2$ (\vec{e}_2 being the unit vector in the y -direction). Hence

$$-y(x) = \Gamma(x + 1) / x.$$

Consequently, the formula $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$ yields $\Gamma(x) = -y(x) = -\overrightarrow{OC_x}\vec{e}_2 = \overrightarrow{O(-C_x)}\vec{e}_2$; where $-C_x$ denotes the centrally symmetrical image of C_x in respect to O . In other words, we have

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \overrightarrow{C_x}\vec{O}\vec{e}_2 = (\overrightarrow{C_xB_x} + \overrightarrow{B_xA_x} + \overrightarrow{A_xO})\vec{e}_2, \\ K(x) &= \overrightarrow{B_xA_x}\vec{e}_2, \\ \Gamma(x) &= K(x) + (\overrightarrow{C_xB_x} + \overrightarrow{A_xO})\vec{e}_2, \\ (5.1) \quad \Gamma(x) &= K(x) = (\overrightarrow{C_xB_x} + \overrightarrow{A_xO})\vec{e}_2 \quad x \in R(-1, 0). \end{aligned}$$

Each of the summands in (5.1) being < 0 , we conclude that, indeed, in $R(-1, 0)$, $\Gamma(x) < K(x)$ and that

$$(5.2) \quad K(x) - \Gamma(x) = OA_x + B_xC_x > 0 \quad \text{for } -1 < x < 0.$$

But

$$(5.2)_1 = K(x-1);$$

therefore

$$(5.3) \quad K(x-1) = OA_x + B_xC_x, \quad \forall -1 < x < 0.$$

Now,

$$\begin{aligned} (5.4) \quad B_xC_x &= \Gamma(x) - \Gamma(x+1) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} - \Gamma(x+1) \\ &= \Gamma(x+1)(-x^{-1} - 1) \quad \text{for } -1 < x < 0. \end{aligned}$$

If we let $x \downarrow -1$, then $OA_x \downarrow 0$ and, by (5.3), (5.4) we get

$$(5.5) \quad K(-2) = \lim_{x \downarrow -1} K(x-1) = \lim_{x \downarrow -1} \Gamma(x+1)(-x^{-1} - 1).$$

Now, according to D. Slavić one has $K(-2) = 1$; therefore the formula (5.5) yields the following formula

$$(5.6) \quad \lim_{x \rightarrow -1} [\Gamma(x+1)(-x^{-1} - 1)] = 1, \quad \text{i.e.}$$

$$(5.7) \quad \lim_{x \downarrow -1} (x^{-1} + 1)\Gamma(x+1) = -1.$$

Probably, the relation (5.7) is not new.

Now, a very simple way to prove (5.6) is the following one due to D. Arandelović. Using the formula

$$\Gamma(x+1) = \frac{\Gamma(x+2)}{x+1}$$

one has

$$(5.6)_1 = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\Gamma(x+2)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x} = - \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\Gamma(x+2)}{x} =$$

(the function Γ being continuous in $x = 1$)

$$= - \frac{\Gamma(1)}{-1} = 1 = (5.6)_2.$$

On the other hand, the relations (5.6), (5.5) imply $K(-2) = 1$.

By a similar argument one has

$$(5.8) \quad \lim_{x \rightarrow -a} (a^{-1} + x^{-1})\Gamma(a+x) = -a^{-2}, \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

because

$$\begin{aligned} (5.8)_1 &= \lim_{x \rightarrow -a} \frac{a^{-1} + x^{-1}}{a+x} \Gamma(a+x+1) \\ &= \lim_{x \rightarrow -a} (ax)^{-1} \Gamma(1) = -(-a)^{-2} = -a^{-2}. \end{aligned}$$

6. Poles of the function $K(z)$.

6.1. We have

$$(6.1) \quad !(z) =!(z+1) - \Gamma(z+1).$$

For $z = 0$, the relation (6.1) yields

$$!(0) =!(1) - \Gamma(1) = 0.$$

6.2. For $z = -1$ the same relation (6.1) yields (put $z = -1$)

$$(6.2) \quad !(-1) =!(0) - \Gamma(0) = -\Gamma(0).$$

6.3. But, one knows that $\Gamma|C$ is a meromorphic function with unique poles $0, -1, -2, \dots$ and the corresponding residua

$$(6.3) \quad \text{res } \Gamma(-n) = (-1)^n/n!, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Consequently, the relations (6.2), (6.3) give

$$(6.4) \quad \text{res } !(-1) = -\text{res } \Gamma(0) = -1.$$

Analogously,

$$\begin{aligned} !(-2) &= !(-1) - \Gamma(-1), \\ \text{res } !(-2) &= \text{res } !(-1) - \text{res } \Gamma(-1) = -1 - \frac{(-1)^1}{1!} = 0, \\ \text{res } !(-3) &= \text{res } !(-2) - \text{res } \Gamma(-2) = 0 - (-1)^2/2! = -1/2, \\ \text{res } !(-4) &= \text{res } !(-3) - \text{res } \Gamma(-3) = -\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}. \end{aligned}$$

By induction argument one infers that

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \text{res } K(-n) &= -1/2! + 1/3! - + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \quad (n = 2, 3, 4, \dots). \end{aligned}$$

Consequently

$$(6.6) \quad \text{res } !(-n) < 0 \quad \text{for every } n \in \{1, 3, 4, 5, \dots\} \quad \text{and}$$

$$(6.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{res } K(-n)) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = -e^{-1}.$$

Therefore we have the following

6.4 THEOREM. *The set p_K of poles of $K|C$ is $\{-1, -3, -4, -5, \dots\} = p_\Gamma \setminus \{0, -2\}$. Every pole of K is simple. One has formulae (6.4), (6.5), (6.6), (6.7).*

6.5. Remark. Note that neither 0 nor -2 is a pole for K ; one has $K(0) = 0$, $K(-2) = 1$.

6.6. The asymptotes of the curve $y = K(x)$ ($x \in R$) are $x = -1$ and $x = -n$ for $n \in \{3, 4, \dots\}$. For every such $n \in \{3, 4, \dots\}$ the function $K|R(-n+1, -n)$ is strongly increasing from $-\infty$ to $+\infty$ having a single simple zero z_{-n} .

7. Zeros of the function $K(z)$.

7.1. Contrary to $\Gamma(z)$ which has no zeros the function $K(z)$ has an infinite strictly decreasing sequence $z_0, z_{-2}, z_{-3}, \dots$ of zeros; one has

$$(7.1) \quad z_0 = 0, \quad z_{-2} \in R(-3, -2), \quad z_{-k} \in R(-k-1, -k) \quad \text{for } 1 < k \in N.$$

In particular,

$$(7.2) \quad \operatorname{Re} z \geq 1 \quad \Rightarrow \quad K(z) \neq 0.$$

7.2. It is an interesting problem to determine numerically the numbers z_{-n} satisfying

$$(7.3) \quad K(z_{-n}) = 0, \quad -(n+1) < z_{-n} \leq -n, \quad n \in \{2, 3, 4, \dots\}.$$

7.3. Problem. Determine $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_{-n} + n + 1)$.

7.4. Let us prove the implication (7.2). The condition $!z = 0$ means that

$$(7.4) \quad \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^z - 1}{t-1} dt = 0.$$

Put $z = x + iy$; then (7.4) yields

$$(7.5) \quad \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^x (\cos(y \ln t) + i \sin(y \ln t)) - 1}{t-1} dt = 0.$$

Therefore the coefficient of i in (7.5) should vanish:

$$(7.6) \quad \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^x \sin(y \ln t)}{t-1} dt = 0.$$

Now for $u > 0$ let

$$F(u) = \int_u^{\infty} e^{-t} \frac{t^x \sin(y \ln t)}{t-1} dt.$$

If (7.6) holds, then $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = 0$. Consequently we would obtain, for k an integer,

$$(7.7) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{e^{(2k+\frac{1}{4})\frac{\pi}{y}}}^{e^{(2k+\frac{3}{4})\frac{\pi}{y}}} e^{-t} \frac{t^x \sin(y \ln t)}{t-1} dt \\ = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(F \left(e^{(2k+\frac{3}{4})\frac{\pi}{y}} \right) - F \left(e^{(2k+\frac{1}{4})\frac{\pi}{y}} \right) \right) = 0.$$

Suppose now $x \geq 1$ and $y > 0$ (the case $y < 0$ is treated analogously). Then

$$\int_{e^{(2k+\frac{1}{4})\frac{\pi}{y}}}^{e^{(2k+\frac{3}{4})\frac{\pi}{y}}} e^{-t} \frac{t^x \sin(y \ln t)}{t-1} dt \\ \geq \left(e^{(2k+\frac{3}{4})\frac{\pi}{y}} - e^{(2k+\frac{1}{4})\frac{\pi}{y}} \right) e^{-(2k+\frac{3}{4})\frac{\pi}{y}} \cdot \frac{e^{(2k+\frac{1}{4})\frac{\pi x}{y}}}{e^{(2k+\frac{3}{4})\frac{\pi}{y}} - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$$

as $k \rightarrow +\infty$, which contradicts (7.7) and therefore proves (7.2).

8. A sequence of algebraic polynomials connected with $K(z)$.
We have the functional equations

$$!(z) - !(z-1) = \Gamma(z), \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Therefore

$$!(z) - !(z-2) = (!(z) - !(z-1)) + (!(z-1) - !(z-2)) \\ = \Gamma(z) + \Gamma(z-1) = (z-1)\Gamma(z-1) + \Gamma(z-1) = z\Gamma(z-1), \quad \text{i.e.}$$

$!(z) - !(z-2) = z\Gamma(z-1) = p_1(z)\Gamma(z-1)$ where $p_1(z) = z$. Analogously

$$!(z) - !(z-3) = [z(z-2) + 1]\Gamma(z-2) = p_2(z)\Gamma(z-2), \quad p_2 := z(z-2) + 1$$

and we have the following

8.1. THEOREM. For every $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ and every $z \in \mathbb{C} \setminus p_k$:

$$K(z) - K(z - (n + 1)) = p_n(z)\Gamma(z - n)$$

where $p_0(z) \equiv 1, p_n(z) = 1 + (z - n)p_{n-1}(z)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

More explicitly,

$$p_n(z) = 1 + (z - n) + (z - n)(z - n + 1) + (z - n)(z - n + 1)(z - n + 2) + \dots + (z - n)(z - n + 1) \dots (z - 3)(z - 2)z.$$

All these polynomials are normalized; the degree of $p_n(z)$ is n .

In particular,

$$\begin{aligned} p_0(0) &= 1, & p_1(0) &= 0, & p_2(0) &= 1, \\ p_n(0) &= 1 - np_{n-1}(0) \\ p_{2k+1}(0) &< 0, & p_{2k}(0) &> 0 & (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Problem. Is there some regularity in the distribution of zeros of the polynomials p_n ?

9. Left factorial function $K(z)$ as a limit.

If in

$$(9.1) \quad K(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x^z - 1}{x - 1} dx, \quad (z \geq 0)$$

we put $x = \ln t^{-1}$, then $dx = -t^{-1}dt$, $e^{-x} = t$ and

$$(9.2) \quad K(z) = \int_0^1 \frac{(\ln t^{-1})^z - 1}{\ln t^{-1} - 1} dt, \quad z > 0.$$

It is interesting to compare the formula (9.2) to the well known Gauss' formula

$$(9.3) \quad \operatorname{Re} z > 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1 - t^{z-1}}{1 - t} dt = \psi(t) + C, \quad C = 057721566490 \dots$$

being the Euler's constant and

$$\psi(z) := \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z);$$

one is aware that the representation (9.2) of $k(z)$ is quite complicated. Now,

$$(9.4) \quad \ln t^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - t^{1/n}).$$

Therefore the formula (9.2) yields

$$(9.5) \quad K(z) = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z (1 - T^{1/n})^z - 1}{n(1 - t^{1/n}) - 1} dt.$$

Put $t^{1/n} = y$; one gets after some transformations the required representation

$$(9.6) \quad K(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \int_0^1 \frac{(1-y)^z - n^{-z}}{1-y-n^{-1}} y^{n-1} dy.$$

For large $n \in \mathbb{N}$ the fraction under the integral sign in (9.6) differs very little from the fraction $\frac{(1-y)^z}{1-y}$; therefore the integrand in (9.6) is practically $= (1-y)^{z-1} y^{n-1}$.

The formula (9.6) concerning $K(z)$ corresponds to the Euler-Gauss' representation

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \int_0^1 (1-y)^{z-1} y^{n-1} dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! \cdot n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n+1)}$$

of $\Gamma(z)$.

10. Zeros of the function $K(x) - \Gamma(x)$.

10.1. Graphs. Let g_K, g_Γ be the real graph of the functions $K|R$ and $\Gamma|R$ respectively. Each of the sets has a ω -sequence of connected components

$$\dots, g_{K_2}, g_{K_1}, g_{K_0} \quad \dots, g_{\Gamma_2}, g_{\Gamma_1}, g_{\Gamma_0}$$

The projections on x -axis of these components are (read from right to left) $\dots, R(-n-1, -n), \dots, R(-4, -3), R(-3, -1), R(-1, \infty) \dots, R(-n-1, -n), \dots, R(-1, 0), R(0, \infty)$ and we have

$$\begin{aligned} \text{pr}_1(gK_0) &= \text{pr}_1(g\Gamma_0) \cup \text{pr}_1(g\Gamma_1) \cup \{0\} \\ \text{pr}_1(gK_1) &= \text{pr}_1(g\Gamma_2) \cup \text{pr}_1(g\Gamma_1) \cup \{-2\} \\ \text{pr}_1(gK_n) &= \text{pr}_1(g\Gamma_{n+2}) \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \end{aligned}$$

One has the following

10.2. THEOREM. $K(x) = \Gamma(x) \wedge x > -1 \Rightarrow x = 1$; in particular, there is no zero of $K - \Gamma$ in $R(-1, 0)$. For every $n \in \mathbb{N}$ there is a single zero, say Z_{-n} , of $K - \Gamma$, such that $-n - 1 < Z_{-n} < -n$. One has $\text{sgn}(Z_{-n} - z_{-n}) = (-1)^{n+1}$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} z_{-n}$ (cf. 7.2).

BIBLIOGRAPHY

- [1] E. Artin, *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, Hamburger Mathematische Einzelschriften Leipzig, 11 (1931), 35.
- [2] J. Dufresnoy, Ch. Pisot, *Sur la relation fonctionnelle $f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$* , Bull. de la Soc. Math. Belgique 15 (1965), 259-270.
- [3] Г. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления I*, Москва, 1947, 690; II Москва, 1948, p. 860.
- [4] E. Janke, F. Emde, F. Lösch, *Tafeln höherer Funktionen*, Teubner Stuttgart, 1960 (r. Moskva 1968, 344).
- [5] W. Krull, *Bemerkungen zur Differenzgleichung $g(x+1) - g(x) = \varphi(x)$* , Math. Nachrichten 1 (1948), 365-376.
- [6] Đ. Kurepa, *On the left factorial function*, Math. Balkanica 1, (1971), 147-153.
- [7] M. Lavrentiev, B. Chabat, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, Ed. Mir, Moskva, 1972, p. 728.
- [8] N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig, 1906, X+326.
- [9] D. Slavić, *On the left factorial function of the complex argument*, Math. Balkanica 3 (1973), 427-477.
- [10] J. Stanković, *Über einige Relationen zwischen Fakultäten und den linken Fakultäten*, Math. Balkanica 3 (1973), 488-495.

11 PROBLEMS¹

1. Problem. For every $n \in N$ let $P(n)$ denote the set of all the numbers x such that $\{x - 2n, x, x + 2n\} \subset P$ (P denotes the set of all prime positive integers). **1.1.** In particular, $P(1) \supset \{5\}$. Is $P(1) = \{5\}$ **1.2.** Is there some $n \in N$ such that $P(n) = \emptyset$?

2. Problem. For every prime $p > 2$ let p^- , p^+ denote respectively the greatest prime $< p$ and the least prime $> p$. For every $2 < p \in P$ let $s_n := p^2 - p^- - p^+$, if $p = p_n = n^{\text{th}}$ member in (P, \leq) ; does the sequence $(s_n)_n$ contain infinitely many a) positive, b) negative members?

3. Problem. Let $\pi_n := p^2 - p^- - p^+$ for $p = p_n$; does the sequence $(\pi_n)_n$ contain infinitely many members that are: a) > 0 , b) < 0 , c) $= 0$ respectively?

4. Problem. **4.1.** For any $r \in \{0, 1, 2, \dots\}$ determine the set $A(r) := \{n | n \in N, r < n, K(n) \equiv r \pmod{n}\}$, where $K(r) := 0! + 1! + 2! + \dots + (n-1)!$. For no r the set $A(r)$ is known. In particular, for no r one knows whether $A(r)$ is finite.

Is $A(3) = \emptyset$? What about the set $B := \{r | r \in \{0, 1, 2, \dots\}, A(r) = \emptyset\}$?

4.2. One has to examine the frequency $\nu(r)$ of every term r in the sequence r_1, r_2, \dots where for every $n \in N$ we denote by r_n the least integer ≥ 0 such that $K(n) \equiv r_n \pmod{n}$ (cf. 1.3.2 in Đ. Kurepa, *On the left factorial function*, Math. Balkanica 1 (1971), 147-153); also. Vuletić Math. Balkanica 4 (1974), 675-708.

5. Problem 5.1. Given $(m, n) \in N^2 := \{1, 2, 3, \dots\}^2$ determine the set $\sin(m, n)$ of all $(m, n, x_0, x_1, \dots, x_n) \in N^{3+n}$ such that $\sin^m \frac{\pi}{x_0} = \sin^m \frac{\pi}{x_1} + \sin^m \frac{\pi}{x_2} + \dots + \sin^m \frac{\pi}{x_n}$.

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Math. Balkanica 4 (1974), 383-386 (Supplement)

¹Presented 28.06.1974 at the *Problem session of the 5th Balkan Mathematical Congress* (Beograd, 24-30.06.1974).

5.2. In particular, $(2, 2, 5, 6, 10) \in \sin(2, 2)$; is true that $\sin(2, 2) = \{(2, 2, 5, 6, 10)\}$?

6. **Problem.** Given $(m, n) \in N^2$; determine the set $\cos(m, n)$ of all $(m, n, x_0, x_1, \dots, x_n) \in N^{3+n}$ such that $\cos^m \frac{\pi}{x_0} = \cos^m \frac{\pi}{x_1} + \cos^m \frac{\pi}{x_2} + \dots + \cos^m \frac{\pi}{x_n}$.

7. **Problem. 7.1.** For $n \in C$ let $+^n$ denote the function $+^n(x, y) := x^n + y^n$. Is true that $(\sin \frac{\pi}{N}, +^n)$ is an antigroupoid for every $2 < n \in N$? (of course, $\sin \frac{\pi}{N} := \{\sin \frac{\pi}{x} \mid x \in N\}$).²

7.2. In particular, is $(\sin \frac{\pi}{N}, +^1)$ an antigroupoid?

8. **Problem.** Is $(\cos \frac{\pi}{N}, +^n)$ an antigroupoid for any $n \in \{\pm 3, \pm 4, \dots\}$?

9. **Problem.** Let $n \in \{3, 4, 5, \dots\}$; is there a set $E_n \subset N$ of cardinality n such that $\{x, y\} \in \binom{E_n}{2} \Rightarrow x^{-1} + y^{-1} \in N^{-1} := \{1^{-1}, 2^{-1}, 3^{-1}, \dots\}$? (For a set S and a cardinal number a we denote by $\binom{S}{a}$ the set of all the subsets X of S of cardinality a each; more generally, for any ordered pair (A, B) of sets we denote by $\binom{A}{B}$ the system of all the subsets X of A each equipotent with B).

10. **Problem.** Find some statements each equivalent with the following one: (p) For every transfinite set S one has $k(S!) = 2^{kS}$. (kS = the cardinality of X ; $S!$ is the set of all permutations of S ; i.e. $f \in S! \Leftrightarrow f$ is a one-to-one mapping of S onto S).

We proved that the choice axiom implies (p) (in my papers; 1. *O faktorijelama konačnih i beskonačnih brojeva*, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjetn. **296** (1953), 105–122; 2. *Über die Factoriellen der endlichen und unendlichen Zahlen*, Bull. Internat. Acad. Sci. Yougoslav., Zagreb (Cl. Math.) **4** (1954), 51–64; three such proofs were given).

11. **Problem.** Let $n \in N$; for a polyhedron $P \subset R^n$ let $[P]$ denote the set consisting of the empty set, of all the vertices of P , edges of P , faces of P , ... and of P itself. Let $d_n := \sup_p \dim_0([P], \supset)$, P running through the family of all Euler convex polyhedrons $\subset R^n$.³

For $n = 3$ the problem was published as the problem 16.8.1 p. 205 in the book [2] (s. also [4, p. 35 problème 3.2]) and studied by V. Sedmak

²For a set S and $f: S^2 \rightarrow S$ we say that (S, f) is *antigroupoid* iff $(x, y) \in S^2 \Rightarrow f(x, y) \notin S$.

³For an ordered set $(S; \leq)$ we denote by $\dim_0 S$ the smallest cardinal number m such that the order (S, \leq) is the superposition of m total orderings of the set S in the sense that there is a family F of total orderings of S such that for any $(x, y) \in S^2$ we have $x \leq y \Leftrightarrow x \leq_i y$ for every member $S, \leq_i \in F$.

and D. Adnađević in their doctoral dissertations. For any $3 \leq n \in N$, I put the problem, as an examiner to D. Adnađević during his doctorate oral examination, in the year 1961. Sedmak [3], [4] proved that $d_2 = 3$ and that $\dim_0[P] = 4$ for various elementary polyedra, D. Adnađević [1, Teor. 5.7.4] found $4 \leq d_3 \leq 7$.

REFERENCES

- [1] D. Adnađević, *Dimenzije nekih razvrstanih skupova sa primenama*, Doct. dissertation, Zagreb, 1961. IV + 137, also Bull. Soc. Math. Phys. Serbia 13 (1961) 49–106, 225–262.
- [2] Đ. Kurepa, *Teorija skupova*, Zagreb, 1951, XIX + 443.
- [3] V. Sedmak, *Dimenzija djelimično uređenih skupova pridruženih poligonima i poliedrima*, Glasnik. Mat. Fiz. Astr. Zagreb 3 (1952) 196–181; *Dimensions des ensembles partiellement ordonnés associés aux polygones et polyèdres*, Ibidem 181–182.
- [4] V. Sedmak, *Quelques applications des ensembles ordonnés*, Bull. Soc. Math. Phys. Serbia 6 (1954) 12–39.

RIGHT AND LEFT FACTORIALS

0. Some denotations.

0.1. kX denotes the *cardinality* of X .

0.2. For any ordinal (cardinal) number n let I_n denote the set of all ordinal (cardinal) numbers $< n$.

0.3. For any set S let $S!$ denote the set of all permutations of S ; i.e. $f \in S! \Leftrightarrow f$ is one-to-one mapping of S onto S .

0.4. Set $\binom{A}{B}$. For any ordered pair (A, B) of sets let $\binom{A}{B} := \{X : X \subset A \wedge kX = kB\}$; in particular, for any set A and any (cardinal or ordinal) number c we denote by $\binom{A}{c}$ the system of all subsets of A , each of the cardinality c . E.g. $\binom{A}{A} = \{A\}$ for any finite A .

0.5. For any ordered set (S, \leq) let

$$O(S, \leq) \text{ [resp. } \bar{O}(S, \leq)]$$

denote the set of all *maximal* chains [antichains] of (S, \leq) .

0.6. $K_c(S, \leq)$ [resp. $K_{\bar{c}}(S, \leq)$] denotes the first cardinal number that is not representable as the cardinal number of a chain [antichain] of (S, \leq) .

0.7. Let $k_i(S, \leq) = K_i(S, \leq)^-$ for $i \in \{c, \bar{c}\}$.

0.8. x^- denotes the immediate predecessor of x ; if x has no immediate predecessor, then $x^- := x$.

0.9. Let $o(S, \leq)$ resp. $\bar{o}(S, \leq)$ be the set of all chains [antichains] of (S, \leq) .

Some results and problems are given, in particular from the point of view of a *comparative* study of the right factorials $n!$ ($= \Gamma(n+1)$) and left factorials $!n$ ($= K(n) = 0! + 1! + 2! + \dots + (n-1)!$).

BIBLIOGRAPHICAL NOTE. Boll. Unione Math. Ital. (4) 9 Suppl. fasc. 2 (1974), 171-189.

Conferenza tenuta alla Scuola Normale Superiore di Pisa il 17 novembre 1972.

1. Right factorial

The right factorial $n! = \Gamma(n + 1)$ is defined by

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = \prod_{i=1}^n i \quad (n \in N)$$

$$0! = 1$$

$(z - 1)! = \Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp[-t]t^{z-1}dt$ for any complex number z satisfying $\operatorname{Re} z > 0$. Since for natural number z

$$z! = z(z - 1)!,$$

one defines $z!$ stepwise by the recursion

$$(z - 1)! = \frac{1}{z}z!$$

for every complex number $z \notin \{0, -1, -2, \dots\}$.

Euler's function $\Gamma(x)$ was very much studied and has found many applications.

2. Some interpretations of the function $n! | N$.

2.1. *Permutations and $n!$.* For any set S let $S!$ be the set of all permutations of S ; in other words $f \in S! \Leftrightarrow f$ is a one-to-one mapping of S onto itself.

2.1.1. THEOREM. (First interpretation of $n!$). *For every finite set S $k(S!) = (kS)!$; in particular, for every $n \in N$ one has $n! = k(I_n!)$.*

2.2. *Second interpretation of $n!$.* This interpretation is expressed by the following theorem.

2.2.1. THEOREM. *For every natural number n the factorial $n!$ equals the number of the set of all maximal chains in the ordered set (PI_n, \subset) :*

$$n! = kO(PI_n, \subset).$$

3. The third interpretation of $n!$

This one is connected with a kind of trees; therefore let us define the following trees T_n .

3.1. *Tree T_n .* For every $n \in N$ let T_n be the tree formed of the empty sequence \emptyset and of the all sequences

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_j) \quad \text{where } 1 \leq i \leq j \leq n \text{ and } a_i \in \{0, 1, \dots, i - 1\}.$$

We define also T_0 to be the set whose single element is the empty sequence.

The tree T_n is ordered by the relation \dashv where $a \dashv a'$ means that the sequence a is an *initial part* of the sequence a' ; in particular, we consider $\emptyset \dashv a$ for every $a \in T_n$.

One proves the readily following

3.2 THEOREM. *For every $n \in N$ the set (T_n, \dashv) is a tree. The number $n!$ indicates the cardinality of the set $O(T_n, \dashv)$ of all maximal chains of (T_n, \dashv) :*

$$(2.5) \quad n! = kO(T_n, \dashv).$$

The same number $n!$ is the cardinal number of the last row of the ordered set (T_n, \dashv) .

4. Left factorial K_n or $!n$ of n .

4.1. *Definition.* For every $n \in N$ we define the *left factorial K_n or $!n$* by this relation:

$$K_n = 0! + 1! + \dots + (n - 1)! \quad (n \in N).$$

In this way, for every $n \in N$ we have the numbers

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad !n = K_n.$$

The number $!n$ has a concrete interpretation:

4.2. *For every $n \in N$ the cardinal number of the tree T_{n-1} is exactly $!n$:*

$$!n = kT_{n-1}.$$

4.3. *Function M_n .* Let us define $M_n := M(!n, n!)$ (M is read *G. C. D.* of). One has the following table of values $n, n!, !n, M_n$:

n	$n!$	$!n$	M_n	n
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	6	4	2	3
4	24	10	2	4
5	120	34	2	5
6	720	154	2	6
7	5040	874	2	7
8	40320	5914	2	8
9	362880	46234	2	9
10	3628800	409114	2	10
11	39916800	4037914	2	11
12	479001600	43954714	2	12
13	6227020800	522956314	2	13
14	87178291200	6749977114	2	14
15	1307674368000	93928268314	2	15
16	20922789888000	1401602636314	2	16
17	355687428096000	22324392524314	2	17
18	6402373705728000	378011820620314	2	18
19	121645100408832000	6780385526348314	2	19
20	2432902008176640000	128425485935180314	2	20

We are aware that the numbers $!n$, $n!$ rapidly increase; on the contrary the numbers M_n seem to be the constant 2 for every integer $n > 1$.

Therefore it was natural to conjecture the following.

4.4. *M-hypothesis*: $1 < n \in N \Rightarrow M_n = 2$ (cf. Kurepa [23] 149, 2.4). The same hypothesis is checked by Slavić for $1 < n \leq 1000$ by numerical calculations.

We proved also the following.

4.5. THEOREM. *The M-hypothesis is equivalent to each of the following statements H_2 , H_3 :*

4.5.1. H_2 (factorial incongruence): $2 < n \in N \Rightarrow !n \not\equiv 0 \pmod{n}$; in particular, $!p \not\equiv 0 \pmod{p}$ for every prime number $p > 2$.

4.5.2. H_3 (divisor's hypothesis). *If $1 < n \in N$, then every prime divisor of $!n$ is 2 or $> n$.*

As a consequence of H_1 (or H_2 or H_3) we have the following

4.5.3. STATEMENT. *If $1 < n \in N$, then Kn is square free, i.e. there is no integer $m > 1$ such that $!n$ should be divisible by m^2 .*

In other words: $1 < n \in N \Rightarrow \mu(n) \neq 0$, μ denoting the function of Möbius. In particular, $m^2 | K(n)$ should hold for no $m, n \in N \setminus \{1\}$.

4.5.4. *Problem.* We do not know whether the statement 4.5.3 implies the hypothesis M, H_2, H_3 .

The behaviour of $!n$ stated in 4.5.3 is in a great contrast to the behaviour of $n!$ with respect to power divisor, because $n!$ contains factors of the form p^k for large k . More precisely, let us define $P_s(n)$ and state a corresponding theorem.

4.6. *Set $P_s(n)$.* For ordered pair (n, s) of natural numbers let $P_s(n)$ be the set of all $p \in P$ (P is the set of all prime numbers) satisfying $p^s | n! \wedge p^{s+1} \nmid n!$. For instance, $P_1(n)$ is the set of all primes p such that $p | n!$ and $p^2 \nmid n!$. As a consequence of the theorem of Bertrand-Čebišev one has $P_1(n) \neq \emptyset$ for every $n > 1$.

4.6.1. One can prove that for every $s \in N$ the cardinal number of $P_s(n)$ could be arbitrarily great with n i. e. that $\sup_n kP_s(n) = \infty$.

One has the following theorem contrasting for $n!$ the analogue of the hypothesis 4.5.3.

4.6.2. **THEOREM.** *If S is any finite subset of N and $n_0 \in N$, then*

$$kP_s(n) > n_0 \quad (s \in S)$$

for almost every $n \in N$ (cf. Kurepa [10, Theor. 7.3 p. 115]).

4.6.3. *Number $\theta(!n)$ of divisors of $!n$.* Probably, the number Kn has a small number of divisors.

4.6.4. *Problem.* Is $\theta(Kn) = o(n)$?

4.6.5. *Problem.* Find

$$\overline{\lim}_{n \in N} (\sigma(!n) : !n) \quad \text{and} \quad \underline{\lim}_{n \in N} \sigma(!n) : !n.$$

Is $\lim \sigma(!n) : !n = 1$? ($\sigma(m)$ denotes the sum of all divisors of m).

4.7. *Sequence L_1, L_2 . Number L .*

4.7.1. Let O_n be the number of terminating 0's in the decimal representation of $n!$. Then

$$(4.7.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \infty.$$

On the other hand, no left factorial $!n$ has 0 as terminating digit. Therefore, for every $k \in N$ the digit of $!n$ on the place k i.e. coefficient of 10^k in the decadic representation of $!n$ is almost a constant, say L_k . E.g.

$$L_1 = 4$$

$$L_2 = 1$$

$$L_3 = 3$$

...

We define

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} L_k = 0, \quad L_1 L_2 L_3 \dots$$

4.7.2. The question is to *examine the number* L , in particular whether L is irrational, and even transcendental.

4.7.3. *Sequence* \bar{L}_k . Also, one has to determine the sequence \bar{L}_k such that for $n \geq \bar{L}_k$ the k -th-digit of $!n$ equals L_k . E. g.

$$\bar{L}_1 = 5$$

$$\bar{L}_2 = 10$$

$$\bar{L}_3 = 15$$

...

4.7.4. The decimal representation of Kn has relatively very few digits 0 (no one is terminal) contrasting the situation occurring in the decimal representation of $n!$. Therefore very probably for any $n > 2$ the sum of left (right) factorials of all digits of $!n$ is $> n$.

4.8. *Sets* KN [resp. ΓN] of all Kn [resp. Γn] ($n \in N$). It is very interesting to study comparatively the functions $!n = Kn$ and $n! = \Gamma(n+1)$.

4.8.1. E. g. the set $(\Gamma N, |)$ of the numbers Γn ($n \in N$) is a chain relative to the divisibility relation $|$; on the other hand probably the numbers Kn, Km for $n, m > 2$ are pairwise indivisible and the ordered set $(KN, |)$ would have only 3 rows: $\{1\}$, $\{2\}$ and $\{K2, K4, K5, \dots\}$.

In other words, probably the following conjecture holds.

4.8.2. *Conjecture* $\{m, m\}_{\neq} \in N \setminus \{1, 2\} \Rightarrow m \nmid n \wedge n \nmid m$.

In connection with the M -hypothesis 4.4 one has the following.

4.8.3. *Problem.* Is $M(!m, !n \leq 2$ for every $m, n \in N, m \neq n$?

4.8.4. *Problem.* Determine the set $M(KN, \Gamma N)$ of all numbers

$$M(!n, n!) \text{ where } m, n \in N. \text{ Is it finite?}$$

4.8.5. Probably there is no sequence

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k, \quad k > 1$$

of natural numbers such that

$$n_1! + n_2! + \dots + n_k! \in \Gamma N \quad \text{or} \quad !n_1 + !n_2 + \dots + !n_k \in KN.$$

One could use also the following terminology.

4.8.6. $(N, +(k))_{\neq}$ is antigroupoid for every $k > 1$.

4.8.7. $(KN, +(k))_{\neq}$ is antigroupoid for every $k > 1$.

Here $+(k)$ denotes the summation of a k -sequence, i. e.

$$+(k)(x_1, x_2, \dots, x_k) := x_1 + x_2 + \dots + x_k.$$

4.8.8. *Problem.* Is $(KN \cup \Gamma N, +(k))_{\neq}$ an antigroupoid for every $k > 1$?

The answer is Yes! for $k = 2, 3$.

4.9. Definitions.

4.9.1. *Definition.* (A, f) is a groupoid [resp. antigroupoid] $\Leftrightarrow (x, y) \in A^2 \Rightarrow xfy \in A$ [resp. $\neg(xfy \in A)$], here $f \in A^{A^2}$.

4.9.2. *Definition.* For $f \in A^{(A^k)}$ one says that

$$(A, f) \text{ is a } k\text{-groupoid} \Leftrightarrow x \in A^n \Rightarrow fx \in A$$

$$(A, f) \text{ is an anti } k\text{-groupoid} \Leftrightarrow x \in A^n \Rightarrow fx \notin A.$$

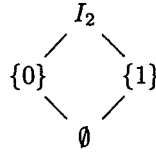
$(A, f)_{\neq}$ is a k -groupoid [resp. anti- k -groupoid] $\Leftrightarrow x \in A^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ having no equal terms then $fx \in A$ [resp. $fx \notin A$].

5. Right overturned or dual factorial. Function n_i .

5.1. *Definition* $n_i = k\overline{O}(PI_n; C)$; in other words, the *overturned factorial* of n denotes the cardinality of the set of all maximal antichains of the ordered set (PI_n, C) .

5.1.1. *Definition.* For any cardinality kS let $(kS)_i = k\overline{O}(PS, C)$ in other words, $(kS)_i$ is the cardinal number of the set of all maximal antichains in (PS, C) . E. g. $o_i = 1$ because $P\emptyset = P\{\} = \{\{\}\} = \{\emptyset\}$.

5.2.1. *Example*; $n = 2$, $I_2 = \{0, 1\}$, $PI_2 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ and the scheme of (PI_2, \subset) is



Thus $\overline{O}(PI_2, \subset) = \{\emptyset, \{\{0\}, \{1\}\}, \{\{0, 1\}\}\}$, and $2_i = 3$.

5.2.2. For $n = 3$ one has

$$\overline{O}(PI_3, \subset) = \left\{ \emptyset, \binom{S}{1}, \binom{S}{2}, \binom{S}{3}, \right. \\
 \left. \{ \{0\}, \{1, 2\} \}, \{ \{1\}, \{2, 0\} \}, \{ \{2\}, \{0, 1\} \} \right\}, 3_i = 7$$

(for notations, cf. 0.4).

5.2.3. *Number 5_i*. Let $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; then (PS, \subset) has 2^5 members and 6 rows:

$$R_0 = \{ \emptyset, \binom{S}{1}, \binom{S}{2}, \binom{S}{3}, \binom{S}{4}, \binom{S}{5} \}$$

yielding 6 particular members of \overline{O} , among which also is the critical member (the one having maximal number of elements).

For abbreviation let x' for $x \subset S$ denote the set of all immediate followers of x i. e. $x' = \{x \cup \{y\} | y \in Cx = S \setminus x\}$. Then we have following types of members of \overline{O} on indicating the members of members of \overline{O} :

- | | | |
|----|--|----------------------|
| 1) | \emptyset | $\binom{5}{0} = 1;$ |
| 2) | $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ | $\binom{5}{1} = 1;$ |
| 3) | $0, 1, 2, 34$ (3 singletons, and the complement) | $\binom{5}{3} = 10;$ |
| 4) | $0, 1, 23, 24, 34$ (2 singletons, 2-subsets of the complement) | $\binom{5}{2} = 10;$ |
| 5) | $0, 1, 234$ (2 singletons, and the complement) | $\binom{5}{2} = 10;$ |

- 6) $0, \binom{C_0}{2}$ (one singletons, 2-subsets of the complement) $\binom{5}{1} = 5;$
- 7) $0, 234, 12, 13, 14$ (one singleton, 3-subset of the complement and independent 2-subsets) $\binom{5}{1} \binom{4}{3} = 20;$
- 8) $0, 12, 341, 342$ (a singleton x , a 2-subset of C_x and the independent 3-subsets of C_x) . . . $\binom{5}{1} \binom{4}{2} = 30;$
- 9) $0, \binom{C_0}{3}$ $\binom{5}{1} \cdot 1 = 5;$
- 10) $0, C_0$ $\binom{5}{1} \cdot 1 = 5;$
- 11) $\binom{S}{2}$ 1;
- 12) $0', 1', C\{0, 1\}$ (2 nodes of R_2 and the independent 3-subset) $\binom{5}{2} = 10;$
- 13) $0', \binom{C_0}{3}$ (one node of R_2 and the row of 3-subsets of the complement) $\binom{5}{1} = 5;$
- 14) $0', C_0$ (a node of R_2 and the corresponding 4-set as complement) $\binom{5}{1} = 5;$
- 15) $\binom{S}{3}$ 1;
- 16) $01234, 04' \cup 14', 24', 34'$ (a 4-set $\subset S$ and independent 3-sets $\subset S$) $\binom{5}{4} = 5;$
- 17) $01', 0234, 1234$ (a node of R_3 and the independent 4-sets $\subset S$) $\binom{5}{2} = 10;$
- 18) $012, 0134, 0234, 1234$ (a 3-set $\subset S$ and the independent 4-sets $\subset S$) $\binom{5}{3} = 10;$
- 19) $\binom{S}{4}$ 1;

$$20) \binom{S}{5} \dots \dots \dots 1;$$

Total number 146 = 5;

Thus $5_i = 146$.

5.2.3. One has the following table:

n	1	2	3	4	5
$n!$	1	2	6	24	120
n_i	2	3	7	29	146

5.2.4. Probably $n_i > n!$ for every $n \in N$ and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n_i - n!) = \infty.$$

5.3. PROBLEM. Find an explicit expression for n_i ; in particular, we know no recursive formula for n_i : we are not able to express n_i by means of the numbers i_j for $i < n$.

5.3.1. It is interesting to observe that $n_i = n! + 1$ for $n = 1, 2, 3$.

5.3.2. PROBLEM. Are there infinitely many prime numbers of the form n_i ?

Combining 5.3.1, 5.3.2, we have the following two problems:

5.4. PROBLEM. Determine $N_i \cap P$ (the intersection of the set N_i of all numbers n_i when $n \in N$ and the set P of all prime numbers).

Are there infinitely many prime numbers of the form n_i ?

5.5. PROBLEM. Determine the set $(\Gamma N + 1) \cap N$. Are there infinitely many prime numbers of the form $\Gamma n + 1$?

5.6. Let us observe that

$$KN \cap P = \{2\}, \quad (KN + 1) \cap P = \{1, 3, 5, 11\}.$$

6. Left dual factorial ${}_i n$. The set ${}_i N$.

The transition $n! \rightarrow {}_i n$ is to be performed starting with n_i (instead to start with $n!$).

Definition. For every $n \in N$ we define ${}_i n = 0_i + 1_i + 2_i + \dots + (n-1)_i$, where $0_i := 0$.

One knows very little about the set ${}_i N := \{{}_i n | n \in N\}$.

7. Extensions of the functions $\Gamma|N, K|N$.

7.1. As was said in § 1 the function $\Gamma|N$ has an important extension $\Gamma|R$ and even $\Gamma|C$ based on the functional equation

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1).$$

7.2. An analogous procedure exists also for the left factorial $K_n = !n$ defined firstly for $n \in N$.

As a matter of fact, for every $n \in N$ we have

$$K_n = \sum_{a=1}^n \Gamma(a) = \sum_{a=1}^n \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{a=1}^n t^{a-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^n - 1}{t-1} dt,$$

i.e.

$$(7.1) \quad K_n = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^n - 1}{t-1} dt.$$

7.3. Therefore it is natural to define K_n for every real or complex number n for which the expression (7.1)₂ on the right-hand side of (7.1) exists. But the integral (7.1)₂ exists for every complex number n satisfying $\text{Re } n > 0$.

Moreover, for every $z \in C$ we have

$$\frac{t^{z+1} - 1}{t-1} = t^z + \frac{t^z - 1}{t-1},$$

where multiplication by $\int_0^{\infty} e^{-t} dt$ yields

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^{z+1} - 1}{t-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt + \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^z - 1}{t-1} dt,$$

i. e.

$$(7.2) \quad K(z+1) = \Gamma(z+1) + K(z).$$

7.4. Using the difference equation (7.2) one extends the function $K|N$ to a well defined function $K|C$ in the complex plane having many interesting properties as we shall see in another paper.

8. Extension of $n!$ and $!n$ for other numbers.

8.1. For any $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ the number $n!$ has a natural meaning; therefore it is naturally to expect that the function $n!|N$ should have also an extension on R and C . But, we are completely lacking the analogy with $n!$ at this point, because we do not know any functional equation satisfied by $n!$.

PROBLEM. *Extend on R and C the function $n!|N$ as naturally as possible.*

9. Extension of the function $!n|N$ on R and C .

We could read the section 8.1 replacing there $n!$ by $!n$.

10. Extension of the function $\Gamma|N$ for transfinite arguments.

This job was done by Đ. Kurepa in some published papers. The behaviour of the right factorial function in the transfinite is closely connected with the axiom of choice and with the general continuum hypothesis; here the nature of the function $n!$ depends on how $n!$ is defined (on extending the formula (1.1) or the formula (2.3) or (2.4) or (2.5)). In our opinion the most natural way to define $n!$ is the one using permutations.

10.1. *First way.* If for any transfinite number n one defines

$$(10.1) \quad n! = \prod_{\nu=1}^n \nu,$$

than the value $n!$ is well defined, irrespective whether n is cardinal or ordinal. Only, according to one way or the other way, the values of $n!$ shall not be the same. E. g. the product (10.1) for cardinalities n is constant for very large domains of n 's, while in the ordinal domains function (10.1) is strictly increasing.

10.2. *Second way.* If $n!$ is defined by (2.3) for finite as well as for infinite sets S , one gets the number $n!$ for every cardinal number n .

One can prove that in particular

$$(10.2) \quad x! = 2^x$$

is satisfied by every aleph.

(Cf. Kurepa [9,10] where 3 proofs of (10.2) are exhibited).

Without the axiom of choice [AC] or some equivalent proposition we are not able to extend the formula (10.2) for every transfinite cardinal x .

10.2.1. PROBLEM. *Given a transfinite cardinal number a , does*

$$(10.3) \quad a^2 = a \Rightarrow a! = 2^a? \quad (\text{defining } a! := k(S!) \text{ with } kS = a).$$

10.2.2. PROBLEM. *Does the identity $a! = 2^a$ for transfinite cardinals imply AC?*

10.3. *Third approach. If one defines $n!$ by the formula (2.4) i. e. by*

$$(10.4) \quad n! := kO(Pn, \subset)$$

where obviously Pn denotes the set of all subsets of any set of cardinality n , then even the existence of n is problematic.

As a matter of fact let us quote the following lines of my paper [12, § 10 pp. 229/30] using the notion of congruency of orderings in the sense that orderings (S, \leq) , (S, \leq_1) of a same set are congruent or strongly similar, symbolically

$$(S, \leq) \equiv (S, \leq_1),$$

if and only if the identity mapping of S is an isomorphism between these orderings (v. Kurepa [12, Def. 9.2 p. 229]); the motivation of this notion was the idea "to have the analogue of the elementary notion of the permutation as an ordering" (Ibidem. p. 229^{1,2}).

10.4. *Maximal chains in partitive sets. Total orderings. Choice axiom.* As a synthesis of investigations of many authors (chronologically: Cantor, Du Bois-Reymond,¹ Bernstein, Hessenberg, Hartogs, Janiszewski, Fraenkel, Kuratowski, Denjoy) we have the following theorem showing of what importance are the investigations of *maximality* already in the case of very special ordered sets.

10.4.1. THEOREM. *Let M be any set and, respectively, $O_o[M]$, $O_c[M]$ the system of all orderings and of all total orderings of M respectively, the equality relation in $O_i[M]$ ($i = o, c$) being that of the congruency (strong similarity); by definition one puts $O_i[kM] = kO_i[M]$ for $i = c, o$.*

¹Thus the problem of *infinitar pantachies* of Du Bois-Reymond. ([1], p. 69) is connected to the development of the notion of general ordered sets and its maximal chains (cf. Hausdorff [2, pp. 105-159]).

- [4] *Sur les relations d'ordre*, Acad. Sci. Zagreb. Rad **201** (1938), 187–219, resp. Bull. Internat., **201** (1939), 66–76.
- [5] *Ensembles linéaires et une classe de tableaux ramifiés. (Tableaux ramifiés de M. Aron-szajn)*, Publ. Math. Univ. Belgrade **6**, (1937), 129–160.
- [6] *Teorija skupova*, Zagreb, 1951, 12 + 444.
- [7] *Sur la relation d'inclusion et l'axiome de choix de Zermelo*, Bull. Soc. Math. France **80** (1952), 225–232.
- [8] *Über das Auswahlaxiom*, Math. Ann. **126** (1953), 381–384.
- [9] *O faktorijelima konačnih i beskonačnih brojeva*, Rad. Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. **296** (1953), 105–122.
- [10] *Über die Faktoriellen der endlichen und unendlichen Zahlen*, Bull. Internat. Acad. Sci. Yugoslavie, Zagreb, classe math. **4** (1954), 51–64.
- [11] *Über die Binominalkoeffizienten*, Ibidem, (1953), 33–44; Vesnik Društva mat. fiz. N. R. Srbije **5** (1953) 3–11, 15–21.
- [12] *Partitive sets and ordered chains*, Rad, Zagreb **302** (1957), resp. 6, Sekcija II, 197–235.
- [13] *On a new reciprocity, distribution and duality law*, Pacific J. Math. **7** (1957), 1125–1143.
- [14] *General continuum hypothesis and ramifications*, Fund. Math. **37** (1959), 29–33.
- [15] *Sull'ipotesi del continuo*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino **18** (1959), 11–20.
- [16] *On the cardinal number of ordered sets and of symmetrical structures in dependence on the cardinal numbers of its chains and antichains*, Glasnik Math. Ser. III **14** (1959), 183–203.
- [17] *Sui quattro numeri associati con insiemi ordinati oppure regolati*, Un. Mat. Ital., VI Congresso, Napoli, 1959, 48.
- [18] *Factorials of cardinal numbers*, Glasnik Mat. Fiz. Astr., Zagreb **19** (1965), 7–21.
- [19] *On order-isomorphism of trees*, Glasnik Mat. Fiz. Astr., Zagreb **20** (1965), 195–204.
- [20] *On several continuum hypothesis*, Proc. International Summer School, Varenna, 1968, 57–64 (Book: *Aspects of mathematical logic*, Roma, 1969, 1–285).
- [21] *Некоторые функции на структурах*, Proc. International Symp. on Topology and its Applications, Herceg Novi, 1968, Bgd 1969, 246–248.
- [22] *O četiri funkcije*, 5. Kongres matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije, Ohrid, 1970.
- [23] *On the function $!n$* , Mathematica Balkanica, Beograd **1** (1971), 147–153.
- [24] *On the function $!n = \sum_k k!$ ($k < n$)*, Balkanski kongres matematičara, Istanbul, 1971.
- [25] *Factorials and the general continuum hypothesis*, 3. Internat. Topological Symposium Prag, 1971, 281–282.
- A. Mostowski, *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, Fund. Math. **32** (1939), 201–252.
- M. Novotny, *Sur la représentation des ensembles ordonnés*, Fund. Math. **39** (1953), 97–102.
- S. Popadić, *On the number of antichains of finite power sets*, Mat. Vesnik **7** (22) (1970), 199–203.
- W. Sierpinski,
- [1] *Sur un problème concernant les sous-ensembles croissants du continu*, Fund. Math. **4** (1922), 109–112.

-
- [2] *Sur les familles croissantes de sous-ensembles d'un ensemble dénombrable*, Enseignement Math. **30** (1931), 240–242.
- [3] *Hypothèse du continu*, Warszawa, 1934, 6 +192.
- [4] *Exemple effectif d'une famille de $2^{k\omega_1}$ ensembles linéaires croissants*, Rend. Acad. Sci. Fis. Mat. Napoli, (4) **10** (1939-40), Fund. Math. **35** (1948), 213–216.
- [5] *L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix*, Fund. Math. **34** (1947), 1–5.
- [6] *Sur une propriété des ensembles ordonnés*, Fund. Math. **36** (1940), 56–67.
- A. Tarski, *Sur les classes d'ensembles par rapport à certaines opérations élémentaires*, Fund. Math. **16** (1930), 181–304.
- E. Zermelo, *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann*, Math. Ann. **59** (1904), 514–516.

Ova knjiga je štampana uz finansijsku podršku
Ministarstva za nauku i tehnologiju Srbije i
Saveznog ministarstva za razvoj, nauku i životnu sredinu.

Na osnovu mišljenja Ministarstva za nauku i tehnologiju Srbije
(broj 451-03-2610/96-02 od 19. novembra 1996. godine)
ova publikacija je oslobođena opšteg poreza na promet.

