

Dragoš Cvetković

**SPEKTRALNA  
TEORIJA GRAFOVA  
I KOMBINATORNA  
TEORIJA MATRICA  
- Autoreferati -**

AKADEMSKA MISAO  
Beograd, 2012.



byad

**Dragoš M. Cvetković**

**SPEKTRALNA TEORIJA GRAFOVA**  
**I**  
**KOMBINATORNA TEORIJA MATRICA**

- Autoreferati -

AKADEMSKA MISAO  
Beograd, 2012.

Dragoš M. Cvetković

**SPEKTRALNA TEORIJA GRAFOVA  
I KOMBINATORNA TEORIJA MATRICA  
-Autoreferati-**

Recenzenti

Akademik Ivan Gutman

Prof. dr Dragan Stevanović

Izdaje i štampa

AKADEMSKA MISAO, Beograd

Tiraž

50 primeraka

ISBN 978-86-7466-445-2

**SPEKTRALNA TEORIJA GRAFOVA**  
**I**  
**KOMBINATORNA TEORIJA MATRICA**

- Autoreferati -



## SADRŽAJ

<b>Predgovor</b>	<b>VII</b>
1. Uvod . . . . .	1
2. Spisak naučnih radova . . . . .	3
3. Prikaz naučnih radova (1 - 111) . . . . .	26
4. Apstrakti naučnih radova (112 - 215) . . . . .	43
5. Tematika naučnih radova i glavni rezultati . . . . .	64
6. Spisak objavljenih knjiga . . . . .	73
7. Prikaz knjiga . . . . .	80
8. Predgovori za knjige . . . . .	88
8.1. Spectra of graphs, III edition . . . . .	89
8.2. Eigenspaces of graphs . . . . .	92
8.3. Spectral generalizations of line graphs . . . . .	95
8.4. Variations on the travelling salesman theme . . . . .	98
8.5. Kombinatorna optimizacija – Matematička teorija i algoritmi . . . . .	100
8.6. A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Application . . . . .	103
8.7. An Introduction to the Theory of Graph Spectra . . . . .	106
8.8. Teorija grafova, III izdanje . . . . .	110
8.9. Diskretne matematičke strukture . . . . .	113
8.10. Diskretna matematika . . . . .	114
8.11. Odabrana poglavlja iz diskretne matematike . . . . .	118
8.12. Kombinatorna teorija matrica . . . . .	119
8.13. Kombinatorika – klasična i moderna . . . . .	139
8.14. Kombinatorika i grafovi - Pregled i prilozi . . . . .	141
8.15. Zanimljiva matematika - Preferans . . . . .	143
8.16. Zanimljiva matematika - Šah . . . . .	145
9. Komentar o objavljenim knjigama . . . . .	147
10. Prikazi naučnih radova i knjiga . . . . .	151
11. Citiranje knjiga i naučnih radova . . . . .	162
12. Spisak stručnih radova . . . . .	169
13. Prikaz dela stručnih radova . . . . .	183

14.	Jubilarno predavanje . . . . .	187
15.	Predavanje na Elektrotehničkom fakultetu . . . . .	201
16.	Arhiva akademika Cvetkovića . . . . .	206
17.	Scientific correspondence of Professor Dragoš Cvetković . . .	211



# P R E D G O V O R

U ovoj knjizi dajem pregled sopstvenog naučnog rada sa ciljem da pomognem zainteresovanima da pronadju za njih najinteresantnije delove. Moji tekstovi u knjizi su pisani u stilu autoreferata bez eksplicitnih vrednosnih sudova. U knjigu su uključeni u manjoj meri tekstovi drugih autora koji su, naravno, drugog karaktera.

U toku četrdeset, i više, godina naučnog, stručnog i nastavničkog rada u oblasti matematike objavio sam 8 naučnih monografija, više desetina drugih stručnih knjiga, preko 200 naučnih radova i veći broj stručnih radova. Moji glavni rezultati su na polju *Spektralne teorije grafova* i *Kombinatorne teorije matrica*, što objašnjava naslov knjige. Imam izvesne rezultate i u oblasti kombinatorne optimizacije i veštačke inteligencije.

*Spektralna teorija grafova* je deo teorije grafova u kojem se grafovi proučavaju uz pomoć sopstvenih vrednosti različitih matrica koje se pridružuju grafu. Ona je nastala sredinom 20-og veka a danas predstavlja dobro razvijenu matematičku teoriju sa mnogobrojnim primenama u računarstvu, hemiji, fizici i drugim oblastima. Predaje se kao doktorski kurs u oblasti matematike, računarstva, hemije itd. na velikom broju univerziteta. Više informacija čitalac može da nađe u mom predavanju "Osvrt na genezu spektralne teorije grafova" u ovoj knjizi.

*Kombinatorna teorija matrica* je deo teorije matrica u kome se matrice proučavaju uz pomoć različitih grafova koji se pridružuju matrici. Počeci ove teorije padaju u prvu polovinu 20-og veka a razvijena je dobrim delom neformalnim procedurama za probleme linearne algebre u teoriji električnih kola i teoriji sistema. Oformljena je kao matematička teorija krajem veka. Više informacija čitalac može da nađe u predgovoru i završnom komentaru

moje knjige "Kombinatorna teorija matrica" koji su reprodukovani u ovoj knjizi.

Prezentacija materijala je slojevita; koncentrični krugovi izlaganja donose različite kombinacije detalja i opštosti. Čitalac koji se bavi matematikom ili aktivno koristi matematiku može da izabere delove koji mu najviše odgovaraju. Knjigu mogu da koriste oni koji tek počinju sa naučnim radom (počevši od studenata starijih godina studija) ali i iskusni istraživači a sve u skladu sa svojim interesom.

Prikazujući sopstveno delo želim da izrazim zahvalnost brojnim koautorima naučnih radova i knjiga bez čijeg učešća bi rezultati bili skromniji ili teže dobijeni. Posebnu zahvalnost u tom smislu dugujem kolegama Slobodanu K. Simiću, naučnom savetniku u Matematičkom institutu SANU, i Peter-u Rowlinson-u, profesoru u penziji Univerziteta u Stirling-u, Škotska, Velika Britanija.

Zahvaljujem profesorima Veri Kovačević-Vujčić i Zoranu Radosavljeviću, Tatjani Davidović, višem naučnom saradniku, i gđi Višnji Milić na njihovim tekstovima koji su ušli u ovu knjigu.

Knjigu je tehnički obradila Marija Milojević, diplomirani inženjer mašinstva, na čemu joj autor zahvaljuje.

Beograd, septembra 2012

Autor

# 1. Uvod

Pregled mog naučnog rada je dat nizom tekstova.

Glavni deo knjige sadrži spiskove, prikaz i razne komentare a) naučnih radova, b) knjiga i c) stručnih radova. U nastavku su dva predavanja koja sam održao povodom navršene sedamdesete godine života.

Struktura knjige se vidi kroz sadržaj.

Posle spiska naučnih radova sledi vlastiti prikaz<sup>1</sup> prvih 111 radova iz spiska a za preostale radove (112-215) navedeni su apstrakti. Naredni tekst obrađuje tematiku naučnih radova i prikazuje glavne rezultate ukazujući na istaknute radove. Najveći broj radova se odnosi na spektralnu teoriju grafova. Utvrđuje se da su ovi radovi zajedno sa naučnim monografijama (*Spectra of Graphs* i druge) dali značajan doprinos stvaranju i razvoju spektralne teorije grafova.

Druga celina se odnosi na moje knjige. Spisak objavljenih knjiga razvrstava knjige u naučne monografije, nestandardne udžbenike i neke druge kategorije knjiga. Posle spiska knjiga sledi kratak opis svake od njih. Sledeći obiman deo knjige reprodukuje predgovore svih važnijih knjiga pa čitalac može detaljnije da se obavesti o njihovoj sadržini.

Komentar o knjigama, koji sledi, opisuje seriju monografija o spektralnoj teoriji grafova a posebno obrađuje knjige o kombinatornoj teoriji matrica. Zasnivanje teorije matrica kombinatornim, tj. grafovskim sredstvima, smatram svojim drugim najvećim doprinosom. Karakter doprinosa je sasvim različit od onog kod spektralne teorije grafova. Dok se kod spektralne teorije grafova radilo o kreiranju i razvijanju nove matematičke teorije u slučaju kombinatorne teorije matrica jedna dobro razvijena matematička teorija se zasniva i interpretira na drugi način. Važne informacije o mom doprinosu

---

<sup>1</sup>Prikazi radova 1-86 su pisani u vreme objavljivanja tih radova.

zasnivanju kombinatorne teorije matrica se nalaze upravo u ovom delu knjige.

U sledeće dve celine (Prikazi naučnih radova i knjiga, Citiranje knjiga i naučnih radova) naučni radovi i knjige se tretiraju zajedno a napisali su ih različiti autori<sup>2</sup>. Daje se pregled prikaza radova i knjiga u referativnim i drugim časopisima a zatim delimični podaci o citiranju. Ovi tekstovi upotpunjuju moja viđenja izložena u prethodnim tekstovima.

Posle spiska i delimičnog prikaza mojih stručnih radova uključena su dva moja predavanja održana 2011. godine u kojima sam se osvrnuo na celokupan svoj rad. Na taj način zaokružujem slojeviti prikaz sopstvenog naučnog rada i dostignuća u ovoj knjizi.

Na kraju su dva teksta o mojoj stručnoj arhivi koja je delimično digitalizovana u okviru eBiblioteke Matematičkog fakulteta u Beogradu. Ovi tekstovi mogu u nekim slučajevima da doprinesu razumevanju materije izložene ranije u knjizi a na nekim mestima se pozivam na ove tekstove.

Deo materijala iz ove knjige je već objavljen u mojim prethodnim knjigama "Matematičke varijacije", "Grafovi kao inspiracija" i "Iracionalno u racionalnom", na koje će biti pozivanja i u ovoj knjizi. Ipak ova knjiga nije popularnog karaktera; u njoj je učinjen napor da se rezultati mog rada predstave zainteresovanim istraživačima.

---

<sup>2</sup>Ovi tekstovi su uz minimalne izmene preuzeti iz knjige "Grafovi kao inspiracija".

## 2. Spisak naučnih radova

Za deo radova i knjiga u spiskovima koji slede dati su i podaci o prikazu dela u referativnim časopisima. Pri tome su korišćene sledeće skraćenice za referativne časopise:

**MR** – Mathematical Reviews,

**Zbl.** – Zentralblatt für Mathematik,

**RŽ Mat.** – Referativni Žurnal - Matematika.

Po pravilu, svaki naučni rad i svaka naučna monografija se opisuju u ovim referativnim časopisima. Tekstovi na srpskom jeziku se samo izuzetno prikazuju.

1. Cvetković D., *O rešavanju nekih transcendentnih jednačina*, Matematička biblioteka br. 39, Beograd 1969, 111-123

**RŽ Mat** 1970, 10B676.

2. Cvetković D., *O sumiranju redova čiji je opšti član racionalna funkcija indeksa sumiranja*, Matematička biblioteka br. 41, Beograd 1969, 157-178.

**RŽ Mat** 1970, 12B30.

3. Cvetković D., *Bihromatičnost i spektar grafa*, Matematička biblioteka br. 41, Beograd 1969, 193-194.

**RŽ Mat** 1970, 12V364.

4. Cvetković D., *Über ein Problem von Erdős*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. **247**-No. **273**(1969), 143-147.

**MR** 40, # 5473, **Zbl.** 182, 267, **RŽ Mat** 1970, 3V299.

5. Cvetković D., *Spectrum of the graph of  $n$ -tuples*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., No. **274**-No. **301**(1969), 91-95.

**MR** 41, # 6711, **Zbl.** 212, 296, **RŽ Mat** 1970, 9V295.

6. Cvetković D., *Connectedness of the  $p$ -sum of graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. **274**-No. **301**(1969), 96-99.

MR 41, # 6710, **Zbl.** 212, 295, **RŽ Mat** 1970, 6V371.

7. Cvetković D., *Some remarks on the problem of  $n$  queens*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., No. **274**-No. **301**(1969), 100-102.

MR 41, # 8250, **Zbl.** 215, 339, **RŽ Mat** 1970, 8V231.

8. Cvetković D., *A note on paths in the  $p$ -sum of graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., No. **302**-No. **319**(1970), 49-51.

MR 44, # 2648, **Zbl.** 203, 567, **RŽ Mat** 1971, 6V353.

9. Cvetković D., Lučić R., *A new generalization of the  $p$ -sum of graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz. No. **302**- No. **319**(1970), 67-71.

MR 45, # 8557, **Zbl.** 209, 282, **RŽ Mat** 1971, 6V354.

10. Cvetković D., *The generating function for variations with restrictions and paths of the graph and self-complementary graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., No. **320**-No. **328** (1970), 27-34.

MR 43, # 7356, **Zbl.** 204, 245, **RŽ Mat** 1971, 9V357.

11. Cvetković D., *Transzendente Gleichungen deren Lösungen durch die inversen Funktionen der Funktion  $e^x/x$  ausdrückbar sind*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Math. Fiz., No. **320**-No. **328** (1970), 15-26.

MR 43, # 4239, **Zbl.** 214, 148, **RŽ Mat** 1971, 7B8.

12. Cvetković D., *New characterizations of the cubic lattice graph*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **10(24)**(1970), 195-198.

MR 43, # 1869, **Zbl.** 202, 557, **RŽ Mat** 1971, 6V374.

13. Cvetković D., *Die Zahl der Wege eines Grafen*, Glasnik Mat. Ser III, **5(25)**(1970), 205-210.

MR 43, # 108, **Zbl.** 211, 572, **RŽ Mat** 1971, 6V371.

14. Cvetković D., *The Boolean operations on graphs - spectrum and connectedness*, (V Kongres na mat. fiz. i astr. na Jugoslavija, Ohrid, 14-19 sept. 1970, Zbornik na trudovite, tom I, Skopje 1973), 115-119.

MR 57, # 12298, **RŽ Mat** 1979, 8V383.

15. Cvetković D., *Graphs and their spectra (Thesis)*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. **354**-No. **356**(1971), 1-50.

MR 45, # 8556, **Zbl.** 238, 05102, **RŽ Mat** 1972, 10V358.

16. Cvetković D., *The spectral method for determining the number of trees*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **11(25)**(1971), 135-141.

- MR 46, # 8877, **Zbl.** 221, 05054, **RŽ Mat** 1972, 2V355.
17. Cvetković D., *Inequalities obtained on the basis of the spectrum of the graph*, *Studia Sci. Math. Hung.*, **8**(1973), 433-436.  
MR 50, # 9661, **Zbl.** 288, 05107, **RŽ Mat** 1975, 1V563.
18. Kraus L., Cvetković D., *Evaluation of a lower bound for the chromatic number of the complete product of graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., No. **357**-No. **380**(1971), 63-68.  
MR 45, # 6679, **Zbl.** 236, 05104, **RŽ Mat** 1972, 12V206.
19. Cvetković D., *On a graph theory problem of M. Koman*, *Časopis Pěst. Mat.*, **98**(1973), 233-236.  
MR 48, # 1994, **Zbl.** 262, 05134, **RŽ Mat** 1974, 1V327.
20. Cvetković D., Gutman I. *The algebraic multiplicity of the number zero in the spectrum of a bipartite graph*, *Mat. Vesnik* **9**(**24**)(1972), 141-150.  
MR 48, # 1993, **Zbl.** 263, 05125, **RŽ Mat** 1973, 3V377.
21. Kraus L., Cvetković D., *Tables of simple eigenvalues of some graphs whose automorphism group has two orbits*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., No. **381**-No. **409**(1972), 89-95.  
MR 48, # 8297, **Zbl.** 255, 05114, **RŽ Mat** 1973, 7V377.
22. Cvetković D., *The number of antichains of finite power sets*, *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **13**(**27**)(1972), 5-9.  
MR 49, # 69, **Zbl.** 266, 05004, **RŽ Mat** 1973, 6V322.
23. Cvetković D., Gutman I., Trinajstić N. *Graph theory and molecular orbitals II*, *Croat. Chem. Acta*, **44**(1972), 365-374.
24. Cvetković D., Gutman I., Trinajstić N. *Kekulé structures and topology*, *Chem. Phys. Letters*, **16**(1972), 614-616.
25. Cvetković D., *Chromatic number and the spectrum of a graph*, *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **14**(**28**)(1972), 24-38.  
MR 55, # 7826, **Zbl.** 271, 05111, **RŽ Mat** 1973, 12V408.
26. Cvetković D., Lučić R., *Über die Zerlegung eines Graphen in ein Produkt von Graphen*, (XVIII Internationales Wissenschaftliches Kolloquium, Ilmenau 1973), 57-58.  
**Zbl.** 281, 05114, **RŽ Mat** 1974, 5V387.
27. Cvetković D., *Spectrum of the total graph of a graph*, *Publ. Inst. Math.*

(Beograd), **16(30)**(1973), 49-52.

**MR** 52, # 5483, **Zbl.** 274, 05118, **RŽ Mat** 1974, 9V424.

**28.** Cvetković D., Simić S. *On enumeration of certain types of sequences*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., No. **421**- No. **460**(1973), 159-164.

**MR** 48, # 5875, **Zbl.** 281, 05004, **RŽ Mat** 1974, 3V329.

**29.** Cvetković D., Gutman I., Trinajstić N., *Graph theory and molecular orbitals VII, The role of resonance structures*, J. Chem. Phys., **61**(1974), 2700-2706.

**30.** Cvetković D., Gutman I., Trinajstić N., *Graph theory and molecular orbitals IX, On the stability of cata-condensed hydrocarbons*, Theoret. Chem. Acta(Berl.), **34**(1974), 129-136.

**31.** Cvetković D., Gutman I., *Kekulé structures and topology II, Cata-condensed systems*, Croat. Chem. Acta **46**(1974), No. **1**, 15-23.

**32.** Cvetković D., Simić S., *Some remarks on the complement of a line graph*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **17(31)**(1974), 37-44.

**MR** 51, # 5406, **Zbl.** 295, 05119, **RŽ Mat** 1975, 6V490.

**33.** Cvetković D., Simić S., *Graph equations for line graphs and total graphs*, Discrete Math., **13**(1975), 315-320.

**MR** 53, # 7859, **Zbl.** 315, 05126, **RŽ Mat** 1976, 5V548.

**34.** Cvetković D., Gutman I., Trinajstić N., *Conjugated molecules having integral graph spectra*, Chem. Phys. Letters, **29**(1974), 65-68.

**35.** Cvetković D., Gutman I., Trinajstić N., *Graphical studies on the relations between the structures and reactivity of conjugated systems, The role of non-bonding molecular orbitals*, J. Mol. Struct., **28**(1975), 289-303.

**36.** Cvetković D., Gutman I., *On the spectral structure of graphs having the maximal eigenvalue not greater than two*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **18(32)**(1975), 39-45.

**MR** 54, # 5049, **Zbl.** 307, 05132, **RŽ Mat** 1975, 10V281.

**37.** Gutman I., Cvetković D., *The reconstruction problem for characteristic polynomials of graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz, No. **498**-No. **541**(1975), 45-48.

**MR** 53, # 13043, **Zbl.** 318, 05111, **RŽ Mat** 1976, 5V542.



- 38.** Cvetković D., *The determinant concept defined by means of graph theory*, Mat. Vesnik, **12(27)**(1975), 333-336.  
**MR** 54, # 2534, **Zbl.** 355, 15010, **RŽ Mat** 1976, 8V539.
- 39.** Cvetković D., *Definities en berekening van determinanten met behulp van grafen*, Nieuw Tijdschrift Wisk. **63**(1976), No. 4, 209-215.  
**MR** 54, # 10066, **RŽ Mat** 1976, 10V435.
- 40.** Cvetković D., *Spectra of graphs formed by some unary operations*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **19(33)**(1975), 37-41.  
**MR** 58, # 21837, **Zbl.** 337, 05140, **RŽ Mat** 1976, 9V402.
- 41.** Cvetković D., Lacković I., Simić S., *Graph equations, graph inequalities and a fixed point theorem*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **20(34)**(1976), 59-66.  
**MR** 57, # 178, **Zbl.** 344, 05160, **RŽ Mat** 1977, 7V538.
- 42.** Cvetković D., *Cubic integral graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., No. **498**-No. **541**(1975), 107-113.  
**MR** 53, # 13038, **Zbl.** 315, 05125, **RŽ Mat** 1976, 3V570.
- 43.** Bussemaker F. C., Cvetković D., *There are exactly 13 connected, cubic, integral graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., No. **544**-No. **576**(1976), 43-48.  
**MR** 57, # 5830, **Zbl.** 357, 05064, **RŽ Mat** 1977, 11V576.
- 44.** Bussemaker F. C., Čobeljić S., Cvetković D., Seidel J. J., *Computer investigation of cubic graphs*, Technological University Eindhoven, T. H. - Report 76-WSK-01, 1-66.  
**Zbl.** 322, 05144, **RŽ Mat** 1977, 7V1005.
- 45.** Bussemaker F. C., Čobeljić S., Cvetković D., Seidel J. J., *Cubic graphs on  $\leq 14$  vertices*, J. Combinatorial Theory (B), **23**(1977) 234-235.  
**MR** 58, # 5354, **Zbl.** 369, 05045, **RŽ Mat** 1978, 10V694.
- 46.** Bussemaker F. C., Cvetković D., Seidel J. J., *Graphs related to exceptional root systems*, Technological University Eindhoven, T. H. -Report 76-WSK-05, 1-91.  
**Zbl.** 338, 05116, **RŽ Mat** 1977, 7V514.
- 47.** Bussemaker F. C., Cvetković D., Seidel J. J., *Graphs related to exceptional root systems*, (Combinatorics, Proc. V Hungarian Colloquium on Combinatorics, Keszthely 1976, ed. A. Hajnal, V. T. Sós, Vol. I,

Amsterdam-Oxford-New York 1978), 185-191.

**MR** 80g: 05049, **Zbl.** 392, 05055, **RŽ Mat** 1979, 10V381.

**48.** Cvetković D., Lint J. H. van, *An elementary proof of Lloyd's theorem*, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. A, **80(1)**(1977), 6-10.

**MR** 55, # 7574, **Zbl.** 349, 94023, **RŽ Mat** 1977, 10V441.

**49.** Cvetković D., Gutman I., *Note on branching*, Croat. Chem. Acta, **49**(1977), 115-121.

**50.** Cvetković D., Simić S., *Graph equations*, (Beiträge zur Graphentheorie und deren Anwendungen, vorgetragen auf dem Internat. Koll. Oberhof (DDR), 10. -16. April 1977), 40-56.

**MR** 82b: 05110, **Zbl.** 409, 05048.

**51.** Cvetković D., Simić S., *Graphs which are switching equivalent to their line graphs*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **23(37)**(1978), 39-51.

**MR** 80c: 05108, **Zbl.** 423, 05035, **RŽ Mat** 1979, 3V594.

**52.** Cvetković D., *The main part of the spectrum, divisors and switching of graphs*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **23(37)** (1978), 31-38.

**MR** 80h: 05045, **Zbl.** 423, 05028, **RŽ Mat** 1979, 4V439.

**53.** Doob M., Cvetković D., *On spectral characterizations and embedding of graphs*, Linear Algebra and Appl., **27**(1979), 17-26.

**MR** 81d: 05050, **Zbl.** 417, 05025.

**54.** Cvetković D., Gutman I., Simić S., *On self pseudo-inverse graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. **602**-No. **633**(1978), 111-117.

**MR** 81j: 05088, **Zbl.** 437, 05047, **RŽ Mat** 1980, 11V511.

**55.** Cvetković D., *Some possible directions in further investigation of graph spectra*, (Algebraic Methods in Graph Theory, Vol. I, ed. L. Lovász, V. T. Sós, North Holland, Amsterdam-Oxford- New York, 1981), 47-67.

**MR** 83b: 05090, **Zbl.** 471, 05043, **RŽ Mat** 1982, 3V533.

**56.** Cvetković D., Simić S., *A bibliography of graph equations*, J. Graph Theory, **3**(1979), No. 4, 311-324.

**MR** 80j: 05054, **Zbl.** 423, 05038.

**57.** Cvetković D., *Some topics from the theory of graph spectra*, Berichte der Mathematisch-Statistischen Sektion im Forschungszentrum Graz, No. **100**-No. **105**(1978), No. 101, 1-5.

- MR 80m:** 05082, **Zbl.** 404, 05044, **RŽ Mat** 1979, 9V374.
- 58.** Cvetković D., Doob M., Simić S., *Some results on generalized line graphs*, *Comptes Rendus Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **2**(1980), No. 3, 147-150.  
**MR 81f:** 05136, **Zbl.** 434, 05057, **RŽ Mat** 1981, 11V565.
- 59.** Cvetković D., Doob M., Simić S., *Generalized line graphs*, *J. Graph Theory*, **5**(1981), No. 4, 385-399.  
**MR 82k:** 05091, **Zbl.** 475, 05061, **RŽ Mat** 1982, 6V618.
- 60.** Gutman I., Cvetković D., *Relations between graphs and special functions*, *Univ. Kragujevac, Coll. Sci. Papers, Fac. Sci.*, **1**(1980), 101-119.
- 61.** Cvetković D., *A note on constructions of graphs by means of their spectra*, *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **27(41)**(1980), 27-30.  
**MR 83a:** 05095, **Zbl.** 478, 05015, **RŽ Mat** 1981, 9V497.
- 62.** Cvetković D., *A project for using computers in further development of graph theory*, (*The Theory and Applications of Graphs, Proc. 4th Internat. Conf. Theory and Appl. of Graphs, Kalamazoo 1980*, ed. G. Chartrand, Y. Alavi, D. L. Goldsmith, L. Lesniak-Foster, D. R. Lick, John Wiley & Sons, New York - Chichester - Brisbane - Toronto - Singapore, 1981), 285-296.  
**MR 82k:** 68035, **Zbl.** 468, 05070.
- 63.** Cvetković D., Gutman I., *A new spectral method for determining the number of spanning trees*, *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **29(43)**(1981), 49-52.  
**MR 83f:** 05046, **Zbl.** 493, 05033, **RŽ Mat** 1982, 8V553.
- 64.** Cvetković D., Kraus L., Simić S., *Discussing graph theory with a computer I, Implementation of graph theoretic algorithms*, *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz.*, No. **716** - No. **734**(1981), 100-104.  
**RŽ Mat** 1982, 4V1079.
- 65.** Cvetković D., Cvetković Z., *Jedna modifikacija Coatesove metode za analizu električnih kola*, (XXV jug. konferencija ETAN-a, Mostar 1981, sv. I), 303-308.
- 66.** Stojković V., Cvetković D., *Analiza pomoću računara rečenica dela engleskog jezika formalizovanog za upotrebu u teoriji grafova*, (XXV jug. konferencija ETAN-a, Mostar 1981, sv. III), 271-278.
- 67.** Cvetković D., *Prevođenje matematičkog teksta na jezik formula kvan-*

*tifikatorskog računa*, (Informatica 81, Ljubljana 1981, 3 108), 1-3.

**68.** Cvetković D., Pevac I., *Generisanje rečenica ekvivalentnih zadatoj rečenici*, (Informatica 81, Ljubljana 1981, 3 107), 1-3.

**69.** Cvetković D., *Discussing graph theory with a computer II, Theorems suggested by the computer*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **33(47)**(1983), 29-33.

**MR** 85e: 05151, **Zbl.** 522, 05068, **RŽ Mat** 1984, 3V615.

**70.** Cvetković D., Doob M., Gutman I., *On graphs whose eigenvalues do not exceed  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$* , Ars Combinatoria, **14**(1982), 225-239.

**MR** 84i: 05076, **Zbl.** 504, 05040.

**71.** Cvetković D., Doob M., *Root systems, forbidden subgraphs and spectral characterizations of line graphs*, (Graph Theory, Proc. Fourth Yugoslav. Sem. Graph Theory, Novi Sad, April 15. - 16. 1983, ed. D. Cvetković, I. Gutman, T. Pisanski, R. Tošić, University of Novi Sad, Institute of Mathematics, Novi Sad 1984), 69-99.

**MR** 86a: 05088, **Zbl.** 533, 05041, **RŽ Mat** 1984, 8V466.

**72.** Cvetković D., *On graphs whose second largest eigenvalue does not exceed 1*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **31(45)**(1982), 15-20.

**MR** 85d: 05168, **Zbl.** 522, 05044, **RŽ Mat** 1983, 9V550.

**73.** Cvetković D., Cvetković Z., *Analiza aktivnih mreža sa operacionim pojačavačima metodom teorije grafova*, (Zbornik materijala XXVI jug. konf. ETAN-a, Subotica 7. -10. 6. 1982, Beograd 1982, sv. I), 257-262.

**74.** Cvetković D., Čipranić M., *Interaktivni programski sistem za manipulaciju sa rečenicama*, (Zbornik materijala XXVI jug. konf. ETAN-a, Subotica 7. -10. 6. 1982, Beograd 1982, sv. III), 263-269.

**75.** Cvetković D., Pevac I., *Discussing graph theory with a computer III, Man-machine theorem proving*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **34(48)**(1984), 37-47.

**MR** 86i: 03012a, **Zbl.** 568, 05053.

**76.** Gutman I., Cvetković D., *Finding tricyclic graphs with maximal number of matchings - another example of computer aided research in graph theory*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **35(49)**(1984), 33-40.

**MR** 86k: 05065, **Zbl.** 561, 05043, **RŽ Mat** 1985, 7V693.

**77.** Cvetković D., Pevac I. *Some heuristics in automatic theorem proving*,

- Publ. Inst. Math. (Beograd), **35(49)**(1984), 167-171.  
**MR** 86e: 68091, **Zbl.** 585, 68080, **RŽ Mat** 1985, 6G484.
- 78.** Cvetković D., *Discussing graph theory with a computer IV, Knowledge organization and examples of theorem proving*, (Graph Theory, Proc. Fourth Yugoslav. Sem. Graph Theory, Novi Sad, April 15. -16. 1983, ed. D. Cvetković, I. Gutman, T. Pisanski, R. Tošić, University of Novi Sad, Institute of Mathematics, Novi Sad 1984), 43-68.  
**MR** 86i: 03012b, **Zbl.** 533, 05058, **RŽ Mat** 1984, 9V534.
- 79.** Jovanović M., Cvetković D., Kraus L. *Discussing graph theory with a computer V, Graph theory bibliography*, (Razgovor sa kompjuterom o teoriji grafova V, Bibliografija teorije grafova), XXXI jug. konf. ETAN-a, Bled 1987, VIII sv., ETAN, Beograd 1987, 273-278.
- 80.** Cvetković D., Petrić M. *A table of connected graphs on six vertices*, Discrete Math., **50**(1984), No. 1, 37-49.  
**MR** 85d: 05133, **Zbl.** 533, 05052, **RŽ Mat** 1984, 12V726.
- 81.** Cvetković D., *Spectral characterizations of line graphs. Variations on the theme*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **34(48)** (1984), 31-35.  
**MR** 86c: 05088, **Zbl.** 551, 05054.
- 82.** Cvetković D., Radosavljević Z., *A construction of the 68 connected regular graphs, non-isomorphic but cospectral to line graphs*, Graph Theory, Proc. Fourth Yugoslav. Sem. Graph Theory, Novi Sad, April 15.-16. 1983, ed. D. Cvetković, I. Gutman, T. Pisanski, R. Tošić, University of Novi Sad, Institute of Mathematics, Novi Sad 1984, 101-123.  
**MR** 86d: 05083, **Zbl.** 531, 05044, **RŽ Mat** 1984, 9V503.
- 83.** Batagelj V., Cvetković D., Gutman I., *A formula involving the number of 1-factors in a graph*, Graph Theory, Proc. Fourth Yugoslav. Sem. Graph Theory, Novi Sad, April 15.-16. 1983, ed. D. Cvetković, I. Gutman, T. Pisanski, R. Tošić, University of Novi Sad, Institute of Mathematics, Novi Sad, 1984, 39-42.  
**MR** 85h: 05087, **Zbl.** 532, 05047, **RŽ Mat** 1984, 7V459.
- 84.** Cvetković D., Pevac I., *Algorithms for transforming first order formulas in their natural form*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., No. **735**-No. **762**(1982), 155-160  
**MR** 86g: 03023, **Zbl.** 543, 68075.
- 85.** Cvetković D., Pevac I., *Man-machine theorem proving in graph theory*,

Artificial Intelligence, **35**(1988), No. 1, 1-23.

**MR** 89h: 68130, **Zbl.** 646, 68107.

**86.** Cvetković D., Petric M., *Connectedness of the non-complete extended  $p$ -sum of graphs*, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad, **13**(1983), 345-352

**MR** 86h: 05076, **Zbl.** 569, 05025, **RŽ Mat** 1985, 9V603.

**87.** Cvetković D., *Some graph invariants based on the eigenvectors of the adjacency matrix*, Presented at the Fifth Yugoslav Seminar on Graph Theory, Beograd, 1984, Graph Theory, Proc. Eighth Yugoslav Seminar on Graph Theory, Novi Sad, April 17-18, 1987, ed. R. Tošić, D. Aćketa, V. Petrović, R. Doroslovački, Univ. Novi Sad, Institute of Mathematics, Novi Sad, 1989, 31-42.

**MR** 90h: 05002, **Zbl.** 696, 05036, **RŽ Mat** 1991, 8V449.

**88.** Cvetković D., Radosavljević Z., *A table of regular graphs with at most 10 vertices*, Graph theory, Proc. VI Yugoslav Seminar on Graph Theory, Dubrovnik, April 18-19, 1985, ed. R. Tošić, D. Aćketa, V. Petrović, University of Novi Sad, Institute of Mathematics, Novi Sad, 1986, 71-105.

**Zbl.** 612, 05037, **RŽ Mat** 1987, 12V371.

**89.** Cvetković D., *Further experiences in computer aided research in graph theory*, Graphs, Hypergraphs and Applications, Proc. Conf. Graph Theory held in Eyba, October 1984, ed. H. Sachs, Teubner, Leipzig, 1985, 27-30

**Zbl.** 593, 05001, **RŽ Mat** 1987, 7V620.

**90.** Cvetković D., Doob M., *Developments in the theory of graph spectra*, Linear and Multilinear Algebra, **18**(1985), 153-181.

**MR** 87f: 05111, **Zbl.** 615, 05039.

**91.** Cvetković D., Jovanović A., Radosavljević Z., Simić S., *Coplanar graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **2**(1991), 67-81.

**MR** 92m: 05066, **Zbl.** 756, 05045.

**92.** Cvetković D., Gutman I., *The computer system "Graph", A useful tool in chemical graph theory*, J. Comput. Chem., **7**(1986), No. 5, 640-644.

**Zbl.** 662, 05058.

**93.** Cvetković D., *Discussing graph theory with a computer, VI, Theorems proved by the aid of the computer*, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math., **47**(1988), No. 16, 51-70.

**MR** 91h: 05118, **Zbl.** 662, 05058.

- 94.** Cvetković D., Rowlinson P., *Spectra of unicyclic graphs*, Graphs and Combinatorics, **3**(1987), 7-23.  
**MR** 89c: 05054, **Zbl.** 623, 05038, **RŽ Mat** 1987, 8V657.
- 95.** Cvetković D., *Constructing trees with given eigenvalues and angles*, Linear Algebra and Appl., **105**(1988), 1-8.  
**MR** 89i: 05195, **Zbl.** 679, 05053.
- 96.** Cvetković D., Rowlinson P., *Seeking counterexamples to the reconstruction conjecture for graphs, a research note*, Graph Theory, Proc. Eighth Yugoslav Sem. Graph Theory, Novi Sad, April 17-18, 1987, ed. R. Tošić, D. Acketa, V. Petrović, R. Doroslovački, Univ. Novi Sad, Institute of Mathematics, Novi Sad 1989, 52-62.  
**MR** 90k: 05107, **Zbl.** 694, 05044, **RŽ Mat** 1993, 2V304.
- 97.** Cvetković D., Rowlinson P., *Further properties of graph angles*, Scientia (Valparaiso), **1**(1988), 41-51.  
**Zbl.** 726, 05049.
- 98.** Cvetković D., Dimitrijević V., Milosavljević M., *Jedan spektralni pokazatelj složenosti egzaktnog rešenja problema trgovačkog putnika*, XI bosansko-hercegovački simpozijum iz informatike, Jahorina '87, 30. 3.-3. 4. 1987., Zbornik radova, Knjiga 2, 2761-2765.
- 99.** Cvetković D., Dimitrijević V., Milosavljević M., *Travelling salesman problem complexity indices based on minimal spanning trees*, Graph Theory, Proc. Eighth Yugoslav Sem. Graph Theory, Novi Sad, April 17-18, 1987, ed. R. Tošić, D. Acketa, V. Petrović, R. Doroslovački, Univ. Novi Sad, Institute of Mathematics, Novi Sad 1989, 43-51.  
**MR** 90h: 05002, **Zbl.** 681, 90080.
- 100.** Cvetković D., Radosavljević Z., Simić S., *Upotreba ekspertnog programskog sistema u istraživanjima u teoriji grafova*, SYM-OP-IS '89, 165-168.
- 101.** Cvetković D., Dimitrijević V., Milosavljević M., *Klasa algoritama za suboptimalno rešavanje problema M trgovačkih putnika*, SYM-OP-IS '87, Hercegnovi 6. - 9. X 1987, Institut za ekonomiku industrije, Beograd, 1987, 101-106.
- 102.** Cvetković D., Dimitrijević V., Milosavljević M., *Jedan pokazatelj složenosti rešavanja problema trgovačkog putnika zasnovan na linearnom faktoru*, SYM-OP-IS '87, Hercegnovi 6.-9. X 1987, Institut za ekonomiku industrije, Beograd, 1987, 95-99.

- 103.** Milosavljević M., Dimitrijević V., Cvetković D., *Diskretne optimizacione procedure u prepoznavanju oblika*, Zbornik radova simpozijuma "Matematička i računarska lingvistika - Teorija i praksa", Beograd, 1987, ed. D. Vitas, Društvo za primenjenu lingvistiku Srbije, Beograd, 1990, 98-101.
- 104.** Cvetković D., Ivanov K., *Jedan primer konstrukcije kataloga grafova interaktivnim programskim paketima*, XII simpozij o informacionim tehnologijama, Sarajevo-Jahorina 1988, Zbornik radova, knjiga 2, 781-789.
- 105.** Cvetković D., Jakovljević-Atijas D., Pevac I., *Jedan pokušaj generisanja pomoću računara nestandardnih koraka u dokazivanju teorema*, XXXII jug. konf. ETAN-a, Sarajevo 1988, sv. XII, 11-18.
- 106.** Cvetković D., *Some results on graph angles*, Rostock Math. Kolloq., **39**(1990), 74-88.  
MR 92e: 05076, **Zbl.** 714, 05042, **RŽ Mat** 1991, 7V554.
- 107.** Cvetković D., Rowlinson P., *On connected graphs with maximal index*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **44**(58)(1988), 29-34.  
MR 90i: 05066, **Zbl.** 661, 05041.
- 108.** Cvetković D., Jakovljević-Atijas D., Kolar D., *Skolemizacija kojom se omogućava upotreba lema u automatskom dokazivanju teorema*, XXXIII jug. konf. ETAN-a, Novi Sad 1989, sv. XIII, 11-18.
- 109.** Cvetković D., Jakovljević-Atijas D., Kolar D., *Generisanje formula za analizu slučajeva u automatskom dokazivanju teorema*, SYM-OP-IS '90, Dubrovnik-Kupari 9 - 12. X. 1990, ed. J. Petrić, S. Krčevinac, V.Kovačević-Vujčić, N. Mladenović, Naučna knjiga Beograd, 1990, 69-72.
- 110.** Cvetković D., Petrović S., *Optimalna podela stabla na dva dela sa primenom u klasterovanju*, SYM-OP-IS '89, 161-164.
- 111.** Cvetković D., Hotomski P., Kraus L., Pevac I., Radosavljević Z., Simić S., *Deset godina razvoja i upotrebe ekspertnog sistema GRAPH*, Simpozijum "Ostvarenja i primene veštačke inteligencije", Dubrovnik, 25.-27. oktobar 1989, ed. I. Bratko, D. Cvetković, P. Hotomski, Tehnički fakultet "M. Pupin", Institut za politehniku, Zrenjanin, 1990, 25-46.  
MR 91k: 68169.
- 112.** Cvetković D., Rowlinson P., *The largest eigenvalue of a graph - a survey*, Linear and Multilinear Algebra, **28**(1990), 3-33.  
MR 91i: 05079, **Zbl.** 744, 05031.



- 113.** Cvetković D., *Some possibilities of constructing graphs with given eigenvalues and angles*, Ars Combinatoria, **29A**(1990), 179-187.  
**MR** 97f: 05127, **Zbl.** 726, 05048.
- 114.** Cvetković D., *Some comments on the eigenspaces of graphs*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **50(64)**(1991), 24-32.  
**MR** 94k: 05133, **Zbl.** 761, 05069.
- 115.** Cvetković D., Čangalović M., Dimitrijević V., Kraus L., Milosavljević M., Simić S., *TSP-SOLVER - a programming package for the travelling salesman problem*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **1**(1990), 41-47  
**Zbl.** 722, 90059, **RŽ Mat** 1992, 1G279.
- 116.** Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *A study of eigenspaces of graphs*, Linear Algebra and Appl., **182**(1993), 45-66.  
**MR** 94f: 04103, **Zbl.** 778, 05057.
- 117.** Cvetković D., Simić S., *Best suboptimal solutions in combinatorial optimization problems*, SYM-OP-IS '91, Hercegnovi 8-11. X. 1991., ed. R. Stanojević, J. Vuleta, Hercegnovi, 1991, 103-105.
- 118.** Cvetković D., Milosavljević M., Dimitrijević V., *An algorithm for  $M$  asymmetric travelling salesman problem on a bandwidth - limited graph*, YUJOR, **1**(1991), No. 1, 15-25.  
**MR** 93b: 90071, **Zbl.** 747, 90099.
- 119.** Cvetković D., *Graph theoretical procedures in clustering discrete data*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **3**(1992), 21-26.  
**Zbl.** 767, 62045, **RŽ Mat** 1994, 9V296.
- 120.** Cvetković D., Simić S., *Graph theoretical results obtained by the support of the expert system "Graph"*, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math., **107**(1994), No.19, 19-41.  
**MR** 96i: 05113.
- 121.** Cvetković D., Dimitrijević V., *Short edge subgraphs and complexity indices for the traveling salesman problem*, SYM-OP-IS '92, Beograd 13 -16. X 1992, ed. M. Vujošević, Beograd, 1992, 41-44.
- 122.** Cvetković D., Simić S., *Non-complete extended  $p$ -sum of graphs, graph angles and star partitions*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **53(67)**(1993), 4-16.

**MR 96b:** 05107, **Zbl.** 795, 05093.

**123.** Cvetković D., Dimitrijević V., Milosavljević M., *A survey of some non-standard traveling salesman problems*, YUJOR, **2**(1992), No. 2, 163-185.

**Zbl.** 772, 90078.

**124.** Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *On some algorithmic investigations of star partitions of graphs*, Discrete Appl. Math., **62**(1995), 119-130.

**MR 96g:** 05102, **Zbl.** 838, 05079.

**125.** Cvetković D., Simić S., *On graphs whose second largest eigenvalue does not exceed  $(\sqrt{5} - 1)/2$* , Discrete Math., **138**(1995), 213-227.

**MR 96a:** 05103, **Zbl.** 842, 05059.

**126.** Cvetković D., Petrić M., *Tables of graph spectra*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **4**(1993), 49-67.

**MR 95f:** 05078, **Zbl.** 804, 05049.

**127.** Cvetković D., Simić S., *Minimal graphs whose second largest eigenvalue is not less than  $(\sqrt{5} - 1)/2$* , Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math., **121**(2000), No. 25, 47-70.

**MR 2002f:** 05106.

**128.** Cvetković D., *A graph theoretical procedure for clustering binary vectors*, Ars Combinatoria, **46**(1997), 267-276.

**MR 98d:** 05096, **Zbl.** 932, 68064.

**129.** Cvetković D., Mitrović-Minić S., *A search strategy in branch and bound algorithms for the traveling salesman problem*, SYM-OP-IS '93, 137-140.

**130.** Madžarević T., Cvetković D., *Neke dopune strategije vođenja dokaza u dokazivaču teorema ekspertnog sistema GRAPH*, SYM-OP-IS '93, 31-34.

**131.** Cvetković D., *Star partitions and the graph isomorphism problem*, Linear and Multilinear Algebra, **39**(1995), No. 1-2, 109-132.

**MR 97b:** 05105, **Zbl.** 831, 05043.

**132.** Cvetković D., Dimitrijević V., *Spectral moments of the distance matrix and the length of an optimal solution of the traveling salesman problem*, YU-SYM-OP-IS '94, 341-343.

**133.** Cvetković D., Dimitrijević V., Milosavljević M., *The traveling salesman problem on a chained digraph*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn.

Fak., Ser. Mat., **5**(1994), 35-42.

**MR** 95m: 90138, **Zbl.** 821, 05051.

**134.** Petrović R., Guberinić S., Batanović V., Cvetković D., *Operational research models in action, the result of international cooperation - a potpourri*, EJOR, **87**(1995), 500-506.

**Zbl.** 915, 90195.

**135.** Cvetković D., Simić S., *The second largest eigenvalue of a graph - a survey*, FILOMAT (Niš), **9**(1995), No. 3, Int. Conf. on Algebra, Logic & Discrete Math., Niš, April 14-16, 1995, ed. S. Bogdanović, M. Ćirić, Ž. Perović, 449-472.

**MR** 97a: 05146, **Zbl.** 851, 05078.

**136.** Cvetković D., *Some supplements to the tables of graph spectra*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **7**(1996), 45-54.

**MR** 97c: 05102, **Zbl.** 942, 05035.

**137.** Cvetković D., *Spanning trees in the theory of graph spectra*, Proc. Second Math. Conf. in Priština, September 25-28, 1996, ed. Lj.D.Kočinac, Faculty of Sciences, Univ. Priština, Priština, 1997, 1-10.

**MR** 98j: 05050, **Zbl.** 942, 05015.

**138.** Cvetković D., *On the reconstruction of the characteristic polynomial of a graph*, Discrete Math., **212**(2000), 45-52.

**MR** 2001e: 05079, **Zbl.** 942, 05046.

**139.** Cvetković D., Ivanov K., Stevanović D., *A catalogue of bicyclic graphs on eight vertices*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **11**(2000), 79-92.

**MR** 2002d: 05102, **Zbl.** 997, 05062.

**140.** Cvetković D., *On the 2-sum of three graphs. Variations on the graph product disconnectedness theme*, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math., **118**(1999), No. 24, 107-117.

**MR** 2000m: 05151.

**141.** Cvetković D., Čangalović M., *An algorithm for finding minimal branchings*, SYM-OP-IS '97, 183-186.

**142.** Cvetković D., Lepović M., *Cospectral graphs with the same angles and with a minimal number of vertices*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat., **8**(1997), 88-102.

**MR** 98k: 05106; **Zbl.** 885, 05086.

**143.** Cvetković D., Lepović M., *Seeking counterexamples to the reconstruction conjecture for the characteristic polynomial of graphs and a positive result*, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math., **116**(1998), No. 23, 91-100.

**MR** 2001b: 05140,

**144.** Cvetković D., Simić S., Stevanović D., *4-regular integral graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **9**(1998), 89-102.

**MR** 99m: 05104.

**145.** Cvetković D., Čangalović M., *Finding minimal branchings with a given number of arcs*, YUJOR, **12**(2002), No. 1, 1-10.

**MR** 2004a: 90101; **Zbl** 1150.05401.

**146.** Cvetković D., *Characterizing properties of some graph invariants related to electron charges in the Hückel molecular orbital theory*, Proc. DIMACS Workshop on Discrete Mathematical Chemistry, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comp. Sci., **51**(2000), 79-84.

**Zbl.** 968, 05055.

**147.** Cvetković D., Čangalović M., Kovačević-Vujčić V., *Semidefinite programming and the traveling salesman problem*, SYM-OP-IS '98, 239-242.

**148.** Caporossi G., Cvetković D., Gutman I., Hansen P., *Variable neighborhood search for extremal graphs, 2. Finding graphs with extremal energy*, J. Chem. Inform. Comp. Sci., **39**(1999), 984-996.

**149.** Cvetković D., Simić S., Caporossi G., Hansen P., *Variable neighborhood search for extremal graphs, 3. On the largest eigenvalue of color-constrained trees*, Linear and Multilinear Algebra, **49**(2001), No. 2, 143-160.

**MR** 2002m: 05138, **Zbl.** 1003, 05058.

**150.** Cvetković D., Lepović M., Rowlinson P., Simić S., *A data base of star complements of graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **9**(1998), 103-112.

**MR** 99m: 05132.

**151.** Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *Graphs with least eigenvalue -2: The star complement technique*, J. Algebraic Combinatorics, **14**(2001), 5-16.

**MR** 2002g: 05121, **Zbl.** 982, 05065.

- 152.** Bell F.K., Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *Some additions to the theory of star partitions of graphs*, *Discussiones Math. - Graph Theory*, **19**(1999), 119-134.  
**MR** 2002e: 05093, **Zbl.** 958, 05090.
- 153.** Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *Some characterizations of graphs by star complements*, *Linear Algebra Appl.*, **301**(1999), 81-87.  
**MR** 2001j: 05082, **Zbl.** 945, 05042.
- 154.** Cvetković D., Fowler P.W., Rowlinson P., Stevanović D., *Constructing fullerene graphs from eigenvalues and angles*, *Linear Algebra and Appl.*, **356**(2002), 37-56.  
**MR** 2004c: 05121, **Zbl.** 1017.05070.
- 155.** Cvetković D., Fowler P.W., *A group theoretical bound for the number of main eigenvalues of a graph*, *J. Chem. Inform. Comp. Sci.*, **39**(1999), 638-641.
- 156.** Cvetković D., Čangalović M., Kovačević-Vujčić V., *Semidefinite relaxations of the traveling salesman problem*, *YUJOR*, **9**(1999), 157-168.  
**MR** 2000h: 90064; **Zbl** 1006.90065.
- 157.** Cvetković D., Čangalović M., Kovačević-Vujčić V., *Semidefinite programming methods for the symmetric traveling salesman problem*, *Integer Programming and Combinatorial Optimization, Proc. 7th Internat. IPCO Conf., Graz, Austria, June 1999*, ed. G.Cornuejols, R.E.Burkard, G.J.Woeginger, *Lecture Notes Comp.Sci.* 1610, Springer, Berlin, 1999, 126-136.  
**MR** 2001e: 90067, **Zbl.** 948, 90114.
- 158.** Balińska K., Cvetković D., Lepović M., Simić S., *There are exactly 150 connected integral graphs up to 10 vertices*, *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser.Mat.*, **10**(1999), 95-105.  
**MR** 2000d: 05075; **Zbl** 1008.05099.
- 159.** Cvetković D., Čangalović M., Kovačević-Vujčić V., *Complexity indices for the traveling salesman problem based on a semidefinite relaxation*, *SYM-OP-IS '99*, 177-180.
- 160.** Cvetković D., Lepović M., Rowlinson P., Simić S., *The maximal exceptional graphs*, *J. Combinatorial Theory, Ser. B*, **86**(2002), 347-363.  
**MR** 2003h: 05131, **Zbl.** 1028.05063.
- 161.** Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *Constructions of the maximal*

*exceptional graphs with largest degree less than 28*, University of Stirling, Technical Report CSM-156, Stirling, 2000, 1-21.

**162.** Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *The maximal exceptional graphs with largest degree less than 28*, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math., **122**(2001), No. 26, 115-131.

**MR** 2003a: 05102, **Zbl.** 997, 05060.

**163.** Cvetković D., Čangalović M., Kovačević-Vujčić V., *Addaptive approach to the traveling salesman problem using a semidefinite relaxation*, SYM-OP-IS '2000, 213-216.

**164.** Cvetković D., Lepović M., Rowlinson P., Simić S., *Computer investigations of the maximal exceptional graphs*, University of Stirling, Technical Report CSM-160, Stirling, 2001, 1-67.

**165.** Cvetković D., Čangalović M., Kovačević-Vujčić V., *Some new heuristics for the traveling salesman problem*, SYM-OP-IS '2001, 285-287.

**Zbl** 1041.90525.

**166.** Cvetković D., *Graphs with least eigenvalue  $-2$ : A historical survey and recent developments in maximal exceptional graphs*, Linear Algebra and Appl., **356**(2002), 189-210.

**MR** 2003m: 05117, **Zbl.** 1012.05113.

**167.** Balińska K., Cvetković D., Radosavljević Z., Simić S., Stevanović D., *A survey on integral graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **13**(2002), 42-65; Errata, These Publications, **15**(2004), 112.

**MR** 2004d: 05122, **Zbl.** 1051.05057.

**168.** Cvetković D., Rowlinson P., *Spectral graph theory*, Topics in Algebraic Graph Theory, ed. L.W. Beineke, R.J. Wilson, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, 88-112.

**Zbl.** 1059.05071.

**169.** Cvetković D., Simić S., *Graph theoretical results obtained by the support of the expert system "Graph" - an extended survey*, Graphs and Discovery, ed. S. Fajtlowicz, P. Fowler, P. Hansen, M. Janowitz, F. Roberts, DIMACS Series in Discrete Math. and Theor. Comp. Sci., Amer. Math. Soc., 2005, 39-70.

**MR** 2006g: 05124; **Zbl** 1108.05061.

**170.** Cvetković D., Čangalović M., Kovačević-Vujčić V., *Optimization and*

*highly informative graph invariants*, Two Topics in Mathematics, ed. B. Stan-ković, Zbornik radova **10(18)**, Matematički institut SANU, Beograd 2004, 5-39.

MR 2006g: 05123

**171.** Cvetković D., Čangalović M., Kovačević-Vujčić V., *Combinatorial optimization and highly informative graph invariants*, Proc. 6th Balkan Conf. Oper. Res., ed. B. Papathanassiou, M. Vlachopoulou, Thessaloniki, Greece, 22 - 25 May, 2002, F2B2.

**172.** Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *Graphs with least eigenvalue -2; A new proof of the 31 forbidden subgraphs theorem*, Designs, Codes and Cryptography, **34**(2005), 229-240.

MR 2006a: 05089, Zbl. 1063.05090.

**173.** Cvetković D., Stevanović D., *Graphs with least eigenvalue at least  $-\sqrt{3}$* , Publ. Inst. Math. (Beograd), **73(87)**(2003), 39-51.

MR 2005e: 05090.

**174.** Cvetković D., Stevanović D., *Spectral moments of fullerene graphs*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., **50**(2004), 62-72.

MR 2004k: 05130, Zbl. 1054.05067.

**175.** Branković Lj., Cvetković D., *The eigenspace of the eigenvalue -2 in generalized line graphs and a problem in security of statistical data bases*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **14**(2003), 37-48.

MR 2005i: 05118; Zbl 1105.05041.

**176.** Cvetković D., *Graphs with least eigenvalue -2: The eigenspace of the eigenvalue -2*, Rendiconti Sem. Mat. Messina, Ser. II, **25(9)**(2003), 63-86.

MR 2006g: 05122; Zbl 1124.05061.

**177.** Cvetković D., Mitrović-Minić S., *A generalized short edge subgraph for a combinatorial optimization problem*, SYM-OP-IS 2003, 319-321.

Zbl. 1041.90526.

**178.** Cvetković D., Hansen P., Kovačević-Vujčić V., *On some interconnections between combinatorial optimization and extremal graph theory*, YU-JOR, **14**(2004), No. 2, 147-154.

MR 2009f: 05129

**179.** Cvetković D., Lepović M., *Sets of cospectral graphs with least eigenvalue at least -2 and some related results*, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl.

Sci. Math. Natur., Sci. Math., **129**(2004), No. 29, 85-102.

**MR** 2005f: 05099.

**180.** Cvetković D., Lepović M., *Cospectral graphs with least eigenvalue at least -2*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **78(92)**(2005), 51–63.

**MR** 2006k: 05132

**181.** Cvetković D., *Notes on maximal exceptional graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **15**(2004), 103-107.

**Zbl** 1089.05043.

**182.** Cvetković D., Lepović M., *Towards an algebra of SINGs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **16**(2005), 110–118.

**Zbl** 1104.05043.

**183.** Cvetković D., *Signless Laplacians and line graphs*, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math., **131**(2005), No. 30, 85–92.

**MR** 2006m: 05152

**184.** Cvetković D., Čangalović M., Kovačević-Vujčić V., *Counting Hamiltonian circuits with the same eigenvector for the second largest eigenvalue*, SYM-OP-IS 2005, 317-320.

**185.** Bell F.K., Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *Star complements and exceptional graphs*, Linear Algebra Appl., **423**(2007), 146-154.

**MR** 2008c: 05104

**186.** Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *Signless Laplacians of finite graphs*, Linear Algebra Appl., **423**(2007), 155-171.

**MR** 2008c: 05105; **Zbl** 1113.05061.

**187.** Aouchiche M., Bell F.K., Cvetković D., Hansen P., Rowlinson P., Simić S., Stevanović D., *Variable neighborhood search for extremal graphs*, 16. *Some conjectures related to the largest eigenvalue of a graph*, Europ. J. Oper. Res., **191**(2008), No. 3, 661-676.

**MR** 2009j: 05140

**188.** Cardoso D., Cvetković D., *Graphs with least eigenvalue -2 attaining a convex quadratic upper bound for the stability number*, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math., **133**(2006), No. 31, 42-55.

**MR** 2009d: 05143

**189.** Brankov V., Cvetković D., Simić S., Stevanović D., *Simultaneous editing and multilabelling of graphs in system newGRAPH*, Univ. Beograd,



Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **17**(2006), 112-121.

**190.** Cvetković D., Grout J., *Maximal energy graphs should have a small number of distinct eigenvalues*, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math., **134**(2007), No. 32, 43-57.

MR 2008m: 05172

**191.** Cvetković D., Čangalović M., Kovačević-Vujčić V., Kratica J., *Distance-perfect graphs*, SYM-OP-IS 2007, 289-291.

**192.** Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *Eigenvalue bounds for the signless Laplacian*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **81(95)**(2007), 11-27.

MR 2009e: 05181; Zbl 1164.05038.

**193.** Cvetković D. et al., *Zero forcing sets and the minimum rank of graphs*, Linear Algebra Appl., **428**(2008), No. 7, 1628-1648.

Zbl 1135.05035.

**194.** Bell F.K., Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *Graphs for which the least eigenvalue is minimal, I*, Linear Algebra Appl., **429**(2008), 234-241.

Zbl 1149.05030.

**195.** Bell F.K., Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *Graphs for which the least eigenvalue is minimal, II*, Linear Algebra Appl., **429**(2008), 2168-2179.

MR 2009f: 05160; Zbl 1144.05313.

**196.** Cardoso D., Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *A sharp lower bound for the least eigenvalue of the signless Laplacian of a non-bipartite graph*, Linear Algebra Appl., **429**(2008), 2770-2780.

MR 2009i: 05145; Zbl 1148.05046.

**197.** Cvetković D., *New theorems for signless Laplacian eigenvalues*, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math., **137**(2008), No. 33, 131-146.

**198.** Cvetković D., Davidović D., *Applications of some graph invariants to the analysis of multiprocessor interconnection networks*, YUJOR, **18**(2008), No. 2, 173-186.

MR 2010e: 68146; Zbl 1183.90070.

**199.** Kratica J., Cvetković D., Čangalović M., Kovačević-Vujčić V., Kojić J., *The metric dimension of strongly regular graphs*, SYM-OP-IS 2008, 341-344.

**200.** Cvetković D., Davidović T., *Exhaustive search for multiprocessor interconnection networks with small tightness value*, SYM-OP-IS 2008, 329-332.

**201.** Cvetković D., Simić S.K., *Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, I*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **85(99)**(2009), 19-33.

MR 2010i: 05203

**202.** Cvetković D., Davidović T., *Multiprocessor interconnection networks with small tightness*, Internat. J. Foundations Computer Sci., **20**(2009), No. 5, 941-963. doi: 10.1142/S0129054109006978

MR 2011a: 68007; Zbl 1186.68332

**203.** Cvetković D., Simić S.K., *Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, II*, Linear Algebra Appl., **432**(2010), 2257-2272. doi: 10.1016/j.laa.2009.05.020,

**204.** Cvetković D., Davidović T., *Well-suited multiprocessor topologies with small number of processors*, Novi Sad J. Math., **38**(2008), No. 3, 209-217.

**205.** Cvetković D., *Applications of Graph Spectra: An introduction to the literature*, *Applications of Graph Spectra*, Zbornik radova **13(21)**, ed. D. Cvetković, I. Gutman, Mathematical Institute SANU, Belgrade, 2009, 7-31. Improved version: *Selected Topics on Applications of Graph Spectra*, Zbornik radova **14(22)**, ed. D. Cvetković, I. Gutman, Mathematical Institute SANU, Belgrade, 2011, 9-34.

MR 2010j: 05229

**206.** Cvetković D., Davidović T., *Multiprocessor interconnection networks, Applications of Graph Spectra*, Zbornik radova **13(21)**, ed. D. Cvetković, I. Gutman, Mathematical Institute SANU, Belgrade, 2009, 33-63. Improved version: *Selected Topics on Applications of Graph Spectra*, Zbornik radova **14(22)**, ed. D. Cvetković, I. Gutman, Mathematical Institute SANU, Belgrade, 2011, 35-63.

MR 2010j: 05228

**207.** Cvetković D., Simić S.K., *Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, III*, Appl. Anal. Discrete Math., **4**(2010), 156-166.

**208.** Cvetković D., Simić S.K., Stanić Z., *Spectral determination of graphs whose components are paths and cycles*, Comput. Math. Appl., **59**(2010), 3849-3857.

- 209.** Cvetković D., Davidović T., Ilić A., Simić S.K., *Graphs for small multi-processor interconnection networks*, Appl. Math. Computation, **217**(2010), 2468-2480. doi:10.1016/j.amc.2010.07.058
- 210.** Cvetković D., Simić S.K., *Graph spectra in computer science*, Linear Algebra Appl., **434**(2011), 1545-1562. doi: 10.1016/j.laa.2010.11.035.
- 211.** Cvetković D., Rowlinson P., Stanić Z., Yoon M.-G., *Controllable graphs*, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math. **143**(2011), No. 36, 81-88.
- 212.** Cvetković D., Rowlinson P., Stanić Z., Yoon M.-G., *Controllable graphs with least eigenvalue at least -2*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, **5**(2011), No. 2, 165-175.
- 213.** Cvetković D., Simić S.K., *Spectral graph theory in computer science*, The IPSI BgD Transactions on Advanced Research, **8**(2012), No. 2, 35-42.
- 214.** Arsić B., Cvetković D., Simić S.K., Škarić M., *Graph spectral techniques in computer sciences*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, **6**(2012), No. 1, 1-30. doi:10.2298/AADM111223025A
- 215.** Cvetković D., *Complexity indices for the travelling salesman problem and data mining*, Transactions of Combinatorics, **1**(2012), No. 1, 35-43.

### 3. Prikaz naučnih radova ( 1 - 111)

Korišćeni su redni brojevi iz spiska naučnih radova.

1. U ovom članku su uvedene i tabelisane inverzne funkcije funkcije  $e^x/x$  koje su označene sa  $z_1(x)$  i  $z_2(x)$  a pomoću kojih se mogu rešavati jednačine sa opštim ili numeričkim koeficijentima koje pripadaju jednoj relativno širokoj klasi transcendentnih jednačina. Članak je objavljen kao stručni rad ali on sadrži ideju koja leži u osnovi kasnije objavljenog naučnog rada [11].

2. Ovo je stručni rad u kome se iscrpno opisuje jedan metod za sumiranje redova čiji je opšti član racionalna funkcija indeksa sumiranja. Suma reda se izražava pomoću jedne funkcije koja je srodna sa Eulerovom  $\Psi$ -funkcijom i pomoću izvoda ove funkcije. Rad je ilustrovan sa četrnaest primera a date su i odgovarajuće numeričke tablice.

3. U radu se daje nov dokaz sledećeg stava koji je inače poznat u literaturi: *Povezan, konačan, simetričan graf bez petlji i sa najmanje dva čvora je bihromatski ako i samo ako je njegov spektar, posmatran kao skup tačaka na brojnoj osi, simetričan u odnosu na tačku nula.* Rad je objavljen u formi stručnog rada ali je ideja dokaza pomenutog stava više puta kasnije korišćena u radovima o spektrima grafova.

4. Rad se odnosi na sledeći problem P. Erdösa: *Da li se svaki graf sa  $\ell n$  čvorova, od kojih je svaki stepena ne manjeg od  $(\ell - 1)n$ , može razložiti u  $n$  potpunih grafova sa po  $\ell$  čvorova?* U radu je dat potvrđan odgovor na ovo pitanje za  $n = 4$  i proizvoljno  $\ell$ . Do istog rezultata je došao nezavisno i praktično istovremeno i B. Grünbaum.

5. Određen je spektar grafa  $G_{nbl}$  čiji su čvorovi sve uređene  $n$ -torke od  $b$  simbola a u kome su dva čvora susedna ako i samo ako se odgovarajuće  $n$ -torke razlikuju u bar jednoj a najviše u  $2\ell$  koordinata. Metod kojim je u ovom radu određen spektar grafa je više puta korišćen u kasnijim radovima.

- 6.** U radu se određuju uslovi pod kojima je  $p$ -suma povezanih grafova povezan, odnosno bihromatski graf. U prvom slučaju se radi o objedinjavanju i generalizaciji izvesnih teorema iz radova P.M. Weichsela, M.H. McAndrewa i F. Hararya i C.A. Trautha, koji su citirani u radu. Drugi slučaj predstavlja generalizaciju jedne teoreme koja je navedena u monografiji C. Bergea.
- 7.** Rad prezentira rezultate ispitivanja pomoću kompjutera poznatog problema osam dama. Između ostalog, određen je hromatski broj grafa kretanja dame na šahovskoj tabli tipa  $8 \times 8$  a nađena su i neka rešenja problema reflektujućih dama. Oba pomenuta problema su postavljena u literaturi.
- 8.** U ovom radu je određen broj puteva dužine  $k$  koji su sadržani u  $p$ -sumi grafova za koje su poznati brojevi puteva proizvoljne dužine. Rezultat iz ovog rada je generalisan u disertaciji [15] a zatim poboljšan u [19].
- 9.** U radu je data jedna generalizacija pojma  $p$ -sume grafova (nepotpuna proširena  $p$ -suma grafova ili NEPS). Ispitivana je povezanost grafa koji se dobija pomoću ove operacije. U tom pogledu rad predstavlja prirodni nastavak rada [8].
- 10.** Određuje se funkcija generatrisa za brojeve varijacija sa ponavljanjem i sa ograničenjima određenog tipa. Ove varijacije su povezane sa putevima u odgovarajućem grafu tako da je određena i funkcija generatrisa za brojeve puteva u grafu. Određena je funkcija generatrisa komplementa, sume i proizvoda grafova. Na kraju je određena i jedna spektralna karakteristika samokomplementarnih grafova.
- 11.** Ovaj rad predstavlja dalju razradu ideja iz [1]. Naveden je obiman spisak transcendentnih jednačina koje se mogu rešiti pomoću uvedenih funkcija  $z_1(x)$  i  $z_2(x)$ . Objavljene su i tablice pomenutih funkcija na pet decimala za ukupno sedam stotina vrednosti argumenta. Argument varira između  $-50$  do  $50$  sa promenljivim korakom.
- 12.** U ovom radu se najpre dokazuje da spektralna karakterizacija grafa kubne rešetke karakteristike  $n$ , koju je dala R. Lascar za  $n > 7$ , važi i za ostale vrednosti  $n$  izuzev za  $n = 4$ . Zatim se daju dve nove spektralne karakterizacije grafa kubne rešetke. U svim karakterizacijama postoji izuzetak  $n = 4$  a za ovu vrednost  $n$  naveden je graf koji je neizomorfan ali izospektralan sa grafom kubne rešetke.
- 13.** U ovom članku je rešen sledeći problem: *Na koliko načina može kralj da izvede seriju od  $k$  poteza na šahovskoj tabli tipa  $n \times n$ ?* Problem se svodi

na određivanje broja puteva dužine  $k$  u grafu pridruženom šahovskoj figuri kralju. Broj puteva se određuje primenom poznate teoreme o stepenima matrice susedstva grafa. Matrica susedstva grafa pridruženog kralju na šahovskoj tabli tipa  $n \times n$  izražena je, posredstvom Kroneckerovog proizvoda matrica, pomoću matrice susedstva grafa za jednodimenzionalnu šahovsku tablu.

**14.** Daje se definicija Booleove funkcije neorijentisanih grafova bez petlji i višestrukih grana. Booleova funkcija grafova pripada klasi operacija nad grafovima kod kojih je skup čvorova rezultujućeg grafa jednak Dekartovom proizvodu skupova čvorova grafova nad kojima se operacija vrši. Pomoću matrica susedstva polaznih grafova određuje se matrica susedstva rezultata. U slučaju Booleove funkcije regularnih grafova određuje se njen spektar. U ovom slučaju se takođe ispituje, spektralnom metodom, povezanost Booleove funkcije.

**15.** "Graphs and their spectra" predstavlja skraćenu verziju doktorske disertacije "Grafovi i njihovi spektri" koja je odbranjena na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu 27.05.1971. Izostavljeni su dokazi teorema koje su objavljene u ranijim radovima. Disertacija se nadovezuje na radove [3], [5], [6], [8], [9], [10], [12], [13] i [14]. Sa disertacijom su u vezi i radovi [16], [17], [18], [19], [20] i [21] koji su urađeni docnije. Glavna tema disertacije je razrada spektralne metode u teoriji grafova. Pod spektralnom metodom u teoriji grafova podrazumeva se skup postupaka za dobijanje i dokazivanje iskaza o strukturi grafova koji u svojim bitnim tačkama koriste spektre grafova. Disertacija sadrži različite rezultate koji bi se uglavnom mogli svrstati u sledeće četiri grupe: 1) Upotpunjavanje postojećih postupaka spektralne metode originalnim priložima, 2) Ilustracija na konkretnim primerima mogućnosti primene spektralne metode, 3) Povezivanje disparatnih rezultata raznih autora i 4) Ekspozicija (na jednom mestu i sa jedinstvenog stanovišta) svih važnijih rezultata iz posmatrane oblasti teorije grafova. Citirana literatura obuhvata 105 jedinica i sadrži praktično sve što je o spektrima grafova objavljeno u matematičkoj literaturi. Glavni pojedinačni rezultati disertacije koji nisu sadržani u ranije objavljenim radovima su sledeći: određivanje karakterističnog polinoma potpunog proizvoda grafova, određivanje spektralne karakteristike komplementa grafa i samokomplementarnih grafova, spektralna karakterizacija grafa grana bikompletnog grafa, određivanje spektra grafa grana semiregularnog bihromatskog grafa, nejednakosti za broj unutrašnje stabilnosti i broj čvorova maksimalnog potpunog podgrafova, određi-

vanje spektra, uslova za povezanost i bihromatičnost, kao i broja puteva za nepotpunu proširenu  $p$ -sumu grafova, odnosno, u specijalnim slučajevima, za Booleovu funkciju grafova.

**16.** Broj stabala koja se sadrže u regularnom grafu je moguće dobiti pomoću spektra grafa. U radu se određuje broj stabala u nekim grafovima koji se mogu predstaviti pomoću NEPSa odnosno Booleove funkcije grafova na pomenuti način. Istovremeno se ukazuje na činjenicu da se praktično svi do sada poznati rezultati iz ove oblasti mogu dobiti pomoću spektralne metode.

**17.** Rad predstavlja dalju razradu rezultata iz [15] koji su u vezi sa brojem unutrašnje stabilnosti grafa i brojem čvorova maksimalnog potpunog podgraфа задатог графа. Polazna osnova u razmatranju je jedna teorema iz teorije matrica koja daje vezu između spektra hermitske matrice i spektra proizvoljne njene glavne submatrice. Na kraju je izvedena i jedna donja granica za hromatski broj grafa.

**18.** U radu se daje poboljšanje jedne nejednakosti H.- J.Fincka za hromatski broj regularnih grafova. Ako je poznat spektar grafa, donja granica za hromatski broj grafa o kojoj je u radu reč određuje se rešavanjem jednog zadatka celobrojnog linearnog programiranja.

**19.** U radu se daje jedno poboljšanje ranijeg rezultata [15] o broju puteva u NEPSu. Dobijeni rezultat se zatim primenjuje na jednu uopšteniju verziju jednog kombinatornog problema M. Komana.

**20.** Najpre se opisuje primena spektara grafova u hemiji, tj. u Hückelovoj teoriji aromatičnih ugljovodonika. Upoređuju se rezultati o spektrima grafova koje su postigli hemičari odnosno matematičari (citirano je 30 radova hemičara i matematičara). Ostatak rada je posvećen određivanju veze između algebarske višestrukosti broja 0 u spektru bihromatskog grafa i strukture grafa. Ovaj problem je rešen u nekim specijalnim slučajevima a predloženo je nekoliko redukcionih postupaka za određivanje pomenute višestrukosti, koja je, inače, u uskoj vezi sa stabilnošću molekula koji se predstavlja grafom.

**21.** M.Petersdorf i H.Sachs su dokazali da jednostruke sopstvene vrednosti grafova čija grupa automorfizama ima zadani broj orbita i zadane stepene čvorova u pojedinim orbitama, pripadaju jednom konačnom skupu. U radu se uz pomoć kompjutera određuju ovi skupovi za slučaj dve orbite i stepena

čvorova  $1, \dots, 5$ . Takođe su dokazane neke osobine ovih skupova u opštem slučaju.

**22.** U radu se tretira problem određivanja broja antilanaca u partitivnom skupu konačnog skupa koji je uređen inkluzijom. Opisuje se postupak pomoću kojeg se za svako zadato  $k$  može odrediti formula za broj antilanaca dužine  $k$ . Formule za  $k = 1, 2, 3$  je odredio M. Popadić. U radu je navedena formula za  $k = 4$ .

**23.** Diskutuje se veza između Hückelove teorije aromatičnih ugljevodonika i teorije grafova i proširuju se rezultati iz [20] koji su u vezi sa algebarskom višestrukošću broja nula u spektru bihromatskog grafa.

**24.** U ovom radu se uz pomoć permanenta matrice susedstva grafa određuje broj regularnih delimičnih grafova stepena 1 koji se sadrže u grafu. U literaturi je analogan rezultat zabeležen samo za bihromatske grafove.

**25.** U radu se dokazuje nejednakost

$$\gamma(G) \geq \frac{n}{n-r},$$

gde je  $\gamma(G)$  hromatski broj grafa  $G$ ,  $n$  broj čvorova a  $r$  najveća sopstvena vrednost grafa  $G$ . Dobijena nejednakost se upoređuje sa nejednakostima za hromatski broj koje su poznate u literaturi. Navode se primeri grafova za koje je ova nejednakost bolja od drugih. U prilogu je data tabela spektara i karakterističnih polinoma nekih  $k$ -kompletnih grafova koji je uz pomoć kompjutera izradio S. Simić.

**26.** Daju se izvesni dovoljni uslovi za nerazloživost grafa u proizvod grafova. Na primer, za graf  $G$ , kod koga je dužina najkraće konture veća od 4, utvrđuje se da je nerazloživ u proizvod ako važi jedan od sledećih uslova: 1) hromatski broj grafa je veći od 2; 2)  $G$  ne sadrži konture dužina  $4s+2$  ( $s \in \mathbb{N}$ ), 3)  $G$  ima neparan broj čvorova.

**27.** Određuje se veza između spektra regularnog grafa i spektra odgovarajućeg totalnog grafa. Koristeći se ovim rezultatom određuju se sva regularna rešenja grafovske jednačine  $T(G) = L(H)$ .

**28.** U jednom svom radu L. Carlitz je odredio broj  $n$ -torki  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  takvih da je  $|a_i - a_{i+1}| = 1$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) i  $a_1 = j$  i rešio neke druge srodne probleme. U ovom radu su svi Carlitzovi problemi rešeni sredstvima teorije grafova a dobijeni izrazi su jednostavniji od Carlitzovih. Upoređivanjem



dobijenih izraza sa Carlitzovim dobijena su dva kombinatorna identiteta, inače nezabeležena u literaturi.

**29.** Ovo je sedmi iz serije radova pod zajedničkim naslovom: Teorija grafova i molekulske orbite. U svim radovima koautori su hemičari I. Gutman i N. Trinajstić a u pojedinim radovima iz serije pojavljuju se i drugi koautori. Istoj seriji pripadaju i radovi [23], [30], [34].

Matematički deo rada sadri, između ostalog, definiciju klase  $\mathcal{B}$  grafova koji odgovaraju molekulima benzenoidnih ugljovodonika. Dokazuju se razne osobine grafova iz klase  $\mathcal{B}$ . Na primer, dokazuje se da su svi 1-faktori grafa iz klase  $\mathcal{B}$  iste parnosti. Svi dobijeni matematički iskazi se neposredno interpretiraju u hemiji ili predstavljaju teorijsko obrazloženje empirijskih činjenica poznatih u hemiji.

**30.** Daje se prost algoritam za određivanje višestrukosti broja nula u spektru grafa alternativnog kata-kondenzovanog konjugovanog ugljovodonika. Pošto je odustvo broja nula iz spektra grafa bitan preduslov za stabilnost odgovarajućeg molekula, pomenuti algoritam ima direktnu primenu na predviđanje ponašanja molekula iz navedene klase.

**31.** Za klasu grafova tretiranu u prethodnom radu daje se jedan algoritam za određivanje broja Kekuleovih struktura, tj. 1-faktora. Algoritam je primenjen na neke konkretne serije grafova te je dobijen eksplicitan izraz za broj 1-faktora.

**32.** Glavni rezultat rada glasi: *Graf  $G$  bez trouglova je komplement nekog grafa grana  $H$  ako i samo ako je  $G$  indukovani podgraf jednog od sledećih grafova :  $K_1 \cup (K_{m,n} - pK_2)$ ,  $K_{3,n} - C_6$ , Petersenov graf.* Okarakterisani su i pripadnici nekih drugih klasa grafova (stabla, bihromatski grafovi) koji su komplementi grafova grana.

**33.** U radu su reene grafovske jednačine  $L(G) = T(H)$  i  $L(G) = \overline{T(H)}$ , gde je  $L(G)$  graf grana grafa  $G$  a  $T(H)$  totalni graf grafa  $H$ . U dokazima se koristi karakterizacija grafa grana pomoću zabranjenih podgrafova.

**34.** Graf se naziva integralan ako su sve njegove sopstvene vrednosti celi brojevi. U radu se određuju svi povezani integralni grafovi čiji su stepeni čvorova najviše jednaki 3 ali nisu svi jednaki 3. Takvih grafova ima 7.

**35.** Navode se različiti algoritmi za određivanje višestrukosti  $\eta(G)$  broja nula u spektru grafa  $G$  nezasićenog ugljovodonika, Ispituju se posebno transformacije nad grafovima koje ne menjaju broj  $\eta(G)$ .

**36.** Neka je  $S$  skup grafova kod kojih najveća sopstvena vrednost nije veća od 2. Dokazuje se da su sve sopstvene vrednosti grafova iz  $S$  oblika  $2 \cos \frac{p}{q} \pi$ , gde su  $p, q$  celi brojevi. Ako je zadata familija brojeva pomenutog oblika, daje se algoritam za određivanje svih grafova čiji je spektar jednak zadatoj familiji brojeva.

**37.** Neka je  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  skup cvorova grafa  $G$ . Neka je  $G_i$  podgraf grafa  $G$  indukovan skupom  $X - \{x_i\}$ . U radu se razmatra problem mogućnosti jednoznačne rekonstrukcije karakterističnog polinoma grafa  $G$  na osnovu kolekcije karakterističnih polinoma grafova  $G_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Dokazano je da je rekonstrukcija jedinstvena ako je  $G$  regularan, ako  $G$  ima bar jednu sopstvenu vrednost višetrukosti veće od 2 i ako je  $G$  bihromatski (sa izvesnim izuzecima).

**38.** Digraf pridružen kvadratnoj matrici  $A = [a_{i,j}]$  reda  $n$  je potpun digraf (sa petljama) sa  $n$  čvorova u kome je grani koja vodi od čvora  $j$  ka čvoru  $i$  pridružen broj  $a_{i,j}$ . Determinanta matrice  $A$  definiše se pomoću faktora digrafa pridruženog matrici  $A$ . Na osnovu ovakve definicije izvode se elementarne osobine determinanata.

**39.** Rad [38] je sa manjim modifikacijama preveden na holandski jezik.

**40.** Neka je  $S(G)$  graf dobijen od grafa  $G$  formiranjem novog čvora na svakoj od grana grafa  $G$ .  $R(G)$  se dobija od  $G$  tako to se svakoj grani od  $G$  pridružuje novi čvor i spaja sa krajevima te grane.  $Q(G)$  se dobija od  $S(G)$  na taj način što se svaka dva novouvedena čvora koja odgovaraju susednim granama u  $G$  spoje novom granom. Za regularan graf  $G$  spektri grafova  $S(G), R(G), Q(G)$  se izražavaju pomoću spektra grafa  $G$ .

**41.** Već u radovima [27] i [33] termin "grafovska jednačina" je korišćen neformalno. U ovom radu se striktno definišu grafovska jednačina i grafovska nejednačina. Daje se inverzija jedne teoreme o nepokretnoj tački za parcijalno uređene skupove i ona se primenjuje na reavanje grafovskih nejednačina  $L^n(G) \subseteq G$  i  $L^n(G) \subseteq \overline{G}$ .

**42.** Istraživanja iz rada [34] se proširuju na kubne grafove. Dokazuje se najpre da je skup svih regularnih povezanih integralnih grafova fiksiranog stepena konačan. Određuju se svi povezani kubni grafovi sa najviše 5 različitih sopstvenih vrednosti. Takvih grafova ima 8. Za preostale kubne integralne grafove data su ograničenja koja bitno olakšavaju dalja istraživanja.

**43.** U ovom radu se kompletiraju istraživanja kubnih integralnih grafova započeta u prethodnom radu. Glavni rezultat je istaknut u naslovu: *postoji*

tačno 13 povezanih kubnih integralnih grafova. Dva od ovih 13 grafova su izospektralna. Deo rezultata dobijen je uz pomoć kompjutera.

**44 - 45.** Rezultati kompjuterskog istraživanja kubnih grafova sa zaključno 14 čvorova su objavljeni kao report Tehničkog univerziteta u Eindhovenu a kratka nota o ovim istraživanjima je objavljena u *J. Combinatorial Theory, Ser. B*. Grafovi su dati spiskom svojih grana a oni sa do 12 čvorova i crtežom. Za svaki graf je određen karakteristični polinom, spektar, brojevi kontura, dijametar, povezanost, planarnost i red grupe automorfizama. Grafovi su uređeni leksikografski prema spektru što se pokazalo kao vrlo prirodno uređenje.

**46 - 47.** Ovaj opsežan rad je objavljen takođe kao report Tehničkog univerziteta u Eindhovenu a rezultati rada su prikazani na V mađarskom kolokvijumu za kombinatoriku i objavljeni u izveštajima sa Kolokvijuma.

Među povezanim regularnim grafovima čija je najmanja sopstvena vrednost jednaka  $-2$  nalaze se regularni grafovi grana i regularni grafovi stepena  $2n-2$  sa  $2n$  čvorova. U radu se određuju svi preostali takvi grafovi. Njih ima 187 i oni su određeni kombinovanim metodama matematičkog rezonovanja i kompjuterskog istraživanja. Nalaženje ovih grafova je omogućilo da se poboljšaju poznate karakterizacione teoreme u spektralnoj teoriji grafova (koje se odnose i na karakterizaciju blok-šema) koje su dali Shrikhande, Hoffman, Ray-Chaudhuri, Doob i drugi. Metod primenjen u radu je geometrijski. Koristi se reprezentacija grafa pomoću skupa pravih koje prolaze kroz koordinatni početak u prostoru odgovarajuće dimenzije. Prave odgovaraju čvorovima; ako su dva čvora susedna ugao između pravih je  $60^\circ$  dok je u suprotnom slučaju ovaj ugao  $90^\circ$ . U klasifikaciji ovakvih sistema pravih bitnu ulogu igraju tzv. sistemi korenova koji se pojavljuju i u teoriji diskretnih grupa generisanih refleksijama i u teoriji Lijevih algebri.

**48.** Lloydova teorema daje jake potrebne uslove za egzistenciju perfektnih kodova. U literaturi je objavljeno više dokaza ove teoreme ali svi oni sadrže pozivanje na relativno komplikovane algebarske teoreme. U ovom radu se daje jedan elementaran dokaz ove teoreme koji se oslanja na neke činjenice iz elementarne algebre matrica.

**49.** Na osnovu empirijskih podataka iz hemije uočeno je da je razgranatost molekula ugljovodonika u korelaciji sa veličinom najveće sopstvene vrednosti odgovarajućeg grafa. U radu se ova empirijska činjenica teoretski obrazlaže pri čemu se koristi činjenica da se broj puteva u grafu može na određen način da izrazi pomoću spektra i sopstvenih vektora grafa.

**50.** U radu je prikazano oko 100 grafovskih jednačina uključujući i neke nove rezultate. Predlaže se klasifikacija grafovskih jednačina prema broju nepoznatih. Opisuju se metodi rešavanja grafovskih jednačina.

**51.** U radu se određuju svi grafovi koji su prekidački ekvivalentni svojim grafovima grana. To su regularni grafovi stepena 2 i 10 izuzetnih grafova malog formata.

**52.** Tri prividno sasvim nepovezana pojma iz spektralne teorije grafova (glavni deo sprektra, delioc grafa i prekidačke transformacije grafa) dovode se u uzajamnu vezu. Dokazuje se netačnost jedne hipoteze F. Harary-a o glavnom delu spektra.

**53.** Određuju se svi grafovi čija je najmanja sopstvena vrednost veća od  $-2$ . Regularni grafovi sa ovom osobinom su potpuni grafovi i konture neparne dužine. Ispituje se ponašanje najmanje sopstvene vrednosti grafa pri ulaganjima grafa u druge grafove.

**54.** Proučava se grafovska jednačina  $P(G) = G$ , gde je  $P(G)$  graf definisan na istom skupu čvorova kao i  $G$  i u kome su čvorovi  $x$  i  $y$  susedni ako i samo ako  $G - x - y$  ima 1-faktor. Dobijena su rešenja ove jednačine koja pripadaju skupu grafova čija je najkraća kontura duža od 4. Opisuju se neke primene dobijenih rezultata u hemiji.

**55.** Opisuju se dosadašnji pravci istraživanja spektara grafova i predlažu neki novl. Dobijaju se neki novi rezultati, daju novi dokazi poznatih rezultata i postavljaaju neki problemi u vezi sa spektralnim karakterizacijama grafova, leksikografskom uređenju grafova na osnovu sopstvenih vrednosti i spektralnim konstrukcijama grafova.

**56.** Rad je napisan po pozivu prof. F. Harary-a, glavnog uredhika časopisa J. Graph Theory. Daje se klasifikacija grafovskih jednačina, opisuju metodi njihovog rešavanja i navodi potpuni spisak literature o grafovskim jednačinama.

**57.** Članak predstavlja rezime predavanja održanog na 10. Štajerskom matematičkom simpozijumu u Stift Rein-u (Austrija) 1978. god. po pozivu. Opisuju se teoreme o koeficiientima karakterističnog polinoma grafa i drugi delovi spektralne teorije grafova koji su od interesa u hemiji.

**58.** Bez dokaza se navode rezultati iz rada [59] o generalisanim grafovima grana.

**59.** Za generalisane grafove grana dokazuju se analogni poznatih teorema koje važe za grafove grana: teorema o izomorfizmu dva generalisana grafa grana, karakterizacija generalisanih grafova grana pomoću kolekcije od trideset jednog zabranjenog podgrafa, teorema o grupi automorfizama generalisanog grafa grana i dr.

**60.** Pokazuje se da se poznati ortogonalni polinomi (Legendre-ovi, Laguerre-ovi, Hermite-ovi, Čebiševljevi) pojavljuju u teoriji grafova kao karakteristični polinomi ili polinomi sparivanja nekih grafova. Neke nove i neke poznate formule za ove polinome izvode se sredstvima teorije grafova.

**61.** Uz pomoć spektara grafova konstruišu se neki jako regularni grafovi i sa njima povezane simetrične blok šeme, kao složene  $n$ -arne kompozicije tipa NEPS potpunih grafova.

**62.** Opisuju se osnovne ideje interaktivnog programskog sistema "Graph" za klasifikaciju i unapređivanje znanja iz oblasti teorije grafova. Sistem "Graph" sadrži kompjuterizovanu bibliografiju teorije grafova, podsistem sa grafovskim algoritmima i dokazivač teorema. Sistem "Graph" je implementiran na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu u periodu 1980 - 1983. godine.

**63.** Poznato je da se pomoću spektra regularnog grafa može odrediti broj stabala sadržanih u grafu. U radu se ovaj spektralni metod proširuje i na neke neregularne grafove.

**64.** Ovo je prvi iz serije radova "Discussing graph theory with a computer" u kojima se opisuje implementacija programskog sistema "Graph". Ovde je opisan deo sistema koji sadrži grafovske algoritme. Opisana je interna reprezentacija grafa, klasifikacija grafovskih algoritama, interaktivna grafika, komuniciranje sa korisnikom i dr.

**65.** Poznata Coates-ova formula za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina modifikuje se za simetrične sisteme i primenjuje na analizu električnih kola. Opisuje se efikasni algoritam za ručno rešavanje električnih kola sa nekoliko kontura, naročito pogodan u nastavi.

**66.** Za potrebe dokazivača teorema u sistemu "Graph" razrađen je Proper Graph Theoretic Computer Language - jezik na kome se iskazuju tvrđenja iz oblasti teorije grafova. To je uprošćeni i formalizovani deo engleskog jezika. U članku se daje gramatika ovog jezika i opisuje programski sistem za analizu rečenica.

**67.** Opisuje se programski sistem (deo sistema "Graph") za prevođenje rečenica koje predstavljaju matematička tvrđenja na nezik formula kvantifikatorskog računa prvog reda.

**68.** Deo programskog sistema "Graph" za transformisanje rečenica u njima logički ekvivalentne oblike opisuje se u ovom radu. Pri generisanju novih rečenica koriste se valjane formula, definicije, aksiome i teoreme.

**69.** Navode se neki stari i novi primeri teorema iz teorije grafova koje su formulisane i dokazane na osnovu eksperimenata na kompjuteru. Opisuje se uloga sistema "Graph" u postavljanju, proveravanju i opovrgavanju hipoteza u teoriji grafova.

**70.** Određuju se svi grafovi čije sopstvene vrednosti nisu veće od  $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ . Takođe se određuju svi minimalni grafovi sa osobinom da je najveća sopstvena vrednost veća od 2 .

**71.** Dokazuje se da se pomoću spektra grafa može odrediti da li je graf regularan povezan graf grana izuzev u 17 slučajeva. U ovim izuzetnim slučajevima graf ima spektar grafa grana 3-povezanog kubnog grafa sa 8 čvorova ili spektar grafa grana semiregularnog bihromatskog grafa sa 6+3 čvorova.

**72.** Dokazuje se da su grafovi, kod kojih je druga najveća sopstvena vrednost ograničena odozgo sa 1, komplementi grafova kod kojih su sve sopstvene vrednosti veće od  $-2$  ili komplementi nekih grafova sa tačno jednom sopstvenom vrednošću manjom od  $-2$ .

**73.** Dejstvo savršenog operacionog pojačavača se u mreži zamenjuje jednom impedansom a zatim se metoda analize električnih mreža pomoću grafova iz [65] primenjuje na ovako dobijeno kolo.

**74.** Opisuje se deo programskog sistema "Graph" koji služi za manipulaciju sa rečenicama. Rečenice predstavljaju tvrđenja iz oblasti teorije grafova. Cilj manipulacije je priprema rečenice za pokušaj dokazivanja njene tačnosti uz pomoć dokazivača teorema.

**75.** Opisuje se dokazivač teorema sistema "Graph". Teorija grafova je formalizovana uz pomoć tzv. aritmetičke teorije grafova koja predstavlja specijalni kvantifikatorski račun prvog reda dobijen proširenjem formalne aritmetike. Postoji potpuno automatizovani rezolucijski dokazivač teorema i interaktivni dokazivač koji radi na bazi razlaganja cilja koji se dokazuje u konjunkciju podciljeva.

**76.** U odnosu na jedno kvaziuređenje grafova, bazirano na brojevima sparivanja u grafu, određuju se klase maksimalnih tricikličkih grafova sa  $n$  čvorova. Za male vrednosti  $n$  to se izvodi uz pomoć interaktivne grafike sistema "Graph" a za ostale vrednosti  $n$  koristi se induktivni dokaz. Nalaženje pomenutih maksimalnih grafova predstavlja tipičan primer primene sistema "Graph" u naučnim istraživanjima.

**77.** Opisuju se dve heuristike u automatskom dokazivanju teorema. Prva heuristika koristi analogije između dve podteorije inače neizomorfnih formalnih teorija. U drugom slučaju se problem utvrđivanja logičke ekvivalencije dve formule tretira uz pomoć bojenja i ponovnog bojenja čvorova jednog digrafa koji reprezentuje skup definicija formalne teorije.

**78.** Sistematski se izlažu aksiome, definicije i teoreme aritmetičke teorije grafova. Navode se primeri dokaza teorema teorije grafova kako se oni mogu izvesti uz pomoć sistema "Graph". Među primerima se nalaze sledeće teoreme: 1) "Ako graf ima 6 čvorova, tada graf ili njegov komplement sadrže bar jedan trougao", i 2) "Ako je graf izomorfan svom grafu grana, tada je graf regularan stepena 2".

**79.** Opisuje se deo sistema "Graph" za manipulaciju sa bibliografskim podacima. Korisnik može da formira sopstvenu bazu podataka o literaturi koja ga interesuje i da organizuje pretragu te baze uz pomoć imena autora, godine izdanja, ključnih fraza itd.

**80.** Data je tablica svih 112 povezanih grafova sa 6 čvorova. Grafovi su dati crtežom i uređeni su leksikografski po spektralnim momentima. Za svaki graf date su razne invarijante (spektar, brojevi sparivanja, hromatski broj itd.) od kojih su neke dobijene uz pomoć sistema "Graph". Ukazuje se na korisnost ovih tablica u istraživanjima i dokazuje jedna teorema o glavnom delu spektra.

**81.** Razmatra se lokalna struktura grafova sa najmanjom sopstvenom vrednošću  $-2$  koji nisu grafovi grana i konstruišu se svi kubni grafovi sa ovom osobinom. Elementarnim sredstvima se dobijaju grafovi grana koji mogu imati kospektralne grafove koji nisu grafovi grana.

**82.** Bez upotrebe kompjutera se konstruišu svi regularni grafovi koji su kospektralni ali ne i izomorfni sa grafovima grana.

**83.** Dokazuje se jedna formula koja povezuje broj faktora grafa sa brojem faktora nekih njegovih podgrafova.

**84.** Opisuju se algoritmi, implementirani u sistemu "Graph", za razne transformacije formula kvantifikatorskog računa. Pretpostavlja se da je formula data kao niz simbola koji je obrazuju.

**85.** Ovaj rad predstavlja proširenje rada [75]. Na principijelnom nivou se opisuju mogućnosti dokazivača teorema sistema "Graph". Struktura skupa definicija formalne teorije se predstavlja jednim digrafom u kome čvorovi predstavljaju predikate. Definišu se trase napada jednog čvora u odnosu na zadati skup čvorova. Uvodi se kompleksnost kvantifikatorske formule oblika implikacije kao prosek dužina minimalnih trasa napada predikata sa desne strane implikacije u odnosu na skup predikata sa leve strane implikacije. Formulise se princip po kome dokazivač teorema treba da izvede onu transformaciju koja maksimalno smanjuje kompleksnost formule. Navode se primeri dokaza korišćenjem principa minimalnih trasa napada.

**86.** U radu je proširena definicija nepotpune proširene  $p$ -sume (NEPS) grafova na digrafove. Korišćenjem spektralne metode dokazana je teorema koja daje potrebne i dovoljne uslove da NEPS jako povezanih digrafova bude jako povezan digraf.

**87.** U radu se posmatraju uglovi između sopstvenih potprostora matrice susedstva i osa odgovarajućeg realnog vektorskog prostora a takođe uglovi između sopstvenih potprostora i vektora čije su sve koordinate jednake 1. Iako ove grafovske invarijante za jako regularne grafove (i za neke druge klase grafova) ne sadrže više informacija nego što sadrži spektar, njihovo proučavanje može biti korisno u okviru napora da se prošire spektralne tehnike teorije grafova. Rad je saopšten na V jugoslovenskom seminaru za teoriju grafova (Beograd, 1984) a delovi originalnog rada koji su u međuvremenu objavljeni u radovima [90], [97] nisu ovde ponovljeni.

**88.** Postoji tačno 250 regularnih grafova sa najviše 10 čvorova. Pomoću sistema "Graph" sačinjena je tabela svih ovih grafova koja sadrži razne podatke o njima. Podaci iz tabele sugerišu izvesne zaključke o tim grafovima.

**89.** Izložena su neka iskustva u radu sa programskim sistemom "Graph" i njegovim korišćenjem u istraživanjima u teoriji grafova.

**90.** Rad sadrži pregled glavnih pravaca istraživanja i novijih rezultata u teoriji spektara grafova. Uključeni su (i) primena korenskih sistema na teoriju spektara grafova, (ii) spektralne karakterizacije grafova sa najmanjom sopstvenom vrednošću  $-2$ , (iii) opis nekih novih grafovski invarijanata baziranih na sopstvenim vektorima matrice susedstva, (iv) algebarsko



rešenje Shannon-ovog problema o kapacitetu grafova, (v) spektri slučajnih grafova, (vi) pregled nekih grafovskih polinoma koji su u vezi sa karakterističnim polinomom grafa, i (vii) pregled rezultata o spektrima beskonačnih grafova.

**91.** Planaran graf sa planarnim komplementom se naziva koplanaran graf. Svi koplanarni grafovi su određeni kombinovanjem matematičkog rezonovanja i kompjuterske pretrage. Pri tome je korišćen programski sistem "Graph". Postoji tačno 2976 koplanarnih grafova.

**92.** Interaktivni programski sistem "Graph", implementiran na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu, može da rešava veliki broj zadataka u teoriji grafova. U ovom radu se objašnjava da sistem "Graph" može da se koristi i u istraživanjima u hemiji i to se ilustruje sa dva primera.

**93.** Opisuje se primeri dokazivanja teorema u teoriji grafova dobijeni uz pomoć dokazivača teorema iz ekspertnog sistema "Graph".

**94.** Dokazuje se više teorema u vezi sa leksikografskim uređenjem unickličkih grafova pomoću spektralnih momenata i pomoću najveće sopstvene vrednosti. Prilog sadrži tabelu sa 89 unickličkih grafova sa 8 čvorova zajedno sa njihovim spektrima, spektralnim momentima i karakterističnim polinomima.

**95.** Neka su za jedno stablo zadate sopstvene vrednosti i uglovi između sopstvenih potprostora i osa odgovarajućeg realnog vektorskog prostora. Opisuje se algoritam za konstrukciju svih stabala sa zadatim sopstvenim vrednostima i uglovima.

**96.** Prezentirane su brojne činjenice koje ukazuju na mogućnost da grafovi dobijeni udaljavanjem čvora iz nekih jako regularnih grafova predstavljaju dobre kandidate za konstrukciju kontraprimera za Ulamovu hipotezu o rekonstrukciji grafova.

**97.** Uglovi grafa su definisani u [87] a njihove osnovne osobine su prikazane u [90]. Njihova vrednost, kao grafovskih invarijanti, demonstrirana je u radovima [94], [95], [96]. U ovom radu se koriste uglovi grafa u vezi sa operacijama nad grafovima, komponentama, prebrojavanjem četvorouglova i petouglova i lokalnim modifikacijama grafova. Pokazuje se da pojam uglova grafa unificira niz rezultata drugih autora u vezi sa nastojanjima da se poboljšaju spektralne tehnike. Rad je posvećen osamdesetom rođendanu R.W. Frucht-a.

**98.** Teorijski se obrazlaže i eksperimentalnim materijalom potkrepljuje ideja da se najveća sopstvena vrednost matrice susedstva minimalnog razapinjućeg stabla uzme kao pokazatelj složenosti egzaktnog rešenja problema trgovačkog putnika.

**99.** Kao što je poznato, problem trgovačkog putnika je *NP*-težak. Zbog toga je od interesa da se unapred proceni kompleksnost svakog zadatog specijalnog problema ovog tipa. Daje se pregled ranijih istraživanja ove vrste i daju novi rezultati pri čemu je naglasak na indeksima složenosti baziranim na minimalnom razapinjućem stablu.

**100.** U ovom radu se opisuju iskustva u korišćenju ekspertnog sistema "Graph" u istraživanjima na polju teorije grafova. U odeljku 1 se daju opšti podaci o ekspertnom sistemu "Graph". Odeljak 2 sadrži opis podsistema za procesiranje grafova (ALGOR). U 3. se daju neke opšte a u 4. neke specijalne karakteristike podsistema ALGOR značajne za istraživanja.

**101.** Posmatra se problem *M* trgovačkih putnika (*M*-TSP) sa ograničenjem da svaki putnik mora da obiđe isti broj gradova. Dva heuristička pristupa za rešavanje su sugerisana. Opisan je i algoritam grananja i ograničavanja. Ispitivana je efikasnost heuristika u pogledu vremena izvršavanja i bliskosti rešenja optimalnom rešenju.

**102.** Proizvod dužine kontura u rešenju problema asignacije je razmatran kao pokazatelj složenosti za problem trgovačkog putnika. Eksperimenti pokazuju umerenu koleraciju između ovog indeksa i broja rešenih relaksacionih zadataka u algoritmu grananja i ograničavanja sa zadatkom asignacije kao relaksacijom.

**103.** Opšte procedure raspoznavanja oblika se mogu realizovati kao problemi minimizacije kontinualno-disretnih diskriminatorskih funkcija. U radu se diskutuju analogije i odnosi između različitih tipova diskriminatorskih funkcija i odgovorajuće grafovske strukture. Kada posmatrani oblik ima markovsku osobinu, specifične strukture i odgovarajući optimizacioni kriterijumi su analizirani. U tom slučaju optimizacioni kriterijumi dovode do poznatih problema nalaženja kratkih puteva.

**104.** U ovom radu se opisuje jedan način konstrukcije kataloga grafova uz pomoć interaktivnih programskih paketa za teoriju grafova. Kao primer, generisan je i reprodukovani katalog unickličkih grafova sa 9 čvorova. Na osnovu ovog kataloga uočena je jedna osobina unickličkih grafova koja je zatim dokazana za opšti slučaj.

**105.** U radu se predlaže jedno upotpunjenje heuristika dokazivača teorema sa prirodnim izvođenjem iz ekspertnog sistema "Graph". To se postiže detaljnom analizom neformalnog dokaza jedne teoreme iz teorije grafova i pokušajem formulisanja novih heuristika koje bi, kada se implementiraju na računaru mogle da generišu nestandardne korake u dokazu razmatrane teoreme.

**106.** Uglovi grafa su uglovi između sopstvenih potprostora i osa odgovarajućeg realnog vektorskog prostora. Uglovi su uvedeni 1984. godine u radu [87]. U [95] je opisan algoritam za konstrukciju stabala sa zadatim sopstvenim vrednostima i uglovima. U ovom radu se ovaj rezultat proširuje na jednu klasu kubnih grafova.

**107.** Neka je  $\mathcal{H}(n, n+k)$  skup povezanih grafova koji imaju  $n$  čvorova i  $n+k$  grana. Grafovi sa minimalnim indeksom u  $\mathcal{H}(n, n+k)$  su određeni za (i) neke male vrednosti  $n$  i  $k$ , i (ii) za svako  $k$  i dovoljno veliko  $n$ . Dokazuje se tačnost jedne hipoteze koju su postavili R.A. Brualdi i E.S. Solheid.

**108.** U radu su dati prilozi za razradu strategija vođenja dokaza u dokazivaču teorema u ekspertnom sistemu "Graph". Između ostalog predlaže se i skolemizacija sa izborom Skolemovih konstanti koja omogućava upotrebu određenih lema.

**109.** Grananje dokaza jedne teoreme u dva nezavisna parcijalna dokaza, a na osnovu nekog kriterijuma, predstavlja uvek težak korak kako za čoveka tako i za automatske dokazivače teorema. U ovom radu se opisuju neke heuristike za automatsko generisanje konkretnog kriterijuma za grananje dokaza. Ove heuristike će doprineti daljem poboljšanju strategije vođenja dokaza u dokazivaču teorema ekspertnog sistema "Graph".

**110.** U radu se problem klasterovanja čvorova grafa formuliše kao jedan optimizacioni zadatak: diskutuju se različite funkcije kriterijuma u ovom zadatku. Prilikom podele grafa na dva dela, jedan od mogućih kriterijuma je kriterijum gustine grana između delova: sa ovakvim kriterijumom zadatak se rešava za stabla.

**111.** Novembra 1989. godine navršava se 10 godina odkako je na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu počeo razvoj interaktivnog ekspertnog sistema za teoriju grafova "Graph". Tim povodom u ovom članku se izlaže hronologija rada na sistemu, daju se podaci o saradnicima, o postignutim rezultatima, o objavljenim publikacijama, o održanim predavanjima i dr. Ovaj pregledni rad upotpunjuje podatke objavljene u ranijim radovima, o

aktivnostima u vezi sistema "Graph". Takođe se izlažu neka iskustva iz rada na sistemu "Graph" koja su, možda, od opštijeg značaja na polju istraživanja veštačke inteligencije.

## 4. Apstrakti naučnih radova (112 - 215)

Korišćeni su redni brojevi iz spiska naučnih radova.

**112.** This article is a survey of results concerning the largest eigenvalue (or index) of a graph categorized as follows: (1) inequalities for the index, (2) graphs with bounded index, (3) ordering graphs by their indices, (4) graph operations and modifications, (5) random graphs, (6) applications.

**113.** Graph angles are (cosines of the) angles between eigenspaces of the adjacency matrix of the graph and the vectors of a standard basis of the corresponding real vector space. We give some necessary conditions (in terms of eigenvalues and angles) for two vertices of the graph to be joined by an edge and, in particular, by a bridge.

**114.** We continue the investigations on the relations between eigenvalues, eigenspaces and the structure of graphs. The angles between eigenspaces and the axes of a standard basis of  $R^n$  play an important role. A general problem is how to construct graphs with the given eigenvalues and angles. In particular, we treat connectivity and metric properties, reconstruction of unicyclic and bicyclic graphs, etc. The results are mostly of an algorithmic character rather than in form of explicit characterization theorems. Therefore we propose to treat these problems with the aid of a computer using artificial intelligence means.

**115.** We report on the implementation of a programming package, called TSP-SOLVER, for the travelling salesman problem (TSP). Various variants of TSP can be treated by TSP-SOLVER: both symmetric and asymmetric cases, one- or multiple-TSP, one or first  $k$  best solutions, bandwidth limited distance matrix and others special cases, algorithms and heuristics. The system is user-friendly and offers the user, among other things, some possibilities to intervene during the solving a problem.

**116.** We investigate the relationship between the structure of a graph and its eigenspaces. The angles between the eigenspaces and the vectors of a standard basis of  $R^n$  play an important role. The key notion is that of a special basis for an eigenspace called a star basis. Star bases enable us to define a canonical basis of  $R^n$  associated with a graph, and to formulate an algorithm for graph isomorphism.

**117.** We propose a modification of the standard branch and bound procedure for combinatorial optimization problems which enables finding best suboptimal solutions. We provide more details by describing an implementation of the algorithm for the travelling salesman problem.

**118.** This paper presents a polynomial dynamic programming based algorithm for solving  $M$  ( $M \geq 1$ ) travelling salesmen problem (TSP) on a directed bandwidth-limited graph, where the number of cities to be visited by each of the  $M$  travelling salesmen is specified.

**119.** We report on difficulties in applying traditional clustering procedures to discrete data. We describe a graph theoretical approach in clustering binary vectors. New clustering procedures are combined from several algorithms and heuristics from graph theory and combinatorial optimizations.

**120.** An interactive programming package, called GRAPH, an expert system for graph theory, was developed at the University of Belgrade, Faculty of Electrical Engineering during the period 1980-1984. GRAPH was designed to support research in graph theory, among other things, by helping to pose, verify and disprove conjectures. We report here on graph theory results, obtained by several researches in period 1982-1992. which have been obtained with the support of the expert system GRAPH. Most of the results belong to the theory of graph spectra.

**121.** We propose some invariants of subgraphs induced by short edges in a travelling salesman problem as complexity indices for the task. Numerical results are given which are based on the experiments with the programming packages GRAPH and TSP-SOLVER, developed at the University of Belgrade, Faculty of Electrical Engineering.

**122.** The NEPS (Non-complete Extended  $p$ -Sum) of graphs is a graph operation in which the vertex set of the resulting graph is the Cartesian product of the vertex sets of starting graphs. The paper contains a survey on NEPS and some new results concerning graph angles and star partitions of NEPS.

**123.** We present a survey of some non-standard travelling salesman problems (TSP) with emphasis on authors' contributions. The results include complexity indices and  $k$ -best solutions for the ordinary TSP, the TSP on a chained structure, a multi-TSP on a bandwidth-limited digraph as well as the corresponding general case, a generalized TSP as well as the description of some software for TSP.

**124.** Star partitions of graphs were introduced in a recent paper by the same authors in order to extend spectral methods in algebraic graph theory. Here it is shown that the corresponding partitioning problem is polynomial. Two algorithms are investigated: the first is based on maximum matching problems for graphs, and the second invokes an algorithm for matroid intersection.

**125.** It is well known in the theory of graph spectra that connected graphs except for complete multipartite (including complete) graphs have the second largest eigenvalue greater than 0. Graphs whose second largest eigenvalue does not exceed  $1/3$  are characterized in Cao and Yuan (1993). In this paper we study the structure of graphs whose second largest eigenvalue does not exceed  $(\sqrt{5} - 1)/2$ .

**126.** We present a survey of tables of graph spectra and related graph invariants. We provide tables of graph angles for connected graphs up to 5 vertices and of algebraic connectivities for connected graphs up to 6 vertices.

**127.** As is well known in spectral graph theory, all (connected) graphs except complete graphs and complete multi-partite graphs have the second largest eigenvalue greater than 0. Graphs whose second largest eigenvalue does not exceed  $1/3$  were recently characterized by D. Cao and Y. Hong. In the same paper they posed the problem of characterizing those graphs whose second largest eigenvalue is less than  $(\sqrt{5} - 1)/2$  (golden ratio). As recently proved by the second author, these graphs can be characterized by a finite collection of forbidden (induced) subgraphs. The aim of the present paper is to describe the above collection within more details: partly by an explicit list while the rest is characterized in an efficient way.

**128.** We report on difficulties in applying traditional clustering procedures to discrete data. We describe a graph theoretical approach in clustering binary vectors where the number of clusters is not given in advance. New clustering procedures are combined from several algorithms and heuristics from graph theory.

**129.** We develop a search strategy in branch and bound algorithms for the travelling salesman problem based on several characteristics of subproblems in the search tree. These characteristics include the length of the solution of the relaxation task as well as complexity indices for travelling salesman problem.

**130.** We propose some modifications of the strategy guiding the proof in the theorem prover of the expert system "Graph". We have extended the domain of some of the existing heuristics and discussed the priority among heuristics. Among other things we explain the interaction between resolution theorem prover and a heuristic for elimination of quantifiers. We describe how some special properties of predicates (such as symmetry and transitivity) can be combined with quantifier elimination.

**131.** A canonical basis of  $R^n$  associated with a graph  $G$  on  $n$  vertices has been defined in connection with eigenspaces and star partitions of  $G$ . The canonical star basis together with eigenvalues of  $G$  determines  $G$  to an isomorphism. We study algorithms for finding the canonical basis and some of its variations. The emphasis is given on the following three special cases: graphs with distinct eigenvalues, graphs with bounded eigenvalue multiplicities and strongly regular graphs. We show that the procedure is reduced in some parts to special cases of some well known combinatorial optimization problems, such as the maximal matching problem, the minimal cut problem, the maximal clique problem etc. This technique provides another proof of a result of L. Babai et al. that isomorphism testing for graphs with bounded eigenvalue multiplicities can be performed in a polynomial time. We show that the canonical basis in strongly regular graphs is related to the graph decomposition into two strongly regular induced subgraphs. Examples of distinguishing between cospectral strongly regular graphs by means of the canonical basis are provided. The behavior of star partitions of regular graphs under operations of complementation and switching is studied.

**132.** In some experiments with the programming package TSP-SOLVER, previously developed at the University of Belgrade, Faculty of Electrical Engineering, a strong correlation between spectral moments of the distance matrix and the lengths of an optimal solution of the travelling salesman problem has been noticed. In this paper we gave a partial theoretical explanation of this correlation.

**133.** The travelling salesman problem (TSP) on a chained digraph is studied. An algorithm based on the ideas of dynamic programming is presented.



A previously known reduction to a kind of the shortest path problem is extended to a special multi-TSP.

**134.** This paper briefly presents selected results in the applications of operational research methods achieved in Yugoslavia through international cooperation, over the last decade. We have chosen five characteristic international research projects where Yugoslav OR teams successfully applied operational research methods. They are: 1) evaluation of motorway traffic control systems - Project COST 30; 2) improvements in traffic management and control in Moscow; 3) multi-criteria analysis of local area networks - Project COST 11-ter; 4) operational research methods in traffic control in Beijing; and 5) expert system GRAPH. In each of these projects sophisticated and not at all routine operational research methods were used.

**135.** This is a survey paper on the second largest eigenvalue  $\lambda_2$  of the adjacency matrix of a graph. Among the topics presented are the graphs with small  $\lambda_2$ , bounds for  $\lambda_2$ , algebraic connectivity, graphs with good expanding properties (such as Ramanujan graphs), rapidly mixing Markov chains etc. Applications to computer science are mentioned. Recent results of the authors are included.

**136.** We present some supplements to the tables of graph spectra which have been published in books "Spectra of Graphs" and "Recent Results in the Theory of Graph Spectra". Results are obtained making use of the expert system "Graph".

**137.** The number of spanning trees in a graph can be obtained from the Laplacian spectrum of the graph. If the graph is regular, the number of spanning trees can be obtained from the eigenvalues of the adjacency matrix. A survey of enumeration results from the number of spanning trees, which are obtained by spectral techniques, will be given. Some other results connecting spectra and spanning trees will be discussed as well.

**138.** We consider the problem of reconstructing the characteristic polynomial of a graph  $G$  from the collection  $\mathcal{P}(G)$  of characteristic polynomials of vertex deleted subgraphs of  $G$ . We study properties and invariants of  $G$  that can be derived from  $\mathcal{P}(G)$ . Under the assumption that the reconstruction of the characteristic polynomial is not unique, we describe some properties of graphs in question.

**139.** We present a catalogue of the 236 (connected) bicyclic graphs on eight vertices. Eigenvalues, some spectral moments and the coefficients of

the characteristic polynomial, together with a picture, are given for each graph in the catalogue.

**140.** The NEPS (Non-complete Extended  $p$ -Sum) of graphs is a graph operation in which the vertex set of the resulting graph is the Cartesian product of the vertex sets of starting graphs. Under certain conditions the NEPS of bipartite graphs is disconnected. Among related topics we study spectral properties of components of such a NEPS.

**141.** We describe an algorithm for finding a minimal  $s$ -branching (where  $s$  is a given number of its arcs) in a weighted digraph with an asymmetric weight matrix. The algorithm uses the basic principles of the method (previously developed by J. Edmonds) for determining a minimal branching in the case when the number of its arcs is not specified in advance. We give a proof of the correctness of the described algorithm, and discuss its numerical complexity.

**142.** A computer search shows that there are 58 pairs of cospectral graphs with the same angles and with 10 vertices. There are no such pairs of graphs on less than 10 vertices. There is only one pair of cospectral trees with the same angles and with no more than 20 vertices; these trees have 19 vertices.

**143.** We consider the problem of reconstructing the characteristic polynomial of a graph  $G$  from the collection  $\mathcal{P}(G)$  of characteristic polynomials of vertex deleted subgraphs of  $G$ . Using a mixture of mathematical reasoning and computer search we try to find counterexamples to the conjecture that  $P_G(\lambda)$  is uniquely determined by  $\mathcal{P}(G)$ . In particular, there are no counterexamples with graphs up to 10 vertices. Experiments with trees up to 28 vertices did not provide any counterexample. On the contrary, empirical material gave us an idea how to prove that the problem has a positive solution for trees.

**144.** Possible spectra of 4-regular integral graphs are determined. Some constructions and a list of 65 known connected 4-regular integral graphs are given.

**145.** We describe an algorithm for finding a minimal  $s$ -branching (where  $s$  is a given number of its arcs) in a weighted digraph with an asymmetric weight matrix. The algorithm uses the basic principles of the method (previously developed by J. Edmonds) for determining a minimal branching in the case when the number of its arcs is not specified in advance. Here we give a proof of the correctness for the described algorithm.

**146.** Let  $G$  be a graph on  $n$  vertices with the adjacency matrix  $A$ . We consider cosines of angles between vectors of a standard (orthonormal) basis of  $R^n$  ( $n$ -dimensional real vector space) and eigenspaces of  $A$ , and call them graph angles. It turns out that electron charges from the Hückel molecular orbital theory are sums of squares of angles belonging to corresponding eigenvalues. Much of the work in both mathematical and chemical literature was devoted to the study of isospectral graphs, i.e. isospectral molecules. We present some theoretical and computational results giving an insight as to what extent graphs are characterized when both the eigenvalues and angles are known.

**147.** We apply semidefinite programming (SDP) to the well-known NP-hard combinatorial optimization problem - travelling salesman problem (TSP). TSP is modelled as the problem of minimizing a linear objective function over a set of positive semidefinite integer matrices. In order to estimate the optimal objective function value, an SDP relaxation of TSP model is defined. Its efficiency is discussed and some numerical experiments are reported.

**148.** The recently developed Variable Neighborhood Search (VNS) meta-heuristic for combinatorial and global optimization is outlined together with its specialization to the problem of finding extremal graphs with respect to one or more invariants and the corresponding program (AGX). We illustrate the potential of the VNS algorithm on the example of energy  $E$ , a graph invariant which (in the case of molecular graphs of conjugated hydrocarbons) corresponds to the total  $\pi$ -electron energy. Novel lower and upper bound for  $E$  are suggested by AGX and several conjectures concerning (molecular) graphs with extremal  $E$  values put forward. Moreover, most of the bounds are proved to hold.

**149.** In the set of bicolored trees with given numbers of black and of white vertices we describe those for which the largest eigenvalue is extremal (maximal or minimal). The results are first obtained by the automated system AutoGraphiX, developed in GERAD (Montreal), and verified afterwards by theoretical means.

**150.** Let  $\mu$  be an eigenvalue of the graph  $G$  with multiplicity  $k$ . A star complement for  $\mu$  in  $G$  is an induced subgraph  $H = G - X$  such that  $|X| = k$  and  $\mu$  is not an eigenvalue of  $G - X$ . The database contains about 1500 triples  $(G; H; \mu)$  and is available as a supplement to the programming package "Graph". It was produced using (a) "Graph" itself,

(b) programs developed independently by M. Lepović, and (c) data from other sources cited in the bibliography. This paper contains a description of the database and a commentary which explains how some interesting graphs can be obtained by extending appropriate star complements.

**151.** Let  $G$  be a connected graph with least eigenvalue  $-2$  of multiplicity  $k$ . A star complement for  $-2$  in  $G$  is an induced subgraph  $H = G - X$  such that  $|X| = k$  and  $-2$  is not an eigenvalue of  $H$ . In the case that  $G$  is a generalized line graph, a characterization of such subgraphs is used to describe the eigenspace of  $-2$ . In some instances,  $G$  itself can be characterized by a star complement. If  $G$  is not a generalized line graph,  $G$  is an exceptional graph, and in this case it is shown how a star complement can be used to construct  $G$  without recourse to root systems.

**152.** This paper contains a number of results in the theory of star partitions of graphs. We illustrate a variety of situations which can arise when the Reconstruction Theorem for graphs is used, considering in particular *galaxy* graphs - these are graphs in which every star set is independent. We discuss a recursive ordering of graphs based on the Reconstruction Theorem, and point out the significance of galaxy graphs in this connection.

**153.** Let  $\mu$  be an eigenvalue of the graph  $G$  with multiplicity  $k$ . A star complement for  $\mu$  in  $G$  is an induced subgraph  $H = G - X$  such that  $|X| = k$  and  $\mu$  is not an eigenvalue of  $G - X$ . Various graphs related to (generalized) line graphs, or their complements are characterized by star complements corresponding to eigenvalues  $-2$  or  $1$ .

**154.** We discuss possibilities of constructing fullerene graphs from their eigenvalues and angles. An algorithm for this construction is given.

**155.** An eigenvalue of a graph is called main if the corresponding eigenspace contains an eigenvector in which the sum of coordinates is different from zero. It is proved that the number of main eigenvalues does not exceed the number of orbits (sets of vertices equivalent under the group of automorphisms of the graph).

**156.** We apply semidefinite programming to the symmetric travelling salesman problem (TSP). The TSP is modeled as a problem of discrete semidefinite programming. In order to estimate the optimal objective value, a class of semidefinite relaxations of the TSP model is defined. Experimental results with randomly generated examples show that the proposed relaxation give considerable better bounds than 2-matching and 1-tree relaxations.

**157.** In this paper the symmetric travelling salesman problem (STSP) is modelled as a problem of discrete semidefinite programming. A class of semidefinite relaxations of STSP model is defined and two variants of a branch-and-bound technique based on this class of relaxations are proposed. The results of preliminary numerical experiments with randomly generated problems are reported.

**158.** A graph is called integral if its spectrum consists entirely of integers. Using existing graph catalogues we established that there are exactly 150 connected integral graphs up to 10 vertices. Adjacency matrices and/or pictures, and spectra of these graphs together with some comments are given in this paper.

**159.** Complexity indices for combinatorial optimization problems are parameters attributed to each instance of the problem by which we can predict execution time of a branch and bound algorithm for this problem. We study some complexity indices for the travelling salesman problem (TSP) which are based on the information contained in the solution of a semidefinite relaxation of the problem. The relaxation is obtained by omitting integrality conditions from the semidefinite programming model of TSP and can be solved in polynomial time by interior point methods.

**160.** A graph is said to be exceptional if it is connected, has least eigenvalue greater than or equal to  $-2$ , and is not a generalized line graph. Such graphs are known to be representable in the exceptional root system  $E_8$ . We determine the maximal exceptional graphs by a computer search using the star complement technique, and then show how they can be found by theoretical considerations using a representation of  $E_8$  in  $R^8$ . There are exactly 473 maximal exceptional graphs.

**161.** A graph is said to be exceptional if it is connected, has least eigenvalue greater than or equal to  $-2$ , and is not a generalized line graph. Such graphs are known to be representable in the exceptional root system  $E_8$ . The 473 maximal exceptional graphs have been found by computer, and the 467 with maximal degree 28 have been characterized. Here we construct the remaining six maximal exceptional graphs by means of representations in  $E_8$ .

**162.** A graph is said to be *exceptional* if it is connected, has least eigenvalue greater than or equal to  $-2$ , and is not a generalized line graph. Such graphs are known to be representable in the root system  $E_8$ . The 473

maximal exceptional graphs were found initially by computer, and the 467 with maximal degree 28 have subsequently been characterized. Here we use constructions in  $E_8$  to prove directly that there are just six maximal exceptional graphs with maximal degree less than 28.

**163.** The paper proposes an adaptive solution procedure for the Symetric Travelling Salesman Problem (TSP). Using the notion of complexity indices TSP instances are classified in two classes - "hard" and "easy". Easy instances are solved by an exact branch and bound algorithm which uses semidefinite relaxations. In the case of hard instances we use a new heuristic which solves the problem by limited branching based on the information contained in the solution of the semidefinite relaxation.

**164.** A graph is said to be exceptional if it is connected, has least eigenvalue greater or equal to  $-2$ , and is not a generalised line graph. Such graphs are known to be representable in the exceptional root system  $E_8$ . The 473 maximal exceptional graphs have been found by computer using the star complement technique, and subsequently described using properties of  $E_8$ . Here we present some information about these graphs obtained in the computer search: the exceptional star complement, some data on extendability graphs and the corresponding maximal graphs, the maximal exceptional graphs and some of their invariants.

**165.** The paper considers new polynomial heuristics based on the standard 3-opt technique which use the information contained in the optimal solution of the semidefinite relaxation of the Travelling Salesman Problem.

**166.** We survey main results of the theory of graphs with least eigenvalue  $-2$  starting from late fifties (papers by A.J. Hoffman et al.), via important results (P.J. Cameron et al., 1976) involving root systems, to the recent approach by the star complement technique which culminated in finding and characterizing maximal exceptional graphs. Some novel results on maximal exceptional graphs are included as well. In particular, we show that all exceptional graphs, except for the cone over  $L(K_8)$ , can be obtained by the star complement technique starting from a unique (exceptional) star complement for the eigenvalue  $-2$ .

*From the introduction:* Graphs with least eigenvalue  $-2$  can be represented by sets of vectors at  $60$  or  $90$  degrees via the corresponding Gram matrices. Maximal sets of lines through the origin with such mutual angles are closely related to the root systems known from the theory of Lie algebras. Using such a geometrical characterization one can show that graphs

in question are either generalized line graphs (representable in the root system  $D_n$  for some  $n$ ) or exceptional graphs (representable in the exceptional root system  $E_8$ ). We present several results on generalized line graphs and on exceptional graphs; some are new and some are old but from new view points. In particular, we describe how maximal exceptional graphs, 473 in number, have recently been determined independently by a Serbian-British and a Japanese group of researchers using computers and then constructed theoretically by the first group. The recent star complement technique approach to the study of graphs with least eigenvalue  $-2$  can be used as an alternative to the root system technique, but the construction was achieved by combining both techniques. We prove several theorems describing properties of maximal exceptional graphs.

**167.** A graph whose spectrum consists entirely of integers is called an integral graph. We present a survey of results on integral graphs and on the corresponding proof techniques.

**168.** In this chapter we are concerned with the spectrum of the adjacency matrix of a finite graph. We present a selection of recent results related to graph angles, star sets, star partitions, star complements and graphs with least eigenvalue  $-2$ . In addition, we consider a spectral reconstruction problem, graphs which are cospectral or almost cospectral, and graphs for which all eigenvalues are integers.

**169.** An interactive programming package called GRAPH, an expert system for graph theory, was developed at the University of Belgrade, Faculty of Electrical Engineering, during the period 1980-1984. GRAPH was designed to support research in graph theory, among other things, by helping to pose, verify and disprove conjectures. We report here on graph theory results, obtained by several researchers in the period 1982-2001, which have been obtained with the support of the expert system GRAPH. In this way we extend a previous survey [120]. Most of the results belong to the theory of graph spectra.

**170.** It is known that graph invariants, which contain a great quantity of information on graph structure (for example, spectral invariants), are obtained by solving some extremal problems on graphs. Recently, such highly informative graph invariants are applied in solving optimization problems on graphs (e.g., the travelling salesman problem (TSP)). Using these paradigms, several relations, interconnections and interactions between graph

theory and mathematical programming are described in this study. A model of TSP based on semidefinite programming and algebraic connectivity of graphs is described. A class of relaxations of this TSP model is defined and some solution techniques based on this class are proposed. Several examples of graph invariants defined by some kind of optimization tasks are also presented. Using several spectrally based graph invariants we treat the graph isomorphism problem.

**171.** This paper discusses certain connections between graph invariants which contain a great quantity of information on graph structure (highly informative graph invariants) and combinatorial optimization problems. Namely, highly informative graph invariants are useful in modeling and solving combinatorial optimization problems, while some important invariants are obtained by solving combinatorial optimization problems. This is illustrated by two examples. The algebraic connectivity of graphs is used to model the traveling salesman problem as a discrete semidefinite programming problem. On the other hand, canonical star bases of graphs can be determined by solving the maximal clique problem.

**172.** Generalized line graphs were introduced by Hoffman, Proc. Calgary Internat. Conf. on Combinatorial Structures and their applications, Gordon and Breach, New York (1970); they were characterized in 1980 by a collection of 31 forbidden induced subgraphs, obtained independently by Cvetković et al., Comptes Rendus Math. Rep. Acad. Sci. Canada (1980) and S. B. Rao et al., Proc. Second Symp., Indian Statistical Institute, Calcutta, Lecture Notes in Math., (1981). Here a short new proof of this characterization theorem is given, based on an edge-colouring technique.

**173.** We determine the graphs with least eigenvalue at least  $-\sqrt{3}$ .

**174.** Let  $G$  be a fullerene on  $n$  vertices having width  $w$ . We prove that the  $k$ -th spectral moment of  $G$  depends only on  $n$ ,  $w$  and  $k$  for  $k \leq 2w + 6$  and its value is denoted by  $W(n, w, k)$ . We study the properties of the function  $W(n, w, k)$  and derive some bounds for the width  $w$  in terms of eigenvalues of  $G$ .

**175.** We introduce the notion of the  $L$ -core of a graph what enables a simple description of some properties of the eigenspace of the eigenvalue  $-2$  in generalized line graphs and an elegant formulation of the solution of a problem in the security of data in statistical databases.



**176.** We present several results on the structure of the eigenspace of the eigenvalue  $-2$  in generalized line graphs and in exceptional graphs; some are new and some are old but from new view points.

**177.** This paper introduces a generalized short edges subgraph, a tool for solving combinatorial optimization problems. The subgraph may be used for evaluating complexity indices of an instance of a combinatorial optimization problem as well as an auxiliary element or a guide within a solution procedure for a problem.

**178.** The uniting feature of combinatorial optimization and extremal graph theory is that in both areas one should find extrema of a function defined in most cases on a finite set. While in combinatorial optimization the point is in developing efficient algorithms and heuristics for solving specified types of problems, the extremal graph theory deals with finding bounds for various graph invariants under some constraints and with constructing extremal graphs. We analyze by examples some interconnections and interactions of the two theories and propose some conclusions.

**179.** In this paper we study the phenomenon of cospectrality in generalized line graphs and in exceptional graphs. The paper contains a table of sets of cospectral graphs with least eigenvalue at least  $-2$  and at most 8 vertices together with some comments and theoretical explanations of the phenomena suggested by the table. In particular, we prove that the multiplicity of the number 0 in the spectrum of a generalized line graph  $L(G)$  is at least the number of petals of the corresponding root graph  $G$ .

**180.** We study the phenomenon of cospectrality in generalized line graphs and in exceptional graphs. We survey old results from today's point of view and obtain some new results partly by the use of computer. Among other things, we show that a connected generalized line graph  $L(H)$  has an exceptional cospectral mate only if its root graph  $H$ , assuming it is itself connected, has at most 9 vertices. The paper contains a description of a table of sets of cospectral graphs with least eigenvalue at least  $-2$  and at most 8 vertices together with some comments and theoretical explanations of the phenomena suggested by the table.

**181.** An exceptional graph is a connected graph with least eigenvalue greater than or equal to  $-2$  which is not a generalized line graph. There are finitely many exceptional graphs. Maximal exceptional graphs have been

recently identified. In this paper we discuss some details related to the construction of maximal exceptional graphs.

**182.** The spectrum of a graph is the spectrum of its adjacency matrix. Cospectral (or isospectral) graphs are graphs having the same spectrum. We develop some algebraic tools for treating sets of isospectral non-isomorphic graphs (SINGs). SINGs with eigenvalues greater than  $-(1 + \sqrt{5})/2 = -1.6180$  are classified.

**183.** The spectrum of a graph is the spectrum of its adjacency matrix. Cospectral graphs are graphs having the same spectrum. In this paper we study the phenomenon of cospectrality in graphs by comparing characterizing properties of spectra of graphs and spectra of their line graphs. We present some arguments showing that the latter perform better. In this comparison we use spectra of signless Laplacians of graphs.

**184.** This paper considers the problem of finding all representations of the Hamiltonian circuit  $C_n$  having a common eigenvector  $x$  for the second largest eigenvalue. Toward that goal we introduce a notion of triplet which is used to describe all transformations of  $C_n$  preserving  $x$  as an eigenvector. Several theorems related to the number of triplets and different representations are proved.

**185.** Let  $G$  be a finite graph of order  $n$  with an eigenvalue  $\mu$  of multiplicity  $k$ . (Thus the  $\mu$ -eigenspace of a  $(0, 1)$ -adjacency matrix of  $G$  has dimension  $k$ .) A star complement for  $\mu$  in  $G$  is an induced subgraph  $G - X$  of  $G$  such that  $|X| = k$  and  $G - X$  does not have  $\mu$  as an eigenvalue. An exceptional graph is a connected graph, other than a generalized line graph, whose eigenvalues lie in  $[-2, +\infty)$ . We establish some properties of star complements, and of eigenvectors, of exceptional graphs with least eigenvalue  $-2$ .

**186.** We survey properties of spectra of signless Laplacians of graphs and discuss possibilities for developing a spectral theory of graphs based on this matrix. For regular graphs the whole existing theory of spectra of the adjacency matrix and of the Laplacian matrix transfers directly to the signless Laplacian, and so we consider arbitrary graphs with special emphasis on the non-regular case. The results which we survey (old and new) are of two types: (a) results obtained by applying to the signless Laplacian the same reasoning as for corresponding results concerning the adjacency matrix, (b) results obtained indirectly via line graphs. Among other things, we present eigenvalue bounds for several graph invariants, an interpretation of the coef-

ficients of the characteristic polynomial, a theorem on powers of the signless Laplacian and some remarks on star complements.

**187.** We consider four conjectures related to the largest eigenvalue of (the adjacency matrix of) a graph (i.e., to the index of the graph). Three of them have been formulated after some experiments with the programming system AutoGraphiX, designed for finding extremal graphs with respect to given properties by the use of variable neighborhood search. The conjectures are related to the maximal value of the irregularity and spectral spread in  $n$ -vertex graphs, to a Nordhaus-Gaddum type upper bound for the index, and to the maximal value of the index for graphs with given numbers of vertices and edges. None of the conjectures has been resolved so far. We present partial results and provide some indications that the conjectures are very hard.

**188.** In this paper we study the conditions under which the stability number of line graphs, generalized line graphs and exceptional graphs attains a convex quadratic programming upper bound. In regular graphs this bound is reduced to the well known Hoffman bound. Some vertex subsets inducing subgraphs with regularity properties are analyzed. Based on an observation concerning the Hoffman bound a new construction of regular exceptional graphs is provided.

**189.** In our research in spectral graph theory we often encounter the need for the simultaneous editing of two or more interdependent graphs (e.g. a graph and its line graph), together with multiple labellings of their vertices and edges. Occasionally, labellings are of such kind that it could be beneficial to permit the user to modify the labelling and test whether it still satisfies a given property. Here we develop a methodology for treating such situations, which is implemented in system newGRAPH.

**190.** The sum of the absolute values of the eigenvalues of a graph is called the energy of the graph. We study the problem of finding graphs with extremal energy within specified classes of graphs. We develop tools for treating such problems and obtain some partial results. Using calculus, we show that an extremal graph "should" have a small number of distinct eigenvalues. However, we also present data that show in many cases that extremal graphs can have a large number of distinct eigenvalues.

**191.** In this paper we consider the problem of determining distance-perfect graphs in the sense of the metric dimension. We show that distance-perfect

graphs are either paths or have diameter at most 3.

**192.** We extend our previous survey of properties of spectra of signless Laplacians of graphs. Some new bounds for eigenvalues are given, and the main result concerns the graphs whose largest eigenvalue is maximal among the graphs with fixed numbers of vertices and edges. The results are presented in the context of a number of computer-generated conjectures.

**193.** The minimum rank of a simple graph  $G$  is defined to be the smallest possible rank over all symmetric real matrices whose  $ij$ th entry (for  $i \neq j$ ) is nonzero whenever  $i, j$  is an edge in  $G$  and is zero otherwise. This paper introduces a new graph parameter,  $Z(G)$ , that is the minimum size of a zero forcing set of vertices and uses it to bound the minimum rank for numerous families of graphs, often enabling computation of the minimum rank.

**194.** Let  $G$  be a connected graph whose least eigenvalue  $\lambda(G)$  is minimal among the connected graphs of prescribed order and size. We show first that either  $G$  is complete or  $\lambda(G)$  is a simple eigenvalue. In the latter case, the sign pattern of a corresponding eigenvector determines a partition of the vertex set, and we study the structure of  $G$  in terms of this partition. We find that  $G$  is either bipartite or the join of two graphs of a simple form.

**195.** We continue our investigation of graphs  $G$  for which the least eigenvalue  $\lambda(G)$  is minimal among the connected graphs of prescribed order and size. We provide structural details of the bipartite graphs that arise, and study the behaviour of  $\lambda(G)$  as the size increases while the order remains constant. The non-bipartite graphs that arise were investigated in a previous paper [F.K. Bell, D. Cvetković, P. Rowlinson, S.K. Simić, Graphs for which the least eigenvalue is minimal, I, *Linear Algebra Appl.* (2008), doi:10.1016/j.laa.2008.02.032]; here we distinguish the cases of bipartite and non-bipartite graphs in terms of size.

**196.** We prove that the minimum value of the least eigenvalue of the signless Laplacian of a connected nonbipartite graph with a prescribed number of vertices is attained solely in the unicyclic graph obtained from a triangle by attaching a path at one of its endvertices.

**197.** We extend our previous surveys of properties of spectra of signless Laplacians of graphs. Some new theorems for the signless Laplacian eigenvalues are given. In particular, a theorem on spectral characterization of graphs with  $Q$ -index not exceeding 4 is proved. The signless Laplacian eigenvalues of connected graphs on six vertices are given in Appendix.

**198.** Let  $G$  be a graph with diameter  $D$ , maximum vertex degree  $\Delta$ , the largest eigenvalue  $\lambda_1$  and  $m$  distinct eigenvalues. The products  $m\Delta$  and  $(D+1)\lambda_1$  are called the tightness of  $G$  of the first and second type, respectively. In the recent literature it was suggested that graphs with a small tightness of the first type are good models for the multiprocessor interconnection networks. We study these and some other types of tightness and some related graph invariants and demonstrate their usefulness in the analysis of multiprocessor interconnection networks. Tightness values for graphs of some standard interconnection networks are determined. We also present some facts showing that the tightness of the second type is a relevant graph invariant. We prove that the number of connected graphs with a bounded tightness is finite.

**199.** This paper presents metric dimensions of strongly regular graphs up to 45 vertices. Total number of such graphs is over 43000. The results are obtained by CPLEX solver using the compact integer programming formulation of the metric dimension problem. The metric dimension of any two members of the class of strongly regular graphs, with given parameters, differs by at most one.

**200.** This paper presents results of an exhaustive search for graphs with small value of invariants relevant for the description and design of multiprocessor interconnection networks. Four such invariants with common name tightness have been computed for all connected graphs up to 10 vertices. We used the public facility *Nauty* for generating graphs. We have identified graphs with small tightness and they indeed represent well-suited models for interconnection networks.

**201.** A spectral graph theory is a theory in which graphs are studied by means of eigenvalues of a matrix  $M$  which is in a prescribed way defined for any graph. This theory is called  $M$ -theory. We outline a spectral theory of graphs based on the signless Laplacians  $Q$  and compare it with other spectral theories, in particular with those based on the adjacency matrix  $A$  and the Laplacian  $L$ . The  $Q$ -theory can be composed using various connections to other theories: equivalency with  $A$ -theory and  $L$ -theory for regular graphs, or with  $L$ -theory for bipartite graphs, general analogies with  $A$ -theory and analogies with  $A$ -theory via line graphs and subdivision graphs. We present results on graph operations, inequalities for eigenvalues and reconstruction problems.

**202.** Homogeneous multiprocessor systems are usually modelled by undi-

rected graphs. Vertices of these graphs represent the processors, while edges denote the connection links between adjacent processors. Let  $G$  be a graph with diameter  $D$ , maximum vertex degree  $\Delta$ , the largest eigenvalue  $\lambda_1$  and  $m$  distinct eigenvalues. The products  $m\Delta$  and  $(D + 1)\lambda_1$  are called the tightness of  $G$  of the first and second type, respectively. In recent literature it was suggested that graphs with a small tightness of the first type are good models for the multiprocessor interconnection networks. In a previous paper we studied these and some other types of tightness and some related graph invariants and demonstrated their usefulness in the analysis of multiprocessor interconnection networks. We proved that the number of connected graphs with a bounded tightness is finite. In this paper we determine explicitly graphs with tightness values not exceeding 9. There are 69 such graphs and they contain up to 10 vertices. In addition we identify graphs with minimal tightness values when the number of vertices is  $n = 2, \dots, 10$ .

**203.** A spectral graph theory is a theory in which graphs are studied by means of eigenvalues of a matrix  $M$  which is in a prescribed way defined for any graph. This theory is called  $M$ -theory. We outline a spectral theory of graphs based on the signless Laplacians  $Q$  and compare it with other spectral theories, in particular to those based on the adjacency matrix  $A$  and the Laplacian  $L$ . As demonstrated in the first part, the  $Q$ -theory can be constructed in part using various connections to other theories: equivalency with  $A$ -theory and  $L$ -theory for regular graphs, common features with  $L$ -theory for bipartite graphs, general analogies with  $A$ -theory and analogies with  $A$ -theory via line graphs and subdivision graphs. In this part, we introduce notions of enriched and restricted spectral theories and present results on integral graphs, enumeration of spanning trees, characterizations by eigenvalues, cospectral graphs and graph angles.

**204.** Homogeneous multiprocessor systems are usually modelled by undirected graphs. Vertices of these graphs represent the processors, while edges denote the connection links between adjacent processors. Let  $G$  be a graph with diameter  $D$ , maximum vertex degree  $\Delta$ , the largest eigenvalue  $\lambda_1$  and  $m$  distinct eigenvalues. The products  $m\Delta$  and  $(D + 1)\lambda_1$  are called the tightness of  $G$  of the first and second type, respectively. In the recent literature it was suggested that graphs with a small tightness of the first type are good models for the multiprocessor interconnection networks. We extended analysis to four types of tightness and found all graphs with tightness values

at most eight.

**205.** We give basic definitions and some results related to the theory of graph spectra. We present a short survey of applications of this theory. In addition, selected bibliographies on applications to particular branches of science are given.

**206.** Homogeneous multiprocessor systems are usually modelled by undirected graphs. Vertices of these graphs represent the processors, while edges denote the connection links between adjacent processors. Let  $G$  be a graph with diameter  $D$ , maximum vertex degree  $\Delta$ , the largest eigenvalue  $\lambda_1$  and  $m$  distinct eigenvalues. The products  $m\Delta$  and  $(D + 1)\lambda_1$  are called the tightness of  $G$  of the first and second type, respectively. In the recent literature it was suggested that graphs with a small tightness of the first type are good models for the multiprocessor interconnection networks. We study these and some other types of tightness and some related graph invariants and demonstrate their usefulness in the analysis of multiprocessor interconnection networks. A survey of frequently used interconnection networks is given. Load balancing problem is presented. We prove that the number of connected graphs with a bounded tightness is finite and we determine explicitly graphs with tightness values not exceeding 9. There are 69 such graphs and they contain up to 10 vertices. In addition we identify graphs with minimal tightness values when the number of vertices is  $n = 2, \dots, 10$ .

**207.** This part of our work further extends our project of building a new spectral theory of graphs (based on the signless Laplacian) by some results on graph angles, by several comments and by a short survey of recent results.

**208.** We consider the class of graphs each of whose components is either a path or a cycle. We classify the graphs from the class considered into those which are determined and those which are not determined by the adjacency spectrum. In addition, we compare the result with the corresponding results for the Laplacian and the signless Laplacian spectra. It turns out that the signless Laplacian spectrum performs the best, confirming some expectations from the literature.

**209.** Let  $D$  be the diameter of a graph  $G$  and let  $\lambda_1$  be the largest eigenvalue of its  $(0, 1)$ -adjacency matrix. We give a proof of the fact that there are exactly 69 non-trivial connected graphs with  $(D + 1)\lambda_1 \leq 9$ . These 69 graphs all have up to 10 vertices and were recently found to be suitable models for small multiprocessor interconnection networks. We also examine

the suitability of integral graphs to model multiprocessor interconnection networks, especially with respect to the load balancing problem. In addition, we classify integral graphs with small values of  $(D+1)\lambda_1$  in connection with the load balancing problem for multiprocessor systems.

**210.** In this paper, we shall give a survey of applications of the theory of graph spectra to Computer Science. Eigenvalues and eigenvectors of several graph matrices appear in numerous papers on various subjects relevant to information and communication technologies. In particular, we survey applications in modeling and searching Internet, in computer vision, data mining, multiprocessor systems, statistical databases, and in several other areas. Some related new mathematical results are included together with several comments on perspectives for future research. In particular, we claim that balanced subdivisions of cubic graphs are good models for virus resistant computer networks and point out some advantages in using integral graphs as multiprocessor interconnection networks.

**211.** The eigenvalues of a graph are the eigenvalues of its adjacency matrix. An eigenvalue of a graph is called main if the corresponding eigenspace contains a vector for which the sum of coordinates is different from 0. Connected graphs in which all eigenvalues are mutually distinct and main have recently attracted attention in control theory.

**212.** Connected graphs whose eigenvalues are distinct and main are called controllable graphs in view of certain applications in control theory. We give some general characterizations of the controllable graphs whose least eigenvalue is bounded from below by  $-2$ ; in particular, we determine all the controllable exceptional graphs. We also investigate the controllable graphs whose second largest eigenvalue does not exceed 1.

**213.** In this paper we shall give a survey of applications of the theory of graph spectra to computer science. Eigenvalues and eigenvectors of several graph matrices appear in numerous papers on various subjects relevant to information and communication technologies. In particular, we survey applications in modelling and searching Internet, in computer vision, data mining, multiprocessor systems, statistical databases, and in several other areas.

**214.** We give a survey of graph spectral techniques used in computer sciences. The survey consists of a description of particular topics from the theory of graph spectra independently of the areas of Computer Science



in which they are used. We have described the applications of some important graph eigenvalues (spectral radius, algebraic connectivity, the least eigenvalue etc.), eigenvectors (principal eigenvector, Fiedler eigenvector and other), spectral reconstruction problems, spectra of random graphs, Hoffman polynomial, integral graphs etc. However, for each described spectral technique we indicate the fields in which it is used (e.g. in modelling and searching Internet, in computer vision, pattern recognition, data mining, multiprocessor systems, statistical databases, and in several other areas). We present some novel mathematical results (related to clustering and the Hoffman polynomial) as well.

**215.** We extend our previous work on complexity indices for the travelling salesman problem (TSP) using graph spectral techniques of data mining. A complexity index is an invariant of an instance  $I$  by which we can predict the execution time of an exact algorithm for TSP for  $I$ . We consider the symmetric travelling salesman problem with instances  $I$  represented by complete weighted graphs  $G$ . Intuitively, the hardness of an instance  $G$  depends on the distribution of short edges within  $G$ . Therefore we consider some short edge subgraphs of  $G$  (minimal spanning tree and several others) as non-weighted graphs and several their invariants as potential complexity indices. Here spectral invariants (e.g. spectral radius of the adjacency matrix) play an important role. Spectral clustering algorithms are used including information obtained from the spectral gap in Laplacian spectra of short edge subgraphs.

## 5. TEMATIKA NAUČNIH RADOVA

### I GLAVNI REZULTATI

Objavljeni naučni radovi se najpre grupišu u neke celine (sekcija 5.1), klasifikuje se i analizira njihova tematika (sekcija 5.2), zatim se ukazuje na glavne rezultate (sekcija 5.3) i, na kraju, opisuju istaknuti radovi (sekcija 5.4).

#### 5.1. Neke formalne celine

Korisno je uočiti neke formalne celine u skupu objavljenih naučnih radova.

Serije radova sa zajedničkim naslovom:

1. *Graph theory and molecular orbitals, II, VII, IX*,  
23, 29, 30
2. *Kekulé structures and topology, I, II*,  
24, 31
3. *Discussing graph theory with a computer I, II, III, IV, V, VI*,  
64, 69, 75, 78, 79, 93
4. *Variable neighborhood search for extremal graphs 2, 3, 16*,  
148, 149, 187
5. *Graphs<sup>1</sup> for which the least eigenvalue is minimal, I, II*,  
194, 195
6. *Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, I, II, III*,  
201, 203, 207

---

<sup>1</sup>Rad [194] je posvećen H. Sachs-u povodom njegovog 80-tog rođendana a rad [195] M. Doob-u povodom njegovog 65-og rođendana. H. Sachs i M. Doob su koautori knjige "Spectra of Graphs".

Kao što se vidi, u pojedinim serijama nisam bio koautor svih radova iz serije.

*ekspozitorni radovi* 15, 55, 56, 57, 90, 112, 120, 123, 126, 134, 135, 137, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 178

Ekspozitorni radovi se odnose pretežno na spektralnu teoriju grafova ali su tu i druge teme: [56] grafovske jednačine, [123] problem trgovačkog putnika, [134] operaciona istraživanja i [178] kombinatorna optimizacija.

*tabele sa podacima* 21, 44, 45, 80, 82, 88, 104, 136, 139, 150, 164, 179

Glavni deo radova iz ove grupe predstavljaju tabele numeričkih podataka vezanih za spektralnu teoriju grafova. Tabele daju spektralne i druge invarijante grafova iz određenih klasa sa ograničenim brojem čvorova. Podaci su dobijeni najčešće pomoću računara pri čemu nije nikad naglasak na kompleksnosti izračunavanja već na interesantnosti podataka<sup>2</sup>. Ovakvi podaci su omogućili bolje razumevanje pojedinih problema i doveli do teorijskih rezultata. Neki od ovih radova su značajno citirani u literaturi od strane drugih autora (na primer, [44] i [80]). Značaj objavljivanja ovakvih tabela je posebno objašnjen u ekspozitornim radovima [120], [126], [169]. I neki drugi moji radovi sadrže tabele sa numeričkim podacima ali su u tim radovima tabele manji deo sadržine. Tu spadaju radovi [1], [2], [7], [11], [25], [46], [92], [94], [126] i drugi. Numerički podaci se pojavljuju i u radovima iz oblasti kombinatorne optimizacije iz drugih razloga (ilustracija ponašanja posmatranih algoritama).

*sistem "Graph"* 62, 64, 66, 67, 68, 69, 74, 75, 77, 78, 79, 84, 85, 89, 92, 93, 100, 105, 108, 109, 111, 130, 189

*hemija* 20, 23, 24, 29, 30, 31, 34, 35, 49, 92, 146, 154, 174

Ovi radovi opisuju primene spektralne teorije grafova u hemiji i objavljeni su u naučnim časopisima iz oblasti hemije i u nekim drugim publikacijama. Primene u hemiji se pojavljuju i u nekim drugim mojim radovima (na primer, u [54]).

Tematika radova iz navedenih grupa je obrađena u sledećoj sekciji zajedno sa tematikom ostalih radova.

---

<sup>2</sup>Ponekad sam imao problema sa recenzentima radova koji su isticali trivijalnost izračunavanja i mogućnost da svako koga ti podaci interesuju mogu sami da ih izračunaju.

## 5.2. Tematika

Glavna tematika u mojim naučnim radovima je spektralna teorija grafova (odjeljak 2.1) ali se pojavljuju i razne teme iz strukturne teorije grafova, kombinatorne teorije matrica, kombinatorne optimizacije, računarstva i drugih oblasti.

### 5.2.1. Spektralna teorija grafova

1. NEPS (nepotpuna proširena  $p$ -suma grafova) 5, 6, 8, 9, 14, 15, 19, 86, 122, 140
  2. prebrojavanje puteva 8, 10, 13, 15, 19, 28
  3. spektralne karakterizacije 3, 12, 15, 36, 46, 47, 53, 70, 72, 81, 125, 127, 173, 208
  4. nejednakosti u vezi sa sopstvenim vrednostima 17, 18, 25, 155
  5. grafovske operacije i sopstvene vrednosti 15, 27, 40
  6. spektralna (re)konstrukcija 37, 61, 138, 143
  7. uglovi grafova 87, 95, 96, 97, 101, 102, 106, 113, 114, 116, 122, 142, 154
  8. zvezdane particije 116, 122, 124, 131, 150, 151, 152, 153, 185
  9. grafovi sa najmanjom sopstvenom vrednošću  $-2$  46, 47, 71, 151, 166, 172, 175, 176, 179, 180, 188
  10. generalisani grafovi grana 58, 59, 60, 160, 161, 162, 181
- Tematike iz tačaka 8, 9 i 10 se uzajamno prepliću i sve je to našlo odraz u monografiji "Spectral Generalization of Line Graphs".
11. integralni grafovi 34, 42, 43, 144, 158, 167
12. prebrojavanje razapinjućih stabala 16, 63, 137
13. energija grafa 148, 190
14. modifikovani laplasijan 183, 186, 192, 196, 197, 201, 203, 207
15. primene u računarstvu 205, 210, 213, 214
16. multiprocesori 198, 200, 202, 204, 206, 209

17. teorija sistema 211, 212

18. grupisanje podataka 119, 128

Naravno, radovi iz 16, 17 i 18 se mogu takođe svrstati u 15.

19. razne teme spektralne teorije grafova 52, 94, 107, 182, 184

### 5.2.2. Strukturna teorija grafova

grafovske jednačine 33, 41, 50, 51, 54, 56

razne teme strukturne teorije grafova 4, 26, 32, 76, 83, 91, 110, 191, 199

### 5.2.3. Kombinatorna teorija matrica

38, 39, 65, 73, 193

### 5.2.4. Kombinatorna optimizacija

TSP (problem trgovačkog putnika) 98, 99, 115, 117, 118, 121, 129, 132, 133, 147, 156, 157, 159, 163, 165, 177, 215

minimalna grananja 141, 145

### 5.2.5. Računarstvo

veštačka inteligencija 66, 67, 68, 74, 75, 77, 78, 84, 85, 89, 93, 100, 103, 105, 108, 109, 130

razvoj softvera 62, 64, 69, 79, 111, 189

### 5.2.6. Ostale teme

transcendentne jednačine 1, 11

teorija redova 2

klasična kombinatorika 7, 22

teorija kodova 48

teorija električnih kola 65, 73

### 5.3. Glavni rezultati

Mnogobrojni moji naučni radovi i monografije iz oblasti spektralne teorije grafova dali su značajan doprinos stvaranju i razvoju ove teorije. U ovoj sekciji ilustrujem ovo tvrđenje detaljnijim opisom glavnih rezultata.

Doktorat [15] je dao skicu spektralne teorije grafova i doveo do objavljivanja monografije "Spectra of Graphs". Doktorat je mnogo citiran u literaturi i ja ga danas smatram, u suštini, najboljim mojim radom.

Definicija  $n$ -arne operacije nad grafovima (NEPS) je uopštenje niza do tada razmatranih operacija nad grafovima. Važne su formule za sopstvene vrednosti i teoreme o povezanosti i bihromatičnosti NEPS-a (radovi iz tačke 1 sekcije 5.2.1).

Prebrojavanje puteva u grafu uz pomoć sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora je moj prvi rezultat i prvi kontakt sa teorijom spektara grafova. Važni rezultati se odnose na funkciju generatrisu za prebrojavanje puteva. Uveo sam definiciju glavnih sopstvenih vrednosti koja se pokazala kasnije veoma korisna u istraživanjima mnogih autora.

Definiciju i osnovne osobine uglova grafa sam izložio na V jugoslovenskom seminaru za teoriju grafova u Beogradu 1984. godine. Ideja je bila da se spektralne tehnike teorije grafova obogate i učine efikasnijim uključivanjem srodnim grafovskim invarijanti. Posle niza radova, mojih i drugih autora, došlo je do objavljivanja knjige "Eigenspaces of Graphs" 1997. godine čime je problematika zaokružena.

Zvezdane particije su uvedene u [116] gde su opisane njihove osnovne osobine i ukazano na mogućnost definisanja kanoničke baze grafa. Ove ideje su dalje razrađene u mom radu [131] i primenjene na problem izomorfizma grafova.

Deo ove problematike je i tehnika zvezdanih komplemenata koja je u [151] primenjena na konstrukciju grafova sa najmanjom sopstvenom vrednošću  $-2$ .

Moja istraživanja grafova sa najmanjom sopstvenom vrednošću  $-2$  počinju radovima [46],[47] gde je korišćena tehnika korenskih sistema. Nađeni su svi povezani regularni grafova sa najmanjom sopstvenom vrednošću  $-2$  koji su kospektralni ali neizomorfni sa grafovima grana. Nova tehnika za tretiranje ovih grafova se pojavljuje u [151] gde je skiciran novi pristup ovoj teoriji. Kulminacija rada na ovoj problematici je rad [160] gde su pronađeni svi maksimalni izuzetni grafovi. Svi ovi rezultati su opravdali objavljivanje knjige "Spectral generalizations of line graphs" koja je objavljena 2004.

godine. Objavljivanjem ove knjige je definitivno zaokružena teorija grafova sa najmanjom sopstvenom vrednošću  $-2$ .

U radovima [201], [203], [207] sam, zajedno sa kolegom Slobodanom Simićem, skicirao spektralnu teoriju grafova baziranu na modifikovanoj Laplasovoj matrici (signless Laplacian). U ovim radovima se, pored klasifikacije poznatih rezultata, izlaže niz novih rezultata kojima se teorija zaokružuje.

U prvoj deceniji 21. veka naglo je porastao broj naučnih radova u oblasti računarstva u kojima se koristi, kao matematičko sredstvo, spektralna teorija grafova. U radovima [210], [214] sam, zajedno sa koautorima, dao pregled primena spektralne teorije grafova u računarstvu.

Veliki dao mojih rezultata iz spektralne teorije grafova je unesen u naučne monografije *Spectra of graphs, Recent results in the theory of graph spectra*, *Eigenspaces of graphs* i *Spectral generalizations of line graphs*.

Glavni doprinosi izvan spektralne teorije grafova su navedeni u sledećoj sekciji.

## 5.4. Istaknuti radovi

Radovi se pojavljuju u spisku prema redosledu kako su nastajali. Trajanje vremena publikovanja je bilo različito za različite radove pa zbog toga spisak nije uređen po godinama publikovanja. Želeo sam da se redni broj rada u spisku radova ne menja tokom vremena pa nisam vršio naknadna preuređenja spiska.

Moji naučni radovi znatno variraju po obimu, sadržaju i kvalitetu.

Neki od radova u ovom spisku se mogu smatrati stručnim radovima. To se, na primer, odnosi na radove [1], [2] i [3] koji nisu objavljeni u naučnim časopisima. Takođe se neki od mojih radova koji sadrže tabele podataka (videti sekciju 5.1) bez novih matematičkih teorema mogu svrstati u spisak stručnih radova. Četrdesetak mojih radova objavljenih u zbornicima radova sa domaćih naučnih konferencija sadrže, po pravilu, samo početne ideje za tretiranje nekog problema. Takvi radovi su često bili motivisani željom da se mlađim koautorima pruži prilika da nešto publikuju. Postoje i kratki radovi koji se mogu više smatrati notama nego regularnim naučnim radovima.

Smatram da nekih 120 - 140 radova od 215 iz ovog spiska predstavljaju naučne radove sa vidljivim i značajnim naučnim doprinosima.

Danas se kvalitet rada u velikoj meri vezuje za karakter publikacije u

kojoj je rad objavljen. Smatra se da je rad objavljen u časopisu koji se nalazi na tzv. SCI-listi, po pravilu, kvalitetan rad<sup>3</sup>. Korišćenje SCI-liste za radove objavljene decenijama unazad je, naravno, nemoguće jer ta lista nije tada postojala.

Ipak, u knjizi "Iracionalno u racionalnom" učinjen je napor da se uslovno sačini spisak mojih naučnih radova objavljenih u časopisima sa SCI-liste pa su tu svrstana 52 moja rada. Danas bi taj broj bio 54.

U vezi sa ovim treba istaći da radovi [168], [169] predstavljaju poglavlja u inostranim monografijama a da su radovi [26], [47], [50], [55], [62], [89], [146], [157] objavljeni u zbornicima radova sa renomiranih međunarodnih konferencija. Na taj način za preko 60 mojih radova se može tvrditi da su objavljeni u publikacijama koje, bar formalno, ukazuju na značajan kvalitet.

Mnogi od mojih preko osamdeset naučnih radova objavljenih u domaćim naučnim časopisima imaju kvalitet radova iz časopisa sa SCI-liste. Časopis *Publications of the Faculty of Electrical Engineering, Series: Mathematics and Physics* bio je uticajan časopis međunarodnog značaja u periodu kada SCI-lista nije postojala. Postojala je međunarodna recenzija o čemu kod mojih radova [8], [10] svedoči fusnota u kojoj stoji "Presented February 5, 1970 by H. Sachs (Germany)". Slučaj mog doktorata, koji je objavljen u istom časopisu, je objašnjen na drugim mestima u ovoj knjizi. Noviji podatak je da je, na primer, rad [201] citiran u časopisima sa SCI-liste 51 put u periodu od tri godine (prema bazi podataka Scopus).

Posebno ističem sledeće radove.

U radovima [15], [55], [95], [131], [166] sam jedini autor.

U [15] se skicira spektralna teorija grafova što je kasnije poslužilo za pisanje monografije "Spectra of Graphs".

U [55] se opisuju dotadašnji pravci istraživanja spektara grafova i predlažu neki novi.

Rad [95] daje algoritam za konstrukciju svih stabala sa zadatim sopstvenim vrednostima i uglovima.

U [131] dajem konstrukciju kanoničke baze sopstvenih vektora grafa i opisujem njenu primenu na problem izomorfizma grafova.

U [166] sam dao sopstveno viđenje teorije grafova sa najmanjom sopstvenom vrednošću  $-2$ . Rad je poslužio kao osnova za izradu monografije "Spectral generalizations of line graphs".

---

<sup>3</sup>Naravno, postoje izuzeci od ovog pravila a postoje i zloupotrebe SCI-liste.



Značajni su i sledeći radovi:

[42] - [43], [46] - [47], [59], [148], [151], [160], [186], [201].

Dajem telegrafski opis doprinosa svakog od njih.

[42] - [43]: Glavni rezultat je istaknut u naslovu: *postoji tačno 13 povezanih kubnih integralnih grafova*.

[46] - [47]: Određuju se svi povezani regularni grafovi čija je najmanja sopstvena vrednost jednaka  $-2$  koji su kospektralni ali neizomorfni sa grafovima grana.

[59]: Za generalisane grafove grana dokazuju se analogoni poznatih teorema koje važe za grafove grana.

[148]: Uz pomoć programskog paketa AutoGraphiX formuliše se veći broj hipoteza o energiji grafa i deo njih dokazuje. Rad je imao veliki uticaj na dalja istraživanja o energiji grafa (videti monografiju "X. Li, Y. Shi, I. Gutman, Graph Energy, Springer, New York, 2012").

[151]: Uz pomoć tehnike zvezdanih komplemenata razvija se novi pristup teoriji grafova čija je najmanja sopstvena vrednost jednaka  $-2$ .

[160]: Uz pomoć tehnike zvezdanih komplemenata konstruišu se svi maksimalni izuzetni grafovi čija je najmanja sopstvena vrednost jednaka  $-2$ . Problem određivanja maksimalnih izuzetnih grafova je bio otvoren oko 25 godina.

[186]: Opisuju se osnovne osobine sopstvenih vrednosti modifikovane Laplasove matrice grafa.

[201]: Skicira se spektralna teorija grafova bazirana na sopstvenim vrednostima modifikovane Laplasove matrice grafa.

Svi navedeni radovi su iz oblasti spektralne teorije grafova.

Objavio sam zapažene radove i iz drugih oblasti.

Rad [157] je iz oblasti kombinatorne optimizacije. U radu se formuliše problem trgovačkog putnika kao jedan zadatak semi-definitnog programiranja.

Rad [85] je iz oblasti veštačke inteligencije. Kreirana je heuristika, nazvana *metod najkraćih trasa napada*, za vođenje dokaza u automatskom dokazivanju teorema.

Detaljniji opis svih ovih radova je dat u drugim delovima ove knjige.

Neki od navedenih radova su proizašli iz predavanja koja sam po pozivu održao na raznim naučnim konferencijama<sup>4</sup>:

<sup>4</sup>Podaci o mom učešću na konferencijama mogu se naći u mojim "Autobiografskim

[55] - Algebarske metode u teoriji grafova<sup>5</sup>, Szeged, 1978,

[95] - Algebarska kombinatorika, Stirling, 1986,

[131] - Algebarska teorija grafova, Edinburgh, 1993,

[160] - II evropska radionica za algebarsku teoriju grafova, Edinburgh, 2001,

[186] - Radionica za spektre grafova, Aveiro, 2006,

[201], [203] - Radionica za spektralnu teoriju grafova sa primenama u računarstvu, kombinatornoj optimizaciji i hemiji, Rio de Janeiro, 2008.

Ovi radovi su i značajno citirani. Na primer, rad [186] je u vreme dovršenja ove knjige citiran 101 put prema bazi podataka Scopus. Videti takođe u mom jubilarnom predavanju u ovoj knjizi deo o kreiranju spektralne teorije grafova bazirane na modifikovanoj Laplasovoj matrici.

---

beleškama” u knjigama ”Grafovi kao inspiracija” za period do 2006. godine i ”Iracionalno u racionalnom” za kasniji period.

<sup>5</sup>Pozivno pismo prof. L. Lovász-a može se naći u mojoj arhivi a u elektronskom obliku u eBiblioteci Matematičkog fakulteta u Beogradu (videti tekst na kraju knjige), fajl GENERAL CORRESPONDENCE, 1975-1978, str. 444.

## 6. Spisak objavljenih knjiga

Objavljene knjige su svrstane, prema njihovom karakteru i nameni, u sledeće kategorije: naučne monografije, nestandardni udžbenici, udžbenici i priručnici, popularne knjige i editorski radovi. Udžbenik je svrstan u nestandardne udžbenike ako po prvi put na srpskom jeziku prezentuje neku disciplinu (teorija grafova, diskretna matematika, kombinatorna teorija matrica). Ponovljena izdanja knjiga su navedena jedno za drugim uz prikladnu numeraciju. Spisak sadrži podatke o ukupno 71 objavljenoj knjizi (računajući tu ponovljena izdanja).

### 6.1. Naučne monografije

**1-1.** Cvetković D., Doob M., Sachs H., *Spectra of graphs - Theory and application*, Deutscher Verlag der Wissenschaften - Academic Press, Berlin - New York, 1980

**MR** 81i: 05054; **Zbl.** 458, 05042.

**1-2.** Cvetković D., Doob M., Sachs H., *Spectra of graphs - Theory and application*, Deutscher Verlag der Wissenschaften - Academic Press, Berlin - New York, 1982, second edition

**MR** 84a: 05046; **RŽ Mat.** 1983, 7V528.

**1-3.** Цветкович Д., Дуб М., Захс Х., *Спектри графов - Теория и применение*, Наукова думка, Киев, 1984

**RŽ Mat.** 1984, 6V456.

**1-4.** Cvetković D., Doob M., Sachs H., *Spectra of graphs - Theory and applications*, III revised and enlarged edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg – Leipzig, 1995

MR 96b: 05108.

**2.** Cvetković D., Doob M., Gutman I., Torgašev A., *Recent results in the theory of graph spectra*, North Holland, Amsterdam, 1988

MR 89d: 05130; **Zbl.** 634, 05054;

**3-1.** Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *Eigenspaces of graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

MR 98f: 05111; **Zbl.** 878, 05057;

**3-2.** Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *Eigenspaces of graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, Digitally printed version, 2008.

**4.** Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *Spectral generalizations of line graphs: On graphs with least eigenvalue  $-2$* , Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

**5.** Cvetković D., Dimitrijević V., Milosavljević M., *Variations on the travelling salesman theme*, Libra produkt, Beograd, 1996.

**6.** Cvetković D., Čangalović M., Dugošija Đ., Kovačević-Vujčić V., Simić S., Vuleta J., red. D. Cvetković, V. Kovačević-Vujčić, *Kombinatorna optimizacija, Matematička teorija i algoritmi*, Društvo operacionih istraživača Jugoslavije, Beograd, 1996.

**7.** Brualdi R.A., Cvetković D., *A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Application*, CRC Press, Boca Raton, 2008.

**8.** Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

## 6.2. Nestandardni udžbenici

**1-1.** Cvetković D., Milić M., *Teorija grafova i njene primene*, BIGZ, Beograd, 1971.

**1-2.** Cvetković D., Milić M., *Teorija grafova i njene primene*, II izmenjeno i prošireno izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1977.

**1-3.** Cvetković D., *Teorija grafova i njene primene*, III izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1981.

- 1-4. Cvetković D., *Teorija grafova i njene primene*, IV izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1986.
- 1-5. Cvetković D., *Teorija grafova i njene primene*, V izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1990.
2. Цветковиќ Д., Шокаровски Р., *Основи на теоријата на графови*, Скопје, 1975.
- 3-0. Cvetković D., *Diskretne matematičke strukture*, skripta, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1977.
- 3-1. Cvetković D., *Diskretne matematičke strukture*, Matematika za kompjuterske nauke, Naučna knjiga, Beograd, 1978.
- 3-2. Cvetković D., *Diskretne matematičke strukture*, Matematika za kompjuterske nauke, II izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1983.
- 3-3. Cvetković D., *Diskretne matematičke strukture*, Matematika za kompjuterske nauke, III izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1987.
- 3-4. Cvetković D., *Diskretne matematičke strukture*, Matematika za kompjuterske nauke, IV izdanje, CET - Računarski fakultet, Beograd, 2004.
- 4-0. Cvetković D., *Diskretna matematika*, skripta, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1989.
- 4-1. Cvetković D., Simić S., *Diskretna matematika*, Matematika za kompjuterske nauke, Naučna knjiga, Beograd, 1990.
- 4-2. Cvetković D., Simić S., *Diskretna matematika*, Matematika za kompjuterske nauke, II izmenjeno i dopunjeno izdanje, Prosveta, Niš, 1996.
- 5-1. Cvetković D., Simić S., *Odabrana poglavlja iz diskretne matematike*, Akademska misao, Beograd, 2002.
- 5-2. Cvetković D., Simić S., *Odabrana poglavlja iz diskretne matematike*, II izdanje, Akademska misao, Beograd, 2004.
- 6-1. Cvetković D., *Kombinatorna teorija matrica sa primenama u elektrotehnici, hemiji i fizici*, Naučna knjiga, Beograd, 1980.  
**RŽ Mat.** 1984, 6V456.
- 6-2. Cvetković D., *Kombinatorna teorija matrica sa primenama u elek-*

*trotehnici, hemiji i fizici*, II izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1987.

**6-3.** Cvetković D., *Kombinatorna teorija matrica sa primenama u elektrotehnici, hemiji i fizici*, III izdanje, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011.

**7-1.** Cvetković D., Simić S., *Kombinatorika, klasična i moderna*, Naučna knjiga, Beograd, 1984.

**7-2.** Cvetković D., Simić S., *Kombinatorika, klasična i moderna*, II izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

**7-3.** Cvetković D., Simić S., *Kombinatorika i grafovi - Pregled i prilozi*, CET - Računarski fakultet, Beograd, 2006.

### **6.3. Udžbenici i priručnici**

**1-1.** Cvetković D., et al. *Inženjersko mašinski priručnik*, redaktor Z. Savić, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1987.

**1-2.** Cvetković D., et al. *Inženjersko mašinski priručnik*, redaktor Z. Savić, II izdanje, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1992.

**2-0.** Cvetković D., Kocić V., Lacković I., Merkle M., Radosavljević Z., Simić S., Vasić P., *Matematika I - Algebra*, skripta, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1988.

**2-1.** Cvetković D., Kocić V., Lacković I., Merkle M., Radosavljević Z., Simić S., Vasić P., *Matematika I - Algebra*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.

**2-2.** Cvetković D., Kocić V., Lacković I., Merkle M., Radosavljević Z., Simić S., Vasić P., *Matematika I - Algebra*, II izdanje Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1991.

**2-3.** Cvetković D., Kocić V., Lacković I., Merkle M., Radosavljević Z., Simić S., Vasić P., *Matematika I - Algebra*, III izdanje, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1992.

**2-4.** Cvetković D., Kocić V., Lacković I., Merkle M., Radosavljević Z., Simić S., Vasić P., *Matematika I - Algebra*, IV izdanje Grosknjiga, Beograd, 1994.

- 2-5.** Cvetković D., Lacković I., Merkle M., Radosavljević Z., Simić S., Vasić P., *Matematika I - Algebra*, V izdanje, izdanje autora, Beograd, 1997.
- 2-6.** Cvetković D., Lacković I., Merkle M., Radosavljević Z., Simić S., Vasić P., *Matematika I - Algebra*, VI izdanje, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1998.
- 2-7.** Cvetković D., Lacković I., Merkle M., Radosavljević Z., Simić S., Vasić P., *Matematika I - Algebra*, VII izdanje, Akademska misao, Beograd, 2000.
- 2-8.** Cvetković D., Lacković I., Merkle M., Radosavljević Z., Simić S., Vasić P., *Matematika I - Algebra*, VIII izdanje, Akademska misao, Beograd, 2004.
- 2-9.** Cvetković D., Lacković I., Merkle M., Radosavljević Z., Simić S., Vasić P., *Matematika I - Algebra*, IX izdanje, Akademska misao, Beograd, 2005.
- 3-1.** Vasić P., Iričanin B., Jovanović M., Madžarević T., Mihailović B., Radosavljević Z., Simić S., Cvetković D., *Zbirka rešenih zadataka iz Matematike 1 - algebra (prvi deo)*, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1993.
- 3-2.** Vasić P., Iričanin B., Jovanović M., Malešević B., Madžarević T., Mihailović B., Radosavljević Z., Simić S., Cvetković D., *Zbirka zadataka iz algebre (prvi deo)*, II izdanje, Grosknjiga, Beograd, 1994.
- 3-3.** Vasić P., Iričanin B., Jovanović M., Malešević B., Madžarević T., Mihailović B., Radosavljević Z., Simić S., Cvetković D., *Zbirka zadataka iz algebre (prvi deo)*; III izdanje, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1998.
- 3-4.** Vasić P., Iričanin B., Jovanović M., Malešević B., Madžarević T., Mihailović B., Radosavljević Z., Simić S., Cvetković D., *Zbirka zadataka iz algebre (prvi deo)*; IV izdanje, Akademska misao, Beograd, 2000.
- 3-5.** Vasić P., Iričanin B., Jovanović M., Malešević B., Madžarević T., Mihailović B., Radosavljević Z., Simić S., Cvetković D., *Zbirka zadataka iz algebre (prvi deo)*; V izdanje, Akademska misao, Beograd, 2004.
- 3-6.** Vasić P., Iričanin B., Jovanović M., Malešević B., Madžarević T., Mihailović B., Radosavljević Z., Simić S., Cvetković D., *Zbirka zadataka iz algebre (prvi deo)*; VI izdanje, Akademska misao, Beograd, 2006.
- 4-1.** Vasić P., Iričanin B., Jovanović M., Madžarević T., Mihailović B., Radosavljević Z., Simić S., Cvetković D., *Zbirka zadataka iz Matematike 1 - algebra*, II deo, Grosknjiga, Beograd, 1994.

**4-2.** Vasić P., Iričanin B., Jovanović M., Madžarević T., Mihailović B., Radosavljević Z., Simić S., Cvetković D., *Zbirka zadataka iz algebre (drugi deo)*, II izmenjeno i dopunjeno izdanje, Grosknjiga, Beograd, 1995.

**4-3.** Vasić P., Iričanin B., Jovanović M., Madžarević T., Mihailović B., Radosavljević Z., Simić S., Cvetković D., *Zbirka zadataka iz algebre (drugi deo)*, III ispravljeno izdanje, Akademska misao, Beograd, 2001.

**4-4.** Vasić P., Iričanin B., Jovanović M., Madžarević T., Mihailović B., Radosavljević Z., Simić S., Cvetković D., *Zbirka zadataka iz algebre (drugi deo)*, IV ispravljeno izdanje, Akademska misao, Beograd, 2004.

**4-5.** Vasić P., Iričanin B., Jovanović M., Madžarević T., Mihailović B., Radosavljević Z., Simić S., Cvetković D., *Zbirka zadataka iz algebre (drugi deo)*, V izdanje, Akademska misao, Beograd, 2006.

## 6.4. Popularne knjige

**1.** Turajlić S., Cvetković D., Lazarević I. *Matematičke olimpijade srednjoškolaca u Čehoslovačkoj, Mađarskoj i Rumuniji, sa prilogom Školovanje Mihaila Petrovića*, od D. Trifunovića, Matematička biblioteka, br.32, Beograd, 1967.

**2-1.** Cvetković D., *Zanimljiva matematika - Preferans*, Sportska knjiga, Beograd, 1975.

**2-2.** Cvetković D., *Zanimljiva matematika - Preferans*, II ispravljeno i prošireno izdanje, Sportska knjiga, Beograd, 1986.

**2-3.** Cvetković D., *Zanimljiva matematika - Preferans*, III poboljšano izdanje, Libra produkt, Beograd, 1995.

**2-4.** Cvetković D., *Zanimljiva matematika - Preferans*, IV izdanje, Akademska misao, Beograd, 2004.

**3.** Cvetković D., *Matematičke varijacije, Kolekcija stručnih i popularnih tekstova u redakciji V. Kovačević-Vučić*, Libra produkt, Beograd, 1998.

**4.** Cvetković D., *Grafovi kao inspiracija, Autobiografske beleške i drugi tekstovi povodom četiri decenije naučno-istraživačkog rada u matematici u*



*redakciji V. Kovačević-Vučjić*, Akademska misao, Beograd, 2006.

5. Cvetković D., *Zanimljiva matematika - Šah*, Akademska misao, Beograd, 2006.

6. Cvetković D., *Iracionalno u racionalnom, Autobiografski i drugi tekstovi povodom sedamdesetog rođendana u redakciji V. Kovačević-Vučjić*, Akademska misao, Beograd, 2011.

## 6.5. Editorski radovi

1. *Graph theory*, Proceedings of the Fourth Yugoslav Seminar on Graph Theory, Novi Sad, April 15.-16. 1983, ed. D. Cvetković, I. Gutman, T. Pisanski, R. Tošić, University of Novi Sad, Institute of Mathematics, Novi Sad 1984

MR 85g: 05004; Zbl. 521, 00010; RŽ Mat. 1984, 12V674.

2. *Ostvarenja i primene veštačke inteligencije*, Zbornik radova sa simpozijuma, Dubrovnik, 25-27. 10. 1989., ed. Bratko I., Cvetković D., Hotomski P., Tehnički fakultet "M.Pupin", Institut za politehniku, Zrenjanin, 1990

MR 91k: 68169.

3. *Grafovi, optimizacija, hemija: Zapisi o radu jednog naučnog projekta*, Cvetković D., Gutman I., Kovačević-Vučjić V. (redaktori), Akademska misao, Beograd, 2007.

4. *Applications of Graph Spectra*, Zbornik radova 13(21), ed. D. Cvetković, I. Gutman, Mathematical Institute SANU, Belgrade, 2009.

5. *Selected Topics on Applications of Graph Spectra*, Zbornik radova 14(22), ed. D. Cvetković, I. Gutman, Mathematical Institute SANU, Belgrade, 2011.

## 7. Prikaz knjiga

U ovom prikazu date su samo osnovne informacije o knjigama. Više informacija o karakteru i sadržaju knjiga čitalac može da nađe u predgovorima knjiga koji su, za veći deo knjiga, reprodukovani posle ovog prikaza a takođe u komeinaru o objavljenim knjiga, koji sledi iza predgovora. U prikazu su knjige grupisane i numerisane u skladu sa prethodnim spiskom objavljenih knjiga.

### 7.1. Naučne monografije

**1-1.** Ova naučna monografija, napisana u zajednici sa kanadskim profesorom M. Doob-om i prof. H. Sachs-om iz Nemačke Demokratske Republike, predstavlja rezultat i rezime dugogodišnjeg rada D. Cvetkovića na problemima spektralne teorije grafova. Prema oceni inostrane kritike (pored redovnih prikaza u referativnim časopisima monografija je specijalno prikazana u više matematičkih i hemijskih časopisa) knjiga predstavlja kompletan prikaz stanja spektralne teorije grafova do 1978. godine. Pored izlaganja matematičke teorije spektara grafova opisuju se i najvažnije primene u hemiji i fizici.

**1-2.** Drugo izdanje knjige [1-1] u kome su samo ispravljene uočene greške.

**1-3.** Prevod na ruski jezik knjige [1-1], odnosno [1-2].

**1-4.** U osnovnom delu knjige tekst je ostao isti kao u drugom izdanju. Dodata su dva apendiksa i lista od 300 novih referenci.

**2.** Knjiga predstavlja nastavak knjige "Spectra of Graphs". Prezentovani su rezultati teorije spektara grafova objavljeni u periodu 1978 - 1984.

3. Knjiga "Eigenspaces" pojačava spektralne tehnike teorije grafova uvođenjem uglova grafa, zvezdanih particija i zvezdanih baza, tj. grafovskih invarijanata baziranih na sopstvenim potprostorima grafa.
4. Knjiga "Spectral Generalizations" opisuje tri tehnike za tretiranje grafova sa najmanjom sopstvenom vrednošću  $-2$ : zabranjeni podgrafovi, sistemi korenova i zvezdani komplementi.
5. Postoje mnogobrojne varijacije, generalizacije i specijalni slučajevi problema trgovačkog putnika. Mi smo izabrali naslov knjige da reprezentuje deo takvog materijala. Naglasak je na sopstvenim doprinosima u toj oblasti iz perioda 1980-1990. Taj materijal je kondenzovano prikazan u radu [123] ali je većina teksta knjige samo delimično objavljena i to najviše na sprskom jeziku.
6. Knjiga se pojavljuje kao naučna monografija, koja uključuje i sopstvene naučne doprinose autora, ali i s uvodnim razmatranjima i opisom nekih standardnih rezultata, tako da može da posluži i kao udžbenik neelementarnog karaktera. Nazivi poglavlja: 1. Uvod, 2. Linearano programiranje, 3. Celobrojno programiranje, 4. Minimalno razapinjuće stablo i proždrljivi algoritmi, 5. Ekstremski putevi u mrežama, 6. Protoci u mrežama, 7. Sparivanja u grafovima, 8. Hamiltonovi putevi i problem trgovačkog putnika, 9. Grupisanje podataka, 10. Bojenje čvorova grafa, 11. Opšte heuristike za rešavanje problema kombinatorne optimizacije.
7. Nasuprot većini elementarnih knjiga o matricama, ova knjiga koristi kombinatorna i grafovska sredstva da izvede osnovne teoreme teorije matrica, bacajući novo svetlo na tematiku istraživanjem veza ovih sredstava sa matricama.
8. Knjiga je zamišljena kao priručnik za studente doktorskih studija ali, u stvari, sadrži mnogo više materijala nego što je moguće da jedan doktorski student savlada u redovnom kursu. Pošto stara knjiga "Spectra of Graphs" nije više bila u prodaji, nova knjiga je zamišljena kao "replacement" ali ne i "substitute" za "Spectra of Graphs". Ova knjiga sadrži oko 500 odabranih referenci.

## 7.2. Nestandardni udžbenici

**1-1.** Ovo je uvodna knjiga za teoriju grafova. Izdata je kao stalni pomoćni udžbenik za studente elektrotehnike ali je namenjena širem krugu zainteresovanih s obzirom na to da predstavlja praktično prvu knjigu ove vrste na srpsko-hrvatskom jeziku. Knjiga se sastoji od tri dela. Prvi deo predstavlja uvod u teoriju grafova (napisao D. Cvetković) drugi deo opisuje primenu teorije grafova u elektrotehnici (napisao M. Milić) a treći deo čine Prilozi nekoliko autora. Knjiga obuhvata 126 stranica, ilustrovana je sa 80 slika, sadrži obiman spisak literature a opremljena je i indeksom imena i predmetnim indeksom.

**1-2.** Ova knjiga predstavlja II prošireno i izmenjeno izdanje knjige [1-1]. U odnosu na prethodno izdanje obim knjige je udvostručen; ona sadrži 270 strana. Prvi deo knjige "Uvod u teoriju grafova" (napisao D. Cvetković uz saradnju S. Simića na nekim delovima; obim 155 strana) sa svojih 12 poglavlja sadrži sve rezultate teorije grafova koji se danas smatraju "klasičnim" u ovoj oblasti. Bibliografija sadrži kompletne spiskove knjiga o teoriji grafova i publikacija sa konferencija posvećenih teoriji grafova i kombinatorici. Tekst sadrži veliki broj slika i primera koji se odnose i na primene teorije grafova u raznim oblastima.

**1-3.** Ovo je treće izdanje prvog dela knjige istog naziva od D. Cvetkovića i M. Milića [1-1]. Pored ispravke uočenih štamparskih grešaka unesene su neke aktuelne informacije. Umesto ranijih priloga reprodukovan je rad [65].

**1-4.** Ovo je drugo dopunjeno izdanje knjige [1-3] i četvrto izdanje mog dela knjige [1-1]. Upotpunjen je spisak literature i dodata informacija o interaktivnom programskom sistemu GRAPH, ekspertnom sistemu za teoriju grafova.

**1-5.** U svim ponovljenim izdanjima ove knjige nastojalo se da se tekst poboljša i upotpuni novim materijalima. To je učinjeno i u ovom izdanju na više mesta. Uneseni su kratki tekstovi o problemu trgovačkog putnika i o particijama skupa čvorova grafa. U Prilozima su objavljeni novi tekstovi više autora (S. Simić, M. Čangalović, M. Milosavljević). Izrađen je predmetni indeks. Posle pet izdanja knjiga "Teorija grafova i njene primene" nije više objavljivana jer su se tekstovi o teoriji grafova pojavljivali u raznim drugim mojim knjigama.

**2.** Knjiga predstavlja elementarni udžbenik teorije grafova na makedonskom jeziku namenjen prvenstveno srednjoškolicima i studentima. Knjiga je nastala na taj način što je D. Cvetković jedan deo materijala pripremljenog za drugo izdanje knjige [1-1] preradio tako da bude pristupačan i srednjoškolicima a R. Šokarovski je te tekstove preveo na makedonski jezik pri čemu je dodao i neke svoje tekstove. Obim knjige je 155 strana.

**3-0.** Skripta su napisana prema programu predmeta "Algebarske strukture i matematička logika" sa Smera za obradu podataka na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu. Skripta sadrže 160 strana i podeljena su na sledeća poglavlja: 1. Uvod; 2. Kombinatorika; 3. Iskazna algebra; 4. Elementi teorije skupova 5. Kvantifikatorski račun prvog reda; 6. Grupe; 7. Algebarske strukture sa više operacija; 8. Teorija grafova; 9. Formalne teorije i izračunljivost.

**3-1.** Knjiga je objavljena kao univerzitetski udžbenik i nastala je proširenjem predhodno izdatih skripti [3-0]. Dodata su poglavlja o računu verovatnoće (uključujući elemente teorije informacija) i o teoriji igara.

**3-2.** U ovom izdanju su ispravljene uočene greške i izostavljeni prilozi iz prvog izdanja.

**3-3.** U III izdanje knjige uneseno je više novih aktuelnih tekstova. U vidu Priloga na kraju knjige obrađeno je u sažetom obliku nekoliko problema algebre relacija, kompleksnosti algoritama i veštačke inteligencije. Dodato je dosta novih zadataka i izrađen je registar pojmova.

**3-4.** Knjiga se u IV izdanju pojavljuje u istom obliku kao i u III izdanju.

**4-0.** Ova skripta pokrivaju deo programa predmeta Matematika II na Profilu za računarsku tehniku i informatiku Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu. Poglavlja: 1. Kombinatorna optimizacija, 2. Metode optimizacije, 3. Mreže, 4. Matematička logika, 5. Opšta algebra, 6. Teorija konačnih automata, 7. Kompleksnost algoritama.

**4-1.** Knjiga je nastala proširenjem knjige "Diskretne matematičke strukture - Matematike za kompjuterske nauke" od koje je preuzela podnaslov. Knjiga je uvodnog i pretežno enciklopedijskog karaktera. I pored znatne obimnosti neki delovi diskretne matematike od interesa u računarstvu nisu zastupljeni.

**4-2.** Upotreba savremenijeg procesora teksta je omogućila poboljšanje kvaliteta matematičkog sloga i ukljanjanje štamparskih grešaka iz prvog

izdanja. Tekst je poboljššan na mnogim mestima a unesen je i veći broj novih delova.

**5-1.** Knjiga je komponovana izborom poglavlja iz knjige "Diskretna matematika" za potrebe nastave dela predmeta "Matematika 4" na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu.

**5-2.** Tekst je identičan sa tekstom iz prethodnog izdanja [5-1].

**6-1.** Teorija matrica je u ovoj knjizi fundirana i razvijena sredstvima teorije grafova, što predstavlja sasvim originalan pristup. Matrici se na razne načine pridružuju digrafovi (Königov, Coatesov, itd.). Uz pomoć ovih digrafova se definišu ili interpretiraju takvi osnovni pojmovi kao što su determinanta ili proizvod matrica. Opisuju se tehnike rešavanja sistema linearnih algebarskih jednačina pomoću pridruženih digrafova. Navode se neke primene linearne algebre u elektrotehnici, hemiji i fizici. Knjiga sadrži nekoliko priloga raznih autora.

**6-2.** U II izdanje je unesen elegantan kombinatorni dokaz Cayley-Hamiltonove teoreme koji se u međuvremenu pojavio. Jedan od priloga je zamenjen novim prilogom.

**6-3.** Konceptija knjige i najveći deo teksta ostaju i u ovom izdanju nepromenjeni. U predgovoru se ističe da je knjiga poslužila kao osnova za izradu knjige *A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Application*. Knjiga je snabdevena kompaktnim diskom sa slajdovima za nastavu linearne algebre po ovoj knjizi.

**7-1.** U knjizi se sistematski izlažu sve grane savremene kombinatorike izuzev teorije grafova koja se tretira samo u sklopu veza sa ostalim granama. Između ostalog, obrađeni su klasični kombinatorni problemi, konačne geometrije, blok šeme, Hadamardove matrice, kodovi, matroidi, sistemi različitih predstavnika itd.

**7-2.** Knjiga se u drugom izdanju pojavljuje sa nekoliko izmena i dopuna. Novo je poglavlje 11 o primenama kombinatorike. Izrađen je predmetni indeks.

**7-3.** Sa novim naslovom i podnaslovom, ovo je, u suštini, treće izdanje knjige "Kombinatorika - klasična i moderna". Podnaslovom "Pregled i prilozi" ističe se da je ova knjiga istovremeno pregled oblasti i sadrži sopstvene priloge autora. Osnovni tekst je zadržan ali su prisutne mnoge inovacije.

## 7.3. Udžbenici i priručnici

**1-1.** Ovaj trotomni priručnik je delo kolektiva od 40 autora. Moj prilog pod naslovom "Aritmetika i algebra" se nalazi u prvom tomu u delu posvećenom matematici i ima obim 18 strana.

**1-2.** U ovom izdanju ispravljene su štamparske greške uočene u prvom izdanju.

**2-0.** Skripta sadrže autorizovana predavanja održana na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu školske 1987/1988. godine u okviru predmeta Matematika I. To je bila prva školska godina u kojoj su važili novi nastavni planovi i programi. Skripta su pokrivala algebarski deo dvosemestralnog predmeta Matematika I na prvoj godina studija.

**2-1.** Prethodno objavljena skripta su doručena i objavljena u obliku knjige. Knjiga sadrži sledeća poglavlja: 0. Uvod, 1. Booleova algebra, 2. Kvantifikatorski račun, 3. Kombinatorika i grafovi, 4. Opšta algebra, 5. Algoritmi i heuristike, 6. Polinomi i racionalne funkcije, 7. Linearna algebra. Poslednje poglavlje zauzima skoro polovinu knjige. Bio sam redaktor knjige a moj tekst u knjizi zauzima približno polovinu prostora.

**2-2.** Tekst knjige je poboljšan na osnovu iskustva autora u nastavi. Neki delovi teksta iz I izdanja, a koji nisu obuhvaćeni programom predmeta Matematika I, su izostavljeni ili reducirani. Izrađen je predmetni indeks.

**2-3.** Nije bilo značajnijih izmena u ovom izdanju.

**2-4.** Tekst je identičan sa onim iz III izdanja.

**2-5.** Upotrebljen je savremeniji procesor teksta i sprovedena manja poboljšanja teksta.

U daljim izdanjima nije bilo značajnijih promena. Posle IX izdanja knjiga je prema potrebi doštampavana bez formalne naznake novog izdanja.

**3. i 4.** Ovo je zbirka zadataka za jednosemestralni predmet Matematika I - Algebra i u skladu je sa udžbenikom [2]. Moje koautorstvo kod ovih pomoćnih udžbenika je simbolično. Uključen sam kao nastavnik predmeta pri čemu je preuzet izvestan broj zadataka iz mojih knjiga. Prvi deo sadrži zadatke iz Booleovih algebri, kvantifikatorskog računa, kombinatorike i grafova, i polinoma dok drugi deo obrađuje linearnu algebru. Redaktor oba dela zbirke je Z. Radosavljević.

## 7.4. Popularne knjige

**1.** Ova knjiga predstavlja zbirku zadataka sa srednjoškolskih matematičkih takmičenja u Čehoslovačkoj, Mađarskoj i Rumuniji. Zadaci su delom dati sa rešenjima a za neke je dato uputstvo za rešavanje ili samo rezultat. Deo knjige koji se odnosi na Čehoslovačku je izradio S. Turajlić, deo o Mađarskoj D. Cvetković a deo o Rumuniji I. Lazarević. Knjiga sadrži ukupno 150 strana.

**2-1.** Ovo je naučno-popularna knjiga koja sa matematičkog stanovišta obrađuje igru preferans. U knjizi se primenjuju različiti modeli iz kombinatorike i računa verovatnoće.

**2-2.** U ovom izdanju tekst knjige je proširen sa tri nova poglavlja (informacije u preferansu, konfliktne situacije i teorija igara, veštačka inteligencija) i tehnički je znatno bolje opremljena. Tiraž je bio 3000 primeraka, kao i u prethodnom izdanju.

**2-3.** Dodato je nekoliko kraćih tekstova uključujući informacije o jednom savremenom računarskom programu za igranje preferansa.

**2-4.** Tekst je identičan sa onim u trećem izdanju.

**3.** Ova kolekcija tekstova sadrži, između ostalog, moja pristupna predavanja u Srpskoj akademiji nauka i umetnosti i autobiografske beleške.

**4.** Jubilarna knjiga objavljena povodom mog penzionisanja na Elektrotehničkom fakultetu.

**5.** Ovo je kolekcija tekstova o vezama šaha i matematike.

**6.** Knjiga je objavljena povodom obeležavanja mog sedamdesetog rođendana.

## 7.5. Editorski radovi

**1.** Ovo je Zbornik članaka sa IV jugoslovenskog seminara za teoriju grafova koji je održan u Novom Sadu u aprilu 1983. godine. Pored članaka domaćih, ima i nekoliko članaka inostranih autora. Svi članci su recenzirani. Zbornik odražava tadašnje stanje teorije grafova u Jugoslaviji.



**2.** Objavljene su apstrakti 6 plenarnih predavanja i 14 radova prikazanih na simpozijumu. Simpozijum je doprineo upoznavanju rezultata, uzajamnoj informisanosti i povezivanju istraživača.

**3.** Predstavljene su stručne aktivnosti naučnog projekta "Teorija grafova i matematičko programiranje sa primenama u hemiji i tehničkim naukama" u periodu 2006-2007 godina i njegovog prethodnika sličnog imena u periodu 2001-2005. godine. Pošto je u godini izdanja knjige nekoliko učesnika projekta (Ivan Gutman, Vera Vujčić, Slobodan Simić, Miroslav Petrović) napunilo šezdeset godina života, objavljeni su prigodni tekstovi o njima. Prikazan je rad sa mladim istraživačima i doprinos članova projekta izdavanju naučnih publikacija i organizovanju naučnih seminara.

**4.** Svrha ovog zbornika je, prema predgovoru urednika, da skrene pažnju matematičke javnosti na brz porast primena teorije spektara grafova. Pored klasičnih i dobro dokumentovanih primena u hemiji i fizici, svedoci smo pojavljivanja spektara grafova u računarstvu u mnogobrojnim istraživanjima. Postoje takođe primene u mnogim drugim oblastima kao što su biologija, geografija, ekonomija i društvene nauke.

**5.** Zbog velikog interesovanja za Zbornik radova 13(21) dolazi do objavljivanja ove nove sveske sa sličnim imenom i sadržajem. Tekstovi iz prethodnog zbornika su revidirani i poboljšani a objavljeno je više novih tekstova.

## 8. Predgovori za knjige

U ovom delu knjige reprodukovani su predgovori većeg broja mojih knjiga. Naravno, iz predgovora svake knjige čitalac može, po pravilu, da dobije važne informacije o knjizi. Reprodukovani su predgovori za sledeće knjige<sup>1</sup>:

*Spectra of graphs*

*Eigenspaces of graphs*

*Spectral generalizations of line graphs*

*Variations on the travelling salesman theme*

*Kombinatorna optimizacija*

*A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Application*

*An Introduction to the Theory of Graph Spectra*

*Teorija grafova*

*Diskretne matematičke strukture*

*Diskretna matematika*

*Odabrana poglavlja iz diskretne matematike*

*Kombinatorna teorija matrica*

*Kombinatorika—klasična i moderna*

*Kombinatorika i grafovi - Pregled i prilozi*

*Zanimljiva matematika - Preferans*

*Zanimljiva matematika - Šah*

Predgovori su reprodukovani uz minimalne modifikacije.

Predgovor za naučnu monografiju *Recent Results* nije posebno reprodukovan jer se njegov najvažniji deo citira u predgovoru monografije *Spectra of Graphs*.

U nekim predgovorima se pojavljuju reference na bibliografiju iz knjige pa zainteresovani čitalac mora da konsultuje odgovarajuću knjigu.

---

<sup>1</sup>Ovde i na drugim mestima u knjizi su korišćeni skraćeni naslovi knjiga na osnovu kojih se knjige mogu lako identifikovati u spisku knjiga.

## 8.1. Spectra of graphs, III edition

### Preface

*It has the curious feature that some of the main results, although purely combinatorial in character, seem in the present state of knowledge to be unobtainable without resorting to algebraic methods involving a consideration of eigenvalues of adjacency matrices of graphs.*

CRISPIN ST. J. A. NASH-WILLIAMS,  
Unexplored and Semi-explored Territories  
in Graph Theory<sup>1</sup>

*It will be apparent ... that the results achieved so far barely scratch the surface of what appears to be a rich area of investigation.*

ALAN J. HOFFMAN, The Eigenvalues of  
the Adjacency Matrix of a Graph<sup>2</sup>

This book has been written for mathematicians working in the area of graph theory and combinatorics, for chemists who are interested in quantum chemistry, and, at least partly, for physicists and electrical engineers using graph theory in their work. The book is almost entirely self-contained; only a little familiarity with graph theory and matrix theory is assumed.

The theory of graph spectra can, in a way, be considered as an attempt to utilize linear algebra including, in particular, the well-developed theory of matrices for the purposes of graph theory and its applications. However, that does not mean that the theory of graph spectra can be reduced to the theory of matrices; on the contrary, it has its own characteristic features and specific ways of reasoning fully justifying it to be treated as a theory in its own right.

We are convinced that a book such as this should have been written. On the one hand, the standard text-books on graph theory barely mention graph spectra (N. BIGGS' excellent monograph on Algebraic Graph Theory [Big5] being an exception)<sup>3</sup>. On the other hand, considerable interest has been paid to graph spectra in the mathematical as well as chemical literature. The material is spread in various journals and other publications and

<sup>1</sup>[Nash], p. 181 ; the author is speaking about "the problem of determining the smallest possible number of vertices of a regular graph of prescribed girth and valency".

<sup>2</sup>[Hof9], p. 578.

<sup>3</sup>This remark was made when the first edition appeared. For recent books on graph spectra see Appendix B, Section 1.

therefore is not well known on the whole: so it has happened that some results have been rediscovered many times (see Theorems 1.2 and 1.3).

This monograph should not be considered as a systematic treatment on graph spectra, but rather as a unifying collection of material on that subject. Nevertheless, we hope that it will be useful since it contains a lot of information, an extensive bibliography and an appendix with numerical data on graph spectra.

We are aware that some important topics related to graph spectra are only roughly outlined in the book.

Chapters 0, 2, 3, 7, 8, 9 have been written by D. M. CVETKOVIĆ. M. DOOB has written Chapter 6. Chapters 1, 4, 5 have been written by H. SACHS. The Appendix has been compiled by D. M. CVETKOVIĆ and H. SACHS. In addition, all the authors have put some small inserts into all of the chapters. We have tried to improve the text of the whole book and to unify the material from different chapters. Hence all three authors are collectively responsible for the book.

We have endeavoured to find a style which is, on the one hand, concise enough to enable the extensive material to be treated in a book of limited size, and which, on the other hand, is still intuitive enough to make the book readable for the applied scientist using this material as well as for the mathematician.

The book “*Recent results in the theory of graph spectra*” by D. CVETKOVIĆ, M. DOOB, I. GUTMAN and A. TORGAŠEV was published in 1988. We reproduce here a part of the Introduction to that book:

“Almost all of the results related to the theory of graph spectra published before 1978 were summarized in the monograph “*Spectra of graphs*” by D. CVETKOVIĆ, M. DOOB and H. SACHS. This book initially appeared in print in 1980, had a second edition in 1982, and was published in a Russian edition in 1984. The purpose of the present book is to review the results in spectral graph theory which have, with only a few exceptions, appeared after 1978. In as much as is possible, we have presented our results in a manner consistent with the terminology and results of “*Spectra of graphs*”. In contrast to that reference where the theory of graph spectra was presented in full starting from basic concepts and continuing through to advanced theorems, this book gives new results with no more than a short proof.

The bibliography of “*Spectra of graphs*” contains 564 items, most of which were published between 1960 and 1978. In this book there are over 700 new references from the mathematical literature and from the chemical

literature; some others come from different areas including physics, mechanical engineering, geography, and social sciences. We have included all of the references of which we were aware at the end of 1984. The large number of references indicates the rapid growth rate of spectral graph theory. But it must be said that many of these papers have only minor results and hence are presented only briefly. In addition, many results published are in fact rediscoveries of known results. The style of this book has been influenced by this situation.”

In this (third English) edition of “*Spectra of graphs*” the basic text has been reproduced almost without any changes. The new material is organized within Appendices A (*Comments on the first two editions of the book*) and B (*Recent developments in the theory of graph spectra*) and in the Additional Bibliography.

Appendix A contains comments on those parts of the book which have been superseded by later developments.

Appendix B presents main directions in the research after 1984, primarily those not existing in the time when “*Spectra of graphs*” and “*Recent results*” were written.

Additional Bibliography (references have a prefix AB.) contains over 300 references but is not exhaustive. It contains data on books, expository papers and selected research papers. Papers on application (chemistry, physics, etc.) are only exceptionally included. References from “*Recent results*” are not repeated.

Additions in the third edition have been prepared by D. CVETKOVIĆ. The authors are grateful to P. ROWLINSON and S. SIMIĆ for useful remarks and to M. CVETKOVIĆ for typesetting complicated mathematical text. It is worth mentioning that a book under the title “*Eigenspaces of graphs*” is being prepared by D. CVETKOVIĆ, P. ROWLINSON and S. SIMIĆ. Appendices A and B in this edition have been written having in mind also this book, thus not to overlap to a greater extent with it.

Summer 1994

D. CVETKOVIĆ

M. DOOB

H. SACHS

## 8.2. Eigenspaces of graphs

### Preface

The foundations of spectral graph theory were laid in the fifties and sixties, as a result of the work of a considerable number of mathematicians. Most of the early results are, like this book, concerned with the relation between spectral and structural properties of a graph. The investigation of such a relationship was proposed explicitly by Sachs [Sac1] and Hoffman [Hof5], although in effect it had already been initiated in an earlier article by Collatz and Sinogowitz [CoSi]. This seminal paper appeared in 1957, but our bibliography contains two references prior to this date: the unpublished thesis of Wei [Wei] from 1952, and a summary (also unpublished) of a 1956 paper by Lihtenbaum [Lih] communicated at the 3rd Congress of Mathematicians of the U.S.S.R.

Another origin of the theory of graph spectra lies beyond mathematics. In quantum chemistry, an approximative treatment of non-saturated hydrocarbons introduced by E. Hückel [Huc] yields a graph-theoretical model of the corresponding molecules in which eigenvalues of graphs represent the energy levels of certain electrons. The connection between Hückel's model of 1931 and the mathematical theory of graph spectra was recognized many years later in [GuPr] and [CvGu1], and thereafter exploited extensively by many authors, both chemists and mathematicians.

In his thesis [Cve7], Cvetković identified 83 papers dealing with eigenvalues of graphs which had appeared before 1970. Ten years later, almost all of the results related to the theory of graph spectra published before 1978 were summarized in the monograph *Spectra of Graphs* by Cvetković, Doob and Sachs, a book which is almost entirely self-contained; only a little familiarity with graph theory and matrix theory is assumed. Its bibliography contains 564 items, most of which were published between 1960 and 1978. It was supplemented in 1988 by *Recent Results in the Theory of Graph Spectra* by Cvetković, Doob, Gutman and Torgašev. This reviews the results in spectral graph theory from the period 1978-1984, and provides over 700 further references from the mathematical and chemical literature. There are additional references from areas such as physics, mechanical engineering, geography and the social sciences. Although many papers contain only minor results, and some present rediscoveries of known results, the large

number of references indicates the rapid rate of growth of spectral graph theory. The third edition of *Spectra of Graphs*, published in 1995, contains an appendix which describes recent developments in the subject.

This book deals with eigenspaces of graphs, and although one cannot speak about eigenvectors without mentioning eigenvalues, or vice versa, the emphasis is on those parts of spectral theory where the structure of eigenspaces is a dominant feature, thus complementing the ‘eigenvalue part of the theory’ described in *Spectra of Graphs*. For the most part, the eigenspaces considered are those of a  $(0, 1)$ -adjacency matrix of a finite undirected graph.

Chapters 1 and 2 review ‘old’ results on eigenvalues and eigenvectors respectively, while the remaining chapters are devoted to ‘new’ results and techniques. The eigenspace corresponding to the largest eigenvalue (or *index*) of a connected graph is one-dimensional, and in Chapter 3 a spanning eigenvector is used to identify the graphs with extremal index in various families of graphs. The discussion of graph spectra in the first chapter reveals the limitations of the spectrum as a means of characterizing a graph, and motivates the search for further algebraic invariants such as the graph angles considered in Chapters 4 and 5. Angles also have a role in Chapter 6, where the theory of matrix perturbations is applied to adjacency matrices: one can then describe the behaviour of the index of a graph when it undergoes a local modification such as the addition or deletion of an edge or vertex. Graph angles arise from a geometric approach to eigenspaces that leads in Chapter 7 to the notion of a star partition of vertices, an important concept which enables one to construct ‘natural’ bases for the eigenspaces of a graph. Implications for the graph isomorphism problem are the subject of current research, and this is described in Chapter 8. Some miscellaneous results are gathered together in Chapter 9, and there are two appendices: one contains some classical results from matrix theory, and the other is a table of graph angles.

The authors are indebted to Mladen Cvetković for assistance with the preparation of a  $\text{\LaTeX}$  version of the first draft of the text. The contents of the second author’s article on graph perturbations in *Surveys in Combinatorics 1991* (ed. A.D. Keedwell, Cambridge University Press, 1991) have been included, without significant change, in Chapters 3 and 6. With few other exceptions, the results in Chapters 2 to 9 have not previously appeared in book form.

Finally, the authors gratefully acknowledge individual financial support

from the following sources over the past ten years: the British Council, the Carnegie Foundation, the Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences, the Science and Engineering Research Council, the University of Belgrade and the University of Stirling.

January 1996

D.C., P.R., S.S.



## 8.3. Spectral generalizations of line graphs

### Preface

The eigenvalues discussed in this book are those of a  $(0, 1)$ -adjacency matrix of a finite undirected graph. Line graphs, familiar to graph-theorists for decades, have the property that their least eigenvalue is greater than or equal to  $-2$ . This property is shared with generalized line graphs, which can be viewed as line graphs of certain multigraphs. Apart from these classes of examples there are only finitely many further connected graphs with spectrum in the interval  $[-2, \infty)$ , and these are called exceptional graphs. This book deals with line graphs, generalized line graphs and exceptional graphs, in the context of spectral properties of graphs. Having worked in spectral graph theory for many years, the authors came to see the need for a single source of information on the principal results in this area. Work began early in 2000, and the principal motivation for writing the book at this juncture was the construction of the maximal exceptional graphs in 1999. The working title has become the subtitle on the grounds that ‘Graphs with least eigenvalue  $-2$ ’ might appear unreasonably specialized to the casual observer. In fact, the subtitle is not wholly accurate in that it is necessary to treat also the graphs with least eigenvalue greater than  $-2$ .

The requirement that the spectrum of a graph lies in  $[-2, \infty)$  is a natural one, and in principle not a restriction at all. The reason is to be found in the classical result of H. Whitney, who showed in 1932 that two connected graphs (with more than three vertices) are isomorphic if and only if their line graphs are isomorphic.

The titles of Chapters 2, 3 and 5, namely ‘Forbidden subgraphs’, ‘Root systems’ and ‘Star complements’ reflect three major techniques and three periods in the study of graphs with least eigenvalue  $-2$ . Of course, early results were often improved using later techniques, but on considering the interplay between techniques, the authors decided that a presentation broadly in chronological order was the most natural approach.

The forbidden subgraph technique (Chapter 2) was introduced by A. J. Hoffman and others in the 1960s. It is based on the fact that the property of having least eigenvalue greater than or equal to  $-2$  is a hereditary property, that is, a property which the graph shares with all its induced subgraphs. For any hereditary property  $\mathcal{P}$  we can consider graphs without property

$\mathcal{P}$  which are minimal with respect to the induced subgraph relation: such graphs are the minimal forbidden subgraphs for graphs with property  $\mathcal{P}$ . For graphs with least eigenvalue greater than or equal to  $-2$ , the collection of minimal forbidden subgraphs is finite.

The subject of Chapter 3 is the root system technique introduced by P. J. Cameron, J. M. Goethals, J. J. Seidel and E. E. Shult [CaGSS] in 1976. Root systems were already known in the theory of Lie algebras and in other parts of mathematics, and it turned out that graphs with least eigenvalue  $-2$  can be elegantly described by means of root systems. The description relies on the use of Gram matrices of certain sets of vectors to represent the graphs in question. Generalized line graphs (including line graphs) can be represented in the root system  $D_n$  for some  $n$  while the existence of the exceptional root system  $E_8$  in 8-dimensional Euclidean space (containing extremely densely packed sets of vectors at 60 and 90 degrees) accounts for the existence of graphs with least eigenvalue  $-2$  which are not generalized line graphs. Chapter 4 uses the tools introduced in Chapter 3 to investigate regular graphs; many spectral characterization theorems for regular line graphs are presented, among them some results from Chapter 2 in an improved form with shorter proofs.

The star complement technique was introduced into the study of graphs with least eigenvalue  $-2$  by the authors of this book in 1998 [CvRS3]. One of the main results presented in Chapter 5 is a characterization of exceptional graphs by exceptional star complements, and this enables all of the maximal exceptional graphs to be constructed (Chapter 6).

Preliminary results in spectral graph theory are given in Chapter 1, while Chapter 7 contains miscellaneous results that do not fit readily into the earlier chapters. It is relatively straightforward to describe a means of constructing exceptional graphs, but the results of the construction make for a fairly elaborate picture. Accordingly the technical descriptions of the 187 regular exceptional graphs and the 473 maximal exceptional graphs are consigned to the Appendix. The authors are grateful to M. Lepović (University of Kragujevac, Serbia & Montenegro) for his assistance in completing the tables in the Appendix, which throughout the book are referred to as Tables A1 to A7. Table A2 contains a description of the 573 exceptional graphs with least eigenvalue greater than  $-2$ .

The book brings together many independent discoveries and overlapping results, and provides over 250 references to the literature. The vast majority of the material has not previously appeared in book form. The classification

by P. J. Cameron *et al* [CaGSS] using root systems has been summarized in various forms in the monographs [BrCN], [CaLi] and [GoRo]. In this book an outline appears in Section 3.5, following the presentation of a lesser known approach due to M. Doob and D. Cvetković [CvDo]. Further, we acknowledge a debt to [BrCN], Chapter 3 as the source of our proof of Theorem 4.1.5, and as a guide to results on lattices.

Inevitably it has been necessary to limit the scope of the book. A more ambitious work on graphs with least eigenvalue  $-2$  could elaborate not only on the connections with Lie Algebras and lattices but also on the relation to distance-regular graphs, association schemes, block designs, signed graphs, Coxeter systems, Weyl groups and many other combinatorial or algebraic objects. We have merely drawn attention to such connections by short comments and relevant references at the appropriate places. Many of these links to other mathematical areas are described in the book [BrCN] and the expository paper [CaST].

The authors are grateful for financial support from the United Kingdom Engineering & Physical Sciences Research Council (EPSRC), the Serbian Academy of Science & Arts, the Serbian Ministry for Science, Technology and Development, the Universities of Belgrade and Stirling, and the University of Montenegro (S.S. in the period 2000-2002).

Belgrade  
Stirling  
Belgrade

D. Cvetković  
P. Rowlinson  
S. Simić

August 2003

## 8.4. Variations on the travelling salesman theme

### Preface

The travelling salesman problem (TSP) is recognized as one of the most important problems in the theory of complexity of algorithms and problems. It has links with many fields of Pure and Applied Mathematics (e.g. combinatorial optimization, graph theory, integer programming) and applications in Engineering and Operations Research.

There are many variations, generalizations and special cases of the TSP; we have selected the name “Variations on the Travelling Salesman Theme” to present some of them in this monograph. The emphasis is on the author’s contributions in this field. We have presented our work on the subject from the period 1985-1990. This material has been presented in a condensed form in an expository article <sup>2</sup>, but otherwise only parts of it have been published and these have been mostly in Serbo-Croatian (see Bibliography).

The topics of this book include: complexity indices (by which we can predict the instance complexities in the TSP), a special variant of the multi-salesman problem, algorithms for finding  $k$ -best solutions of the TSP, problems on graphs of a special structure (e.g. bandwidth-limited graphs, graphs with a chained structure) and a generalized TSP in which the salesman visits one city in each of the given regions.

In our treatment of various variations of the travelling salesman problem, the point is to find any reasonable algorithm for solving them. Our solutions are in many cases far from being good ones, let alone the best; after some experiments on the computer we often made some improvements on the original variants. Still much has to be done with respect to all three relevant aspects: theoretical work, implementation of computer programs and experiments on computer.

In finding solutions to the problems considered, we followed mainly the graph theoretical approach. We used only partially the tools of the linear programming through the Lagrangian relaxations, while we have not used the polyhedral theory in our considerations (which is the basis of the most efficient algorithms for many large-scale hard combinatorial optimization problems).

---

<sup>2</sup>Cvetković D., Dimitrijević V., Milosavljević M., *A survey of some non-standard travelling salesman problems*, YUJOR, **2**(1992), No. 2, 163-185.

---

In this book we also describe some relevant software: TSP-SOLVER, a programming package for the TSP, and GRAPH, a programming package for graph theory. These packages contributed greatly to our research; the system GRAPH is already known as a useful tool to support several investigations in graph theory. On the other hand, TSP-SOLVER is a result of the research. Both packages are user-friendly; they are designed for quick processing of examples rather than to solving large-scale problems.

Belgrade, September 1993.

A u t h o r s

## 8.5. Kombinatorna optimizacija – Matematička teorija i algoritmi

### Predgovor

Kratko i ponešto pojednostavljeno rečeno, *kombinatorna optimizacija* je matematička disciplina koja proučava probleme nalaženja ekstremnih vrednosti funkcije definisane na konačnom skupu. Kombinatorna optimizacija zauzima značajno mesto u operacionim istraživanjima, u teoriji sistema, u telekomunikacijama, elektroenergetici i mnogim drugim oblastima. Ova disciplina uključuje, između ostalog, ekstreme probleme na težinskim grafovima, a težinski grafovi su prirodni modeli raznih fizičkih mreža. Na taj način, kombinatorna optimizacija je značajno sredstvo u analizi i sintezi telekomunikacionih mreža, mreža računara, elektroenergetskih, transportnih i drugih vrsta mreža.

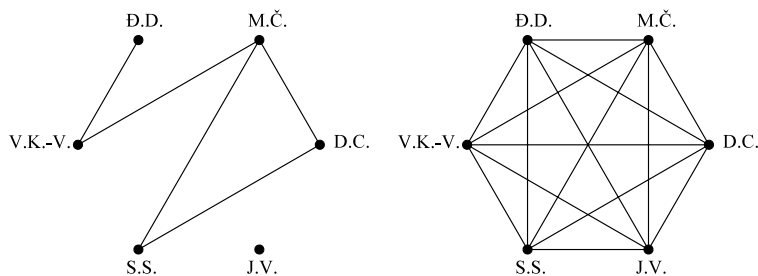
Već duže vreme u izvesnim krugovima matematičara i operacionih istraživača, kojima pripadaju i autori ove knjige, govori se o potrebi objavljivanja knjige o kombinatornoj optimizaciji na srpskom jeziku. Zaista, sve do pojave ove knjige, objavljeni su na našem jeziku samo tekstovi koji se odnose na neka specijalna pitanja iz ove oblasti.

Knjiga se pojavljuje kao naučna monografija, koja uključuje i spostvene naučne doprinose autora, ali i s uvodnim razmatranjima i opisom nekih standardnih rezultata, tako da može da posluži i kao udžbenik neelemarnog karaktera. Podnaslov knjige "Matematička teorija i algoritmi" najavljuje nameru grupe inženjera i operacionih istraživača da se objavi knjiga sa naslovom "Kombinatorna optimizacija – primene". Kolege koje rade na tom projektu su u kontaktu sa autorima ove knjige, pa se može očekivati da dve knjige predstavljaju jednu celinu.

Šest autora ove knjige potiče sa četiri visokoškolske, odnosno, naučne, institucije: D.Cvetković, Elektrotehnički fakultet, Beograd; M.Čangalović, Fakultet organizacionih nauka, Beograd; Đ.Dugošija, Matematički fakultet, Beograd; V.Kovačević–Vujčić, Fakultet organizacionih nauka, Beograd; S.Simić, Elektrotehnički fakultet, Beograd; J.Vuleta, Ekonomski institut, Beograd.

Na sl. 1 je pomoću grafova prikazano publikovanje zajedničkih radova i knjiga ovih autora pre i posle objavljivanja ove knjige. Svaki autor je

predstavljen jednim čvorom grafa. Dva čvora su povezana granom ako su odgovarajući autori objavili zajedničko naučno ili stručno delo.



Sl. 1.

Autori su napisali pojedina poglavlja prema sledećem spisku:

1. Uvod: V.Kovačević–Vujčić (Odeljak 1.1), D.Cvetković (Odeljci 1.2, 1.4), S.Simić (Odeljak 1.3);
2. Linearno programiranje: V.Kovačević–Vujčić;
3. Celobrojno programiranje: Đ.Dugošija;
4. Minimalno razapinjuće stablo i proždrljivi algoritmi: S.Simić;
5. Ekstremnski putevi u mrežama: J.Vuleta;
6. Protoci u mrežama: J.Vuleta (Odeljci 6.1, 6.2), Đ.Dugošija (Odeljak 6.3);
7. Sparivanja u grafovima: S.Simić;
8. Hamiltonovi putevi i problem trgovačkog putnika: D.Cvetković;
9. Grupisanje podataka: D.Cvetković;
10. Bojenje čvorova grafa: M.Čangalović;
11. Opšte heuristike za rešavanje problema kombinatorne optimizacije: M.Čangalović.

S obzirom na veliku razuđenost kombinatorne optimizacije i na činjenicu da je posredi oblast koja je još u razvoju i nije teorijski zaokružena, sigurno je da navedeni sadržaj ne obuhvata sve teme koje bi mogle biti uključene. Prevažadni cilj autora bio je da postave matematičke osnove kombinatorne optimizacije i da prikažu ideje za rešavanje najvažnijih problema.

Autori i redaktori su se trudili da sopstvene poglede na materiju i različite stilove pisanja usaglase u meri koju zahteva pisanje zajedničke knjige. Poseban trud je uložten na usaglašavanje terminologije. Ipak, potpuna unisonost nije postignuta, s jedne strane, zato što je sa šest autora to skoro nemoguće postići, a s druge strane, zbog toga što je zajednička namera bila da pojedina poglavlja ipak zadrže nešto od onog što je karakteristično za svakog od autora.

Zahvaljujemo recenzentima prof. Jovanu Petriću i prof. Slobodanu Guberiniću na nizu korisnih sugestija koje su doprinele poboljšanju teksta ove knjige. Zahvalnost dugujemo takođe Miroslavu Živkoviću, diplomiranom inženjeru elektrotehnike, koji je korektno obavio složen posao obrade teksta na računaru.

Beograd, avgusta 1996.

*Autori*



## 8.6. A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Application

### Preface

Matrix theory is a fundamental area of mathematics with application not only to many branches of mathematics but also to science and engineering. Its connections to many different branches of mathematics include: (i) algebraic structures such as groups, fields and vector spaces, (ii) combinatorics including graphs and other discrete structures, and (iii) analysis including systems of linear differential equations and functions of a matrix argument.

Generally, elementary (and some advanced) books on matrices ignore or only touch on the combinatorial or graph-theoretical connections with matrices. This is unfortunate in that these connections can be used to shed light on the subject, and to clarify and deepen one's understanding. In fact, a matrix and a (weighted) graph can each be regarded as different models of the same mathematical concept.

Most researchers in matrix theory, and most users of its methods, are aware of the importance of graphs in linear algebra. This can be seen from the great number of papers in which graph-theoretic methods for solving problems in linear algebra are used. Also, electrical engineers apply these methods in practical work. But, in most instances, the graph is considered as an auxiliary, but nonetheless very useful, tool for solving important problems.

The present book differs from most other books on matrices in that the combinatorial, primarily graph-theoretic, tools are put in the forefront of the development of the theory. Graphs are used to explain and illuminate basic matrix constructions, formulas, computations, ideas, and results. Such an approach fosters a better understanding of many ideas of matrix theory and, in some instances, contributes to easier descriptions of them. The approach taken in this book should be of interest to mathematicians, electrical engineers, and other specialists in sciences such as chemistry and physics.

Each of us has written a previous book which is related to the present book:

- I. R. A. Brualdi, H. J. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991; reprinted 1992.

- II. D. Cvetković, *Combinatorial Matrix Theory, with Applications to Electrical Engineering, Chemistry and Physics*, (in Serbian), Naučna knjiga, Beograd, 1980; II edition 1987.

This joint book came about as a result of a proposal from the second-named author (D.C.) to the first-named author (R.A.B.) to join in reworking and translating (parts of) his book (II). While that book—mainly the theoretical parts of it—has been used as a guide in preparing this book, the material has been rewritten in a major way with some new organization and with substantial new material added throughout. The stress in this book is on the combinatorial aspects of the topics treated; other aspects of the theory (e.g. algebraic and analytic) are described as much as necessary for the book to be reasonably self-contained and to provide some coherence. Some material which is rarely found in books at this level, for example, Geršgorin's theorem and its extensions, Kronecker product of matrices, and sign-nonsingular matrices and evaluation of the permanent, is included in the book.

Thus our goal in writing this book is to increase one's understanding of and intuition for the fundamentals of matrix theory, and its application to science, with the aid of combinatorial/graph-theoretic tools. The book is not written as a first course in linear algebra. It could be used in a special course in matrix theory for students who know the basics of vector spaces. More likely, this book could be used as a supplementary book for courses in matrix theory (or linear algebra). It could also be used as a book for an undergraduate seminar or as a book for self-study.

We now briefly describe the chapters of the book. In the first chapter we review the basics and terminology of graph theory, elementary counting formulas, fields, and vector spaces. It is expected that someone reading this book has a previous acquaintance with vector spaces. In Chapter 2 the algebra of matrices is explained, and the König digraph is introduced and then used in understanding and carrying out basic matrix operations. The short Chapter 3 is concerned with matrix powers and their description in terms of another digraph associated with a matrix.

In Chapter 4 we introduce the Coates digraph of a matrix and use it to give a graph-theoretic definition of the determinant. The fundamental properties of determinants are established using the Coates digraph. These include the Binet-Cauchy formula and the Laplace development of the determinant along a row or column. The classical formula for the determinant

is also derived. Chapter 5 is concerned with matrix inverses and a graph-theoretic interpretation is given. In Chapter 6 we develop the elementary theory of solutions of systems of linear equations, including Cramer's rule, and show how the Coates digraph can be used to solve a linear system. Some brief mention is made of sparse matrices.

In Chapter 7 we study the eigenvalues, eigenvectors, and characteristic polynomial of a matrix. We give a combinatorial argument for the classical Cayley-Hamilton theorem and a very combinatorial proof of the Jordan canonical form of a matrix. Chapter 8 is about nonnegative matrices and their special properties that highly depend on their digraphs. We discuss, but do not prove, the important properties of nonnegative matrices that are part of the Perron-Frobenius theory. We also describe some basic properties of graph spectra. There are three unrelated topics in Chapter 9, namely Kronecker products of matrices, eigenvalue inclusion regions, and the permanent of a matrix and its connection with sign-nonsingular matrices. In Chapter 10 we describe some applications in Electrical Engineering, Physics, and Chemistry.

Our hope is that this book will be useful for both students, teachers, and users of matrix theory.

Richard A. Brualdi

Dragoš Cvetković

## 8.7. An Introduction to the Theory of Graph Spectra

### Preface

This book has been written primarily as an introductory text for graduate students interested in algebraic graph theory and related areas. It is also intended to be of use to mathematicians working in graph theory and combinatorics, to chemists who are interested in quantum chemistry, and in part to physicists, computer scientists and electrical engineers using the theory of graph spectra in their work. The book is almost entirely self-contained; only a little familiarity with graph theory and linear algebra is assumed.

In addition to more recent developments, the book includes an up-to-date treatment of most of the topics covered in *Spectra of Graphs* by D. Cvetković, M. Doob and H. Sachs, where spectral graph theory was characterized as follows:

The theory of graph spectra can, in a way, be considered as an attempt to utilize linear algebra including, in particular, the well-developed theory of matrices, for the purposes of graph theory and its applications. However, that does not mean that the theory of graph spectra can be reduced to the theory of matrices; on the contrary, it has its own characteristic features and specific ways of reasoning fully justifying it to be treated as a theory in its own right.

*Spectra of Graphs* has been out of print for some years; it first appeared in 1980, with a second edition in 1982 and a Russian edition in 1984. The third English edition appeared in 1995, with new material presented in two Appendices and an additional Bibliography of over 300 items. The original edition summarized almost all results related to the theory of graph spectra published before 1978, with a bibliography of 564 items. A review of results in spectral graph theory which appeared mostly between 1978 and 1984 can be found in *Recent Results in the Theory of Graph Spectra* by D. Cvetković, M. Doob, I. Gutman and A. Torgašev. This second monograph, published in 1988, contains over 700 further references, reflecting the rapid growth of interest in graph spectra. Today we are witnessing an explosion of the

literature on the topic: there exist several thousand papers in mathematics, chemistry, physics, computer science and other scientific areas which develop or use some parts of the theory of graph spectra. Consequently a truly comprehensive text with a complete bibliography is no longer practicable, and we have concentrated on what we see as the central concepts and the most useful techniques.

The monograph *Spectra of Graphs* has been used for many years both as an introductory text book and as a reference book. Since it is no longer available, we decided to write a new book which would nowadays be more suitable for both purposes. In this sense, the book is a replacement for *Spectra of Graphs* ; but it is not a substitute because *Spectra of Graphs* will continue to serve as a reference for more advanced topics not covered here. The content has been influenced by our previous books from the same publisher, namely *Eigenspaces of Graphs* and *Spectral Generalizations of Line Graphs: on Graphs with Least Eigenvalue  $-2$* . Nevertheless, very few sections of the present text are taken from these more specialized sources. For further reading we recommend not only the books mentioned above but also [BrCN], [Big], [Chu] and [GoRo].

The spectra considered here are those of the adjacency matrix, the Laplacian, the normalized Laplacian, the signless Laplacian and the Seidel matrix of a finite simple graph. In Chapters 2-6, the emphasis is on the adjacency matrix. In Chapter 1, we introduce the various matrices associated with a graph, together with the notation and terminology used throughout the book. We include proofs of the necessary results in matrix theory usually omitted from a first course on linear algebra, but we assume familiarity with the fundamental concepts of graph theory, and with basic results such as the orthogonal diagonalizability of symmetric matrices with real entries. Chapter 2 is concerned with the effects of constructing new graphs from old, and graph angles are used in place of walk generating functions to provide streamlined proofs of some classical results. Chapter 3 deals with the relations between the spectrum and structure of a graph, while Chapter 4 discusses the extent to which the spectrum can characterize a graph. Chapter 5 explores the relation between structure and just one

eigenvalue, a relation made precise by the relatively recent notion of a star complement. Chapter 6 is concerned with spectral techniques used to prove graph-theoretical results which themselves make no reference to eigenvalues. Chapter 7 is devoted to the Laplacian, the normalized Laplacian and the signless Laplacian; here the emphasis is on the Laplacian because the normalized Laplacian is the subject of the monograph *Spectral Graph Theory* by F. R. K. Chung, while the theory of the signless Laplacian is still in its infancy. In Chapter 8 we discuss sundry topics which did not fit readily into earlier sections of the book, and in Chapter 9 we provide a small selection of applications, mostly outwith mathematics.

The tables in the Appendix provide lists of the various spectra, characteristic polynomials and angles of all connected graphs with up to 5 vertices, together with relevant data for connected graphs with 6 vertices, trees with up to 9 vertices, and cubic graphs with up to 12 vertices. We are indebted to M. Lepović for creating the graph catalogues for Tables A1, A3, A4 and A5, and for computing the data. We are grateful to D. Stevanović for the graph diagrams which appear with these tables: they were produced using *Graphviz* (open source graph visualization software developed by AT&T, <http://www.graphviz.org/>), in particular, the programs ‘circo’ (Tables A1,A3,A5) and ‘neato’ (Table A4). Table A2 is taken from *Eigenspaces of Graphs*.

Chapters 2,4 and 9 were drafted by D. Cvetković, Chapters 1,5 and 6 by P. Rowlinson, and Chapters 3,7,8 by S. Simić. However, each of the authors added contributions to all of the chapters, which were then re-written in an effort to refine the text and unify the material. Hence all three authors are collectively responsible for the book. We have endeavoured to find a style which is concise enough to enable the extensive material to be treated in a book of limited size, yet intuitive enough to make the book readily accessible to the intended readership. The choice of consistent notation was a challenge because of conflicts in the ‘standard’ notation for several of the topics covered; accordingly we hope that readers will understand if their preferred notation has not been used. The proofs of some straightforward results in the text are relegated to the exercises. These appear at the end of the rele-

---

vant chapter, along with notes which serve as a guide to a bibliography of over 500 selected items.

Autumn 2008

D. CVETKOVIĆ

P. ROWLINSON

S. SIMIĆ

## 8.8. Teorija grafova, III izdanje

### Predgovor

Nemogućno je utvrditi kada su ljudi počeli da koriste dijagrame koje danas nazivamo grafovima. Matematičari su tek pre dva i po veka počeli da razmatraju izvesne probleme s grafovima, a teorija grafova, kao posebna matematička disciplina, stara je tek oko četiri decenije. No, svoj neobično intenzivan razvoj, primene u najrazličitijim naučnim disciplinama i veliku popularnost teorija grafova je doživela u poslednjih petnaestak godina, zahvaljujući, posredno ili neposredno, sve većoj proizvodnji i upotrebi elektronskih računara.

Na taj način je graf od pomoćnog dijagrama, kojim su se slikovito predstavljali razni problemi, postao objekt obimne matematičke teorije. Uz to se pokazalo da pojam grafa spada u grupu osnovnih matematičkih pojmova, kao što su binarna relacija, funkcija, operacija itd.

Govoreći apstraktnim matematičkim jezikom, graf je konačan skup snabdeven binarnom relacijom. U primenama pojam grafa dobija svoju punu vrednost kada se skupovi i relacije na njima predstavljaju geometrijskim figurama koje su obrazovane od niza tačaka spojenih krivim linijama. Teorija grafova proučava osobine ovih figura koje ostaju invarijantne pri kontinualnim deformacijama, tj. neprekidnim preslikavanjima.

Gipkost aparata teorije grafova omogućava da se brojni problemi sa konačnim skupovima, iz veoma raznorodnih naučnih oblasti, formulišu i rešavaju na jedinstven način. Primena teorije grafova i njenih metoda zauzima danas značajno mesto u teoriji električnih kola, teoriji sistema automatskog upravljanja, teoriji konačnih automata, operacionom istraživanju, teoriji pouzdanog prenosa informacija, zatim u hemiji, ekonomskim naukama, sociologiji, biologiji i dr. Glavni razlog za ovako širok raspon primena leži, u prvom redu, u jasnoj geometrijskoj poruci koju graf sadrži a koja je bliska intuitivnoj predstavi koju čovek ima o osobinama i ponašanju objekta koji se predstavlja grafom.

Ova knjiga će poslužiti čitaocu da upozna osnovne pojmove i teoreme teorije grafova kao matematičke discipline i neke mogućnosti njene primene.



Knjiga ne pretenduje na iscrpnost; njen cilj je da uvede čitaoca u ovu oblast.

Ova knjiga je nastala izdvajanjem u posebnu celinu prvog dela knjige: *D.Cvetković, M.Milić, Teorija grafova i njene primene, Naučna knjiga, Beograd, 1977.* U ovom izdanju tekst je presnimljen sa ranijeg izdanja uz neophodne izmene i dopune. Pored ispravki uočenih štamparskih i drugih grešaka, unesene su informacije o nekim novim rezultatima teorije grafova i upotpunjena je literatura. U prilogu je opisan jedan praktičan postupak za analizu električnih kola pomoću grafova.

U izradi ove knjige sarađivao je S. Simić koji je napisao poglavlje 12 i pripremio za štampu zadatke.

Beograd, januar 1981.

Autor

## Iz uvoda

Ovaj deo knjige u prvom izdanju je izrađen na osnovu predavanja koja je autor održao studentima Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu školske 1969/70. godine u okviru jednosemestralnog fakultativnog kursa posvećenog teoriji grafova. U drugom izdanju ovaj deo knjige je upotpunjen konsultacijom velikog broja knjiga i časopisa kao i na osnovu predavanja o teoriji grafova koje autor već nekoliko godina drži u okviru predmeta "Algebarske strukture i matematička logika" na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu. Od velike koristi su bila i predavanja koja je autor održao u okviru "Matematičke škole 75." u Ohridu jula 1975.

Specijalni kurs sa seminarom o teoriji grafova, koji je autor održao u toku 1979/80. i 1980/81. školske godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu prema ovoj knjizi, doprineo je uočavanju nekih nedostataka i njihovom otklanjanju u ovom izdanju.

## Iz uvodnog poglavlja

Opisno govoreći, grafovi su geometrijske figure sastavljene od tačaka (čvorova) i linija (grana) pri čemu linije povezuju pojedine parove tačaka. Na grafove

nailazimo u svim naučnim disciplinama. Grafovi se pojavljuju u hemiji kao strukturne formule molekula, u elektrotehnici kao šeme električnih kola, u računarstvu kao dijagrami programa za računare, u nauci o organizaciji rada kao PERT dijagrami koji opisuju izvršenje složenog projekta, u sociologiji se pomoću grafova prikazuju odnosi u nekoj grupi ljudi itd. Pomoću grafova se mogu predstaviti mreže puteva ili železničkih pruga, telefonske ili druge telekomunikacione mreže uključujući tu i mreže računara, ali isto tako i apstraktni matematički objekti, kao što su, na primer, matrica ili parcijalno uređeni skup.

## 8.9. Diskretne matematičke strukture

### Iz predgovora I izdanju knjige

Po tradiciji nastava matematike na tehničkim fakultetima bazirana je pretežno na matematičkoj analizi, tj. na kontinualnoj matematici. U današnje vreme u inženjerskoj praksi pojavljuju se sve češće i diskretni matematički modeli, što dovodi do potrebe za uvođenjem metoda diskretne matematike u nastavu. Ova knjiga je napisana sa namerom da podrži takve tendencije koje se kod nas sporije prihvataju nego u nekim drugim sredinama u svetu.

Posebno u kompjuterskim naukama preovlađuje diskretna matematika u vezi sa čim je i izabran podnaslov knjige: "Matematika za kompjuterske nauke".

U inostranstvu je poslednjih godina objavljeno više knjiga sa sličnim intencijama i sadržajem (videti na primer, [7], [10], [81], [91], [96] u spisku literature).

Knjiga je uvodnog karaktera i obrađuje osnove sledećih matematičkih disciplina: matematička logika, teorija skupova, opšta algebra, kombinatorika, teorija grafova, račun verovatnoće, teorija informacija i teorija igara. Mada su kod nas u udžbeničkoj literaturi tretirane manje ili više sve ove discipline, malo je bilo pokušaja preglednog i ceovitog izlaganja osnova diskretne matematike.

Knjiga je prvenstveno namenjena onima koji studiraju ili se bave kompjuterskim naukama ali ona može biti od koristi i drugim strukama kao što su, na primer, elektrotehnika, automatika, matematičke nauke, ekomomske nauke itd.

Beograd, februara 1977.

*A u t o r*

## 8.10. Diskretna matematika

### Predgovor

Diskretna matematika je matematika računarskih nauka. Zavidljivo razvoju računarske tehnike u zadnjih nekoliko decenija zahtevao je izgradnju adekvatnog matematičkog aparata. Konačnost memorije računara i činjenica da su računari mašine diskretnog dejstva (prelaze iz stanja u stanje u određenim trenucima vremena) uslovljavaju potrebu rešavanja velikog broja problema na konačnim ili, ređe, na beskonačnim ali prebrojivim skupovima (diskretni skupovi). Pre pojave računara gotovo da nije postojala stvarna potreba za razmatranjem ovakvih problema. (Jedan od izuzetaka je razvoj matematičke logike u prvoj polovini dvadesetog veka podstaknut potrebom revizije osnova matematike). Zbog toga se može reći da je doba računara dovelo do svojevrstne sinteze do tada dobro razvijenih delova diskretne matematike, kao što su matematička logika i veliki deo opšte algebre (tzv. moderna algebra), i novonastalih ili iz osnova preporođenih teorija kao što su teorija grafova, kombinatorika, teorija konačnih automata, teorija kodova itd. Današnja diskretna matematika nema onaj stepen unutrašnje povezanosti svojih delova kao što je to slučaj kod kontinualne matematike (matematičke analize); verovatno je to posledica prirode stvari kod diskretnih struktura. Međutim, po mišljenju autora, postoji jedna duboka analogija diskretne matematike sa matematičkom analizom u pogledu nastanka i razvoja ovih grana matematike. Kada su pre tri veka Newton (Njutn) i Leibnitz (Lajbnic) otkrili diferencijalni i integralni račun, to je nesumnjivo bilo uslovljeno tadašnjom industrijskom revolucijom; pojava najrazličitijih mašina (kontinualnog dejstva!) zahtevala je i odgovarajući matematički aparat, a to je bila matematička analiza. Današnja kompjuterska revolucija iznedrila je diskretnu matematiku.

Iako se diskretna matematika prvenstveno vezuje za računarske nauke ona je od velikog značaja i u drugim naučnim disciplinama: elektrotehnika (a posebno telekomunikaciona tehnika), hemija, operaciona istraživanja, ekonomske nauke itd.

Matematika pretkompjuterskog doba je sugerisala neinteresantnost problema na konačnim skupovima sa motivacijom da je svaki takav problem principijelno rešiv ispitivanjem svih mogućih varijanti, kojih ima konačno mnogo. Konkretni takvi problemi nisu rešavani jer su izmicali mogućnostima čoveka a nije bilo ni preke potrebe da se rešavaju (osim delimično u okvirima tzv. zabavne ili rekreativne matematike). Pojava kompjutera je istovremeno donela sredstvo za rešavanje problema na konačnim skupovima (tj. same kompjutere) i neiscrpan izvor konkretnih problema tog tipa za čije rešavanje postoji jak interes jer se njihova rešenja primenjuju u toj istoj kompjuterskoj tehnici. Ubrzo se pokazala izvesna naivnost u ranije prevladajućim mišljenima o neinteresantnosti problema na konačnim skupovima. Ističemo sledeća dva aspekta:

1° Nalaženje svih varijanti jednog problema na konačnom skupu može da bude vrlo netrivialno.

2° Pretpostavimo da znamo algoritam za pronalaženje svih varijanti jednog problema na konačnom skupu. Broj varijanti, iako konačan može da bude tako veliki da do rešenja ne možemo da dođemo u razumno dugom vremenu, čak i uz upotrebu računara. Zaista postoje optimizacioni i drugi problemi na skupovima sa dvadesetak elemenata čije rešavanje "grubom silom" tj. prostim ispitivanjem svih mogućnosti zahteva nekoliko desetina godina rada brzih računara.

Ovi navodi ukazuju na aktuelnost procene vremenske a često i prostorne (u smislu potrebe angažovanja memorijskih resursa) efikasnosti računarski orijentisanih procedura (algoritama i heuristika). Algoritamska nerešivost problema ili vremenska neefikasnost poznatih algoritama za neki problem mogu da uslove odustajanje od najboljih rešenja i prelaz na heuristike.

U matematičkoj literaturi na našem jeziku nažalost ne postoje knjige o diskretnoj matematici u kojima bi za potrebe kompjuterskih nauka bili na jednom mestu i povezano obrađeni razni njeni delovi<sup>3</sup>. Ova knjiga pokušava da ublaži taj nedostatak. Namena knjige je da u doba računara zainteresovanom čitaocu posluži kao priručnik za brzu orijentaciju u diskretnoj

---

<sup>3</sup>Izuzetak je donekle prethodnica ove knjige: "Diskretne matematičke strukture-matematika za kompjuterske nauke", Naučna knjiga, Beograd 1978, 1983, 1987

matematici. Knjiga se objavljuje i kao udžbenik za predmet "Matematika II" na Profilu za računarsku tehniku i za predmet "Diskretna matematika i optimizacija" na Profilu za ekspertnu elektroniku Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu.

Napomenimo da je udžbenička literatura ovog tipa veoma rasprostranjena u inostranstvu a specijalno na engleskom i ruskom jeziku (videti spisak literature koji daje samo mali izbor postojeće literature).

Knjiga je uvodnog i pretežno enciklopedijskog karaktera. Predstavljene su razne oblasti diskretne matematike: matematička logika (kvantifikatorski račun, formalne teorije, automatsko rezonovanje), konačne algebarske strukture (Booleove algebre, mreže, polja Galoisa), teorija grafova, kombinatorika (sa posebnim naglaskom na tehnike prebrojavanja uključujući Polyainu teorem), teorija verovatnoće (sa naglaskom na njen diskretni deo uključujući, na primer, Markovljeve lance i osnove matematičke statistike), metode optimizacija (linearno, celobrojno i dinamičko programiranje kao i elemente teorije igara i mrežnog planiranja), kombinatorne optimizacije, teorija kompleksnosti algoritama (uključujući nedeterminističke algoritme i NP-probleme), teorija kodova, teorija konačnih automata i dr.

I pored znatne obimnosti knjiga ne sadrži neke delove diskretne matematike koji su od interesa u računarstvu (formalne gramatike i dr.)

Ova knjiga je nastala proširenjem knjige prvog autora "Diskretne matematičke strukture – Matematika za kompjuterske nauke" od koje je preuzela podnaslov. "Diskretne matematičke strukture" su objavljene u tri izdanja (1978, 1983 i 1987. godine) a ovde reprodukujemo deo predgovora I izdanju. U izradi knjige korišćeni su i tekstovi autora iz ranije objavljenih knjiga [18], [23], [24].

U spisku literature dat je širi izbor inostranih knjiga sa koncepcijom koja je slična koncepciji ove knjige i knjiga koje opširnije tretiraju matematičke discipline obrađene u pojedinim poglavljima ove knjige. Većina navedene literature je konsultovana prilikom izrade ove knjige.

S. Simić je napisao poglavlje 17 i odeljke 1.6, 2.3, 2.4, 3.10, 5.2, 5.3, 5.4, 7.1.2, 7.1.3, 10.3, 15.1, 15.2 i 15.6. Autori su zajednički napisali odeljke 2.1, 2.2, 3.11, 5.5, 6.10, 7.2.2, 7.2.3, 7.5, 7.7, 8.2, 10.2, 10.3, 13.8 i 16.3.

Ostatak teksta napisao je D. Cvetković. Autori su izvršili modifikacije u svojim tekstovima koje su bile neophodne za dobijanje jedinstvenog teksta knjige. U istom cilju na pojedinim mestima autori su intervenisali u tekstu drugog autora sa kraćim insertima.

Zahvaljujemo recenzentima dr. Ratku Tošiću, redovnom profesoru i dr. Draganu Acketi, docentu Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu na brojnim sugestijama koje su dovele do poboljšanja teksta knjige. Zahvalnost dugujemo dr. Mirjani Čangalović, asistentu Fakulteta organizacionih nauka u Beogradu, i Dejanu Mirčevskom, studentu II godine Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, za obradu nekih zadataka koji su ušli u ovu knjigu i korisne komentare o delovima teksta. U tehničkoj obradi rukopisa na PC-računarima učestvovali su studenti Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu Robert Paušić, Đorđe Lavadinović, Aleksadar Balašković i Marina Jovanović.

Beograd, marta 1990.

*A u t o r i*

## **Predgovor II izdanju**

Knjiga "Diskretna matematika" pojavljuje se u drugom izdanju sa više inovacija. Računarska obrada je izvršena savremenijim procesorom teksta što je doprinelo poboljšanju kvaliteta matematičkog sloga i uklonjene su uočene štamparske greške. Tekst je poboljšan na mnogim mestima. Unesen je veći broj novih delova teksta što se naročito odnosi na poglavlja (1, 3, 7, 8, 11 i 15). Novi odeljci u ovom izdanju su 7.1.4 i 8.3. Odeljak 7.1.4 napisala je dr Vera Kovačević-Vujčić, profesor Fakulteta organizacionih nauka, na čemu joj autori najlepše zahvaljuju. Odeljak 8.3. napisao je S. Simić. Odeljak 8.2. je temeljito prerađen od strane S. Simića. Studenti Elektrotehničkog fakulteta Mladen Mrkić i Srđan Jelić ukazali su autorima na neke štamparske greške u prethodnom izdanju na čemu im autori zahvaljuju.

Obradu teksta na računaru za ovo izdanje izvršio je Miroslav Živković, diplomirani inženjer elektrotehnike.

Beograd, novembra 1995.

*A u t o r i*

## 8.11. Odabrana poglavlja iz diskretne matematike

### Predgovor

Možemo reći da "Odabrana poglavlja iz diskretne matematike" predstavljaju zaista odabrana poglavlja iz diskretne matematike ali takođe da predstavljaju odabrana poglavlja iz knjige "Diskretna matematika" ! Naime autori su komponovali ovu knjigu izborom poglavlja iz svoje, u dva izdanja objavljene (1990. i 1996. godine), obimnije knjige pod nazivom "Diskretna matematika" (podnaslov "Matematika za kompjuterske nauke").

Knjiga predstavlja udžbenik za deo predmeta "Matematika 4" na drugoj godini dodiplomske nastave i deo literature za predmet "Odabrana poglavlja iz diskretne matematike" na poslediplomskim studijama na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu. Izlaganja u knjizi se oslanjaju na delove diskretne matematike i linearne algebre (Booleove algebre, kvantifikatorski račun, kombinatorika, teorija grafova, grupe, vektorski prostori) koji su obrađeni u nastavi na prvoj godini (videti udžbenik [25] iz spiska literature).

U nastavku, iza ovog predgovora, reprodukujemo one delove iz predgovora knjiga - prethodnica koji su od interesa i za čitaoce ove knjige.

S.Simić je napisao odeljke 1.6, 2.2, 2.3, 2.4, 3.1.2, 3.1.3, 8.1, 8.2 i 8.6. Autori su zajednički napisali odeljke 1.7, 2.5, 3.2.2, 3.2.3, 3.5, 3.7, 4.2, 5.2, 5.3 i 7.8. Odeljak 3.1.4 napisala je dr Vera Kovačević-Vujčić, a deo teksta u Odeljku 3.7 dr Mirjana Čangalović, profesori Fakulteta organizacionih nauka, na čemu im autori najlepše zahvaljuju. Ostatak teksta napisao je D. Cvetković. Autori su izvršili modifikacije u svojim tekstovima koje su bile neophodne za dobijanje jedinstvenog teksta knjige. U istom cilju na pojedinim mestima autori su intervenisali u tekstu drugog autora sa kraćim insertima.

Beograd, februara 2002.

*A u t o r i*



## 8.12. Kombinatorna teorija matrica

### Iz Predgovora I izdanju

U ovoj knjizi teorija matrica se temelji i razvija kombinatornim sredstvima, tj. sredstvima teorije grafova, što predstavlja sasvim nov pristup. Neki od osnovnih pojmova (na primer, determinanta kvadratne matrice i množenje matrica) definišu se ili neposredno interpretiraju pomoću grafova.

Po mišljenju autora, ovakav pristup teoriji matrica veoma je prirodan i on, uz neke prednosti, omogućava da se teorija matrica izgradi isto tako dobro kao i na klasičan način.

Knjiga, iako matematičkog karaktera, inspirisana je specifičnim grafovskim metodama koje su razvili elektroinženjeri za rešavanje problema linearne algebre koji se pojavljuju u teoriji električnih kola, automatici i drugim granama elektrotehnike. Tu se, pre svega, misli na tehniku grafova protoka i tehniku grafova protoka signala.

Poslednja tri poglavlja posvećena su primenama teorije matrica u elektrotehnici, hemiji i fizici, pri čemu naglasak nije na detaljnom opisu primena već na objašnjavanju specifičnog matematičkog aparata koji se pojavljuje u primenama. Osim toga, tekst je ilustrovan velikim brojem primera i zadataka od kojih se neki odnose na određene primene u raznim oblastima elektrotehnike. Izvesna pažnja je posvećena i numeričkim metodama u linearnoj algebri.

Pošto teorija matrica ima raznovrsne primene u velikom broju naučnih disciplina, knjiga je namenjena širokom krugu čitalaca (inženjerima, a posebno elektroinženjerima, matematičarima, hemičarima, fizičarima itd.).

Budući da knjiga sadrži obilje raznorodnog materijala, ona će služiti kao koristan priručnik stručnjacima navedenih specijalnosti, doktorantima, postdiplomcima i studentima. Ona može da posluži kao udžbenik na postdiplomskim studijama, a neki njeni delovi i kao udžbenik za studente diplomatske nastave.

⋮

## Predgovor III izdanju

Knjiga „Kombinatorna teorija matrica sa primenama u elektrotehnici, hemiji i fizici“ pojavljuje se u trećem izdanju ljubaznošću Zavoda za udžbenike, Beograd. Prva dva izdanja je objavila „Naučna knjiga“, Beograd, 1980. i 1987. godine. U ovom izdanju knjiga je, u osnovi, sadržajno ista kao u prvom izdanju ali je tehnički znatno poboljšana uz izostavljanje nekih delova i dopune u skladu sa razvojem oblasti u poslednje dve decenije.

Koncepcija knjige se vidi iz dela Predgovora I izdanju koji reprodukujemo u nastavku.

Napomenimo da je ova knjiga poslužila kao osnova za izradu knjige

Brualdi R.A., Cvetković D., *A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Application*, CRC Press, Boca Raton, 2008.

Današnja naučna istraživanja u oblasti linearne algebre se velikim delom oslanjaju na teoriju grafova, što se može videti u relevantnim naučnim časopisima (*Linear Algebra and Its Applications*, *Linear and Multilinear Algebra*). U univerzitetskoj nastavi linearne algebre prevladuje tradicionalni pristup koji zaobilazi grafovsku suštinu linearne algebre. Ipak održano je u raznim delovima sveta više kurseva po ovoj knjizi, odnosno po engleskoj verziji knjige, i nema sumnje da će grafovski pristup u budućnosti sve više dobijati na popularnosti kod predavača i studenata.

Da bi se olakšala nastava po ovoj knjizi izrađeni su pogodni slajdovi koji se nalaze, uz neophodna uputstva, na kompakt disku koji se prilaže uz knjigu. Disk sadrži i druge relevantne materijale.

Dopunske informacije o ovoj knjizi i njenom nastanku date su u Završnom komentaru na kraju knjige. Završni komentar se sastoji od dela koji je napisan za prvo izdanje i dela koji je napisan za ovo izdanje knjige.

Činjenica što sam studirao elektrotehniku i bio profesor na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu bitno je doprinela da se odlučim na pisanje ove knjige. U vreme mojih studija pojam grafa jedva da je bio poznat u matematičkim krugovima kod nas a u okviru elektrotehnike grafovi su se već znatno koristili. Sa tehnikom grafova protoka signala sam se upoznao u kontaktima sa kolegama profesorom Milićem Stojićem i pokojnim profesorom Mirkom Milićem, u to vreme asistentima.

---

U tekst knjige su uključeni kraći delovi koje su napisali akademik Ivan Gutman, naučni savetnik Slobodan K. Simić, profesor Dobrilo Tošić i profesor Milić Stojić, što je na odgovarajućim mestima naznačeno. Knjigu je u ovom izdanju odlično tehnički pripremio, uz pomoć programa LATEX, Srđan Radovanović, diplomirani inženjer elektrotehnike. Autor svima najlepše zahvaljuje.

Beograd, juna 2011.

Autor

## Završni komentar

Najpre reprodukujemo Završni komentar iz I izdanja knjige (1980. godina) a zatim dajemo komentare u vezi II izdanja (1987), verzije na engleskom jeziku (2008) i III izdanja knjige (2011).

### Završni komentar iz I izdanja knjige

Glavna ideja u ovoj knjizi se sastoji u tome da se teorija matrica (ili bar jedan njen deo) zasnjuje i razvija pomoću različitih digrafova koji se pridružuju matricama. Za proizvoljnu matricu  $A$  definiše se njen Königov digraf  $G(A)$  (videti poglavlje 2). Ako je  $A$  kvadratna matrica, njoj se mogu pridružiti još i digrafovi  $G^A$  (poglavlje 3) i  $G_A$  (poglavlje 4). Pored ovih digrafova koriste se i neki drugi digrafovi ili grafovi (videti poglavlja 6, 10, 11).

U zavisnosti od problema koji se razmatra uzima se ovaj ili onaj digraf u razmatranje. Ponekad je u istom problemu korisno posmatrati različite pridružene grafove. U izvesnim slučajevima je potrebno u pogodnom momentu preći sa jednog digrafa na drugi (na primer, prilikom svodenja matrice na Jordanov kanonički oblik ili u odeljku 9.3).

Na osnovu ovoga naslov knjige je mogao da bude „Grafovska teorija matrica“. Izabran je ipak nešto opštiji naslov „Kombinatorna teorija matrica“ jer je teorija grafova deo kombinatorike, a kombinatornih sadržaja ima mnogo i u standardnim pristupima teoriji matrica. Takvi kombinatorni sadržaji su i ovde zadržani.

Osnovu sprovedenog kombinatornog pristupa teoriji matrica čine sledeće teoreme i definicije: teorema 1 iz 2.2, koja daje grafovsku interpretaciju proizvoda matrica; primer 4 iz 2.2, koji opisuje dejstvo množenja sa permutacionim matricama; teorema 1 iz 3.1, koja dovodi u vezu stepene matrica i puteve u pridruženom digrafu; grafovske definicije determinante iz 4.1 i 4.6; grafovska interpretacija kofaktora iz 5.3 i definicije nerazloživosti i primitivnosti nenegativnih matrica iz poglavlja 9. Potrebno je primetiti da se grafovi u teoriji matrica ne pojavljuju u vezi sa nekim specijalnim ili

nevažnim pitanjima, nego da se zaista centralni pojmovi i problemi mogu pogodno formulisati na osnovu teorije grafova

Na pisanje ove knjige autora su navele sledeće četiri grupe radova iz oblasti elektrotehnike, matematike i hemije:

1° Elektroinženjeri su razvili niz grafovskih metoda za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina koji se pojavljuju u teoriji električnih kola, u teoriji povratne sprege i dr. Ovi metodi koriste grafove protoka (C. L. Coates [13], [28], [10]), grafove protoka signala (S. J. Mason [67], [68], [93]) i Chanove grafove (S. P. Chan - H. N. Mai [11], [9]) i opisani su redom u odeljcima 6.2 – 6.4. Karakteristično je da pomenuti grafovi (a naročito Masonovi grafovi protoka signala) pružaju bolju sliku o fizičkom sistemu koji se opisuje nego što to čini odgovarajući sistem jednačina. Stoga su oni uvedeni i korišćeni intuitivno, pri čemu je opravdanost tih postupaka često bivala tek naknadno strogo teorijski dokazivana. Terminologija korišćena u ovoj knjizi oslanja se na terminologiju upotrebljavanu u elektrotehničkoj literaturi.

2° Postoji veliki broj radova u matematičkoj literaturi u kojima su rezultati iz teorije matrica dobijani ili dokazivani sredstvima teorije grafova. Osnivač moderne teorije grafova, mađarski matematičar D. König, je prvi koji je koristio grafovske metode u teoriji matrica [59], [60]. Doduše, i pre Königa bilo je izvesnih naslućivanja u ovom pravcu (videti [76], napomena na str. 260, gde se spominje Cauchyjevo pravilo za određivanje znaka sabiraka u razvoju determinante). Videti takođe i novije radove koji pripadaju ovoj grupi ([29], [16], [31], [32], što predstavlja samo nekoliko primera). Interesantno je da su u literaturi objavljeni uglavnom originalni i dovoljno netrivialni rezultati dobijeni pomoću teorije grafova a da se tek u novije vreme pojavilo nekoliko članaka u kojima se i elementarnija ali temeljna pitanja izlažu na ovaj način ([21], [37], [38], [62]).

3° U teoriji spektara grafova (videti odeljke 7.4, 8.3, 10.2; [15], [19], [82], [25], [26]), kao i u njenim primenama u hemiji i u drugim disciplinama (12.4, 11.5, 13.1; [2], [35]) koriste se rezultati teorije matrica za proučavanje grafova. Iako je ovde reč o upravo obrnutom postupku od onog u ovoj knjizi, veliki broj rezultata je doprineo da se uvidi, kako se i obrnuto grafovi mogu

koristiti u teoriji matrica.

4° Problemi elektrotehnike i tehnike uopšte doveli su do potrebe za rešavanjem sistema linearnih jednačina čija je matrica slabo popunjena a elementi su joj dati numerički. Specijalni metodi tretiranja ovakvih matrica koriste u znatnoj meri sredstva teorije grafova [85], [86], [89]. Neke od ovih tehnika su ukratko opisane u poglavlju 9.

Sinteza ideja iz navedene četiri grupe radova dovela je do ove knjige.

Čitaocu u prvom trenutku može da izgleda čudno da se „jača“ teorija (navodno, teorija determinanata i matrica) zasniva i tumači pomoću „slabije“ teorije (teorije grafova). Tačno je da je teorija matrica stara i dobro razrađena disciplina. Teorija grafova je mlađa (kao posebna matematička disciplina) ali je u poslednjih dvadesetak godina tako intenzivno proučavana da se ne može o njoj govoriti kao o nerazrađenoj disciplini. Mnogi stari i teški problemi teorije grafova su danas rešeni (širim krugovima najpoznatiji takav problem je problem četiri boje, koji je rešen 1976. godine) a u toku je proces sređivanja mnogobrojnih novih rezultata i njihove prezentacije u vidu monografija širim krugovima čitalaca. S druge strane, deo teorije grafova koji se koristi u teoriji matrica je najelementarniji deo teorije grafova a to znači i najbolje razrađen. „Najteža“ teorema teorije grafova koja se koristi u ovoj knjizi je teorema 1 iz 4.8. „Rezultati“ teorije grafova koji se koriste uglavnom su lako uočljive činjenice u stilu: „Ako sve grane digrafa promene orijentaciju onda grane koje su obrazovale faktor, opet obrazuju jedan faktor“. Takve „teoreme“ nisu dokazivane nego su kao očigledne činjenice navođene na mestima na kojima su bile potrebne. Uostalom graf se može shvatiti kao skup snabdeven binarnom relacijom (što znači da teorija grafova uključuje teoriju binarnih relacija - ili obrnuto), a binarna relacija je univerzalan pojam i, naravno, može da posluži za definiciju specijalnih pojmova u svim granama matematike.

Ovu diskusiju ćemo dopuniti citiranjem interesantnih mesta iz nekoliko članaka poznatih matematičara.

Veliki matematičar G. F. Frobenius u svom poslednjem radu [33] kaže na kraju:

„Teorija grafova, pomoću koje je g. König izveo gornju teoremu,<sup>4</sup> po mom mišljenju je nedovoljno prikladno pomoćno sredstvo za razvijanje teorije determinanata. U ovom slučaju ona vodi do jedne sasvim specijalne teoreme koja je male vrednosti. Ono što je vredno u njenoj sadržini izraženo je u teoremi II“.

U svojoj knjizi o grafovima [60] (koja predstavlja prvu takvu knjigu a trenutak njenog objavljivanja se danas uzima za trenutak formiranja teorije grafova kao samostalne matematičke discipline) D. König odgovara na ovu kritiku:

„Sasvim je prirodno da pisac knjige o grafovima neće potpisati ovakvo mišljenje. Razlozi koji se za i protiv vrednosti ili bezvrednosti jedne teoreme ili jednog metoda mogu navesti, imaju uvek, manje ili više, subjektivan karakter, tako da bi od malog naučnog interesa bilo kada bi mi ovde pokušavali da opovrgnemo Frobeniusovu tačku gledanja. Ali ako Frobenius želi da svoju oštru kritiku o primenljivosti grafova u teoriji determinanti potkrepi time što se njegova zaista „dragocena“ teorema  $E$  ne može dokazati pomoću teorije grafova, tada se njegovo tvrđenje, kao što smo videli, ne može održati. Dokaz pomoću teorije grafova, koji smo dali za teoremu  $E$ , čini nam se jednostavniji i očigledniji, koji na prirodan način odgovara kombinatornom karakteru teoreme i koji vodi do interesantnog uopštavanja (teorema  $C$ )“.

Nedavno se američki matematičar H. Schneider [84] na sledeći način osvrnuo na Frobeniusovo mišljenje:

„Ova krajnje kritička primedba je, izgleda, bez presedana u Frobeniusovim sabranim delima. Ona govori o korisnosti teorije grafova uopšte i posebno Königove teoreme... Danas postoji veliki broj primena grafova na matrice tako da danas ne može biti sumnje o korisnosti metoda teorije grafova u teoriji matrica... Ironično je da poslednje publikovane reči jednog od najvećih matematičara koji su živeli u ovom veku nisu izdržale sud vremena... Ja imam sledeću hipotezu... Poslednji rad Frobeniusa je pripremljen na osnovu Frobeniusovih beležaka, ali Frobenius nije napisao poslednju verziju“.

---

<sup>4</sup>U ovoj knjizi to je teorema 2 iz sekcije 4.8.

Pri ovome H. Schneider izražava mišljenje da je neko od Frobeniusovih saradnika dopisao poslednji kritički pasus.

Kombinatorni pristup teoriji matrica, prihvaćen u ovoj knjizi, kao što je već rečeno, ne „smeta“ postojećoj teoriji matrica. Ona se i na ovaj način može dobro izložiti. Pri ovakvom pristupu se neki rezultati lakše dokazuju (na primer, svođenje na Jordanov kanonički oblik, dokazivanje jedinstvenosti normalne forme razložive matrice  $i$ , naročito, dokazivanje korektnosti grafovskih postupaka za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina). Činjenica da se grane sa prenosom 0 mogu da odstrane iz grafova pridruženih matricama, omogućava obradu slabo popunjenih matrica (sa opštim elementima - poglavlje 6, sa numeričkim elementima - poglavlje 9). Graf pridružen slabo popunjenoj matrici može se često odrediti iz konfiguracije fizičkog sistema koji se opisuje matricom, što je značajno u primenama. Efikasnost grafovskih metoda kod slabo popunjenih matrica može da navede na pogrešan zaključak da su grafovski metodi primenljivi samo na slabo popunjene matrice. Ta efikasnost je samo jedna dodatna dobra strana ovog pristupa. Grafovski metodi su primenljivi na sve matrice a od problema koji se obrađuje i oblika matrice zavisi da li ćemo prednost dati grafovima ili nekim drugim metodama. Uostalom postoje problemi u teoriji matrica gde se (bar za sada) ne vidi kakve bi prednosti dala grafovska interpretacija. Takvi problemi su u ovoj knjizi opisani na standardan način (na primer, odeljci o rangju matrice i dr.).

Navešćemo sada neke podatke o literaturi.

Digraf  $G(A)$  matrice  $A$  je nazvan Königov jer je D. König koristio u svojim radovima odgovarajući bihromatski graf (videti [60]). Definicija determinante iz 4.6. nazvana je König - Chanova jer je D. König povezivao članove u razvoju determinante sa separacijama digrafa  $G(A)$ , a S. P. Chan je (sa saradnikom H.N. Mai) dao ideju za pravilo o određivanju znaka posmatranog člana [11], iako pravilo, predloženo u tom radu, nije korektno. Nijedan od ovih autora ne spominje mogućnost da se ovakva grafovska interpretacija uzme za definiciju determinante. Pravilo o određivanju znaka članova determinante je dato u [1] ali na neformalan način.

Digraf  $G_A$  je nazvan Coatesov digraf a formula (1) iz 4.1 za determinantu



se može nazvati Coatesova formula jer ih je i uveo C. L. Coates u [13], mada je vrlo teško utvrditi ko je prvi došao na ideju o ovakvom tipu grafovske interpretacije determinante (videti o ovom diskusiju u [26], poglavlje 1). F. Harary je u [49], citirajući Coatesa, predložio da se njegova formula u nešto izmenjenom obliku (videti zadatak 11 iz 4.9) uzme za definiciju determinante. Zbog toga bi se definicija determinante iz 4.1 mogla nazvati Harary - Coatesova definicija. No reklo bi se da je sugestija F. Hararyja iz [49] bila zaboravljena pa je autor ove knjige nezavisno došao kasnije na istu ideju i polazeći od nje skicirao elementarnu teoriju determinanata [21]. Nešto kasnije, i opet nezavisno, slična stvar je objavljena u [37].

U spisku literature navedeni su uglavnom knjige i radovi koji su relevantni za grafovski pristup teoriji matrica. Od opšte literature autor se posebno koristio knjigama [72], [97], [66], ali je konsultovao i mnoge druge knjige o matricama od kojih je svega nekoliko ušlo u spisak literature. Uključeno je i nekoliko knjiga u kojima se teorija matrica primenjuje.

Autor knjige je više puta isprobao u univezitetskoj nastavi predloženi grafovski pristup teoriji determinanata. Autor smatra da je ovakav pristup naročito pogodan u nastavi matematike na elektrotehničkim fakultetima jer se tamo u nastavi stručnih predmeta koriste grafovi protoka i grafovi protoka signala.

## Trideset godina kasnije

III izdanje ove knjige se objavljuje posle više od trideset godina od momenta objavljivanja I izdanja. Kao što je u Predgovoru istaknuto knjiga je ostala suštinski u istom obliku kao i ranije. Veliki vremenski period između izdanja zahteva niz komentara.

Kao dodatak originalnom prikazu izvora ove knjige, napomenimo da je grafove protoka signala uveo C. Shannon [149] u procedure projektovanja sistema upravljanja oružjem u vreme drugog svetskog rata i da je ta tehnika tada bila vojna tajna jer je znatno ubrzavala projektovanje novih borbenih sistema. To je bilo vreme kada još nisu postojali savremeni računari ali je tehnika grafova protoka signala ostala popularna i u današnje vreme

jer njeno korišćenje u kvalitativnom opisu sistema doprinosi razumevanju stvarnih procesa u sistemu (tok signala). Ta tehnika je prisutna u nastavi teorije automatskog upravljanja (videti, na primer, [127]).

Između prvog i drugog izdanja knjige pojavio se u literaturi (videti [108],[109]) novi dokaz Cayley-Hamiltonove teoreme (sekcija 7.2). Taj dokaz ima kombinatorni karakter i uključen je u II izdanje umesto standardnog dokaza, čime se dalje afirmiše kombinatorni pristup teoriji matrica prihvaćen u ovoj knjizi. Autor članka [109] ističe da "za sve veći broj matematičkih disidenata zvanih "kombinatoričari" matrica mnogo više predstavlja svojevrsnu "fotografiju" odgovarajućeg digrafa a manje ima veze sa linearnim transformacijama "(iz Predgovora II izdanju).

Prilozi knjizi iz prva dva izdanja su izostavljeni u ovom izdanju, a poglavlja 12 i 13 su znatno skraćena.

1991. godine objavljena je knjiga "Combinatorial matrix theory" (Kombinatorna teorija matrica, videti [117]) istaknutih američkih matematičara R. A. Brualdija, glavnog urednika međunarodnog naučnog časopisa *Linear Algebra and Its Applications* (Linearna algebra i njene primene) i H. J. Rysera.

Na koricama knjige nalazi se sledeći tekst izdavača:

„Ovo je prvi prikaz, obima jedne knjige, osnovnih rezultata kombinatorne teorije matrica, koja podrazumeva korišćenje kombinatorike i teorije grafova u teoriji matrica (i obrnuto)...“.

Autori citiraju neke knjige i radove ovog autora ali ne i ovu knjigu („Kombinatorna teorija matrica“), tj. knjigu istog naslova i istih ideja kao što je njihova a koja je objavljena 1980. godine, dakle, 11 godina ranije! Objašnjenje je očigledno: knjiga "Kombinatorna teorija matrica" je objavljena na srpskom jeziku i malo je bila poznata inostranim autorima<sup>5</sup>.

Knjiga [121] (*Matematika I - Algebra*), zajedno sa drugim njenim mnogobrojnim izdanjima, je počevši od 1990. godine udžbenik za studente prve godine Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu. U knjigu su uključeni grafovska definicija determinante i Coatesova formula za rešavanje sistema

<sup>5</sup>Ipak, postoje prikazi knjige u inostranim publikacijama: (H. Sachs, *Optimization*, 15(1984), 3; *RŽ Mat.* 1984, 4A374) ili kod nas na engleskom jeziku (S. Simić, *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat.*, 2(1991), 109).

linearnih algebarskih jednačina. Teoreme koje izražavaju osobine determinanta (odjeljak 4.2 u ovoj knjizi) praćene su svaka sa dva dokaza: jedan se oslanja na klasičnu a drugi na grafovsku definiciju determinante.

Profesor Richard Brualdi (Univerzitet u Madisonu, Wisconsin, SAD) i potpisani su, oslanjajući se na svoje prethodne knjige, objavili knjigu [116] Brualdi R.A., Cvetković D., *A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Application*, CRC Press, Boca Raton, 2008.

Po ovoj knjizi<sup>6</sup> održano je više kurseva za doktorske studente u raznim zemljama.

Odeljak poglavlja 7 posvećen Jordanovom kanoničkom obliku matrice sastavljen je u knjizi [116] prema koautorovom članku [113] iz 1987. godine. U ovoj knjizi zadržan je i u III izdanju autorov način izvođenja sastavljen pre 1980. godine prilikom pripreme I izdanja. Oba načina su kombinatornog karaktera i, u suštini, ista.

Naučno-istraživačke oblasti, navedene kao izvori za pisanje ove knjige (tehnika grafova protoka signala u elektrotehnici, korišćenje grafovskih metoda u teoriji matrica, teorija spektara grafova i tehnike slabo popunjenih matrica) nastavile su svoj razvoj i u proteklom periodu.

U naučnim časopisima iz oblasti elektrotehnike i teorije sistema pojavljuju se i dalje radovi koji koriste grafove protoka signala.

Grafovi protoka signala se koriste i u matematičkim istraživanjima (videti, na primer, [112]). Tehnika Coatesovih grafova je iskorišćena u [111] da se razrade izvesni načini izračunavanja karakterističnog polinoma matrice.

Za teoriju spektara grafova, pored stare ali još uvek korišćene monografije [26], pojavila se i knjiga [122] uz mnogobrojne druge publikacije. Vredno je spomenuti da se spektralna teorija grafova poslednjih decenija sve više primenjuje u računarstvu [120], [123].

Spisak literature se sastoji iz tri dela; osnovni deo spiska je zadržan u obliku kako se pojavljuje u I izdanju. Ostala dva dela spiska sadrže dodatne

---

<sup>6</sup>Do sada su objavljeni sledeći prikazi knjige: Bumcrot R.J., MR 2009k: 05002; Fonseca C.M. da, Zbl. 1155.15003, 2010; Solomon A., Contemporary Physics, 30(2009), No. 3, 483; Bóna M., Newsletter, ACM SIGACT News, 41(2010), No. 2, 19-22; Gutman I., MATCH Commun. Math. Comput. Chem, 61(2009), 819-820; Gutman I., Kovačević-Vujčić V., YUJOR, 18(2008), No. 2, 273-274.

bibliografske jedinice koje se pojavljuju u II odnosno III izdanju. U trećem delu su navedene uglavnom novije knjige i radovi koji su citirani i u knjizi [116].

Napomenimo na kraju da kompakt disk koji se prilaže uz ovu knjigu sadrži slajdove za nastavu teorije matrica na način opisan u knjizi. Slajdovi su snabdeveni potrebnim uputstvima za nastavnike i studente. Disk sadrži i sve crteže iz ove knjige u vidu posebnih datoteka. Konačno, reprodukovano je u elektronskom obliku i prvo izdanje ove knjige. Detaljniji opis sadržaja diska se nalazi na samom disku.

## Literatura

### I izdanje

1. A.C. Aitken, *Determinants and matrices*, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1939.
2. A.T. Balaban, *Chemical application of graph theory*, Academic Press, London, 1976.
3. S. Barnett, *Matrices in control theory*, London, 1971.
4. S.D. Bedrosian, *Formulas for the number of trees in certain incomplete graphs*, J.Franklin Inst. 289 (1970), 67 - 69.
5. R. Bellman, *Introduction to matrix analysis*, New York - Toronto - London, 1960.
6. H.A. Božilović, Ž.A. Spasojević, G.N. Božilović, *Zbirka zadataka iz osnova elektrotehnike*, II deo, Novi Sad, 1972.
7. G. Burns, *Introduction to group theory with applications*, New York - San Francisco - London, 1977.
8. A. Cayley, *A theorem on trees*, Quart. J.Math. 23 (1889), 376 - 378.
9. S.P. Chan, *Introductory topological analysis of electrical networks*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.
10. S.P. Chan, B.H. Bapna, *A modification of the Coates gain formula for analysis of linear systems*, Int.J.Control 5 (1967), no.5, 483 - 495.
11. S.P. Chan, H.N. Mai, *A flow-graph method for the analysis of linear systems*, IEEE Transactions on Circuit Theory, CT - 14 (1967), no. 3, 350 - 354.
12. W.K. Chen, *Applied graph theory*, North-Holland, Amsterdam - London, 1971.
13. C.L. Coates, *Flow graph solutions of linear algebraic equations*, IRE Trans. Circuit Theory, CT - 6 (1959), 170 - 187.
14. L. Collatz, *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen*, Leipzig, 1963.

15. L. Collatz, U. Sinogowitz, *Spektren endlicher Grafen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 21 (1957), 63 - 77.
16. C.D.H. Cooper, *On the maximum eigenvalue of a reducible nonnegative real matrix*, Math. Z. 131 (1973), 213 - 217.
17. D. Cvetković, *Die Zahl der Wege eines Grafen*, Glasnik Mat. Ser. III 5(25)(1970), 205-210.
18. D. Cvetković, *The Boolean operations on graphs - spectrum and connectedness*, V kongres na matematičarite, fizičarite i astronomite na Jugoslavija, Ohrid, 14-19. septembri 1970, Zbornik na trudovite, tom I, Skopje 1973, 115-119.
19. D. Cvetković, *Graphs and their spectra*, Univ.Beograd, Publ.Elektrotehn.Fak. Ser.Mat.Fiz. No.354-No.356(1971), 1-50.
20. D. Cvetković, *The spectral method for determining the number of trees*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 11(25)(1971), 135-141.
21. D.M. Cvetković, *The determinant concept defined by means of graph theory*, Mat. Vesnik 12(27)(1975), 333-336. Prevod na holandski: *Definitie en berekening van determinanten met behulp van grafen*, Nieuw Tijdsch. v. Wisk. 63(1976), No. 4, 209-215. Verzija na srpskom: *Definisanje pojma determinante sredstvima teorije grafova*, u knjizi [25], 257-264.
22. D. Cvetković, I. Gutman, *The algebraic multiplicity of the number zero in the spectrum of a bipartite graph*, Mat. Vesnik 9(24)(1972), 141-150.
23. D.M. Cvetković, J.H. van Lint, *An elementary proof of Lloyd's theorem*, Proc. Kon. Neder. Akad. v. Wet. 80(1977), 6-10.
24. D.M. Cvetković, R.P. Lučić, *A new generalization of the concept of the  $p$ -sum of graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 302-No. 319(1970) 67-71.
25. D. Cvetković, M. Milić, *Teorija grafova i njene primene*, II izmenjeno i prošireno izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1977.
26. D. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of graphs – Theory and application*, Deutscher Verlag der Wissenschaften – Academic Press, Berlin – New York 1980; II edition 1982; Russian translation: Naukova Dumka, Kiev, 1984; III edition: Johann Ambrosius Barth, Heidelberg-Leipzig, 1995.
27. D. Cvetković, I. Gutman, N. Trinajstić, *Graphical studies on the relations between the structure and reactivity of conjugated systems ; The role of non-bonding molecular orbitals*, J. Mol. Struct. 28(1975), 289-303.
28. C.A. Desoer, *The optimum formula for the gain of a flow graph or a simple derivation of Coates' formula*, Proc. IRE 48 (1960), 883 - 889.
29. A.L. Dulmage, N.S. Mendelsohn, *Graph and matrices*, u knjizi: *Graph theory and theoretical physics*, (Editor: F.Harary), London - New York, 1967, 167 - 227.

30. W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, New York, 1957.
31. M. Fiedler, *Some applications of the theory of graphs in matrix theory and geometry*, Theory of graphs and its applications, Proc. Symp. held in Smolenice in June 1963, Prague, 1964, 37-41.
32. M. Fiedler, *Inversion of bigraphs and connections with the Gauss elimination*, Graphs, hypergraphs and block systems. Proc. Symp. on Comb. Analysis, held in Zielona Góra, September 1976, Zielona Góra, 1976, 57-68.
33. G.F. Frobenius, *Über zerlegbare Determinanten*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Berl., 1917, 274-277.
34. P.M. Gibson, *An identity between permanents and determinants*, Amer. Math. Monthly 76(1969), 270-271.
35. A. Graovac, I. Gutman, N. Trinajstić, *Topological approach to the chemistry of conjugated molecules*, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
36. A. Graovac, I. Gutman, N. Trinajstić, T. Živković, *Graph theory and molecular orbitals, Application of Sachs theorem*, Theoret. Chim. Acta 26 (1972), 67-78.
37. J.V. Greenman, *Graphs and determinants*, Math. Gazette 60 (1976), 241-246.
38. J.V. Greenman, *Graphs and Markov chains*, Math. Gazette 60 (1976), 49-54.
39. I. Gutman, *Bounds for total  $\pi$ -electron energy*, Chem. Phys. Letters 24 (1974), 283-285.
40. I. Gutman, *Određivanje koeficijenata u hemijskim jednačinama. Egzistencija rešenja*, Glasnik Hem. Društva, Beograd, 40 (1975), 195-200.
41. I. Gutman, *The acyclic polynomial of a graph*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 22 (1977), 63-69.
42. I. Gutman, *The energy of a graph*, Berichte der Mathematisch-Statistischen Sektion im Forschungszentrum, Graz, 103(1978), 1-22.
43. I. Gutman, *Topologija i stabilnost konjugovanih ugljovodonika. Zavisnost ukupne pi-elektronske energije od molekulske topologije*, Glasnik Hem. Društva, Beograd, 43(1978).
44. I. Gutman, N. Trinajstić, *Graph theory and molecular orbitals*, Topics Curr. Chem. 42 (1973), 49-93.
45. I. Gutman, N. Trinajstić, *Primena teorije grafova u kemiji. II. Veza između teorije molekularnih orbitala i teorije grafova*. Kemija u industriji (Zagreb) 22 (1973), 237-240.
46. I. Gutman, N. Trinajstić, *Primjena teorije grafova u kemiji. III. Alternativni ugljikovodici i njihova svojstva*, Kemija u industriji (Zagreb) 23 (1974), 329-333.
47. I. Gutman, N. Trinajstić, *Graph theory and molecular orbitals, XV, The Hückel rule*, J.Chem. Phys. 64 (1976), 4921- 4925.

48. F. Harary, *A graph theoretic method for the complete reduction of a matrix with a view toward finding its eigenvalues*, J.Math.Phys. 38 (1959), 104-111.
49. F. Harary, *The determinant of the adjacency matrix of a graph*, SIAM Rev. 4 (1962), 202-210.
50. F. Harary, *Graph theory*, Reading, 1969.
51. H. Hosoya, *Topological index*, Bull. Chem. Soc. Japan 44 (1971), 2332-2339.
52. H. Hutschenreuter, *Einfacher Beweis des Matrix-Gerüst-Satzes der Netzwerktheorie*, Wiss.Z.Tech.Hochsch., Ilmenau, 13 (1967), 403-404.
53. D. Ivanović, *Kvantna mehanika*, Beograd, 1974.
54. W. Jackson, *A characterization of the reducibility of non-negative matrices*, Proc. 8-th. South-Eastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Winnipeg, 1977, 381-384.
55. P.W. Kasteleyn, *Graph theory and crystal physics*, Graph theory and theoretical physics (ed. F.Harary), London-New York 1967, 43-110.
56. J.D. Kečkić, *Algebra I, Elementi linearne algebre i teorije polinoma*, Beograd 1973.
57. G. Kirchhoff, *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird*, Ann.Phys. Chem. 72 (1847), 497-508.
58. J.V. Knop, I. Gutman, N. Trinajstić, *Primjena teorije grafova u kemiji VII. Prikazivanje kemijskih struktura u dokumentaciji*. Kemija u industriji (Zagreb) 24 (1975), 505-510.
59. D. König, *Über Graphen und ihre Anwendungen auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, Math. Ann. 77 (1916), 453-465.
60. D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akad. Verlag M.B.H., Leipzig, 1936 (drugo izdanje: Chelsea, New York, 1950).
61. J.H.-van Lint, *Coding theory*, Berlin-Heidelberg- New York, 1971.
62. E.K. Lloyd, *Matrices, graphs and adjoints*, Math. Gazette 61 (1977), 201-204.
63. G. Lukatela, *Statistička teorija telekomunikacija i teorija informacija*, skripta, Beograd, 1978.
64. B.J. McClelland, *Properties of the latent roots of a matrix: the estimation of  $\pi$ -electron energies*, J.Chem.Phys. 54(1971), 640-643.
65. C.C. MacDuffee, *The theory of matrices*, New York, 1946.
66. M. Marcus, H. Minc, *A survey of matrix theory and matrix inequalities*, Boston, 1964.
67. S.J. Mason, *Feedback theory, some properties of signal flow graphs*, Proc. IRE 41 (1953), No.9, 1144-1156.

68. S.J. Mason, *Feedback theory, further properties of signal flow graphs*, Proc. IRE 44 (1956), No.7, 920-926.
69. M. Milić, *Flow graph evaluation of the characteristic polynomial of a matrix*, IEEE Trans Circuit Theory CT-11 (1964), 423-424.
70. D.S. Mitrinović, *Matrice i determinante*, Beograd, 1972.
71. D.S. Mitrinović, *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima*, I, V izmenjeno i dopunjeno izdanje, Beograd, 1978.
72. D.S. Mitrinović, D.Ž. Đoković, *Polinomi i matrice*, Beograd, 1966 (II izdanje: Beograd, 1975).
73. D.S. Mitrinović, D. Mihajlović, P.M. Vasić, *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija*, VII izdanje, Beograd, 1977.
74. E.W. Montroll, *Lattice statistics*, Applied combinatorial mathematics (ed. E.F.Beckhenbach), New York-London-Sydney, 1964, 96-143.
75. J.W. Moon, *Enumerating of labelled trees*, Graph theory and theoretical physics (ed. F.Harary), New York, 1967, 262-272.
76. T. Muir, *Theory of determinants in the historical order of development, I*, Dover, New York, 1960.
77. M. Parodi, *La localisation des valeurs caractéristiques des matrices et ces applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1959.
78. J.K. Percus, *Combinatorial methods*, New York, 1969.
79. B. Popović, *Osnovi elektrotehnike I*, Beograd, 1976.
80. B.L.J. Radosavljević, *Poglavlja iz mehanike, I deo*, Mašinski fakultet, Beograd, 1969.
81. H. Sachs. *Über selbstkomplementäre Graphen*, Publ. Math. (Debrecen) 9 (1962), 270-288.
82. H. Sachs, *Beziehungen zwischen den in einem Graphen enthaltenen Kreisen und seinem charakteristischen Polynom* Publ. Math. (Debrecen) 11 (1963), 119-134.
83. L.I. Schiff, *Quantum mechanics*, New York-Toronto-London, 1955.
84. H. Schneider, *The concept of irreducibility and full indecomposability of a matrix in the works of Frobenius, König and Markov*, Linear Algebra and Appl. 18 (1977), 139-162.
85. *Sparse matrix computations* (ed. J.R.Bunch, D.J.Rose), Academic Press, New York-San Francisco-London, 1976.
86. *Sparse matrix techniques*, Advanced course held at the Technical University of Denmark, Copenhagen, August 9-12, 1976, (ed. V.A.Barker), Lecture Notes Math. No.572, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
87. M. Stojić, *Kontinualni sistemi automatskog upravljanja*, Beograd, 1978.



88. V. Strassen, *Gaussian elimination is not optimal*, Numer. Math. 13 (1969), No.4, 354-356.
89. R.P. Tewarson, *Sparse matrices*, New York-London, 1973.
90. D. Tošić, *Uvod u numeričku analizu*, Beograd, 1978.
91. H.M. Trent, *A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph*, Proc.Nat.Acad. Sci. USA, 40 (1954), 1004-1007.
92. J.H. Wilkinson, *The algebraic eigenvalue problem*, Oxford, 1965.
93. D. Younger, *A simple derivation of Mason's gain formula*, Proc. IEEE 51 (1963), 1043-1044.
94. P. Zumbulović, *Dokaz principa superpozicije, teoreme recipročnosti i Theveninove teoreme pomoću Coatesovih grafova protoka*, u knjizi [25], 252 - 257.
95. R. Zurmühl, *Matrizen und ihre technischen Anwendungen*, Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1961.
96. В. В. Белов, Е. М. Воробьев, В. Е. Шаталов, *Теория графов*, Москва, 1976.
97. Р. Ф. Гантмахер, *Теория матриц*, Москва, 1966.
98. А. К. Кельманс, *О числе деревьев графа I*, Автоматика и телемеханика, 26 (1965), 2194-2204.
99. А. К. Кельманс, *О числе деревьев графа II*, Автоматика и телемеханика, 1966, по. 2, 56-65.
100. И. Н. Ляшенко, Х.М. Мередов, *Численное решение некоторых спектральных задач теории колебаний*, Киев, 1978.
101. А. Н. Мелихов, *Ориентированные графы и конечные автоматы*, Москва, 1971.
102. В. П. Сигорский, *Математический аппарат инженера*, Киев, 1975.
103. Н. Ф. Степанов, М.Е. Ерлыкина, Г. Г. Филипов, *Методы линейной алгебры в физической химии*, Москва, 1976.
104. К.Б. Яцимирский, *Применение метода графов к исследованию сложных равновесий*, Журн. неорг. химии, 17 (1972), 2323-2328.

## II izdanje

105. D. Cvetković, *Teorija grafova i njene primene*, Naučna knjiga, Beograd, 1986.
106. D. Cvetković, Z. Cvetković, *Jedna modifikacija Coatesove formule za analizu električnih mreža*, XXV konferencija ETAN-a, Mostar, 1981.
107. D. Cvetković, S. Simić, *Kombinatorika - klasična i moderna*, Naučna knjiga, Beograd, 1984.

108. H. Straubing, A. Straubing, *A combinatorial proof of the Cayley-Hamilton theorem*, Discrete Math. 43 (1983), 273-279.
109. D. Zeilberger, *A combinatorial approach to matrix algebra*, Discrete Math. 56 (1985), 61-72.

### III izdanje

110. R.B. Bapat, T. E. S. Raghavan, *Nonnegative Matrices and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
111. F. Belardo, E.M. Li Marzi, S.K. Simić, *Combinatorial approach for computing the characteristic polynomial of a matrix*, Linear Algebra Appl., 433(2010), No. 8-10, 1513-1523.
112. T. Bella, V. Olshevsky, P. Zlobich, *Signal flow graph approach to inversion of  $(H, m)$ -quasiseparable-Vandermonde matrices and new filter structures*, Linear Algebra Appl., 432(2010), No. 8, 2032-2051.
113. R.A. Brualdi, *The Jordan canonical form: an old proof*, Amer. Math. Monthly, 94(1987), No. 3, 257-267.
114. R.A. Brualdi, *Introductory Combinatorics, fourth edition*, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, 2004.
115. R.A. Brualdi, *Combinatorial Matrix Classes*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
116. R.A. Brualdi, D. Cvetković, *A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Application*, CRC Press, Boca Raton, 2008.
117. R.A. Brualdi, H.Y. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991; reprinted 1992.
118. R.A. Brualdi, B.L. Shader, *Matrices of Sign-Solvable Linear Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
119. C.A. Coulson, B. O'Leary, R.B. Mallion, *Hückel Theory for Organic Chemists*, Academic Press, London, 1978.
120. D. Cvetković, I. Gutman, Eds., *Selected Topics on Applications of Graph Spectra*, Zbornik radova 14(22), Mathematical Institute SANU, Belgrade, 2011.
121. D. Cvetković, I. Lacković, M. Merkle, Z. Radosavljević, S. Simić, P. Vasić, *Matematika I - Algebra*, IX izdanje, Akademska misao, Beograd, 2005.
122. D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić, *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
123. D. Cvetković, S.K. Simić, *Graph spectra in computer science*, Linear Algebra Appl., 434(2011), 1545-1562.
124. J.R. Dias, *Molecular Orbital Calculations Using Chemical Graph Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

125. R.C. Dorf, *The Electrical Engineering Handbook*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
126. I.S. Duff, A.M. Erisman, J.K. Reid, *Direct Methods for Sparse Matrices*, 2nd edition, Oxford Science Publishers, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1989.
127. Đurović Ž., Kovačević B., *Sistemi automatskog upravljanja*, Akademska misao, Beograd, 2006.
128. G.P. Egorychev, *The solution of the van der Waerden's problem for permanents*, *Advances Math.*, 42(1981), 299-305.
129. S. Even, *Graph Algorithms*, Pitman Publishing Limited, London, 1979.
130. D.I. Falikman, *Proof of the van der Waerden's conjecture on the permanent of a doubly stochastic matrix*, (Russian), *Mat. Zametki*, 29(1981). No. 6, 931-958, 957.
131. M. Fiedler, *Special Matrices and Their Applications in Numerical Mathematics*, Martinus Nijhoff Publisher, Dordrecht, 1986.
132. F.R. Gantmacher, *Theory of Matrices*, I, II, Chelsea, New York, 1960, (Translated from Russian).
133. J.L. Gross, J. Yellen, *Graph Theory and its Applications, second edition*, CRC Press, Boca Raton, 2005.
134. I. Gutman, *Uvod u hemijsku teoriju grafova*, Prirodno-matematički fakultet Kragujevac, Kragujevac, 2003.
135. I. Gutman, Chemical graph theory - The mathematical connection, in: S. R. Sabin, E. J. Brändas (Eds.), *Advances in quantum chemistry 51*, Elsevier, Amsterdam, 2006, pp. 125-138.
136. I. Gutman, O. E. Polansky, *Mathematical concepts in organic chemistry*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
137. L. Hogben (editor), *Handbook of Linear Algebra*, CRC Press, Boca Raton, 2007.
138. R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
139. R.A. Horn, C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
140. D. Janežič, A. Miličević, S. Nikolić, N. Trinajstić, *Graph Theoretical Matrices in Chemistry*, Univ. Kragujevac, Kragujevac, 2007.
141. M. Kac, Can one hear a shape of a drum?, *Amer. Math. Monthly*, 73(1966), April, Part II, 1-23.
142. W. Kocay, D.L. Kreher, *Graphs, Algorithms, and Optimization*, CRC Press, Boca Raton, 2004

143. Pen-Min Lin, *Symbolic Network Analysis*, Elsevier, Amsterdam, 1991.
144. H. Minc, *Nonnegative Matrices*, Wiley, New York, 1988.
145. M. Perić, I. Gutman, J. Radić-Perić, The Hückel total  $\pi$ -electron energy puzzle, *J. Serb. Chem. Soc.*, 71 (2006) 771-783.
146. K.H. Rosen (editor-in-chief), *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics*, CRC Press, Boca Raton, 2000.
147. D.E. Rutherford, Some continuant determinants arising in physics and chemistry, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sec. A*, 62 (1947), 229-236.
148. D.E. Rutherford, The Cayley-Hamilton theorem for semirings, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sec. A*, 66 (1964), 211-215.
149. C.E. Shannon, The theory and design of linear differential equations machines, OSDR Rep. 411, U.S. National Defense Committee, 1942.
150. N. Trinajstić, *Chemical Graph Theory*, CRC Press, Boca Raton, 1983; 2nd revised ed., 1993.
151. R.S. Varga, *Geršgorin and His Circles*, Springer, Heidelberg, 2004.
152. D.B. West, *Introduction to Graph Theory, second edition*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2001.
153. F. Zhang, *Linear Algebra: Challenging Problems for Students*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

## 8.13. Kombinatorika – klasična i moderna

### Predgovor I izdanju knjige

U naučnoj i stručnoj literaturi iz kombinatorike ne susreću se često pojmovi "klasična kombinatorika" i "moderna kombinatorika". Autori izabranim naslovom žele da skrenu pažnju na činjenicu da je savremeni razvoj kombinatorike bitno izmenio njen sadržaj što je praktično nepoznato našim matematičarima i drugim stručnjacima. Pod kombinatorikom se kod nas obično podrazumeva ono što je u ovoj knjizi obrađeno u odeljku 1.1 poglavlja "Klasična kombinatorika". Pored toga, postoji tradicionalno podcenjivanje kombinatornih sadržaja što se ogleda u nastavi matematike, udžbeničkoj literaturi i naučnom radu. Ovakvo stanje začuđuje jer je prva knjiga o kombinatorici na teritoriji Jugoslavije objavljena još pre približno sto godina. Knjigu pod naslovom "Nauka o kombinacijama" objavio je u Beogradu 1883. godine Dimitrije Nešić (1836–1904), predsednik Akademije nauka i rektor Velike škole.

Kombinatorika je u ovoj knjizi prikazana kao deo matematike koji obrađuje probleme sa konačnim skupovima. Tako definisana, kombinatorika predstavlja široku matematičku oblast koja sadrži veliki broj veoma raznorodnih disciplina. Kombinatorika uključuje delove niza drugih grana matematike; na primer, iz oblasti algebre i matematičke logike u kombinatorici se tretiraju neki problemi konačnih kvazigrupa (uključujući tu grupe) zatim problemi polja Galoisa, Booleovih algebri itd. Najrazvijenija grana savremene kombinatorike je teorija grafova koja se često posmatra kao posebna disciplina. U ovoj knjizi su prikazane najvažnije grane savremene kombinatorike izuzev teorije grafova koja je obrađena samo u meri u kojoj je to bilo neophodno. Knjiga nije pisana sa pretenzijama na iscrpnost. Konceptija knjige predstavlja kompromis između različitih zahteva. Knjiga je delimično udžbeničkog karaktera jer se pojmovi postepeno uvode i ilustruju primerima i zadacima, a mestimično monografskog karaktera jer detaljno opisuje neke specijalizovane probleme uključujući i originalne naučne rezultate autora. Autori su nastojali da nađu potrebnu meru u realizaciji kompromisne koncepcije nadajući se da će to doprineti da krug čitalaca knjige bude širi. U sklopu takvih nastojanja je izrađen prilog koji opisuje najvažnije primene kombinatorike.

Svako poglavlje sadrži odeljak posvećen primerima i zadacima. Spisak literature, jedinstven za sva poglavlja, dovoljan je da čitaocu, zainteresovanom za dublje proučavanje kombinatorike, posluži da učini prvi korak u pravcu upoznavanja veoma obimne literature iz ove oblasti. U spisak literature uključene su

važnije knjige iz oblasti kombinatorike i članci koji se odnose na one specifične delove ove knjige po kojima se ona razlikuje od drugih sličnih knjiga. U oba slučaja se nije insistiralo na iscrpnosti.

D. Cvetković je napisao poglavlja 0, 1, 4, 5 i 7, a S. Simić poglavlja 2, 3, 6, 8, 9 i 10. Tekst iz priloga izradila su oba autora zajednički. Rad na rukopisu knjige je završen 1982. godine.

Autori zahvaljuju recenzentima dr Dobrilu Tošiću, redovnom profesoru Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, dr Ratku Tošiću, vanrednom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu i dr Aleksandru Torgaševu, docentu Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu, na uloženom trudu i korisnim primedbama. Zahvalnost dugujemo i mr Zoranu Radosavljeviću koji je pročitao tekst knjige i doprineo uklanjanju propusta. Zahvaljujemo republičkoj zajednici za nauku SR Srbije, koja je delimično finansirala izdavanje ove knjige.

Beograd, juna 1984.

A u t o r i

## **Predgovor II izdanju knjige**

Knjiga "Kombinatorika - klasična i moderna" pojavljuje se u drugom izdanju sa nekoliko izmena i dopuna. Spisak literature je upotpunjen podacima o više novijih knjiga; izrađen je predmetni indeks. Poglavlje 11 o primenama kombinatorike je nastalo proširenjem priloga iz prethodnog izdanja knjige. Proširen je tekst o šemama asocijacije a izvršene su druge manje izmene i dopune.

Za drugo izdanje knjiga je pripremljena uz pomoć računara a tom prilikom se nastojalo da se uklone i štamparske greške iz prethodnog izdanja. Zahvalnost dugujemo Aleksandru Balaškoviću i Robertu Paušiću, studentima Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, koji su izvršili tehničku obradu teksta.

Beograd, septembra 1990.

A u t o r i

## 8.14. Kombinatorika i grafovi - Pregled i prilozi

### Predgovor

Kombinatorika se može kratko opisati kao deo matematike koji proučava *konačne relacione strukture*. U kombinatorici, koja ima svoju sopstvenu terminologiju (oslonjenu na opštu skupovnu terminologiju, ali veoma specifičnu), govori se o *incidentnim sistemima* kao opštim i osnovnim kombinatornim objektima. Tu spadaju grafovi, blok-šeme, konačne geometrije, šeme asocijacije, latinski kvadrati, matroidi i mnogi drugi objekti uključujući i one, za kombinatoriku tradicionalne, kao što su permutacije, i kombinacije konačnih skupova.

Teorija grafova je danas, možda, najrazvijeniji i najvažniji deo kombinatorike. Teoriji grafova se obično posvećuju posebne knjige, pa je kombinatorika u ovoj knjizi prikazana bez šireg predstavljanja teorije grafova. Ipak, grafovi su prisutni u svim delovima knjige jer je teorija grafova nerazdvojno povezana sa svim granama kombinatorike. Naslov knjige "Kombinatorika i grafovi" odražava koncepciju knjige po kojoj se kombinatorika predstavlja istovremeno, da se poigramo rečima, bez grafova i sa grafovima.

"Kombinatorika i grafovi" je naslednica naše knjige "Kombinatorika-klasična i moderna" koja je objavljena u dva izdanja (1984. i 1990. godine). Tadašnjim naslovom hteli smo, kako je to istaknuto u predgovoru iz 1984. godine (a koji ovde reprodukujemo), da skrenemo pažnju domaće stručne javnosti na burni razvoj kombinatorike u drugoj polovini dvadesetog veka koji je značajno promenio položaj kombinatorike u celoj zgradi matematike. Danas je kombinatorika dobro poznata u domaćim stručnim krugovima pa su naslov i podnaslov knjige iskorišćeni za ukazivanje na druge karakteristike knjige.

Podnaslovom "Pregled i prilozi" hteli smo da signaliziramo čitaocu da je knjiga, sa jedne strane, uvod u oblast i pregled oblasti, a, sa druge strane, delimično monografskog karaktera jer su uključeni i originalni rezultati autora. Takva koncepcija je postojala i u knjizi prethodnici, kako je to već elaborirano u predgovoru te knjige. U ovoj knjizi smo pojačali monografsku komponentu opisujući, koncizno, brojne svoje rezultate iz dužeg vremenskog perioda.

Svi navodi iz predgovora knjige "Kombinatorika klasična i moderna", koji nisu u suprotnosti sa već rečenim, ostaju u važnosti i za ovu knjigu pa ih ne ponavljamo u ovom predgovoru.

Tekst iz prethodne knjige je u osnovi zadržan jer smatramo da je i danas odgovarajući za svoju svrhu. U tekstu su izvršene intervencije, između ostalog, na mestima gde je bilo potrebno ukazati na novije rezultate. To se posebno odnosi

na konstrukcije kombinatornih objekata, odnosno dokaze o nepostojanju kombinatornih objekata, što menja neke kvalifikacije izrečene u ranijem tekstu. Tu spada, na primer, dokaz neegzistencije projektivne ravni reda 10 iz 1989. godine. Spisak literature je takođe inoviran.

Zahvaljujemo se mr Tatjani Davidović na trudu koji je uložila u tehničku obradu knjige pomoću programa  $\text{\LaTeX}$ . Savremenija i kvalitetnija tehnička priprema knjige, u odnosu na ranija izdanja, svakako će doprineti udobnosti korišćenja knjige. Student poslediplomskih studija Vladimir Baltić, diplomirani matematičar, ukazao nam je na izvestan broj štamparskih grešaka u prethodnoj knjizi i dao neke korisne sugestije.

Beograd, maja 2005.

A u t o r i



## 8.15. Zanimljiva matematika - Preferans

### Iz predgovora I izdanju knjige

Kao što je u naslovu knjige već istaknuto, ova knjiga spada u onu klasu popularnih knjiga iz matematike koje kroz probleme zabavnog sadržaja uvode čitaoce u krug određenih matematičkih problema i ideja<sup>7</sup>. Ovom prilikom je obrađena jedna igra kartama – preferans<sup>8</sup>.

Preferans potiče iz Francuske, gde je nastao pre više od 150 godina. On je u nas, a i u drugim evropskim zemljama, dosta rasprostranjen i važi za jednu od komplikovanijih igara kartama. Preferans je daleko sadržajnije od ostalih igara kartama koje se igraju masovnije u nas ali je siromašniji od bridža ili, na primer, od takve intelektualne igre kao što je šah.

Ipak se u vezi s preferansom može formulisati bezbroj interesantnih matematičkih problema. Ovi problemi su pretežno kombinatornog karaktera a povezani su, u prvom redu, sa sledećim granama matematike: kombinatorika, račun verovatnoće, teorija informacija i teorija igara. Ove grane matematike su, kao i druge matematičke grane, u stalnom razvoju i koriste se u različitim primenjenim disciplinama.

Svrha ove knjige je da kroz zabavu podstiče i razvija kod širokog kruga čitalaca kombinatorne sposobnosti i kombinatorni način mišljenja. Čitaoci sa srednjoškolskim obrazovanjem i sa sklonošću ka apstraktnom načinu mišljenja mogu da prate knjigu bez većih teškoća ...

Igre kartama izazivaju kod nas, verovatno po tradiciji, razne asocijacije u vezi s kockanjem. Ova knjiga, naravno, ne podstiče ni u kojem obliku strasti za kockom. Naprotiv, autor smatra objavljivanje ove knjige korisnim, ne samo zbog toga što će se izvestan broj čitalaca upoznati s kombinatorikom i računom verovatnoće, nego i zbog toga što će izlaganja u knjizi navesti neke čitaoce na razmišljanje o mogućnostima i načinima formalizacije problema donošenja odluka u složenim situacijama. Poznato je da naučnici raznih specijalnosti ulažu već duže vreme izvesne napore u stvaranje efikasnih kompjuterskih programa za igranje šaha. Osim šaha tretiraju se u ovom smislu i druge igre uključujući i igre kartama. Manje je

---

<sup>7</sup>Poznate knjige ovog žanra su na primer: 1° W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Leipzig 1901; 2° M. Kraitchik, *La mathématique des jeux ou récréations mathématiques*, Bruxelles 1930; M. Gardner, *Mathematical Games*, Moscow 1974. Postoji i časopis "Journal of recreational mathematics", u kome se objavljuju naučni matematički prilozi inspirisani zabavnim problemima.

<sup>8</sup>Kraći tekst o preferansu objavljen je u knjizi: *Zabavne igre za odrasle, omladinu i decu*, Zagreb, 1967.

poznato da ova nastojanja nisu samo zabava za one koji se time bave, ili možda za široku publiku, nego su deo širih nastojanja da se kompjuteri upotrebe za razne nerutinske poslove kao što je, na primer, naučno istraživanje ili, uopšte, situacije u kojima u složenim uslovima treba doneti neku odluku ili zaključak. Ovaj problem je u kompjuterskim naukama poznat kao problem stvaranja veštačke inteligencije. Izlaganja u ovoj knjizi bi mogla da posluže kao osnov za formiranje kompjuterskog programa za igranje preferansa.

Napomenimo na kraju, da za razne igre kartama, a naročito za bridž, postoji u inostranstvu brojna literatura. Problemi u vezi s raznim igrama kartama (na primer, bridž, poker) tretirani su u matematičkoj naučnoj literaturi<sup>9</sup>.

Beograd, april 1975.

Dr Dragoš M. Cvetković

---

<sup>9</sup>Videti, na primer: E. Borel, A. Cheron, *Théorie mathématique du bridge*, Paris 1940; E. Borel, *Applications aux jeux de hasard*, Paris, 1938.

## 8.16. Zanimljiva matematika - Šah

### Predgovor

Matematici naklonjenom čitaocu ova knjiga nudi kolekciju tekstova o vezama šaha i matematike. Mada je knjiga pisana tako da ne zahteva maksimalnu koncentraciju čitaoca, postoje i mesta teža za razumevanje, uključujući i ukazivanja na ozbiljnu istraživačku problematiku u matematici. Ovo su upravo karakteristike koje knjigu svrstavaju u tzv. *zanimljivu* ili *rekreacionu matematiku*.

Napomenimo da odrednica "rekreaciona matematika" postoji i u zvaničnoj klasifikaciji matematičkih oblasti Američkog matematičkog društva (šifra oblasti: 00A08 i 97A20).

Autor ove knjige je već objavio jednu knjigu ovog žanra: radilo se o popularnoj igri kartama - preferansu (videti u spisku knjiga popularnu knjigu [2]).

Šah i druge igre su odvajkada privlačili pažnju matematičara. Postoji obimna matematička literatura (članci objavljeni u matematičkim naučnim časopisima) posvećena matematičkoj obradi nekih problema u vezi sa šahom. U spisku literature čitalac može da nađe primere takvih radova.

Veza šaha i matematike se detaljno elaborira u poglavlju 1. U poglavlju 2 se, uz to, iznose argumenti u prilog tvrđenju da šah može da doprinese formiranju naučnog načina mišljenja kod mladog čoveka.

U poglavlju 3 se tretiraju šahovska tabla a u poglavlju 4 šahovske figure uz razne generalizacije.

Skica jedne matematičke teorije kretanja šahovskih figura je data u poglavlju 5 pri čemu su korišćene linearna algebra i teorija grafova. Ovo je centralno i najobimnije poglavlje knjige.

Poglavlje 6 sadrži oko 100 matematičkih problema raznih težina vezanih za šah dok se u poglavlju 7 nalaze, za neke od tih problema, rešenja ili samo rezultati uz eventualna uputstva za rešavanje.

Poglavlje 8 posvećeno je jednoj specifičnoj interakciji šaha i matematike na području veštačke inteligencije.

Materijal za ovu knjigu (slučaj je hteo da to bude šezdeseta objavljena knjiga autora) skupljan je u dužem vremenskom periodu, ali nesistematski i bez čvrste namere da se on objavi. Autor se odlučio na sređivanje i upotpunjenje skupljenog materijala povodom četrdesete godišnjice početka aktivnog rada u matematici, prisećajući se da je upravo bavljenje nekim šahovsko-matematičkim problemima šezdesetih godina prošlog veka i navelo autora da "otkrije" teoriju grafova

- matematičku disciplinu koja je postala glavna preokupacija u njegovom daljem radu. Značajan deo teksta knjige je napisan u to vreme; pojam apstraktne figure iz poglavlja 5 je doveo do pojma grafa a ideje o povoljnom dejstvu šaha na formiranje istraživačkih sposobnosti, izložene u poglavlju 2, sigurno imaju ilustraciju na primeru samog autora. U knjizi "Matematičke varijacije" čitalac može da nađe više podataka o pomenutom "otkriću" teorije grafova.

Delovi ovde izloženog materijala objavljivani su u više knjiga autora (na primer, nestandardni udžbenici [1-5], [3-4], [5-2], [7-3] i popularna knjiga [3]), ali se veći deo teksta pojavljuje sada po prvi put. Knjiga je napisana daleko od svake ambicije na iscrpnost prikaza problematike. Namera autora je da, pored neizbežnog opisa nekih standardnih tema za ovakvu vrstu knjige, ponudi čitaocu svoje viđenje dela problema, uključujući i neke sasvim originalne opservacije i sugestije.

Zahvaljujem recenzentima dr Vojislavu Petroviću, profesoru matematike na Univerzitetu u Novom Sadu i šahovskom majstoru i Srđanu Cvetkoviću, internacionalnom šahovskom majstoru i diplomiranom inženjeru elektrotehnike, na sugestijama za poboljšanje teksta knjige.

Obradu knjige na računaru izvršila je dr Tatjana Davidović, na čemu joj je autor veoma zahvalan. Pored nje, u tehničkoj obradi knjige učestvovali su Gordana Todorović, mr Filip Marić i Svetlana Ignjatović.

Beograd, januara 2006. godine

A u t o r

## 9. Komentar o objavljenim knjigama

Najznačajnije među mojim knjigama su svakako one deklarirane kao naučne monografije. Tu spadaju i neki od mojih "nestandardnih udžbenika".

Pet monografija o spektralnoj teoriji grafova (*Spectra of Graphs, Recent Results in the Theory of Graph Spectra, Eigenspaces of Graphs, Spectral Generalizations of Line Graphs, An Introduction to the Theory of Graph Spectra*) su objavljene kod izdavača poznatih u međunarodnim okvirima. To su dobro poznate, korišćene i citirane knjige.

Knjige *Spectra of Graphs* i *Recent Results* beleže sve rezultate spektralne teorije grafova: *Spectra of Graphs* do 1978. godine a *Recent Results* za period 1978-1984. godina.

Knjige *Eigenspaces of Graphs* i *Spectral Generalizations of Line Graphs* su takođe iscrpne ali obrađuju uže delove spektralne teorije grafova. Ove knjige sadrže u znatnoj meri moje sopstvene rezultate.

U knjizi *An Introduction to the Theory of Graphs Spectra* odustalo se od iscrpnosti jer, pre svega, to nije više bilo moguće sprovesti u okviru knjige normalnog formata. Selektovani materijal je pogodan za formiranje doktorskog kursa. Više od toga, knjiga može da posluži kao priručnik i iskusnim istraživačima.

Što se tiče kombinatorne teorije matrica, ključni događaj je objavljivanje moje knjige "Kombinatorna teorija matrica sa primenama u elektrotehnici, hemiji i fizici" 1980. godine. Ova knjiga je u spisku objavljenih knjiga kvalifikovana kao "nestandardni udžbenik" [6-1]. U suštini, radi se o naučnoj monografiji u kojoj je teorija matrica zasnovana i razvijena na do tada nezabeležen način, sredstvima teorije grafova.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Neke kolege su negirale da je ovo monografija jer knjiga ima oblik udžbenika za studente. Ako se ovako rezonuje, tj. ako je ova knjiga udžbenik za studente, onda bi univerzitetski profesori matematike trebali da znaju osnovne stvari iz ovakvih udžbenika. Međutim, pitajte nekog profesora koji nije pročitao moju knjigu kako se, na primer, dokazuje pomoću grafova da determinanta menja znak ako dve vrste u determinanti

Objavljivanju knjige [6-1] prethodio je rad [38] 1975. godine u kome sam pokazao kako se pojam determinante može da uvede sredstvima teorije grafova. Na tu ideju sam došao već u vreme odbrane mog doktorata 1971. godine.

Školske 1974/75 godine držao sam specijalnoj grupi dobrih studenata predavanja o determinantama na ovaj način a onda sam to činio i na redovnim predavanjima dugi niz godina.

Rad [38] je ubrzo dobio svoju verziju na holandskom jeziku [39]. Rad [38] je takođe reprodukovan u mom "nestandardnom udžbeniku" [1-2] (Teorija grafova i njene primene) 1977. godine. U toj knjizi se pojavljuje poglavlje "Grafovi i linearna algebra" a takođe prilozi drugih autora o vezama grafova i matrica u kontekstu primena u elektrotehnici. Videti takođe stručni rad [17].

Objavio sam i radove [65] i [73] u kojima sredstvima kombinatorne teorije matrica tretiram neke probleme iz teorije električnih kola.

Knjiga "Kombinatorna teorija matrica sa primenama u elektrotehnici, hemiji i fizici" je imala tri izdanja (1980, 1986 i 2011). Glavni delovi knjige su uključeni u verziju na engleskom jeziku "A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Application" koja je u spisku knjiga deklarirana kao naučna monografija (koautor R.A. Brualdi, 2008). Mnogi detalji se mogu naći u predgovoru i završnom komentaru knjige "Kombinatorna teorija matrica" napred u knjizi.

### Originalni prilozi u osnovnom tekstu sopstvenih knjiga

Svaka od mojih objavljenih knjiga je originalno delo u kome je dato sopstveno viđenje problema o kome se raspravlja. U mnogim od mojih knjiga postoje delovi koji predstavljaju originalne doprinose koje nisam objavio ni pre ni posle objavljivanja knjige. Navešćemo najvažnije od takvih doprinosa.

#### *Spectra of Graphs* [1-1]

Dokaz Turánove teoreme i korišćenje sopstvenih vrednosti grafova u rešavanju ekstremalnih problema (sekcija 7.7)

Originalna interpretacija metoda prenosne matrice (sekcija 8.3)

Table 4. Characteristic polynomials and spectra of miscellaneous (multi-)graphs, str. 306-311

#### *Recent Results* [2]

- Teorema 3.10 koja daje spektar generalisanog grafa grana u nekim slučajevima

---

zamene mesta.

- Tabela "Spectra of Graphs with Seven Vertices" donosi crteže, spektre, karakteristične polinome i spektralne momente povezanih grafova sa 7 čvorova (853 grafa)

*Kombinatorna optimizacija*

Poglavlje 9 (Grupisanje podataka) uključuje deo rezultata iz neobjavljenih elaborata [9], [10], [11], [12] videti sekciju "Projekti i studije" u spisku stručnih radova

*Teorija grafova i njene primene* [1-2]

- Odeljak 3.4: Generisanje permutacija pomoću transpozicija
- Odeljak 9.3: O optimalnim particijama čvorova grafa

*V izdanje* [1-5]

Prilog "Hiperkub" predstavlja delove iz neobjavljenog elaborata [9] (videti sekciju "Projekti i studije" u spisku stručnih radova)

*Kombinatorna teorija matrica* [6-1]

- Grafovski dokaz formule za transponovanje proizvoda matrica (teorema 6 u sekciji 2.2)
- Karakterizacija nilpotentnih matrica (teorema 2 u sekciji 3.1)
- Rešavanje diferencnih jednačina pomoću grafova (sekcija 3.4)
- Teorema o koeficijentima karakterističnog polinoma matrice (teorema 1 u sekciji 4.3)
- Laplaceov razvoj determinante (sekcija 4.7)
- Jordanov kanonični oblik (sekcija 7.3)
- Definicije nerazloživosti, primitivnosti i indeksa imprimitivnosti nenegativnih matrica (poglavlje 8)
- Grafovska interpretacija teorije Markovljevih lanaca
- Grafovsko izvođenje LU-dekompozicije matrica (sekcija 9.2)
- Razlgaganje sistema linearnih algebarskih jednačina na podsisteme (sekcija 9.3)
- Teorema o jednakosti determinante i permanenta (teorema 1 u sekciji 10.1)

*Kombinatorika, klasična i moderna* [7-1]

Zadatak 39 i rešenje (str. 67-68) je stručni rad [5] iz sekcije "Rešenja problema" u spisku stručnih radova.

*Zanimljiva matematika - Preferans*

Popularna igra kartama preferans je uvek privlačila igrače koji su skloni razmišljanju i planiranju svojih akcija.

Preferans može da se proučava i elementarnim matematičkim sredstvima kao to su aritmetika, kombinatorika i teorija verovatnoće. U nekim aspektima preferansa relevantna je i matematička teorija igara. Rezultati matematičkog tretiranja su u saglasnosti sa iskutvom rutiniranih igrača ali daju i neka nova uputstva za igru.

Matematička teorija preferansa koristi

- teoriju verovatnoće, i
- teoriju igara.

Preferans je višepotezna igra tri igrača sa nepotpunom informacijom (o stanju igre).

Svaki potez igrača može da izazove više mogućih slučajnih ishoda (konačan broj). Svaki ishod nastupa sa određenom verovatnoćom i donosi određeni dobitak (gubitak). Za svaki potez igrača se može odrediti matematičko očekivanje (srednja vrednost) veličine dobitka.

Potrebno je da igrač izabere potez kod koga je očekivani dobitak maksimalan (ili gubitak minimalan).

Ređe dolazi do konflikta interesa u smislu teorije igara. U takvim situacijama igrač je suočen, pored neizvesnosti koju donosi slučajnost, i sa nepoznatim potezom protivnika koji može da utiče na visinu dobitka. Tipična situacija: dve karte koje vodeći igrač odbacuje posle kupovine talona su nepoznate njegovim protivnicima.

Verovatnoće događaja u preferansu je u velikom broju slučajeva teško odrediti a nekad je to i nemoguće (kada te verovatnoće zavise od subjektivnih i nepoznatih strategija pojedinih igrača). To nameće potrebu da se verovatnoće pojedinih događaja aproksimativno određuju.

Matematička teorija preferansa se i sastoji od aproksimativnih modela složenih situacija i metoda za donošenje odluka na osnovu tih modela.



## 10. Prikazi naučnih radova i knjiga

Naučni radovi i monografije Cvetkovića prikazani su u uobičajenom postupku prikazivanja matematičkih naučnih dela u referativnim časopisima Mathematical Reviews, Zentralblatt für Mathematik i Referativni žurnal - Matematika. Podaci o ovim prikazima dati su u spisku radova i knjiga akademika Cvetkovića. Osim toga postoje i posebni prikazi u časopisima. U narednim sekcijama dat je kratak pregled pomenutih prikaza.

### 10.1. Prikazi u Mathematical Reviews

(autori Zoran Radosavljević, Tatjana Davidović)

Navešćemo ovde podatke o prikazima Cvetkovićevih radova i monografija u Mathematical Reviews i citirati delove tih prikaza.

Sredinom 2006. godine, kada je sastavljen ovaj prikaz, spisak naučnih radova akademika Dragoša Cvetkovića sadrži 184 bibliografske jedinice. Akademik Cvetković je objavio i 60 knjiga i više stručnih radova.

Elektronskom pretragom baze podataka referativnog časopisa Mathematical Reviews (MR) pronađen je 141 prikaz Cvetkovićevih radova i knjiga. Ovi prikazi zauzimaju 23 strane velikog, dvostubačnog formata koji je karakterističan za MR.

Nisu prikazani radovi objavljeni u hemijskim naučnim časopisima, radovi sa nekih domaćih naučnih skupova, knjige na srpskom jeziku i radovi objavljeni u takvim knjigama. Radovi ove vrste se inače ne prikazuju u MR.

Detaljnija statistika pokazuje sledeće. Od 141 navedenih prikaza 15 se sastoji samo od navođenja bibliografskih podataka za radove (uglavnom stručni radovi, nekrolozi i sl.). Sa izvesnim tekstom je prikazano 119 naučnih radova i 6 knjiga. Među naučnim radovima koji nisu prikazani (65), 11 je objavljeno u hemijskim časopisima, 29 na domaćim konferencijama (SYM-OP-IS gde je Cvetković objavio

17 radova, ET(R)AN - 7 radova, druge konferencije - 5 radova). Preostala 23 rada nisu prikazana iz raznih razloga: objavljeni su kao izveštaji raznih univerziteta, predstavljaju delove drugih radova, sadrže uglavnom numeričke podatke ili opis softvera, ili njihovi prikazi nisu još pripremljeni jer su radovi objavljeni nedavno.

Prikaze o kojima je ovde reč napisalo je više desetina matematičara. Najviše prikaza napisao je H. Sachs, jedan od Cvetkovićevih koautora monografije "Spectra of Graphs" (8 prikaza). Po broju prikaza najprisutniji su još P. Rowlinson (7 prikaza), R. C. Bringham, M. Doob (5 prikaza), A. J. Schwenk i N. Trinajstić (po 4 prikaza) i L. W. Beineke, M. Behzad i J. W. Moon (po 3 prikaza). Među prikazivačima ima i drugih poznatih imena kao što su F. Harary, N. L. Biggs, R. A. Brualdi, M. Aigner, R. W. Robinson, R. C. Read, J.-M. Goethals, S. Simić i dr. Može se zapaziti da su rane Cvetkovićeve radove prikazivali vrlo zapaženi matematičari pri čemu se sastav tima prikazivača znatno promenio u kasnijem periodu.

Prilikom prikazivanja u MR radovi se svrstavaju prema "Klasifikaciji matematičkih oblasti" Američkog matematičkog društva (AMS Mathematics Subject Classification 2000). Ova klasifikacija je trostepena, tako da svaka matematička oblast dobija svoj trodelni kod oblika  $xyLuv$ , gde su  $xyuv$  cifre a  $L$  slovo ( $xy$  daju najgrublju klasifikaciju tj. određuju najširu oblast, a drugi delovi koda daju rafiniraniji opis oblasti na koje se dati rad odnosi). Na primer, 05 označava kombinatoriku, 05C teoriju grafova kao deo kombinatorike, a 05C50 podoblast: grafovi i matrice. Najviše Cvetkovićevih radova odnosi se na teoriju spektara grafova pa je 50 takvih radova klasifikovano oznakom 05C50. Veliki broj radova je klasifikovan u druge odeljke teorije grafova, kao što se vidi iz donje tabele. Pada u oči da je veliki broj radova (čak 27) neklasifikovan u okviru teorije grafova, što se može protumačiti nepreciznošću klasifikacija u ranijem periodu. Osim u teoriju grafova, Cvetkovićevi radovi su klasifikovani u kombinatoriku, kombinatornu optimizaciju, računarstvo, veštačku inteligenciju, matematičku logiku, teoriju kodova i dr. Nekoliko radova klasifikovano je po sistemu koji se danas ne primenjuje, pa ti radovi nisu uzeti u obzir u donjoj tabeli.

Prikaz radova i knjiga D. Cvetkovića je, globalno uzevši, korektan i primeren politici prikazivanja radova u MR, kako po dužini prikaza tako i po sadržini. U prikazima nema negativnih ocena. Formulacija koja zvuči delimično kritički može se pronaći u prikazu 80c:05108 u kome prikazivač M. E. Watkins naziva opskurnom jednu osobinu grafova koju razmatraju autori rada koji se prikazuje D. Cvetković i S. Simić. Takođe, M. Doob u prikazu 98f:05111 knjige "Eigenspaces of Graphs" izražava mišljenje da je knjiga trebalo da uključi i jedan deo teorije razdaljinsko-regularnih grafova.

Broj radova	Oblast
	01 Istorija i biografije
3	01A70 Biografije, nekrolozi, lični podaci, bibliografije
1	01A73 Univerziteti
1	01A74 Ostale institucije i Akademije
	03 Matematička logika i osnovi matematike
	03B Opšta logika
5	03B35 Mehanizacija dokaza i logičke operacije
	05 Kombinatorika
	05A Kombinatorika prebrojavanja
2	05A15 Problemi prebrojavanja, funkcije generatriše
3	05C Teorija grafova
2	05C05 Stabla
1	05C10 Topološka teorija grafova, utapanja
3	05C15 Bojenje grafova i hipergrafova
1	05C20 Digrafovi
1	05C25 Grafovi i grupe
1	05C30 Prebrojavanje grafova i mapa
64	05C50 Grafovi i matrice
1	05C60 Problemi izomorfizma (hipoteza o rekonstrukciji itd.)
2	05C70 Faktorizacija, sparivanja, pokrivanje i pakovanje
3	05C75 Strukturalne karakterizacije klasa grafova
2	05C90 Primene
24	05C99 Ostalo
	68 Računarstvo
	68R Diskretna matematika i računarstvo
1	68R10 Teorija grafova
	68T Veštačka inteligencija
3	68T15 Dokazivanje teorema (dedukcija, rezolucija itd.)
	90 Operaciona istraživanja, matematičko programiranje
	90C Matematičko programiranje

Broj radova	Oblast
4	90C27 Kombinatorna optimizacija
3	90C35 Programiranje na grafovima i mrežama
	92 Biologija i druge prirodne nauke
	92 E Hemija
1	92E10 Molekularna struktura (metode teorije grafova, metode diferencijalne topologije itd.)
	94 Informacije i komunikacije, električna kola
	94A Komunikacije i informacije
1	94A10 Kodiranje (ranija klasifikacija)

S druge strane, mnogi od prikaza sadrže, pored informacija o delu, povoljne ocene rezultata. Navodimo oznake nekih prikaza koji sadrže takve ocene: 98f:05111, 97a:05146, 96b:05108, 91i:05079, 89d:05130, 87f:05111, 83b:05090, 81i:05054, 55#7826.

Citiraćemo neke ocene iz gornjih prikaza izostavljajući delove prikaza u kojima se opisuje sadržina rada ili knjige, tj. kompozicija poglavlja. Počinjemo ovaj pregled mišljenjem hrvatskog hemičara N. Trinajstića o Cvetkovićevoj monografiji "Spectra of Graphs" (MR 96b: 05108):

"Spectra of Graphs" je jedinstvena knjiga u oblasti spektralne teorije grafova pošto ona stvarno predstavlja enciklopediju teorije i primene spektara grafova pa se već sada može smatrati jednom od klasičnih knjiga o savremenoj teoriji grafova."

Monografija "Recent Results in the Theory of Graph Spectra" takođe je prikazana u Mathematical Reviews 89d: 05130. Prikazivač R. C. Brigham najpre ukratko opisuje prethodnu knjigu "Spectra of Graphs" ističući njenu iscrpnost pa prelazeći na opisivanje nove knjige kaže: "Nova knjiga je podjednako značajna (The new volume is equally essential)."

Isti prikazivač piše u prikazu 91i:05079 o radu "The largest eigenvalue of a graph: a survey" Cvetkovića i Rowlinsona: "Ovaj rad daje sveobuhvatni pregled rezultata o indeksu (ili spektralnom radijusu) konačnog neorijentisanog grafa... Spisak literature sa 105 jedinica zaokružuje ovaj izvanredni pregled."

U prikazu 98f:05111 knjige "Eigenspaces of Graphs" Cvetkovića, Rowlinsona i Simića, prikazivač M. Doob piše: "Materija... je pokrivena uz pogodan stepen detaljizacije i ukazuje na interesantne pravce u ovoj oblasti istraživanja. Kao takva, knjiga je zanimljiva i korisna za sve koji se bave algebarskim osobinama grafova."

E. S. Solheid u prikazu 97a:05146 rada "The second largest eigenvalue of a graph (a survey)" podseća čitaoce najpre na Cvetkovićeve knjige "Spectra of

Graphs” i ”Recent Results in the Theory of Graph Spectra” i na još jedan pregledni Cvetkovićev rad, sugerišući čitaocu da je rad koji prikazuje u istom trendu.

Citirajući deo uvoda i detaljno prikazujući klasifikaciju iz Cvetkovićevog rada ”Some possible directions in further investigations of graph spectra”, H. Sachs u svome prikazu 83b:05090 piše da ”je nemoguće dati ovde sve detalje ovog interesantnog rada.”

Pošto detaljno istorijski prikazuje relevantne rezultate, M. Doob u prikazu (2005m:05003) knjige ”Spectral Generalizations of Line Graphs” zaključuje: ”Uzimajući u obzir zajedno sve te istorijske detalje, može se sagledati vrednost knjige koja se prikazuje.”

## 10.2. Prikazi u Zentralblatt für Mathematik

(autori Vera Kovačević-Vučić, Tatjana Davidović)

Elektronskom pretragom<sup>1</sup> baze podataka referativnog časopisa Zentralblatt für Mathematik (Zbl) pronađeno je 126 prikaza Cvetkovićevih radova i knjiga. Ovi prikazi zauzimaju 40 strana.

Detaljnija statistika pokazuje sledeće. Baza podataka sadrži pune tekstove prikaza za samo 71 rad dok se za prikaze objavljene u broju 522 i ranije korisnik upućuje na štampanu verziju časopisa. Od 126 navedenih prikaza 4 se sastoje samo od navođenja bibliografskih podataka za radove (jedan rad koji sadrži uglavnom numeričke podatke, jedan nekrolog i dva rada sa domaćih konferencija). Sa izvesnim tekstom je prikazano 115 naučnih radova, 3 stručna rada i 6 knjiga. Među naučnim radovima koji nisu prikazani, 11 je objavljeno u hemijskim časopisima, 29 na domaćim konferencijama (SYM-OP-IS gde je Cvetković objavio 17 radova, ET(R)AN - 7 radova, druge konferencije - 5 radova). Preostali radovi nisu prikazani iz raznih razloga: objavljeni su kao izveštaji raznih univerziteta, predstavljaju delove drugih radova, sadrže uglavnom numeričke podatke ili opis softvera, ili njihovi prikazi nisu još pripremljeni jer su radovi objavljeni nedavno.

Prikaze o kojima je ovde reč napisalo je više desetina matematičara.

Prilikom prikazivanja u Zbl radovi se svrstavaju, isto ako i u referativnom časopisu *Mathematical Reviews*, prema ”Klasifikaciji matematičkih oblasti” Američkog matematičkog društva (AMS Mathematics Subject Classification 2000). Ova klasifikacija je opisana u prethodnom odeljku ove knjige. Najviše Cvetkovićevih

---

<sup>1</sup>2006. godine

radova odnosi se na teoriju spektara grafova pa je 46 takvih radova klasifikovano oznakom 05C50. Još 18 radova je klasifikovano u druge odeljke teorije grafova. Pada u oči da je veliki broj radova (čak 32) neklasifikovan u okviru teorije grafova, što se može protumačiti nepreciznošću klasifikacije u ranijem periodu. Osim u teoriju grafova, Cvetkovićeви radovi su klasifikovani u kombinatoriku, kombinatornu optimizaciju, semidefinitno programiranje, računarstvo, veštačku inteligenciju, teoriju kodova i dr. Nije izvršena klasifikacija za 5 radova.

U prikazima nema negativnih ocena. Navešćemo neke ocene iz gornjih prikaza izostavljajući delove prikaza u kojima se opisuje sadržina rada ili knjige, tj. kompozicija poglavlja. Nisu navođeni prikazi kojih nema u elektronskom obliku u bazi podataka.

Slovenački matematičar B. Mohar u svom prikazu trećeg (engleskog) izdanja knjige "Spectra of Graphs" (0824.05046) ističe da su autori uz dodati pregled novijih dostignuća "osigurali da knjiga ostane vredna referenca za istraživače iz te oblasti".

Pada u oči opširan prikaz knjige "Eigenspaces of Graphs", koji je napisao indijski matematičar K. R. Parthasarathy (0878.05057) i koji zauzima dve i po stranice (preko 100 redova). Detaljno se izlaže sadržaj svih 9 glava, sa posebnim osvrtom na kanonične zvezdaste baze. U prikazu se kaže da je knjiga nastavak dve ranije knjige sa sličnom tematikom ("Spectra of Graphs" i "Recent Results in the Theory of Graph Spectra") koje su svojevremeno dale iscrpni pregled dotadašnjih rezultata. Autor prikaza ocenjuje da će knjiga biti vredan dodatak radnoj biblioteci svakog ozbiljnog istraživača na polju teorije grafova.

Interesantno je da je u Zbl objavljen i prikaz (videti 0823.05002) knjige "Kombinatorika: klasična i moderna" koja je objavljena na srpskom jeziku. Nakon detaljnog prikaza glavnih koncepata na kojima knjiga počiva, prikazivač, češki matematičar B. Zelinka, preporučuje ovu knjigu svim čitaocima koji imaju dublji interes za kombinatoriku i diskretnu matematiku.

Knjiga "Recent Results in the Theory of Graph Spectra" okarakterisana je kao temeljan prikaz razvoja teorije spektara grafova u periodu 1978–1984, u kome se citira 213 teorema iz preko 700 referenci i uspostavlja međusobna veza ovih rezultata (videti 0634.05054).

M. E. Watkins u prikazu knjige "Spectral Generalizations of Line Graphs" (1061.05057) kaže: "Ovo je duboko i izazovno delo. Pored više nego osnovnog znanja teorije grafova, od čitaoca se očekuje da takode dobro poznaje linearnu algebru, geometriju i apstraktnu algebru."

## 10.3. Posebni prikazi knjiga

(autor Vera Kovačević-Vučić)

Osim uobičajenih prikaza radova i knjiga u referativnim časopisima, istaknutije naučne monografije i nestandardni udžbenici se prikazuju i u pojedinim časopisima u okviru posebnih rubrika za prikazivanje knjiga. Navešćemo ovde podatke o ovakvim prikazima Cvetkovićevih monografija i citirati delove tih prikaza.

Objavljeni su sledeći prikazi monografije "Spectra of Graphs":

I. Gutman, *Theoretica Chemica Acta* (Berlin), 55(1980), 256;

I. Gutman, *Croatica Chemica Acta*, 53(1980), A3-A4;

E. Heilbronner, *J. American Chemical Society*, 1980;

L. W. Beineke, *SIAM Review*, 23(1981), No. 4, 546-548;

М. И. Кратко, В. В. Строк, *Новие книги за рубежом, Серия А*, No. 5, 1983, 43-45.

Postoji takođe više prikaza trećeg izdanja ove knjige:

S. Gacsályi, *Publ. Inst. Math. (Debrecen)*, 47(1995);

S. Simić, *YUJOR*, 5(1995), No. 2, 299-301;

W. Wessel, *ZAMM*, 76(1996), 140;

P. Rowlinson, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 39(1996), 188-189.

U svim prikazima se veoma povoljno ocenjuje monografija. Ističe se da je to prva i jedina naučna monografija u kojoj se obrađuje teorija spektara grafova. Ukazuje se takođe na potpunost prikaza rezultata ove teorije jer su praktično svi relevantni radovi uključeni u bibliografiju i obrađeni na odgovarajući način. Navešćemo neke ocene iz gornjih prikaza izostavljajući delove prikaza u kojima se opisuje sadržina knjige, tj. kompozicija poglavlja.

"The book contains practically the entire knowledge about graph spectra (until early 1979). It consists of ten chapters, tables of graph spectra and bibliography ... A particularly valuable part of this monograph is the exhaustive bibliography of both mathematical and chemical publications dealing with graph spectra (consisting of nearly 700 titles including also papers which appeared in the first half of 1979)."

I. Gutman

"..., for those interested in applying graph theoretical methods in their field of endeavor, this splendid volume is an absolute must. You cannot afford to be without it."

E. Heilbronner

"That I consider this to be an excellent book should by now be apparent: the subject is of considerable interest, the material has not been assembled elsewhere, and the topics are developed well."

L. W. Beineke

"Книга может заинтересовать специалистов в области теории графов и, несомненно, будет полезна широким кругам научных работников занимающихся приложениями дискретной математики."

Кратко, Строк

"This book represents an excellent monograph on graph spectra. ... this book contains an enormous quantity of information in the area of graph spectra which is of great theoretical and practical interest. The main ideas are well developed, and the material, in spite of rapidly growing research is well assembled."

S. Simić

"There is little doubt that the text will remain "the bible" for researchers in the field."

P. Rowlinson

Monografija "Recent Results in the Theory of Graph Spectra" takođe je prikazana na više mesta:

R. A. Brualdi, *Linear Algebra and Its Appl.*, 126(1989), 149-150;

А. А. Иванов, *Новие книги за рубежом, Серия А, Апр. 1989*, 19-20;

A. J. van Zanten, *Medelingen van het wiskundig genootschap*, 1989;

P. John, *Optimization*, 1990;

H. Fleischner, *Monatshefte für Mathematik*, 1990.

Navodimo neke od ocena knjige:

"For someone working in the area of graph spectral theory, this book is a great resource. For someone who wants to see what has been going on in graph spectral theory in the last ten years and what some of the open problems are, the book is highly recommended."

R. A. Brualdi

"В рецензируемой книге дан обзор полученных в последнее время (после 1978. г.) результатов, относящихся к теории спектров графов... Книга представляет собой продолжение первой части, написанной Д. Цветковичем, М. Дубом и Х. Заксом, под названием "Спектры графов", она была опубликована на английском языке в 1982. г., а в 1984 г. - в переводе на русский язык издательством "Наукова думка"... Книга представляет



собой превосходное справочное подобье по теории спектров графов. В связи с неуклонным ростом интереса к этой тематике, в том числе со стороны прикладников, книга будет пользоваться спросом и ею должны располагать все крупные библиотеки страны .”

А.А. Иванов

Više drugih knjiga D. Cvetkovića je prikazano u posebnim rubrikama raznih časopisa. Navodimo podatke o nekim od tih prikaza.

”Kombinatorna teorija matrica”

H. Sachs, *Optimization*, 15(1984), 3;

S. Simić, *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat.*, 2(1991), 109.

”Kombinatorika - klasična i moderna”

Z. Radosavljević, *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat.*, 3(1992), 75-76.

”Diskretna matematika - matematika za kompjuterske nauke”

Z. Radosavljević, *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat.*, 4(1993), 130.

”Teorija grafova i njene primene”

Z. Radosavljević, *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat.*, 5(1994), 64.

Preuzet tekst prikaza Z. Radosavljevića, *Graph Theory Newsletter*, 25(1997), No. 2, 3-4.

”Variations on the travelling salesman theme”

S. Simić, *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat.*, 7(1996), 120;

S. Simić, *YUJOR*, 6(1996), No. 2, 323.

Preuzet tekst prikaza S. Simića, *Graph theory Newsletter*, 25(1997), No. 2, 3.

”Kombinatorna optimizacija”

J. Petrić, S. Guberinić, *YUJOR*, 7(1997), No. 1, 149-151.

J. Petrić, S. Guberinić, *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat.*, 8(1997), 125-127.

”Matematičke varijacije”

I. Gutman, *Flogiston*, 2000, 296-298

”Eigenspaces of Graphs”

I. Gutman, *YUJOR*, 7(1997), No. 2, 305-307,

N. L. Biggs, *Bull. London Math. Soc.*, 30(1998).

E. van Dam, *Mededel. van het Wiskundig Genootschap* 41 (1998), 169-170.

*L'Enseignement Mathématique*, 43(1997).

R. Merris, *Image*, 21(1998).

R. A. Beezer, *SIAM Rev.*, 40(1998), No. 4, 998-999.  
 C. Krattenthaler, *Monatshefte Math.*, 87(1999), No. 3.  
 R. J. Wilson, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 42(1999), 658.  
*Graph Theory Newsletter*, 26(1997), No. 2, 6-7.  
*EMS Newsletter*, 1999.

Navodimo neke od ocena monografije "Eigenspaces of Graphs".

"This book may be seen as the third in a series on spectral graph theory. the first, and excellent book, "Spectra of Graphs" by Cvetković, Doob and Sachs describes many of the relations between the combinatorial properties of graphs and the eigenvalues of their (0,1)-matrices ... Overall, I think this book is worth studying for people interested in using linear algebra in graph theory, and parts of it for those interested in the graph reconstruction and isomorphism problems."

E. van Dam

"This outstanding book is volume 66 in the series *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* ..."

R. Merris

"This volume continues a series of monographs in algebraic graph theory ... the common thread between the two previous works ... and the volume being reviewed is the presence of Cvetkovic as one of the coauthors."

R. A. Beezer

"... since then, there have been over a thousand papers on the subject, as well as three important books by Cvetkovic, Doob and Sachs [2], Biggs [3], and Cvetkovic, Doob, Gutman, Torgasev [4]... the book under review extends the subject... This book is highly recommended for anyone interested in learning current trends in spectral graph theory ..."

R. J. Wilson

Monografija D. Cvetkovića, "Spectral Generalizations of Line Graphs", objavljena 2004. godine takođe je privukla pažnju naučne javnosti. Navodimo podatke o tri do sada objavljena prikaza i izvode iz njih.

P. Cameron, *Bull. London Math. Soc.*, 37(2005), 479-480

M. E. Watkins, *Zbl.* 1061.05057.

M. Doob, *Math. Rev.*, 2005m: 05003

"The book contains an introduction to spectral graph theory, a wealth of detail about the class of graphs with least eigenvalue  $-2$  or greater... this class can now claim to be the best understood corner of graph theory, and this book will be the

---

standard guide.”

P. Cameron

”This is a deep and challenging piece of work. In addition to a more than basic acquaintance with graph theory, the reader requires as well a substantial background in linear algebra, geometry, and abstract algebra.”

M. E. Watkins

”Putting all of these historical pieces together, we can see the value of the book under review. First, it is completely self-contained, and all the tools to understand the area of spectral graph theory are there; second, it allows a complete perspective of the interrelationships of the different variations of the problems considered; finally, results formerly known only by computer search are now proven using conventional mathematical tools. This justifies the efforts of the authors in exploring the role of eigenspaces and angles.

... This work deserves a place on the bookshelf of the mathematician with a serious interest in the theory of graph spectra.”

M. Doob

# 11. Citiranje knjiga i naučnih radova akademika Cvetkovića u naučnoj literaturi

(autor Vera Kovačević-Vučić)

Naučne monografije i naučni radovi akademika Dragoša Cvetkovića naišli su na veliki odjek u naučnoj i stručnoj literaturi.

Cvetković je sigurno jedan od najviše citiranih matematičara iz naše zemlje; po nekim podacima – najcitiraniji.

Prilikom Cvetkovićevog izbora za redovnog člana SANU 1994. godine izvršeno je pretraživanje međunarodne baze podataka Citation Index, kojom prilikom je ustanovljeno da su Cvetkovićeve knjige i radovi citirani 600 puta. Pri tome je monografija *Spectra of Graphs* citirana 200 puta, što ukazuje na činjenicu da je ova knjiga postala standardna referenca za teoriju spektara grafova.

Broj citata se neprestano uvećava jer dela akademika Cvetkovića i dalje privlače pažnju stručne javnosti.

U vezi s podacima iz Citation Index-a treba imati u vidu da ova baza podataka ne obuhvata citiranja radova u svim naučnim časopisima. Uključeni su samo oni časopisi koji imaju visok indeks sopstvene citiranosti. Takođe, u Citation Index nisu uključena citiranja u knjigama, doktorskim i magistarskim tezama i još nekim vrstama publikacija.

Ovde bi bilo suvišno navoditi podatke o citiranjima koja su sadržana u Citation Index-u. Ograničićemo se na prikaz odabranih podataka o citiranju Cvetkovićevih radova i knjiga. Prvi odeljak sadrži prikaz izvesnih detalja iz nekoliko odabranih radova i knjiga u kojima se citiraju, komentarišu i koriste rezultati opisani u Cvetkovićevim knjigama i radovima. Drugi odeljak daje najčešće citirane publikacije D. Cvetkovića u periodu 2003 – 2007. U trećem odeljku se prezentuju podaci o  $g$ -indeksu i  $h$ -indeksu citiranosti.

## 11.1. Nekoliko odabranih citiranja

1. Poznati britanski matematičar Norman Biggs, profesor matematike na London-skom univerzitetu, u uvodnom poglavlju drugog izdanja svoje knjige "Algebraic Graph Theory" (Algebarska teorija grafova, Cambridge University Press, Cambridge, 1993) govoreći o literaturi u vezi s algebarskom teorijom grafova kaže:

"In particular, there are two books which contain massive quantities of information, and on which it is convenient to rely for 'amplification and exemplification' of the main results discussed here.

These are:

Spectra of Graphs: D. M. Cvetković, M. Doob, and H. Sachs, Academic Press (New York), 1980,

Distance-Regular Graphs: A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, Springer-Verlag (Berlin), 1989."

(Specijalno, postoje dve knjige koje sadrže veliku količinu informacija i na koje je pogodno da se pouzdamo ako želimo razradu i ilustraciju glavnih rezultata o kojima se govori u ovoj knjizi. To su: ...)

2. U članku "Locally pseudo-distance-regular graphs" (J. Combinatorial Theory B, 68(1986), 179-205), čiji su autori M. A. Fiol, E. Garriga and J. L. A. Yebra s Politehničkog Univerziteta u Barceloni, citira se knjiga [2], a uvod počinje rečima:

"Distance-regular graphs have deserved much attention among graph theorists, because of their rich structure and related applications. Anyone working on the subject probably knows the books by Biggs, Brouwer, Cohen and Neumaier, and Cvetković, Doob and Sachs, as basic references."

(Razdaljinsko-regularni grafovi su izazvali veliko interesovanje matematičara koji se bave teorijom grafova zbog svoje bogate strukture i odgovarajućih primena. Svako ko radi u ovoj oblasti verovatno zna knjige od Biggsa, od Brouwera, Cohena i Neumaiera, i od Cvetkovića, Dooba i Sachsa kao osnovne reference).

3. Izdavačko preduzeće "Мир" iz Moskve objavilo je 1973. godine ruski prevod poznate monografije

F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, Ma., 1969

u redakciji G. P. Gavrilova. U predgovoru redaktora kaže se na jednom mestu da su "najvažniji radovi objavljeni u poslednje dve-tri godine dodati u (originalni) spisak literature i označeni kružićem". Među takvim radovima nalazi se i Cvetkovićeve doktorska disertacija [6].

4. U svojoj knjizi "Algebraic Combinatorics" (Algebarska kombinatorika, Chap-

man and Hall, New York-London, 1993) kanadski matematičar australijskog porekla C. D. Godsil citira na str. 36 Cvetkovićeve monografije [2] i [5] pa primećuje:

”The books [2], [5] by Cvetković, Doob and Sachs and by Cvetković, Doob, Gutman and Torgašev provide quite a complete survey of the main results concerning the characteristic polynomial of a graph. Indeed, our list of references is so short because theirs are so long”.

(Knjige [2], [5] od Cvetkovića, Dooba i Sachsa i od Cvetkovića, Dooba, Gutmana i Torgaševa obezbeđuju potpun pregled glavnih rezultata u vezi s karakterističnim polinomom grafa. Zaista, naš spisak literature je tako kratak upravo zbog toga što su njihovi spiskovi literature dugački).

5. Sasvim neuobičajeno, Dasong Cao i Hong Yuan na kraju svog rada ”The distribution of eigenvalues of graphs” (Linear Algebra and Its Applications, 216(1995), 211-224), citirajući monografiju [2] i druga dela D. Cvetkovića, pišu:

”The authors thank D. Cvetković, M. Doob, and Sachs for their excellent book entitled Spectra of Graphs. Without it, this work could not have been done.”

(Autori zahvaljuju D. Cvetkoviću M. Doobu i H. Sachsu za njihovu izvanrednu knjigu pod naslovom ”Spektri grafova”. Bez nje ne bi mogao da bude napisan ovaj rad.)

6. Na koricama knjige ”Combinatorial Matrix Theory” (Kombinatorna teorija matrica, Cambridge University Press, Cambridge, 1991) istaknutih američkih matematičara R. A. Brualdija, glavnog urednika međunarodnog naučnog časopisa Linear Algebra and Its Applications (Linearna algebra i njene primene) i H. J. Rysera nalazi se sledeći tekst izdavača:

”This is the first book length exposition of basic results of combinatorial matrix theory, that is, the use of combinatorics and graph theory to matrix theory (and vice versa)...”

(Ovo je prvi prikaz, obima jedne knjige, osnovnih rezultata kombinatorne teorije matrica, koja podrazumeva korišćenje kombinatorike i teorije grafova u teoriji matrica (i obrnuto)...).

Autori citiraju Cvetkovićeve knjige [3] i [5] i rad [7] ali ne i knjigu [1] ”Kombinatorna teorija matrica”, tj. knjigu istog naslova i istih ideja kao što je njihova koja je objavljena 1980. godine, dakle, 11 godina ranije! Objašnjenje je očigledno: Cvetkovićeva knjiga je objavljena na srpskom jeziku i malo je poznata inostranim autorima.

7. Pri citiranju Cvetkovićevih knjiga i radova ponekad se neki Cvetkovićev rezultat (teorema, formula) navodi uz eksplicitno korišćenje autorovog imena. To je, na primer, slučaj u naslovu i tekstu rada autora S. P. Strunkova ”Об одной

теореме Цветковича в теории графов” (О jednoj Cvetkovićevoj teoremi u teoriji grafova, *Uspehi mat. nauk*, 45(1990), No. 6, 145-146). U radu se citira Cvetkovićeve rad [8] i monografija [4], tj. ruski prevod knjige [2]. Autor uopštava jednu teoremu Cvetkovića o integralnim grafovima.

8. Citirajući Cvetkovićeve doktorsku disertaciju [6], australijski matematičari C. Godsil i B. McKay objašnjavaju u svom radu ”Some computational results on the spectra of graphs” (*Combinatorial Mathematics IV*, ed. L. R. A. Casse, W. D. Wallis, *Lecture Notes in Mathematics* 560, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976, 73-92) kako su приметили da je njihov dokaz jedne teoreme prevaziđen jer teorema neposredno sledi iz jedne Cvetkovićeve formule.

9. O. Rojo i R. Jimenez u svom radu ”A decreasing sequence of upper bounds for the Perron root” (*Computer Math. Applic.*, 28(1994), No. 8, 9-15) citirajući rad [9] kažu na jednom mestu:

”The paper of D. Cvetković and P. Rowlinson is an excellent survey of results concerning the index of a graph.”

(Rad D. Cvetkovića i P. Rowlinsona je odličan pregled rezultata u vezi s indeksom grafa.)

### Reference

1. Cvetković D., *Kombinatorna teorija matrica sa primenama u elektrotehnici, hemiji i fizici*, Naučna knjiga, Beograd, 1980.
2. Cvetković D., Doob M., Sachs H., *Spectra of Graphs - Theory and Application*, Deutscher Verlag der Wissenschaften - Academic Press, Berlin - New York, 1980.
3. Cvetković D., Doob M., Sachs H., *Spectra of Graphs - Theory and Application*, Deutscher Verlag der Wissenschaften - Academic Press, Berlin - New York, second edition.
4. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х., *Спектри графов - Теория и применение*, Наукова думка, Киев, 1984
5. Cvetković D., Doob M., Gutman I., Torgašev A., *Recent Results in the Theory of Graph Spectra*, North Holland, Amsterdam, 1988.
6. Cvetković D., *Graphs and their spectra (Thesis)*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. **354**-No. **356**(1971), 1-50.
7. Cvetković D., *The determinant concept defined by means of graph theory*, *Mat. Vesnik*, **12(27)**(1975), 333-336.
8. Cvetković D., *Cubic integral graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., No. **498**-No. **541**(1975), 107-113.
9. Cvetković D., Rowlinson P., *The largest eigenvalue of a graph - a survey*, *Linear and Multilinear Algebra*, **28**(1990), 3-33.

## 11.2. Najčešće citirane publikacije D. Cvetkovića u periodu 2003 – 2007

Univerzitetska biblioteka "Svetozar Marković" je 5. januara 2008. godine izradila bibliografiju naučnih radova koji u periodu 2003 - 2007. citiraju naučne radove i knjige akademika Dragoša Cvetkovića. Korišćena je baza podataka Science Citation Index, koja sadrži citiranja isključivo u časopisima sa liste (SCI-lista) koju sama kreira.

Bibliografija sadrži ukupno 791 citat, pri čemu su izostavljeni autocitati.

Najviše je citirana Cvetkovićeva naučna monografija "Spectra of Graphs" u sva tri engleska izdanja [1], [2], [3].

prvo izdanje [1],	226 citata
drugo izdanje [2],	20 citata
treće izdanje [3],	125 citata
ukupno	371 citat

Značajno su citirane i druge dve monografije<sup>1</sup>:

"Recent Results in the Theory of Graph Spectra" [4]	41 citat
"Eigenspaces of Graphs" [5]	72 citata

Dakle, knjige [1] - [5] su citirane ukupno 484 puta.

Cvetkovićeви naučni radovi objavljeni u inostranim časopisima citirani su 169 puta. Citirano je ukupno 27 radova. Navodimo podatke za pet najviše citiranih ovakvih radova:

rad [6]	22 citata
rad [7]	11 citata
rad [8]	10 citata
rad [9]	27 citata
rad [10]	13 citata

Cvetkovićeви naučni radovi objavljeni u domaćim časopisima citirani su 92 puta. Citirano je ukupno 37 radova. Navodimo podatke za pet najviše citiranih ovakvih radova:

<sup>1</sup>U knjizi "Iracionalno u racionalnom" naveden je spisak od 112 publikacija koje citiraju knjigu "Recent Results" do 2004. godine i spisak od 137 publikacija koje citiraju knjigu "Eigenspaces of Graphs" u periodu 1998-2009.



rad [11]	12 citata
rad [12]	7 citata
rad [13]	6 citata
rad [14]	8 citata
rad [15]	5 citata

U bibliografiji postoji 47 citiranja radova koji se ne mogu identifikovati kao Cvetkovićevi radovi.

### Reference

1. Cvetković D., Doob M., Sachs H., *Spectra of Graphs - Theory and Application*, Deutscher Verlag der Wissenschaften - Academic Press, Berlin - New York, 1980.
2. Cvetković D., Doob M., Sachs H., *Spectra of Graphs - Theory and Application*, Deutscher Verlag der Wissenschaften - Academic Press, Berlin - New York, second edition.
3. Cvetković D., Doob M., Sachs H., *Spectra of Graphs - Theory and Applications*, III revised and enlarged edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg – Leipzig, 1995.
4. Cvetković D., Doob M., Gutman I., Torgašev A., *Recent Results in the Theory of Graph Spectra*, North Holland, Amsterdam, 1988.
5. Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *Eigenspaces of Graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
6. Cvetković D., Gutman I., *Note on branching*, Croat. Chem. Acta, 49(1977), 115-121.
7. Cvetković D., Petrić M. *A table of connected graphs on six vertices*, Discrete Math., **50**(1984), No. **1**, 37-49.
8. Cvetković D., Rowlinson P., *Spectra of unicyclic graphs*, Graphs and Combinatorics, **3**(1987), 7-23.
9. Cvetković D., Rowlinson P., *The largest eigenvalue of a graph - a survey*, Linear and Multilinear Algebra, **28**(1990), 3-33.
10. Caporossi G., Cvetković D., Gutman I., Hansen P., *Variable neighborhood search for extremal graphs*, 2. *Finding graphs with extremal energy*, J. Chem. Inform. Comp. Sci., **39**(1999), 984-996.
11. Cvetković D., *Graphs and their spectra (Thesis)*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. **354**-No. **356**(1971), 1-50.
12. Cvetković D., Gutman I. *The algebraic multiplicity of the number zero in the spectrum of a bipartite graph*, Mat. Vesnik **9(24)**(1972), 141-150.
13. Gutman I., Cvetković D., *The reconstruction problem for characteristic polynomials of graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., No.

498-No. 541(1975), 45-48.

14. Bussemaker F. C., Cvetković D., *There are exactly 13 connected, cubic, integral graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., No. 544-No. 576(1976), 43-48.

15. Cvetković D., Simić S., *Graph theoretical results obtained by the support of the expert system "Graph"*, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math., 107(1994), No.19, 19-41.

### 11.3. Indeksi citiranosti

U mesečnom dodatku NIT (Nauka – Informatika – Tehnologija) za februar 2012 (1.2.2012) dnevni list "Politika" objavio je tekst "Najbolji srpski naučnici danas" novinara Stanka Stojiljkovića. Za svaku naučnu disciplinu naveden je naučnik iz Srbije sa najvećim indeksima citiranosti  $g$  i  $h$ . Navodi se da je akademik Dragoš Cvetković uveliko isprednjačio u matematičkim naukama sa  $g = 64$  i  $h = 27$ .

Po definiciji, istraživač ima  $h$ -indeks jednak  $k$  ako je  $k$  najveći broj njegovih radova (ili knjiga) koji su citirani svaki po  $k$  puta.

Slično tome, istraživač ima  $g$ -indeks jednak  $k$  ako je  $k$  najveći broj njegovih radova (ili knjiga) koji su citirani ukupno  $k^2$  puta.

Iz definicije sledi da je  $g \geq h$ .

U slučaju profesora Cvetkovića može se zaključiti da je ukupan broj citiranja njegovih radova i knjiga veći od  $64^2 = 4096$ .

Takođe izlazi da profesor Cvetković ima bar 27 publikacija od kojih je svaka citirana bar 27 puta.

## 12. Spisak stručnih radova

### Posebni radovi

1. Cvetković D., *Šah kao sredstvo za vaspitavanje naučnog načina mišljenja*, (Uloga šaha u našem društvu, Materijali za diskusiju sa I kolokvija o jugoslovenskom šahu, Zagreb 1967), 38-45.
2. Cvetković D., *Teorija grafova - disciplina koja je više problema postavila nego što ih je rešila*, Matematička biblioteka, br. 42, Beograd 1970, 121-137.
3. Cvetković D., *Teorija grafova u nastavi matematike*, (Zajednica viših škola SR Srbije, Stručna sekcija za matematiku, Zbornik predavanja održanih na VI seminaru u Prizrenu 1978. god., Beograd 1978), 31-46.
4. Cvetković D., *Teorija grafova u nastavi matematike*, Matematika, **8**(1979), No. 2, 17-27.
5. Cvetković D., *Contributions of Yugoslav authors to the development of the graph theory*, Scientia Yugoslavica, **5**(1979), No. 1-4, 93-121.
6. Cvetković D., *Vrednovanje matematičkih radova*, Saopšteno u Matematičkom institutu, Beograd, 1982. Objavljeno u knjizi: Cvetković, D., *Matematičke varijacije*, Libra produkt, Beograd, 1998, 82-85.
7. Cvetković D., Gutman I., Pisanski T., *A list of mathematical publications in graph theory of Yugoslav authors up to 1982*, Proc. Eighth Yugoslav. Sem. on Graph Theory, Novi Sad, April 17-18, 1987, ed. R. Tošić, D. Acketa, V. Petrović, R. Doroslovački, Univ. Novi Sad, Institute for Mathematics, Novi Sad, 1989, 148-172.  
**RŽ Mat** 1991, 6V579.
8. Cvetković D., *Teorija spektara grafova - teorija u kojoj se na specifičan način prepliću matematika i kompjuterske nauke*, Glas SANU, **353**(1988), No. 52, 161-171.

MR 90f: 05095; Zbl. 721, 05045.

9. Cvetković D., *Neuronske mreže i težinski grafovi*, Materijali seminara "Neuralne mreže u računarskoj tehnici", Beograd, Sava Centar, 20-21 decembar 1990, 1-6. Objavljeno u knjizi: Cvetković, D., *Matematičke varijacije*, Libra produkt, Beograd, 1998, 134-139.

10. Cvetković D., *Kombinatorna optimizacija u telekomunikacijama*. Saopšteno na naučnom skupu "Stanje i trendovi u obradi, prenosu i zaštiti informacija", Klub Vojske Jugoslavije, Beograd, 14.12.1992. Objavljeno u knjizi: Cvetković D., *Iracionalno u racionalnom*, Akademska misao, Beograd, 2011, 165-172.

11. Cvetković D., *Teorija grafova, diskretna matematika i računari*, Glas SANU, **381**(1996), No. 58, 61-83.

12. Cvetković D., Lutovac T., *A review of the Publications of the Faculty of Electrical Engineering, Series: Mathematics and Physics (1956-1982)*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **9**(1998), 3-6.

13. Cvetković D., Ješić S., *Publications of the Faculty of Electrical Engineering, Series: Mathematics and Physics. Author and Subject Index (1956-1982)*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **10**(1999), 87-94.

14. Cvetković D., Mihailović B., Radosavljević Z., Rašajski M., *A review of the Publications of the Faculty of Electrical Engineering, Series: Mathematics (1990-2007)*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **18**(2007), 68-76.

15. Cvetković D., Mihailović B., Radosavljević Z., Rašajski M., *Graph Theory in Publications of the Faculty of Electrical Engineering, Series Mathematics and Series Mathematics and Physics*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **18**(2007), 77-80.

16. Cvetković D., *On Blossoms, Orchid Gardens, Cocktail Parties and Windmills*, 2009, CD-D.C. Objavljeno u knjizi: Cvetković D., *Iracionalno u racionalnom*, Akademska misao, Beograd, 2011, 154-161.

17. Cvetković D., *Teaching linear algebra using a combinatorial approach*, Zbornik radova, Simpozijum matematika i primene, 27. i 28. maj 2011., Beograd, 2011, 19-28.

## Tekstovi u knjigama drugih autora

1. Mitrinović D. S., *Matematika II u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima*, II izdanje, Beograd 1967 (saradnik u izradi knjige).
2. Mitrinović D. S., *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka I*, III izdanje, Beograd 1971 (saradnik u izradi knjige).
3. Mitrinović D. S., *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima III*, Beograd 1972 (saradnik u izradi knjige).
4. Mitrinović D. S., *Matrice i determinante*, Beograd 1972 (napisao nekoliko priloga).
5. Mitrinović D. S., *Matematika II u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima*, III izdanje, Beograd 1972 (saradnik u izradi knjige).
6. Mitrinović D. S., Mihailović D., Vasić P. M., *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija*, VI izdanje, Beograd 1973 (izradio odeljke 1.9., 2.4. i 2.7.).
7. Mitrinović D. S., *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka I*, IV izdanje, Beograd 1973 (saradnik u izradi knjige).
8. Vasić P. M., *Zadaci i problemi iz teorije verovatnoće*, Beograd, 1974 (sastavio i rešio zadatak na str. 58-61).
9. Mitrinović D. S., Mihailović D., Vasić P. M., *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija*, VII izdanje, Beograd 1975 (izradio odeljke 1.9., 2.4. i 2.7.).
10. Mitrinović D. S., *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima III*, II izdanje, Beograd 1976 (saradnik u izradi knjige).
11. Kečkić J. D., *Matematika za farmaceute, medicinare, hemičare i biologe*, Beograd 1977 (izradio Glavu četvrtu i dodatak za ovu glavu).
12. Mitrinović D. S., *Matematika II u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima*, IV izdanje, Beograd 1977 (saradnik u izradi knjige).
13. Mitrinović D. S., *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka I*, V izdanje, Beograd 1978 (saradnik u izradi knjige).
14. Mitrinović D. S., Mihailović D., Vasić P. M., *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija*, VIII izdanje, Beograd 1978 (izradio odeljke 1.9., 2.4. i 2.7.).
15. Mitrinović D. S., Mihailović D., Vasić P. M., *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija*, IX izdanje, Beograd 1979 (izradio odeljke 1.9., 2.4. i 2.7.).
16. Kečkić J. D., *Matematika za farmaceute, medicinare, hemičare i biologe*, II izdanje, Beograd 1981 (izradio Glavu četvrtu i dodatak za ovu glavu).

17. Mitrinović D. S., *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka I*, VI izdanje, Beograd 1982 (saradnik u izradi knjige).
18. Mitrinović D. S., *Matematika II u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima*, V izdanje, Beograd 1982 (saradnik u izradi knjige).
19. Vasić P. M., *Zadaci i problemi iz teorije verovatnoće*, II izdanje, Beograd, 1982 (sastavio i rešio zadatak na str. 58-61).
20. Mitrinović D. S., Mihailović D., Vasić P. M., *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija*, X izdanje, Beograd 1983 (izradio odeljke 1.9., 2.4. i 2.7.).
21. Mitrinović D. S., Mihailović D., Vasić P. M., *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija*, XI izdanje, Beograd 1985 (izradio odeljke 1.10., 2.4. i 2.7.).
22. Mitrinović D. S., *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka I*, VII izdanje, Beograd 1986 (saradnik u izradi knjige).
23. Mitrinović D. S., *Matematika II u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima*, VI izdanje, Beograd 1987 (saradnik u izradi knjige).
24. Hotomski P., Pevac I., *Matematički i programski problemi veštačke inteligencije u oblasti automatskog dokazivanja teorema*, Naučna knjiga, Beograd 1988 (izradio odeljak 0.3 i napisao predgovor).
25. Mitrinović D. S., Mihailović D., Vasić P. M., *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija*, XII izdanje, Beograd 1988 (izradio odeljke 1.10., 2.4. i 2.7.).
26. Mitrinović D. S., *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka I*, VIII izdanje, Beograd 1989 (saradnik u izradi knjige).
27. Mitrinović D. S., *Matematika II u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima*, VII izdanje, Beograd 1989 (saradnik u izradi knjige).
28. Mitrinović D. S., Mihailović D., Vasić P. M., *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija*, XIII izdanje, Beograd 1990 (izradio odeljke 1.10., 2.4. i 2.7.).
29. Hotomski P., Pevac I., *Matematički i programski problemi veštačke inteligencije u oblasti automatskog dokazivanja teorema*, II izdanje, Naučna knjiga, Beograd 1991 (izradio odeljak 0.3 i napisao predgovor).

## Prevodi

1. Sachs H., *Razmišljanja o razvoju teorije konačnih grafova*, Matematika **3**(1974), br. 2, 5-20 (prevod sa nemačkog).

2. Šokarovski R., *A generalized direct product of graphs*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **22(36)**(1977), 267-269 (prevod sa makedonskog).

## Postavljeni problemi

1. Cvetković D., *Problems 2, 3* (Graphs, Hypergraphs and Applications, Proc. Conf. Graph Theory Held in Eyba, October 1984, ed. Sachs H., Teubner, Leipzig, 1985), 211.
2. Cvetković D., *Problem*, Ars Combinatoria B, **20**(1985), 286.

## Rešenja problema

1. Mitrinović D. S., *Zbirka zadataka iz matematike za prvi stepen nastave na fakultetima*, Beograd, 1962 (str. 459, zadatak 77, rešenje 3).
2. Mitrinović D. S., *Zbornik matematičkih problema I*, treće izdanje, Beograd, 1962 (str. 51, zadatak 130).
3. Mitrinović D., Kečkić J. D., *Algebra - zbirka problema*, Beograd, 1969 (str. 384, zadatak 34).
4. Problem 5713, Amer. Math. Monthly, **78**(1971), 205-206.
5. Problem E 2392, Amer. Math. Monthly, **83**(1976), 379-382.

## Projekti i studije

1. Cvetković D., Kraus L., *"Graph" an expert system for the classification and extension of the knowledge in the field of graph theory, User's manual*, Elektrotehnički fakultet Beograd, 1983.
2. Cvetković D., *Određivanje  $k(k > 1)$  najkraćih putanja trgovačkog putnika u potpunom orijentisanom grafu sa asimetričnom matricom težina grana*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1985.

3. Cvetković D., *M trgovačkih putnika u potpunom orijentisanom grafu sa asimetričnom matricom težina grana*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1986, 1-30.
4. Cvetković D., *M trgovačkih putnika u potpunom orijentisanom grafu sa asimetričnom matricom težina grana trakaste strukture*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1986.
5. Cvetković D., *Adaptivno rešavanje problema trgovačkog putnika*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1987, 1-48.
6. Cvetković D., *Veza između globalnog i lokalnog rešenja problema trgovačkog putnika*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1987, 1-11.
7. Cvetković D., *Određivanje najkraće korenske orijentisane šume*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1987, 1-20.
8. Cvetković D., *Analiza jedne klase linearnih automata*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1987, 1-11.
9. Cvetković D., *Kombinatorni algoritmi i heuristike za grupisanje tačaka hiperkuba, I Identifikacija relevantnih rezultata u teoriji grafova i kombinatorici*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1988, 1-32.
10. Cvetković D., *Kombinatorni algoritmi i heuristike za grupisanje tačaka hiperkuba, II Idejna razrada grafovskih algoritama i heuristika za grupisanje tačaka hiperkuba*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1988, 1-39.
11. Cvetković D., *Kombinatorni algoritmi i heuristike za grupisanje tačaka hiperkuba, III Eksperimenti sa predloženim algoritmima i heuristikama*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1988, 1-53.
12. Cvetković D., *Kombinatorni algoritmi i heuristike za grupisanje tačaka hiperkuba, IV Definitivna razrada algoritama i heuristika i idejni projekat implementacije*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1988, 1-34.
13. Cvetković D., Jakovljević Atijas D., Kolar D., Pevac I., Radosavljević Z., *Idejni projekat dogradnje dokazivača teorema u sistemu "GRAPH"*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1988, 1-53.
14. Cvetković D., Simić S., *Idejni projekat programskog sistema za rešavanje problema trgovačkog putnika*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1989, 1-26.
15. Cvetković D., Simić S., Čangalović M., *Radna dokumentacija i izveštaj o testiranju za prvu fazu implementacije programskog sistema za problem trgovačkog putnika*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1990, 1-29+CCVI.
16. Cvetković D., Simić S., Kraus L., Čangalović M., *Radna dokumentacija i*



*izveštaj o testiranju za drugu fazu implementacije programskog sistema za problem trgovačkog putnika*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1990, 1-38+ CC-CXLIII.

**17.** Cvetković D., Čangalović M., Kraus L., Simić S., *Radna dokumentacija i izveštaj o testiranju za treću fazu implementacije programskog sistema za problem trgovačkog putnika*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1990, 1-39+ CC-CLXXXII.

**18.** Cvetković D., Čangalović M., Kraus L., Simić S., *Programski sistem SALES-MAN, Priručnik za programera*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1990, 1-90.

**19.** Cvetković D., Čangalović M., Kraus L., Simić S., *Programming system SALES-MAN, User's guide*, elaborat, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1990, 1-62.

## Prikazi u referativnim i drugim časopisima

### Mathematical Reviews

45: 1799, 6677, 6678, 8533;	82h: 05020;
46: 7073;	82k: 05034, 05089, 05093;
48: 143, 1992, 7560;	83b: 05063, 05070;
49: 63, 4854, 8896;	83d: 05072;
50: 8635;	83e: 05082; 83e: 05082;
51: 5361, 5365, 5372,	83m: 05097, 05099;
7946, 12555;	84a: 05048, 05050;
52: 7948;	84e: 05072, 05073;
53: 2740, 5376;	84f: 05004, 05068;
54: 10056, 10064, 10074, 10081;	84g: 05090;
55: 155, 156, 7824, 7842;	84h: 05090;
57: 2952, 2972, 16117, 18047;	84i: 05047;
58: 317, 3767, 5369, 5381, 10548,	84j: 05079, 05080, 15007;
16371, 21833;	85a: 05054;
80b: 05042;	91m: 05130, 05131;
81a: 05070, 05090, 05091;	92f: 05069, 05070;
81e: 05097, 05100;	92g: 05131;
81j: 05085;	93a: 01035;
81m: 05096;	93c: 05118;
82a: 05063;	93d: 05108;

93m: 68156;	99g: 05129, 05130;
95e: 05081, 05082;	99k: 05122;
96b: 05106, 05113;	2000j: 05076, 05079;
96h: 05135;	2001b: 05138;
96i: 05115;	2001f: 05094;
96m: 05011;	2001i: 05163;
97d: 05194, 05205;	2002b: 05101;
97e: 05141, 05144, 05148;	2002d: 05082, 05083;
97h: 05124	2002g: 03021;
97m: 05176, 05177;	2002j: 05141;
98g: 05095, 05096, 05098;	2002k: 05148;
98h: 05132;	2003b: 05108;
99c: 05136;	

## Zentralblatt für Mathematik

291: 05111;	542: 05046;
315: 05125,05127;	546: 05041;
344: 05164;	548: 05041, 05042;
346: 05101;	559: 05040;
358: 05030;	585: 05022, 05023;
376: 05050;	591: 05051;
377: 05040;	598: 05049;
391: 05050;	644: 05037, 05038;
392: 05055;	657: 05056;
404: 05044, 05045;	658: 05059;
425: 05048;	661: 05041;
439: 05032;	0666.05056;
454: 05045;	0668.05047;
461: 05056;	0671.05052;
467: 05060;	0695.05046;
475: 05072;	0677.05058;
482: 05048;	0678.05038;
493: 05034;	0678.05037;
511: 05044;	0695.05044;
524: 05044;	0695.05043;
526: 05038;	0701.05038;
541: 05042;	0711.05032;

0722.05055; 0837.05056;  
0724.05043; 0837.05028;  
0711.05034; 0846.05060;  
0711.05033; 0846.05059;  
0723.05083; 0846.05058;  
0737.05067; 0846.05057;  
0746.05064; 0867.05047;  
0746.05063; 0857.05048;  
0765.05072; 0857.05034;  
0765.05069; 0885.05012;  
0765.05068; 0941.05043 (01069964);  
0765.05071; 0862.05079;  
0776.05077; 0862.05053;  
0776.05076; 0942.05037 (01481707);  
0776.05073; 0908.05042 (01161310);  
0776.05044; 0941.05044 (01226401);  
0786.05058; 0942.05052 (01069966);  
0796.05076; 1007.05059 (01873254);  
0786.05059; 0942.05042 (01484336);  
0786.05056; 0946.05041 (01390134);  
0786.05055; 0961.05050 (01557764);  
0792.05100; 0965.05023 (01548368);  
0792.05094; 0968.05052 (01615332);  
0796.05075; 1008.05090 (01876957);  
0796.05068; 1008.05049 (01877035);  
0802.05054; 0945.05041 (01436071);  
0802.05053; 0946.05080 (01512194);  
0808.05088; 0946.05068 (01512193);  
0808.05072; 0867.05046;  
0808.05071; 0872.05033;  
0821.05040; 0873.05065;  
0821.05007; 0876.05069;  
0820.05062; 0881.05044;  
0821.05023; 0881.05086;  
0837.05084; 0881.05087;  
0837.05081; 0883.05096;

0894.05042 (01110045); 0946.05042 (01416929);  
0905.05052 (01156623); 0947.05030 (01436158);  
0942.05051 (01483995); 0952.05046 (01462290);  
0942.05036 (01482918); 0952.05045 (01417408);  
0946.05058 (01512168); 0953.05044 (01462174);  
0949.90003 (01482919); 0953.05043 (01463398);  
1009.93508 (01897024); 0958.05049 (01496580);  
01929292; 0960.05068 (01522337);  
0894.05041 (01109491); 0961.05026 (01501957);  
0901.05069 (01135965); 0961.05025 (01496418);  
0901.05068 (01121504); 0964.05041 (01522764);  
0905.05053 (01151814); 0964.05040 (01491666);  
0905.05051 (01150013); 0968.05054 (01615361);  
0913.05072 (01229767); 0968.05053 (01615362);  
0913.05071 (01219775); 0972.05033 (01571007);  
0914.05051 (01210372); 0972.05032 (01522751);  
0914.05050 (01218470); 0978.05054 (01588091);  
0940.05044 (01370165); 0989.05076 (01746416);  
0942.05038 (01483996); 0997.05063 (01823783);  
0974.05053 (01228575); 0997.05061 (01823892);  
1007.05007 (01868881); 1007.05010 (01868919);  
1008.05097 (01877027); 1007.05009 (01868918);  
1008.05096 (01877024); 0972.05021 (01567135);  
0932.05053 (01309113); 0978.05050 (01586478);  
0933.05100 (01332854); 0984.05058 (01594813);  
0933.05099 (01331380); 0984.05057 (01614338);  
0934.05088 (01332852); 0984.05038 (01652515);  
0940.05045 (01367979); 0987.05031 (01660692);  
0940.05043 (01356444); 0995.05140 (01695535);  
0940.05042 (01374938); 0995.05024 (01660990);  
0997.05059 (01823807); 1002.05048 (01758611);  
0999.05070 (01643491); 1008.05102 (01775038);  
1004.05041 (01732245); 1008.05101 (01791995);  
0995.05072 (01701500); 1008.05100 (01786671);  
1001.05080 (01761955); 0892.05029 (01088276);

Mededelingen van het wiskundig genootschap

19(1976), No. 5, 163; 27(1984), No. 1, 21-22, 22  
20(1977), No. 8, 267; 28(1985), No. 1, 29-30

21(1978), No. 5, 180-181    40(1997), No. 7, 255-256  
 23(1980), No. 6, 225-226

Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat.

2(1991), 110                      4(1993), 129-130  
 3(1992), 75                        11(2000), 109

Yugoslav Journal of Operations Research

10(2000), No. 2, 303-304            12(2002), No. 1, 132  
 11(2001), No. 2, 268                21(2011), No. 2, 325-327

## Recenzije

Izvršeno je nekoliko stotina recenzija radova podnetih za objavljivanje u sledećim i drugim časopisima:

Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz.;

Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat.;

Applicable Analysis and Discrete Mathematics;

Publ. Inst. Math. (Beograd);

Matematički Vesnik;

Yugoslav Journal of Operations Research;

Zbornik radova, PMF, Novi Sad;

Radovi matematički;

Mathematica Balkanica;

J. Combinatorial Theory;

J. Graph Theory;

Discrete Math.;

Discrete Appl. Math.;

Combinatorica;

Ars Combinatoria;

J. Algebraic Combinatorics;

European J. Combinatorics;

Graphs and Combinatorics;

Linear Algebra and Applications;

Linear and Multilinear Algebra.

Recenzija naučno-istraživačke teme *Projektovanje štampanih veza elektronskih kola pomoću računara*, autor A. Jovanović i saradnici, za SIZ za naučni rad AP Vojvodine, 1979.

Recenzija naučno - istraživačkog zadatka br. 133 *Algoritmi teorije grafova*, 4. deo, autor V. Batagelj i saradnici, za Institut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana 1984.

Recenzija naučno - istraživačkog zadatka br. 134 *Algebarska teorija grafova*, autor D. Marušić, za Institut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana 1984.

Recenzija naučno - istraživačkog zadatka br. 135 *Grafovi simplicijalnih kompleksa*, 4. deo, autor B. Mohar i saradnici, za Institut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana 1984.

Recenzija naučno - istraživačkog zadatka br. 136 *Invarijante grafova*, 2. deo, autor T. Pisanski i saradnici, za Institut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana 1984.

Recenzija knjige: Hotomski D., Pevac I., *Matematički i programski aspekti veštačke inteligencije u oblasti automatskog dokazivanja teorema*, Naučna knjiga, Beograd, 1988.

Recenzija knjige: Veljan D., *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

Recenzija naučno - istraživačkog zadatka *Konstrukcija grafova*, II deo, autor V. Batagelj i saradnici, Ljubljana 1990.

Recenzija naučne monografije *Digitalna obrada i prepoznavanje signala*, editori M. Obradović, M. Milosavljević, Univerzitet Vojske Jugoslavije, Beograd, 1993.

Recenzija knjige *Priručnik za polaganje prijemnog ispita iz matematike na fakultetima*, autor S. Mitrović, Beograd, 1994.

Recenzija naučne monografije *Digitalna obrada govornog signala*, editori M. Obradović, V. Milošević, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1996.

Recenzija knjige *Matematika za studente biotehničkih fakulteta*, autor S. Mitrović, Šumarski fakultet, Beograd, 1997.

Recenzija naučne monografije *Optimalno upravljanje saobraćajem, signalisana raskrsnica*, autor S. Guberinić, Društvo operacionih istraživača Jugoslavije, Beograd, 2001.

Recenzija naučne monografije *Spectrally constrained graphs*, autori M. Petrović, Z. Radosavljević, Faculty of Sciences, Kragujevac, 2001.

Recenzija knjige *Diskretna matematika, Zbirka rešenih zadataka*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2004.

## Javni nastupi

1. Cvetković D., *Odnos matematike i računarstva*, Savetovanje: *Matematika u tehnološkom razvoju zemlje*, Beograd, 16. aprila 1987, Matematički institut, Beograd 1988, 13-14.
2. Cvetković D., *Nekrolog profesoru D. Mihailoviću*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **2**(1991), 100-101 Zbl. 744, 01012.
3. Cvetković D. *Reč na sahrani prof. M. Milića*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **5**(1994), 59-60.
4. Cvetković D., *Reč na komemorativnoj sednici Elektrotehničkog fakulteta 4. 4. 1995 povodom smrti D. S. Mitrinovića*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **6**(1995), 5-7.

## Izdavački radovi

1. *Algebraic Graph Theory*, D. Cvetković, R. Merris, P. Rowlinson, eds., Linear and Multilinear Algebra, Special Issue, **39**(1995), No. 1-2.
2. *Algebraic Graph Theory*, D. Cvetković, W. Haemers, P. Rowlinson, eds., Linear Algebra Appl., Special Issue, **356**(2002).
3. *Special Issue Devoted to Papers Presented at the Aveiro Workshop on Graph Spectra*, D. Cvetković, W. Haemers, P. Rowlinson, eds., Linear Algebra Appl., Special Issue, **423**(2007), No. 1.
4. *Special Issue Devoted to Selected Papers Presented at the Workshop on Spectral Graph with Applications to Computer Science, Combinatorial Optimization and Chemistry (Rio de Janeiro, 2008)*, N. Abreu, D. Cvetković, I. Gutman, V. Nikiforov, eds., Linear Algebra Appl., Special Issue, **432**(2010), No. 9.

## Radovi u elektronskom obliku

1. Cvetković D., Lepović M., *A table of cospectral graphs with least eigenvalue at least  $-2$* , <http://www.mi.sanu.ac.rs/projects.htm/results1389.htm>, Objavljeno u knjizi: Cvetković D., *Iracionalno u racionalnom*, Akademska misao, Beograd, 2011, 173-196.

2. Aouchiche M., Bell F.K., Cvetković D., Hansen P., Rowlinson P., Simić S., Stevanović D., *Variable neighborhood search for extremal graphs*, 16. *Some conjectures related to the largest eigenvalue of a graph*, MEC-VNS: Mini Euro Conference on VNS, 2005 (on CD), 1-14.
3. Cvetković D., Davidović T., *Description of multiprocessor interconnection networks by graph invariants*, Proc. Symp. on Information Technology, YUINFO 2007, (on CD, 108.pdf), Kopaonik, March 11–14, 2007.
4. Cvetković D., CD–D.C., Dokumentacioni kompakt disk akademika Dragoša Cvetkovića, 2009.
5. Cvetković D., CD–D.C.-2, Dokumentacioni kompakt disk akademika Dragoša Cvetkovića, 2010.
6. Cvetković D., *Iracionalno u racionalnom*, 2009, CD-DC-2. Objavljeno u knjizi: Cvetković D., *Iracionalno u racionalnom*, Akademska misao, Beograd, 2011, 2-54.
7. Cvetković D., with collaborators T. Aleksić, S. Simić, D. Stevanović, Lj. Trajković, *Applications of graph spectra to computer science*, Research Report, 2010, CD-D.C.-2.
8. Cvetković D., *Spectral theory of graphs based on the signless Laplacian*, Research Report, 2010, CD-D.C.-2.
9. Cvetković D., CD–D.C.-3, Dokumentacioni kompakt disk akademika Dragoša Cvetkovića, 2011.



## 13. Prikaz dela stručnih radova

Korišćeni su redni brojevi iz spiska stručnih radova.

### Posebni radovi

1. U radu se ističu sličnosti između matematičkog i šahovskog načina mišljenja. Navode se primeri direktnog i indirektnog dokaza u šahu kao i primeri analitičkog i sintetičkog dokaza. Analiziraju se neki aspekti igranja šaha pomoću kompjutera.

2. Ovaj stručni rad predstavlja elementarni prikaz osnova teorije grafova. Date su definicije osnovnih pojmova teorije grafova, navedene su neke činjenice iz istorije ove teorije i opisane neke njene primene. Navedena su i 24 zadatka od kojih su neki rešeni. Citirane su osnovne monografije i druge važnije reference koje se odnose na teoriju grafova (19 jedinica).

3. U radu se ističe značaj formalne definicije grafa za nastavu matematike. Objašnjava se jezik teorije grafova kao jezik izomorfan jeziku teorije skupova ali ipak različit od ovog. Ukazuje se na najvažnije primene teorije grafova (elektrotehnika, hemija, kompjuterske nauke, operaciona istraživanja). Na kraju se objašnjavaju veze teorije grafova sa drugim matematičkim disciplinama a posebno sa linearnom algebrom.

4. Ovaj članak je preštampan iz Zbornika predavanja održanih na IV seminaru u Prizrenu 1978. godine Zajednice viših škola SR Srbije, Stručna sekcija za matematiku.

5. Opisuju se prilozi jugoslovenskih matematičara, inženjera i hemičara teoriji grafova. Kao glavne oblasti u ovom smislu navode se spektralna teorija grafova i njene primene u hemiji, grafovske jednačine i primene teorije grafova u linearnoj algebri.

**6.** Predlaže se jedan način vrednovanja matematičkih radova. Za ocenu jednog rada, koja se izražava brojem, bitni su pored takvih formalnih kriterijuma, kao što je činjenica gde je rad objavljen i dužina rada, i takvi kao što su originalnost rezultata i metoda, značaj dobijenih rezultata, stil izlaganja i dr. Ideja je da se za svaki od ovakvih i nekih drugih kriterijuma rad klasifikuje u jednu od tri grupe.

**7.** U listu su uključene publikacije matematičkog karaktera koje obrađuju teoriju grafova i kod kojih je bar jedan autor iz Jugoslavije (uključujući one koji žive u inostranstvu). Najstarija publikacija je iz 1944. godine a ukupan broj navedenih publikacija je 222.

**8.** (*Pristupno predavanje povodom izbora za dopisnog člana SANU objavljeno u glasniku SANU, CCCLIII, no. 52, 1988, 163 – 171, održano na sednici Odeljenja prirodno-matematičkih nauka SANU, 26.9.1986*) Cilj predavanja je da se sažetim prikazom sopstvenog naučnog rada ilustruju savremeni međusobni uticaji matematičkih i kompjuterskih nauka. U odeljku 1 se razvoj teorije grafova, i diskretne matematike uopšte, dovodi u vezu s pojavom kompjutera i razvojem kompjuterskih nauka. Teorija spektara grafova skicirana je u odeljku 2 kao teorija koja svojim spektralnim tehnikama obezbeđuje jedan opšti metod za tretiranje problema s grafovima. Odeljak 3 je posvećen opisu interaktivnog programskog sistema "Graph", ekspertnog sistema za istraživanja u teoriji grafova uopšte, i u teoriji spektara grafova posebno. U odeljku 4 se ukazuje na moguća proširenja teorije spektara grafova koja bi mogla da bace novo svetlo ne samo na probleme teorije grafova već i na neke važne probleme kompjuterskih nauka (problem egzistencije polinomijalnog algoritma za *NP*-teške probleme). Neka zapažanja o ponašanju matematičara u uslovima uzajamne konvergencije matematike i kompjuterskih nauka su opisana u odeljku 5.

**9.** U ovom predavanju se opisuju veze teorije neuronskih mreža i teorije grafova. Težinski grafovi su odgovarajući matematički model za razne vrste fizičkih mreža (električne, telekomunikacione, mreže računara, mreže puteva itd.) pa se to odnosi i na neuronske mreže. Razni optimizacioni problemi s težinskim grafovima, poznati pod opštim nazivom problemi kombinatornih optimizacija, mogu se rešavati uz pomoć neuronskih mreža. Diskutuje se mogućnost upotrebe neuronskih mreža u prepoznavanju problema velike algoritamske kompleksnosti.

**10.** Ekstremalni zadaci na diskretnim skupovima nazivaju se kombinatorne optimizacije. Ovakvi zadaci se na prirodan način formulišu pomoću težinskih grafova. S druge strane, težinski grafovi su matematički modeli fizičkih mreža. Navode se primeri kombinatornih optimizacija koji su od interesa u telekomunikacijama. Izlažu se osnovne ideje za razvoj jednog programskog paketa za težinske grafove.

**11.** (*Pristupna beseda povodom izbora za redovnog člana SANU objavljena u Glasu SANU, CCCLXXXI, no. 58, 1996, 61 – 83, čiji su delovi pročitani na Svečanom skupu SANU 29.5.1995.*) Teorija grafova je deo diskretne matematike. Diskretna matematika je, s jedne strane, matematika konačnih i beskonačnih prebrojivih skupova a, s druge strane, je matematika računarskih nauka. Računari su važno sredstvo u istraživanjima u diskretnoj matematici a posebno u teoriji grafova. Predstavljanjem odabranih sopstvenih rezultata u teoriji grafova i drugim oblastima diskretne matematike ističu se specifičnosti metoda rešavanja problema diskretne prirode ali istovremeno afirmišu jedinstvenost matematike. Takođe se u svetlu sopstvenih istraživanja ukazuje na interakciju diskretne matematike i računarstva.

**12.** Navode se statistički i drugi podaci o sadržini časopisa *Publications of the Faculty of Electrical Engineering, Series Mathematics and Physics (1956-1982)*.

**13.** Predstavljen je indeks autora i predmetni indeks za časopis *Publications of the Faculty of Electrical Engineering, Series Mathematics and Physics (1956-1982)* zajedno sa nekim komentarima.

**14.** Ovaj članak sadrži indeks autora i neke statističke podatke za *Publications of the Faculty of Electrical Engineering, Series Mathematics*, brojevi 1-18, tj. u periodu od obnavljanja časopisa 1990. godine do 2007.

**15.** Rad daje pregled i neke podatke o zastupljenosti teorije grafova u *Publications of the Faculty of Electrical Engineering, Series Mathematics and Physics (1956-1982)* i u *Series Mathematics (1990-2007)*.

**16.** Opisane su elementarne osobine i osnovne relacije između različitih klasa grafova koje se često pojavljuju u mojim naučnim radovima. Rad je posvećen mojoj supruzi Nevenki Cvetković povodom petnaeste godišnjice našeg braka u junu 2009. godine.

**17.** Izlažu se osnovne ideje zasnivanja teorije matrica kombinatornim sredstvima, tj. sredstvima teorije grafova. Takav pristup je primenjen u nedavno objavljenoj knjizi: Brualdi R.A., Cvetković D., *A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Applications*, CRC Press, Boca Raton, 2008, a takođe u ranijoj knjizi: Cvetković D., *Kombinatorna teorija matrica sa primenama u elektrotehnici, hemiji i fizici*, Naučna knjiga, Beograd, 1980; II izdanje, 1987; III izdanje, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011. Predstavljaju se specijalno izrađeni slajdovi za visokoškolsku nastavu linearne algebre (definicija i osobine determinanata, operacije sa matricama, sistemi linearnih algebarskih jednačina i dr.). Kombinatorno zasnivanje teorije matrica je inspirisano tehnikom grafova toka signala (signal flow graphs) koja se koristi u elektrotehnici. Grafovski pristup omogućava tretiranje

široke klase problema u linearnoj algebri, počevši od najelementarnijih pa sve do složenih istraživačkih problema.

## Projekti i studije

1. Ovo je uputstvo za korišćenje ekspertnog sistema "Graph". Opisane su sve instrukcije koje stoje na raspolaganju korisniku kao i akcija sistema koja je izazvana tim instrukcijama.

## Komentar stručnih radova

Spisak stručnih radova sadrži veliku većinu mojih tekstova ove vrste ali sigurno ne sve. Razlozi za ovakvu situaciju su sledeći.

1) U odeljku "Projekti i studije" se nalaze nepublikovani<sup>1</sup> izveštaji rada na mnogobrojnim projektima u kojima sam učestvovao. Uključeni su samo najvažniji tekstovi.

2) Bilo je nemoguće notirati sve prikaze radova, knjiga i konferencija koje sam napisao za razne časopise i u različitim povodima.

3) Spisak tekstova u elektronskom obliku je veoma teško sastaviti zbog nestalnosti Internet adresa i (ne)dostupnosti kompakt diskova na kojima se nalaze.

4) U spisak nisu uključeni moji tekstovi objavljeni u mojim knjigama kao izdvojeni prilozi.

Veliki deo mog naučnog opusa prikazan je u obliku pristupačnom široj naučnoj javnosti u pristupnim predavanjima koje je sam održao povodom izbora u Srpsku akademiju nauka i umetnosti: za dopisnog člana 1985. godine i redovnog člana 1994. godine. Ova dva predavanja, "Teorija spektara grafova – teorija u kojoj se na specifičan način prepliću matematika i kompjuterske nauke" i "Teorija grafova, diskretna matematika i računari", predstavljaju sadržaj radova [8] i [11]. Čitalac će tu, pre svega, naići na moju osnovnu struku – teoriju grafova ali takođe i na rezultate iz kombinatorike, teorije kodova, veštačke inteligencije, tj. opštije, diskretne matematike, uz jake veze s računarstvom.

---

<sup>1</sup>Veći deo ovih radova se može naći u mojoj arhivi. O arhivi videti poseban tekst u ovoj knjizi.

## 14. Jubilarno predavanje

### OSVRT NA GENEZU SPEKTRALNE TEORIJE GRAFOVA<sup>1</sup>

**Sadržaj**<sup>2</sup> Autor daje prikaz sopstvenog doprinosa fundiranju i razvoju spektralne teorije grafova. Krenuvši od rešavanja nekih šahovsko – matematičkih problema krajem šezdesetih godina prošlog veka, autor prepoznaje relevantnost Perron - Frobeniusove teorije nenegativnih matrica i uz niz sopstvenih doprinosa daje skicu spektralne teorije grafova u svojoj doktorskoj disertaciji "Grafovi i njihovi spektri" 1971. godine. Pošto je skraćena verzija teze objavljena na engleskom jeziku u Publikacijama Elektrotehničkog fakulteta, Serija Matematika i fizika, ona je izazvala veliko interesovanje u stručnim krugovima. Između ostalog, američki matematičar Richard Bellman, u to vreme urednik Academic Press-a, predlaže Cvetkoviću objavljivanje monografije o spektralnoj teoriji grafova u sopstvenoj seriji knjiga. Do objavljivanja monografije "Spectra of Graphs - Theory and Application" je došlo 1980. godine uz saradnju Academic Press-a i nemačkog izdavača Deutscher Verlag der Wissenschaften (koautori M. Doob i H. Sachs). Bilo je nekoliko izdanja ove knjige, uključujući i prevod na ruski jezik, i ona je postala standardna referenca za ovu oblast. Do danas je u vezi spektralne teorije grafova objavljeno više hiljada naučnih radova uključujući one o primenama spektralne teorije grafova u hemiji, fizici i računarstvu.

Svakako da je ovakav trenutak prilika da se pogleda malo unazad, da se rekapitulira šta je urađeno i da se možda izvuku naknadni zaključci<sup>3</sup>.

Ja ću vrlo malo izlagati matematičke činjenice. To će više biti informacije o mom radu. Svi matematičari će moći da prate moja izlaganja a verujem da će to

---

<sup>1</sup>Predavanje održano 11.3.2011. povodom mog sedamdesetog rođendana. Isto predavanje sam održao 24.10.2011. u Institutu za fiziku i matematiku u Teheranu na engleskom jeziku.

<sup>2</sup>Ovaj sadžaj je distribuiran uz obaveštenje o održavanju predavanja.

<sup>3</sup>Ovaj tekst je sastavljen na osnovu video snimka predavanja. Mnoge rečenice izgovorene na predavanju su ovde zadržane. Podnaslovi su naknadno dodani

uspjeti i onima među vama koji nisu matematičari.

*Moji prvi naučni radovi*

Ja sam prve naučne radove objavio 1969. godine. Prvi na listi mojih radova su sledeći radovi

Cvetković D., *O rešavanju nekih transcendentnih jednačina*, Matematička biblioteka, br. 39, Beograd 1969, 111-123.

Cvetković D., *O sumiranju redova čiji je opšti član racionalna funkcija indeksa sumiranja*, Matematička biblioteka, br. 41, Beograd 1969, 157-178.

Cvetković D., *Transzendente Gleichungen deren Lösungen durch die inversen Funktionen der Funktion  $e^x/x$  ausdrückbar sind*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Math. Fiz., No. 320-No. 328 (1970), 15-26.

Publikacija u kojoj je objavljen prvi rad nije pravi naučni časopis. To je bila edicija "Matematička biblioteka" koju je izdavao profesor Dragoslav Mitrinović. Nekoliko svezaka je nosilo naslov "Uvođenje mladih u naučni rad" gde su i početnici mogli nešto da objave.

*Tematika mojih radova*

Počeo sam sa numeričkom matematikom i redovima, dakle, nekom vrstom matematičke analize, ali se već u prvim radovima pojavilo i nešto drugo - spektralna teorija grafova.

Moji radovi (ima ih preko 200 objavljenih) se uglavnom odnose na spektralnu teoriju grafova ali ima ih i iz mnogih drugih oblasti: (opšta, nespektralna) teorija grafova, klasična kombinatorika, kombinatorna optimizacija, linearna algebra, veštačka inteligencija, računarstvo, teorija električnih kola, hemija, matematička analiza, numerička matematika. Interesantno je da se pojavljuju radovi i iz teorije električnih kola. Ipak, nema sumnje, glavna tematika u mojim radovima je spektralna teorija grafova.

*Spektralna teorija grafova*

Ja ću ukratko da spomenem da je spektralna teorija grafova teorija u kojoj se grafovi proučavaju pomoću sopstvenih vrednosti neke matrice  $M$  koja se na određeni način pridružuje svakom grafu. Ova teorija se zove  $M$ -teorija. Najčešće upotrebljavane grafovske matrice su:  $A$  matrica susedstva,  $L = D - A$  Laplasova matrica i  $Q = D + A$  modifikovana Laplasova matrica, pri čemu je  $D$  dijagonalna matrica stepena čvorova.

Uvek volim da dam primer da vas podsetim na osnovne definicije. Na primer matrica susedstva grafa prikazanog na Sl. 1



Sl. 1

je data pomoću  $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ .

Za graf  $G$  na Sl. 1 dobijamo karakteristični polinom:

$$P_G(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 1.$$

Sopstvene vrednosti grafa  $G$  su nule karakterističnog polinoma, tj. 1.6180, 0.6180, -0.6180, -1.6180 ili

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Spektralna teorija grafova je nastala na pomalo čudan način. Prvi članak je bio iz kvantne hemije:

*E. Hückel, Quantentheoretische Beiträge zum Benzolproblem, Z. Phys. 70(1931), 204-286*

Prvi matematički rad je bio:

*L. Collatz<sup>4</sup>, U. Sinogowitz, Spektren endlicher Grafen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 21(1957), 63-77*

Mnogo godina kasnije je prepoznato da su te dve teorije u suštini iste.

1969. godine pojavili su se moji prvi radovi u vezi sa spektrima grafova. Tu je pre svega bio rad

Cvetković D., *Bihromatičnost i spektar grafa*, Matematička biblioteka, br. 41, Beograd 1969, 193-194.

Po definiciji, spektar grafa je simetričan ako važi sledeća implikacija: *ako je  $\lambda$  sopstvena vrednost višestrukosti  $k$  onda je takođe  $-\lambda$  sopstvena vrednost višestrukosti  $k$ .*

<sup>4</sup>L. Collatz je nemački matematičar poznat po radovima i knjigama iz numeričke matematike. Na spektre grafova je naišao baveći se aproksimativnim rešavanjem parcijalnih diferencijalnih jednačina (jednačina treperenja membrane).

Teorema parova, poznata iz hemijske literature, glasi: *Bihromatski graf ima simetričan spektar.*

Dokazao sam sledeću teoremu.

**Teorema:** *Graf je bihromatski ako i samo ako ima simetričan spektar.*

Jači rezultat sam dokazao u mojoj disertaciji 1971. godine.

**Teorema:** *Povezan graf je bihromatski ako i samo ako su najveća i najmanja sopstvena vrednost jednake po modulu ( $\lambda_{max} = -\lambda_{min}$ ).*

To je postala standardna osnovna lema a oba rada su veoma mnogo citirana, čak i u današnje vreme.

Ja sam ove teoreme dokazao korišćenjem Perron-Frobeniusove teorije nenegativnih matrica. To je vrlo jaka teorija. Obično se ne izlaže u kursovima za studente. Ona je grafovski obojena. Ja sam to na neki način prepoznao. Ipak dokazivanje navedenih teorema pomoću Frobeniusove teorije bilo je pucanje iz topova na vrapce.

#### *Kombinatorna teorija matrica*

Prepoznao sam da je Frobenisuova teorija relevantna za celu oblast spektara grafova. Posebno je tu delotvorna Frobenisuova teorema o spektru nenegativne ireducibilne matrice. Cela teorija je vrlo bliska teoriji grafova iako sam Frobenius toga nije bio svestan. To nije nikakvo čudo jer teorija grafova nije ni postojala u Frobeniusovo vreme. Prvi koji je prepoznao vezu te teorije sa grafovima je mađarski matematičar D. König 1916. godine.

D. König je 1936. godine je objavio prvu monografiju o teoriji grafova i to se smatra početkom teorije grafova. 1916. godine D. König je objavio prvi rad u kome se jedna teorema iz teorije matrica dokazuje pomoću grafova.

Frobenius je umro 1916. godine i u poslednjem njegovom radu koji je objavljen posle njegove smrti pojavljuje se fusnota u kojoj se kritički komentariše pomenuti König-ov rad. Kaže se da su grafovi nevažno pomoćno sredstvo. D.König je 1936. godine komentarisao ovu fusnotu. Rekao je da se autor knjige o grafovima ne može složiti sa tim konstatacijama.

Američki matematičar Hans Schneider je u istorijskom pregledu 1977. godine

H. Schneider, *The concept of irreducibility and full indecomposability of a matrix in the works of Frobenius, König and Markov*, Linear Algebra and Appl. 18 (1977), 139-162.

konstatovao veliku povezanost Frobeniusove teorije sa teorijom grafova i dao za pravo D. Königu. On je rekao da je neverovatno da je Frobenius, jedan od najvećih matematičara koji su živeli u dvadesetom veku, izrekao nešto što nije tačno. Danas je sasvim jasno da je teorija matrica grafovski obojena. Pogledajte, na primer,



šta se danas objavljuje u časopisu *Linear Algebra and Its Applications* pa ćete se uveriti da grafova u linearnoj algebri ima vrlo mnogo. Schneider<sup>5</sup> pretpostavlja da je pomenutu fusnotu u poslednjem radu Frobeniusa dopisao neki Frobeniusov saradnik.

1980. godine objavio sam knjigu

Cvetković D., *Kombinatorna teorija matrica sa primenama u elektrotehnici, hemiji i fizici*, Naučna knjiga, Beograd, 1980, 1987; Zavod za udžbenike, Beograd, 2011.

u kojoj je teorija matrica zasnovana i razvijena pomoću grafova.

1992. godine objavljena je knjiga

R. A. Brualdi, H. J. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991; reprinted 1992.

Ja sam 1993. godine sreo na jednoj konferenciji u Velikoj Britaniji Richard-a Brualdi-a i poklonio mu primerak moje knjige na srpskom jeziku. On se iznenadio, prijatno ili neprijatno, jer je ispalo da sam ja objavio knjigu sličnog naslova i sadržine 12 godina pre njega. Mi smo se kasnije udružili pa smo zajedno objavili knjigu

Brualdi R.A., Cvetković D., *A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Application*, CRC Press, Boca Raton, 2008.

u kojoj smo na istu temu ujedinili delove naših prethodnih knjiga.

Ovo je bila digresija o tome kako se teorija grafova koristi u linearnoj algebri. Vraćam se sada na osnovnu liniju izlaganja tj. na spektralnu teoriju grafova.

#### *Prvi kontakt sa spektrima grafova*

Iako sam prvi rad o spektrima grafova objavio 1969. godine, moj prvi kontakt sa spektrima grafova je bio u vezi sa radom

Cvetković D., *Die Zahl der Wege eines Grafen*, Glasnik Mat. Ser III, **5(25)**-(1970), 205-210.

---

<sup>5</sup>2010. godine održana je u Novom Sadu konferencija u čast osamdesetog rođendana H. Schneidera. Organizator je bila koleginica Ljiljana Cvetković (ne pripada mojoj porodici a Cvetković je vrlo često prezime). Bio sam pozvan na ovu konferenciju i na početku mog predavanja rekao sam nekoliko prigodnih reči. Istakao sam da je istorijski pregled H. Schneidera iz 1977. godine odigrao važnu ulogu u mom celokupnom radu.

koji je u zagrebačkom Glasniku objavljen sledeće 1970. godine<sup>6</sup>. U ovom radu sam rešio jedan matematički problem u vezi sa šahom a koji sam sreo u šahovskoj problemskoj literaturi: na koliko načina može šahovska figura kralj da izvede seriju od  $k$  poteza na šahovskoj tabli. Ovaj se problem sveo na prebrojavanje puteva u grafu pridruženom šahovskoj tabli. Rešio sam najpre problem za jednodimenzionalnu šahovsku tablu. Za šahiste, uzmite  $a$  liniju na tabli i posmatrajte kretanje kralja gore-dole po njoj. Potom sam na pogodan način to preneo na dvodimenzionalnu šahovsku tablu a kasnije to generalisao i na table većih dimenzija. Taj problem je bio povod - sredstvo pomoću kojeg sam došao i na grafove i na spektre grafova.

Problem sam rešio uz pomoć sledeće teoreme.

**Teorema:** *Ako je  $A$  matrica susedstva grafa, tada je element  $a_{ij}^{(k)}$  na mestu  $(i, j)$  matrice  $A^k$  jednak broju puteva dužine  $k$  koji počinju u čvoru  $i$  a završavaju se u čvoru  $j$ .*

Neka je  $G$  graf sa matricom susedstva  $A$  i neka je  $U = (u_{ij})$  jedna ortogonalna matrica sopstvenih vektora matrice  $A$ .

Tada je

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{s=1}^n u_{is} u_{js} \lambda_s^k.$$

Broj svih puteva  $N_k$  dužine  $k$  u  $G$  je dat formulom

$$N_k = \sum_{i,j} a_{ij}^{(k)} = \sum_{s=1}^n \left( \sum_{i=1}^n u_{is} \right)^2 \lambda_s^k.$$

Posmatrajmo put  $P_n$  sa  $n$  čvorova i matricom susedstva

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & O \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ O & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sopstvene vrednosti su  $\lambda_i = 2 \cos \frac{i\pi}{n+1}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) a brojevi  $\sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{ij\pi}{n+1}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) predstavljaju koordinate  $u_{ij}$  normalizovanog sopstvenog vektora  $\mathbf{u}_i$  koji pripada sopstvenoj vrednosti  $\lambda_i$ .

<sup>6</sup>Tada još nisam dobro vladao engleskim jezikom pa sam prve naučne radove objavio na nemačkom jeziku.

Dakle, za broj puteva  $N_{kn}$  dužine  $k$  u  $P_n$  dobijamo sledeći izraz

$$N_{kn} = \frac{2^{k+1}}{n+1} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \operatorname{ctg}^2 \frac{2l-1}{n+1} \frac{\pi}{2} \cos^k \frac{2l-1}{n+1} \pi$$

i to je broj načina na koje šahovska figura kralj može da izvede seriju od  $k$  poteza na jednodimenzionalnoj šahovskoj tabli.

#### *Doktorska disertacija*

Doktorirao sam 1971. godine sa temom "Grafovi i njihovi spektri". Skraćena verzija teze je bila objavljena na engleskom jeziku:

Cvetković D., *Graphs and their spectra*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. **354**-No. **356**(1971), 1-50.

Studirao sam elektrotehniku, odsek za tehničku fiziku, jer sam želeo da budem nuklearni fizičar. Sećam se da smo na studijama imali takve predmete kao što je hemija urana. Na vežbama je bio i zadatak da se odredi minimalni poluprečnik kugle plutonijuma pri kojem nastupa lančana reakcija. Kada sam završio fakultet nije bilo slobodnih mesta na Katedri za fiziku ali je bilo jedno na Katedri za matematiku. Postao sam asistent za matematiku misleći da mi je to privremeno zaposlenje. Narednih nekoliko godina sam lutao u profesionalnoj orijentaciji. Počinjao sam postdiplomske studije iz fizike na Prirodno-matematičkom fakultetu i iz automatike na Elektrotehničkom fakultetu. Matematika koja je u to vreme rađena na Katedri za matematiku (analitičke nejednakosti) nije mi se svidela. Slučaj je hteo da nađem na grafove i njihove spektre i to je postala moja glavna profesionalna orijentacija.

U to vreme u celoj državi u krugovima matematičara za grafove je znalo svega nekoliko ličnosti (među njima su bili Đ. Kurepa, M. Stojaković, V. Devidé). Na Elektrotehničkom fakultetu je bila drukčija situacija. Grafovi su se koristili u teoriji električnih kola i u teoriji automatskog upravljanja.

Prikupljao sam matematičke radove u vezi sa spektrima grafova. To je dovelo do disertacije 1971. godine. U disertaciji navodim 105 bibliografskih jedinica a od toga nešto manje od 100 jedinica se odnosilo na spektre grafova. Pokazalo se ubrzo da su to bili svi matematički radovi iz ove problematike. Više puta sam govorio da sam u svom naučnom radu imao i sreće. Danas doktoranti moraju obavezno imati mentora jer je nemoguće da sami uđu u relevantnu literaturu. Meni je u to vreme ipak to uspelo bez mentora. Da je tada radova o spektrima grafova bilo, na primer, 200, ja bih verovatno opet doktorirao ali ne sa tolikim efektom. Pošto sam prikupio sve relevantne radove bio sam zaista u posedu celokupnog tadašnjeg znanja u oblasti koja je tražila sintezu.

Nisam tada znao za neke radove iz oblasti hemije. Na odbranu moje doktorske disertacije došao je Ivan Gutman, tada diplomirani student hemije, i u spektrima grafova prepoznao nešto što je odranije poznato u hemiji - Hückelovu teoriju nezasićenih ugljovodonika.

Kao što sam rekao moja disertacija je u skraćenom obliku objavljena na engleskom jeziku u Publikacijama elektrotehničkog fakulteta. Profesor Dragoslav Mitrović, tadašnji šef Katedre za matematiku, je forsirao objavljivanje skraćenih verzija doktorskih disertacija svojih doktoranata kojih je tih godina bilo dosta. Američki matematičar Richard Bellman<sup>7</sup> je naišao na moju tezu i predložio mi je da tezu proširim do knjige sa istom tematikom a koju bi on objavio u svojoj seriji u Academic Press-u.

Nemački matematičar Horst Sachs, koji je učestvovao u oceni moje doktorske disertacije, takođe je predložio da se moja teza proširi do monografije koja bi se objavila kod nemačkog izdavača Deutscher Verlag der Wissenschaften. Dakle, neverovatna stvar se desila u roku od nekoliko godina.

#### *Primene u hemiji*

Kolega Ivan Gutman i ja objavili smo 1972. godine prvi naučni rad

Cvetković D., Gutman I. *The algebraic multiplicity of the number zero in the spectrum of a bipartite graph*, Mat. Vesnik **9(24)**(1972), 141-150.

u kojem se objašnjava uloga spektara grafova u hemiji. Međutim, taj rad nije naišao na veći odjek (mada je kasnije dosta citiran) jer hemičari ne čitaju matematičke časopise. Prvi pravi rad sa ovom tematikom je objavljen u uglednom hemijskom časopisu *Theoretica Chim. Acta*:

Graovac A., Gutman I., Trinajstić N., Živković T., *Graph theory and molecular orbitals. Application of Sachs theorem*, *Theoretica Chim. Acta*, 26(1972), 67-78.

U stvari, Gutman je posle diplomiranja otišao u Zagreb gde se zaposlio u Institutu "Ruđer Bošković" u grupi za teorijsku hemiju koju je predvodio profesor Nenad Trinajstić. Trinajstić, sada hrvatski akademik, prihvatio je Gutmanove opservacije o mogućnosti primene spektara grafova u hemiji, što predstavlja srećnu okolnost jer je mogao i da ignoriše predloge mlađeg kolege koji je upravo diplomirao. Rad je izazvao neviđen odziv. Do danas je objavljeno više hiljada radova na temu primena spektara grafova u hemiji i to je značajna činjenica za spektralnu teoriju grafova.

---

<sup>7</sup>Pismo R. Bellman-a može se naći u mojoj arhivi a u elektronskom obliku u eBiblioteci Matematičkog fakulteta u Beogradu (videti tekst na kraju knjige), fajl GENERAL CORRESPONDENCE, 1970.-1974., str 115.

*Monografija*

1980. godine došlo je do objavljivanja knjige "Spectra of Graphs".

Cvetković D., Doob M., Sachs H., *Spectra of Graphs - Theory and Application*, Deutscher Verlag der Wissenschaften - Academic Press, Berlin - New York, 1980; second edition, 1982; Russian translation, Naukova dumka, Kiev, 1984; III revised and enlarged edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg – Leipzig, 1995.

Objavljivanje ove knjige su predložili još ranije R. Bellman i H. Sachs 1971. godine. Prošlo je dosta godina u pripremi monografije za koje vreme se radilo žestoko. Knjiga je trenutno rasprodata i odmah se pristupilo novom izdanju koje je bilo bez promena. 1984. godine objavljen je prevod na ruski jezik ove knjige. Obavešteni kažu da je knjiga izdata u malom tiražu pa je i ovo izdanje brzo rasprodano. 1995. godine dolazi do trećeg engleskog izdanja knjige. Izrađena su dva dodatka i spisak novih referenci. U prvom izdanju knjige bibliografija je sadržavala 564 reference. U trećem izdanju je dodato oko 300 novih biranih referenci. Ukupan broj objavljenih radova iz oblasti spektara grafova je već prešao 1000 tako da se nije moglo ići na potpunu bibliografiju, što je bilo moguće 1980. godine. Tada su u knjizi spomenuti svi rezultati objavljeni do 1978. godine. Knjiga je bila enciklopedijskog karaktera i uskoro je postala standardna referenca za oblast. Prema pretraživaču interneta Google ova knjiga je do danas citirana oko 1500 puta.

*Još tri monografije*

U daljem radu objavio sam još dosta knjiga. Ovde ću spomenuti tri naučne monografije objavljene kod izdavača Cambridge University Press.

Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *Eigenspaces of Graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997; Digitaly printed version, 2008.

Knjiga "Eigenspaces" pojačava spektralne tehnike teorije grafova uvođenjem uglova grafa, zvezdanih particija i zvezdanih baza, tj. grafovskih invarijanata baziranih na sopstvenim potprostorima grafa.

Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *Spectral Generalizations of Line Graphs: On Graphs with Least Eigenvalue  $-2$* , Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

Knjiga "Spectral Generalizations" opisuje tri tehnike za tretiranje grafova sa najmanjom sopstvenom vrednošću  $-2$ : zabranjeni podgrafovi, sistemi korenova i zvezdani komplementi.

Cvetković D., Rowlinson P., Simić S., *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

Knjiga "An Introduction" je zamišljena kao priručnik za studente doktorskih studija ali, u stvari, sadrži mnogo više materijala nego što je moguće da jedan doktorski student savlada u redovnom kursu. Pošto stara knjiga "Spectra of Graphs" nije više bila u prodaji, nova knjiga je zamišljena kao "replacement" ali ne i "substitute" za "Spectra of Graphs". Stara knjiga i dalje živi! Nova knjiga sadrži oko 500 odabranih referenci. Danas niko ne zna koliko postoji objavljenih radova o spektrima grafova ali je sigurno da ih ima na hiljade.

#### *Programski paket GRAPH*

Spomenuću rad na implementaciji programskog paketa GRAPH. Ovaj sistem podržava istraživanja u teoriji grafova i na njemu se mogu vršiti eksperimenti koji dovode do hipoteza koje se posle toga tretiraju teorijskim sredstvima. 1980. godine objavio sam u zborniku radova ugledne međunarodne konferencije članak o idejnom rešenju sistema GRAPH:

Cvetković D., *A project for using computers in further development of graph theory*, (The Theory and Applications of Graphs, Proc. 4th Internat. Conf. Theory and Appl. of Graphs, Kalamazoo 1980, ed. G. Chartrand, Y. Alavi, D. L. Goldsmith, L. Lesniak-Foster, D. R. Lick, John Wiley & Sons, New York, 1981), 285-296.

24 godine kasnije objavljen je pregledni rad u kome je navedeno stotinak radova koji su koristili sistem GRAPH:

Cvetković D., Simić S., *Graph theoretical results obtained by the support of the expert system "Graph" - an extended survey*, Graphs and Discovery, ed. S. Fajtlowicz, P. Fowler, P. Hansen, M. Janowitz, F. Roberts, DIMACS Series in Discrete Math. and Theor. Comp. Sci., Amer. Math. Soc., 2005, 39-70.

Paket radi i dan-danas ali imamo novu verziju sa nazivom newGRAPH:

Brankov V., Cvetković D., Simić S., Stevanović D., *Simultaneous editing and multilabelling of graphs in system newGRAPH*, Univ. Bgd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., 17(2006), 112-121.

Nova verzija je urađena savremenim programskih alatima (programski jezik Java u odnosu na Fortran koji je korišćen u staroj verziji). Ugrađena je fleksibilnija interaktivna grafika. Međutim, sistem je u suštini isti kao ranije. Oba sistema se mogu skinuti sa sajta našeg projekta.

Opisaću još jednu epizodu u sopstvenom radu.

*Kreiranje nove spektralne teorije*

Spomenuću neke novije napore, kolege Simića i moje, u vezi sa modifikovanom Laplasovom matricom. Uočili smo da o ovoj matrici nije skoro ništa publikovano a verovali smo da ima razloga da se ovoj matrici pokloni veća pažnja. Izabrali smo tendenciozni naslov za sledeća tri naša rada

Cvetković D., Simić S.K., Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, I, *Publ. Inst. Math.(Beograd)*, 85(99)(2009), 19-33.

Cvetković D., Simić S.K., Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, II, *Linear Algebra Appl.*, 432(2010), 2257-2272.

Cvetković D., Simić S.K., Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, III, *Appl. Anal. Discrete Math.*, 4(2010), 156-166.

čime smo hteli da skrenemo pažnju da zaista se radi o kreiranju nove spektralne teorije grafova.

Odziv je bio dobar. Do ovog momenta objavljeno je preko 100 radova o modifikovanoj Laplasovoj matrici a mi smo citirali oko 80 radova. U mojoj knjizi "Iracionalno u racionalnom" objavljena je bibliografija radova o modifikovanoj Laplasovoj matrici.

*Primene u računarstvu*

U vezi sa primenama spektara grafova ima i novijih priča. Poznate su primene spektara u hemiji a bilo je i onih u fizici. Zadnjih desetak godina sve više se pojavljuju primene u računarstvu što se vidi iz velikog broja publikovanih radova te vrste. Zaslugu za ovo nemaju matematičari. Naprotiv, došlo je do spontanog saznanja od strane istraživača iz oblasti računarstva da su spektri grafova korisni u računarstvu. Počeli smo i mi time da se bavimo. Kolega Ivan Gutman i ja smo objavili Zbornik radova:

*Applications of Graph Spectra*, Zbornik radova 13(21), ed. D. Cvetković, I. Gutman, Mathematical Institute SANU, Belgrade, 2009.

Pošto je bilo veliko interesovanje za ovaj zbornik, došlo je i do drugog proširenog i poboljšanog izdanja ovog zbornika.

*Selected Topics on Applications of Graph Spectra*, Zbornik radova 14(22), ed. D. Cvetković, I. Gutman, Mathematical Institute SANU, Belgrade, 2011.

Zajedno sa koautorima objavio sam i sledeća dva rada o primenama u računarstvu:

Cvetković D., Davidović T., Ilić A., Simić S.K., *Graphs for small multiprocessor interconnection networks*, Appl. Math. Computation, 217(2010), 2468-2480.

Cvetković D., Simić S.K., *Graph spectra in computer science*, Linear Algebra Appl., 434(2011), 1545-1562.

Pokazalo se da se u raznim delovima računarstva pojavljuju spektri: ekspan-deri i kombinatorna optimizacija, složene mreže i topologija Interneta, data min-ing, analiza slika i prepoznavanje oblika, pretraga Interneta, multiprocesori, anti-virusna zaštita, razvojne mreže, statističke baze podataka i socijalne mreže, kvantno računarstvo, bioinformatika, teorija kodiranja i teorija sistema.

Zabeleženi su neverovatni uspesi spektralnih tehnika za klasterovanje podataka. Teorijski još nije sasvim objašnjeno zašto ove spektralne tehnike dobro rade u praksi. Mi smo usmerili tri doktoranta na ovu problematiku.

Budite svesni da kompanija Google svake nedelje za vas izračunava sopstveni vektor za najveću sopstvenu vrednost jednog grafa sa milijardama čvorova. Taj vektor omogućava brz odgovor na upite korisnika. Očigledno je ovo vrlo vruća stvar.

Interesantno je da se antivirusna zaštita računara dobrim delom oslanja na spektralne tehnike. Pokazalo se da je mreža računara otporna na viruse ako je najveća sopstvena vrednost grafa mreže mala. Tada virusna epidemija ubrzo zamire.

Kao što je za mene bilo značajno kada je Ivan Gutman pre mnogo godina prepoznao primenljivost teorije spektra grafova u hemiji tako je i ovo saznanje o primenama spektara u računarstvu bilo još veće ohrabrenje. Stotine istraživača iz oblasti računarstva koriste spektralne tehnike uz citiranje knjige "Spectra of Graphs" i drugih relevantnih knjiga.

#### *Naučne konferencije o spektrima grafova*

Spektri grafova su predstavljeni na bezbroj naučnih konferencija. Spomenu-ću ovde da se u zadnjih 10-15 godina organizuju i specijalizovane konferencije posvećene isključivo teoriji spektara grafova.

Objavljeni su zbornici radova sa ovih konferencija kao posebni brojevi poznatih međunarodnih matematičkih časopisa.

1. *Algebraic Graph Theory*, D. Cvetković, R. Merris, P. Rowlinson, eds., Linear and Multilinear Algebra, Special Issue, 39(1995), No. 1-2. (Edinburgh, 1993)
2. *Algebraic Graph Theory*, D. Cvetković, W. Haemers, P. Rowlinson, eds., Linear Algebra Appl., Special Issue, 356(2002). (Edinburgh, 2001)
3. *Special Issue Devoted to Papers Presented at the Aveiro Workshop on Graph Spectra*, D. Cvetković, W. Haemers, P. Rowlinson, eds., Linear Algebra Appl.,



Special Issue, 423(2007), No. 1. (Aveiro, 2005)

4. *Special Issue Devoted to Selected Papers Presented at the Workshop on Spectral Graph Theory with Applications to Computer Science, Combinatorial Optimization and Chemistry (Rio de Janeiro, 2008)*, N. Abreu, D. Cvetković, I. Gutman, V. Nikiforov, eds., Linear Algebra Appl., Special Issue, 432(2010), No. 9.

I ovo je znak da je spektralna teorija grafova napredovala.

#### *Završne poente*

Danas se slobodno može reći da postoje hiljade radova o ovoj teoriji i niko ne zna njihov tačan broj. U stara vremena je bilo moguće sve njih evidentirati.

Takođe postoje hiljade radova o primenama spektara grafova u hemiji i još hiljade radova o primenama u računarstvu. Ukupan broj istraživača koji su zainteresovani za spektre grafova sigurno prelazi 1000.

Mi danas imamo naučni projekat finansiran od strane odgovarajućeg ministarstva sa nazivom "Teorija grafova i matematičko programiranje sa primenama u hemiji i računarstvu". Rukovodilac je kolega Slobodan Simić. U projekt je uključeno jedanaest doktoranata a tri doktoranta su usmerena na primene spektara u računarstvu.

Objavljivanje monografije "Spectra of Graphs" u dva izdanja 1980. i 1982. godine nije ostalo nezapaženo. Ja sam 1983. godine (prvi put) kandidovan za SANU. Obavešteni kažu da mi je tada nedostajao jedan glas da budem izabran. 1985. godine je obnovljena kandidatura za moje članstvo. 1984. godine je objavljen ruski prevod monografije "Spectra of Graphs" i možda je to bila dodatna činjenica koja je uticala na glasačko telo tako da sam 1985. godine izabran u SANU.

Interesantno je da sam u istom danu kada sam izabran u SANU držao predavanje u Glazgovu (te školske godine sam bio gost na Univerzitetu u Stirlingu u Škotskoj) sa naslovom "Can spectral techniques unify graph theory?". U stvari, teorija grafova se u to vreme se sastojala od 10-15 posebnih delova koji su bili malo međusobno povezani. Spektralne tehnike su se primenjivale u svim ovim delovima teorije grafova do izvesne mere.

Pitanje je bilo da li su spektralne tehnike dovoljno jake da postanu kohezioni faktor za celu teoriju grafova. Moj odgovor na pitanje postavljeno u naslovu predavanja je tada bio: "Ne znam". Danas sam sigurniji da je odgovor potvrđan. Možda bi trebalo detaljnije videti statistiku objavljenih radova ali spomenute spontane primene u računarstvu predstavljaju jak pokazatelj da su spektralne tehnike prepoznate kao zajedničke tehnike cele teorije grafova.

Kada sam se sa predavanja iz Glazgova vratio u Stirling, kolega Zoran Radosavljević mi je javio telefonom da sam izabran u SANU.

*Spektralna teorija grafova* nije jedini način unifikacije teorije grafova. Postoji program i serija radova o grafovskim minorima. Autori su P. Seymour, N. Robertson, M. Chudnovsky, K. Vušković i drugi. U tome je učestvovala na visokom nivou naša zemljakinja Kristina Vušković.

Ona je razvijala tehnike za rad sa hereditarnim klasama grafova. Cela ova aktivnost takođe vodi ujedinjenju teorije grafova a ovakav pristup se često naziva *strukturna teorija grafova*.

Dakle, možemo reći da danas postoje dve teorije grafova - strukturna i spektralna teorija grafova.

Hvala na pažnji!

# 15. Predavanje na Elektrotehničkom fakultetu

## ISTRAŽIVANJA U TEORIJI GRAFOVA: IZMEĐU ELEKTROTEHNIKE I MATEMATIKE<sup>1</sup>

**Sadržaj<sup>2</sup>.** Akademik Dragoš Cvetković, profesor u penziji Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, objašnjava kako je na njegov naučni rad uticala činjenica da je studirao elektrotehniku i bio nastavnik na Elektrotehničkom fakultetu. Inspirisan tehnikom grafova toka signala, koji se koriste u teoriji sistema, objavio je knjigu *Kombinatorna teorija matrica sa primenama u elektrotehnici, hemiji i fizici*, Naučna knjiga, Beograd, 1980, 1987; Zavod za udžbenike, Beograd, 2011, u kojoj se teorija matrica zasniva grafovskim sredstvima. S druge strane, teorija spektara grafova, glavna tematika u Cvetkovićevom naučnom radu, ima značajne primene u računarstvu i elektrotehnici (struktura i pretraga Interneta, data mining, analiza slika, multiprocesorski sistemi, antivirusna zaštita i dr.) .

Zahvaljujem mlađem kolegi, docentu Branku Maleševiću, šefu Katedre za primenjenu matematiku, na pozivu da održim ovo predavanje<sup>3</sup>. U stvari, ja sam ove godine držao par predavanja u Matematičkom institutu SANU i na Matematičkom fakultetu u Beogradu povodom izlaska iz štampe novog izdanja moje knjige "Kombinatorna teorija matrica" pa je bilo govora da takvo predavanje održim i ovde za članove Katedre za primenjenu matematiku. Kolega Malešević je ovo predavanje organizovao za Fakultet pa sam onda i ja proširio temu mog izlaganja. Dakle, pokušaću da dam retrospektivu celokupnog mog naučnog rada, koliko je to moguće u jednom predavanju.

---

<sup>1</sup>Izvodi iz predavanja održanog 29.11.2011. na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu.

<sup>2</sup>Ovaj sadržaj je distribuiran uz obaveštenje o održavanju predavanja.

<sup>3</sup>Ovaj tekst je sastavljen na osnovu video snimka predavanja. Mnoge rečenice izgovorene na predavanju su ovde zadržane.

Penzionisan sam pre pet godina na ovom fakultetu. Nastavio sam sa naučnim radom tj. sa publikovanjem knjiga i radova. Nisam se mnogo pojavljivao ovde. Jedan od razloga je taj što sam od Matematičkog instituta SANU, tj. od Srpske akademije nauka i umetnosti, dobio prostoriju za rad. Međutim održavao sam veze sa mnogim kolegama sa ovog fakulteta.

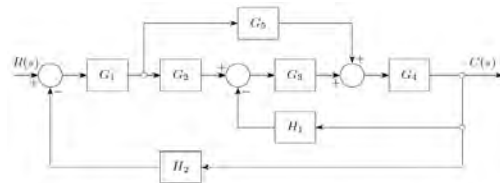
1959. godine upisao sam se na Elektrotehnički fakultet. Želeo sam da budem nuklearni fizičar pa sam studirao Odsek za tehničku fiziku. Diplomirao sam 1964. godine. Nisam postao asistent za fiziku jer nije bilo slobodnih mesta. Postao sam asistent za matematiku jer se ukazalo slobodno mesto. Smatrao sam da mi je matematika privremeno zanimanje ali sam ipak sticajem okolnosti postao matematičar. Ispalo je da sam se tokom karijere bavio teorijom grafova.

Za termin *graf* sam čuo 1967-68. godine a ne u toku studija. Istovremeno naišao sam na grafove pod nekim drugim imenima. To ipak nije bila slučajnost. U elektrotehnici ima mnogo grafova, implicitno ili eksplicitno. Na primer, nezavisne konture iz teorije električnih kola su grafovski pojam. One se pojavljuju u metodu konturnih struja a sve to ide unazad do Kirchhoff-ovih zakona. Ovi zakoni ne samo da implicitno koriste grafove već oni daju vezu između strukture grafa i algebarskih osobina sistema linearnih algebarskih jednačina koje su u vezi sa električnim kolom (linearna nezavisnost). To je doprinelo da se bavim vezama između teorije grafova i algebre, specijalno linearne algebre.

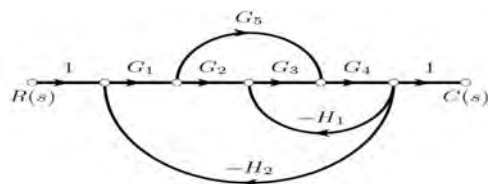
*Ponovio sam delove jubilarnog predavanja od 11.3.2011. sadržane u sledećim sekcijama: Moji prvi naučni radovi, Tematika mojih radova, Spektralna teorija grafova, Kombinatorna teorija matrica.*

U predgovoru III izdanju knjige *Kombinatorna teorija matrica* objašnjavam motivaciju i povod za pisanje knjige. Elektrotehnika je uticala da počnem da se bavim grafovima. Ali postojao je i specijalan razlog. Postojala je tehnika grafova protoka signala koju je uveo Claude Shannon za vreme II svetskog rata; u vremenu kada nije bilo računara ona je ubrzavala projektovanje sistema automatskog upravljanja za vojne potrebe.

Kao primer, posmatrajmo sistem automatskog upravljanja prikazan na slici.



Odgovarajući graf protoka signala ima istu strukturu.



Korišćenjem tzv. Masonove formule neposredno se dobija sledeći izraz za funkciju prenosa sistema:

$$\frac{C}{R}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_4 G_5}{1 + G_3 G_4 H_1 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_2 + G_1 G_4 G_5 H_2}.$$

Izraz se direktno "očitava" iz grafa (zbir proizvoda veličina duž puteva od ulaznog do izlaznog čvora za brojilac i slično sa konturama za imenilac).

Kolega Milić Stojić, sada profesor teorije sistema u penziji, u razgovoru vođenom krajem šezdesetih godina skrenuo mi je pažnju na ovu tehniku. On je rekao nešto u stilu: ja ću vama matematičarima da pokažem kako se rešavaju sistemi linearnih algebarskih jednačina. Pokazao mi je, ako se ne varam, baš ovaj primer i objasnio tehniku grafova protoka signala. 1953. godine publikovan je opis ove tehnike a do tada je to bila vojna tajna. Uprkos postojanju računara ta tehnika je ostala popularna i dan-danas. Slikovito prikazuje tok signala u sistemu pa se koristi u nastavi.

To me je motivisalo da napišem celu knjigu. Knjiga je u trećem izdanju ostala gotovo nepromenjena; zapanjio sam se kako nema potrebe da se nešto naročito menja. Danas je opšta tendencija da se grafovi mnogo koriste u linearnoj algebri. Ako pogledate neke relevantne matematičke časopise iz ove oblasti, na primer, *Linear Algebra and Its Applications*, videćete veliki broj publikovanih radova u kojima se pojavljuju grafovi.

*Objasnio sam uz pomoć slajdova kako se neki elementarni pojmovi teorije matrica (determinanta i dr.) uvode uz pomoć grafova.*

Kombinatorna teorija matrica je jedna strana mog rada. Vraćam se sada na spektralnu teoriju grafova.

*U nastavku sam izložio sledeće sekcije jubilarnog predavanja: Prvi kontakt sa spektrima grafova, Doktorska disertacija, Primene u hemiji, Monografija.*

Spektri grafova su imali i imaju veliku primenu u hemiji. Međutim u zadnjih desetak godina pojavljuju se primene u računarstvu. Kada sam to primetio za

mene je to značilo nešto slično onome što se desilo kada je Ivan Gutman otkrio primene spektara grafova u hemiji. Držao sam predavanje u Australiji, na Univerzitetu u Newcastle-u. Bilo je to matematički orijentisano predavanje za kolege sa Odseka za računarstvo. Posle predavanja obratio mi se jedan od slušalaca i pokazao zbirku radova jedne naučne konferencije sa temom "computer vision and pattern recognition", koju je izdao Springer. U knjizi je bilo mnogo radova u kojima se koriste spektri grafova i citiraju moje i druge relevantne knjige. Kolega je postavio pitanje: "Šta kažete na ovo?" Viđao sam i ranije da se moja knjiga o spektrima grafova citira s vremena na vreme u računarstvu i drugim oblastima ali nisam na to obraćao pažnju. Sada sam shvatio da je vrag odneo šalu i da su ovo ozbiljne stvari. Počeo sam da pratim literaturu o ovim primenama. Te primene nisu razvijali matematičari nego istraživači iz oblasti računarstva.

Matematika se pretežno razvija apstraktnim sredstvima ali dobra matematika nađe kad-tad primene. Spektralna teorija grafova je lep primer u tom pogledu.

Preduzeo sam neke mere. Ime našeg projekta je promenjeno. On se pre zvao "Teorija grafova i matematičko programiranje sa primenama u hemiji i tehničkim naukama". Zgodnom prilikom promenili smo ime u "Teorija grafova i matematičko programiranje sa primenama u hemiji i računarstvu". Pokušavam da usmerim deo saradnika na ovu problematiku.

Danas postoje hiljade naučnih radova o primenama spektara grafova u računarstvu. Obratite pažnju da se radi o sužavanju problematike: dakle, ne govorim o primenama grafova ili matrica uopšte u računarstvu već o primenama spektara grafova u računarstvu i uprkos tome broj radova je veoma veliki. Dajem kratak pregled ovih primena.

*U nastavku predavanja sam ponovio deo jubilarnog predavanja "Primene u računarstvu" i ukratko prikazao rad*

Arsić B., Cvetković D., Simić S.K., Škarić M., *Graph spectral techniques in computer sciences*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, **6**(2012), No. 1, 1-30.

#### *Završni komentari*

Preporučujem matematičarima koji se bave diskretnom matematikom da obrate pažnju na dešavanja u računarstvu u vezi primena spektralne teorije grafova.

Istraživači u oblasti računarstva i elektrotehnike treba da budu svesni postojanja novog matematičkog aparata - spektralne teorije grafova - koji se pokazao kao vrlo efikasan u mnogim primenama.

Veliki broj univerziteta, uključujući neke od onih najprestižnijih, imaju u okviru računarstva kurseve sa nazivom "Spectral Graph Theory" na master ili doktorskom nivou. Predlažem da se takav kurs uvede i na našem Elektrotehničkom fakultetu.

U Centru za matematička istraživanja u Barceloni će se od 16 - 20. jula 2012. godine održati naučna konferencija "Applications of Graph Spectra in Computer Science". Predsednik programskog komiteta i jedan od organizatora je Dragan Stevanović, PMF, Niš. Informacije o konferenciji se mogu naći na adresi<sup>4</sup>

<http://www.crm.cat/>

Očekuje se dolazak svih važnijih istraživača koji koriste spektre grafova u računarstvu a samo manji broj matematičara.

Hvala na pažnji !

---

<sup>4</sup>Konferencija je održana kako je bilo predviđeno.

## 16. Arhiva akademika Cvetkovića

(autor Višnja Milić)

U periodu od avgusta do decembra 2011. godine radila sam, uz pomoć akademika Dragoša Cvetkovića, na sređivanju i popisu njegove stručne arhive i sastavila pregled. Opisano je stanje arhive u kome se ona nalazila decembra 2011. godine ali je kasnije pregled povremeno ažuriran.

Postoji detaljan prikaz arhive. U ovom skraćenom prikazu izostavljeni su mnogi detalji (nazivi pojedinačnih registratora i fascikli, podaci o lokaciji u plakarima i dr.).

Arhiva akademika Dragoša Cvetkovića se nalazi na tri lokacije.

Glavni deo arhive se nalazi u Matematičkom institutu SANU, Beograd, Kneza Mihaila 36, u sobi br. 307 u tri plakara. Sobu 307 je SANU maja 2007. godine dodelila Cvetkoviću na trajno korišćenje. Upravni odbor Matematičkog instituta SANU je na svojoj sednici od 23.2.2012. doneo odluku o trajnom čuvanju ovog dela arhive.

Delovi arhive se nalaze u stanu Cvetkovića (videti Dodatak 1) i na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu (videti Dodatak 2).

Glavni deo arhive se nalazi u registratorima i fasciklama. U registratorima su probrani dokumenti sređeni po hronološkom redosledu. U fasciklama se nalaze neobrađeni materijali. Fascikle imaju kratke oznake na osnovu kojih se može naslutiti njihov sadržaj.

*Registratori:* Korespondencija

Za raniji period (sedamdesete i osamdesete godine) registratori sadrže posebno korespondenciju (pisma) a posebno dokumenta o radu (na primer, odluke fakultetskih organa). U devedesetim godinama ove dve vrste dokumenata se nalaze zajedno a registratori nose naziv "Dokumentacija". Počevši od kasnih devedesetih godina većina korespondencije se obavljala elektronskom poštom koja je posebno arhivirana. Deo dokumentacije, posvećen pojedinim specijalnim temama, nalazi se u fasciklama.



*Grupe fascikli:* dokumentacija, spectra - prikazi (fascikle sadrže prikaze i druge materijale u vezi sa knjigom "Spectra of Graphs" i drugim Cvetkovićevim monografijama), sistem "Graph" (ova grupa fascikli sadrži materijale vezane za implementaciju i korišćenje programskog sistema "Graph". Sistem "Graph" je implementiran u periodu 1980–1984).

*Fascikle:* arhiva elektronske pošte

Fascikle sadrže odštampane odabrane bitne poruke, editirane tako da se dobije preglednost. Obuhvaćeni period je 1991-2001.

*Radni primerci objavljenih knjiga*

Po izlasku knjige iz štampe Cvetković je, po pravilu, u jednom primerku knjige beležio uočene štamparske greške i druge propuste, čuvajući takve "radne primerke" do eventualnog novog izdanja. U arhivi se nalazi 18 takvih "radnih primeraka".

*Knjige sa biografskim podacima o akademiku Cvetkoviću*

Radi kratkoće, navedeni su samo naslovi knjiga od kojih ovde navodimo samo nekoliko:

Znamenite ličnosti Srema, Gimnazijalac, školski list, Drugi u autobiografiji, Sunčani sat (dve sveske), Ko je ko u Srbiji

*Kutija: kompakt diskovi*

CD-D.C. Dokumentacioni kompakt disk akademika Dragoša Cvetkovića (2009)

CD-D.C.-2 Dokumentacioni kompakt disk akademika Dragoša Cvetkovića (2010)

CD-D.C.-3 Dokumentacioni kompakt disk akademika Dragoša Cvetkovića (2011)

*Kutije:* zahtevi za slanje separata

đačke knjige, indeksi, notesi, beleške

značke i medalje

bedževi sa konferencija

dnevnik, adresar

dodeljene povelje

zahvalnica Instituta za primenjenu matematiku i elektroniku

*Separati*

- Separati naučnih radova N1 - N215
- Spisak naučnih radova, spisak stručnih radova
- Kolekcija korigovanih separata
- Separati bibliografskih spiskova
- Separati stručnih radova S1 - S15

- Separati prikaza knjiga, nekrologa, predgovora za specijalne brojeve časopisa i separati o postavljenim problemima
- Neke od publikacija u kojima su objavljeni radovi D. Cvetkovića
- Diplomski rad, doktorski rad, skripta
- Projekti i studije

*Grupe fascikli:* putovanja (fascikle sa raznim dokumentima sa 23 putovanja, dve kutije sa razglednicama sa putovanja), recenzije i prikazi, biografija-citiranje, dokumenti o izborima u zvanja, sveske, radni materijali - naučni projekti, bibliografije i beleke

*Primeri odštampanih knjiga*

Veći broj primeraka raznih knjiga akademika Cvetkovića

Journal of Graph Theory, 1(1977) - 6(1982) (Cvetković je bio član redakcije ovog časopisa u periodu 1977 - 1982. Ovde se nalaze primeri časopisa koje je dobijao kao član redakcije. Cvetković je u periodu 1992 - 2006 bio član redakcije časopisa Linear and Multilinear Algebra ali je svoje primerke časopisa poklonio biblioteci Matematičkog instituta SANU i oni se nalaze u jednom od plakara u sobi 307.)

materijali za knjige, rukopisi knjiga, razno

*Beleške o objavljenim radovima*

Posle mnogih od objavljenih naučnih radova ostale su fascikle sa beleškama (prethodne verzije radova, skice dokaza, listinzi kompjuterske obrade, delovi koji nisu ušli u završnu verziju, itd.). Svaka takva fascikla je označena brojem rada (sa prefiksom N) iz spiska Cvetkovićevih naučnih radova.

N60, N107, N122, N139, N145, N148, N149, N157, N158, N159, N159, N160, N172, N173, N174, N175, N179, N180, N180, N181, N182, N184, N185, N186, N187, N187, N188, N189, N189, N190, N191, N192, N194-N195, N196, N197, N202, N202, N204, N207, N208, N209, N209.

stari rukopisi - folije za predavanja, katedra za primenjenu matematiku

**Dodatak 1: Deo arhive smešten u stanu**

Deo arhive akademika Dragoša Cvetkovića se nalazi u stanu akademika Cvetkovića u Beogradu.

*Komplet objavljenih knjiga*

U stanu se nalazi po jedan primerak svih objavljenih knjiga akademika D. Cvetkovića (71 knjiga) .

*Zbornici radova sa inostranih konferencija u kojima su objavljeni neki od Cvetkovićevih radova*

Algebraic Methods in Graph Theory, Vol. I, II, ed. L. Lovász, V. T. Sos, North Holland, Amsterdam-Oxford-New York, 1981.

The Theory and Applications of Graphs, Proc. 4th Internat. Conf. Theory and Appl. of Graphs, Kalamazoo 1980, ed. G. Chartrand, Y. Alavi, D. L. Goldsmith, L. Lesniak-Foster, D. R. Lick, John Wiley & Sons, New York - Chichester - Brisbane - Toronto - Singapore, 1981.

Integer Programming and Combinatorial Optimization, Proc. 7th Internat. IPCO Conf., Graz, Austria, June 1999, ed. G. Cornuejols, R.E. Burkard, G.J. Woeginger, Lecture Notes Comp. Sci. 1610, Springer, Berlin, 1999.

Proc. DIMACS Workshop on Discrete Mathematical Chemistry, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comp. Sci., 51(2000).

Topics in Algebraic Graph Theory, ed. L.W. Beineke, R.J. Wilson, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, 88-112.

Graphs and Discovery, ed. S. Fajtlowicz, P. Fowler, P. Hansen, M. Janowitz, F. Roberts, DIMACS Series in Discrete Math. and Theor. Comp. Sci., Amer. Math. Soc., 2005.

*Specijalne sveske časopisa*

Algebraic Graph Theory, D. Cvetković, R. Merris, P. Rowlinson, eds., Linear and Multilinear Algebra, Special Issue, 39(1995), No. 1-2.

Algebraic Graph Theory, D. Cvetković, W. Haemers, P. Rowlinson, eds., Linear Algebra Appl., Special Issue, 356(2002).

Special Issue Devoted to Papers Presented at the Aveiro Workshop on Graph Spectra, D. Cvetković, W. Haemers, P. Rowlinson, eds., Linear Algebra Appl., Special Issue, 423(2007), No. 1.

Special Issue Devoted to Selected Papers Presented at the Workshop on Spectral Graph with Applications to Computer Science, Combinatorial Optimization and Chemistry (Rio de Janeiro, 2008), N. Abreu, D. Cvetković, I. Gutman, V. Nikiforov, eds., Linear Algebra Appl., Special Issue, 432(2010), No. 9.

Linear Algebra and Its Applications, Volume 435, Issue 10, 15 November 2011, Special Issue in honor of Dragoš Cvetković. Eds. E.R. van Dam, I. Gutman, P. Rowlinson, S.K. Simić i D. Stevanović.

*Ukoričene sveske formata A4 i B5*

Ukoričene sveske sa nazivom "Naučni radovi" ili "Matematički radovi" sadrže separate naučnih radova D. Cvetkovića.

Publikacije ETF, Serija Matematika, ukoričeni komplet brojeva 1(1990) - 10(1999), dve sveske (1 - 6, 7 - 10 )

kompakt diskovi

Futrola: Diploma o doktoratu matematičkih nauka (original i tri kopije), Diploma o visokoj školskoj spremi na ETF

**Dodatak 2: ARHIVA NA ETF**

Deo arhive akademika Dragoša Cvetkovića se nalazi na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu u sobi 99.

*Grupe fascikli:*

Nastava, Saradnja sa Stirlingom, Sistem "Graph", TSP projekti, Projekti Pupin, savezni itd., Razni materijali, Rukopisi knjiga.

Doktorske disertacije, magistarski i diplomski radovi

Knjige nematematičkog karaktera

Dokumentacija o implementaciji sistema "Graph", 20 registratora i nekoliko fascikli (opisi i listinzi programa, listinzi testiranja sistema)

## 17. Scientific correspondence of Professor Dragoš Cvetković

Professor Dragoš Cvetković has saved and classified a part of his scientific correspondence. These archives are located in the Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, Belgrade, Kneza Mihaila 36.

A part of the correspondence has been scanned and organized within several files whose names indicate the content and the period of time. These files are included into eLibrary (Virtuelna biblioteka) of the Faculty of Mathematics, University of Belgrade, at the address

<http://elibrary.matf.bg.ac.rs/>

Each archive file is commented by D. Cvetković. Comments include some autobiographic facts which help in understanding the meaning of documents in the file. More details on the biography of D. Cvetković can be found in the book

Cvetković D., *Graphs as inspiration, Autobiographical Notes and Other Texts on the Occasion of Four Decades of Scientific Work in Mathematics (Serbian)*, Ed. V. Kovačević-Vujčić, Akademska misao, Beograd, 2006.

The following files have been created:

CORRESPONDENCE WITH H. SACHS AND I. GUTMAN, 1970 - 1972

CORRESPONDENCE WITH H. SACHS AND I. GUTMAN, 1973

GENERAL CORRESPONDENCE, 1970 - 1974

CORRESPONDENCE WITH H. SACHS, I. GUTMAN AND J.J.SEIDEL, 1974 - 1977

GENERAL CORRESPONDENCE, 1975 - 1978

CORRESPONDENCE WITH H. SACHS AND M. DOOB, 1977 - 1980

GENERAL CORRESPONDENCE, 1978 - 1984

*General comments by D. Cvetković*

This electronic collection contains most of my scientific correspondence from the period 1970 - 1984.

Letters and other documents in all files are ordered chronologically with some exceptions.

Documents are not strictly classified into files. A person interested, for example, in a letter by I. Gutman from 1977 should look to both of the files CORRESPONDENCE WITH H. SACHS, I. GUTMAN AND J.J.SEIDEL, 1974 - 1977 and GENERAL CORRESPONDENCE, 1975 - 1978.

Only a part of documents is presented in this electronic collection. Certain periods of time and groups of documents have been selected but also within these groups some less important documents have been omitted. Other documents can be found in a hard copy form in the Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, Belgrade, Kneza Mihaila, 36, Room 307. The classification of these documents is described in the file arhiva\_cvetkovic.doc.

The collection of documents in the Mathematical Institute contains folders (registries) "Documents up to 1979" (8. Dokumenti o radu do 1979) and "Documents up to 1984" (9. Dokumenti o radu do 1984). these folders contain official reports and decisions of academic bodies concerning degrees positions, book publications, etc. Reports on other persons and their work which are signed by myself are included (for example, reports on master and doctoral theses, reports on the suitability of a person for a certain position, etc.).

**File 1: CORRESPONDENCE WITH H. SACHS AND I. GUTMAN, 1970 - 1972**, file name DC72R.pdf, 131 pages

*Comments by D. Cvetković*

In 1969 I was a teaching assistant for mathematics at the Faculty of Electrical Engineering, University of Belgrade. By some chance I came across at problems concerning graph eigenvalues and started publishing some papers.

At the end of 1969 I got in touch with Professor Horst Sachs, Technische Hochschule Ilmenau, Ilmenau, German Democratic Republic. Professor Sachs has already published some important papers on graph spectra and has friendly responded to my letter to him. In 1980 we published together (jointly with Michael Doob) the book

Cvetković D., Doob M., Sachs H., *Spectra of Graphs - Theory and Application*, Deutscher Verlag der Wissenschaften - Academic Press, Berlin - New York, 1980;

second edition, 1982; Russian translation, Naukova dumka, Kiev, 1984; III revised and enlarged edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg – Leipzig, 1995.

The correspondence presented in this file shows how Professor Sachs has helped me to obtain my doctoral degree and how we have started the work on the book *Spectra of Graphs*.

I defended my doctoral thesis *Graphs and Their Spectra* on May 27, 1971. At that time I got in touch with Ivan Gutman who had just graduated Chemistry at the University of Belgrade. His fortunate great creative act at that time was to recognize that the theory of graph spectra has applications in Chemistry (in the Hückel theory of non-saturated hydrocarbons). We started a fruitful collaboration in publishing some papers. The chemical community has widely accepted Gutman's ideas in using graph spectra to chemical problems. Several thousands of papers have been published in later decades along these lines which has led to the creation of what is nowadays called Chemical Graph Theory.

This file contains several letters which Gutman has sent me from Zagreb, Croatia, where he immediately after graduation got a position at the scientific institute "Rudjer Bošković".

**File 2: CORRESPONDENCE WITH H. SACHS AND I. GUTMAN, 1973**, file name DC73R.pdf, 70 pages

*Comments by D. Cvetković*

I defended my doctoral thesis *Graphs and Their Spectra* on May 27, 1971.

Professor Horst Sachs, Technische Hochschule Ilmenau, Ilmenau, German Democratic Republic, and I published together in 1980 (jointly with Michael Doob) the book

Cvetković D., Doob M., Sachs H., *Spectra of Graphs - Theory and Application*, Deutscher Verlag der Wissenschaften - Academic Press, Berlin - New York, 1980; second edition, 1982; Russian translation, Naukova dumka, Kiev, 1984; III revised and enlarged edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg – Leipzig, 1995.

The correspondence presented in this file shows how we have made first steps in writing the book *Spectra of Graphs*.

Collaboration with Ivan Gutman was continued in 1973. In this year Ivan Gutman got doctoral degree in Chemistry (20.12.1973).

For previous period see the file CORRESPONDENCE WITH H. SACHS AND I. GUTMAN, 1970-1972.

**File 3: GENERAL CORRESPONDENCE, 1970 - 1974**, file name DC1970-1974.pdf, 308 pages

*Comments by D. Cvetković*

In 1960's I was a teaching assistant for mathematics at the Faculty of Electrical Engineering, University of Belgrade. By some chance I came across at problems concerning graph eigenvalues and started publishing some papers in 1969.

On July 21 1970 Professor Horst Sachs, Technische Hochschule Ilmenau, Ilmenau, German Democratic Republic, wrote a letter to Professor Dragoslav Mitrinović, Head of Mathematics Chair at the Faculty of Electrical Engineering, concerning my doctoral thesis. The Serbian translation of this letter is included here. In front of Sachs' letter a sketch of my thesis is included (Theme proposed for doctorate thesis).

I defended my doctoral thesis *Graphs and Their Spectra* on May 27, 1971.

On July 31 1972, American mathematician Richard Bellman sent me a letter in which he suggested that my doctoral thesis could be extended to a book to be published with Academic Press. Some exchange of letters occurred later that year (29.8, 5.10, 12.10).

In 1972 I got in touch with Michael Doob, University of Manitoba, Winnipeg, Canada, who also was dealing with graph spectra. In 1973 M. Doob visited Belgrade. Soon Professor H. Sachs and I invited M. Doob to join us in writing the book "Spectra of Graphs". P. Erdős, F. Harary and H. Sachs visited Belgrade in 1974. I was in touch with many other mathematicians from abroad.

**File 4: CORRESPONDENCE WITH H. SACHS, I. GUTMAN AND J.J.SEIDEL, 1974 - 1977**, file name DC1974-1977.pdf, 282 pages

*Comments by D. Cvetković*

The cooperation with I. Gutman and the whole group of theoretical chemists from Zagreb was continued. I Gutman was serving National Service in the second part of 1974 and the first part of 1975. In July 1977 he got a position at the University of Kragujevac and moved from Zagreb.

The correspondence with H. Sachs concerning the preparation of the book "Spectra of Graphs" was very intensive. M. Doob joined us in writing the book and by the end of 1975 we had a contract with German publisher Deutscher Verlag der Wissenschaften. See the file GENERAL CORRESPONDENCE, 1970 - 1974, for early correspondence with M. Doob.



In 1974 and 1975 I was in touch with Professor J.J. Seidel, Eindhoven University of Technology, The Netherlands. For early correspondence with J.J. Seidel see files CORRESPONDENCE WITH H. SACHS AND I. GUTMAN, 1970 - 1972 and CORRESPONDENCE WITH H. SACHS AND I. GUTMAN, 1973. I spent the academic year 1975/76 in Eindhoven as a postdoctoral fellow, working with J.J. Seidel.

At the end, this file contains a few letters by I. Gutman from 1977.

**File 5: GENERAL CORRESPONDENCE, 1975 - 1978**, file name Dragos+5+R.pdf, 456 pages

*Comments by D. Cvetković*

The file begins with a few letters from 1974. My letter of 23.7. thanks P. Erdős for sending two copies of his book "Probabilistic Methods in Combinatorics". In his letter of 23.9. P. Erdős explains that one copy is for S. Simić.

31.3.1975. F. Harary asked me to join the Editorial Board of new Journal of Graph Theory.

I have exchanged many letters with my graduate student R. Šokarovski from Skopje in 1975 and 1976. We published jointly the book Cvetković D., Šokarovski R., *Fundamentals of Graph Theory (Macedonian)*, Skopje, 1975. Unfortunately, R. Šokarovski died on 6.12.1976. in the age of 32.

I spent the academic year 1975/76 in Eindhoven as a postdoctoral fellow, working with J.J. Seidel. At the same time my doctoral student S. Simić was serving his National Service.

14.11.1977. I was thanking L. Lovász who invited me to be one of main speakers at the conference Algebraic Methods in Graph Theory, Szeged, 1978. Further correspondence on this topic occurred on 5.1.1978 and 15.4.1978.

In 1978 I had an intensive correspondence with many colleagues:

J. Akiyama, B. Alspach, N. S. Annigeri, L. Babai, J.-C. Bermond, J. A. Bondy, M. Borowiecki, R. C. Bose, F. C. Bussemaker, M. F. Capobianco, S. D'Amato, M. Doob, C. Godsil, S. K. Gupta, F. Harary, M.-C. Heydemann, A. J. Hoffman, W. Imrich, C. Johnson, V. R. Kulli, L. Lesniak-Foster, J. H. van Lint, D. Marušič, R. N. Naik, T. Pisanski, D. Powers, P. R. Rao, D. Rouvray, H. Sachs, E. Sampathkumar, A. J. Schwenk, J. J. Seidel, J. M. S. Simoes-Pereira, D. Šiljak, J. Topp, W. T. Tutte, H. B. Walikar, H. Walther.

**File 6: CORRESPONDENCE WITH H. SACHS AND M. DOOB, 1977 - 1980**, file name Dragos+6+R.pdf, 531 pages

*Comments by D. Cvetković*

In 1980 the first edition of the following book appeared:

Cvetković D., Doob M., Sachs H., *Spectra of Graphs - Theory and Application*, Deutscher Verlag der Wissenschaften - Academic Press, Berlin - New York, 1980; second edition, 1982; Russian translation, Naukova dumka, Kiev, 1984; III revised and enlarged edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg – Leipzig, 1995.

In the period 1977 - 1980 I had an intensive correspondence with my coauthors concerning the work on the book. The correspondence with publishers and some other relevant persons is included.

**File 7: GENERAL CORRESPONDENCE, 1978 - 1984**, file name Dragos+7+R.pdf, 472 pages

*Comments by D. Cvetković*

There is an overlapping of periods of time with the file GENERAL CORRESPONDENCE, 1975 - 1978 but no overlapping of the included material.

In September 1979 Australian mathematician B.D. McKay visited Belgrade.

In the second half of 1979 I had much correspondence concerning the preparation of my trip to United States of America and Canada next year.

In the period 1980 - 1984 I was working with a group of collaborators on the programming package GRAPH, an expert system for graph theory.

In 1980 the first edition of the following book appeared:

Cvetković D., Doob M., Sachs H., *Spectra of Graphs - Theory and Application*, Deutscher Verlag der Wissenschaften - Academic Press, Berlin - New York, 1980; second edition, 1982; Russian translation, Naukova dumka, Kiev, 1984; III revised and enlarged edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg – Leipzig, 1995.

The following book has also appeared:

Cvetković D., *Combinatorial Matrix Theory with Applications in Electrical Engineering, Chemistry and Physics (Serbian)*, Naučna knjiga, Beograd, 1980,

In the period April - June 1980 I had a scientific trip to United States of America and Canada.

In July 1983 I was a visiting professor at Technische Hochschule Ilmenau, DDR. On this occasion I visited also the Prague.

In July 1984 I took part in a conference on graph theory in the International Mathematical Centre, Oberwolfach, BR Germany.

Izdavač

**Akadska misao**

Primorska 21, Beograd

Tel.: +381 11 3218 354

Fax: +381 63 298 027

Marko Vujadinović dipl. el. inž.

+381 63 30 10 75

marko.vujadinovic@akadska-misao.rs

Aleksandar Rašković, dipl. el. inž.

+381 63 30 10 65

sasa.raskovic@akadska-misao.rs

**www.akadska-misao.rs**

**office@akadska-misao.rs**

---

CIP - Каталогизација у публикацији  
Народна библиотека Србије, Београд

51:929 Цветковић Д. М.

012 Цветковић Д. М.

51(081)

ЦВЕТКОВИЋ, Драгош М., 1941-

Spektralna teorija grafova i kombinatorna

teorija matrica / Dragoš M. Cvetković. -

Beograd : Akadska misao, 2012 (Beograd :

Akadska misao). - VIII, 216 str. : graf.

prikazi ; 24 cm

Tekstovi na srp. i engl. jeziku. - Tiraž 50.

- Str.162-168: Citiranje knjiga i naučnih

radovakademika Cvetkovića u naučnoj

literaturi / Vera Kovačević-Vujčić. - Str.

206-210: Arhiva akademika Cvetkovića / Višnja

Milić. - Napomene i bibliografske reference

uz tekst.

ISBN 978-86-7466-445-2

а) Цветковић, Драгош М. (1941-) -

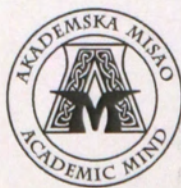
Аутобиографија б) Цветковић, Драгош М.

(1941-) - Библиографије с) Математика

COBISS.SR-ID 194252044

---





[www.akademska-misao.rs](http://www.akademska-misao.rs)