УДРУЖЕЊЕ СТУДЕНАТА МАТЕМАТИКЕ
НА БЕОГРАДСКОМ УНИВЕРЗИТЕТУ

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК

УРЕЂУЈЕ ОДБОР

БРОЈ 4 БРОЈ

ГОДИНА II 1 АПРИЛ 1938

Штампарија »Меркур« Д. Јанковића — Тел. 20-654

САДРЖАЈ:

„Математички Весник" излази повремено (по могућству четири пута годишње). Претплата стаје 35 динара за 4 броја.

Цена појединомброју 9 дин.

Све рукописе: чланке, задатке, решења и постављена питења, као и претплату и тражњу треба слати на адресу: *Удружење студената математике.* Редакциони одбор „Математичког весника" — *Београд, Универзитет.*

Умољавају се г.г. да чланке и задатке пишу што разговетније, а по могућству откуцавају на писаћој машини.

Приликом сваког дописивања са редакцијом „Математички Весник" треба стављати своју тачну адресу.

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК

Педагошки проблеми математике

1. Увод.

Ако својим радом стојимо у исправном односу према људском друштву, нећемо рад схватити саможиво, као своју забаву, као средство за своју корист или амбицију, него као жртву за опште добро у свету, за истину и правду. Рад на наукама треба да нам чини радост, али не само ради себе, него и других којима својим знањем можемо помоћи. На првоме месту омладини. Јер она је нарочито упућена на учење и васпитање, не би ли у своје време остварила више добра у свету него што садашњост успева. Васпитање омладине једна је од најсветијих дужности према своме народу и васцелом човечанству. А то је предмет педагогије. — Тако се педагошки проблем, као неодвојни део човекова основног става у животу, јавља свакоме ко с неким правом сматра себе моралном личношћу.

Нећемо се бавити разним педагошким правцима широм земаља, нећемо ни улазити у појединости праксе, него ћемо укратко покушати да створимо општу слику о питању које нас занима.

Ако неким средством хоћемо да учинимо неко добро, мора само средство бити добро и морамо њиме руковати на добар начин. Тако и у васпитању учењем можемо поћи од ова два питања: 1. Која је вредност науке? 2. Како ћемо постићи да, учећи друге тој вредности, крчимо пут даљем развоју човечанства? — Сад је реч о математици.

2. Вредност математике.

Дотакнимо то питање. Доста ће бити ако разликујемо три ствари.

1. Вредност математике по само сазнање. — Аритметика, алгебра, анализа, геометрија, итд., говоре о бројевима, величинама, облицима у простору итд. Њима сазнајемо нешто о себи и свету. Тако може математика бити предмет философије. Али она је и основа свих егзактних наука, она

уопште улази у све науке, уколико у њима долази до бројања и мерења. Особито физика, механика и астрономија имају уз експерименталну страну и чисто математску, теоријску страну. Тако суделује математика у сазнању природе и васионе.

2. Вредност математике по материјалну културу. — На егзактним наукама оснива се свеколика техника. Дакле, да није математике, били бисмо још у примитивном животу, као пре многих векова. Овако математика омогућава власт над материјом, плодове који још чекају на добру вољу људску, да би се показали у свој својој величини.

3. Васпитна вредност математике. — Исправан однос према математици оплемењује. Математика је пре свега јасно, разговетно и уређено знање. Сваки њен став сачињава један исказ чији смисао произлази тачно из основних појмова и ставова (аксиома). Он је чврсто везан са осталим ставовима јасним логичним везама. Ставови су нанизани одређеним редом у теорије. — Тиме математика учи људе мислити, јасно, логично, објективно. Учи реду у мислима, а преко мисли у свему животу. Како се сем тога математско знање постиже само истрајним, систематским радом, васпитава математика и друге врлине карактера. Само бављење нечим што човек не изграђује телесном снагом, него мислима, као зграду чистих мисли, јача доживљај унутарње слободе. Укратко, математика помаже човеку да буде слободан и социјалан. Разуме се, може се догодити баш супротно; али ту није крива математика него неисправан однос према њој.

3. Педагогија математике.

Сад можемо питати: како се математика предаје онима што се у школи или животу треба са њом да упознају, како да они најбоље стекну жељено и потребно знање и како да општа васпитна вредност математике покаже најбоље свој благотворни утицај у свету?

Одмах треба нагласити: педагогија је наука, али још више уметност. Јер њено је поље сам живот, њени предмети жива људска бића. У математици, којој није лако прићи, уметничка страна педагогије имала би можда да достигне своје врхунце. Но пре свега педагогија је рад. — Рад се прво припрема, затим изводи. Донекле можемо и ми ићи по том реду.

4. Избор градива.

Прво треба изабрати оно из математике, што ће се предавати у дотичној школи. При избору долази у обзир сврха школе (опште образовање или стручна спрема), моћ схватања ученика (с обзиром на њихову старост, спрему, прилике живота и слично), савремено стање математике и њених примена (нови плодови, нова становишта) итд. Уколико школама управљају државе, оне одређују градиво. Тако се постиже веза и подједнакост школа у простору и времену. Али је и у том оквиру увек извесна слобода могућа, нарочито у вишим школама, које својом самосталношћу омогућују слободно математско образовање. Додајмо да је с обзиром на тежину математике у њој избор градива теже и осетљивије питање него можда игде другде.

Још једно питање: Ваља ли учити само оно из математике, што ће у пракси бити потребно? Сигурно не. Сврха је учења много шира. Ради се уопште о математичком васпитању. На вишем школовању и о богаћењу и продубљењу знања (треба нешто знати и шта је математика данас) и, опет, о јачању способности математичког мишљења.

5. Распоред градива.

При распореду изабранога градива долази у обзир моћ схватања ученика у одговарајућем часу живота, њихово школско образовање, међусобна условљеност појединих делова математике (разумевање појединих делова претпоставља друге), дужина наставног времена итд. И распоред се може прописати више или мање. Разумљиво је да то бива кад су у питању дужи размаци времена (н. пр. програми за године и полугодишта). Но може се указати потреба и за детаљнија одређења. Ту углавном вреди оно: што је гори наставник, тим су боља мудра одређења; што је бољи наставник, тим су гора, ма и мудра, јер га спутавају у његовом слободном педагошком стваралаштву, којим он ништа не занемарује. Но математичари, васпитани на ред својом струком наћи ће и нужну слободу у задатим границама.

6. Начин предавања.

О начину, тачније: методи наставе бави се методика, засебна грана педагогије. Но главно је разликовати присилно уливање знања ученицима од пажљивог настојања да се знање у њима слободно развије. Ко би сматрао да ђаке мора „дресирати", „тесати" као камење, био би рђав наставник. Он не би помогао образовању свесних људи, већ аутомата страних животу и непријатеља просвети. Осећање реда и дужности не сме и не може почивати на страху и немоћи, већ на љубави и слободи ученика према учитељу и учењу. Опасност да се слободан развој схватања замени неслободним наметањем знања, учењем напамет несварених правила итд., ваљда је највећа у математици. Зато у овом погледу најтежа дужност припада наставницима математике. Њихова љубав и разумевање ђака мора их водити, да не врше насиље над слободним развојем душевних способности ђака, него да те способности „дочарају“, као сунце и ваздух раст биља. Добротом треба изагнати страх, а занимљивошћу предавања досаду.

7. Наставници пред ђацима и са ђацима.

Тачно је поређење наставника пред ђацима са глумцем на позорници. Наставник је предмет пажње. Тога треба да је свестан, али баш зато и тога, да он не игра ничију другу улогу него своју. Он треба да настоји да буде искрен, не баналан, да не меће маску строгости, ни важности, ни старатељства итд., него да врлине до којих се уздигао саме говоре. Само тако престаће да буде „изван“ ђака и биће са ђацима, а како он, тако и оно што предаје. Развиће се ужа сарадња, толико важна за напредовање ученика.

У математичкој настави моћи ће дакле и ове врлине наставника, које је он развио математским радом, проговорити целом његовом појавом: уредношћу, јасношћу, сигурношћу, разложитошћу — у говору, држању, вођењу креде по табли итд. Тиме уче деца бар колико самим садржајем излагања.

8. Психолошки проблем.

Блискост ђацима има правог смисла и плода само кад уз добру вољу за њом постоји и разумевање омладине. То је често утолико теже што је разлика у годинама већа. Сем тога, дете је тајна за свакога, као и за себе. Не сме се мислити да је дете психички исто што одрасли, само умањено. Живот је стално преображавање и већ садањом својом свешћу једва се можемо пренети у своју сопствену свест од пре више година. Ако хоћемо да схватимо своје биће кад бејасмо дете морамо се трудити да некадањег „себе“ ма за часак оживимо. Још теже је исправно схватити другу децу, уживети се у њу. То уживљавање мање је предмет науке, више умења. Обично, ко је свеснији свога развоја од раног детињства до садањег часа, тај ће „решавати“ лакше и психолошки проблем педагогије. Свако је дете засебан проблем, па и тај изискује своју пажњу увек изнова.

У математици важно је да се правилно схвата како треба прилазити детету и у којој старости за појединим деловима математике. Штетно је утувити неки апстрактни појам или закључак кад још дете схвата само оно што опажа чулима и што може да оживи у машти, у којој бујају разноврсне снаге схватања, али још у хаотичном стању, далеко од кристалне чистоте строгога логичног мишљења.

9. Очигледност као увод у математику.

Природно је да се од материјалних предмета, датих нашим чулима пође у тумачењу математских појмова и односа. На тај начин математско знање добива свој полазни ослонац. Математичке појмове мора ђак изградити себи у чистим мислима, а у то се он мора постепено уводити. Свест, мишљење и друге душевне снаге спавају т.р. у нама од рођења, тек их чулно искуство буди. Тако је и са мисаоним садржајем математике. Наставник мора изводити буђење математике пажљиво, да не збуни ученике, јер се тада дуго иза тога, можда целога живота они неће снаћи у математици.

У основној школи, кад се полази од бројања, мора се стално враћати на разне предмете који се т. р. рукама броје, па на замишљање тих предмета, док постепено не изблeди у сећању ђака свака чулна слика, а остане чиста способност рачунања. У њој касније ђак открива чисте логичне појмове и односе. Особито у почетку геометрије очигледна настава долази до лепог изражаја. Када ђаци „проналазе" особине правилних тела држећи их у рукама облива их радост.

Тај елеменат очигледности задржава значај и касније. Њему се враћа и сам научник при свом истраживању. Доцније је само мање потребно градити тела а више цртати или пак стеченом способношћу просторног и временског претстављања само замишљати неко искуство. Тако, да споменем само једно, функције претстављамо линијама обично само зато, да би нам њихове особине постале очигледније.

10. Доживљај хармоније у математици.

Он се јавља н. пр. при упознавању правилних геометријских тела. Деца, често јаче но одрасли, могу осетити чари геометријских облика. То је у ствари уметнички доживљај. Он је важан и зато што гони досаду и учење претвара у радост. Тај уметнички, естетски доживљај не почива само у основама нашега знања геометрије, него свеколике математике. Другде нам само можда још мање долази до свести, јер му је просторна, неимарско-сликарска природа мање очигледна. У основи свега нашег математичког знања почива чисто музикалан доживљај. Још дете, кад савлада прве тешкоће памћења и научи бројати, па н. пр. таблицу множења, осећа временски ритам бројања, множења итд., као радост, ако га школа не мучи. Наставник ће много помоћи ако се свесно ослања на тај музикални доживљај. И доцније, у алгебри, па и анализи, при учењу и решавању задатака, кад год знање тече а не запиње, осећа се нешто слично као при слушању музике. Радост од математике увек је музичке природе, само често измучене, гурнуте у потсвест. Само на овој и поменутој чулној подлози математика постаје наше знање. Па и научно проналажење, његова интуитивна страна, потиче из тих дубина.

11. Строги формализам.

Сада тек почиње математика у ужем смислу. Када су поменути темељи ту, може почети пречишћавање појмова. Полазни чулни и осећајни садржај аритметичких, алгебарских и геометријских појмова треба занемарити, апстраховати, а задржати само апстрактне облике тих појмова, њихове форме. Другим речима, треба се винути до математичког мисаоног формализма. Које су то форме? — Форме логичног мишљења. Математика је у том погледу као нека разграната логика која се може све даље развијати, у бескрај. Тиме што се полазни садржаји појмова занемарују, појмови постају као неке празне посуде у које можемо стављати садржај какав желимо (н. пр. у теоријској физици математички појмови добивају физикални смисао). Врло је важно да тај процес мишљења ученици схвате у прави час. Ако не схвате могу настати разни неспоразуми којима је после тешко ући у траг. Може н. пр. ђак очекивати од математике нешто што она не даје, давати појмовима смисао који они немају.

Ако наставник ту успе, све што буде излагао биће ђацима лако схватљиво и једино што им још остаје, то је да сталним радом стекну извежбаност, лакоћу логичног закључивања, доказивања, решавања задатака. То је сад ствар вежбе, равномерне и без претеривања, као нека гимнастика. Ако напротив наставник не успе, знање ђака биће лажно знање, тегобно памћење мрака.

12. Критичко враћање на стечено знање.

До тога води продужење започетог пречишћавања математичког знања. Сама слобода свести захтева да се критички прегледа оно што се раније мање свесно примало. То је сталан посао, који треба да прати наставу математике од почетка, да би се исправило оно што је ђак погрешно или нејасно схватио и уопште да би знање постало свесније и тачније. Али ту критику треба врло опрезно водити, да се њоме ученици не збуне, да им се појмови не компликују одмах преко потребе. Не треба заборавити да се ништа не може критиковати споља. Прво се мора ући у математику или неки њен део, да би се то онда могло свесно оцењивати, допуњавати, итд. До пуног изражаја може дакле та критика доћи само у вишој настави, па и ту углавном при крају. Тиме се донекле иде и упоредо са развојем науке, који је особито од краја прошлог века окарактерисан својом критичком ревизијом појмова (теорија множина, аксиоматика геометрије и математичка логика само су сјајни примери тога). Историјско и психолошко гледиште продубљује ту критику.

13. Упутства за самостални или заједнички рад.

У наше доба не треба заборавити да тежња за самосталношћу добива и при учењу све већи значај. У ђацима треба неговати слободну предузимљивост у раду, а то значи: сем буђења воље за самостални рад давати и савете како се самостално ради. Тако ће уосталом ђаци успешно закорачити и на више школе, где је самосталност учења предуслов успеху. У математици, где се свако мора задубити сам у предмет учења, ова самосталност је важна. Али и друженост. Јер у слободном међусобном излагању нечега што се научило, у расправљању разних отворених питања ничу нови потстрецн и развија се смисао за друштвени рад, сообразан садашњости.

У чему су та упутства? Обично у појединостима које се не могу набројати. Уопште у проналажењу и освештавању свога сопственог начина рада и начина заједничког рада. Наглашавати се може и љубав за сазнањем, за научним и педагошким радом, тежња за јасношћу, истрајност, поступност и равноправност, стварање свога распореда, понављање градива, бележење при учењу, самоиспитивање и међусобно испитивање, организовање заједничког рада, шире размишљање итд.

14. Педагошко васпитање будућих наставника.

Такво је васпитање потребно. Како и у ком облику тешко је рећи. Можда је најважније самоваспитање наставника. Највише даје само искуство, које се стиче истодобним самоваспитавањем и васпитавањем васпитаника. Требало би да узрок сваком неуспеху ђака учитељ прво потражи у себи, а тек затим у недостацима ђака. Главно је да наставник влада добро својом струком и својим говором. — Све то је добром наставнику лако, јер њега, ма у најтежим приликама био, не покреће на рад никакав себичан мотив, него чиста љубав спрам општег живота што се буди и расте ту, пред његовим очима и његовим дахом.

Милош Радојчић

О предавању коничних пресека.

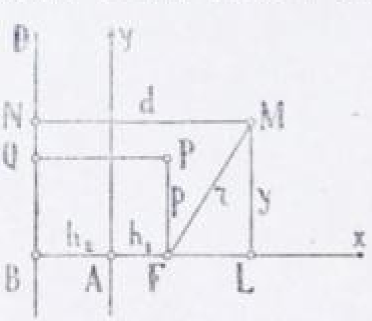
Позната метода излагања елементарне теорије коничних пресека, путем раздвајања тих кривих још у почетку излагања на криве линије са центром и без центра, толико се одомаћила, нарочито у средњој школи, да су друге методе, изгледа, изгубиле сваку наду на успех у борби са првом. То је дошло у главноме због тога што већина писаца сматрају прву методу као најпростију. Међутим та метода има веома крупан недостатак: она не полази од заједничке особине свих врста коничних пресека, него код елипсе и хиперболе узима особину фокалних потега, код параболе особину фокалног потега и отстојања од директрисе. Тиме та метода одузима коничним пресецима њихову битну особину јединог геометријског облика у различитим варијантама, која је била полазна још у античној математици.

Циљ је овог чланка показати да друга метода, метода фокуса и директрисе, може бити изнесена у форми исто толико једноставној колико је једноставна форма и прве методе, а при томе је она слободна од горе наведеног недостатка те методе. Сем тога друга метода може са успехом да послужи решењу и основног задатка теорије коничних пресека у Декартовим координатама, наиме одређивању положаја и форме криве из једначине другог степена са бројним коефицијентима у општем облику.

Садржај прва два параграфа овог чланка може бити предметом рада у средњој школи; садржај трећег параграфа, који не улази у програм средње школе, служи за потврду, да наведена метода са успехом може да послужи решавању свих задатака који се решавају првом методом.

I.

Геометријско место тачака у равни, чија се отстојања од једне сталне тачке и једне сталне праве налазе у сталној размери, претставља криву која се зове конични пресек. Стална тачка се зове жижа или фокус, стална права управница или директриса. Фокус означавамо са F, директрису са D (слика 1).



Сл. 1

Уочимо три тачке, које припадају нашем геометријском месту. Једну M произвољног положаја и две специјалног: тачку A на управној из фокуса на директрису и тачку P на правој која пролази кроз фокус и стоји паралелно са директрисом. Отстојања тих тачака од фокуса означимо са:

$$r, h_1, p,$$

а од директрисе са:

$$d, h_2, h_1 + h_2.$$

На основу дефиниције нашег геометријског места биће тада:

$$r : d = \text{Const.} = e = h_1 : h_2 = p : (h_1 + h_2),$$

где је e сталан број, који се зове бројна ексцентричност коничних пресека.

Из претходних једначина непосредно имамо:

$$r = ed, \tag{1}$$

$$h_1 = eh_2, \tag{2}$$

$$p = e(h_1 + h_2). \tag{3}$$

За анализу геометријског места методом аналитичне геометрије уводимо координатни систем Axy, чији је положај очигледан из слике 1. Тада ћемо из троугла FML према Питагориној теореми имати:

$$\begin{aligned} y^2 &= r^2 - \overline{FL}^2 = (\text{пошто је } r = ed) \\ &= e^2 d^2 - \overline{FL}^2 = (\text{према слици}) \\ &= e^2 (x + h_2)^2 - (x - h_1)^2 = \\ &= (e^2 - 1)\, x^2 + 2x\,(e^2 h_2 + h_1) + e^2 h_2^2 - h_1^2. \end{aligned}$$

Али према (2) за слободни члан имамо:

$$e^2 h_2^2 - h_1^2 = 0,$$

а за коефицијенат уз x према (2) и (3) биће:

$$e^2 h_2 + h_1 = e\,.\,\underbrace{eh_2}_{h_1} + eh_2 = e\,(h_1 + h_2) = p$$

и на тај начин дефинитивно имаћемо:

$$\boxed{y^2=2px+(e^2-1)x^2}$$

Ова једначина може се сматрати за основну једначину сваког коничног пресека. Анализа криве помоћу те једначине најлакше се изводи одређивањем тачке пресека криве са x осовином. Положај тачака пресека, према услову $y=0$, одређује се коренима једначине:

$$2px+(e^2-1)x^2=0,$$

чији један корен $x=0$ одговара тачци A. За другу тачку пресека имамо:

$$(e^2-1)x+2p=0\ .$$

Та тачка не постоји (другим речима налази се у бесконачности) за:

$$\text{(I')} \qquad e=1\ ;$$

она има положај десно од A са отстојањем

$$x=\frac{2p}{1-e^2}=2a$$

за случај:

$$\text{(II')} \qquad e<1\ ,$$

а лево са апсцисом

$$x=-\frac{2p}{e^2-1}=-2a, \quad \text{за случај}$$

$$\text{(III')} \qquad e>1$$

При чему смо са a означили апсолутну вредност разломка: $\frac{p}{1-e^2}$. У првом случају тачка A се налази на средини између фокуса и директрисе, у другом ближе фокусу, у трећем ближе директриси.

Једначине криве у тим случајевима могу бити претстављене овако:

$$\text{(I)} \qquad y^2 = 2px,$$

$$\text{(II)} \qquad y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2,$$

$$\text{(III)} \qquad y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2,$$

при чему у случају (II) a има вредност:

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

а у (III):

$$a = \frac{p}{e^2 - 1}$$

према томе је a увек позитивно.

Пошто у првом случају две површине, квадрат y^2 и правоугаоник $2px$, имају исте вредности, крива се зове *парабола* од грчке речи ἡ παραβολή — једнакост. У другом случају површини квадрата недостаје површина $\frac{p}{a}x^2$ да буде иста са површином правоугаоника; према томе се крива зове *елипса* од грчке речи ἡ ἔλλειψις — недостатак. Најзад у трећем случају квадрат y^2 има површину већу према површини $2px$ за $\frac{p}{a}x^2$; крива се зове *хипербола* према грчкој речи ἡ ὑπερβολή — сувишак.

II.

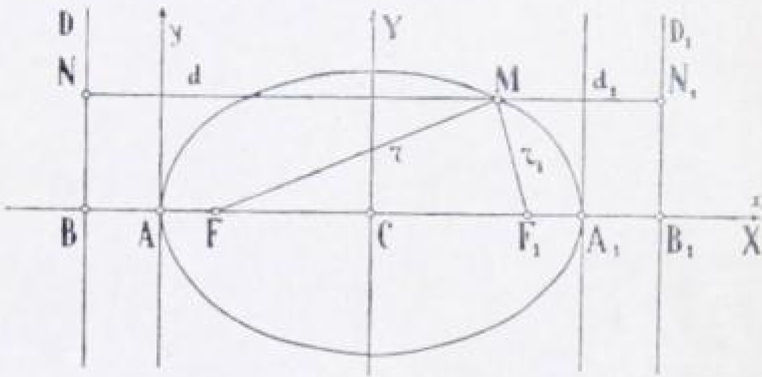
Анализа форме параболе из једначине (I) врши се на познати начин. Покажимо како може да се врши анализа геометријских особина елипсе на основу једначине (II), коју ћемо написати овако:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 = \frac{p}{a}x(2a-x). \tag{4}$$

Уведимо нов координатни систем CXY (слика 2) са почетком у тачци C чије су координате: $x = a$, $y = 0$. Тада имамо:

$$x = X + a,$$

$$y = Y.$$



Сл. 2.

За нове промењиве X и Y из (4) следи:

$$Y^2 = -\frac{p}{a}(X+a)(X-a) = -\frac{p}{a}(X^2-a^2),$$

а одавде:

$$\frac{p}{a}X^2 + Y^2 = pa.$$

Ставимо ли:

$$pa = b^2,$$

добићемо дефинитивну једначину:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Из ове једначине следи на очигледан начин симетричност елипсе у погледу на осе CX и CY, а из симетричности следи постојање другог фокуса F_1 и друге директрисе D_1. Ако са r_1 и d_1, означимо отстојања произвољне тачке M криве од другог фокуса и друге директрисе, онда заједно са једначином (1) за ту тачку:

(1) $$r = ed,$$

важи и једначина:

(5) $$r_1 = ed_1.$$

Број e и у једној и другој од једначина мора да има исту вредност, јер тачка A_1 због симетрије дели отстојање F_1B_1 у истој размери у којој тачка A дели дуж FB.

Сабирањем из (1) и (5) следи:

$$r + r_1 = e\,(d + d_1) = e\,.\,\overline{BB_1} = \text{Const.},$$

а то је она особина фокалних потега, која се узима за полазну у обичном извођењу једначине елипсе. Означена константа има вредност $2a$, како то следи из сабирања фокалних потега, рецимо, тачке A.

На исти начин може бити изведена анализа хиперболе

III.

Применићемо сада показану анализу коничног пресека на проучавање опште једначине другог степена, коју пишемо овако:

(6) $$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Означимо координате траженог фокуса са $F(m, n)$, а једначину одговарајуће директрисе напишимо у нормалном облику:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - \delta = 0.$$

Особину сваког коничног пресека, претстављену једначином (6), можемо тада да изразимо овако:

(7) $$(x - m)^2 + (y - n)^2 = e^2\,(x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta)^2.$$

Пошто у случају идентичности кривих са једначинама (6) и (7), ове једначине могу да се разликују само константним множитељем, рецимо λ, то после изједначења коефицијената можимо написати следеће услове:

(8) $$A\lambda = 1 - e^2\cos^2\alpha,$$

(9) $$B\lambda = -\,e^2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$
\begin{aligned}
&(10) \qquad C\lambda = 1 - e^2 \sin^2 \alpha \,, \\
&(11) \qquad D\lambda = -m + e^2 \delta \cos \alpha \,, \\
&(12) \qquad E\lambda = -n + e^2 \delta \sin \alpha \,, \\
&(13) \qquad F\lambda = m^2 + n^2 - e^2 \delta^2 \,.
\end{aligned}
$$

Из тих једначина можемо да изведемо следећи поступак за одређивање фокуса и директрисе коничног пресека.

Прво, ако уведемо ознаку

$$\operatorname{cotg} \alpha = \mu \,,$$

за одређивање те величине можемо написати једначину:

$$(14) \qquad B\mu^2 - (A - C)\mu - B = 0,$$

која непосредно следи из упоређивања израза

$$B\lambda\,(\mu^2 - 1) \quad \text{и} \quad (A - C)\,\lambda\mu$$

израчунатих према једначинама (8), (9) и (10).

Даље можемо саставити односе:

$$(15) \quad \frac{Am + Bn + D}{\cos \alpha} = \frac{Bm + Cn + E}{\sin \alpha} = \frac{Dm + En + F}{-\delta} =$$

$$= -\frac{e^2}{\lambda}\,(m \cos \alpha + n \sin \alpha - \delta)\,,$$

чија се једнакост непосредно потврђује, ако место $A, B, \ldots$ ставимо њихове вредности из (8)—(13).

Из једначине (15) можемо написати, као закључак, две следеће једначине:

$$(16) \quad Am + Bn + D = \mu\,(Bm + Cn + E).$$

$$(17) \quad Bf(m, n) = B\,(Am^2 + 2Bmn + Cn^2 + 2Dm + 2En + F) =$$

$$= \mu\,(Bm + Cn + E)^2 \,.$$

Према изведеним једначинама рачун се врши следећим редом:

1. Из једначине (14) одређује се величина μ;
2. Из једначина (16) и (17) одређују се m и n;
3. Множитељ λ можемо одредити из формуле:

$$\lambda = \frac{\mu}{\mu C - B}, \tag{18}$$

а e^2 из једне од једначина:

$$\begin{aligned} \lambda(A+C) &= 2 - e^2, \\ \lambda^2(B^2 - AC) &= e^2 - 1 \end{aligned} \tag{19}$$

из којих после елиминисања e^2 можемо написати једначину:

$$(B^2 - AC)\lambda^2 + (A+C)\lambda - 1 = 0;$$

ова последња једначина, после упоређивања са (14), даје везу (18) између λ и μ.

4. Најзад из једначина (15) следи за дати фокус $F(m,n)$ следећа једначина директрисе:

$$x(Am + Bn + D) + y(Bm + Cn + E) + Dm + En + F = 0. \tag{20}$$

Као пример узмимо једначину*):

$$2x^2 - 12xy - 7y^2 + 18x + 36y - 27 = 0.$$

Једначина (14) се пише овако:

$$\mu^2 + \frac{3}{2}\mu - 1 = 0,$$

одакле имамо: $\mu_1 = \frac{1}{2}$, $\mu_2 = -2$. За μ_1 једначине (16) и (17) дају решења:

$$m = 0, \quad n = 0; \qquad m = \frac{9}{5}, \quad n = \frac{18}{5};$$

за μ_2 решења истих једначина имају облик:

$$m = \frac{9}{10} \mp \frac{9}{5}i \qquad n = \frac{9}{5} \pm \frac{9}{10}i,$$

а то значи да тој вредности од μ одговарају имагинарни фокуси.

Из (18) имамо:

---

*) Овај пример је узет из чланка L. Crawford-а публикованог у The Mathematical Gazette, February, 1934.

$$\lambda = \frac{0,5}{6-0,5\,.\,7} = 0,2\,,$$

после чега из (19) добијамо:

$$e^2 = 2 - \lambda\,(A+C) = 3.$$

За фокус $F(0,0)$ једначина директрисе према (20) има форму:

$$x + 2y - 3 = 0,$$

а за фокус $F_1\left(\frac{9}{5},\ \frac{18}{5}\right)$ овакву:

$$x + 2y - 6 = 0\ .$$

Отстојање фокуса од директрисе $h = h_1 + h_2$ има вредност:

$$h = \frac{3}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

и према томе параметар p ове хиперболе изгледа овако:

$$p = eh = \sqrt{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{15}\ .$$

Једначина ове криве у најпростијем облику према фокусу и директриси може бити написана на следећи начин:

$$\eta^2 = \frac{6}{5}\sqrt{15}\,\xi + 2\xi^2$$

где су ξ и η нове одговарајуће координате тачке.

Најпростији облик једначине те исте криве за центар и главне осе изгледа овако:

$$2X^2 - Y^2 = 2,7.$$

Ако једначини одговара парабола, поступак довођења до најпростијег облика постаје мало једноставнији, суштина му остаје иста.

Антон Билимовић

Поступак решавања задатака из више анализе.

Ако се писмено решава неки задатак, треба настојати да излагање буде кратко, али јасно, логично. Теорију не треба опширно износити, она се и тако претпоставља. Где треба, нацртати слику (што овде нећемо чинити). Н. пр. овако:

Задатак:

1. Наћи вредност интеграла

$$J=\int_0^{\infty}\frac{x^m\,dx}{x^2+n^{\frac{1}{3}}x+n^{\frac{2}{3}}}\qquad(|m|<1,\ n>0)$$

рачуном остатака.

2. Одредити врсту свих целих функција $F(z)$, чије су нуле a_n $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots)$ просте, реалне и такве да је $|a_n|=$ модулу корена једначине $x^2+n^{\frac{1}{3}}x+n^{\frac{2}{3}}=0$.

3. Написати Вајерштрасов општи израз за функције $F(z)$ и навести једну елементарну функцију $F(z)$, па помоћу ње изразити $F(z)$ у коначном облику.

4. Отуда показати да се место Вајерштрасова израза може писати и

$$F(z)=z\,e^{f(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^6}{n^2}\right).$$

5. Колико нула има $f(z)$?

Решење:

1. Пишимо краће $x^2+n^{\frac{1}{3}}x+n^{\frac{2}{3}}=P(x)$. Треба посматрати интеграл

$$\int_C\frac{z^m\,dz}{P(z)}\qquad(z=x+iy)$$

дуж затворене криве C коју ћемо одредити. Функција коју интегралимо има ове сингуларитете:

a) Корене z_1, z_2 једначине $P(z)=0$ као полове првог реда. Дакле: $z^2+n^{\frac{1}{3}}z+n^{\frac{2}{3}}=0$, $z_{1,2}=\frac{n^{\frac{1}{3}}}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$

b) $z=0$ као критичну тачку: алгебарску ако је m рационалан, трансцендентну ако је m ирационалан број (никакву ако је $m=0$).

Према томе изаберимо C. Узмимо да C

[Уместо слике!]

прати осовину x, од $x=r$ до $x=R$,
затим описује круг $|z|=R$, цео,
затим опет прати осовину x од $x=R$ до $x=r$,
затим описује круг $|z|=r$, цео, и C се затвара

Намера нам је да $r \to 0$, $R \to \infty$, дакле можемо сматрати да су z_1 и z_2 увек унутар C.

Према познатом обрасцу остатак неке функције $\frac{\varphi(z)}{z-a}$, где је $\varphi(z)$ регуларна у a, раван је $\varphi(a)$. Како је наша функција

$$\frac{z^m}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

њени су остаци

$$B_1=\frac{z_1^m}{z_1-z_2} \text{ у } z_1 \text{ и } B_2=\frac{z_2^m}{z_2-z_1} \text{ у } z_2,$$

дакле је

$$\int_C \frac{z^m\,dz}{P(z)}=2\pi i\,\frac{z_1^m-z_2^m}{z_1-z_2}=\frac{n^{\frac{m-1}{3}}\pi}{2^{m-1}\sqrt{3}}\left[(-1+i\sqrt{3})^m-(-1-i\sqrt{3})^m\right].$$

С друге стране је

$$\int_C=\int_r^R \frac{x^m\,dx}{P(x)}+i\int_0^{2\pi}\frac{R^{m+1}e^{(m+1)\theta i}\,d\theta}{P(Re^{\theta i})}+$$

$$+e^{2m\pi i}\int_R^r \frac{x^m\,dx}{P(x)}+i\int_{2\pi}^0 \frac{r^{m+1}e^{(m+1)\theta i}\,d\theta}{P(re^{\theta i})}.$$

Други интеграл с десне стране је $=R^{m-1}\int_0^{2\pi}\frac{e^{(m+1)\theta i}\,d\theta}{e^{2\theta i}+\frac{n^{\frac{1}{3}}e^{\theta i}}{R}+\frac{n^{\frac{2}{3}}}{R^2}}$;

како је $m-1<0$, то $R^{m-1}\to 0$ кад $R\to\infty$, а израз под знаком интеграла тежи ограниченим вредностима; дакле цео израз $\to 0$.

Четврти интеграл с десне стране

$$= -r^{m+1}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{(m+1)\theta i}\,d\theta}{r^2 e^{2\theta i}+n^{\frac{1}{3}} r e^{\theta i}+n^{\frac{2}{3}}}\ ;$$

како је $m+1>0$, то $r^{m+1}\to 0$ кад $r\to 0$, а израз под знаком интеграла тежи ограниченим вредностима; дакле цео израз $\to 0$.

Према томе

$$\lim_{\substack{r=0\\R=\infty}}\int\limits_C = (1-e^{2m\pi i})\int\limits_0^{\infty}\frac{x^m\,dx}{P(x)}$$

и коначно

$$J=\frac{n^{\frac{m-1}{3}}\pi\,[(-1+i\sqrt{3})^m-(-1-i\sqrt{3})^m]}{2^{m-1}\sqrt{3}\,(1-e^{2m\pi i})}\,.$$

2. $|z_{1,2}|=n^{\frac{1}{3}}$, дакле $|a_n|=n^{\frac{1}{3}}$, $a_n=\pm n^{\frac{1}{3}}$. Како n може бити сад и негативно, можемо ставити

$$a_n=n^{\frac{1}{3}}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)\,.$$

Модуларни ред гласи (без a_0)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|a_n|^{p+1}}+\frac{1}{|a_{-n}|^{p+1}}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p+1}{3}}}\,.$$

Конвергираће ако је $\frac{p+1}{3}>1$, дакле бар $p=3$. Ово је врста целих функција $F(z)$.

3. $F(z)=z\,e^{g(z)}\prod\limits_{\substack{-\infty\\(n\neq0)}}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n^{\frac{1}{3}}}\right)e^{g_n(z)}\,,$

$$g_n(z)=\frac{z}{n^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{2}\,\frac{z^2}{n^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{3}\,\frac{z^3}{n}\,.$$

Елементарну функцију са истим нулама налазимо овако:

$$\begin{aligned} &\sin z \quad \text{има нуле у } n\pi, \\ &\sin \pi z \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \; n, \qquad (n = 0, \pm 1, \ldots) \\ &\sin \pi z^3 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \; n^{\frac{1}{3}}; \end{aligned}$$

дакле $\sin \pi z^3$ је таква функција. Тада функција $\frac{F(z)}{\sin \pi z^3}$ нема више нула, дакле је њен логаритам опет цела функција $h(z)$, те можемо писати

$$F(z) = e^{h(z)} \sin \pi z^3.$$

4. Познат је образац

$$\sin \pi z = \pi z \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Отуда следује

$$F(z) = \pi z^3 e^{h(z)} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^6}{n^2}\right),$$

па и тражени образац, јер можемо ставити $\pi e^{h(z)} = e^{f(z)}$.

5. $F(z)$ је врсте 3, дакле $f(z)$ мора бити полином степена 3, те има, највише, три просте нуле, једну просту и једну двоструку или једну троструку нулу.

Метаморфоза конусних пресека.

Посматрамо ли контуре сенке на једној вертикалној равни која се окреће око двеју размакнутих кугала између којих се налази један врло мали извор светлости, једна светла тачка, опазићемо углавном четири врсте контура. Сенка се простире и на једну и на другу страну у облику конуса чији се врхови налазе у светлој тачки. Помичемо ли нашу раван, остављајући је увек вертикално, приметићемо одмах да контура сенке зависи од положаја равни.

Види се да ће контура, ако раван, рецимо квадрат додирује једну куглу и налази се у положају кад су његова темена подједнако удаљена од светлосног извора, бити круг. Помичемо ли раван паралелно из тог положаја добиваћемо стално кругове све веће и веће. А, ако раван доведемо опет у свој првобитни положај, то јест да додирује куглу, и скренемо је врло мало. за бескрајно мали угао, добићемо контуру

— елипсу, која ће постојати, ако раван постпуно скрећемо, све дужа и дужа, препорционално углу скретања. Али чим раван, замишљајући да је „продужена у бесконачност“ у правцу простирања слике, заузме положај паралелан одговарајућој бочној ивици конуса, сенке, опазићемо контуру која је на једном крају изчезла, — криву линију коју називамо парабола. Скрећемо ли нашу раван поступно из тог положаја, претпостављајући да се „простире у бесконачност“ и на једну и на другу страну: примећиваћемо све јаснију контуру и на другој страни; кад раван дође у положај да додирује и другу куглу, опазићемо две симетричне контуре које изчеваравају у правцу простирања сенке и на једну и на другу страну, — добићемо криву линију, састављену из две отворене симетричне гране, коју називамо хипербола. Све тачке појединих добивених контура сенки, наших кривих линија имају за сваку криву своје специјално својство, „налазе се у вези“. Све тачке свих конусних пресека имају општа карактеристна својства која се читају из њихове опште једначине коју ћемо доцније извести.

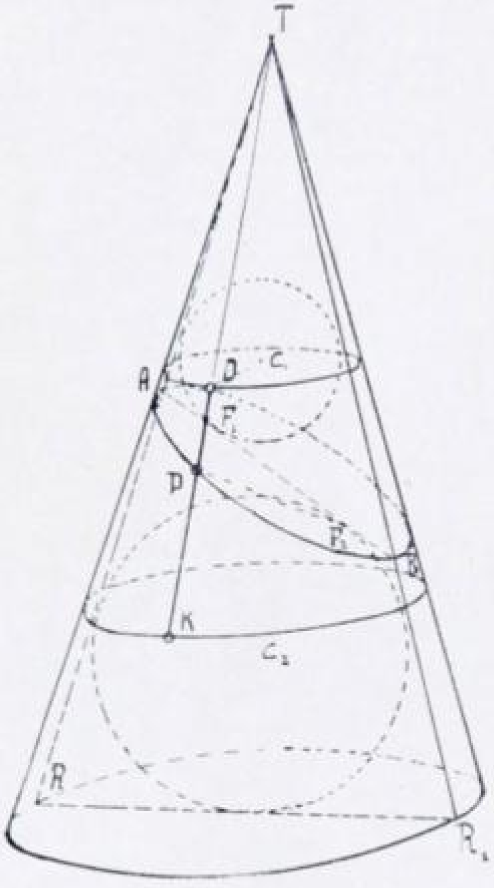
* * *

На основу једног доказа који је дао Dandelin (1797-1847), којег ћемо у идућем броју нашег „Весника“ дати, показаћемо стереометријски дефиниције конусних пресека. Предочимо један прави конус, рецимо. нашу сенку, у којој се налази једна кугла која га додирује, пресечен косо једном равни Π_2 која додирује ту куглу и још другу већу куглу испод те равни, која као и прва кугла додирује конус дуж једног круга (сл. 1). Центри тих кугала налазе се на осовини конуса пошто је он прав. Нека су њихови центри C_1 и C_2, а додирне тачке са равни Π_2: F_1 и F_2. Нађимо сада везу између тачака (њихово карактеристично својство) пресечне криве која настаје пресеком равни Π_2 и конуса. Повуцимо кроз макоју тачку пресека пресечне криве линије бочну ивицу; она сече кругове дуж којих кугле додирују наш конус у тачкама D и K. По две тангенте повучене из ових тачака на одговарајуће кугле једнаке су, то јест

$$PF_1 = PD \text{ и } PF_2 = PK.$$

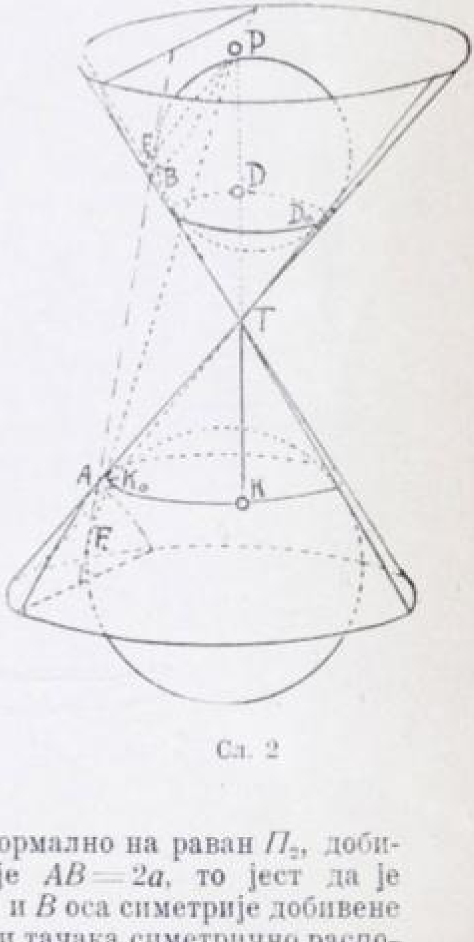
Креће ли се тачке P дуж наше пресечне криве, дуж DK остаје константа. Нека је она једнака $2a$, онда је $PD + PK = 2a$, $PF_1 + PF_2 = 2a$. Ако пресечемо наш конус једном равни која пролази кроз његову осовину и стоји нормално на раван Π_2 добијамо троугао TRR_1 у којем се налазе кругови добивени пресеком кугала са том равни. Из те фигуре увиђамо да је: $DK = AB$, $AF_1 = BF_2$. То значи да је $PF_1 + PF_2 = 2a$. Збир отстојања макоје тачке, као што смо видели, је на нашој пресечној кривој од две сталне тачке F_1 и F_2

константан. Одговарајући потези. тачака симетрично распоређених према дужи AB једнаки су. Значи, да овај конусни пресек има осу симетрије AB. Тако долазимо до дефиниције елипсе: збир потега макоје тачке на елипси је константан.



Сл. 1

Покажимо сада својство (везу) тачака пресечне криве која настаје пресеком равни Π_2 са два конуса чија се темена налазе у једној тачки и имају заједничку осу, као што се види из слике 2, у којима се налази по једна кугла на исти начин као и у првом случају. Раван у овом случају сече оба



Сл. 2

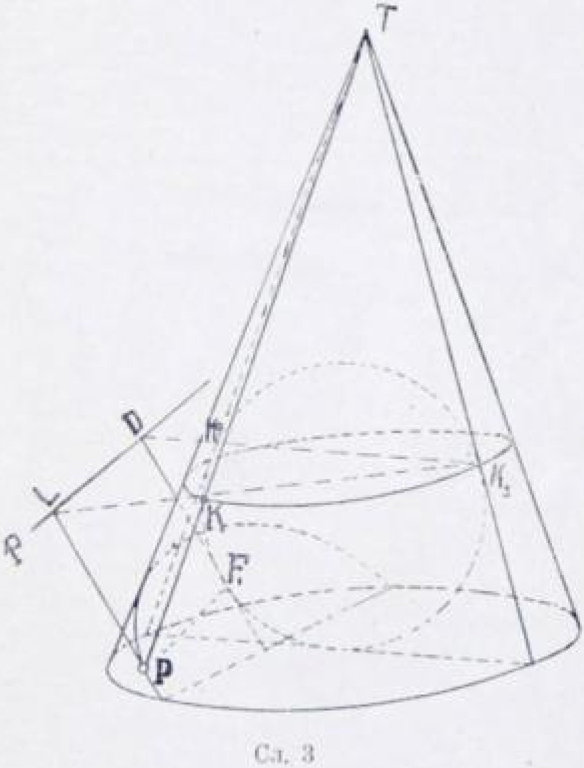
конуса, додирује обе кугле. Из слике се види да је:

$$PK - PD = 2a \quad \text{и}$$

$$PF_1 - PF_2 = 2a.$$

Пресечемо ли ти два конуса са равни Π_1, који пролази кроз њихову осовину и стоји нормално на раван Π_2, добивамо фигуру из које видимо да је $AB = 2a$, то јест да је права која пролази кроз темена A и B оса симетрије добивене криве, пошто су одговарајући потези тачака симетрично распоређених према тој оси једнаки, као у првом случају. Тако долазимо до дефиниције новодобивеног конусног пресека који називамо **хипербола**: диференција растојања макоје тачке хиперболе од двеју сталних тачака F_1 и F_2 је константна (Равни Π_1 и Π_2 нећемо цртати ради јасноће цртежа).

Ако сада поново посматрамо слику 1. и раван Π_2 помичемо постепено све док буде паралелни одговарајућој бочној ивици нашега конуса, — примећујемо да тачка F_2 „путује у бесконачност", а кугла чији је центар био C_2 постаје бескрајно велика. Тачка F_2 је пошла у бесконачност, кугла постала бескрајно велика и раван Π_2 је дошла у паралелан



Сл. 3

положај према бочној ивици TK_1 (сл. 3). Нека је P произвољна тачка тог конусног пресека. Из слике видимо да је:

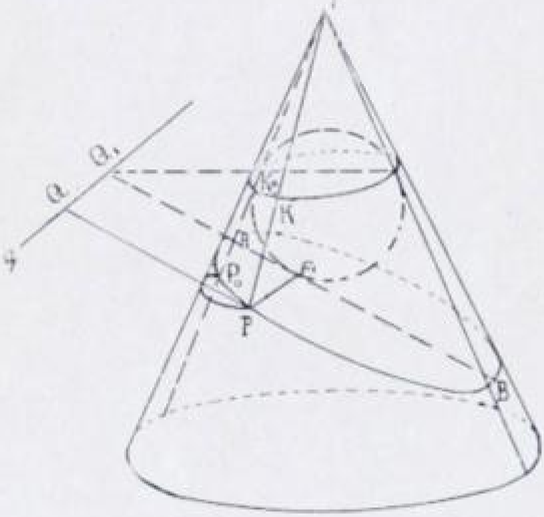
$$PF_1 = PK.$$

Повуцимо раван Π_3 кроз пресек додирног круга кугле, са центром у C_1, и раван Π_2 продужимо да се сече са равни Π_2. Добивамо пресечну праву p, која би, кад бисмо је померили паралелно, секла бочну ивицу TK_1 под углом од 90^0. Одакле следи да је $K_1K_0 \perp p$. Линијама TP и TK_0, одређена је раван Π_1 који сече раван Π_3 по правој K_1KL а раван Π_2 по правој LP која је паралелна правој TK_1. Зато је:

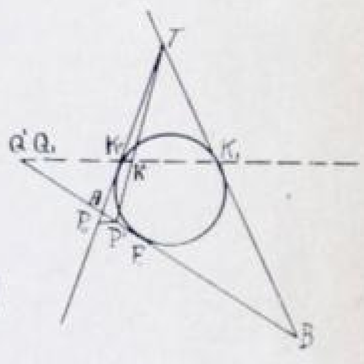
$\Delta_1 TK_1K \sim \Delta LKP$, а пошто је $TK = TK_1$, онда је и $PK = PL$, то јест $PF_1 = PL$. Отстојање макоје тачке тог конусног пресека, којег називамо парабола, од линије која се зове директриса једнако је, као што се види, растојању од сталне тачке F_1.

Конструктивним путем можемо показати опште својство конусних пресека.

Узмимо један прави конус. Пресецимо га једном равни која је паралелна базису (Π_1), и другом која није паралелни базису (Π_2). Добивамо слику 4.



Сл. 4



Сл. 5

Пресечну праву тих равни називамо директриса (q). Дуж $PQ \perp q$. Обрћимо бочну ивицу TP док не дође у положај TP_0. При томе P описује један кружи лук по конусу, те је

$$(1) \qquad PF_1 = PK = P_0K_0 .$$

Пројицирајмо тачке P, K и Q на раван Π_3 коју смо повукли дуж осовине конуса. (Ради јасноће цртежа нећемо цртати те равни. Замислимо их. Потребне су нам сада само њихове пресечни линије). Добивамо тачке (сл. 5) P', K' и Q' (Q' је пројекција тачке Q, а тачка Q_1 се поклапа са њом). Дуж PQ је паралелна пројекционој равни, те је:

$$(2) \qquad P'Q' = PQ.$$

Знамо да је:

$$P_0K_0 : P'Q' = AK_0 : AQ_1.$$

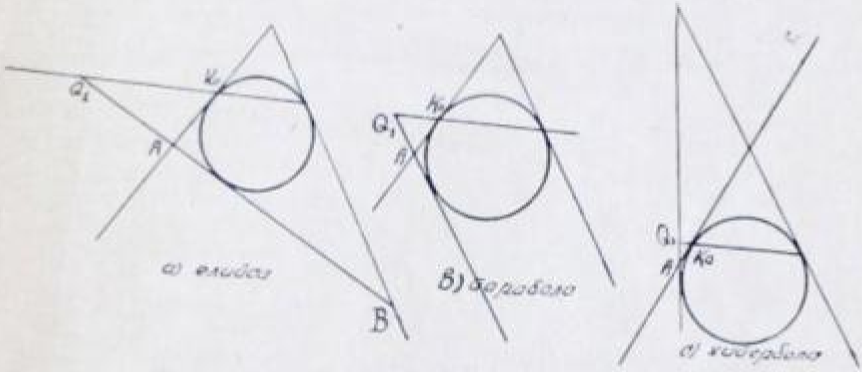
Узимајући у обзир (1) и (2) имамо:

$$PF_1 : PQ = AK_0 : AQ_1$$

Однос на десној страни ове пропорције је сталан за време кретања тачке P, тј $AK_0 : AQ_1 = \varepsilon$. Према томе је и леви однос те пропорције константом, тј.

$$PF_1 : PQ = \varepsilon$$

За све тачке конусног пресека је однос дужине потега и њеног отстојања до директрисе константан. Обрнуто: ако се једна тачка креће тако да је њено удаљење од једне сталне тачке и њено отстојање од једне сталне праве; у константном односу, онда она описује конусни пресек. Вредност



Сл. 6

овог односа ε означујемо као нумеричку ексцентричност конусног пресека. Посматрамо ли (сл. 6) за различите конусне пресеке троугао, онда сазнајемо да је:

$a)$ $AK_0 < AQ_1$, $\varepsilon < 1$: елипса

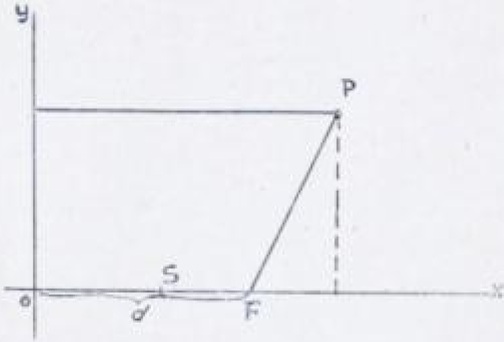
$b)$ $AK_0 = AQ_1$, $\varepsilon = 1$: парабола

$c)$ $AK_0 > AQ_1$, $\varepsilon > 1$: хипербола

Ако, дакле, нагиб равни Π_2 према оси конуса мењамо постепено тако, да раван прелази из положаја $a)$ кроз $b)$ у положај $c)$, онда елипса прелази у параболу а онда у хиперболу.

* * *

Пођемо ли сада од оне опште констатације, да је за макоји конусни пресек однос отстојања од сталне тачке (жиже) и директрисе константан, онда нам се намеће задатак да одредимо геометријско место тачака чија удаљења од једне сталне тачке стоје у једном прописаном, константном односу према отстојањима од једне сталне тачке (слика 7). За сталну праву узмимо y-осу, а за праву која стоји нормално на њу, и на којој се налази стална тачка, за **x** осу. Нека је $OF = d$, а прописани однос ε, а тачка криве $P(x, y)$. Тада задатак захтева:



Сл. 7

(1) $$PF = PQ = \varepsilon$$

$$PF = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}, \quad QP = x.$$

Дакле, једначина тражене линије је:

$$\sqrt{(x-d)^2 + y^2} = x = \varepsilon,$$

$$x^2 - dx + d^2 + y^2 = x^2 \varepsilon^2,$$

(2) $$x(1-\varepsilon^2) - dx + y^2 d^2 = 0$$

Одавде сазнајемо следеће три могућности:

I. $\varepsilon < 1$ — Чланови уз x^2 и y^2 имају имају исте предзнаке — елипса.

II. $\varepsilon = 1$ — Члан уз x^2 изчезава — парабола.

III. $\varepsilon > 1$ — Чланови уз x^2 и y^2 имају различите предзнаке — хипербола.

За пресечне тачке са правом OF добије се:

$$\xi^2 (1-e^2) - 2dx + d^2 \; 0.$$

(3) $$\xi_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - (1-\varepsilon^2) d^2}}{1-\varepsilon^2} = \frac{d(1 \pm \varepsilon)}{1-\varepsilon^2} = \frac{d}{1 \mp \varepsilon}$$

За остојање x_0 средње тачке криве од директрисе имамо:

(4) $$x_0 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{1-\varepsilon} + \frac{d}{1-\varepsilon}\right) = \frac{d}{1-\varepsilon^2}$$

Шта следи из (3) и (4) у сва три случаја?

Означимо тетиву (за елипсу, хиперболу, параболу) која пролази кроз жижу и стоји нормално на главну осу са $2p$. Да би је изразили са ε и d, ставимо у (2) место x апсцису тачке F $x_1 = d$. Ординате пресечних тачака наше тетиве са конусним пресеком добијамо из једначине:

$$d^2(1-\varepsilon^2)\, 2\,.\,d\;\; d+p^2+d^2=0$$

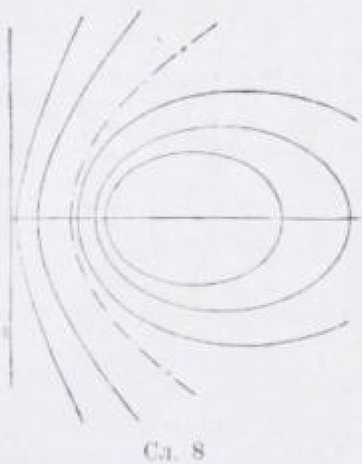
$$p^2=\varepsilon^2 d^2$$

(5) $$p=\pm\,\varepsilon\, d$$

Наша тетива је: $2p=2\varepsilon\, d$

* * *

Да бисме претставили себи прелазе једног у други конусни пресек, узмимо да су директриси и жижа сталне, непромењиве, а бројна ексцентричност ε промењиви. Свакој вредности ε одговара једна крива. Једном врло мало бројном интервалу, рецимо $\frac{1}{1000} < \varepsilon < \frac{1}{1001}$, имамо бескрајно много различитих елипса. Почнемо ли ми са једним врло малим ε, рецимо $\varepsilon = 0{,}1$, онда добијамо елипсу. Она ће постајати већа (сл. 8), ако ε расте. Друго њено теме удаљује се све више, уколико је ε ближе јединици. За $\varepsilon = 1$ се друго теме елипсе помакло у бесконачност" — елипса је прешла у параболу. Расте ли ε још даље онда се појављује друго теме, „које долази из бескрајности", на другу страну осе. Из облика параболе, крива је прешла у хиперболу.



Сл. 8

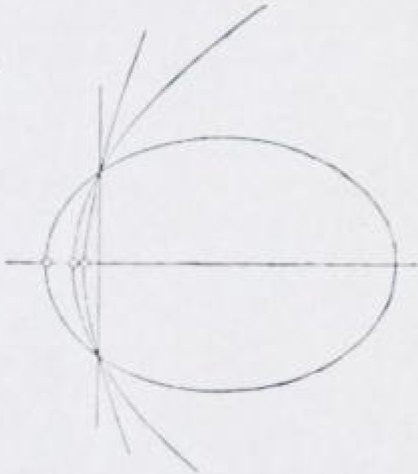
Можемо прелаз конусних пресека један у други и на други начин предочити (сл. 9) Узмимо да је тетива $2p$ непромењива. Добивамо из једначине (5) (сл. 7) за теме S, које се налази између O и F:

$$SF = d - \frac{d}{1+\varepsilon} = \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}.$$

С обзиром (9) следи да је:

$$SF = \frac{p}{1+\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{p-SF}{SF}$$

Изаберемо ли сада S врло близу F, онда је SF врло мало а ε је врло велико; добивамо хиперболу. Помичемо ли



Сл. 9

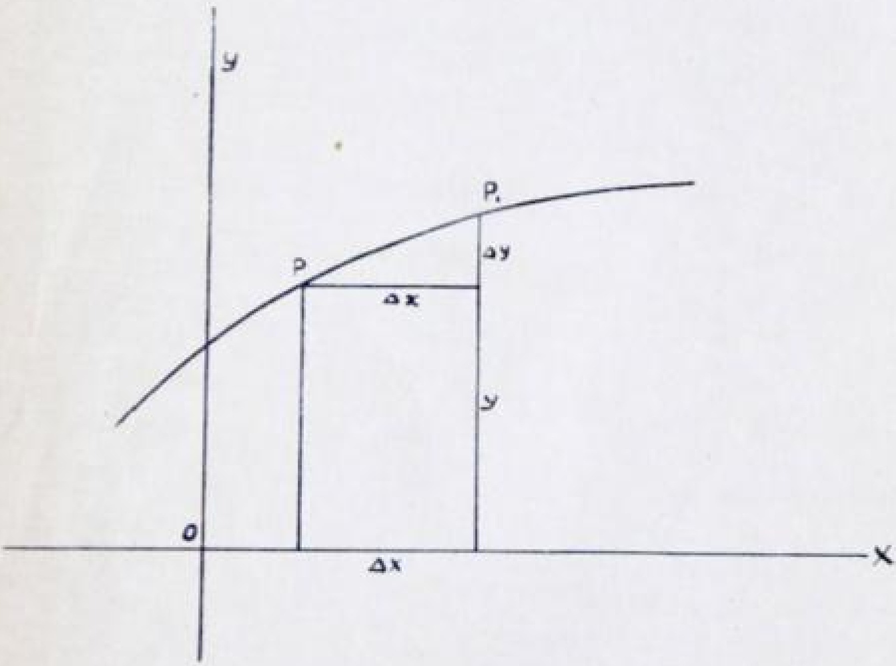
S постепено од F, онда SF постаје веће, ε мање. У тренутку, кад је $SF = \frac{p}{2}$, добивамо $\varepsilon = 1$; — хипербола је прешла у параболу. Из ове произилази даљим помарањем елипса. Ето, тако предочавамо метаморфозу конусних пресека.

(Литература: Reidt-Wolf, Lietzmann) **Војин Дајовић** ст. филоз

Диференцијал

(Превод једног чланка E. Colerus-a)

Говорили смо већ више пута о Δx, Δy, dx и dy. Специјално, dx и dy смо називали једном врстом кључа врата више математике. Ми ћемо се сада позабавити са овим стварима. При томе морамо приметити да је употребљен израз „ствари". *Диференцијали нису једанпут „нестварu"*. Они су, теоријски тачно, изчезавајуће диференције, граничне вредности стварних, још схватљивих Δx и Δy. Што их ми ипак посматрамо као ствари, то има историских као и педагошких разлога. Пошто ћемо у овом чланку да пробудимо само елементарно разумевање инфинитезимала, онда не можемо много ући у инфинитезимални рачун. Наша наука се почела да развија посматрањем односа ствари у природи. Очевидност је дала прва велика открића. На овим темељима почива свако логично префињавање у току два даља столећа, те нико није овлашћен да прве крчитеље сматра примитивним. Најсјајнији дијамант се често износио на видело из тамне земље Јужне Африке као мутна стаклена пласа. Сигурно је да поштујемо рад глачара из Амстердама, који су камен хиљадима потеза фацете усјајили. Али да није то дијамант, никакво глачање не би дало тај сјај. И исто тако без једног, можда, грубог претстављања „диференцијала" не би била никаква чиста математика. Одгодимо за неко време ова субтилна питања, која ћемо савладати дугом студијом свих

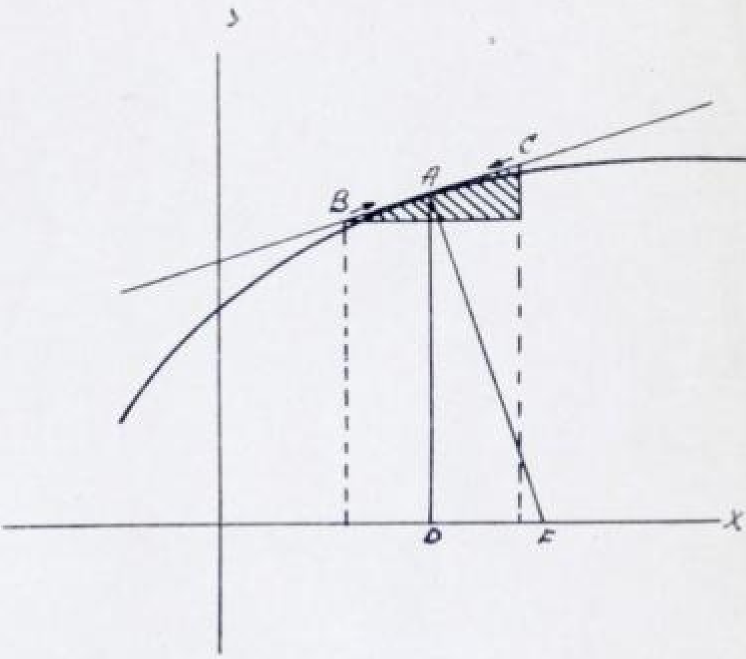


Сл. 1

основа. Тада ћемо се чудити прецизности јепног Цесаро-а, Ковалевског и једног Пеана, и уживати читајући их. Узмимо сада једну криву, при којој рашћењ x_{ca} одговара рашћење y_{na}. Прираштај x_{ca} је Δx, а прираштај y_{na} је Δy (сл. 1). Ако x порасте за једну коначну вредност Δx, где настаје нужно и једно ново y, које се претставља са $(y+\Delta y)$. Елеменат PP_1 је *криви* елеменат криве. Кад ја не бих апсцису тачке P повећао за један коначно велики износ Δx, већ само *скоро* за један бескрајно мали износ dx, и онда би крива расла. У том случају би се повећала само за изчезавајућо мали елеменат dy.

Тачке P и P_1 би се сучељиле у једну „дуплу тачку", а елеменат криве би био изчезавајућо мали, тако мали, да је *свеједно* да ли га *посматрамо као криви или прави*. Ово „*све-*

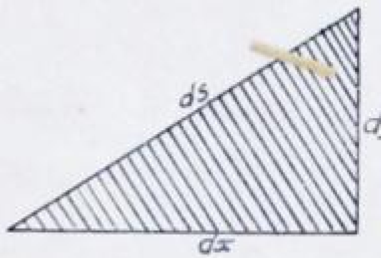
једно", да ли прави или криви, је стожерна тачка више анализе. Јер тиме смо стекли могућност да применимо сва правила праволиниски ограничених фигура на елементе кривих. Имаћемо потребе за то н. пр. при „квадратури" као и при „ректификацији". Да би наше сазнање продубили, посматраћемо такозвани Лајбницов „корактеристични троугао". Лајбниц је нашао у заоставштини Блез Паскала један цртеж, који је служио сасвим другој намери (испитивању синусоиде). Али га овај цртеж је водио као буктиња, која је расветљавала дотадашњу тајну, до његовог великог открића — диференцијалног рачуна. Да би била јаснија претстава, ми ћемо „triangulum characteristicum" мало друкчије нацртати него што су то радили Паскал и Лајбниц, а да се у суштини не мења. Повуцимо једну тангенту на произвољну криву (сл. 2) у тачки A. Узмимо на овој тангенти десно и



Сл. 2

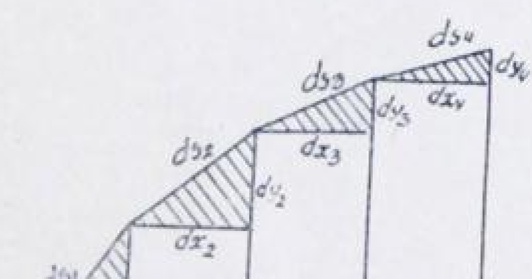
лево од тачке A_1 на једнаким отстојањима, тачке B и C. Очевидно је по најпростијем геометријском закону, да је шрафирани троугао сличан троуглу ADF, јер хипотенуза троугла ADF стоји нормарло на хипотенузу шрафираног троугли, што је претпостављено. Дужа катета троугла ADF је нормална на дужу катету шрафираног. Ако имамо у два правоугла троугла по један оштри угао једнак, онда су и друга два угла једнака (морају бити по $90^0 - \alpha$). Троуглови који имају исте углове, слични су.

Помичемо ли равномерно тачке B и C по тангени ка тачки A, онда шрафирани троугао постоје све мањи и мањи, а да његов облик не мења. Можеме напокон себи прет-ставл да су се тачке B и C сучељиле у тачку A. Сада има чудо диференцијала у руке: у тачки A налази се сада микскопско мали, слободном оку невидљиви троугао. Он је ромно мали, према троуглу ADF. Али тиме се величине њевих углова и односа страна нису промениле. Има још је о друго чудо. Хипотенуза шрафираног троугла је еле-мат тангенте у тачки A. Дакле, крије се у тачки A, који јаједничка кривој и тангенти, један сићушни прави еле-мат тангенте, који је уз то још сићушни елеменат криве. ило би се да ова дволичност елемента криве, који један-ут условљавамо крив, други пут прав, има у себи ешто од „црне магије“. Али то није. Замислимо ланац би-цикла, који се врло грубо из праволинијских елемената са-стоји, и који се савија око круж-ног зупчаника. Нека су пр-шљенови ланца врло сићуш-ни, који се скоро не могу пред-очити. Природно је да има једна тачка где је он прав. Праволинијски и криволини-ски елеменат су посматрани с једне тачке гледишта тако ра-зличити као ватра и вода, црно и бело. С друге тачке гледи-шта може се ту један прелаз



Сл. 3

претставити. Површина језера изгледа нам идеално равна. У исто време због земљиног облика његова се кривина може мерити. Мања би била кривина површине истог језера на



Сл. 4

једној кугли величини сунца. Наше сматрање диференцијала претставља такво космичко приближавање, јер се „може за-мислити“ све ближе приближавање тачака B и C. У идеалном случају садржи наша тачка *A* најсићушнији шрафирани троугао, који је сличан „карактеристичном". Можемо га нацртати увећавајући га огромно сл. 3. Његове три стране називамо ми „диференцијали". Катету, која је паралелна апсцисној оси, означавамо са dx, другу катету са dy, а „дволични елеменат криве — тангенте", који себи претстављамо као хипотенузу, ословљамо са ds. Можемо себи претставити да је у свакој тачки криве по једно теме једног карактеристичног троугла. Ако ми тако сматрамо, онда наша крива изгледа као један ђердан састављен из таквих ситних шрафираних троуглића. Дужина криве би било надодавање свих елемената ds. Један огромно увећани елеменат криве изгледа овако сл. 4. Не бисмо разумели смисао више анализе кад бисмо се увек хватали за карактеристични троугао и при том наш први цртеж заборављали. Морамо, наиме, пазити да су dx_1, dx_2 итд. сићушни прираштаји. dy итд. су нужно произашли прираштаји од y из једначине криве $y=f(x)$ А ds_1, ds_2 итд. су при том настали елементи криве односно сићушни елементи тангенте. Сваку криву можемо себи претставити састављену из безбројно сићушних елемената тангенте.

Војин Дајовић, ст. фил.