



УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ  
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ



**Данило З. Карличић**

**Примена нелокалне теорије континуума у  
анализи динамичког понашања и  
стабилности система спрегнутих  
нано-структура**

докторска дисертација

Ниш, 2016.





UNIVERSITY OF NIŠ  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING



**Danilo Z. Karličić**

**Application of the nonlocal continuum theory in  
the analysis of the dynamic behavior and  
stability of coupled nano-structure systems**

doctoral dissertation

Niš, 2016.



## **ПОДАЦИ О МЕНТОРУ И ЧЛАНОВИМА КОМИСИЈЕ**

**Ментор:**

**др Предраг Козић, редовни професор**  
Универзитет у Нишу, Машински факултет

**Чланови комисије:**

**др Ратко Павловић, редовни професор**  
Универзитет у Нишу, Машински факултет

**др Драган Јовановић, ванредни професор**  
Универзитет у Нишу, Машински факултет

**др Горан Јаневски, ванредни професор**  
Универзитет у Нишу, Машински факултет

**др Србољуб Симић, редовни професор**  
Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука

Датум одбране: \_\_\_\_\_ 2016.



## Подаци о докторској дисертацији

Ментор:

Др Предраг Козић, редовни професор, Универзитета у Нишу, Машински факултет у Нишу

Наслов:

Примена нелокалне теорије континуума у анализи динамичког понашања и стабилности система спрегнутих нано-структура

Резиме:

У овом докторском раду анализирано је осцилаторно понашање (кретање) и стабилност једне или више међусобно повезаних угљеничних нано-цеви и графенских нано-листића у форми комплексних нано-система. Применом претоставки уведених у нелокалној механици континуума, угљенична нано-цев је моделирана као греда, а графенски нано-листић као плоча. За тако добијене моделе механичких система, применом другог Newton-овог закона кретања или Hamilton-овог принципа могу се написати основне диференцијалне једначине кретања система. За решавање тако добијених парцијалних диференцијалних једначина кретања система примењене су аналитичке и нумеричке методе. Посебна пажња посвећена је аналитичком одређивању сопствених фреквенција и критичне силе извијања система сачињених од већег броја нано елемената (нано-греда и нано-плоча). Такође, разматрани су и специјални случајеви таквих система, сачињени од једне нано-греде односно нано-плоче. Тако добијени аналитички изрази сопствених фреквенција и критичне силе извијања потврђени су резултатима добијеним нумеричким методама као и резултатима из литературе добијених применом молекуларно динамичких симулација. Анализиране су лонгитудиналне осцилације система који се састоји од једног, два или више међусобно повезаних нано-штапова, коришћењем нелокалне еластичне и виско-еластичне теорије континуума. Треба истаћи да је анализиран утицај промене температуре као и спољашњег магнетног поља на динамичко понашање оштећене угљеничне нано-цеви са еластичним особинама. Показана је могућност промене крутости, а самим тим и сопствене фреквенције услед промене само параметра спољашњег магнетног поља без промене било ког другог структурног параметра система. Нелинеарне сопствене осцилације и динамичка стабилност угљеничне нано-цеви под дејством временски променљивих аксијалних сила и спољашњег магнетног поља, су изучене на примеру једне нано-греде са геометријском нелинеарношћу. Добијена су апроксимативна аналитичка решења за нелинеарне сопствене фреквенције и амплитудно-фреквентни одзив методом више временских скала. Одређене су области стабилности и нестабилности система за случај временски променљивих аксијалних сила. Показана је

могућност избегавања резонантних стања као и промена области стабилности и нестабилности система, усред промене само спољашњег магнетног поља, без промене било ког другог структурног параметра система. За анализиране случајеве извршена је и више параметарска анализа, где је показан утицај различитих физичких и геометријских параметара на динамичко понашање система.

Научна област:

Техничко-технолошке науке, Машинско инжењерство

Научна  
дисциплина:

Примењена механика

Кључне речи:

Нелокална механика, осцилације, стабилност, нано-структуре, виско-еластичност, пригушење, нано-штапови, нано-греде, нано-плоче.

УДК:

66.017-022.53:[531.36+539.3(043.3)]

CERIF  
класификација:

T210; Машинство, хидраулика, вакуумска технологија и акустички инжењеринг

Тип лиценце  
Креативне  
заједнице:

**CC BY-NC-ND**



## Data on Doctoral Dissertation

Doctoral  
Supervisor:

Dr Predrag Kozić, full professor, University of Niš, Faculty of Mechanical Engineering in Niš

Title:

Application of the nonlocal continuum theory in the analysis of the dynamic behavior and stability of coupled nano-structure systems

Abstract:

This dissertation investigates vibration and stability behavior of complex nano-scale systems composed of single and multiple carbon nanotubes and graphene sheets. Based on the assumptions introduced through the nonlocal continuum theory, the nanotubes are modeled as nanobeams and graphene sheets are represented as nanoplates where the influence of inter-atomic forces and the discrete nature of nanomaterials are introduced as material parameters. To such mechanical models of nanostructures one can apply the second Newton's law of motion or Hamilton's principles to derive the governing equation of motion of the system. In order to obtain solutions of partial differential equations, the analytical and approximation methods will be employed. Special attention is devoted to determining the analytical solutions for natural frequencies and critical buckling load of systems with multiple nanostructures (nanorods, nanobeams and nanoplates) and special cases of such systems. Thus obtained analytical solutions are validated by using the numerical methods as well as the results from molecular dynamics simulations, where excellent agreement of the results is confirmed. In addition, the longitudinal vibration of systems with a single or multiple coupled nanorods will be analyzed using nonlocal elasticity and viscoelasticity theories. What should be noted are the effects of temperature changes and magnetic fields on the dynamic behavior of a cracked carbon nanotube embedded in an elastic medium. It is shown that the possibility of change in the overall system stiffness by changing the parameters of external physical fields leads to certain changes in natural frequencies without any change in other parameters of the model. The case of the free nonlinear vibration and dynamic stability of carbon nanotubes subjected to variable axial force and external magnetic field will be presented in the example of a single nanobeam embedded in a viscoelastic medium by considering the geometric nonlinearity. Analytical approximation results are determined for nonlinear frequencies, amplitude-frequency curve by using the multiple scales method. It is shown that it is possible to avoid resonant states as well as changes in stability and instability regions by changing the external magnetic field parameter without any change in other parameters of the system. A parametric study is performed for all presented systems, and effects

of different physical and geometrical parameters on the dynamic behavior and stability are examined in detail.

Scientific  
Field:

Engineering sciences and technology, Mechanical Engineering

Scientific  
Discipline:

Applied mechanics

Key Words:

Nonlocal mechanics, vibration, stability, nanostructures, viscoelasticity, damping, nanorods, nanobeams, nanoplates.

UDC:

66.017-022.53:[531.36+539.3(043.3)]

CERIF  
Classification:

T210; Mechanical engineering, hydraulics, vacuum technology and acoustic engineering

Creative  
Commons  
License Type:

**CC BY-NC-ND**

## Захвалница

*Овим путем се захваљујем свом ментору, др Предрагу Козићу редовном професору Машинског факултета у Нишу, без чије помоћи и подршке не бих успео у изради докторске дисертације. Он ме је подржао на целом мом путу, својим стрпљењем и знањем као и саветима у формирању мог личног печата којим овај рад одликује.*

*Такође бих се захвалио професорима и колегама са катедре за механику, Машинског факултета, Универзитета у Нишу, који су своје саветима помогли на мом путу усаршавања, а самим тим и да овај рад добије своју крајњу форму. Посебно бих да истакнем захвалност, др Ратку Павловићу редовном професору Машинског факултета у Нишу, др Драгану Јовнановићу ванредном професору Машинског факултета у Нишу, др Горану Јаневском, ванредном професору Машинског факултета у Нишу, и др Србољубу Симићу редовном професору, Факултета техничких наука у Новом Саду, који су читањем радне верзије докторског рада и корисним саветима помогли да овај рад добије одговарајућу форму.*

*На финансијској помоћи, захвалио бих се Министарству просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије. Докторска дисертација је реализована у оквиру пројекта “Динамичка стабилност и нестабилност механичких система под дејством случајне побуде” ОИ 174011.*

*Конечно, захвалио бих се и својој породици и пријатељима, на стрпљењу и моралној подршци, без чије помоћи овај рад не би био могућ.*



# Садржај

<b>1 Увод</b> .....	<b>19</b>
1.1 Опште напомене.....	19
1.2 Преглед коришћене литературе.....	21
1.3 Нелокална теорија еластичности и виско-еластичности.....	27
<b>2 Нелокална теорија еластичних нано-греда, штапова и плоча</b> .....	<b>33</b>
2.1 Опште напомене.....	33
2.2 Euler-Bernoulli-јеве теорија греде заснована на примени нелокалне теорије еластичности..	33
2.2.1 Слободне осцилације Euler-Bernoulli-јеве нано-греде.....	36
2.2.2 Статичка стабилност Euler-Bernoulli-јеве нано-греде.....	36
2.3 Теорија штапа заснована на нелокалној теорији еластичности.....	37
2.4 Kirchhoff-ова теорија плоча заснована на примени нелокалне теорије еластичности.....	41
2.4.1 Слободне осцилације Kirchhoff-ове нано-плоче.....	43
2.4.2 Статичка стабилност Kirchhoff-ове нано-плоче.....	44
<b>3 Примена више теорије греде на анализу осцилаторног понашања и статичке стабилности нано-греде</b> .....	<b>47</b>
3.1 Опште напомене.....	47
3.2 Формулација проблема.....	47
3.2.1 Конститутивна релација комбиноване деформационо-инерционе градијентне теорије еластичности.....	47
3.2.2 Reddy-јева теорија греде.....	48
3.2.3 Нуи-Tai-јева теорија греде.....	52
3.3 Аналитичко решење.....	56
3.3.1 Аналитичке вредности за сопствене фреквенције и критичну силу извијања Reddy-јеве нано-греде.....	56
3.3.2 Аналитичке вредности за сопствене фреквенције и критичну силу извијања Нуи-Tai-јеве нано-греде.....	57
3.4 Нумерички примери.....	58
3.4.1 Упоредна анализа.....	59
3.4.2 Параметарска анализа.....	60

<b>4 Термички и магнетни утицаји на осцилације нано-греде са оштећењем уметнуте у еластични медијум.....</b>	<b>63</b>
4.1 Опште напомене.....	64
4.2. Формулација проблема.....	64
4.2.1 Нелокална термо-еластична конститутивна релација.....	64
4.2.2 Maxwell-ове релације.....	64
4.2.3 Математички модел нано-греде са оштећењем.....	65
4.3 Аналитичко решење.....	67
4.4 Нумерички резултати.....	72
<b>5 Осцилације и стабилност еластично повезаних система нано-штапова, греда и плоча применом нелокалне теорије еластичности.....</b>	<b>81</b>
5.1 Опште напомене.....	81
5.2 Лонгитудиналне осцилације система спрегнутих нано-штапова.....	81
5.2.1 Диференцијалне једначине кретања система.....	82
5.2.2 Аналитичко решење.....	85
5.2.3 Уклештени ланац.....	86
5.2.4 Слободни ланац.....	88
5.2.5 Асимптотска анализа.....	90
5.3 Трансверзалне осцилације и стабилност система спрегнутих нано-греда.....	90
5.3.1 Диференцијалне једначине кретања система.....	91
5.3.2 Аналитичко решење.....	94
5.3.3 Уклештени ланац.....	94
5.3.4 Слободни ланац.....	96
5.3.5 Асимптотска анализа.....	98
5.4. Трансверзалне осцилације и стабилност система спрегнутих нано-плоча.....	98
5.4.1 Диференцијалне једначине кретања система.....	99
5.4.2 Аналитичко решење.....	101
5.4.3 Уклештени ланац.....	102
5.4.4 Слободни ланац.....	103
5.4.5 Асимптотска анализа.....	105
5.5 Нумерички примери.....	105
5.5.1 Нумеричка анализа система спрегнутих нано-штапова.....	105
5.5.1.1 Упоредна анализа.....	105

5.5.1.2	Параметарска анализа.....	107
5.5.2	Нумеричка анализа система спрегнутих нано-греда.....	109
5.5.2.1	Упоредна анализа.....	109
5.5.2.2	Параметарска анализа.....	110
5.5.3	Нумеричка анализа система спрегнутих нано-плоча.....	112
5.5.3.1	Упоредна анализа.....	112
5.5.3.2	Параметарска анализа.....	114

## **6 Динамичко понашање система спрегнутих**

### **виско-еластичних нано-структура.....117**

6.1	Лонгитудиналне осцилације система спрегнутих виско-еластичних нано-штапова применом нелокалне теорије виско-еластичности.....	117
6.1.1	Опште напомене.....	117
6.1.2	Диференцијалне једначине кретања система.....	117
6.1.3	Аналитичко решење.....	120
6.1.4	Асимптотска анализа.....	123
6.1.5	Нумерички примери.....	124
6.2	Трансверзалне осцилације система спрегнутих виско-еластичних нано-греда под дејством лонгитудиналног магнетног поља применом нелокалне теорије виско-еластичности.....	128
6.2.1	Опште напомене.....	128
6.2.2	Диференцијалне једначине кретања система.....	128
6.2.3	Аналитичко решење.....	132
6.2.4	Асимптотска анализа.....	133
6.2.5	Нумерички примери.....	134
6.3	Трансверзалне осцилације система спрегнутих виско-еластичних ортотропних нано-плоча применом нелокалне теорије виско-еластичности.....	138
6.3.1	Опште напомене.....	138
6.3.2	Диференцијалне једначине кретања система.....	138
6.3.3	Аналитичко решење.....	141
6.3.4	Асимптотска анализа.....	144
6.3.5	Нумерички примери.....	144

## **7 Динамичко понашање нано-греде са геометријском**

### **нелинеарношћу уметнуте у виско-еластични медијум.....151**

7.1	Опште напомене.....	151
-----	---------------------	-----

7.2	Формулација проблема.....	151
7.3	Апроксимативно аналитичко решење.....	155
7.3.1	Пертубациона метода више скала.....	156
7.3.2	Стабилност система.....	158
7.4	Нумерички примери.....	159
7.4.1	Упоредна анализа.....	159
7.4.2	Параметарска анализа.....	160
	<b>Закључак.....</b>	<b>165</b>
	<b>Литература.....</b>	<b>169</b>
	<b>Биографија.....</b>	<b>179</b>



*"Ако мислите да можете да урадите неку ствар и ако мислите да то не можете –  
у оба случаја сте у праву!"*

*Хенри Форд*



# Глава 1

## Увод

### 1.1 Опште напомене

У последње време велика пажња истраживача је усмерена на изучавање нано-материјала, као и њихову примена у савременим нано-електромеханичким уређајима и системима. Као основни нано-материјали од којих су сачињене структурне компоненте нано-система, разматрају се угљеничне нано-цеви и графенски нано-листићи који се састоје од атома угљеника и њихових интеракција преко хемијских веза [1]. Према броју слојева, постоје једно, дво и вишеслојне нано-цеви. Дво и више-слојни системи се могу препознати као комбинација два или више једнослојних нано-цеви, између којих се интеракција дешава преко ван дер Waals-ових сила [2]. Графенске нано-листиће је могуће комбиновати у комплексне вишеслојне нано-структуре као што су нано-резонатори и нано-композитни системи са еластичним или виско-еластичним својствима [3]. У анализи механичких својстава угљеничних нано-цеви и графенских нано-листића користе се експерименталне и теоријске методе [4, 5]. Извођење експеримената у нано области је веома скуп и захтеван задатак, јер није могућа контрола свих параметара нано-система. Резултат тога је спор напредак експерименталних метода које се примењују у анализи механичког понашања нано-система, тако да су оне обично ограничене на мерење само неких механичких особина као што су: Јунгов модул еластичности, затезна чврстоћа, граница лома. Због ових недостатака, пажња истраживача је усмерена на развој теоријских модела у анализи динамичког понашања нано-структурних елемената. Теоријске методе укључују симулације преко атомистичких модела и механике континуума. Различите атомистичке методе као што су стохастичка молекуларна динамика, теорија функционалне густине итд., су веома важне у анализи динамичког понашања једноставнијих нано-структура [6]. Ипак, ове методе су веома захтевне у погледу рачунарског времена тако да за системе са великим бројем честица (атома и молекула ) нису применљиве. Због тога, у последње време методе механике континуума добијају све више на значају у теоријским истраживања динамичког понашања комплексних нано-структура. Пошто угљеничне нано-цеви и графенски нано-листићи по природи имају дискретну структуру као и остали нано-материјали, Eringen и остали [7-9] су проширили класичну механику континуума уводећи материјални параметар, који узима у обзир дискретну структуру самог материјала, међумолекуларне силе и утицај мале скале. Даља истраживања су показала могућност коришћења нелокалне механике континуума у анализи и дизајну комплексних нано-система на

бази угљеничних нано-цеви и графенских нано-листића са еластичним или виско-еластичним својствима. У поређењу са симулацијама молекуларне динамике, нелокална механика континуума има знатну предност у погледу бржег добијања резултата као и мањих рачунарских ресурса потребних за обраду резултата.

Експериментима је потврђено да нано-материјали могу имати виско-еластична својства тј. то су материјали који имају особине еластичног тела и флуида. Такви материјали код којих унутрашње трење игра веома важну улогу у механичком понашању система, изазивајући дисипацију укупне механичке енергије, могу послужити као елементи за пригушење у нано-системима. Разумевање извора пригушења је веома важно, због анализе динамичког понашања као и у пројектовању нано-електромеханичких система. Такође, може се запазити да матрице од полимера код нано-композитних структура који су ојачани угљеничним нано-цевима или графенским нано-листићима имају пригушујућа својства тј. могу се описати као виско-еластични материјали [10]. Претрагом литературе установљено је да посебну пажњу привлаче два типа пригушења: унутрашње пригушење тј. структурно или материјално пригушење које се уводи преко конститутивне релације самог виско-еластичног модела и спољашње пригушење, које потиче од утицаја спољашње средине [11]. Због своје комплексности, механизам пригушења на нано-скали је веома тешко анализирати, тако да се од стране истраживача за инжењерске потребе уводи пропорционално пригушење, где су параметри тог пригушења добијени експерименталним путем [12]. Најчешћи случај дисипације у нано-системима је комбинација спољашњег и унутрашњег пригушења, што још увек није у потпуности истражено. Проучавање дисипационих ефеката на нано скали је од великог значаја у примени и анализи динамичког понашања нано-механичких система.

Различити физички ефекти као што су магнетни [13], електрични [14], температурни [15] и пиезоелектрични [16] затим, интеракција између флуида и чврстог тела [17, 18], имају веома великог значаја у производњи као и при коришћењу нано-електромеханичких система. Проучавање утицаја различитих физичких поља на промене материјалних карактеристика нано-материјала је од великог значаја у анализи динамичког понашања и стабилности нано-система. Шта више, могућност коришћења поменутих физичких поља у побољшању карактеристика нано-материјала [19], доводи до тога да се могу правити интелигентне и управљиве структуре на нано-скали и њихова употреба у конструкцијама нано-сензора и актуатора [20].

У уводном делу овог рада дат је приказ савремене литературе која је посвећена развоју теоријских модела за анализу динамичког понашања нано-структурних елемената применом нелокалне механике континуума. Након тога изведене су основне диференцијалне једначине кретања нано-греде применом Euler-Bernoulli-јеве теорије греде и нелокалне теорије еластичности за механички модел угљеничне нано-цеви. Треба истаћи да код Euler-Bernoulli-јеве теорије греде попречни пресеци остају управни на осу пре и након деформације и да не долази до деформисања у правцу дебљине греде. Код овог модела греде се не узима у рачун

попречна сила смицања и инерција ротације попречних пресека греде током кретања. Такође, изведене су диференцијалне једначине лонгитудиналних осцилација нано-штапа применом нелокалне теорије еластичности за два типа граничних услова [20]. Механички модел графенских нано-листића представљен је преко нелокалне Kirchhoff-ове теорије плоча са изотропним и ортотропним особинама, за коју су изведене основне диференцијалне једначине кретања [20, 75, 77]. Основне претпоставке Kirchhoff-ове теорије плоча су да попречни пресеци плоче остају управни на средњу раван плоче пре и након деформације као и да не долази до деформације у правцу дебљине плоче. Утицај попречне силе смицања као и утицај инерције ротације попречног пресека разматрају се преко Reddy и Huu-Thai-јеве теорије греде вишег реда. Анализа је усмерена на поређење добијених резултата нелокалне теорије еластичности са различитим градијентним теоријама еластичности на примеру трансверзалних осцилација и стабилности једне нано-греде [38]. За оба случаја, нелокалне и деформационо градијентне теорије еластичности, добијене су сопствене фреквенције и критичне силе извијања у аналитичком облику. Такође, анализиране су трансверзалне осцилације нано-цеви са оштећењем у виду процепа, где је показан и утицај магнетног поља као и промене температуре на укупну динамику система [78]. Након тога, разматране су лонгитудиналне и трансверзалне осцилације као и стабилност система спрегнутих угљеничних нано-цеви односно графенских нано-листића повезаних еластичним и виско-еластичним слојевима применом нелокалне теорије еластичности и виско-еластичности [20, 39, 72, 75, 77]. Анализирани су утицаји промене температуре и магнетног поља на динамичко понашање система [50, 84], као и утицај геометријске нелинеарности на слободне нелинеарне осцилације и динамичку стабилност угљеничне нано-цеви уметнуте у виско-еластичну средину. На крају рада изведени су закључци и дати су предлози за даља истраживања у области нелокалне механике и примене у анализи нано-структура. Списак коришћене литературе са списком објављених радова аутора дисертације, приказан је на крају рада.

## 1.2 Преглед коришћене литературе

У циљу потпуног искоришћења нано-материјала као што су угљеничне нано-цеви и графенски нано-листићи, потребно је добро разумевање њиховог механичког понашања. У последње време пажња истраживача је усмерена на изучавање динамичког понашања и стабилности угљеничних нано-цеви и графенских нано-листића моделираних као нано-греде односно нано-плоче. Такви модели једнодимензионих и дводимензионих нано-структура су прочавани у великом броју студија и коришћени при моделирању био-сензора [21], сензора масе [22], резонатора [23], нано-композита [24] и нано-актуатора [25]. Због тога је питање анализе механичког понашања нано-греда и нано-плоча веома важно са практичне тачке гледишта и због тога има веома широку примену у пројектовању нано-инжењерских апликација [26]. Такође, у анализи механичких особина нано-структурних елемената користе се и експерименталне методе,

али због цене коштања и тежине извођења експеримената на нано-скали, пажња научника је усмерена на развој адекватних теоријских модела. Различити атомистички модели су развијени применом детерминистичких и статистичких метода и примењени на изучавање нано-структура као дискретног система [27]. Неки од најчешће коришћених атомских метода су молекуларно динамичке симулације, теорија функционалне густине и друге. Ове теорије су веома важне у проучавању понашања нано-структура образованих од малог броја честица, док за комплексније нано-системе образоване од већег броја честица те методе су веома захтевне у погледу рачунарских ресурса и времена трајања прорачуна. Због свих ових недостатака експерименталних и атомских метода, модели засновани на механици континуума имају све већи значај због своје једноставније примене [28]. Пошто механичко понашање нано-структура веома зависи од величине, у случају када су димензије система мале у односу на међумолекуларну дистанцу, класична теорија континуума се модификује тако да узима у обзир и утицаје на нано-скали. Eringen и остали [7-9, 29] су модификовали класичну теорију континуума и узели у обзир утицај мале скале преко материјалног параметра ( $e_0 \tilde{a}$ ) уведеног преко конститутивне релације.

***Основна претпоставка на којој је заснована нелокална теорија континуума, огледа се у томе да је напон у тачки функција деформације свих тачака еластичног тела.*** Као проширење класичне теорије греда и плоча засноване на класичној теорији еластичности, развијена је нелокална теорија греда и плоча применом Eringen-ове нелокалне теорије еластичности. Такви модели се примењују у пројектовању и анализи динамичког понашања нано-уређаја и елемената. Један од првих радова примене Eringen-ове нелокалне конститутивне релације еластичног тела је у формулацији нелокалне Euler-Bernoulli-јеве теорије греде је дато у раду Peddinson и остали [30]. Они су истражили статички угиб такозване нелокалне греде за различите граничне услове, и предложили примену у микро-електромеханичким уређајима и системима. Reddy [31] је извео диференцијалне једначине кретања за Euler-Bernoulli-јеву, Timoshenko-ву, Reddy-јеву и Levinson-ову теорију греде користећи Eringen-ову нелокалну теорију еластичности, а затим применом методе раздвајања променљивих добио аналитичка решења за осциловање и извијање просто-ослоњене греде. Поређење добијених резултата за сопствене фреквенције одређене Eringen-овом нелокалном теоријом еластичности и градијентних деформационих теорија са молекуларно динамичким симулацијама на примеру осциловања Euler-Bernoulli-јеве и Timoshenko-ве греде, анализирали су Ansari и остали у раду [32]. Aydogdu [33] је користећи различите теорије греде укључујући Euler-Bernoulli, Timoshenko, Levinson, Reddy и Aydogdu-ову анализирао савијање, извијање и осциловање нано-греде. Применом аналитичких метода, аутор је добио решења у затвореној форми за угиб, сопствену фреквенцију и силу извијања просто-ослоњене нано-греде, а затим истражио утицаје нелокалности и дужине греде на статичко и динамичко понашање система. Нуи-Тај је у раду [34] предложио нову нелокалну теорију смицања где је узета у обзир квадратна промена смичућих деформација у правцу дебљине греде. Аутор је извео основне диференцијалне једначине кретања применом Hamilton-овог принципа и

извршена је анализа савијања, извијања и осциловања једне нано-греде. У раду Reddy и Pang [35], диференцијалне једначине кретања за Euler-Bernoulli и Timoshenko-ву греду су реформулисане у складу са Eringen-овом нелокалном теоријом еластичности и искоришћене су за прорачун статичког угиба, силе извијања и сопствене фреквенције греде за различите граничне услове. Wang и Varadan [36] су анализирали утицај мале скале на сопствене фреквенције једнослојне и дво-слојне угљеничне нано-цеви. Они су утврдили да са порастом дужине нано-цеви, класична теорија континуума даје добре резултате само при нижим модовима осциловања нано-цеви. Динамичко понашање угљеничне нано-цеви у еластичном медијуму анализирано је применом Timoshenko-ве теорије греде за два типа конститутивних релација, Eringen-ове нелокалне теорије еластичности и градијентне теорије деформација, је анализирано од стране Wang и Wang [37]. Приказани резултати показују веома велику зависност нелокалног и градијентног параметра као и крутости еластичног медијума на сопствене фреквенције нано-греде. Karličić и остали [38], су применом теорије вишег реда и градијентних теорија еластичности анализирали осцилаторно понашање и стабилност угљеничне нано-цеви. Показано је веома добро слагање добијених резултата за сопствене фреквенције преко молекуларне динамике и нелокалне теорије еластичности. Karličić и остали [39], публиковали су рад о осцилацијама и извијању система угљеничних нано-цеви уметнутих у еластични медијум. Модел угљеничних нано-цеви образован је применом нелокалне теорије еластичности на Euler-Bernoulli-јеву греду, а еластични медијум је моделиран Winkler-овим слојем. Показана је методологија добијања аналитичког решења сопствених фреквенција као и критичне силе извијања применом тригонометријске методе. Такође, добијене су асимптотске вредности сопствене фреквенције као и силе извијања за случај када број нано-греда у систему тежи бесконачно.

Претрагом литературе утврђено је да проблем одређивања лонгитудиналних осцилација нано-штапова применом нелокалне теорије еластичности недовољно анализиран. Лонгитудиналне осцилације имају веома велику практичну вредност у проучавању и пројектовању линеарних нано-актуатора, нано-сензора масе као и осталих нано-екстремеханичких система. Слободне лонгитудиналне осцилације угљеничне нано-цеви уметнуте у еластични медијум, анализирани су од стране Aydogdu у раду [40]. Применом нелокалне теорије еластичности парцијалне једначине кретања су изведене и добијено је аналитичко решење сопствених фреквенција за два типа граничних услова нано-штапа. Danesh и остали [41], разматрали су утицај нелокалног ефекта на лонгитудиналне осцилације нано-штапа променљивог попречног пресека применом нелокалне теорије еластичности. Добијене парцијалне диференцијалне једначине кретања решене су методом диференцијалних квадратура за три типа граничних услова нано-штапа. Narendar и Gopalakrishnan [42] разматрали су нелокалне утицаје на лонгитудинално простирање таласа у систему сачињеном од два спрегнута нано-штапа. У раду Hsu и остали [43], представљен је модел нано-штапа са прслином, где су диференцијалне једначине кретања таквог модела добијене применом нелокалне теорије еластичности. Сопствене фреквенције оштећеног нано-

штапа одређене су у аналитичком облику за два гранична услова, на основу којих је истражен утицај мале скале на динамичко понашање система. Kiani је у раду [44] представио једну већу студију о лонгитудиналним, трансверзалним, торзионим осцилацијама и стабилности аксијално покретљиве угљеничне нано-цеви применом нелокалне теорије еластичности. Добијене основне једначине кретања Rayleigh-јеве просто-ослоњене нано-греде решене су применом Galerkin-ове методе. Такође, Şimşek [45] је користећи Galerkin-ову методу одредио сопствене фреквенције лонгитудиналних осцилација нано-штапова од материјала који представљају спојеве метала и керамике (Functional Graded Materials), са променљивим попречним пресеком. Анализиран је утицај геометријских и материјалних особина, као и граничних услова на динамику нано-штапа. Утицај нелокалне интеракције на даљину (long-range) у анализи лонгитудиналних осцилација нано-штапа извршена је у раду Huang [46]. Chang [47] је размотрио утицај мале скале на лонгитудиналне осцилације нано-штапа применом методе диференцијалних квадратура. Анализа лонгитудиналних осцилација система са два спрегнута еластична нано-штапа применом нелокалне еластичности извршена је у раду Murmu и Adhikari [48]. Истражен је утицај нелокалног параметра, крутости еластичног слоја као и димензија нано-штапа на понашање система. Аутори Murmu и Adhikari [49], анализирали су проблем лонгитудиналних осцилација угљеничне нано-цеви са масом на крају у облику угљеничне нано-лопте (фулурен). Добијене парцијалне диференцијалне једначине су решене аналитичким путем и добијено је решење за сопствене фреквенције у затвореној форми. Karličić и остали у раду [50] анализирали су слободне лонгитудиналне осцилације спрегнутог система нано-штапова уметнутих у еластичну средину, при дејству трансверзалног магнетног поља. Одређени су аналитички изрази за сопствене фреквенције применом тригонометријске методе.

Графенски нано-листићи су дво-димензионалне нано-структуре сачињене од једног слоја атома угљеника распоређених у хексагоналну кристалну решетку [51-54]. Овакве нано-структуре имају веома добре механичке и физичке карактеристике, у поређењу са класичним материјалима. Разумевање механичког понашања графенских нано-листића омогућује нам пројектовање савремених нано-електромеханичких система, где је графенски нано-листић репрезентован као нано-плоча [55-60]. Последњих неколико година, пажњу истраживача је привукло изучавање осцилаторног понашања и стабилност нано-уређаја заснованих на графенским нано-листићима. Методе развијене на основу нелокалне механике континуума и молекуларно динамичких симулација су веома корисне у пројектовању и анализи таквих система. У раду Lu и остали [61], диференцијалне једначине кретања изведене су за Kirchhoff-ову и Mindlin-ову теорију плоче, коришћењем нелокалне Eringen-ове теорије еластичности. Такође, одређена су аналитичка решења за статички угиб и сопствене фреквенције правоугаоне просто ослоњене плоче. Ansari и остали [62] анализирали су осцилације једнослојног графенског листића применом Mindlin-ове теорије плоче. Решење за сопствене фреквенције добијена су методом диференцијалних квадратура и молекуларно динамичких симулација за просто ослоњене и уклештене ивице



графенског нано-листића. Aghababaei и Reddy су у раду [63] применили теорију смицања трећег реда и нелокалну теорију еластичности за проблем савијања и слободних осцилација просто-ослоњене правоугаоне плоче. У нумеричким примерима приказан је утицај нелокалног параметра на угиб и сопствену фреквенције нано-плоче. Такође, на сличан начин Pradhan и Sahu [64] реформулисали су вишу теорију смицања плоче у складу са Eringen-овом нелокалном теоријом еластичности и извели диференцијалне једначине кретања. Након тога, једначине кретања су решене заменом Navier-овог решење за случај када је плоча просто ослоњена и добијена су аналитичка решења за сопствене фреквенције графенског листића. Mohammadi и остали [66] анализирали су осцилаторно понашање кружне нано-плоче под дејством притисних сила у равни плоче, применом нелокалне теорије еластичности. Изведене су основне једначине кретања и добијене су сопствене фреквенције нано-плоче за два типа граничних услова, уклештења и слободних ослонаца. Wang и остали [66] анализирали су механизам нелокалног утицаја на трансверзалне осцилације нано-плоче на моделу једнослојног графенског и борнитрид нано-листића. У раду је такође показан утицај површинских напона нано-плоче на осцилаторне карактеристике система. У литератури је значајна пажња посвећена изучавању механичког понашања комплексних система спрегнутих графенских листића као основа за анализу нано-композитних и нано-резонаторских конструкција. Pradhan и Phadigar [67, 68] размотрили су осцилације и стабилност система вишеструко повезаних графенских нано-листића, а веза је остварена преко Winkler-овог еластичног слоја. Добијен систем парцијалних диференцијалних једначина решен је аналитичким путем само за специјалне случајеве када се систем састоји од две нано-плоче. Недавно су Murmu и Adhikari [69] и Poursmaeeli и остали [70] објавили радове у којима су анализирани осцилаторне појаве двоструког система графенских нано-листића аналитичким методама. Ansari и остали [71] су применом нелокалне теорије еластичности и Mindlin-ове теорије плоча, формирали система парцијалних диференцијалних једначина које описују кретање система спрегнутих графенских нано-листића. Решења за сопствене фреквенције добијена су нумеричком методом диференцијалних квадратура за просто ослоњене нано-плоче. Karličić и остали [72], су размотрили слободне трансверзане осцилације и стабилност система изотропних нано-плоча, на основу нелокалне Eringen-ове теорије еластичности и Kirchhoff-ове теорије плоча. Одређена су аналитичка решења за сопствене фреквенције и критичну силу извијања применом методе раздвајања променљивих и тригонометријског решења.

У циљу реалније анализе понашања нано-структура у моделима се узима утицај пригушења применом виско-еластичних модела. У раду, представљеном од стране Lei и остали [73], разматрали су динамичко понашање модела угљеничне нано-цеви, применом Timoshenko-ве теорије греде и нелокалне теорије виско-еластичности за случај Kelvin-Voigt-овог виско-еластичног модела. Аутори су такође анализирали и утицаје спољашњег пригушења које зависи од брзине. Аналитичким путем добијене су вредности маскималне фреквенције  $t_j$  асимптотске

вредности фреквенције за случај када мод осциловања тежи бесконачно. Такође, одређене су граничне вредности коефицијента пригушења Timoshenko-ве виско-еластичне нано-греде. Arani и Roudbari [74] су објавили једну опширнију студију, где су анализирали осцилације система борнитрид нано-цеви спрегнутих виско-Pasternak-овим слојем. Осцилације су изазване покретном нано-честицом, а узети су у обзир површински напони и пиезоелектричне особине Euler-Bernoulli-јеве нано-греде. Аутори су показали да употребом виско-Pasternak-овог слоја као и пиезо-електричне нано-греде могућа контрола осцилација на нано-скали. Karličić и остали [75] представили су детаљну анализу слободних лонгитудиналних осцилација система који се састоји од два спрегнута виско-еластична нано-штапа и анализирали утицаје различитих физичких параметара на кружне фреквенције система. Poursmaeeli и остали [76] истражили су осцилаторне карактеристике виско-еластичне ортотропне нано-плоче која је постављена на Kelvin-Voigt-ву виско-еластичну подлогу. Решење осцилаторног проблема добијено је у аналитичком облику, методом раздвајања променљивих у функцији од нелокалног параметра и структурног пригушења нано-плоче. Karličić и остали [77], анализирали су трансверзалне осцилације система вискоекластичних нано-плоча, применом нелокалне теорије еластичности за Kelvin-Voigt-ов модел и Kirchhoff-ову теорији плоча. Решење за сопствене фреквенције и асимптотске вредности добијене су у затвореној форми применом аналитичких метода. На крају рада, дата је детаљна нумеричка анализа, где је показан утицај физичких и материјалних параметара на динамику система.

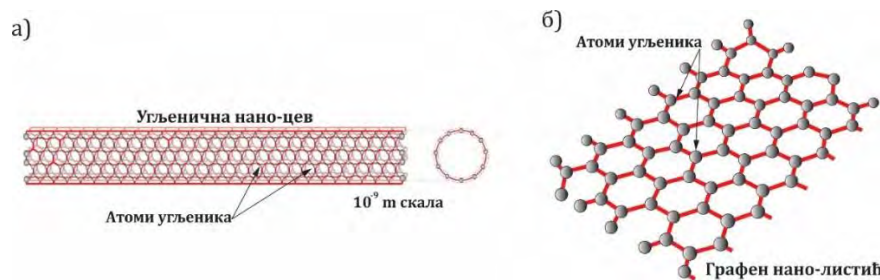
Разматрање утицаја различитих физичких поља као што су магнетно, температурно, електрично, затим интеракција флуида и еластичне структуре као и пиезо-електричност, имају великог значаја како у теоријским тако и у практичним истраживањима нано-електромеханичких система моделираних нано-цевима и графенским нано-листићима. Могућност побољшања механичког одзива нано-структурних елемената се постиже, дејством различитих поља, тако да се спољашњом променом интензитета поља мења укупна крутост или пригушење нано-система. У раду Karličić и остали [78] анализиран је утицај промене температуре и лонгитудиналног магнетног поља на слободне осцилације нано-греде са оштећењем применом нелокалне Euler-Bernoulli-јеве теорије греде. Аутори су нумеричким путем одредили сопствене фреквенције система за два типа граничних услова и дали облике амплитудних модова за различите положаје оштећења. Такође је показана могућност промене крутости услед промене само параметара спољашњег физичког поља. Murmu и Pradhan [79, 80] истражили су термичке и нелокалне утицаје на слободне трансверзалне осцилације и стабилност једнослојне угљеничне нано-цеви уметнуте у еластични медијум. Користили су Euler-Bernoulli-јеву теорију греде као математички модел, где су преко нелокалне конститутивне релације увели утицаје мале скале и промене температуре. Дата нумеричка анализа је показала утицај различитих параметара физичких поља као и материјалних карактеристика система на сопствене фреквенције и силе извијања. У раду Ke и Wang [81], изведене су парцијалне диференцијалне једначине кретања нано-греде применом

Hamilton-овог принципа и нелокалне конститутивне релације за термо-пиезо-електрично тело. Аутори су анализирали утицај нелокалног ефекта, промене температуре, електричног напона и аксијалне силе на слободне осцилације пиезо-електричне нано-греде. Hosseini-Hashemi и остали [82] су истражили утицај површинских напона функционалне нано-греде са пиезо-електричним особинама, применом нелокалне теорије еластичности. Аутори су показали значајан утицај површинских напона и нелокалности на динамичке и статичке карактеристике овакве нано-греде. Kiani [83] је истраживао утицај просторног магнетног поља на осцилације и нестабилност једнослојне угљеничне нано-цеви. За механички модел нано-цеви искористио је нелокалну Rayleigh-ву теорију греде, где је утицај магнетног поља увео преко Maxwell-вих релација. Karličić и остали [84] извели су систем парцијалних диференцијалних једначина осциловања система срегнутих виско-еластичних угљеничних нано-цеви на основу нелокалне виско-еластичне теорије, а утицај магнетног поља увели преко Maxwell-вих релација. У аналитичком облику изведени су изрази за сопствене фреквенције које у јединственој форми приказују кружну фреквенцију и коефицијент пригушење система. Детаљном параметарском анализом утврђен је утицај различитих параметара на динамичко понашање система. Mirmi и остали [85] показали су утицај раванског магнетног поља на осцилаторно понашање графенског нано-листића применом нелокалне теорије еластичности и Maxwell-ових релација. Добијени су аналитички изрази за сопствене фреквенције плоче са просто ослоњеним ивицама.

### 1.3 Нелокална теорија еластичности и виско-еластичности

Добро разумевање механичког понашања нано-материјала, као што су угљеничне нано-цеви и графенски нано-листићи, је веома значајно у дизајну и коришћењу нано-електромеханичких система. Посебну пажњу истраживача привлачи изучавање статичког и динамичког понашања угљеничних нано-цеви и графенских нано-листића моделираних преко метода механике континуума. На Сл.1.3.1 су приказана једнослојна угљенична нано-цев и графенски нано-листић, сачињени од атома угљеника распоређених у шестоугаоној кристалној решетки. По природи, физички модели нано-цеви и графенских нано-листића имају дискретну структуру на нано-скали. Тако да методе које се користе у описивању структуре самог материјала морају узети у обзир такве утицаје, као и утицаје који се јављају од међуатомских сила. Модели нано-структурних елемената засновани на модификованој механици континуума имају важну улогу у проучавању механичког понашања угљеничних нано-цеви и графенских нано-листића. Такође, структурне теорије које су разрађене за проучање класичних структурних елемената као што су теорија греде, штапова, плоча и љуски имају великог значаја у формирању математичких и механичких модела нано-структура. Међутим, класична теорија континуума а самим тим и класична теорија еластичности у контексту примене у моделирању нано-структурних елемената је под знаком питања због тога што не узима у обзир ефекте дискретне структуре и утицаје

међумолекуларних сила и остале утицаје на нано-скали. Неузимањем у обзир тих утицаја на нано-скали добијају се погрешни или недовољно тачни резултати. Тако да се модификацијом класичне механике континуума, увођењем материјалног параметра који узима у обзир утицај величине, међумолекуларних сила као и дискретну структуру, класична теорија континуума проширује се на нелокалну механику континуума. Основна претпоставка те теорије је да напон у тачки не зависи само од деформације у тој тачки него од деформације свих тачака посматраног чврстог тела. Проширење класичне теорије континуума омогућује нам довољно тачно формирање механичких и математичких модела угљених нано-цеви као и графенских нано-листића. Решења добијена преко нелокалне механике континуума се боље слажу са решењима молекуларно динамичких симулација. Такође, што се тиче брзине добијања решења као и коришћење рачунарских ресурса, предности имају методе нелокалне механике континуума. Може се казати да нелокална теорија континуума која узима у обзир утицаје на нано-скали (међумолекуларне силе, дискретност нано-структуре) даје везу између метода класичне механике континуума и теорије молекуларне динамике, чиме се обезбеђује довољно тачан математички модел нано-структуре.



**Сл. 1.3.1** Дискретна структура нано-материјала, а) Једнослојна угљенична нано-цев и б) Једнослојни графенски нано-листић

Формирање механичких модела као и симулација кретања угљеничних нано-цеви, графенских нано-листића као и осталих нано-материјала је веома важно у процесу пројектовања комплексних нано-система. Анализом утицаја сила или деформација које делују на нано-структурне елементе, уочава се њихова разлика на статичка и динамичка оптерећења. Разумевање дејства као и извора је веома важно у фази пројектовања савремених нано-система. Примери основних нано-елемената као што су: угљеничне нано-цеви, цинк-оксид нано-цеви, графенски нано-листићи, златни и сребрни нано-листићи, служе у формирању нано-електромеханичких система, нано-резонатора, нано-робота, нано-машина. Поузданост модела нано-структура заснива се на довољно добром познавању и примени физичких закона формулисаних у квантној механици, нелокалне механике континуума, теоријом материјала (теорија кристалне решетке) и примењене математике. Структурни модели сложенијих нано-система омогућују нам довољно тачне податке у погледу носивости конструкције као и могућност предвиђања отказа и ломова нано-структуре.

Методe модификованe механике континуума у последње време све више долазе до изражаја што се огледа у великом броју радова објављених од стране истраживача из целог света. У моделима заснованим на механици континуума дискретне нано-структуре као што су угљеничне нано-цеви као и графенски нано-листићи се моделирају као континуално расподељена маса без дисконтинуитета. Основне теорије греда су: Euler-Bernuolli-јева, Rayleigh-јева, Timoshenko-ва као и теорије греде вишег реда (Reddy и Huu-Thai торија греде). Што се тиче модела плоча користе се Kirchoff-ова, Mindlin-ова као и Reddy-ева и Huu –Thai-ева теорије плоче вишег реда. Коришћењем ових модела нано-елемента могућује нам брзо добијање решења са довољном тачношћу у поређењу са симулацијама молекуларне динамике.

### *Конститутивне релације*

Добро је познато да у класичној теорији континуума утицај поља деформација у произвољном делу тела не утичу на деформације дела тела које се налази на довољно великој дистанци. Дакле може се закључити да су у том случају деформације само локалног карактера. Међутим ако се узме у обзир и утицај дистанце када је посматрани објекат довољно мали, могуће је проширити класичну теорију континуума новим параметром, у литератури познатим као нелокални параметар. Та нова теорија познатија као нелокална механика континуума заснива се на већ поменутој претпоставци да напонско поље у тачки  $x$  еластичног тела зависи не само од деформације у тој тачки него од деформација у свим тачкама  $x'$  [29], што је у сагласности са атомским теоријама кристалне решетке и експерименталним посматрањем дисперзије фонона. Треба напоменути да се нелокална теорија са успехом користи у решавању проблема дисперзије таласа, дислокација, механике лома итд. Основна форма конститутивне релације нелокалне теорије еластичности изведена је у интегралном облику, где се за границе интеграције узима укупна запремина еластичног тела. Интеграл садржи функцију језгра која одређује утицај деформација различитих тачака тела на напон у посматраној тачки. Тако да та функција представља неку врсту нелокалног модула, као што је модул еластичности код класичног Hook-овог закона. Са математичке тачке гледишта, нелокална конститутивна релација еластичног тела се своди на класичну конститутивну релацију када нелокални модул тј. функција језгра има облик Dirac-ове делта функције.

Утицај мале скале, тј. утицај величине, узима се у обзир код нелокалних теорија континуума увођењем материјалног параметра који се добија експерименталним путем или методама молекуларне динамике. Међуатомске силе и растојања улазе директно у конститутивну релацију преко материјалног параметра. Основна идеја ове теорије је успостављање веза између макроскопских механичких теорија и појава које се јављају на нано-скали. У литератури су позната два приступа нелокалној еластичној теорији, “интегрални” (јака нелокалност), конститутивна релација дата је у интегралном облику где су напони у посматраним тачкама

функције деформације свих тачака домена. Други приступ је познат као “градијентни” (слаба нелокалност), где су напони дати као функција градијента деформације у истој тачки, а конститутивна релација дата је у облику диференцијалне једначине. Велика предност оваквог типа конститутивних релација у нелокалној теорији континуума је одређивање механичког понашања нано-структура сачињених од великог броја честица, на основу малог броја једначина [9]. На тај начин нелокална теорија даје везу између ограничења класичне механике континуума и атомских теорија кристалне решетке.

На основу већ споменутих претпоставки у нелокалној теорији еластичности, основна форма интегралне конститутивне релације за хомогено и изотропно еластично тело без утицаја запреминских силе [7, 8], има следећи облик

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \phi) \sigma_{ij}^c(\mathbf{x}') dV(\mathbf{x}'), \quad (1.3.1a)$$

$$\sigma_{ij,i} + \rho(f_j - \ddot{u}_j) = 0, \quad (1.3.1b)$$

$$\sigma_{ij}^c(\mathbf{x}') = \lambda \varepsilon_{rr}(\mathbf{x}') \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}'), \quad (1.3.1v)$$

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i(\mathbf{x}')}{\partial x'_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x}')}{\partial x'_i} \right), \quad (1.3.1r)$$

где чланови  $\sigma_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}^c$  и  $\varepsilon_{ij}$  означавају редом нелокални тензор напона, класични тензор напона и тензор деформација. У једначини (1.3.1v)  $\lambda$  и  $\mu$  су Lamé-ове константе. Запремина коју обухвата еластично тело је означена са  $V$ . Чланови  $\rho$ ,  $f_j$ ,  $\ddot{u}_j$ ,  $\varepsilon_{rr}$  и  $\delta_{ij}$  означавају редом густину материјала, компоненте специфичне запреминске силе, компонентне убрзања, запреминску деформацију и Kronecker-ов делта симбол. Подинтегрална функција  $\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \phi)$  представља нелокални модул, у теорији интегралних једначина познатија је као функција језгра. Нелокални модул је функција која се уводи у конститутивну релацију, а у себи садржи нелокалне утицаје у посматраној тачки  $\mathbf{x}$  изазване локалним деформацијама у тачки  $\mathbf{x}'$ . Члан  $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$  представља растојање изражено Еуклидском нормом. Члан  $\phi$  је материјални параметар који зависи од спољашње (дужина прслине, таласна дужина) и унутрашње (параметар кристалне решетке, величине грануле, растојања између угљеничних веза) карактеристичне дужине. Нелокални модул достиже своју максималну вредност за  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ , а опада са повећањем величине  $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$ . Нелокални модул има димензију  $[L^{-3}]$ .

Материјални параметар  $\phi$  у нелокалној теорији еластичности може се изразити на следећи начин

$$\phi = \frac{e_0 \tilde{a}}{l_e}, \quad (1.3.2)$$

где је  $e_0$  константа која се одређује за сваки материјал посебно, а  $\tilde{a}$  и  $l_e$  означавају унутрашњу и спољашњу карактеристичну дужину. Пример унутрашње дужине  $\tilde{a}$  може бити параметар кристалне решетке, дужина грануле, растојање између два атома угљеника, док спољашња

дужина  $l_e$  може бити димензије угљеничне нано-цеви, графенског нано-листића и таласна дужина. У раду Eringen-а [9] вредност материјалног параметра  $e_0 = 0.39$  добијена је поређењем резултата диспезионих кривих из Vorn-Karman-овог модела динамике кристалне решетке и нелокалне теорије еластичности.

Када је нелокални члан приближно једнак нули, тј.  $\phi \rightarrow 0$ , у том случају функције језгра  $\alpha$  постаје Dirac-ова делта функција. Тада се нелокална теорија еластичности своди на класичну теорију. За случај када  $\phi \rightarrow 1$ , нелокална теорија апроксимира атомску теорију кристалне решетке. Основна конститутивна релација нелокалне теорије еластичности је једначина (1.3.1a), интегро-парцијална диференцијална једначина која је у општем случају веома тешка за решавање и примену. Да би упростили конститутивну релацију дату у интегралном облику, уводи се претпоставка да је нелокални модул  $\alpha(|x' - x|, \phi)$  дат преко Green-ове функције линеарног оператора, у следећем облику

$$L_o \alpha(|x' - x|, \phi) = \delta(|x' - x|), \quad (1.3.3)$$

где је  $L_o$  је линеарни диференцијални оператор, а  $\delta$  Dirac-ова делта функција. Применом линеарног диференцијалног оператора на једначини (1.3.1a), добија се

$$L_o \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^c, \quad (1.3.4)$$

где линеарни диференцијални оператор  $L_o$  узима различиту форму за сваки појединачни случај нелокалног модула  $\alpha$ . За нелокални модул  $\alpha$  приказан у једначини (1.3.3) и комбинацијом са једначином (1.3.4), добија се следећа форма диференцијалног оператора

$$L_o = 1 - l_e^2 \phi^2 \nabla^2, \quad (1.3.5)$$

где је  $\nabla^2$  - Laplace-ов оператор. Применом једначина (1.3.4) и (1.3.5), нелокална конститутивна релација, једначина (1.3.1a) може се изазити у следећој диференцијалној форми

$$[1 - (e_0 \tilde{a})^2 \nabla^2] \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (1.3.6)$$

Конститутивну релацију (1.3.6) можемо писати на једноставнији начин преко тензора еластичности четвртог реда  $C_{ijkl}$ , као у радовима [8, 29, 31, 33, 35]

$$[1 - (e_0 \tilde{a})^2 \nabla^2] \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (1.3.7)$$

Применом једначине (1.3.7), конститутивна релација за једно и дво-димензионе нано-структуре, може се написати у следећем облику

$$\sigma_{xx} - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx}, \quad (1.3.8a)$$

$$\tau_{xz} - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} = G \gamma_{xz}, \quad (1.3.8b)$$

$$[1 - (e_0 \tilde{a})^2 \nabla^2] \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \frac{\partial E}{\partial \vartheta^2} & 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \vartheta^2} & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (1.3.8b)$$

где су  $(e_0\tilde{a})$ ,  $E$ ,  $G$  и  $\vartheta$  - нелокални параметар, модул еластичности, смицања и Poisson-ов коефицијент материјала нано-греде односно нано-плоче,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  - су нормални напони у правцу  $x$  и  $y$  осе,  $\tau_{xy}$  је смичући напон и  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  је Laplace-ов оператор за дво-димензиони случај. Чланови  $\varepsilon_{xx}$  и  $\varepsilon_{yy}$  - су нормалне деформације (дилатације) у правцу  $x$  и  $y$  осе, а  $\gamma_{xy}$  - представља одговарајуће клизање у равни  $Oxy$ .

За случај нано-материјала са виско-еластичним особинама, нелокална виско-еластична конститутивна релација Kelvin-Voigt-овог модела дата је ураду Lei и остали [73] за једно-димензионални случај, док су Rouresmaeeli и остали [76] дали за дводимензиони случај. Нелокална конститутивна релација за виско-еластично тело представља комбинацију нелокалне теорије еластичности и виско-еластичности. Нелокална конститутивна релација Kelvin-Voigt-овог модела је облика

$$\sigma_{xx} - (e_0\tilde{a})^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E(\varepsilon_{xx} + \tau_d \dot{\varepsilon}_{xx}), \quad (1.3.9a)$$

$$[1 - (e_0\tilde{a})^2 \nabla^2] \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t})}{1 - \vartheta^2} & \frac{\vartheta E(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t})}{1 - \vartheta^2} & 0 \\ \frac{\vartheta E(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t})}{1 - \vartheta^2} & \frac{E(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t})}{1 - \vartheta^2} & 0 \\ 0 & 0 & G(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (1.3.9b)$$

где је  $\tau_d$  унутрашње структурно пригушење.

Као што је већ речено, материјални параметар  $e_0$  одговара појединачно сваком материјалу и одређује се применом упоредне анализе резултата добијене моделом заснованим на нелокалној теорији еластичности и апроксимацијама атомске дисперзионе криве добијене атомском теоријом кристалне решетке. Такође, одређивање вредности овог параметра могуће је и поређењем резултата добијених преко нелокалне теорије и молекуларно динамичких симулација. Потребно је напоменути да чланови  $e_0\tilde{a}$  и  $e_0\tilde{a}/l_e$  означавају такозване нелокалне параметере или коефицијенте мале скале. Претрагом литературе утврђени су најчешће коришћени нелокални параметри. Њихове вредности дате су у Табели 1.1.

**ТАБЕЛА 1.1** Вредности нелокалних параметара из литературе

Нелокални параметар	Вредност	Рад
$\tilde{a}$	0.142 nm	Sudak [86]
$e_0$	0.39	Eringen [8]
	0.19	Duan и остали [87]
$e_0\tilde{a}$	0.7 nm	Wang и остали [88]
	0-2nm	Wang и Wang [89]
	<2.1 nm	Wang [90]
$e_0\tilde{a}/l_e$	0-0.8	Lu и остали [91]



# Глава 2

## Нелокална теорија еластичних нано – греда, штапова и плоча

### 2.1. Опште напомене

У овој глави биће анализирано осцилаторно понашање и стабилност једнослојне угљеничне нано-цеви и графенског нано-листића моделираних као нано-греда, односно нано-плоча, применом нелокалне теорије еластичности. У циљу добијања механичког модела нано-цеви, користиће се Euler-Bernoulli-јев модел греде, док за модел графенског нано-листића биће коришћена Kirchhoff-ова теорија плоча. Применом другог Newton-овог закона кретања и нелокалне конститутивне релације за еластично тело, добијају се диференцијалне једначине кретања са одговарајућим граничним условима. Тако добијени модели нано-греде и нано-плоче садрже материјални параметар који узима у обзир утицаје на нано-скали као и утицаје међумолекуларних сила у нано-структури. Применом Fourier-ових тригонометријских редова, добијају се решења за сопствене фреквенције и критична сила извијања у затвореном облику. Такође, биће анализирани лонгитудиналне осцилације нано-штапа за два типа граничних услова.

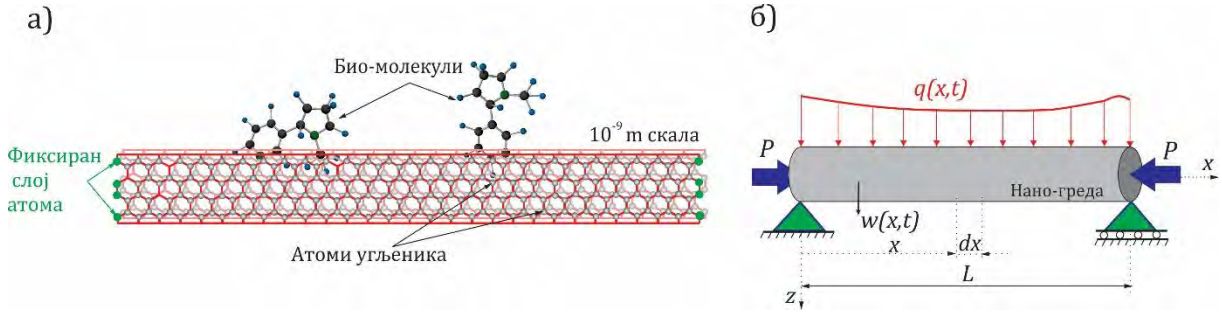
### 2.2 Euler-Bernoulli-јеве теорија греде заснована на примени нелокалне теорије еластичности

У овом делу рада, на основу нелокалне конститутивне релације (1.3.8a) и Euler-Bernoulli-јеве теорије греде, извешћемо диференцијалне једначине кретања нано-греде као модела угљеничне нано-цеви. Сл. 2.2.1. Физичка интерпретација граничних услова који одговарају простој греди како је предложено у раду Ansari [92] објашњава се тиме што се крајњи гранични слој атома угљеника у угљеничној нано-цеви фиксира. Euler-Bernoulli-јева теорија греде је заснована на следећим претпоставкама: (I) попречни пресеци греде остају управни на аксијалну осу у току и након деформација, (II) нема кривљења попречних пресека, (III) нема деформација у правцу дебљине греде [93, 94]. Такође, могу се занемарити утицај инерција ротације попречних

пресека, као и утицај деформације смицања. Применом датих претпоставки, може се писати следеће поље померања:

$$\bar{u}_x = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad \bar{v}_y = 0, \quad \bar{w}_z = w(x, t), \quad (2.2.1)$$

где су  $\bar{u}_x$  и  $\bar{v}_y$  померања греде у равни  $xu$ ,  $\bar{w}_z$  је померање у правцу дебљине греде тј. померања у правцима  $x$ ,  $y$  и  $z$ , редом.



Сл.2.2.1 Једнослојна угљенична нано-цев са једним слојем фиксираних атома угљеника [92]:

а) Физички модел, б) Механички модел, нано-греда са простим ослонцима.

Ако претпоставимо само мале деформације греде, тада компоненте тензора деформације нано-греде можемо писати као:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial z} = 0, \quad (2.2.2a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} = 0, \quad (2.2.2b)$$

где су  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  и  $\varepsilon_{zz}$  нормалне деформације (дилатације), док су  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{zy}$  смичуће деформације (клизања).

Размотримо сада силе које делују на елементарни део нано-греде приказан на Сл.2.2.2. Попречни пресек елементарног дела греде је константан дуж осе  $x$ . Са леве стране елементарног дела делују трансверзална сила  $F_T$ , аксијална сила  $P$  и момент савијања  $M_f$ . У општем случају све три величине зависе од координате  $x$  и могу бити променљиве. Такође, на елементарни део делује спољашња континуална трансверзална сила  $q(x, t)$  и аксијална статичка сила  $P$ . На десној страни елементарног дела делују трансверзална сила  $F_T + dF_T$  и момент савијања  $M_f + dM_f$  увећане за инфинитезимални део ( $dM_f = \frac{\partial M_f}{\partial x} dx$ ). На Сл.2.2.2, са  $\alpha$  и  $\alpha + d\alpha$  је означен угао обртања попречног пресека, а са  $dm = \rho A dx$  маса елементарног дела нано-греде.

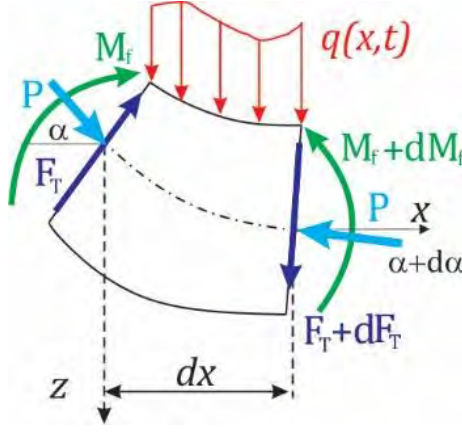
Применом другог Newton-овог закона кретања на елементарни део нано-греде добијамо једначине кретања у следећем облику

$$\sum F_z = dm \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial F_T}{\partial x} + q - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.2.3a)$$

$$\sum M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_T dx + M_f - (M_f + dM_f) = 0, \quad F_T = \frac{\partial M_f}{\partial x}, \quad (2.2.36)$$

а резултујући момент савијања  $M_f$  је дефинисан као

$$M_f = \int_A z \sigma_{xx} dA. \quad (2.2.4)$$



Сл. 2.2.2 Елементарни део нано-греде дужине  $dx$  са напонским резултантима

Ако нелокалну конститутивну релацију једначина (1.3.8.а) помножимо са  $zdA$  и интегралимо по површини попречног пресека нано-греде  $A$ , узимајући у обзир релацију (2.2.4), добијамо

$$M_f - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2.2.5a)$$

где је  $I = I_y = \int_A z^2 dA$  аксијални момент инерције површине попречног пресека за  $y$ -осу. Претпостављамо да је аксијално померање  $u$  мало у односу на трансверзално померање  $w$  тако да га можемо занемарити. Заменимо ли (2.2.36) у (2.2.3а) добијамо релацију из које одређујемо  $\partial^2 M_f / \partial x^2$  као

$$\frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q. \quad (2.2.56)$$

Затим, ако диференцирамо релацију (2.2.5а) два пута по  $x$  добијамо

$$\frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^4 M_f}{\partial x^4} = -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}. \quad (2.2.5b)$$

Када заменимо релације (2.2.5а) и (2.2.5б) у (2.2.5в), добијамо парцијалну диференцијалну једначину кретања нано-греде

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q \right]. \quad (2.2.6)$$

Гранични услови за случај просто Euler-Bernoulli-јеве нано-греде дужине  $L$ , гласе за

$$x = 0, \quad \begin{cases} w(0, t) = 0, \\ M_f(0, t) = \left[ (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -q + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{x=0} = 0, \end{cases} \quad (2.2.7a)$$

и за

$$x = L, \quad \begin{cases} w(L, t) = 0, \\ M_f(L, t) = \left[ (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -q + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{x=L} = 0, \end{cases} \quad (2.2.76)$$

Потребно је нагласити да су, у физичком смислу, гранични услови за просту Euler-Bernoulli-јеву нано-греду применом нелокалне теорије еластичности исти као и гранични услови за Euler-Bernoulli-јев модел прости греде заснован на класичној теорији еластичности, Lu и остали [91]. У наставку размотримо решења за трансверзалне осцилације Euler-Bernoulli-јеве нано-греде као и стабилност под утицајем константног статичког аксијалног оптерећења.

## 2.2.1 Слободне осцилације Euler-Bernoulli-јеве нано-греде

Парцијалну диференцијалну једначину кретања слободних трансверзалних осцилација Euler-Bernoulli-јеве нано-греде, за случај када су спољашње оптерећење  $q$  и притисна аксијална сила  $P$  једнаки нули, добићемо када у једначини (2.2.6) заменимо  $q = 0$  и  $P = 0$

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = (e_0 \tilde{a})^2 \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2}. \quad (2.2.8)$$

Ако претпоставимо хармонијско кретање нано-греде решење парцијалне диференцијалне једначине (2.2.8) можемо претпоставити у облику Fourier-овог бесконачног тригонометријског реда као

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin \alpha_n x e^{i\omega_n t}, \quad (2.2.9)$$

где је  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\alpha_n = n\pi/L$ ,  $W_n$  - је сопствена амплитудна функција нано-греде а  $\omega_n$  је сопствена фреквенција  $n$ - тог мода осциловања.

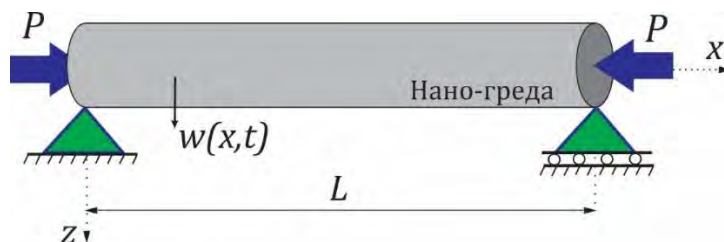
Заменом претпостављеног решења (2.2.9) у једначину кретања трансверзалних осцилација Euler-Bernoulli-јеве нано греде (2.2.8), добијамо аналитичко решење за сопствене кружне фреквенције

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI\alpha_n^4}{1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2}}, \quad \text{за } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.10)$$

## 2.2.2 Статичка стабилност Euler-Bernoulli-јеве нано-греде

Размотримо сада статичку стабилност Euler-Bernoulli-јеве нано-греде под дејством аксијалног притисног оптерећења  $P$ , Сл. 2.2.3. Изједначавањем са нулом чланова  $q = q(x, t)$  и  $\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}$  у парцијалној диференцијалној једначини кретања (2.2.6), добија се једначина Euler-Bernoulli-јеве нано-греде при статичком дејству аксијалног притисног оптерећења  $P$ ,

$$P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = (e_0 \tilde{a})^2 P \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}. \quad (2.2.11)$$



Сл.2.2.3 Euler-Bernoulli-јева нано-греда под дејством статичког аксијалног оптерећења

Пошто је нано-греда сада само под утицајем статичког аксијалног оптерећења  $P$ , на сличан начин као и у случају слободних осцилација греде претпостављамо решење у облику (2.2.9). Ако у претпостављено решење (2.2.9) занемаримо члан  $e^{i\omega n t}$ , а затим унесемо у једначину (2.2.11) добијамо аналитички облик силе извијања

$$P_{EBn} = \frac{EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}{1 + (e_0 \tilde{a})^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}, \quad \text{за } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.12)$$

Најмања вредност силе извијања зове се критична сила извијања и одговара сили добијеној за  $n = 1$ . У овом случају критична вредност аксијалне силе извијања Euler-Bernoulli-јеве нано-греде има следећу вредност

$$P_{cr} = P_1 = \frac{EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^2}{1 + (e_0 \tilde{a})^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2}. \quad (2.2.13a)$$

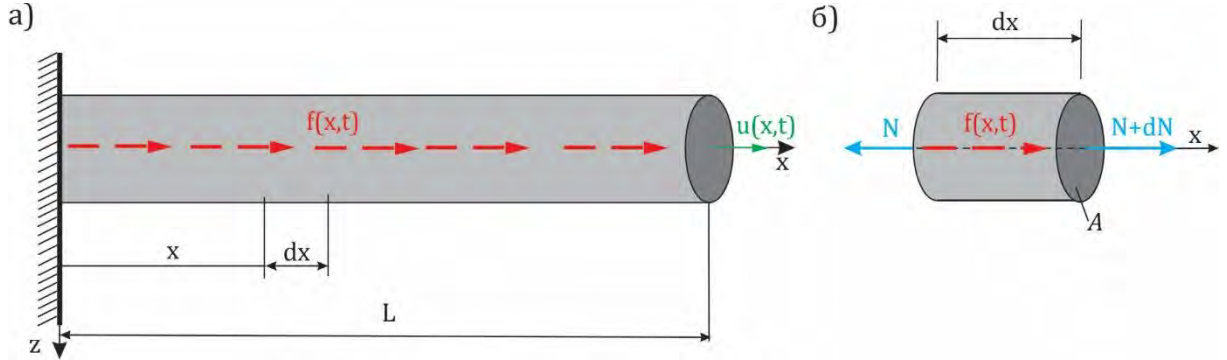
Ако занемаримо нелокални параметар  $(e_0 \tilde{a})$  у једначини (2.2.13a) за критичну силу извијања добија се добро позната у класичној теорији греде Euler-ова критична сила извијања

$$P_{crE} = EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^2. \quad (2.2.13b)$$

## 2.3 Теорија штапа заснована на нелокалној теорији еластичности

Сада размотримо нано-штап дужине  $L$  и површине попречног пресека  $A$ , као што је приказано на Сл. 2.3.1a. Претпостављамо да се површина попречног пресека  $A$  не мења дуж  $x$  осе нано-штапа и подразумевамо да је нано-штап хомоген, прав и еластичан. У циљу разматрања лонгитудиналних осцилација нано-штапа, претпоставићемо да се попречни пресеци штапа аксијално померају само дуж осе  $x$ , тако да нема спрезања са осталим врстама осцилација. Уочимо елементарни део дужине  $dx$  нано-штапа који је приказан на Сл. 2.3.1б, и размотримо силе које делују на њега. На левој страни елементарног дела нано-штапа делује сила  $N$ , која представља резултанту унутрашњег нормалног напона  $\sigma_{xx}$  који делује у пречном пресеку  $A$ . Она

је у општем случају функција координате  $x$  и времена  $t$ ,  $N = N(x, t)$ . Дуж елементарног дела нано-штапа делује континуално расподељено аксијално оптерећење  $f(x, t)$ , које представља спољашњу запреминску силу. На десном крају елементарног дела нано-штапа дејствује резултанта унутрашњих сила увећана за прирештај  $dN$ .



Сл. 2.3.1 а) Механички модел нано-штапа дужине  $L$ , б) елементарни део нано-штапа дужине  $dx$ .

Применом другог Newton-овог закона кретања, диференцијална једначина кретања елементарног дела нано-штапа добија се као сума свих сила које делују у правцу  $x$  - осе

$$\sum F_x = dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow -N + (N + dN) + f(x, t)dx = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.3.1)$$

где је  $dN = \frac{\partial N}{\partial x} dx$  прираштај аксијалне силе  $N$ , а  $u = u(x, t)$  је аксијално померање елементарног дела дуж  $x$  - осе, а  $dm = \rho A dx$  маса елементарног дела нано-штапа. Након сређивања, једначина кретања је облика

$$\frac{\partial N}{\partial x} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.3.2)$$

где је резултујућа аксијална сила дефинисана као

$$N(x, t) = \int_A \sigma_{xx} dA. \quad (2.3.3)$$

Ако нелокалну конститутивну релацију (1.3.8а) помножимо са  $dA$  и интегралимо по површини попречног пресека нано-штапа  $A$ , узимајући у обзир релацију (2.3.3) добијамо

$$N - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = EA \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.3.4)$$

а диференцирањем релације (2.3.4) по  $x$  добија се

$$\frac{\partial N}{\partial x} - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right) = EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.3.5)$$

Ако из једначине (2.3.2) одредимо  $\frac{\partial N}{\partial x}$  и заменимо у (2.3.5) добијамо једначину кретања нано-штапа у функцији аксијалног померања  $u(x, t)$

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f(x, t) - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f(x, t) \right). \quad (2.3.6)$$

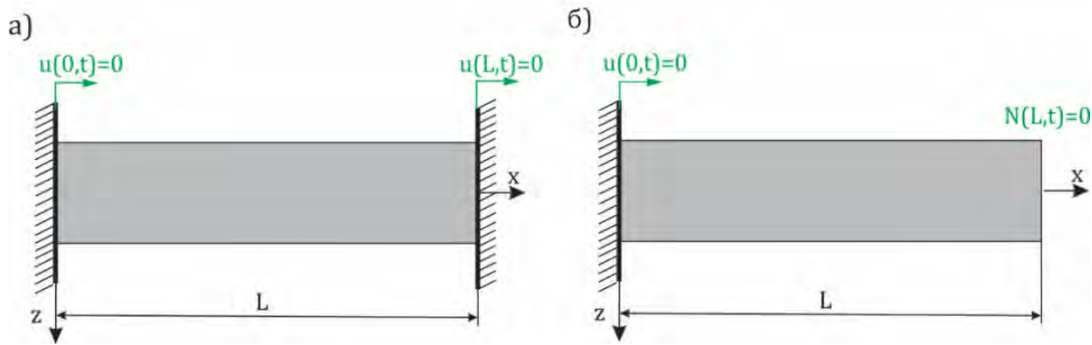
Занемаривањем члана  $f(x, t)$  у једначини (2.3.6), могу се добити аналитички изрази за сопствене фреквенције лонгитудиналних осцилација нано-штапа. У наставку, размотрићемо граничне услове обострано уклештеног нано-штапа, Сл. 2.3.2а, и конзолног нано-штапа Сл. 2.3.2б. Математичка формулација граничних услова обострано уклештеног нано-штапа код кога су померања на местима уклештења једнака нули,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0. \quad (2.3.7)$$

У случају конзолног нано-штапа, на месту уклештења померање је једнако нули док је на слободном крају аксијална сила једнака нули, што се може формулисати на следећи начин

$$u(0, t) = 0, \quad (2.3.8a)$$

$$N(L, t) = \left[ (e_0 \tilde{a})^2 \rho A \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + EA \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=L} = 0, \quad (2.3.8b)$$



Сл. 2.3.2 Гранични услови нано-штапа:

а) обострано уклештен нано-штап, б) конзолни нано-штап.

### Слободне осцилације нано-штапа

Аналитичко решење једначине кретања нано-штапа релација (2.3.6) за одговарајуће граничне услове, може се добити применом методе раздвајања променљивих. Претпостављамо да је кретање хармонијско те применом методе раздвајања променљивих, решење основне једначине кретања нано-штапа може се написати у следећем облику

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t), \quad (2.3.9)$$

где је  $T_n(t) = e^{i\omega_n t}$  временска функција, а  $X_n(x)$  одговарајућа амплитудна функција која зависи од граничних услова нано-штапа. Заменом претпостављеног решења (2.3.9) у парцијалну диференцијалну једначину кретања (2.3.6) за случај када је  $f(x, t) = 0$ , добија се обична диференцијална једначина кретања по непознатој амплитудној функцији  $X_n(x)$ , следећег облика

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} + \alpha_n^2 X_n(x) = 0, \quad (2.3.10)$$

у којој је члан  $\alpha_n$  - карактеристична вредност и има следећу вредност

$$\alpha_n^2 = \frac{\omega_n^2}{\frac{E}{\rho} - (e_0 \tilde{a})^2 \omega_n^2}. \quad (2.3.11)$$

Диференцијална једначина (2.3.10) је добро позната једначина хармонијског осцилатора, чије је решење

$$X_n(x) = A_n \sin \alpha_n x + B_n \cos \alpha_n x, \quad n = 1, 2, \dots, \infty, \quad (2.3.12)$$

где су  $A_n$  и  $B_n$  непозанате константе. Ако заменимо решење (2.3.12) у математичке релације граничних услова (2.3.7), за обострано уклештен нано-штап добићемо да се константе  $B_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, \infty$ , и тригонометријску једначину

$$\sin(\alpha_n L) = 0. \quad (2.3.13a)$$

Из релације (2.3.13a) одређујемо карактеристичне вредности  $\alpha_n$  за случај обострано уклештеног нано-штапа

$$\alpha_n L = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (2.3.13b)$$

Сада је амплитудна функција за овај тип граничних услова одређена као

$$X_n(x) = A_n \sin \alpha_n x = A_n \sin \left( \frac{n\pi}{L} x \right). \quad (2.3.14)$$

За случај конзолног нано-штапа Сл.2.3.2б, горе описаним поступком, за граничне услове (2.3.8) добијамо да су константе  $B_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, \infty$  и тригонометријску једначину

$$\cos(\alpha_n L) = 0, \quad (2.3.15a)$$

чији су корени

$$\alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (2.3.15b)$$

Амплитудна функција за овај тип граничних услова одређена је као

$$X_n(x) = A_n \sin \alpha_n x = A_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} x. \quad (2.3.16)$$

Аналитичко решење за сопствених фреквенција нано-штапа добијамо решавањем једначине (2.3.11) по  $\omega_n$ , као

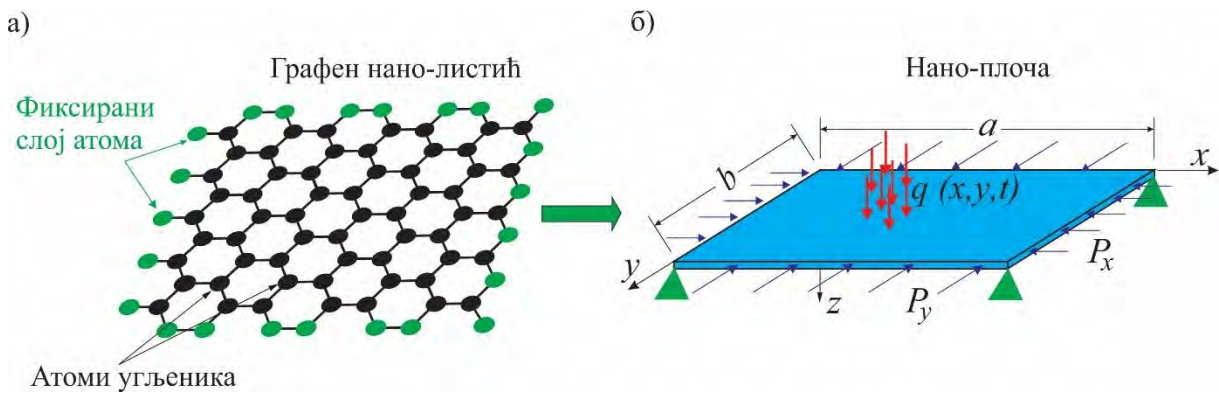
$$\omega_n = \sqrt{\frac{E \alpha_n^2}{\rho [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2]}}. \quad (2.3.17)$$

У овој релацији карактеристичне вредности  $\alpha_n$  одређујемо из граничних услова. За обострано уклештен нано-штап и за случај конзолног штапа дате су релацијама (2.3.13b) и (2.3.15b).



## 2.4 Kirchhoff-ова теорија плоча заснована на примени нелокалне теорије еластичности

У овом одељку, усвојићемо основне претпоставке у моделирању једнослојног графенског нано-листића засноване на нелокалној теорији еластичности. Основне претпоставке, на основу којих се формира поље померања дефинисано је на сличан начин као у случају Euler-Bernoulli-јеве теорије греде. На Сл. 2.4.1, приказан је графенски нано-листић са одговарајућим механичким моделом. Може се запазити да фиксиран слој атома угљеника представља са механичке тачке гледишта ослоње нано-плоче, као што је дато у раду Ansari и остали [62]. Претпостављамо такође, да је еластична нано-плоча хомогена и изотропна. Размотримо сада нано-плочу дужине  $a$ , ширине  $b$  и дебљине  $h$  (дебљина једног атома) која је слободно ослоњена по свим ивицама. Координатни систем је постављен тако да је  $x$ -оса у правцу дужине плоче,  $y$ -оса у правцу ширине плоче, а  $z$  је у правцу дебљине плоче, као што је приказано на Сл. 2.4.1б.



Сл. 2.4.1 Графенски нано-листић са једним слојем фиксираних атома угљеника [62]: а) физички модел, б) механички модел представљен као слободно ослоњена нано-плоча.

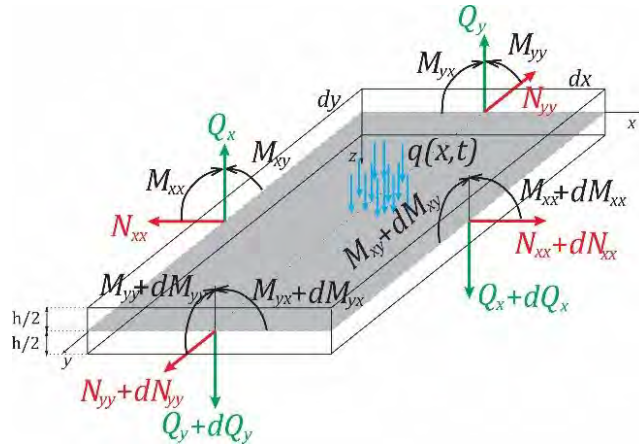
На основу Kirchhoff-ове теорије плоча, могу се дефинисати компонентна померања  $u(x,y,z,t)$ ,  $v(x,y,z,t)$  и  $w(x,y,z,t)$  произвољне тачке средње површине нано-плоче дуж координатних оса  $x$ ,  $y$ ,  $z$  као

$$u(x,y,z,t) = u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v(x,y,z,t) = v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w(x,y,t) = w, \quad (2.4.1)$$

где су  $u_0$  и  $v_0$  компонентна померања у равни плоче,  $z \frac{\partial w}{\partial x}$  и  $z \frac{\partial w}{\partial y}$  су компоненте померања услед ротације попречног пресека, а  $w(x,y,t)$  трансверзално померање тачака средње равни за коју је  $z = 0$ . Према томе, на основу претпостављених померања могу се одредити одговарајуће линеарне деформације плоче у произвољној тачки која је на одстојању  $z$  од средње равни у следећем облику

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (2.4.2)$$

где су  $\varepsilon_{xx}$  и  $\varepsilon_{yy}$  нормалне деформације, а  $\gamma_{xy}$  је смичућа деформација тј. клизање.



Сл. 2.4.2 Елементарни део нано-плоче димензија  $(dx, dy, h)$  са напонским резултантама.

Применом другог Newton-овог закона кретања, основне диференцијалне једначине кретања за елементарни део нано-плоче приказаном на Сл. 2.4.2, гласе

$$\sum F_z = dm \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Rightarrow q + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.4.3a)$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x, \quad (2.4.3b)$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y, \quad (2.4.3b)$$

где су померања у равни плоче  $u_0$  и  $v_0$  занемарена,  $N_{xx}$  и  $N_{yy}$  су силе које делују у равни плоче. Напонске резултатне  $Q_x$  и  $Q_y$  представљају трансверзалне смичуће силе, а  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_{xy}$  су моменти савијања и увијања, дефинисани као

$$(Q_x, Q_y, M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}, z\sigma_{xx}, z\sigma_{yy}, z\tau_{xy}) dz. \quad (2.4.4)$$

Комбиновањем једначина (2.4.4) са конститутивном релацијом за дводимензионе нано-структуре (1.3.8.в), добијају се напонске резултатне

$$M_{xx} - (e_0 \tilde{a})^2 \left( \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial y^2} \right) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (2.4.5a)$$

$$M_{yy} - (e_0 \tilde{a})^2 \left( \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \right) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (2.4.5b)$$

$$M_{xy} - (e_0 \tilde{a})^2 \left( \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y^2} \right) = -D(1 - \vartheta) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (2.4.5b)$$

где је  $D$  крутост при савијању плоче

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \vartheta^2)}. \quad (2.4.6)$$

Ако диференцирамо једначину (2.4.3б) по  $x$ , а једначину (2.4.3в) по  $y$ , добићемо  $\frac{\partial Q_x}{\partial x}$  и  $\frac{\partial Q_y}{\partial y}$ .

Када заменимо ове вредности у једначини (2.4.3а) добијамо диференцијалну једначину кретања плоче у функцији напонских резултанти

$$q + \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.4.7)$$

Ако у једначини (2.4.7) заменимо напонске резултанте из једначина (2.4.5) добија се парцијална диференцијална једначина кретања нано-плоче применом нелокалне теорије еластичности у којој је узет у обзир утицај нелокалног параметра

$$\begin{aligned} & \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - q \\ & = (e_0 \tilde{\alpha})^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - q \right). \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Претпостављамо да су све ивице нано-плоче просто ослоњене, тј. да су угиби и моменти савијања једнаки нули. Математичка формулација ових граничних услова дата је следећим релацијама

$$w(x, 0, t) = w(x, b, t) = 0, \quad w(0, y, t) = w(a, y, t) = 0, \quad (2.4.9a)$$

$$M_{xx}(0, y, t) = M_{xx}(a, y, t) = 0, \quad M_{yy}(x, 0, t) = M_{yy}(x, b, t) = 0. \quad (2.4.9b)$$

У наставку ове главе размотрићемо трансверзалне осцилације Kirchhoff-ове нано-плоче применом нелокалне теорије еластичности са просто ослоњеним ивицама као и статичку стабилност под утицајем константног притисног статичког оптерећења у равни плоче.

## 2.4.1 Слободне осцилације Kirchhoff-ове нано-плоче

У овом делу рада размотримо слободне осцилације графенског нано-листића моделираног као нано-плоча, са просто ослоњеним ивицама. Парцијалну диференцијалну једначину која описује слободне трансверзалне осцилације Kirchhoff-ове нано-плоче, применом нелокалне теорије еластичности, добијамо када у једначини (2.4.8) занемаримо утицаје спољашњег трансверзалног оптерећења  $q$  и сила у равни плоче  $N_{xx}$  и  $N_{yy}$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = (e_0 \tilde{\alpha})^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.4.10)$$

Ради одређивања аналитичког решења за  $w(x, y, t)$  парцијалне диференцијалне једначине (2.4.10), претпостављамо решење у облику двоструког тригонометријског реда, које мора да задовољава граничне услове (2.4.9), као

$$w(x, y, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{rn} \sin \alpha_r x \sin \beta_n y e^{j\omega_{rn} t} \quad (2.4.11)$$

где је  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\alpha_r = \frac{r\pi}{a}$ ;  $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$  ( $r, n = 1, 2, 3, \dots$ ), а чланови  $W_{rn}$  и  $\omega_{rn}$  су амплитуде и сопствене кружне фреквенције слободних осцилација нано-плоче.

Заменом претпостављеног решења (2.4.11) у парцијалну диференцијалну једначину кретања плоче (2.4.10), одређујемо аналитичка решења за сопствене фреквенције нано-плоче у следећем облику

$$\omega_{rn} = \sqrt{\frac{D(\alpha_r^2 + \beta_n^2)^2}{\rho h [1 + (e_0 \tilde{a})^2 (\alpha_r^2 + \beta_n^2)]}}, \quad r, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.12)$$

Добијене вредности за сопствене кружне фреквенције једнослојног графена, применом нелокалне теорије еластичности, су верификоване коришћењем молекуларно динамичких симулација, и показано је одлично слагање резултата [62, 71, 102].

## 2.4.2 Статичка стабилност Kirchhoff-ове нано-плоче

Размотримо сада, статичку стабилност графенског нано-листића димензија  $(a \times b)$ , оптерећеног спољашњим притисним силама  $P_x = -N_{xx}$  и  $P_y = -N_{yy}$ . Ако у једначини кретања нано-плоче (2.4.8) занемаримо спољашње трансверзално оптерећење  $q(x, y, t)$  инерциони члан  $\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  добијамо једначину

$$\begin{aligned} D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ = (e_0 \tilde{a})^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

из чијег решења одређујемо услове за статичку стабилност слободно ослоњене нано-плоче.

Ако уведемо однос сила као  $\delta = P_y/P_x$  и претпоставимо решење у следећем облику

$$w(x, y, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{rn} \sin \alpha_r x \sin \beta_n y, \quad (2.4.14)$$

где су,  $\alpha_r = \frac{r\pi}{a}$  и  $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$  ( $r, n = 1, 2, 3, \dots$ ), а затим претпостављено решење заменимо у парцијалну диференцијалну једначину кретања (2.4.13), можемо одредити силу извијања у облику

$$\Pi_{rn} = (P_x)_{rn} = \frac{D(\alpha_r^2 + \beta_n^2)^2}{(\alpha_r^2 + \delta \beta_n^2) [1 + (e_0 \tilde{a})^2 (\alpha_r^2 + \beta_n^2)]}. \quad (2.4.15)$$

Док је критична вредност силе извијања одређена изразом који добијамо када у (2.4.15) заменимо  $r = 1$  и  $n = 1$

$$(\Pi_{11})_{\min} = \frac{D(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2}{(\alpha_1^2 + \delta \beta_1^2) [1 + (e_0 \tilde{a})^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)]}. \quad (2.4.16)$$

Критична сила извијања плоче представља најмању вредност силе извијања која плочу доводи у стање нестабилности.

Утицај нелокалног параметра ( $e_0 \tilde{a}$ ) на сопствене фреквенције и критичну силу извијања нано-структура (нано-греда, штапова, плоча) огледа се у томе што при његовом порасту долази до смањења њихових вредности. Можемо закључити да су сопствене фреквенције и силе извијања добијене применом нелокалне теорије еластичности увек ниже него сопствене фреквенције и силе извијања добијене преко класичне теорије еластичности. Утицај мале скале има великог значаја код анализе и пројектовања нано-уређаја, неузимањем у обзир тог утицаја чини се велика грешка.



# Глава 3

## Примена више теорије греде на анализу осцилаторног понашања и статичке стабилности нано-греде

### 3.1 Опште напомене

Применом више теорије греде, Reddy и Нуу-Таи [31, 34, 38] и градијентних теорија еластичности, парцијалне диференцијалне једначине кретања изведене су за једнослојну угљеничну нано-цев. Конститутивне релације коришћене у овој глави су напонска градијентна теорија (нелокална теорија еластичности), градијентна деформациона и комбиновано деформационо-инерциона градијентна теорија еластичности. Сопствене фреквенције и критична сила извијања просто ослоњене нано-греде добијене су у аналитичкој форми, решењем система парцијалних диференцијалних једначина. Добијене аналитичке вредности ових величина садрже параметар нелокалности који узима у обзир утицаје на нано-скали. Разлика вредности сопствених фреквенција и критична сила извијања одређене применом различитих конститутивних релација показана је на неколико нумеричких примера, такође добијени резултати упоређени су са резултатима молекуларне динамике.

### 3.2 Формулација проблема

#### 3.2.1 Конститутивна релација комбиноване деформационо-инерционе градијентне теорије еластичности

За случај деформационо градијентне и комбиноване деформационо-инерционе градијентне теорије еластичности, конститутивне релације за једно-димензионе структуре дате су у раду Ansari и остали [32] и Askes и Aifantis [95] и редом гласе

$$\sigma_{xx} = E \left( \varepsilon_{xx} + \tilde{\mu} \frac{d^2 \varepsilon_{xx}}{dx^2} \right), \quad (3.2.1a)$$

$$\tau_{xz} = G \left( \gamma_{xz} + \tilde{\mu} \frac{d^2 \gamma_{xz}}{dx^2} \right), \quad (3.2.16)$$

$$\sigma_{xx} = E \left( \varepsilon_{xx} + \tilde{\mu} \frac{d^2 \varepsilon_{xx}}{dx^2} \right) + \rho \mu_m \ddot{\varepsilon}_{xx}, \quad (3.2.2a)$$

$$\tau_{xz} = G \left( \gamma_{xz} + \tilde{\mu} \frac{d^2 \gamma_{xz}}{dx^2} \right) + \rho \mu_m \dot{\gamma}_{xz}, \quad (3.2.2b)$$

где је  $\rho$  густина материјала, а  $\mu_m = l_m^2$  и  $\tilde{\mu} = l^2$  су параметри дужинске скале који се односе на инерциони и деформациони градијент, редом. Треба нагласити да у случају када је  $\mu_m = 0$  комбинована деформационо-инерциона градијентна теорија своди се на деформационо градијентну теорију, а у случају када је и  $\tilde{\mu} = 0$ , тада се градијентна теорија своди на класичну теорију еластичности. Дужински параметар  $\mu_m$  код комбиновано деформационе-инерционе градијентне теорије за елемент запремине тела, различит је од нуле за случај динамичког понашања нано-структуре док је једнак нули за случај статичког понашања нано-структуре. Потребно је напоменути да се за тачнију динамичку анализу нано-материјала користе инерционо градијентне теорије еластичности где се параметар  $\mu_m$  узима у обзир. Више детаља дато је у раду Askes и Aifantis [95].

### 3.2.2 Reddy-јева теорија греде

Код Reddy-јеве теорије греде, уведена је претпоставка да оса није управна на попречни пресек греде, као што је то у случају Euler-Bernoulli-јеве теорије. Такође, као и у случају Euler-Bernoulli-јеве теорије, линеарна деформација у правцу управном на осу греде остаје непромењена ( $\varepsilon_{zz} = 0$ ). Ове претпоставке доводе до тога да се смицајне деформације по дебљини греде мењају по параболичком закону и једнаке су нули на горњој и доњој површини греде. Због тога, нема потребе за увођењем коефицијента корекције смицања попречних пресека код више Reddy-јеве теорије греде. Треба напоменути, да је предност коришћења Reddy-јеве теорије греде у односу на Euler-Bernoulli-јеву теорију нарочито изражена при анализи понашања дебљих и краћих греда. На основу ових претпоставки функције померања у правцу координатних оса дате су у раду Reddy [31] и гласе,

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) + z\phi_x(x, t) - c_1 z^3 \left( \phi_x(x, t) + \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} \right), \\ v(x, z, t) &= 0, \quad w(x, z, t) = w_0(x, t), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

где је  $u(x, z, t)$  аксијално померање,  $w(x, z, t)$  је трансверзално померање.

Чланови  $w_0(x, t)$  и  $\phi_x(x, t)$  представљају компоненте трансверзалног померања и ротације произвољног попречног пресека греде, а померање у правцу  $y$  - осе је једнако нули.

На основу функција померања (3.2.3) одређујемо деформације



$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - c_1 z^3 \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right), \quad \gamma_{xz} = (1 - c_2 z^2) \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right), \quad (3.2.4)$$

где је вредност констаната  $c_1 = \frac{4}{3h^2}$  и  $c_2 = \frac{4}{h^2}$ . У наставку занемарићемо компонентно померање  $u_0(x, t)$  у укупном аксијалном померању  $u(x, z, t)$ .

Применом Hamilton-овог принципа [31, 93],

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0, \quad (3.2.5)$$

можемо извести основне једначине кретања Reddy-јеве греде, где су  $\delta U, \delta V$  и  $\delta K$  - варијације енергије деформације, виртуелни рад спољашњих сила и варијација кинетичке енергије нано-греде, редом.

Варијација укупне енергије деформације  $\delta U$  је

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_A \int_0^L (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dx dA \\ &= \int_0^L \left[ (M_{xx} - c_1 P_{xx}) \delta \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - c_1 P_{xx} \delta \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + (Q_x - c_2 R_x) \delta \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] dx, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

где су  $M_{xx}, P_{xx}, Q_x$  и  $R_x$  напонске резултанте дефинисане као

$$(M_{xx}, P_{xx}) = \int_A (z, z^3) \sigma_{xx} dA; \quad (Q_x, R_x) = \int_A (1, z^2) \sigma_{xz} dA. \quad (3.2.7)$$

Виртуелни рад спољашњих сила може се изразити као

$$\delta V = - \int_0^L \left[ q(x) \delta w_0 + \hat{N}_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] dx, \quad (3.2.8)$$

где је  $q(x)$  - континувано трансверзално оптерећење и  $\hat{N}_0$  - је аксијално оптерећење.

Варијација кинетичке енергије нано-греде једнака је

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_A \int_0^L \rho (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}) dx dA \\ &= \int_0^L \left[ \hat{I}_2 \dot{\phi}_x \delta \dot{\phi}_x - c_1 \hat{I}_4 \left( \dot{\phi}_x + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right) \delta \dot{\phi}_x - c_1 \hat{I}_4 \dot{\phi}_x \delta \left( \dot{\phi}_x + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + c_1^2 \hat{I}_6 \left( \dot{\phi}_x + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right) \delta \left( \dot{\phi}_x + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right) + \hat{I}_0 \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dx, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

где је  $\rho$  - густина материјала,  $\frac{\partial w_0}{\partial t} = \dot{w}_0$  - је извод по времену  $t$ , а чланови  $(\hat{I}_0, \hat{I}_2, \hat{I}_4, \hat{I}_6)$  означавају моменте инерције површине попречног пресека и дефинисани су следећим интегралима

$$(\hat{I}_0, \hat{I}_2, \hat{I}_4, \hat{I}_6) = \int_A (1, z^2, z^4, z^6) \rho dA. \quad (3.2.10)$$

У циљу извођења диференцијалних једначина кретања нано-греде, релације  $\delta U$ ,  $\delta V$  и  $\delta K$  из једначина (3.2.6), (3.2.8) и (3.2.9) уносимо у једначину (3.2.5) и након парцијалне интеграције формирањем израза уз  $\delta w_0$  и  $\delta \phi_x$ , добијамо следеће Euler-Lagrange-ове једначине у облику

$$\delta w_0 : \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + c_1 \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + \hat{N}_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \hat{I}_0 \ddot{w}_0 + \hat{I}_4 \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} - c_1^2 \hat{I}_6 \left( \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \right), \quad (3.2.11a)$$

$$\delta \phi_x : \frac{\partial \bar{M}_{xx}}{\partial x} - \bar{Q}_x = \ddot{\phi}_x \hat{I}_2 - c_1 \hat{I}_4 \left( 2\ddot{\phi}_x + \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \right) + c_1^2 \hat{I}_6 \left( \ddot{\phi}_x + \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \right), \quad (3.2.11b)$$

где су

$$\bar{Q}_x = Q_x - c_2 R_x, \quad \bar{M}_{xx} = M_{xx} - c_1 P_{xx}. \quad (3.2.12)$$

У општем случају гранични услови Reddy-јеве нано-греде за  $x = 0$  и  $x = L$  су

$$w_0 \quad \text{или} \quad V_x = c_1 \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \bar{Q}_x - \hat{N}_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} - c_1 \hat{I}_4 \ddot{\phi}_x + c_1^2 \hat{I}_6 \left( \ddot{\phi}_x + \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \right), \quad (3.2.13a)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{или} \quad P_{xx}, \quad (3.2.13b)$$

$$\phi_x \quad \text{или} \quad \bar{M}_{xx} = M_{xx} - c_1 P_{xx}, \quad (3.2.13c)$$

а физички значи да су померања или силе једнаке нули. Члан  $V_x$  означава еквивалентну смичућу силу.

Заменом једначина (3.2.4) у конститутивне релације (1.3.8а и 1.3.8б), а затим тако добијен резултат у једначине (3.2.7) и (3.2.12), добијају се напонске резултанте за нелокалну Eringen-ову теорију еластичности (напонско градијентна теорија) као

$$P_{xx} - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{d^2 P_{xx}}{dx^2} = E(I_4 - c_1 I_6) \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - c_1 I_6 E \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad (3.2.14a)$$

$$\bar{Q}_x - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{d^2 \bar{Q}_x}{dx^2} = G \hat{A} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right), \quad (3.2.14b)$$

$$\bar{M}_{xx} - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{d^2 \bar{M}_{xx}}{dx^2} = -E c_1 I_4 \left( 2 \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + E I_2 \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + E c_1^2 I_6 \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right), \quad (3.2.14b)$$

где је

$$(A, I_2, I_4, I_6) = \int_A (1, z^2, z^4, z^6) dA, \quad \hat{A} = (A - 2c_2 I_2 + c_2^2 I_4). \quad (3.2.15)$$

Диференцирањем релације (3.2.14а) два пута по  $x$  и (3.2.14б) једном по  $x$ , и заменом у релацију (3.2.11а) добија се прва једначина кретања, а затим диференцирањем једначине (3.2.14в) једном по  $x$  и заменом у релације (3.2.14.б) и (3.2.11б) добијамо другу једначину кретања кретања нано-греде,

$$\begin{aligned} & N_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \hat{I}_0 \ddot{w}_0 - K_1 \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} - c_1^2 \hat{I}_6 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} - (e_0 \tilde{a})^2 \left( N_0 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \hat{I}_0 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} - K_1 \frac{\partial^3 \ddot{\phi}_x}{\partial x^3} - c_1^2 \hat{I}_6 \frac{\partial^4 \ddot{w}_0}{\partial x^4} \right) \\ & = c_1 \left[ E(I_4 - c_1 I_6) \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} - c_1 I_6 E \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right] + G \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \hat{A}, \end{aligned} \quad (3.2.16a)$$

$$\begin{aligned}
& G \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \hat{A} + K_2 \ddot{\phi}_x + K_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - (e_0 \tilde{a})^2 \left( K_2 \frac{\partial^2 \ddot{\phi}_x}{\partial x^2} + K_1 \frac{\partial^3 \ddot{w}_0}{\partial x^3} \right) \\
& = EI_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - EI_4 c_1 \left( 2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) + c_1^2 EI_6 \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right), \quad (3.2.16b)
\end{aligned}$$

где је  $\hat{N}_0 = -N_0$  аксијална притисна сила, а  $K_1$  и  $K_2$  константе

$$K_1 = c_1^2 \hat{I}_6 - c_1 \hat{I}_4, \quad K_2 = \hat{I}_2 - 2c_1 \hat{I}_4 + c_1^2 \hat{I}_6. \quad (3.2.17)$$

На сличан начин као и у случају примене нелокалне Eringen-ове теорије, добијају се напонске резултате и пращијалне диференцијалне једначине кретања нано-греде за случај примене комбиноване деформационо-инерционе градијентне теорије еластичности. Ако заменимо једначине (3.2.4) у једначини (3.2.2 а и б), а затим тако добијени резултат у једначине (3.2.7) и (3.2.12) добијају се напонске резултате применом комбиноване деформационо-инерционе градијентне теорије еластичности у следећем облику

$$\begin{aligned}
P_{xx} = & EI_4 \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - c_1 EI_6 \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \tilde{\mu} EI_4 \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} - \tilde{\mu} c_1 EI_6 \left( \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) \\
& + \rho \mu_m I_4 \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} - \rho \mu_m c_1 I_6 \left( \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \right), \quad (3.18a)
\end{aligned}$$

$$\bar{Q}_x = G \hat{A} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \tilde{\mu} G \hat{A} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) + \rho \mu_m \hat{A} \left( \ddot{\phi}_x + \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \right), \quad (3.18b)$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{xx} = & EI_2 \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - c_1 EI_4 \left( 2 \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \tilde{\mu} EI_2 \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} - \tilde{\mu} c_1 EI_4 \left( \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) \\
& + c_1^2 EI_6 \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \tilde{\mu} c_1 EI_4 \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + \tilde{\mu} c_1^2 EI_6 \left( \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) \\
& + \rho \mu_m I_2 \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} - \rho \mu_m c_1 I_4 \left( 2 \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \right) + \rho \mu_m c_1^2 I_6 \left( \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \right). \quad (3.18c)
\end{aligned}$$

Заменом једначина (3.2.18) у једначине (3.2.11) добијамо следеће диференцијалне једначине кретања за случај примене комбиноване деформационо-инерционе градијентне теорије еластичности у функцији чланова трансверзалног померања  $w_0$  и угла ротације попречног пресека нано-греде  $\phi_x$ , као

$$\begin{aligned}
& G \hat{A} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \tilde{\mu} G \hat{A} \left( \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) + \rho \mu_m \hat{A} \left( \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \right) + c_1 EI_4 \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} \\
& - c_1^2 EI_6 \left( \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) + \tilde{\mu} c_1 EI_4 \frac{\partial^5 \phi_x}{\partial x^5} - \tilde{\mu} c_1^2 EI_6 \left( \frac{\partial^5 \phi_x}{\partial x^5} + \frac{\partial^6 w_0}{\partial x^6} \right) \\
& + \rho \mu_m c_1 I_4 \frac{\partial^3 \ddot{\phi}_x}{\partial x^3} - \rho \mu_m c_1^2 I_6 \left( \frac{\partial^3 \ddot{\phi}_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 \ddot{w}_0}{\partial x^4} \right) \\
& = N_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \hat{I}_0 \ddot{w}_0 - K_1 \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} - c_1^2 \hat{I}_6 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2}, \quad (3.2.19a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& EI_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - c_1 EI_4 \left( 2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) + \tilde{\mu} EI_2 \frac{\partial^4 \phi_x}{\partial x^4} - \tilde{\mu} c_1 EI_4 \left( \frac{\partial^4 \phi_x}{\partial x^4} + \frac{\partial^5 w_0}{\partial x^5} \right) \\
& + c_1^2 EI_6 \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) - \tilde{\mu} c_1 EI_4 \frac{\partial^4 \phi_x}{\partial x^4} + \tilde{\mu} c_1^2 EI_6 \left( \frac{\partial^4 \phi_x}{\partial x^4} + \frac{\partial^5 w_0}{\partial x^5} \right) + \rho \mu_m I_2 \frac{\partial^2 \ddot{\phi}_x}{\partial x^2} \\
& - \rho \mu_m c_1 I_4 \left( 2 \frac{\partial^2 \ddot{\phi}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 \ddot{w}_0}{\partial x^3} \right) + \rho \mu_m c_1^2 I_6 \left( \frac{\partial^2 \ddot{\phi}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 \ddot{w}_0}{\partial x^3} \right) \\
& = G \hat{A} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \tilde{\mu} G \hat{A} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) + \rho \mu_m \hat{A} \left( \ddot{\phi}_x + \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \right) + K_2 \ddot{\phi}_x + K_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x}. \quad (3.2.19b)
\end{aligned}$$

Диференцијалне једначине кретања за случај само деформационо градијентне теорије еластичности добијају се из једначина (3.2.19) када параметар  $\mu_m$  изједначимо са нулом,

$$\begin{aligned}
& G \hat{A} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \tilde{\mu} G \hat{A} \left( \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) + c_1 EI_4 \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} - c_1^2 EI_6 \left( \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) \\
& + \tilde{\mu} c_1 EI_4 \frac{\partial^5 \phi_x}{\partial x^5} - \tilde{\mu} c_1^2 EI_6 \left( \frac{\partial^5 \phi_x}{\partial x^5} + \frac{\partial^6 w_0}{\partial x^6} \right) = N_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \hat{I}_0 \dot{w}_0 - K_1 \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} - c_1^2 \hat{I}_6 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2}, \quad (3.2.20a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& EI_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - c_1 EI_4 \left( 2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) + \tilde{\mu} EI_2 \frac{\partial^4 \phi_x}{\partial x^4} - \tilde{\mu} c_1 EI_4 \left( \frac{\partial^4 \phi_x}{\partial x^4} + \frac{\partial^5 w_0}{\partial x^5} \right) \\
& + c_1^2 EI_6 \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) - \tilde{\mu} c_1 EI_4 \frac{\partial^4 \phi_x}{\partial x^4} + \tilde{\mu} c_1^2 EI_6 \left( \frac{\partial^4 \phi_x}{\partial x^4} + \frac{\partial^5 w_0}{\partial x^5} \right) \\
& = G \hat{A} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \tilde{\mu} G \hat{A} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) + K_2 \ddot{\phi}_x + K_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x}. \quad (3.2.20b)
\end{aligned}$$

Диференцијалне једначине кретања за случај локалне теорије еластичности добијају се из једначина (3.2.20) када параметар  $\tilde{\mu}$  изједначимо са нулом.

### 3.2.3 Ниу-Тај-јева теорија греде

Функције померања  $u(x, z, t)$ ,  $v(x, z, t)$  и  $w(x, z, t)$  у правцу координатних оса за случај Ниу-Тај-јеве теорије греде морају да задовоље следеће претпоставке: (1) да се функције које одређују аксијално и трансверзално померања  $u(x, z, t)$  и  $w(x, z, t)$  састоје од савојне  $w_b(x, t)$  и смицајне  $w_s(x, t)$  компоненте, тако да савојна компонента  $w_b(x, t)$  не утиче на повећање силе смицања, а смицајна компонента  $w_s(x, t)$  не утиче на повећање момента савијања; (2) савојна компонента  $w_b(x, t)$  у аксијалном померању је на сличан начин дефинисана као код Euler-Bernoulli-јеве теорије греде; (3) смицајна компонента  $w_s(x, t)$  код аксијалног померања  $u(x, z, t)$  изазива квадратну расподелу смицајних деформација, самим тиме и смицајног напона по попречном пресеку греде, који је једнак нули на горњој и доњој површини греде. На основу ових претпоставки у раду Ниу-Тај [34] дате су функције померања за  $u(x, z, t)$ ,  $v(x, z, t)$  и  $w(x, z, t)$  у облику

$$\begin{aligned}
u(x, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_b(x, t)}{\partial x} + \left[ \frac{1}{4}z - \frac{5}{3}z \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x}, \\
v(x, z, t) &= 0, \\
w(x, z, t) &= w_b(x, t) + w_s(x, t),
\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

где је  $h$  висина греде,  $w_b(x, t)$  и  $w_s(x, t)$  су савојна и смичућа компонента трансверзалног померања,  $u_0(x, t)$  је аксијално померање дуж осе греде. На основу функција померања (3.2.21) одређујемо деформације

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \quad \gamma_{xz} = g \frac{\partial w_s}{\partial x}, \tag{3.2.22}$$

где је  $f = -z/4 + 5z(z/h)^2/3$  и  $g = 5/4 - 5(z/h)^2$ , а занемарује се утицај почетне компоненте  $u_0$  аксијалног померања  $u(x, z, t)$ .

Применом Hamilton-овог принципа (3.2.5), варијација енергије деформације за Нуу-Тај-јеву греду је

$$\delta U = \int_A \int_0^L (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dx dA = \int_0^L \left[ -M_b \delta \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - M_s \delta \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + Q \delta \frac{\partial w_s}{\partial x} \right] dx, \tag{3.2.23}$$

где су  $M_b$ ,  $M_s$  и  $Q$  напонске резултанте дефинисане интегралним релацијама

$$(M_b, M_s) = \int_A (z, f) \sigma_{xx} dA, \quad Q = \int_A g \sigma_{xz} dA. \tag{3.2.24}$$

Виртуелни рад спољашњих сила одређен је следећом релацијом

$$\delta V = - \int_0^L \left[ q(x) \delta (w_b + w_s) + N_0 \frac{\partial \delta (w_b + w_s)}{\partial x} \delta \frac{\partial \delta (w_b + w_s)}{\partial x} \right] dx, \tag{3.2.25}$$

где је  $q(x)$  - континуално трансверзално оптерећење, а  $N_0$  - аксијално оптерећење.

Варијација кинетичке енергије је

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_A \int_0^L \rho (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}) dx dA \\
&= \int_0^L \left[ \hat{I}_0 (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s) + \hat{I}_2 \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\hat{I}_2}{84} \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \right] dx,
\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

где су  $\hat{I}_0$  и  $\hat{I}_2$  моменти инерције попречног пресека греде одређени једначином (3.2.10), а  $\dot{w}_b$  и  $\dot{w}_s$  су временски изводи савојне и смичајне компоненте трансверзалног померања. Заменом релација за  $\delta U$ ,  $\delta V$  и  $\delta K$ , у једначину (3.2.5), и након парцијалне интеграције и формирањем коефицијената уз варијације  $\delta w_b$  и  $\delta w_s$ , добијамо следеће Euler-Lagrange-ове једначине

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2} - N_0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} = \hat{I}_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \hat{I}_2 \frac{\partial^2 \dot{w}_b}{\partial x^2}, \tag{3.2.27a}$$

$$\delta w_s : \frac{\partial^2 M_s}{\partial x^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} - N_0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} = \hat{I}_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \frac{\hat{I}_2}{84} \frac{\partial^2 \dot{w}_s}{\partial x^2}. \tag{3.2.27b}$$

У општем случају гранични услови Нуу-Тај-јеве нано-греде за  $x = 0$  и  $x = L$ , су

$$w_b \quad \text{или} \quad V_b = \frac{\partial M_b}{\partial x} - N_0 \frac{\partial(w_b + w_s)}{\partial x} + \hat{I}_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x}, \quad (3.2.28a)$$

$$w_s \quad \text{или} \quad V_s = \frac{\partial M_s}{\partial x} + Q - N_0 \frac{\partial(w_b + w_s)}{\partial x} + \frac{\hat{I}_2}{84} \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}, \quad (3.2.28б)$$

$$\frac{\partial w_b}{\partial x} \quad \text{или} \quad M_b, \quad (3.2.28в)$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial x} \quad \text{или} \quad M_s, \quad (3.2.28г)$$

а физички значи да су померања или силе једнаке нули на одговарајућем крају греде. Чланови  $V_b$  и  $V_s$  су дефинисане као еквивалентне смичуће силе на крајевима греде.

Заменом једначина (3.2.22) у конститутивне релације (1.3.8а и 1.3.8б), а затим тако добијени резултат у једначине (3.2.24), добијају се напонске резултате за нелокалну Eringen-ову теорију еластичности (напонско градијентна теорија) као

$$M_b - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2} = -EI_2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad (3.2.29a)$$

$$M_s - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2 M_s}{\partial x^2} = -\frac{EI_2}{84} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \quad (3.2.29b)$$

$$Q - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{5GA}{6} \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad (3.2.29c)$$

где је  $A$  - површина попречног пресека греде, а  $I_2$  - аксијални момент инерције, који су одређени релацијом (3.2.15).

Ако једначине (3.2.29а и 3.2.29б) два пута диференцирамо по  $x$ , а једначину (3.2.29в) само једном. Тада из прве једначине одредимо  $\frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2}$  из друге  $\frac{\partial^2 M_s}{\partial x^2}$ , а из треће  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  и те вредности заменимо у једначине (3.2.27а и 3.2.27б), после једноставних алгебарских трансформација добијамо

$$\begin{aligned} & -EI_2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - N_0 \left[ \frac{\partial^2(w_b + w_s)}{\partial x^2} - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^4(w_b + w_s)}{\partial x^4} \right] \\ & = \hat{I}_0 \left[ (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)}{\partial x^2} \right] - \hat{I}_2 \left[ \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^4 \ddot{w}_b}{\partial x^4} \right], \end{aligned} \quad (3.2.30a)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{EI_2}{84} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{5GA}{6} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - N_0 \left[ \frac{\partial^2(w_b + w_s)}{\partial x^2} - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^4(w_b + w_s)}{\partial x^4} \right] \\ & = \hat{I}_0 \left[ (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s)}{\partial x^2} \right] - \frac{\hat{I}_2}{84} \left[ \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^4 \ddot{w}_s}{\partial x^4} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.30b)$$

Када смичућу компоненту  $w_s$  и нелокални параметар  $(e_0 \tilde{a})$  занемаримо у парцијалним диференцијалним једначинама (3.2.30), добићемо систем парцијалних диференцијалних једначина кретања који одговара моделу нано-греде када је примењена класична Euler-Bernoulli-јева теорија греде.

На сличан начин као и у случају примене нелокалне Eringen-ове теорије, добијају се напонске резултате и основне працијалне диференцијалне једначине кретања нано-греде за случај примене комбиноване деформационо-инерционе градијентне теорије еластичности. Ако заменимо једначине (3.2.22) у једначини (3.2.2 а и б), а затим тако добијени резултат у једначини (3.2.24) добијају се напонске резултате применом комбиноване деформационо-инерционе градијентне теорије еластичности у следећем облику

$$M_b = -EI_2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \tilde{\mu} EI_2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - \rho \mu_m I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2}, \quad (3.2.31a)$$

$$M_s = -\frac{EI_2}{84} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - \tilde{\mu} \frac{EI_2}{84} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - \rho \mu_m \frac{I_2}{84} \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2}, \quad (3.2.31b)$$

$$Q = \frac{5GA}{6} \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} + \tilde{\mu} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} \right) + \rho \mu_m \frac{5A}{6} \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}. \quad (3.2.31c)$$

Заменом релација (3.2.31) у једначине (3.2.27) добијамо систем парцијалних диференцијалних једначина кретања у функцији померања  $w_b$  и  $w_s$

$$\hat{I}_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \hat{I}_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + EI_2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \tilde{\mu} EI_2 \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^6} + \rho \mu_m I_2 \frac{\partial^4 \ddot{w}_b}{\partial x^4} + N_0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} = 0, \quad (3.2.32a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{5GA}{6} \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \tilde{\mu} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \right) + \rho \mu_m \frac{5A}{6} \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} - N_0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} \\ & = \hat{I}_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \frac{\hat{I}_2}{84} \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{EI_2}{84} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \tilde{\mu} \frac{EI_2}{84} \frac{\partial^6 w_s}{\partial x^6} + \rho \mu_m \frac{I_2}{84} \frac{\partial^4 \ddot{w}_s}{\partial x^4}. \end{aligned} \quad (3.2.32b)$$

Ако у парцијалним диференцијалним једначинама (3.2.32 а и б) заменимо  $\mu_m = 0$  добијамо систем парцијалних диференцијалних једначина кретања нано-греде применом деформационо градијентне теорије еластичности у облику

$$\hat{I}_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \hat{I}_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + EI_2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \tilde{\mu} EI_2 \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^6} + N_0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} = 0, \quad (3.2.33a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{5GA}{6} \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \tilde{\mu} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \right) - N_0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} \\ & = \hat{I}_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \frac{\hat{I}_2}{84} \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{EI_2}{84} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \tilde{\mu} \frac{EI_2}{84} \frac{\partial^6 w_s}{\partial x^6}. \end{aligned} \quad (3.2.33b)$$

Једначине кретања за локалну Нiu-Taі-јеву нано-греду добијамо када у једначинама (3.2.33) заменимо  $\tilde{\mu} = 0$

$$\hat{I}_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \hat{I}_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + EI_2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + N_0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} = 0, \quad (3.2.34a)$$

$$\frac{5GA}{6} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - N_0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} = \hat{I}_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \frac{\hat{I}_2}{84} \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{EI_2}{84} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}. \quad (3.2.34b)$$

### 3.3 Аналитичка решења

#### 3.3.1 Аналитичке вредности за сопствене фреквенције и критичну силу извијања Reddy-јеве нано-греде

Размотримо просто ослоњену нано-греду дужине  $L$  под дејством притисне аксијалне силе  $N_0$ . Математичка формулација граничних услова код Reddy-јеве теорије греде је

$$\begin{aligned} w_0(0, t) = \bar{M}_{xx}(0, t) = P_{xx}(0, t) = 0, \\ w_0(L, t) = \bar{M}_{xx}(L, t) = P_{xx}(L, t) = 0. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Парцијалне диференцијалне једначине кретања греде за различите градијентне теорије (3.2.16), (3.2.19) и (3.2.20) чији су гранични услови (3.3.1), могу се решити претпостављајући решење у облику бесконачних тригонометријских редова за померање  $w_0$  и угао ротације  $\phi_x$ , као

$$w_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin \alpha_n x e^{i\omega_n t}, \quad \phi_x(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos \alpha_n x e^{i\omega_n t}, \quad (3.3.2)$$

где је  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\alpha_n = n\pi/L$ ,  $W_n, X_n$  су амплитуде и  $\omega_n$  су сопствене фреквенције система.

Заменом претпостављених решења (3.3.2) у једначинама кретања (3.2.16), (3.2.19) и (3.2.20) Reddy-јевог модела греде за различите градијентне теорије, добијамо систем алгебарских једначина из којих можемо одредити сопствене фреквенције и критичне силе извијања нано-греде. Матрични облик система алгебарских једначина је

$$\left( \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} - \omega_n^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} - N_0 \begin{bmatrix} n_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} W_n \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.3.3)$$

у којем су коефицијенти за случај Eringen-ове нелокалне еластичне теорије (напонско градијентна теорија греде) следећег облика

$$\begin{aligned} s_{11} &= E c_1^2 I_6 \alpha^4 + G \alpha^2 \hat{A}, & s_{12} &= s_{21} = -E c_1 (I_4 - c_1 I_6) \alpha^3 + G \alpha \hat{A}, \\ s_{22} &= G \hat{A} + E (I_2 - c_1 I_4) \alpha^2 - E c_1 (I_4 - c_1 I_6) \alpha^2, \\ m_{11} &= \hat{I}_0 + \alpha^2 c_1^2 \hat{I}_6 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha^2 \hat{I}_0 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha^4 c_1^2 \hat{I}_6, & m_{12} &= m_{21} = K_1 \alpha + (e_0 \tilde{a})^2 K_1 \alpha^3, \\ m_{22} &= K_2 + (e_0 \tilde{a})^2 K_2 \alpha^2, & n_{11} &= \alpha^2 + \mu \alpha^4. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Коефицијенти за случај комбиноване деформационе-инерционе градијентне теорије су

$$\begin{aligned} s_{11} &= G \alpha^2 \hat{A} + c_1^2 E I_6 \alpha^4 - \tilde{\mu} G \alpha^4 \hat{A} - \tilde{\mu} c_1^2 E I_6 \alpha^6, \\ s_{12} &= s_{21} = G \alpha \hat{A} - \tilde{\mu} G \alpha^3 \hat{A} - E c_1 (I_4 - c_1 I_6) \alpha^3 + \tilde{\mu} E c_1 (I_4 - c_1 I_6) \alpha^5, \\ s_{22} &= G \hat{A} - \tilde{\mu} G \hat{A} \alpha^2 + E (I_2 - c_1 I_4) \alpha^2 - E c_1 (I_4 - c_1 I_6) \alpha^2 \\ &\quad - E \mu (I_2 - c_1 I_4) \alpha^4 + \tilde{\mu} E c_1 (I_4 - c_1 I_6) \alpha^4, \\ m_{11} &= \hat{I}_0 + \alpha^2 c_1^2 \hat{I}_6 + \rho \mu_m \hat{A} \alpha^2 + \rho \mu_m c_1^2 I_6 \alpha^4, \\ m_{12} &= m_{21} = K_1 \alpha + \rho \mu_m \hat{A} \alpha - \rho \mu_m c_1 (I_4 - c_1 I_6) \alpha^3, \\ m_{22} &= K_2 + \rho \mu_m (I_2 - c_1 I_4) \alpha^2 - \rho \mu_m c_1 (I_4 - c_1 I_6) \alpha^2 + \rho \mu_m \hat{A}, \\ n_{11} &= \alpha^2. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$



Коефицијенти за случај деформационо-градијентне теорије ( $\mu_m = 0$ ) су

$$\begin{aligned} s_{11} &= G\alpha^2 \hat{A} + c_1^2 EI_6 \alpha^4 - \tilde{\mu} G \alpha^4 \hat{A} - \mu c_1^2 EI_6 \alpha^6, \\ s_{12} = s_{21} &= G\alpha \hat{A} - \tilde{\mu} G \alpha^3 \hat{A} - E c_1 (I_4 - c_1 I_6) \alpha^3 + \tilde{\mu} E c_1 (I_4 - c_1 I_6) \alpha^5, \\ s_{22} &= G \hat{A} - \tilde{\mu} G \hat{A} \alpha^2 + E (I_2 - c_1 I_4) \alpha^2 - E c_1 (I_4 - c_1 I_6) \alpha^2 \\ &\quad - E \tilde{\mu} (I_2 - c_1 I_4) \alpha^4 + \tilde{\mu} E c_1 (I_4 - c_1 I_6) \alpha^4, \\ m_{11} &= \hat{I}_0 + \alpha^2 c_1^2 \hat{I}_6, \quad m_{12} = m_{21} = K_1 \alpha, \quad m_{22} = K_2, \quad n_{11} = \alpha^2. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Аналитички израз за силе извијања одређујемо заменом  $\omega_n = 0$  у систем алгебарских једначина (3.3.3) одакле следи

$$N_0 = \frac{s_{11}s_{22} - s_{12}^2}{n_{11}s_{22}}. \quad (3.3.7)$$

Решењем алгебарских једначина (3.3.3) по  $\omega_n^2$ , када је  $N_0 = 0$  одређујемо сопствене фреквенције осциловања система

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{m_{22}s_{11} - 2m_{12}s_{12} + m_{11}s_{22}}{2(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)} \\ &= \frac{\sqrt{(-m_{22}s_{11} + 2m_{12}s_{12} - m_{11}s_{22})^2 - 4(-m_{12}^2 + m_{11}m_{22})(-s_{12}^2 + s_{11}s_{22})}}{2(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)}. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

### 3.3.2 Аналитичке вредности за сопствене фреквенције и критичну силу извијања Нуи-Тай-јеве нано-греде

Математичка формулација граничних услова код Нуи-Тай-јеве теорије греде је

$$w_b(0, t) = w_s(0, t) = M_b(0, t) = M_s(0, t) = 0, \quad (3.3.9a)$$

$$w_b(L, t) = w_s(L, t) = M_b(L, t) = M_s(L, t) = 0. \quad (3.3.9b)$$

Парцијалне диференцијалне једначине кретања греде за различите градијентне теорије (3.2.30), (3.2.32) и (3.2.33) чији су гранични услови (3.3.9) могу се решити претпостављајући решење у облику бесконачних тригонометријских редова за померања  $w_b$  и  $w_s$ , као

$$w_b(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{bn} \sin \alpha_n x e^{i\omega_n t}, \quad w_s(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{sn} \sin \alpha_n x e^{i\omega_n t}, \quad (3.3.10)$$

где је  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\alpha_n = n\pi/L$ ,  $W_{bn}$  и  $W_{sn}$  су амплитуде и  $\omega_n$  су сопствене фреквенције система.

Пратећи поступак описан у Глави 2 можемо одредити  $W_{bn}$  и  $W_{sn}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , за системе диференцијалних једначина (3.2.30), (3.2.32) и (3.2.33), решавањем система алгебарских једначина који је исписан у матричном облику

$$\left( \begin{bmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix} - \omega_n^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} - N_0 \tilde{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} W_{bn} \\ W_{sn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.3.11)$$

У алгебарским једначинама (3.3.11) јављају се коефицијенти  $s_{11}$ ,  $s_{22}$ ,  $m_{11}$ ,  $m_{12}$ ,  $m_{22}$  и  $\tilde{n}$  који су за различите градијентне теорије дате следећим релацијама:

- За Еринген-ову нелокалну теорију еластичности (напонско градијентна теорија),

$$s_{11} = EI_2 \alpha_n^4, \quad s_{22} = \frac{EI_2}{84} \alpha_n^4 + \frac{5GA}{6} \alpha_n^2, \quad \lambda = 1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2,$$

$$m_{11} = \lambda (\hat{I}_0 + \alpha_n^2 \hat{I}_2), \quad m_{12} = m_{21} = \lambda \hat{I}_0, \quad m_{22} = \lambda \left( \hat{I}_0 + \alpha_n^2 \frac{\hat{I}_2}{84} \right), \quad \tilde{n} = \lambda \alpha_n^2, \quad (3.3.12)$$

- за комбиновану деформационо-инерциону градијентну теорију,

$$s_{11} = EI_2 \alpha_n^4 \lambda, \quad s_{22} = \frac{EI_2}{84} \alpha_n^4 \lambda + \frac{5GA}{6} \alpha_n^2 \lambda, \quad \lambda = 1 - \tilde{\mu} \alpha_n^2,$$

$$m_{11} = \hat{I}_0 + \alpha_n^2 \hat{I}_2 + \rho \mu_m I_2 \alpha_n^4, \quad m_{12} = m_{21} = \hat{I}_0,$$

$$m_{22} = \hat{I}_0 + \alpha_n^2 \frac{\hat{I}_2}{84} + \rho \mu_m \frac{I_2}{84} \alpha_n^4 + \rho \mu_m \frac{5A}{6} \alpha_n^2, \quad \tilde{n} = \alpha_n^2, \quad (3.3.13)$$

- за деформационо-градијентну теорију ( $\mu_m = 0$ ),

$$s_{11} = EI_2 \alpha_n^4 \lambda, \quad s_{22} = \frac{EI_2}{84} \alpha_n^4 \lambda + \frac{5GA}{6} \alpha_n^2 \lambda, \quad \lambda = 1 - \tilde{\mu} \alpha_n^2,$$

$$m_{11} = \hat{I}_0 + \alpha_n^2 \hat{I}_2, \quad m_{12} = m_{21} = \hat{I}_0, \quad m_{22} = \hat{I}_0 + \alpha_n^2 \frac{\hat{I}_2}{84}, \quad \tilde{n} = \alpha_n^2. \quad (3.3.14)$$

Аналитички израз за силе извијања и сопствене фреквенције, одређујемо за одговарајуће услове из једначине (3.3.11), као

$$N_0 = \frac{s_{11} s_{22}}{n(s_{11} + s_{22})}, \quad (3.3.15)$$

$$\omega_n^2 = \frac{m_{22} s_{11} + m_{11} s_{22} - \sqrt{(m_{22} s_{11} + m_{11} s_{22})^2 - 4(-m_{12}^2 + m_{11} m_{22}) s_{11} s_{22}}}{2(-m_{12}^2 + m_{11} m_{22})}. \quad (3.3.16)$$

### 3.4 Нумерички примери

У овом делу биће извршена упоредна анализа добијених резултата за сопствене фреквенције и критичну силу извијања за моделе Reddy-јеве и Нуи-Таи-јеве теорије греде са доступним резултатима из литературе. У наставку биће приказани нумерички примери у којима се анализира утицај параметара мале скале тј. градијентних параметара и однос дужине и пречника нано-греде на осцилације и стабилност Reddy-јевог и Нуи-Таи-јевог модела греде за различите конститутивне релације. Као пример нано-греде размотриће се једнослојна угљенична нано-цев са следећим материјалним и геометријским карактеристикама: „armchair” (8,8), дебљина  $h = 0.34$  [nm], Poisson-нов коефицијент  $\nu = 0.3$ , густина материјала  $\rho = 2300$  [ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ], Young-ов модул еластичности  $E = 1.1$  [TPa], вредност градијентних нелокалних параметар  $l = 0.6$  [nm],  $l_m/l = 0.3$ . Нумерички резултати за сопствену фреквенцију и критичну силу извијања Reddy-јевог и Нуи-Таи-јевог модела греде приказани су у виду табеле и дијаграма.

### 3.4.1 Упоредна анализа

Нумерички резултати на основу аналитичких израза добијени применом нелокалних модела греде и нумерички резултати добијени коришћењем молекуларно динамичких симулација приказани су у Табели 3.1. Однос вредности статичког и динамичког градијентног параметара  $l_m/l$  и остале величине усвојене су из рада Ansari и остали [32]. На основу резултата приказаних у Табели 3.1, може се приметити добро слагање резултата добијених коришћењем Reddy-јеве и Hsu-Tai јеве теорије са резултатима добијеним коришћењем Timoshenko-вог модела греде и молекуларно динамичких симулација за различите вредности односа дужине и пречника нано-греде. Запажа се да сопствена фреквенција нано-греде опада са порастом односа дужине и пречника нано-греде за све случајеве конститутивних релација. Такође, запажа се врло занимљива чињеница, да за вредности односа  $L/D$  који је већи од 17.3, сопствена фреквенција Reddy-јевог и Hsu-Tai-јевог модела је идентична за све случајеве конститутивних релација. Дакле, може се закључити да са повећањем дужине нано-греде вредности градијентних нелокалних параметара све мање утичу на сопствене фреквенције нано-греде, за различите градијентне теорије. Када је параметар нелокалности сувише мали, разлике између конститутивних релација су све мање и своде се на класичну теорију еластичности, тако да се нелокална сопствена фреквенција своди на сопствену фреквенцију добијену применом класичне теорије еластичности.

**ТАБЕЛА 3.1.**

Упоредна анализа сопствених фреквенција у [THz] за различите теорије греде и различите градијентне конститутивне релације, на примеру једнослојне угљеничне нано-цеве.

L/D	Timoshenko-ов модел Ansari и остали [32].					Reddy - јев модел				Hsu-Tai - јев модел			
	МД симулација	КТЕ	НТЕ	ДГТЕ	ДИГТЕ	КТЕ	НТЕ	ДГТЕ	ДИГТЕ	КТЕ	НТЕ	ДГТЕ	ДИГТЕ
8.3	0.5299	0.5306	0.5302	0.5302	0.5299	0.5403	0.5393	0.5393	0.5387	0.5398	0.5387	0.5387	0.5381
10.1	0.3618	0.3606	0.3604	0.3604	0.3603	0.3669	0.3664	0.3664	0.3662	0.3666	0.3661	0.3661	0.3659
13.7	0.1931	0.1972	0.1971	0.1971	0.1971	0.2004	0.2003	0.2003	0.2002	0.2004	0.2002	0.2002	0.2002
17.3	0.1103	0.1240	0.1240	0.1240	0.1240	0.1260	0.1259	0.1259	0.1259	0.1259	0.1259	0.1259	0.1259
20.9	0.0724	0.0851	0.0851	0.0851	0.0851	0.0864	0.0864	0.0864	0.0864	0.0864	0.0864	0.0864	0.0864
24.5	0.0519	0.0620	0.0620	0.0620	0.0620	0.0629	0.0629	0.0629	0.0629	0.0629	0.0629	0.0629	0.0629
28.1	0.0425	0.0471	0.0471	0.0471	0.0471	0.0478	0.0478	0.0478	0.0478	0.0478	0.0478	0.0478	0.0478
31.6	0.0358	0.0373	0.0373	0.0373	0.0373	0.0378	0.0378	0.0378	0.0378	0.0378	0.0378	0.0378	0.0378
35.3	0.0287	0.0299	0.0299	0.0299	0.0299	0.0303	0.0303	0.0303	0.0303	0.0303	0.0303	0.0303	0.0303
39.1	0.0259	0.0244	0.0244	0.0244	0.0244	0.0247	0.0247	0.0247	0.0247	0.0247	0.0247	0.0247	0.0247

<sup>(1)</sup> КТЕ- Класична теорија еластичности

<sup>(2)</sup> НТЕ- Нелокална теорија еластичности (Напонска градијентна теорија)

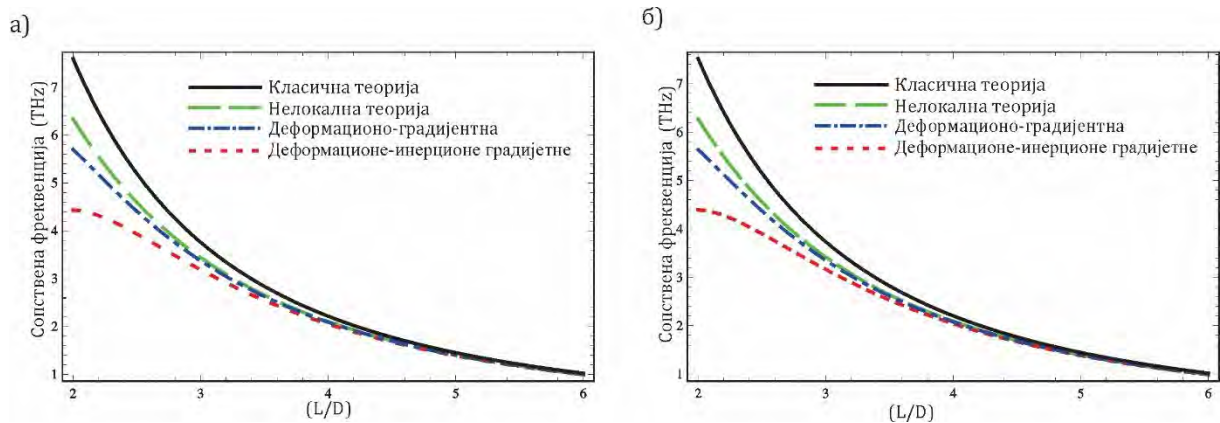
<sup>(3)</sup> ДГТЕ- Деформационо градијентна теорија еластичности

<sup>(4)</sup> ДИГТЕ- Деформационо- инерционо градијентна теорија еластичности

### 3.4.2 Параметарска анализа

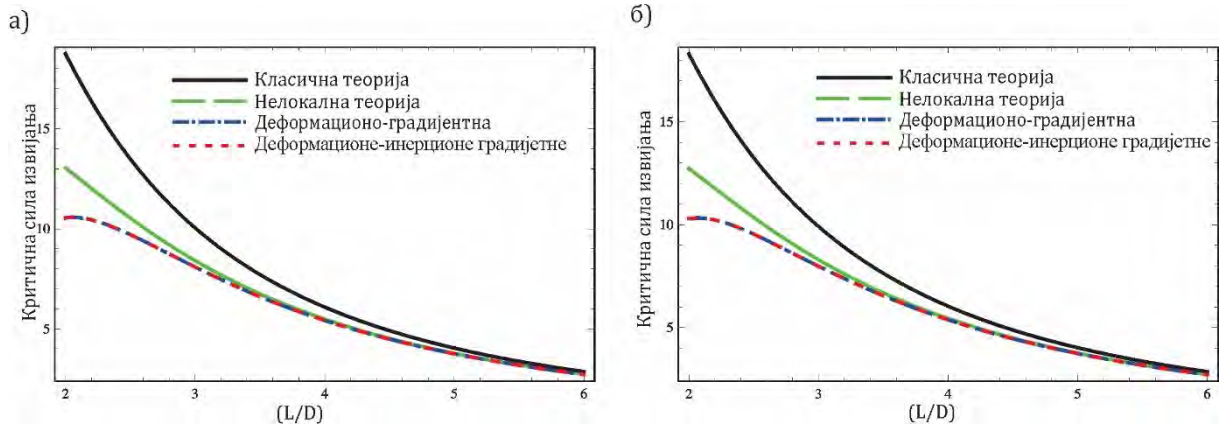
На Сл. 3.7.1 и Сл. 3.7.2, приказане су добијене вредности за сопствене фреквенције и критична сила извијања Reddy-јевог и Нуи-Таи-јевог модела греде, као функције односа дужине и пречника ( $L/D$ ), а за различите градијентне конститутивне релације. Може се запазити да са повећањем односа дужине и пречника ( $L/D$ ) долази до опадања вредности сопствене фреквенције и критичне силе извијања. Такође, запажа се интересантна чињеница да за довољно велики однос дужине и пречника ( $L/D$ ), утицај различитих конститутивних релација на обе сопствене вредности се смањује. Међутим, за мале вредности односа ( $L/D$ ) тј. за кратке греде, утицај градијентног нелокалног параметра је веома значајан и не може се занемарити. Са физичке тачке гледишта однос ( $L/D$ ) има пригушујући ефекат на динамичко понашање нано-греде. На крају, можемо закључити да динамички параметар градијентне нелокалности  $\mu_m$  за комбиновану деформационо градијентну теорију еластичности, нема утицаја на вредности критичне силе извијања.

Сада размотримо утицај градијентног нелокалног параметра на сопствене фреквенције и силе извијања Reddy-јеве и Нуи-Таи-јеве нано-греде, Сл. 3.7.3 и Сл. 3.7.4. Запажамо да са повећањем нелокалног параметра долази до смањења сопствене фреквенције и силе извијања нано-греде. То наводи на закључак да нелокални параметар има пригушујући ефекат на динамику система. Утицај комбиноване деформационо-инерционе градијентне теорије еластичности се своди на градијентну деформациону теорију у анализи критичне силе извијања, тј. у том случају нема утицај динамичког нелокалног градијентног параметра  $\mu_m$  на критичну силу извијања.

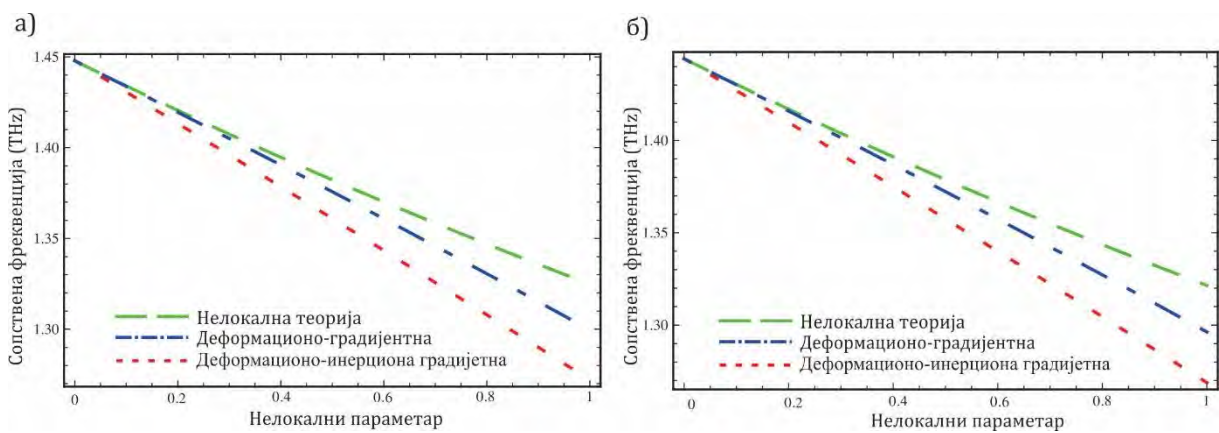


Сл. 3.7.1. Утицај односа дужине и пречника ( $L/D$ ) на сопствене фреквенције нано-греде

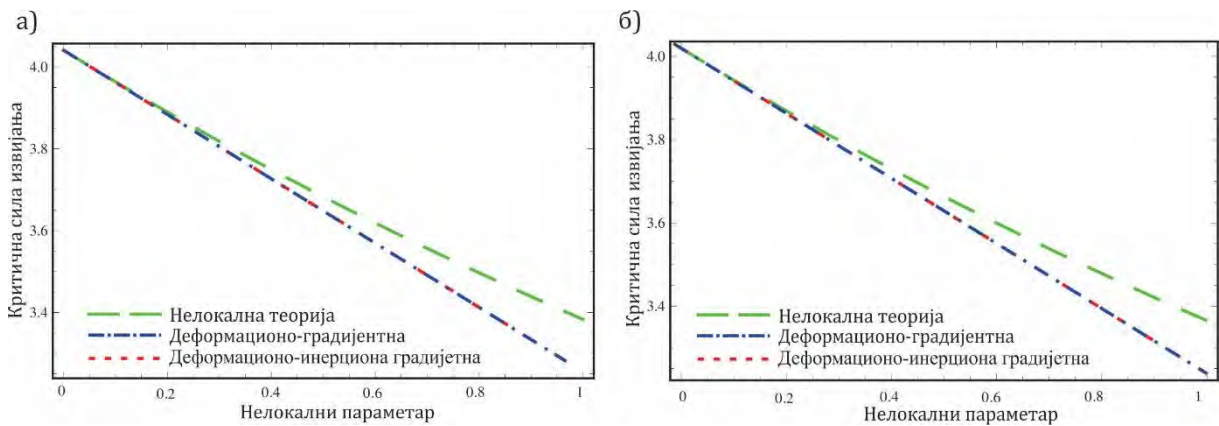
а) Reddy-јева теорија греде б) Нуи-Таи-јева теорија греде.



Сл. 3.7.2. Утицај односа дужине и пречника ( $L/D$ ) на критичну силу извијања нано-греде  
 а) Reddy – јева теорија греде б) Huu -Tai – јева теорија греде.



Сл. 3.7.3. Утицај нелокалног параметра на сопствене фреквенције нано-греде  
 а) Reddy-јева теорија греде б) Huu-Tai- јева теорија греде ( $L/D = 5$ ).



Сл. 3.7.4. Утицај нелокалног параметра на критичну силу извијања нано-греде  
 а) Reddy-јева теорија греде б) Huu-Tai - јева теорија греде ( $L/D = 5$ ).



# Глава 4

## Термички и магнетни утицаји на осцилације нано-греде са оштећењем уметнуте у еластични медијум

### 4.1 Опште напомене

Различите врсте оштећења у структури нано-материјала изазивају локалну промену крутости, па ако је то случај код угљеничних нано-цеви, то може знатно да утиче на сопствене фреквенције и амплитудне функције осциловања система. Сва оштећења која се јављају код дискретних нано-структура можемо поделити у две основне групе. У прву групу спадају тополошки дефекти, који зависе од расподеле веза између атома у мрежи атома (у кристалној структури). У ту групу спадају Stone-Wales дефекти [96, 97] који изазивају нерегуларност у хексагоналној мрежи атома угљеника код угљеничних нано-цеви, што изазива поремећај у локалној структури као и крутости система. У другу групу дефеката спадају такозване једноструке или вишеструке “ваканције” тј. недостатак одређеног броја атома угљеника у атомским мрежама атома (у кристалној структури) [97-99], што доводи до смањења механичких карактеристика кристалне решетке. Такође, и у овом случају долази до локалне промене крутости угљеничне нано-цеви. Са становишта механике континуума промена локалне крутости угљеничне нано-цеви може се моделирати као промена енергије деформације нано-греде. У раду Yang and Chen [100], дата су два приступа моделирању нано-греде са оштећењем и то: “континуални” модели, и “дискретни” модели. У наставку користићемо “дискретни” модел, чија је главна карактеристика та да се оштећење у нано-греди моделира као промена локалне крутости нано-греде на месту где се налази оштећење. Промена локалне крутости тј. оштећења моделира се уношењем опруге одговарајуће крутости на месту оштећења.

У Глави 4 је приказана анализа слободних трансверзалних осцилација нано-греде са оштећењем, под дејством лонгитудиналног магнетног поља и промена температуре. Нано-греда је просто ослоњена и уметнута у еластични медијум. При формирању математичког модела узети

су у обзир промена температуре и утицај мале скале преко нелокалне термо-еластичне конститутивне релације. Применом Euler-Bernoulli-јеве теорије греде формиране су парцијалне диференцијалне једначине кретања са одговарајућим граничним условима. Утицај лонгитудиналног магнетног поља на осцилације нано-греде је уведен на основу дејства Lorenz-ове магнетне силе, добијене преко Maxwell-ових релација. У циљу формирања механичког модела нано-греде са оштећењем, претпоставићемо да се нано-греда састоји од два сегмента повезана торзионом опругом постављеном на месту оштећења. Еластични медијум у који је уметнута нано-греда, представљен је Winkler-овим типом еластичног слоја. Утицај нелокалног параметра, фактора утицаја прслине, промене температуре као и магнетног поља на сопствену фреквенцију система анализиран је за два типа граничних услова нано-греде. Такође, разматране су амплитудне функције у прва четири мода осциловања за различите позиције оштећења.

## 4.2. Формулација проблема

### 4.2.1 Нелокална термо-еластична конститутивна релација

Конститутивна релација која је комбинација нелокалне еластичне и класичне термо-еластичне теорије [79, 80], [101] и [102] за једно-димензионо напонско стање гласи

$$\sigma_{xx} - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{d^2 \sigma_{xx}}{dx^2} = E \left( \varepsilon_{xx} - \frac{\alpha_x \theta}{1 - 2\nu} \right), \quad (4.1)$$

где је  $\alpha_x$  - коефицијент термалног ширења у правцу  $x$  осе,  $\nu$  - Poisson-ово коефицијент,  $\theta$  - промена температуре, а  $(e_0 \tilde{a})$  - нелокални параметар. Када је  $\theta = 0$ , нема промене температуре и тада се термо-еластична конститутивна релација своди на класичну нелокалну конститутивну релацију. Треба истаћи да Young-ов модул еластичности за нано-материјале као што је угљенична нано-цев, је скоро константан до температуре мање од 1100K, али на вишим температурама вредност модула еластичности опада, Hsieh и остали [104].

### 4.2.2 Maxwell-ове релације

Применом класичне електромагнетне теорије [105, 106], Maxwell-ове једначине у диференцијалној форми гласе

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{h}, \quad \nabla \times \mathbf{e} = -\eta \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{h} = 0, \quad (4.2)$$

где је  $\mathbf{J}$  - густина струје,  $\mathbf{h}$  - вектор дистрибуције магнетног поља,  $\mathbf{e}$  - вектор јачине електричног поља и  $\eta$  - је магнетна пермеабилност. Сада дефинишимо вектор дистрибуције магнетног поља  $\mathbf{h}$  и електричног поља  $\mathbf{e}$  као

$$\mathbf{h} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{H}), \quad \mathbf{e} = -\eta \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right), \quad (4.3)$$



у коме је  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$  - Hamilton-ов оператор,  $\mathbf{U} = (x, y, z)$  - је вектор померања  $\mathbf{H} = (H_x, 0, 0)$  - је вектор лонгитудиналног магнетног поља, а  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  - су јединични вектори. Потребно је напоменути да се лонгитудинално магнетно поље простире само у аксијалном правцу нано-греде, па је вектор дистрибуције магнетног поља у следећој форми

$$\mathbf{h} = -H_x \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \mathbf{i} + H_x \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{j} + H_x \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{k}. \quad (4.4)$$

Ако заменимо једначину (4.4) у прву релацију (4.2), добијамо густину струје

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \nabla \times \mathbf{h} \\ &= H_x \left( -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{i} - H_x \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} + H_x \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Вектор Lorentz-ове силе изазване лонгитудиналним магнетним пољем  $\mathbf{H}$  и густином струје  $\mathbf{J}$  одређен је следећом релацијом,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(f_x, f_y, f_z) &= \eta(\mathbf{J} \times \mathbf{H}) \\ &= \eta \left[ 0\mathbf{i} + H_x^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{j} + H_x^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{k} \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

где су  $f_x, f_y$  и  $f_z$  компоненте Lorentz-ове силе у правцима координатних оса  $x, y$  и  $z$

$$f_x = 0, \quad (4.7a)$$

$$f_y = \eta H_x^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right), \quad (4.7b)$$

$$f_z = \eta H_x^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \right). \quad (4.7b)$$

За случај нано-структуре облика греде претпостављамо да су померања  $u$  и  $v$  у правцу координатних оса  $x$  и  $y$  једнака нули, па је тада компонента Lorentz-ове силе у правцу  $z$  - осе једнака

$$f_z = \eta H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.8)$$

Коначно, одређујемо силу која делује по јединици површине дуж нано-структуре облика греде

$$\tilde{q}(x, t) = \int_A f_z dA = \eta A H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.9)$$

### 4.2.3 Математички модел нано-греде са оштећењем

У раду Zhang и остали [107], аутори су увели тип оштећења код угљеничне нано-цеви, познат као "шлиц дефект", односно процеп. Овакав тип оштећења јавља се у циркуларном правцу кристалне решетке код угљеничне нано-цеви, а као резултат недостатка везе између пара угљеникових атома и у том случају такво оштећење се може посматрати као прелина Сл. 4.1a. Размотримо сада једну угљеничну нано-цев са оштећењем у виду процепа, моделирану као нано-

греду са оштећењем уметнуту у Winkler-овом слоју крутости  $k$  Сл. 4. 1б. Разматрана су два типа граничних услова, прости ослонци Сл. 4.2а и уклештења Сл. 4.2б. Нано-греду са оштећењем је представљена као дво-сегментна греду повезана једном торзионом опругом крутости  $c$ , где се леви део налази пре равни оштећења док је десни део након равни оштећења. Оба сегмента нано-греду имају једнаке материјалне особине где је  $E$  - је модул еластичности,  $\rho$  - је густина материјала,  $A$  - је површина попречног пресека,  $I$  - је момент инерције. Претпостављамо да је нано-греду изложена дејству Lorentz-ове магнетне силе изазване лонгитудиналним магнетним пољем. Дужина нано-греду је означена са  $L$ , док је место оштећења нано-греду означено са  $L^*$ . Трансверзално померање левог и десног сегмента нано-греду означено је са  $w_1(x, t)$  и  $w_2(x, t)$ . На модел Euler-Bernoulli-јеве нано-греду примењена је нелокална теорија еластичности, а утицај промене температуре обухваћен је нелокалном термо-еластичном конститутивном релацијом.

На основу другог Newton-овог закона кретања, једначине кретања елементарног дела нано-греду гласе

$$\sum F_z = dm \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial F_T}{\partial x} - kw + \tilde{q} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (4.10a)$$

$$\sum F_x = dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4.10б)$$

$$\sum M_i = 0 \Rightarrow F_T = \frac{\partial M_f}{\partial x}, \quad (4.10в)$$

где су,  $u$  - аксијално померање у правцу  $x$  - осе,  $M_f$  - је момент савијања и  $N$  - је аксијална сила, дефинисани као

$$(N, M_f) = \int_A (\sigma_{xx}, z\sigma_{xx}) dA, \quad (4.11)$$

где је  $\tilde{q}$  магнетна сила по јединици површине дуж нано-греду, једначина (4.9).

Ако нелокалну термо-еластичну конститутивну релацију (4.1) помножимо редом са  $dA$  и  $zdA$  и интегралимо по површини  $A$  нано-греду, узимајући у обзир релацију (4.11) и (2.2.2а) добијамо

$$M_f - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4.12a)$$

$$N = -EA \frac{\alpha_x \theta}{1 - 2\nu}. \quad (4.12б)$$

Затим, ако релацију (4.12а) два пута диференцирамо по  $x$  следи

$$\frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^4 M_f}{\partial x^4} = -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \quad (4.12в)$$

а у једначину (4.12в) заменимо  $\frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} = \frac{\partial F_T}{\partial x}$  и узмемо у обзир (4.10а) добијамо

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kw - \tilde{q} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kw - \tilde{q} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \quad (4.12г)$$

Када у једначини (4.12г) заменимо силу која делује по јединици површине нано-греде  $\tilde{q}$ , релација (4.9), и аксијалну силу  $N$ , релација (4.12б), добијамо парцијалну диференцијалну једначину која описује трансверзално кретање нано-греде

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kw - \eta A H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EA \frac{\alpha_x \theta}{1-2\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ & = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kw - \eta A H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EA \frac{\alpha_x \theta}{1-2\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

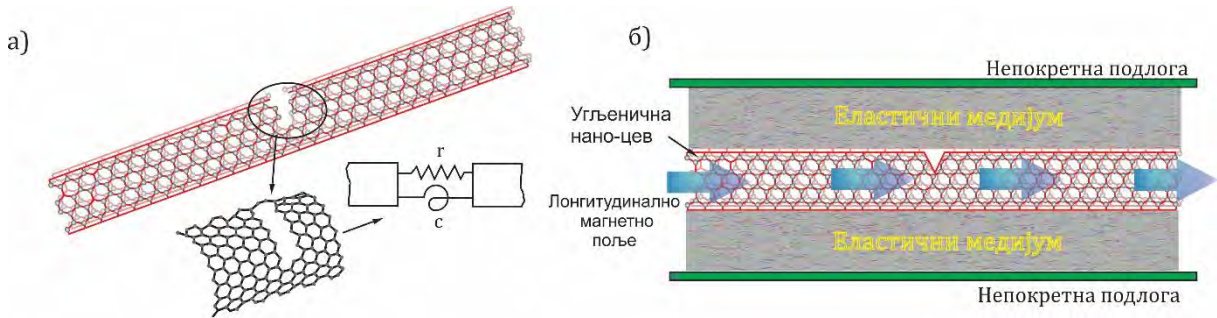
Ако уведемо следеће смене

$$\begin{aligned} \bar{w} = \frac{w}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad K = k \frac{L^4}{EI}, \quad MP = \frac{\eta A H_x^2}{EI} L^2, \quad \nu^2 = \frac{(e_0 \tilde{a})^2}{L^2}, \\ \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \bar{N}_\theta = EA \frac{\alpha_x \theta}{1-2\nu} \frac{L^2}{EI}, \end{aligned} \quad (4.14a)$$

добићемо бездимензиону форму једначине (4.13) у следећем облику

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} + K \bar{w} + (\bar{N}_\theta - MP) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \xi^4} = \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} + K \bar{w} + (\bar{N}_\theta - MP) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \right], \quad (4.14a)$$

где су  $K, MP, \bar{N}_\theta$  и  $\nu$  редом бездимензиони параметри крутости Winkler-овог еластичног слоја, магнетни, термички и нелокални параметар.



Сл 4.1 а) Угљенична нано-цев са оштећењем у виду процепа; б) Физички модел угљеничне нано-цеви са оштећењем под дејством лонгитудиналног магнетног поља.

### 4.3 Аналитичко решење

Решење једначине кретања (4.14а) претпостављамо у облику

$$\bar{w}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\xi) e^{i\Omega_n \tau}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.15)$$

где је  $i = \sqrt{-1}$ ,  $W_n$ - је амплитудна функција, а  $\Omega_n$ - је бездимензиона сопствена фреквенција  $n$ -тог мода осциловања. Ако заменимо претпостављено решење (4.15) у једначину (4.14а), добијамо обичну диференцијалну једначину четвртог реда у следећем облику

$$W_n^{IV}(\xi) + \tilde{b} W_n^{II}(\xi) - \tilde{c} W_n(\xi) = 0, \quad (4.16)$$

где ознака  $(\cdot)^l$  представља извод по координати  $\xi$ , а  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$  и  $\tilde{c}$  су константе дефинисане као

$$\tilde{a} = 1 - \nu^2(\bar{N}_\theta - MP), \quad \tilde{b} = \frac{\bar{N}_\theta - MP}{\tilde{a}} + \nu^2 \left( \lambda_n^4 - \frac{K}{\tilde{a}} \right), \quad \tilde{c} = \left( \lambda_n^4 - \frac{K}{\tilde{a}} \right), \quad (4.17)$$

а члан  $\lambda_n^4 = \frac{\Omega_n^2}{\tilde{a}}$ , представља параметар сопствене фреквенције система.

Ако претпоставимо решење за  $W_n(\xi) = De^{s\xi}$  и заменимо у једначину (4.16), добијамо карактеристичну једначину

$$s^4 + \tilde{b}s^2 - \tilde{c} = 0, \quad (4.18)$$

чија су решења

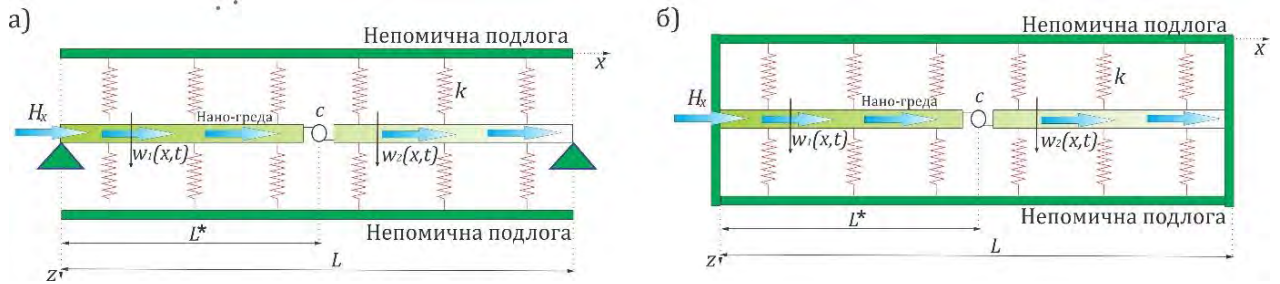
$$s_{n1/2} = \pm \sqrt{\frac{-\tilde{b} + \sqrt{\tilde{b}^2 + 4\tilde{c}}}{2}} = \pm \alpha_n, \quad (4.19a)$$

$$s_{n3/4} = \pm \sqrt{\frac{-\tilde{b} - \sqrt{\tilde{b}^2 + 4\tilde{c}}}{2}} = \pm i\beta_n. \quad (4.19b)$$

Сада је опште решење диференцијалне једначине (4.16) одређено као

$$W_n(\xi) = D_{n1} \sinh(\alpha_n \xi) + D_{n2} \cosh(\alpha_n \xi) + D_{n3} \sin(\beta_n \xi) + D_{n4} \cos(\beta_n \xi), \quad (4.20)$$

где су  $D_{ni}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  непознате константе које се одређују из граничних услова нано-греде.



**Сл 4.2** Еквивалентни механички модел нано-греде са оштећењем спрегнут у еластичном Winkler-овом медијуму под дејством лонгитудиналног магнетног поља за различите граничне услове: а) просто ослоњена, б) обострано уклештена нано-греда.

Анализирајмо нано-греду са оштећењем које се налази на растојању  $L^*$  од левог ослоња, где је са  $b = L^*/L$  означена бездимензиона вредност тог растојања, Сл. 4.2а и Сл. 4.1б. Применом методологије представљене у радовима Лоуа и остали [108, 109], Fernandez-Saez и остали [110, 111] и Torabi и Nafar Dastgerdi [112], модел оштећене нано-греде представимо као једну дво-сегментну греду чији су сегменти повезани једном цилиндричном и једном торзионом опругом на месту оштећења. У овом моделу претпостављамо да обе опруге уводе додатну енергију деформације у систему. Укупна енергија деформације система дата је као сума деформационе енергије нано-греде и додатне деформационе енергије опруга,

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \cdot \varepsilon_{xx}) dV + \Delta U_c|_{x=L^*}, \quad (4.21)$$

где је  $\sigma_{xx}$ - нормални напон,  $\varepsilon_{xx}$  - нормална деформација, а  $\Delta U_c$  је инкремент додатне енергије деформације. Укупна енергија деформације (4.21) може се представити у следећој форми користећи једначине (4.11)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left( N \frac{\partial u}{\partial x} + M_f \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx + \left( \frac{1}{2} N \Delta u + \frac{1}{2} M_f \Delta \theta \right) \Big|_{x=L^*}, \quad (4.22)$$

у коме члан  $\left( \frac{1}{2} N \Delta u \right) \Big|_{x=L^*}$  представља деформациони рад силе  $N$ , а члан  $\left( M_f \Delta \theta \right) \Big|_{x=L^*}$  представља деформациони рад момента  $M_f$ . Релативно аксијално померање  $\Delta u$  цилиндричне опруге и угао ротације  $\Delta \theta$  торзионе опруге представљају хоризонтално померање и ротацију равни у којој се налази оштећење и дефинисано је као у раду Лоуа и остали [108, 109], Fernandez-Saez и остали [110, 111]

$$\Delta u = r \frac{\partial u}{\partial x} + k_{NM} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4.23a)$$

$$\Delta \theta = c \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_{MN} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4.23b)$$

где су  $r$  и  $c$  - крутости цилиндричне и торзионе опруге, а  $k_{NM}$  и  $k_{MN}$  - су савојне константе. Потребно је напоменути да константе  $k_{NM}$  и  $k_{MN}$  дефинишу ефекат спрезања аксијалне силе и момента савијања. У наставку анализе, размотримо само трансверзалне осцилације нано-греде када аксијално померање занемарујемо  $u(x, t) = 0$ . Због тога вредности савојних константи  $k_{NM}$  и  $k_{MN}$  претпостављамо да су веома мале у односу на вредности параметра  $c$  и могу се занемарити [112]. Уводећи ове претпоставке у изразе (4.23), добијамо следеће релације

$$\Delta u = 0, \quad \Delta \theta = c \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = C \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2}, \quad (4.24)$$

где је  $C = c/L$  фактор утицаја прслине [108, 112]. У општем случају константа  $C$  је функција дубине и геометрије оштећења нано-греде. Међутим, ми ћемо константу  $C$  узети као параметар чија се вредност у општем случају одређује преко симулација молекуларне динамике [112, 113, и 114]. Такође треба напоменути, да се вредност прирештаја деформационе енергије  $\Delta U_c|_{x=L^*}$  оштећене нано-греде може одредити молекуларно динамичким симулацијама. Вредности константе  $C$  усвојићемо из литературе.

За модел нано-греде са оштећењем образован од два сегмента Сл. 4.2 који су међусобно повезани торзионом опругом, можемо за сваки сегмент посебно написати парцијалну диференцијалну једначину која описује трансверзално кретање  $w_1(x, t)$  и  $w_2(x, t)$ , користећи општи облик једначине (4.14). Тако добијамо систем од две парцијалне диференцијалне једначине чија решења претпостављамо у облику (4.16). После замене претпостављеног решења

у једначине кретања добијамо следећи систем од две обичне диференцијалне једначине четвртог реда по непознатим амплитудним функцијама  $W_{n1}(\xi)$  и  $W_{n2}(\xi)$

$$W_{n1}^{IV}(\xi) + \tilde{b}W_{n1}^{II}(\xi) - \tilde{c}W_{n1}(\xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq b, \quad (4.25a)$$

$$W_{n2}^{IV}(\xi) + \tilde{b}W_{n2}^{II}(\xi) - \tilde{c}W_{n2}(\xi) = 0, \quad b \leq \xi \leq 1. \quad (4.25b)$$

Решење система диф. јед. (4.25) је

$$W_{n1}(\xi) = D_{n1} \sinh(\alpha_n \xi) + D_{n2} \cosh(\alpha_n \xi) + D_{n3} \sin(\beta_n \xi) + D_{n4} \cos(\beta_n \xi), \quad (4.26a)$$

$$W_{n2}(\xi) = D_{n5} \sinh(\alpha_n \xi) + D_{n6} \cosh(\alpha_n \xi) + D_{n7} \sin(\beta_n \xi) + D_{n8} \cos(\beta_n \xi), \quad (4.26b)$$

у коме непознате константе  $D_{ni}, i = 1, 2, \dots, 8$  одређујемо из граничних услова ослањања нано-греде. У наставку размотрићемо два типа граничних услова Сл. 4.2a и Сл. 4.2b. Математичка формулација граничних услова ослањања нано-греде,

а) за просто ослоњену нано-греду Сл. 4.2a

за  $\xi = 0$

$$\bar{w}_1(0, \tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{1n}(0) = 0, \quad (4.27a)$$

$$\bar{M}_{1f}|_{\xi=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[ -\nu^2 \left( \lambda_n^4 - \frac{K}{\tilde{\alpha}} \right) \tilde{\alpha} W_{1n} - \tilde{\alpha} W_{1n}^{II} \right]_{\xi=0} = 0, \quad (4.27b)$$

за  $\xi = 1$

$$\bar{w}_2(1, \tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{2n}(1) = 0, \quad (4.28a)$$

$$\bar{M}_{2f}|_{\xi=1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[ -\nu^2 \left( \lambda_n^4 - \frac{K}{\tilde{\alpha}} \right) \tilde{\alpha} W_{2n} - \tilde{\alpha} W_{2n}^{II} \right]_{\xi=1} = 0, \quad (4.28b)$$

б) за обострано уклештену нано-греду Сл. 4.2b

за  $\xi = 0$

$$\bar{w}_1(0, \tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{1n}(0) = 0, \quad (4.29a)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_1(0, \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{1n}^I(0) = 0, \quad (4.29b)$$

за  $\xi = 1$

$$\bar{w}_2(1, \tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{2n}(0) = 0, \quad (4.30a)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_2(1, \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{2n}^I(0) = 0, \quad (4.30b)$$

На месту оштећења ( $\xi = b$ ), имамо такозване унутрашње граничне услове или услове компатибилности који се математички могу формулисати као

\*Трансверзално померање - Угиб

$$\bar{w}_2(b, \tau) = \bar{w}_1(b, \tau) \Rightarrow W_{2n}(b) = W_{1n}(b), \quad (4.31a)$$

\*Угао ротације - Нагиб

$$\frac{\partial \bar{w}_2(b, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{w}_1(b, \tau)}{\partial \xi} = \Delta \theta \Rightarrow W_{2n}^I(b) - W_{1n}^I(b) = CW_{1n}^{II}(b), \quad (4.31b)$$

\*Момент савијања

$$\bar{M}_{1f}|_{\xi=b} = \bar{M}_{2f}|_{\xi=b} \Rightarrow$$

$$\left[ -v^2 \left( \lambda_n^4 - \frac{K}{\tilde{a}} \right) \tilde{a} W_{2n} - \tilde{a} W_{2n}^{II} \right]_{\xi=b} = \left[ -v^2 \left( \lambda_n^4 - \frac{K}{\tilde{a}} \right) \tilde{a} W_{1n} - \tilde{a} W_{1n}^{II} \right]_{\xi=b}, \quad (4.32a)$$

\*Трансверзална сила

$$\begin{aligned} \bar{F}_{1T}|_{\xi=b} = \bar{F}_{2T}|_{\xi=b} \Rightarrow \\ \left[ -v^2 \left( \lambda_n^4 - \frac{K}{\tilde{a}} \right) \tilde{a} W_{2n}^I - \tilde{a} W_{2n}^{III} \right]_{\xi=b} = \left[ -v^2 \left( \lambda_n^4 - \frac{K}{\tilde{a}} \right) \tilde{a} W_{1n}^I - \tilde{a} W_{1n}^{III} \right]_{\xi=b}. \end{aligned} \quad (4.32b)$$

Ако заменимо претпостављена решења (4.26) у граничне услове, једначине (4.27), (4.28), (4.31) и (4.32), добићемо осам хомогених алгебарских једначина по непознатим константама  $D_{n1}, D_{n2}, D_{n3}, D_{n4}, D_{n5}, D_{n6}, D_{n7}$  и  $D_{n8}$ , за просто ослоњену нано-греду. Овај систем алгебарских једначина можемо записати у матричном облику

$$\mathbf{G}(\lambda_n) \{\psi\} = \{0\}, \quad (4.33)$$

где је  $\mathbf{G}(\lambda_n)$  матрица коефицијената система алгебарских једначина, а  $\{\psi\}^T = \{D_{n1}, D_{n2}, D_{n3}, D_{n4}, D_{n5}, D_{n6}, D_{n7}, D_{n8}\}^T$  је вектор од 8 непознатих константи  $D_{ni}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ . Систем једначина (4.33) има решења различита од тривијалних тада и само тада када је детерминанта система једнака нули

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}(\lambda_n)| = \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & v^2 \left( \lambda_n^4 - \frac{K}{\tilde{a}} \right) + \alpha_n^2 & 0 & v^2 \left( \lambda_n^4 - \frac{K}{\tilde{a}} \right) - \beta_n^2 \\ \sinh(\alpha_n b) & \cosh(\alpha_n b) & \sin(\beta_n b) & \cos(\beta_n b) \\ C \alpha_n^2 \sinh(\alpha_n b) + \alpha_n \cosh(\alpha_n b) & C \alpha_n^2 \cosh(\alpha_n b) + \alpha_n \sinh(\alpha_n b) & -C \beta_n^2 \sin(\beta_n b) + \beta_n \cos(\beta_n b) & -C \beta_n^2 \cos(\beta_n b) - \beta_n \sin(\beta_n b) \\ [P + \alpha_n^2] \sinh(\alpha_n b) & [P + \alpha_n^2] \cosh(\alpha_n b) & [P - \beta_n^2] \sin(\beta_n b) & [P - \beta_n^2] \cos(\beta_n b) \\ [P \alpha_n + \alpha_n^3] \cosh(\alpha_n b) & [P \alpha_n + \alpha_n^3] \sinh(\alpha_n b) & [P \beta_n - \beta_n^3] \cos(\beta_n b) & -[P \beta_n + \beta_n^3] \sin(\beta_n b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sinh(\alpha_n b) & -\cosh(\alpha_n b) & -\sin(\beta_n b) & -\cos(\beta_n b) \\ -\alpha_n \cosh(\alpha_n b) & -\alpha_n \sinh(\alpha_n b) & -\beta_n \cos(\beta_n b) & \beta_n \sin(\beta_n b) \\ -[P + \alpha_n^2] \sinh(\alpha_n b) & -[P + \alpha_n^2] \cosh(\alpha_n b) & -[P - \beta_n^2] \sin(\beta_n b) & -[P - \beta_n^2] \cos(\beta_n b) \\ -[P \alpha_n + \alpha_n^3] \cosh(\alpha_n b) & -[P \alpha_n + \alpha_n^3] \sinh(\alpha_n b) & -[P \beta_n - \beta_n^3] \cos(\beta_n b) & [P \beta_n + \beta_n^3] \sin(\beta_n b) \\ \sinh(\alpha_n) & \cosh(\alpha_n) & \sin(\beta_n) & \cos(\beta_n) \\ [P + \alpha_n^2] \sinh(\alpha_n) & [P + \alpha_n^2] \cosh(\alpha_n) & [P - \beta_n^2] \sin(\beta_n) & [P - \beta_n^2] \cos(\beta_n) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

На исти начин добија се фреквентна детерминанта  $\mathbf{H}(\lambda_n)$  за обострано уклештену нано-греду, на основу једначина (4.29), (4.30), (4.31) и (4.32)

$$\begin{aligned}
& |\mathbf{H}(\lambda_n)| = \\
& \begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 \\
\alpha_n & 0 & \beta_n & 0 \\
\sinh(\alpha_n b) & \cosh(\alpha_n b) & \sin(\beta_n b) & \cos(\beta_n b) \\
C\alpha_n^2 \sinh(\alpha_n b) + \alpha_n \cosh(\alpha_n b) & C\alpha_n^2 \cosh(\alpha_n b) + \alpha_n \sinh(\alpha_n b) & -C\beta_n^2 \sin(\beta_n b) + \beta_n \cos(\beta_n b) & -C\beta_n^2 \cos(\beta_n b) - \beta_n \sin(\beta_n b) \\
[P + \alpha_n^2] \sinh(\alpha_n b) & [P + \alpha_n^2] \cosh(\alpha_n b) & [P - \beta_n^2] \sin(\beta_n b) & [P - \beta_n^2] \cos(\beta_n b) \\
[P\alpha_n + \alpha_n^3] \cosh(\alpha_n b) & [P\alpha_n + \alpha_n^3] \sinh(\alpha_n b) & [P\beta_n - \beta_n^3] \cos(\beta_n b) & -[P\beta_n + \beta_n^3] \sin(\beta_n b) \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sinh(\alpha_n b) & -\cosh(\alpha_n b) & -\sin(\beta_n b) & -\cos(\beta_n b) \\
-\alpha_n \cosh(\alpha_n b) & -\alpha_n \sinh(\alpha_n b) & -\beta_n \cos(\beta_n b) & \beta_n \sin(\beta_n b) \\
-[P + \alpha_n^2] \sinh(\alpha_n b) & -[P + \alpha_n^2] \cosh(\alpha_n b) & -[P - \beta_n^2] \sin(\beta_n b) & -[P - \beta_n^2] \cos(\beta_n b) \\
-[P\alpha_n + \alpha_n^3] \cosh(\alpha_n b) & -[P\alpha_n + \alpha_n^3] \sinh(\alpha_n b) & -[P\beta_n - \beta_n^3] \cos(\beta_n b) & [P\beta_n + \beta_n^3] \sin(\beta_n b) \\
\sinh(\alpha_n) & \cosh(\alpha_n) & \sin(\beta_n) & \cos(\beta_n) \\
\alpha_n \cosh(\alpha_n) & \alpha_n \sinh(\alpha_n) & \beta_n \cos(\beta_n) & -\beta_n \sin(\beta_n)
\end{vmatrix} = 0. \quad (4.35)
\end{aligned}$$

где је  $P = v^2 \left( \lambda_n^4 - \frac{K}{a} \right)$ .

Развојем детерминанти  $|\mathbf{G}(\lambda_n)|$  и  $|\mathbf{H}(\lambda_n)|$  добијамо одговарајуће трансцендентне једначине. Нуле ових полинома можемо одредити само нумерички путем, а оне одговарају сопственим фреквенцијама осциловања просто ослоњене, односно обострано уклештене нано-греде са оштећењем.

#### 4.4 Нумерички резултати

У циљу упоредне анализе утицаја параметара система на осцилаторно понашање оштећене нано-греде, усвојићемо вредности материјалних и геометријских параметара нано-система из рада Лоуа и остали [108]: позиција оштећења  $b = 0.25 - 0.5$ , нелокални параметар  $v = 0 - 0.6$ , фактор утицаја прслине  $C = 0 - 2$  и крутост еластичног слоја  $K = 0 - 1$ . У Табелама 4.1 - 4.4, приказане су бездимензионе вредности сопствених фреквенција оштећене нано-греде за различите вредности нелокалног параметра  $v$ , фактор утицаја прслине  $C$ , крутости еластичног медијума  $K$  и позиција оштећења  $b$ . Добијени резултати за сопствене фреквенције просто ослоњене нано-греде приказани су у Табелама 4.1 и 4.2, док су сопствене фреквенције обострано уклештене нано-греде приказани у Табелама 4.3 и 4.4. Поредићи добијене резултате са резултатима из рада Лоуа и остали [108], показано је одлично слагање фреквенције за оба типа граничних услова. Утицај позиције оштећења на амплитудне функције осциловања приказан је на Сл. 4.2. Такође разматран је утицај лонгитудиналног магнетног поља  $MP$  на сопствене фреквенције система када је утицај промене температуре  $\bar{N}_\theta$  једнак нули, и приказан је на Сл. 4.3, а утицај промене температуре  $\bar{N}_\theta$  на сопствене фреквенције система када занемаримо утицај магнетног поља  $MP$ , и приказан је на Сл. 4.4.

У табелама 4.1 и 4.2 је приказан утицај бездимензионих вредности параметара система на основну сопствену фреквенцију  $\lambda_1$ . Можемо запазити да повећање фактора утицаја прслине  $C$



смањује вредности сопствене фреквенције оштећене нано-греде. Шта више може се запазити да повећање нелокалног параметра изазива смањење сопствене фреквенције, одакле се закључује да се укупна крутост система смањује, тако да посматрани систем постаје “мекши”. Повећање коефицијента крутости еластичног слоја има веома мали утицај на сопствену фреквенцију и изазива њено повећање. Упоређивањем сопствених фреквенција из Табела 4.1 и 4.2, може се запазити да померање оштећења од средине према крају нано-греде, сопствена фреквенција система расте. Дакле можемо закључити да што је ближе оштећење крају нано-греде оно има мањи утицај на вредности сопствене фреквенције система.

Добијени резултати за бездимензионе вредности, основне сопствене фреквенције  $\lambda_1$  за различите параметре обострано уклештене нано-греде, приказани су у Табелама 4.3 и 4.4. Такође, и у овом случају утицај нелокалног параметра, крутости еластичног слоја као и фактора утицаја прслине на сопствену фреквенцију је идентичан као у случају просто ослоњене нано-греде. У првим колонама Табела 4.3 и 4.4 приказане су сопствене фреквенције обострано уклештене нано-греде без утицаја оштећења. Утицај позиције оштећења на сопствене фреквенције нано-греде је приказан за две вредности параметра  $b = 0.25$  и  $b = 0.5$ , одакле се може уочити да се сопствене фреквенције нано-греде повећавају са приближавањем оштећења крају нано-греде, дакле, оштећење ближе крају нано-греде има мањи утицај на динамику система.

Потребно је напоменути да у случају када су вредности промене температуре, крутости еластичног слоја као и магнетног параметра једнаки нули, тада се добијена вредност за сопствену фреквенцију своди на резултат из рада Лоуа и остали [108].

Промена амплитудне функције оштећене нано-греде приказана је на Сл. 4.2 у прва четири мода осциловања за два типа граничних услова.

Анализирајмо сада случајеве када се оштећење налази на једној четвртини распона од левог ослонца  $b = 0.25$ , и када се оно налази средини распона просто ослоњене нано-греде  $b = 0.5$ , што је приказано на Сл. 4.2а и Сл.4.2б. Можемо запазити разлику у облику амплитудне функције у околини оштећења, тј. када је оштећење на средини распона нано-греде, оно не утиче на симетричне модове већ само на антисиметричне. Утицај оштећења је видљив само у првом и трећем моду осциловања. Ово се јавља због тога што се оштећење налази у осцилаторном чвору. Такође може се запазити да у случају када се оштећење налази на четвртини распона од левог ослонца, оштећење нема утицаја на четврти мод осциловања просто ослоњене нано-греде Сл. 4.2а.

Код обострано уклештене нано-греде разматран је утицај положаја оштећења на облик амплитудне функције осциловања када се оштећење налази на четвртини  $b = 0.25$ , Сл. 4.2в и на половини  $b = 0.5$  Сл. 4.2г, распона греде. Запажамо да је утицај оштећења на облику амплитудне функције обострано уклештене нано-греде веома изражен када се оштећење налази на четвртини распона греде док за случај када се оштећење налази на половини распона греде, утицај оштећења изражен у првом и трећем моду осциловања. Треба истаћи да на основу облика

амплитудне функције осциловања је могућа детекција површинских оштећења нано-греде, као и њихова контрола простирања.

**ТАБЕЛА 4.1**

Бездимензионе вредности основне сопствене фреквенције  $\lambda_1$  просто ослоњене нано-греде са оштећењем за различите вредности нелокалног параметра  $\nu$ , фактор утицаја прслине  $C$ , крутости еластичног слоја  $K$  и позиције прслине  $b = 0.5$ .

K	$\nu$	$C = 0$	$C = 0.5$	$C = 1$	$C = 2$
0	0	3.14159	2.63931	2.38319	2.09598
	0.2	2.89083	2.41902	2.17779	1.90983
	Реф.[108]	2.47903	2.06456	1.85242	1.61949
	0.6	2.15067	1.78664	1.60037	1.39708
0.5	0	3.14562	2.64609	2.39237	2.10943
	0.2	2.89599	2.42780	2.18979	1.92753
	0.4	2.48719	2.07862	1.87178	1.64815
	0.6	2.16313	1.80817	1.63003	1.44082
1	0	3.14962	2.65281	2.40145	2.12262
	0.2	2.90113	2.43649	2.20160	1.94475
	0.4	2.49528	2.09240	1.89055	1.67539
	0.6	2.17537	1.82895	1.65816	1.48091

\*Упоредна анализа резултата са радом Лоуа и остали [108]

**ТАБЕЛА 4.2**

Бездимензионе вредности основне сопствене фреквенције  $\lambda_1$  просто ослоњене нано-греде са оштећењем за различите вредности нелокалног параметра  $\nu$ , фактор утицаја прслине  $C$ , крутости еластичног слоја  $K$  и позиције прслине  $b = 0.25$ .

K	$\nu$	$C = 0$	$C = 0.5$	$C = 1$	$C = 2$
0	0	3.14159	2.82690	2.61743	2.34925
	0.2	2.89083	2.58446	2.37535	2.11337
	Реф.[108]	2.47903	2.19762	2.00246	1.76604
	0.6	2.15067	1.89756	1.72163	1.51254
0.5	0	3.14562	2.83242	2.62438	2.35883
	0.2	2.89599	2.59167	2.38463	2.12649
	0.4	2.48719	2.20930	2.01785	1.78830
	0.6	2.16313	1.91560	1.74562	1.54743
1	0	3.14962	2.83790	2.63127	2.36830
	0.2	2.90113	2.59882	2.39379	2.13937
	0.4	2.49528	2.22080	2.03289	1.80977
	0.6	2.17537	1.93314	1.76866	1.58012

**ТАБЕЛА 4.3**

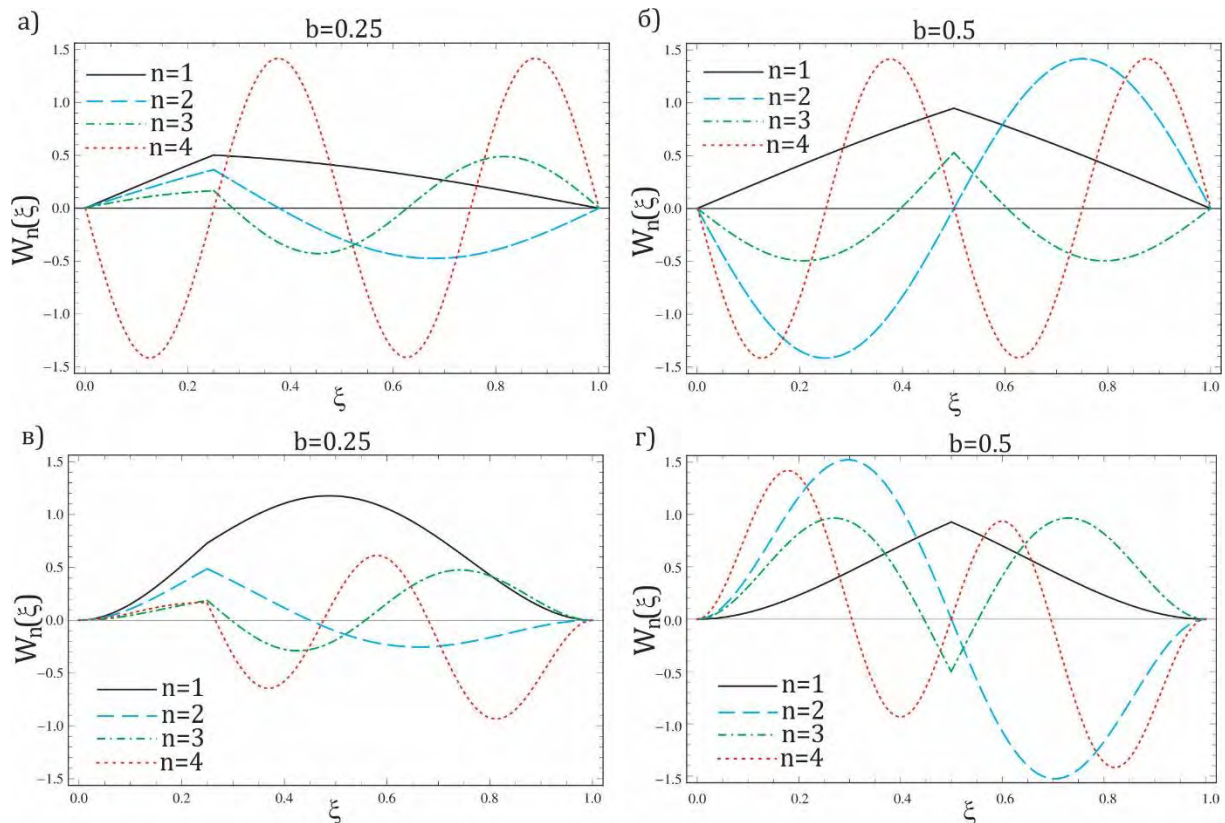
Бездимензионе вредности основне сопствене фреквенције  $\lambda_1$  обострано уклештене нано-греде са оштећењем за различите вредности нелокалног параметра  $\nu$ , фактор утицаја прслине  $C$ , крутости еластичног слоја  $K$  и позиције прслине  $b = 0.5$ .

$K$	$\nu$	$C = 0$	$C = 0.5$	$C = 1$	$C = 2$
0 Реф.[108]	0	4.73004	4.27235	4.10790	3.97023
	0.2	4.27661	3.79523	3.62032	3.47640
	0.4	3.59232	3.12694	2.96127	2.82852
	0.6	3.08370	2.66026	2.51211	2.39485
0.5	0	4.73122	4.27395	4.10970	3.97222
	0.2	4.27821	3.79751	3.62295	3.47937
	0.4	3.59501	3.13102	2.96607	2.83403
	0.6	3.08795	2.66688	2.51995	2.40390
1	0	4.73240	4.27555	4.11150	3.97422
	0.2	4.27981	3.79979	3.62558	3.48233
	0.4	3.59770	3.13509	2.97085	2.83950
	0.6	3.09219	2.67344	2.52773	2.41285

**ТАБЕЛА 4.4**

Бездимензионе вредности основне сопствене фреквенције  $\lambda_1$  обострано уклештене нано-греде са оштећењем за различите вредности нелокалног параметра  $\nu$ , фактор утицаја прслине  $C$ , крутости еластичног слоја  $K$  и позиције прслине  $b = 0.25$ .

$K$	$\nu$	$C = 0$	$C = 0.5$	$C = 1$	$C = 2$
0 Реф.[108]	0	4.73004	4.71675	4.71144	4.70681
	0.2	4.27661	4.26860	4.26418	4.25949
	0.4	3.59232	3.58948	3.58662	3.58104
	0.6	3.08370	3.08271	3.08094	3.06902
0.5	0	4.73122	4.71794	4.71263	4.70801
	0.2	4.27821	4.27021	4.26580	4.26110
	0.4	3.59501	3.59218	3.58932	3.58376
	0.6	3.08795	3.08697	3.08521	3.07334
1	0	4.73240	4.71913	4.71383	4.70920
	0.2	4.27981	4.27181	4.26740	4.26272
	0.4	3.5977	3.59488	3.59202	3.58647
	0.6	3.09219	3.09121	3.08946	3.07764

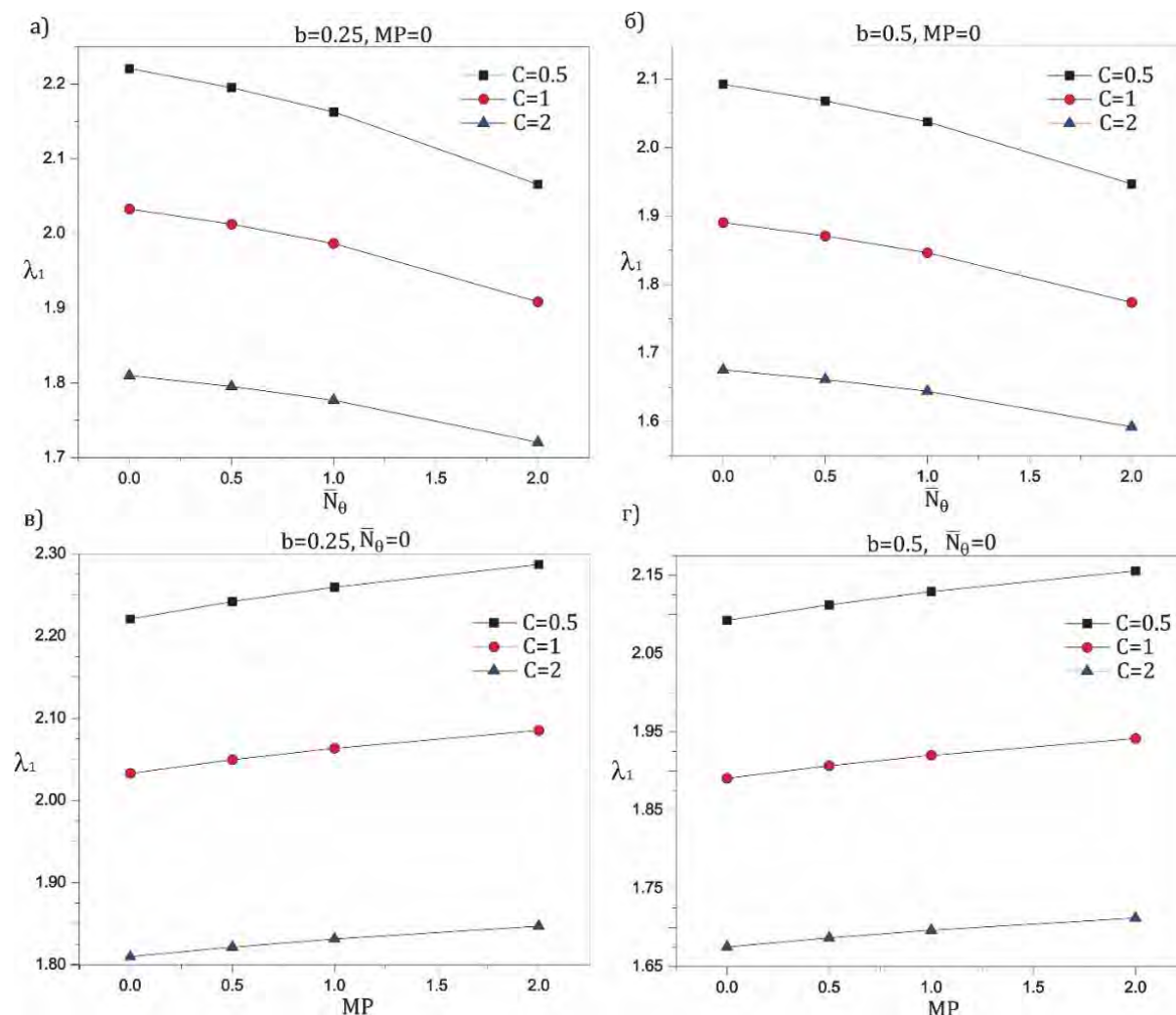


**Сл. 4.2.** Прва четири мода осциловања а) просто ослоњене нано греде када је  $b = 0.25$  б) просто ослоњене нано греде када је  $b = 0.5$  , и в) обострано уклештена нано-греда када је  $b = 0.25$  и г) обострано уклештена нано-греда када је  $b = 0.5$ .

У наставку размотримо утицај промене температуре и магнетног поља на бездимензионе вредности сопствене фреквенције оштећене нано-греде уметнуте у еластични медијум. Вредности материјалних и геометријских параметара у овој анализи усвојени су у бездимензионој форми, где је  $b = 0.25$  и  $b = 0.5$  положај оштећења,  $\nu = 0.4$  нелокални параметар,  $C = 0.5 - 2$  фактор утицаја прслине,  $K = 1$  крутост еластичног слоја, параметар магнетног поља  $MP = 0 - 2$  и утицај термичког напрезања  $\bar{N}_\theta = 0 - 2$ .

На Сл. 4.3 приказана је промена вредности основне сопствене фреквенције за различите вредности положаја оштећења  $b = 0.25$  и  $b = 0.5$  просто ослоњене нано-греде. У наставку разматрана су два случаја. У првом случају разматран је само утицај промене термичког параметра на основну сопствену фреквенцију када је вредност магнетног параметра једнака нули  $MP = 0$ , Сл. 4.3а и Сл. 4.3б. Са дијаграма можемо запазити да пораст параметра температуре  $\bar{N}_\theta$  изазива смањење основне сопствене фреквенције система за оба приказана случаја. Према томе може се закључити да повећање вредности термичког параметра доводи до смањења укупне крутости система тј. има пригушујуће својство на динамичко понашање. У другом случају разматра се утицај лонгитудиналног магнетног поља на основну сопствену фреквенцију система, Сл. 4.3в и Сл. 4.3г. Повећање вредности лонгитудиналног магнетног поља доводи до повећања

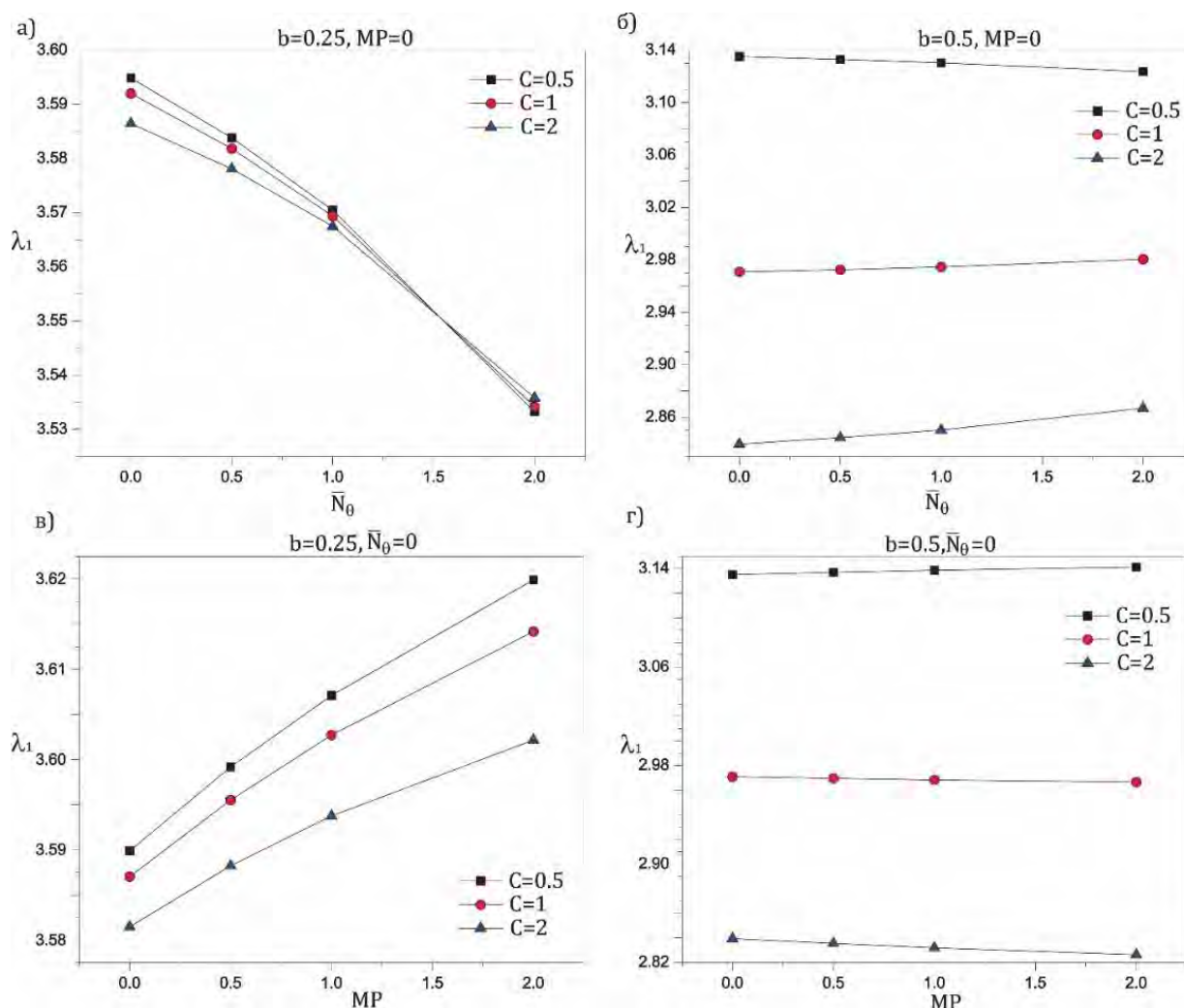
сопствене фреквенције просто ослоњене нано-греде са оштећењем. Са физичке тачке гледишта, повећање параметра лонгитудиналног поља повећава укупну крутост система, односно чини да нано-греда буде крућа.



Сл. 4.3. Основна сопствена фреквенција осциловања просто-ослоњене нано-греде са оштећењем у функцији промене термичког параметра  $\bar{N}_\theta$ , а)  $b = 0.25$  и б)  $b = 0.5$ ; и у функцији промене магнетног параметра  $MP$ , в)  $b = 0.25$  и г)  $b = 0.5$ ;

Сада размотримо утицај промене термичког и магнетног поља на обострано уклештену нано-греду са оштећењем, уметнуту у еластични медијум за различите положаје оштећења. У овој анализи користићемо већ усвојене вредности материјалних и геометријских параметра система. На Сл. 4.4а приказана је промена основне сопствене фреквенције нано-греде, за вредност параметра  $b = 0.25$  и  $MP = 0$ . Као и у случају просто ослоњене нано-греде, повећање вредности термичког параметра доводи до смањења сопствене фреквенције, значи долази до смањења укупне крутости система, а тиме и до тако званог омекшавања греде. Треба истаћи да

је утицај фактор утицаја прслине на основну сопствену фреквенцију мањи него код просто ослоњене нано-греде.



Сл 4.4. Основна сопственае фреквенције осциловања обострано уклештене нано-греде са оштећењем, у функцији промене термичког параметра  $\bar{N}_\theta$ , а)  $b = 0.25$  и б)  $b = 0.5$ ; и у функцији промене магнетног параметра  $MP$ , в)  $b = 0.25$  и г)  $b = 0.5$ ;

У случају када је оштећење на половини распона нано-греде  $b = 0.5$ , а магнетни параметар једнак нули вредности основне сопствене фреквенције у функцији промене параметра температуре  $\bar{N}_\theta$  приказане су на Сл. 4. 4 б). Може се запазити да повећањем фактора утицаја прслине долази до смањења вредности основне сопствене фреквенције.

За случај када је вредност термичког параметра једнака нули, вредности основне сопствене фреквенције приказани су на Сл. 4. 4в и Сл. 4. 4г. Можемо запазити да повећање вредности магнетног параметра доводи до повећања основне сопствене фреквенције греде, док повећање фактора утицаја прслине  $C$  доводи до смањења њене вредности.

Анализа утицаја параметара спољашњег магнетног и температурног поља на динамичко понашање нано-греде са оштећењем за различите граничне услове ослањања могу се извући следећи закључци. Могућа је промена основне сопствене фреквенције система променом параметара температурног и магнетног поља, што је веома значајно у нано-електромеханичким системима. Бирањем вредности параметара температурног и магнетног поља у одговарајућим границама, могуће је избећи резонантна стања као и велике амплитуде осциловања.





# Глава 5

## Осцилације и стабилност еластично повезаних система нано-штапова, греда и плоча применом нелокалне теорије еластичности

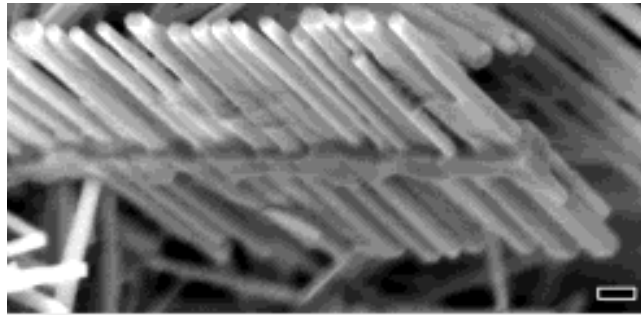
### 5.1 Опште напомене

У глави 5 анализиране су осцилације и стабилност комплексних нано-структурних система, сачињених од већег броја нано-елемената као што су нано-штапови, нано-греде и нано-плоче уметнуте у еластични медијум. Разумевање механичког понашања спрегнутих нано-система има веома великог значаја при пројектовању савремених нано-резонатора и нано-комполитних структура. На основу d'Alembert-овог принципа и нелокалне конститутивне релације, изведен је систем парцијалних диференцијалних једначина које описују кретање система спрегнутих нано-штапова, греда и плоча, за одговарајуће граничне услове. Применом аналитичких метода систем једначина је решен и добијене су вредности за сопствену фреквенцију осциловања и критичну силу извијања у затвореном облику. Такође, добијене су асимптотске вредности за сопствену фреквенцију и силу извијања у случају када број нано-структурних елемената тежи бесконачно. Аналитички резултати су потврђени применом нумеричких метода, где је показано одлично слагање резултата. И на крају ове главе дати су нумерички примери у којима је приказан утицај нелокалног параметра на динамику система.

### 5.2 Лонгитудиналне осцилације система спрегнутих нано-штапова

При пројектовању комплексних нано-система потребно је познавати механичко понашање нано-структурних елемената и њихово математичко моделирање. У овом делу рада анализираћемо лонгитудиналне осцилације система спрегнутих нано-штапова, са еластичним особинама, чији је физички модел приказан на Сл.5.2.1. Претпостављамо да је систем сачињен

од  $m$  паралелних нано-штапова са једнаким материјалним и геометријским особинама, који су међусобно повезани еластичним везама. Размотрићемо два типа спрезања  $m$  нано-штапова са непокретном подлогом преко еластичног слоја, а такве везе су познате у литератури као уклештени и слободан ланац. Применом d'Alembert-овог принципа и нелокалне конститутивне релације изведен је систем од  $m$  парцијалних диференцијалних једначина кретања система. Тачно решење за сопствене фреквенције лонгитудиналних осцилација одређено је применом методе раздвајања променљивих када се систем парцијалних једначина своди на систем хомогених алгебарских једначина. Затим, применом тригонометријске методе добијају се аналитичке вредности за сопствене фреквенције система. Применом софтвера Wolfram Mathematica нумерички су верификована тако одређена аналитичка решења за сопствене фреквенције система.

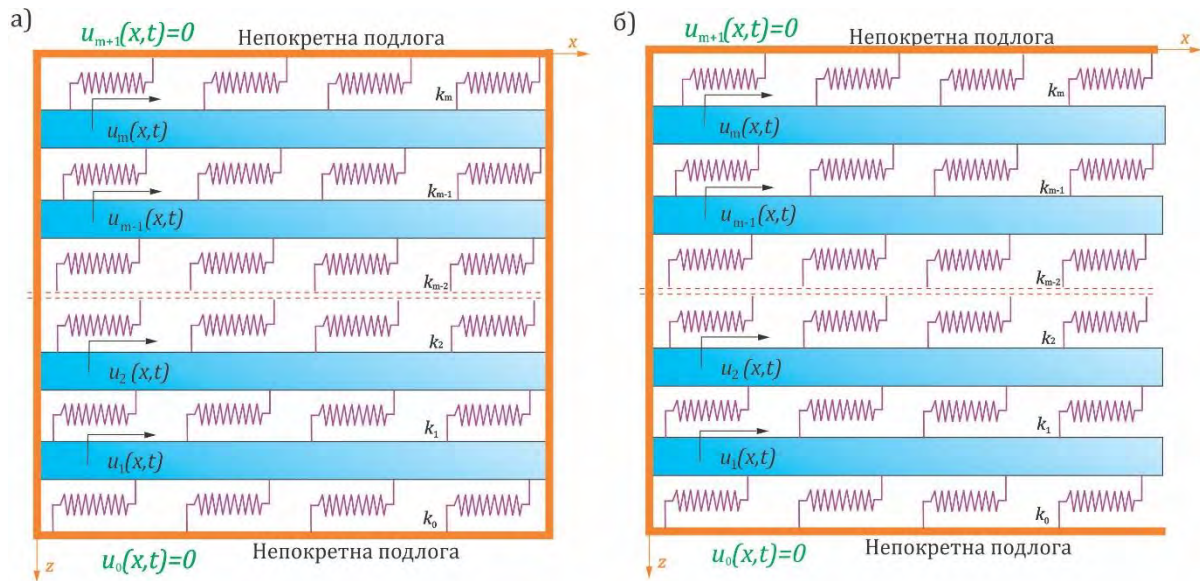


Сл. 5.2.1. ZnO (Цинк - Оксид) нано-штапови који су са обе стране распоређени око централног нано-језгра [48].

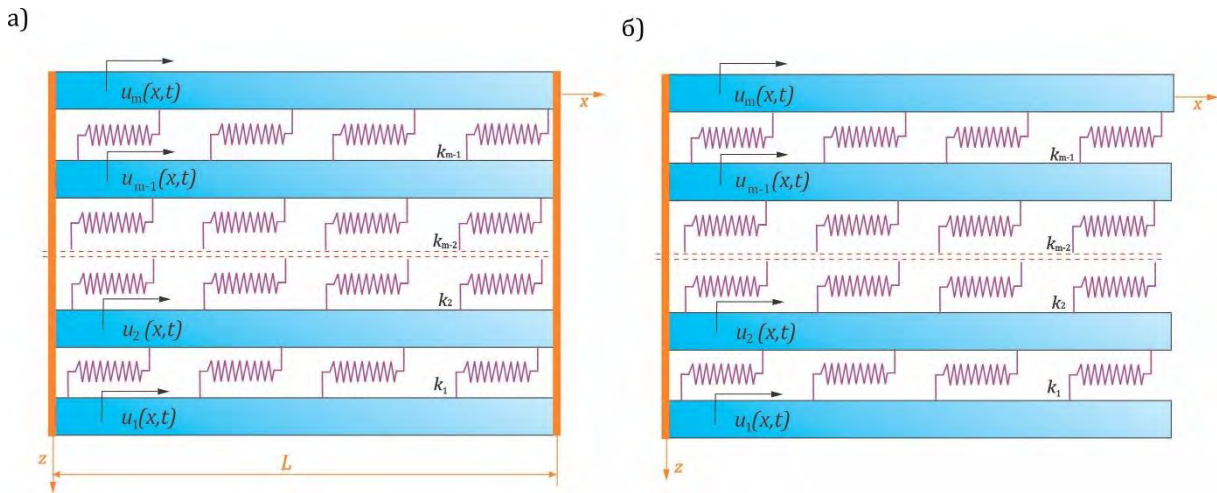
### 5.2.1 Диференцијалне једначине кретања система

Механички модели система нано-штапова спрегнутих у ланчане системе приказани су на Сл. 5.2.2 и Сл. 5.2.3 за два типа граничних услова, обострано уклештене (Clamped-Clamped (C-C)) и конзолне (Clamped-Free (C-F)) нано-штапове. Основна разлика између два приказана ланчана система је у начину спрезања првог и последњег нано-штапа са непокретном основом. Систем нано-штапова приказан на Сл. 5.2.2.а и 5.2.2.б је спрегнут у уклештени ланац, где је први и последњи нано-штап повезан са непокретном основом еластичним слојем  $k_0 \neq 0$  и  $k_m \neq 0$ . На Сл. 5.2.3.а и Сл. 5.2.3.б, приказан је систем нано-штапова повезан у такозвани слободни ланац, где први и последњи нано-штап нису спрегнути са непокретном подлогом, тј. тада је  $k_0 = 0$  и  $k_m = 0$ . Модели приказани на Сл. 5.2.2 и Сл. 5.2.3, сачињени су од  $m$  једнаких, паралелних нано-штапова повезаних еластичним слојевима који су моделирани као систем аксијалних распоређених опруга крутости  $k_1 = k_2 = \dots = k_i = \dots = k_{m-1} = k$ . Нано-штапови су систему приказаном на Сл. 5.2.2 и Сл. 5.2.3, означени као нано-штап 1, нано-штап 2, итд. до  $m$ -тог нано-штапа. Материјалне и геометријске карактеристике свих нано-штапова су једнаке, где је са  $E$

означен модул еластичности,  $\rho$  густина масе,  $A$  површина попречног пресека, и  $L$  дужина нано-штапа.



Сл. 5.2.2. Систем спрегнутих нано-штапова у уклештени ланац : а) систем са обострано уклештеним крајевима; б) систем са конзолним нано-штаповима.

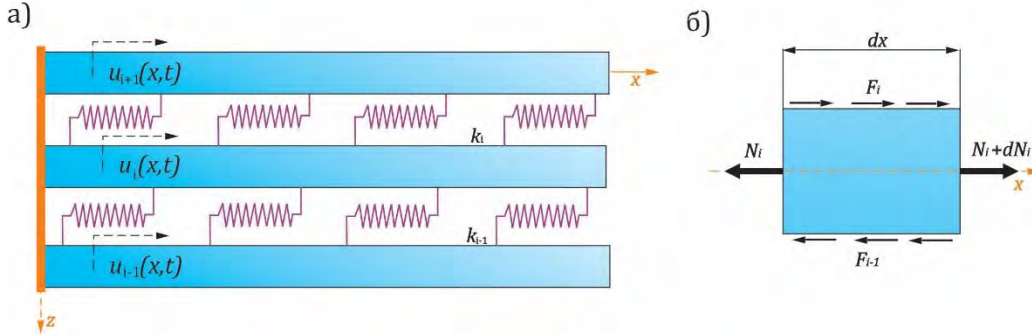


Сл. 5.2.3. Систем спрегнутих нано-штапова у слободни ланац : а) систем са обострано уклештеним крајевима; б) систем са конзолним нано-штаповима.

Уочимо сада  $i$ -ти нано-штап и његов елементарни део дужине  $dx$ , као што је приказан на Сл. 5.2.4. Елементарни део има константан попречни пресек  $A$  дуж осе  $x$ . Аксијално померање елементарног дела  $i$ -тог нано-штапа означимо са  $u_i(x, t)$ . Са слике 5.2.4б, запажамо да је елементарни део под дејством спољашњих сила  $F_i(x, t)$  и  $F_{i-1}(x, t)$ , као и резултујућих аксијалних сила  $N_i(x, t)$  и  $N_i(x, t) + dN_i(x, t)$ . Применом d'Alembert-овог принципа, једначина кретања елементарног дела  $i$ -тог нано-штапа гласи

$$\sum F_{xi} = dm\ddot{u}_i \Rightarrow -N_i + (N_i + dN_i) + F_i dx - F_{i-1} dx = dm\ddot{u}_i, \quad (5.2.1)$$

где је  $dm = \rho A dx$  маса елементарног дела штапа;  $N_i(x, t)$  и  $dN_i = \frac{\partial N_i}{\partial x} dx$  су редом, аксијална унутрашња сила и њен прираштај, чланови  $F_i$  и  $F_{i-1}$  су спољашње силе које потичу од еластичних слојева.



Сл. 5.2.4. а)  $i$ -ти нано-штап; б) елементарни део  $i$ -тог нано-штапа

Заменом  $dm = \rho A dx$  у једначини (5.2.1), добијамо

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = -F_i + F_{i-1} + \rho A \ddot{u}_i, \quad (5.2.2)$$

где је аксијална напонска резултујућа сила  $N_i$  дефинисана као

$$N_i(x, t) = \int_A \sigma_{xx}(x, t) dA, \quad (5.2.3)$$

док су спољашње силе тј. дејство еластичног медијума дефинисане као

$$F_i = k_i(u_{i+1} - u_i), \quad F_{i-1} = k_{i-1}(u_i - u_{i-1}), \quad (5.2.4)$$

Сада једначину (5.2.3) замењујемо у једначину (1.3.8а), па поступком описаним у одељку 2.3 одређујемо

$$N_i - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} = EA \frac{\partial u_i}{\partial x}. \quad (5.2.5)$$

Ако диференцирамо једначину (5.2.5) по  $x$ , а затим у ту једначину заменимо  $\frac{\partial N_i}{\partial x}$  из (5.2.2) добијамо  $m$  диференцијалних једначина кретања система облика

$$\begin{aligned} & \rho A \ddot{u}_i - EA \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + k_i(u_i - u_{i+1}) + k_{i-1}(u_i - u_{i-1}) \\ & = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\rho A \ddot{u}_i + k_i(u_i - u_{i+1}) + k_{i-1}(u_i - u_{i-1})], \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Из система (5.2.6), може се добити систем диференцијалних једначина кретања за уклештени ланац, приказан на Сл. 5.2.2, када сматрамо да је у првој једначини  $k_0 \neq 0$ , а у  $m$ -тој  $k_m \neq 0$ . Овај систем од  $m$  диференцијалних једначина записан је тако да су посебно написане диференцијалне једначине за први и  $m$ -ти нано-штап, јер се по структури разликују од преосталих  $m - 2$  када је  $i = 2, \dots, m - 1$

$$\rho A \ddot{u}_1 - EA \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k_1(u_1 - u_2) + k_0 u_1 = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\rho A \ddot{u}_1 + k_1(u_1 - u_2) + k_0 u_1],$$

$i = 1, (5.2.7a)$

$$\rho A \ddot{u}_i - EA \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + k_i(u_i - u_{i+1}) + k_{i-1}(u_i - u_{i-1}) =$$

$$(e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\rho A \ddot{u}_i + k_i(u_i - u_{i+1}) + k_{i-1}(u_i - u_{i-1})],$$

$i = 2, 3, \dots, m-1, (5.2.7б)$

$$\rho A \ddot{u}_m - EA \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + k_m u_m + k_{m-1}(u_m - u_{m-1}) =$$

$$(e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\rho A \ddot{u}_m + k_m u_m + k_{m-1}(u_m - u_{m-1})], \quad i = m, (5.2.7в)$$

За слободни ланац приказан на Сл. 5.2.3, диференцијалне једначине кретања добијамо када у једначинама (5.2.7а) и (5.2.7в) заменимо  $k_0 = k_m = 0$ , а остале  $m-2$  једначине (5.2.7б) остају непромењене

$$\rho A \ddot{u}_1 - EA \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k_1(u_1 - u_2) = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\rho A \ddot{u}_1 + k_1(u_1 - u_2)],$$

$i = 1, (5.2.8a)$

$$\rho A \ddot{u}_i - EA \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + k_i(u_i - u_{i+1}) + k_{i-1}(u_i - u_{i-1}) =$$

$$(e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\rho A \ddot{u}_i + k_i(u_i - u_{i+1}) + k_{i-1}(u_i - u_{i-1})],$$

$i = 2, 3, \dots, m-1, (5.2.8б)$

$$\rho A \ddot{u}_m - EA \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + k_{m-1}(u_m - u_{m-1}) = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\rho A \ddot{u}_m + k_{m-1}(u_m - u_{m-1})],$$

$i = m, (5.2.8в)$

## 5.2.2 Аналитичко решење

Математичка формулација граничних услова за системе обострано уклештених и конзолних нано-штапова који су приказани на Сл. 5.2.2 и Сл. 5.2.3, гласе

- *Обострано уклештени нано-штапови* (С-С), Сл. 5.2.2.а и Сл. 5.2.3.а

$$u_i(0, t) = u_i(L, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, (5.2.9)$$

- *Конзолни нано-штапови* (С-Ф), Сл. 5.2.2.б и Сл. 5.2.3.б

$$u_i(0, t) = N_i(L, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, (5.2.10)$$

где је  $N_i(L, t)$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) резултујућа аксијална сила  $i$ -тог нано-штапа.

Ако из једначине (5.2.2) заменимо  $\frac{\partial N_i}{\partial x}$  у једначину (5.2.5) добија се нелокални облик аксијалне силе  $N_i$  као

$$N_i(x, t) = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial}{\partial x} [\rho A \ddot{u}_i + k_i(u_i - u_{i+1}) + k_{i-1}(u_i - u_{i-1})] + EA \frac{\partial u_i}{\partial x}. \quad (5.2.11)$$

Заменимо ли у једначину (5.2.11),  $x = L$  добијамо једначину која задовољава граничне услове (5.2.10),

$$N_i(L, t) = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial}{\partial x} [\rho A \ddot{u}_i(L, t) + k_i(u_i(L, t) - u_{i+1}(L, t)) + k_{i-1}(u_i(L, t) - u_{i-1}(L, t))] + EA \frac{\partial u_i(L, t)}{\partial x} = 0. \quad (5.2.12)$$

Једначине кретања (5.2.7) и (5.2.8) са граничним условима (5.2.9) и (5.2.10) могу се решити, користећи методу раздвајања променљивих у следећем облику

$$u_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{ni} \sin \alpha_n e^{i\omega_n t}. \quad (5.2.13)$$

где је  $i = \sqrt{-1}$ ,  $U_{ni}$  је амплитуда и  $\omega_n$  је сопствена фреквенција  $n$ -тог мода осциловања.

На основу граничних услова (5.2.9) за систем обострано уклештених нано-штапова следи релација

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty, \quad (5.2.14)$$

а за систем конзолних нано-штапова из (5.2.10) добијамо

$$\alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (5.2.15)$$

Ако заменимо претпостављено решење (5.2.13), у једначину (5.2.6), добија се систем од  $m$  хомогених алгебарских једначина по непознатим амплитудама  $U_{ni}$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ) следећег облика

$$-v_{ni-1}U_{ni-1} + S_{ni}U_{ni} - v_{ni}U_{ni+1} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (5.2.16)$$

где су

$$S_{ni} = EA\alpha_n^2 - \rho A\omega_n^2[1 + (e_0 \tilde{a})^2\alpha_n^2] + k_i[1 + (e_0 \tilde{a})^2\alpha_n^2] + k_{i-1}[1 + (e_0 \tilde{a})^2\alpha_n^2], \quad (5.2.17a)$$

$$v_{ni} = k_i[1 + (e_0 \tilde{a})^2\alpha_n^2], \quad (5.2.17b)$$

$$v_{ni-1} = k_{i-1}[1 + (e_0 \tilde{a})^2\alpha_n^2]. \quad (5.2.17b)$$

### 5.2.3 Уклештени ланац

У овом делу рада, размотрићемо лонгитудиналне осцилације система нано-штапова тако да образују уклештен ланац, за два типа граничних услова (C-C) и (C-F). Уводимо претпоставку да су сви нано-штапови у систему једнаких материјалних и геометријских карактеристика међусобно повезани еластичним слојевима једнаке крутости  $k_0 = k_1 = \dots = k_{m-1} = k_m = k$ . Из система парцијалних диференцијалних једначина које описују уклештен ланац, једначине (5.2.7), добија се систем алгебарских једначина у матричној форми као

$$\begin{bmatrix} S_n & -v_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_n & S_n & -v_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & S_n & -v_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v_n & S_n & -v_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -v_n & S_n & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_n & S_n & -v_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_n & S_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ \dots \\ U_{ni-1} \\ U_{ni} \\ U_{ni+1} \\ \dots \\ U_{nm-2} \\ U_{nm-1} \\ U_{nm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.2.18)$$

где је

$$S_n = \alpha_n^2 EA - \rho A \omega_n^2 [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2] + 2k [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2], \quad (5.2.19a)$$

$$v_n = k [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2]. \quad (5.2.19b)$$

Сопствене фреквенције  $\omega_n$  одређује се из услова да је фреквентна детерминанта система алгебарских једначина (5.2.18) једнака нули. Нумеричко решење детерминанте показаће исправност коришћења аналитичке методе у добијању фреквенција система. За добијање аналитичког решења система алгебарских једначина (5.2.18), користиће се тригонометријска метода приказана у радовима [115 - 119].

На основу методологије приказане у раду Rašković [118] решење за амплитуде  $U_{n1}, U_{n2}, \dots, U_{nm}$  претпостављамо у тригонометријском облику

$$U_{ni} = V \cos(i \varphi_{cc}) + M \sin(i \varphi_{cc}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (5.2.20)$$

Заменом претпостављених решења једначине (5.2.20) у  $i$ -ту алгебарску једначину система (5.2.18), добијају се две тригонометријске једначине, у којим константе  $V$  и  $M$  нису истовремено једнаке нули

$$V \{-v_n \cos[(i-1)\varphi_{cc}] + S_n \cos(i\varphi_{cc}) - v_n \cos[(i+1)\varphi_{cc}]\} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, m-1, \quad (5.2.21a)$$

$$M \{-v_n \sin[(i-1)\varphi_{cc}] + S_n \sin(i\varphi_{cc}) - v_n \sin[(i+1)\varphi_{cc}]\} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, m-1. \quad (5.2.21b)$$

Након једноставних алгебарских трансформација, једначине (5.2.21) свODE се на

$$(S_n - 2v_n \cos \varphi_{cc}) V \cos(i \varphi_{cc}) = 0, \quad (5.2.22a)$$

$$(S_n - 2v_n \cos \varphi_{cc}) M \sin(i \varphi_{cc}) = 0. \quad (5.2.22b)$$

Једначине (5.2.22 а) и (5.2.22б), су задовољене када су  $V \neq 0$ ,  $M \neq 0$ ,  $\sin(i \varphi_{cc}) \neq 0$  и  $\cos(i \varphi_{cc}) \neq 0$ , па тада мора бити

$$S_n = 2v_n \cos \varphi_{cc}. \quad (5.2.23)$$

Из карактеристичне једначине једначине (5.2.23) можемо одредити непознате сопствене фреквенције осциловања за уклештен ланац. Вредност угла  $\varphi_{cc}$  одређујемо из прве и последње алгебарске једначине система (5.2.18). Ако заменимо изразе  $U_{1n} = V \cos \varphi_{cc} + M \sin \varphi_{cc}$  и  $U_{2n} = V \cos(2\varphi_{cc}) + M \sin(2\varphi_{cc})$  у прву једначину система (5.2.18), а изразе  $U_{m-1n} = V \cos[(m-1)\varphi_{cc}] + M \sin[(m-1)\varphi_{cc}]$  и  $U_{mn} = V \cos(m\varphi_{cc}) + M \sin(m\varphi_{cc})$  у

последњу једначину система (5.2.18), добија се следећи систем алгебарских једначина чији су коефицијенти тригонометријске функције

$$V[S_n \cos \varphi_{cc} - v_n \cos(2\varphi_{cc})] + M[S_n \sin \varphi_{cc} - v_n \sin(2\varphi_{cc})] = 0, \quad (5.2.24a)$$

$$V[S_n \cos(m\varphi_{cc}) - v_n \cos[(m-1)\varphi_{cc}]] + M[S_n \sin(m\varphi_{cc}) - v_n \sin[(m-1)\varphi_{cc}]] = 0. \quad (5.2.24b)$$

Нетривијално решење система (5.2.24) добићемо на основу Крамер-ових правила из услова да је детерминанта система једнака нули

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos[(m+1)\varphi_{cc}] & \sin[(m+1)\varphi_{cc}] \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sin[(m+1)\varphi_{cc}] = 0, \quad (5.2.25)$$

одакле одређујемо непознати угао  $\varphi_{cc,s}$  као

$$\varphi_{cc,s} = \frac{s\pi}{m+1}, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (5.2.26)$$

Ако заменимо угао  $\varphi_{cc,s}$  и једначине (5.2.19) у једначину (5.2.23), карактеристична једначина има следећи облик

$$EA\alpha_n^2 - \rho A \omega_n^2 [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2] + 2v_n(1 - \cos \varphi_{cc,s}) = 0. \quad (5.2.27)$$

Сада можемо из једначине (5.2.27) добити аналитичко решење за сопствене фреквенције за систем нано-штапова повезаних тако да образују уклештен ланац

$$\omega_{ncc,s} = \sqrt{\frac{EA\alpha_n^2 + 2v_n \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right)\right]}{\rho A [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2]}}, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (5.2.28a)$$

или у бездимензионој форми

$$\Omega_{ncc,s} = \sqrt{\frac{(n\pi)^2 + 2K[1 + \xi^2(n\pi)^2] \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right)\right]}{[1 + \xi^2(n\pi)^2]}}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.2.28b)$$

где су

$$\Omega_{ncc,s} = \omega_{ncc,s} L \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad K = \frac{kL^2}{EA}, \quad \xi = \frac{(e_0 \tilde{a})}{L},$$

бездимензиони параметри.

## 5.2.4 Слободни ланац

Код слободног ланца крутости првог и последњег еластичног слоја су једнаке нули  $k_0 = k_m = 0$ , тако да нема спрезања првог и последњег нано-штапа са непокретном подлогом. Такође, претпостављамо да сви нано-штапови у систему имају једнаке материјалне и геометријске карактеристике и повезани су међусобно еластичним слојевима. Ако заменимо релацију (5.2.13) у систем парцијалних диференцијалних једначина за слободни ланац (5.2.8), добија се систем алгебарских једначина написан у матричној форми,



$$\begin{bmatrix} S_n - v_n & -v_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_n & S_n & -v_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & S_n & -v_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v_n & S_n & -v_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -v_n & S_n & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_n & S_n & -v_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_n & S_n - v_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ \dots \\ U_{ni-1} \\ U_{ni} \\ U_{ni+1} \\ \dots \\ U_{nm-2} \\ U_{nm-1} \\ U_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2.29)$$

где су величине  $S_n$  и  $v_n$  дате једначинама (5.2.19).

Применом истог поступка као у случају укљештеног ланца, добија се карактеристична једначина за случај слободног ланца као,

$$S_n = 2v_n \cos \varphi_{fc}, \quad (5.2.30)$$

где је  $\varphi_{fc}$  непознати угао који се одређује из услова да претпостављено решење (5.2.20) мора да задовољи прву и последњу једначину система (5.2.29). Ако заменимо  $U_{1n} = V \cos \varphi_{fc} + M \sin \varphi_{fc}$  и  $U_{2n} = V \cos(2\varphi_{fc}) + M \sin(2\varphi_{fc})$  у прву једначину система и  $U_{m-1n} = V \cos[(m-1)\varphi_{fc}] + M \sin[(m-1)\varphi_{fc}]$  и  $U_{m-1n} = V \cos(m\varphi_{fc}) + M \sin(m\varphi_{fc})$  у последњу једначину система (5.2.29), добија се систем алгебарских једначина чији су коефицијенти тригонометријске функције

$$V[(S_n - v_n) \cos \varphi_{fc} - v_n \cos(2\varphi_{fc})] + M[(S_n - v_n) \sin \varphi_{fc} - v_n \sin(2\varphi_{fc})] = 0, \quad (5.2.31)$$

$$\begin{aligned} & V[(S_n - v_n) \cos(m\varphi_{fc}) - v_n \cos[(m-1)\varphi_{fc}]] \\ & + M[(S_n - v_n) \sin(m\varphi_{fc}) - v_n \sin[(m-1)\varphi_{fc}]] = 0. \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

Сада из система једначина (5.2.31) и (5.2.32), можемо добити нетривијално решење за константе  $V$  и  $M$ , на основу Крамер-овог правила, из услова да је детерминанта система једнака нули

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos \varphi_{fc} & -\sin \varphi_{fc} \\ \cos[(m+1)\varphi_{fc}] - \cos(m\varphi_{fc}) & \sin[(m+1)\varphi_{fc}] - \sin(m\varphi_{fc}) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sin(m\varphi_{fc}) = 0, \quad (5.2.33)$$

тако да непознати угао  $\varphi_{fc,s}$  има следеће вредности

$$\varphi_{fc,s} = \frac{s\pi}{m}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1. \quad (5.2.34)$$

Ако заменимо добијене вредности за  $\varphi_{fc,s}$  и једначине (5.2.19) у једначину (5.2.30), карактеристична једначина гласи

$$EA\alpha_n^2 - \rho A \omega_n^2 [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2] + 2v_n(1 - \cos \varphi_{fc,s}) = 0. \quad (5.2.35)$$

Сада можемо из једначине (5.2.35), да одредимо аналитичко решење за сопствене фреквенције за систем нано-штапова повезаних тако да образују слободни ланац,

$$\omega_{nfc,s} = \sqrt{\frac{EA\alpha_n^2 + 2v_n \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m}\right)\right]}{\rho A [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2]}}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1. \quad (5.2.36a)$$

или у бездимензионој форми

$$\Omega_{nfc,s} = \sqrt{\frac{(n\pi)^2 + 2K[1 + \xi^2(n\pi)^2] \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m}\right)\right]}{[1 + \xi^2(n\pi)^2]}}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.2.36b)$$

где су

$$\Omega_{nfc,s} = \omega_{nfc,s} L \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad K = \frac{kL^2}{EA}, \quad \xi = \frac{(e_0 \tilde{a})}{L},$$

бездимензиони параметри.

### 5.2.5 Асимптотска анализа

Претпостављајући да број нано-штапова тежи бесконачно, у једначину (5.2.28а) или једначину (5.2.36а) уносимо  $m \rightarrow \infty$ , тако да се добија асимптотска вредност сопствене фреквенције система спрегнутих нано-штапова

$$\omega_{n,m \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{EA\alpha_n^2}{\rho A [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2]}}. \quad (5.2.37)$$

Једначина (5.2.37) за  $n = 1$  представља најнижу сопствену фреквенцију када број нано-штапова  $m \rightarrow \infty$  тежи бесконачно, и једнака је за оба типа ланчаних система. Сада размотримо случај када и број мода  $n$  и број нано-штапова  $m$  теже бесконачно, тј. ако заменимо  $n \rightarrow \infty$  и  $m \rightarrow \infty$  у једначину (5.2.37), добија се вредност сопствене фреквенције у облику

$$\omega_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{EA}{\rho A (e_0 \tilde{a})^2}}. \quad (5.2.38)$$

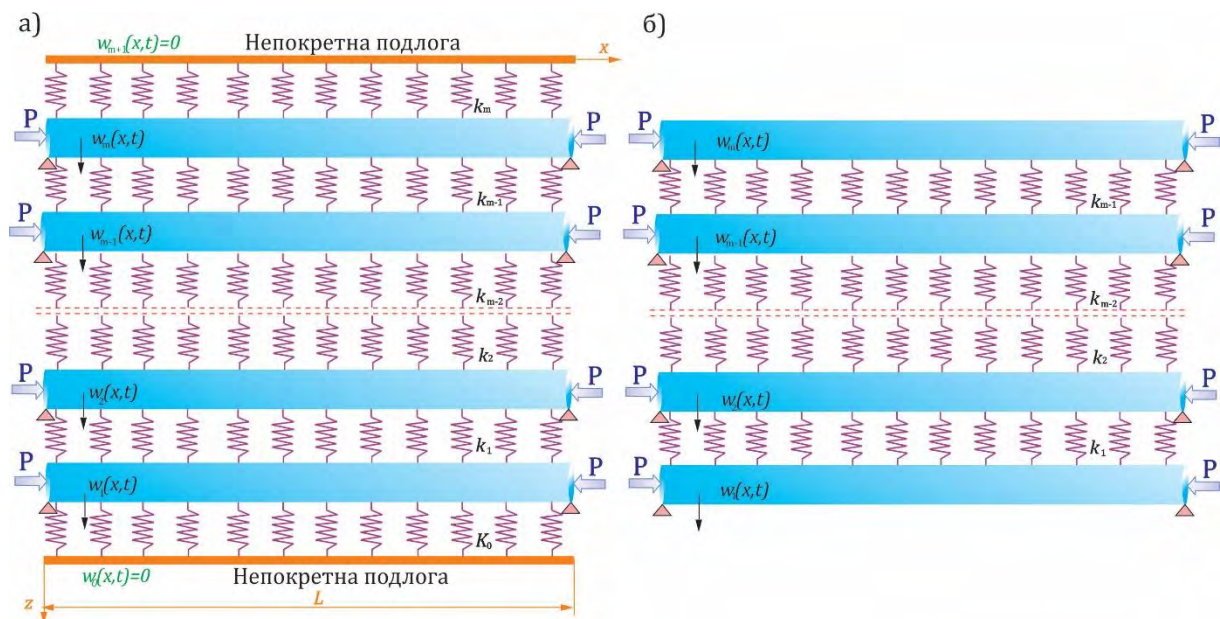
Из једначине (5.2.38) можемо закључити да вредност сопствене фреквенције не зависи од граничних услова ослањања као и од типа ланца.

## 5.3 Трансверзалне осцилације и стабилност система спрегнутих нано-греда

У овом делу рада анализираћемо трансверзалне осцилације и стабилности система нано-греда које су повезане еластичним медијумом. Претпостављамо да се систем састоји од  $m$  паралелних нано-греда са једнаким геометријским и материјалним особинама, које су међусобно повезане Winkler-овим еластичним слојем. Све нано-греде су просто ослоњене и спрегнуте у два типа ланца, уклештени и слободни, Сл. 5.3.1а и Сл.5.3.1б. Математички модел слободних трансверзалних осцилација формиран је применом Eringen-ове нелокалне теорије еластичности и Euler-Bernoulli-јевог типа греде. Аналитичка решења за сопствене фреквенције и критичну силу извијања система од  $m$  спрегнутих нано-греда, одређена су применом методе раздвајања променљивих и тригонометријске методе. Такође, добијене су и асимптотске вредности сопствених фреквенција као и критична сила извијања када број нано-греда тежи бесконачно.

### 5.3.1 Диференцијалне једначине кретања система

Размотримо систем аксијално притиснутих нано-греда које су међусобно повезане еластичним слојевима Winkler-овог типа, као што је приказано на Сл. 5.3.1. Нано-греде су означене по следећем редоследу, нано-греда 1, нано-греда 2, итд. до  $m$ -те нано-греде. Све нано-греде су сачињене од истог материјала, модула еластичности  $E$ , густине масе  $\rho$  и истог су попречног пресека, површине  $A$  и момента инерције  $I$ . Све греде у систему су просто ослоњене и аксијално оптерећене притисном силом  $P$ . Трансверзално померање  $i$ -те нано-греде је означено са  $w_i(x, t)$  где је  $i = 1, 2, 3 \dots m$ . Размотримо два типа спрезања нано-греда у систему. У првом случају разматрамо систем типа уклештеног ланца, где су прва и последња нано-греда повезане са непокретном основом преко еластичних слојева крутости  $k_0$  и  $k_m$ , Сл. 5.3.1а. У другом случају разматрамо систем слободног ланца, где прва и последња нано-греда у систему нису спрегнуте са непокретном подлогом, тј. крутости  $k_0$  и  $k_m$  су једнаке нули, Сл. 5.3.1б. Остале нано-греде у систему су спрегнуте преко еластичних Winkler-ових слојева крутости  $k_1 = k_2 = \dots = k_i = \dots = k_{m-1} = k$ .

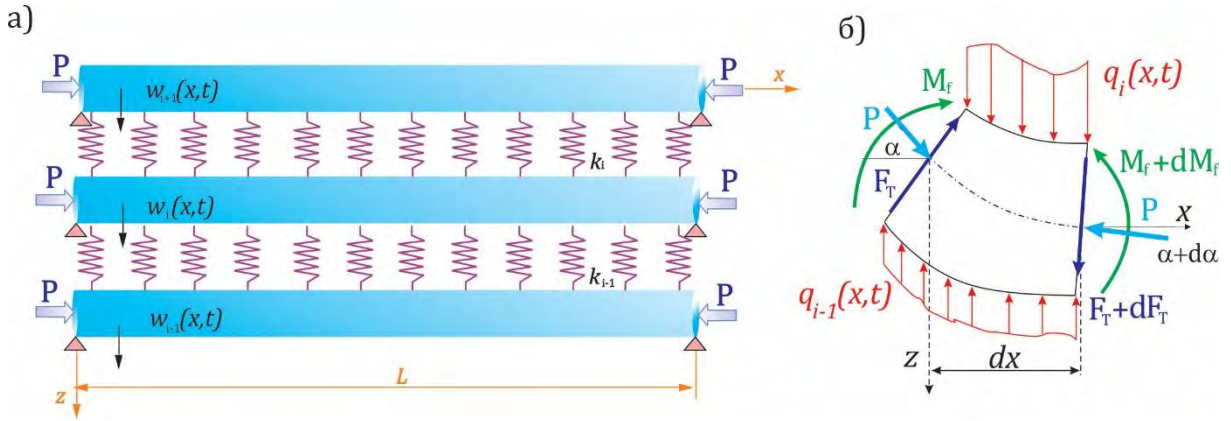


Сл. 5.3.1 Систем од  $m$  нано-греда које су повезане еластичним слојем Winkler-овог типа

а) Уклештен ланац  $k_0 \neq 0$ ,  $k_m \neq 0$ , б) слободани ланац  $k_0 = k_m = 0$ .

Да би смо написали диференцијалне једначине кретања система размотримо силе које делују на елементарни део  $i$ -те нано-греде, приказане на слици Сл. 5.3.2. Попречни пресек је константан дуж осе  $x$ . Можемо да запазимо да трансверзална сила  $F_T$  и момент савијања  $M_f$  делују на левој страни елементарног дела, и променљиве су дуж осе  $x$ . На десној страни

елементарног дела делује смичућа сила  $F_T + dF_T$  и момент савијања  $M_f + dM_f$ . Трансверзалне спољашње силе  $q_i(x, t)$  и  $q_{i-1}(x, t)$  потичу од еластичних веза између нано-греда.



Сл. 5.3.2 а)  $i$ -та нелокална Euler–Bernoulli-јева нано-греда оптерећена аксијално силом  $P$  и спољашњом силом  $q_i(x, t)$  и  $q_{i-1}(x, t)$ ; б) диференцијални елемент  $i$ -те нано-греде дужине  $dx$

На основу d'Alembert-овог принципа, једначина кретања елементарног дела  $i$ -те нано-греде гласи

$$\sum F_{zi} = dm \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \Rightarrow -\frac{\partial F_T}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - q_i + q_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (5.3.1a)$$

$$\sum M_{yi} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_T = \frac{\partial M_f}{\partial x}, \quad (5.3.1b)$$

у којима  $M_f$  и  $F_T$  напонске резултујуће величине дефинисане у Глави 2,

$$(F_T, M_f) = \int_A (\sigma_{xx}, z\sigma_{xx}) dA, \quad (5.3.2)$$

а спољашње оптерећење које потиче од Winkler-овог еластичног слоја, одређено је као

$$q_i = k_i(w_{i+1} - w_i), \quad q_{i-1} = k_{i-1}(w_i - w_{i-1}). \quad (5.3.3)$$

Ако нелокалну конститутивну релацију једначина (1.3.8.a) помножимо са  $z dA$  и интегралимо по површини попречног пресека нано-греде  $A$ , узимајући у обзир релацију (5.3.2), добијамо

$$M_f - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}, \quad (5.3.4a)$$

где је  $I = I_y = \int_A z^2 dA$  аксијални момент инерције површине попречног пресека за  $y$ -осу.

Претпостављамо да је аксијално померање  $u$  мало у односу на трансверзално померање  $w$  тако да га можемо занемарити. Заменимо ли (5.3.1b) у (5.3.1a) добијамо релацију из које одређујемо  $\partial^2 M_f / \partial x^2$  као

$$\frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - q_i + q_{i-1}. \quad (5.3.4b)$$

Затим, ако диференцирамо релацију (5.3.4a) два пута по  $x$  добијамо

$$\frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^4 M_f}{\partial x^4} = -EI \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4}. \quad (5.3.4в)$$

Када заменимо релације (5.3.4а) и (5.3.4б) у (5.3.4в), добијамо парцијалну диференцијалну једначину кретања нано-греде облика

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - k_i(w_{i+1} - w_i) + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) + EI \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \\ & = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - k_i(w_{i+1} - w_i) + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) \right], \\ & \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.3.4г)$$

Из једначине (5.3.4г), можемо написати једначине кретања за систем повезан тако да образује уклештени ланац (Сл. 5.3.1а)

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + 2kw_1 - kw_2 + EI \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \\ & = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + 2kw_1 - kw_2 \right], \quad i = 1, \end{aligned} \quad (5.3.5а)$$

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - k_i(w_{i+1} - w_i) + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) + EI \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \\ & = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - k_i(w_{i+1} - w_i) + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) \right], \\ & \qquad \qquad \qquad i = 2, 3, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad (5.3.5б)$$

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} + 2kw_m - kw_{m-1} + EI \frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} \\ & = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} + 2kw_m - kw_{m-1} \right], \quad i = m, \end{aligned} \quad (5.3.5в)$$

и слободни ланац (Сл. 5.3.1б),

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + kw_1 - kw_2 + EI \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} = \\ & (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + kw_1 - kw_2 \right], \quad i = 1, \end{aligned} \quad (5.3.6а)$$

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - k_i(w_{i+1} - w_i) + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) + EI \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \\ & = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - k_i(w_{i+1} - w_i) + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) \right], \\ & \qquad \qquad \qquad i = 2, 3, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad (5.3.6б)$$

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} + kw_m - kw_{m-1} + EI \frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} \\ & = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} + kw_m - kw_{m-1} \right], \quad i = m, \end{aligned} \quad (5.3.6в)$$

### 5.3.2 Аналитичко решење

Математичка формулација граничних услова за просто ослоњене нелокалне Euler-Bernoulli-јеве нано-греде дужина  $L$ , могу се писати у следећој форми

$$w_i(0, t) = w_i(L, t) = 0, \quad M_{fi}(0, t) = M_{fi}(L, t) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (5.3.7a)$$

где је нелокални момент савијања  $i$ -те нано-греде дефинисан као

$$M_{fi}(x, t) = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - q_i + q_{i-1} \right) - EI \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}. \quad (5.3.7b)$$

Диференцијалне једначине кретања (5.3.4) чији су гранични услови (5.3.7) могу се решити, користећи методу раздвајања променљивих тако да решења претпостављамо у следећем облику

$$w_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{in} \sin \alpha_n x e^{i\omega_n t}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (5.3.8)$$

где је  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $W_{in}$  су амплитуде, а  $\omega_n, n = 1, 2, 3, \dots$  су сопствене фреквенције осциловања система. Ако заменимо претпостављено решење (5.3.8) у једначину (5.3.4), добија се систем од  $m$  алгебарских једначина по непознатим амплитудама  $W_{in}$

$$-v_{i-1n} W_{i-1n} + S_{in} W_{in} - v_{in} W_{i+1n} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (5.3.9a)$$

где су

$$S_{in} = EI \alpha_n^4 - \rho A \omega_n^2 [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2] - \alpha_n^2 P [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2] + v_{in} + v_{i-1n}, \quad (5.3.9b)$$

$$v_{in} = k_i [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2], \quad (5.3.9b)$$

$$v_{i-1n} = k_{i-1} [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2]. \quad (5.3.9c)$$

### 5.3.3 Укљештен ланац

Ако претпоставимо да су све нано-греде у систему истих материјалних и геометријских особина и повезане еластичним слојевима једнаке крутости, систем парцијалних диференцијалних једначина (5.3.5) може се свести на систем алгебарских једначина заменом претпостављеног решења (5.3.8). Добијени систем алгебарских једначина записаћемо у матричном облику, као

$$\begin{bmatrix} S_n & -v_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -v_n & S_n & -v_n & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_n & -v_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -v_n & S_n & -v_n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -v_n & S_n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_n & -v_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -v_n & S_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{1n} \\ W_{2n} \\ W_{3n} \\ \dots \\ W_{i-1n} \\ W_{in} \\ W_{i+1n} \\ \dots \\ W_{m-2n} \\ W_{m-1n} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.3.10)$$

где су

$$S_n = EI\alpha_n^4 - \rho A\omega_n^2[1 + (e_0\tilde{a})^2\alpha_n^2] - \alpha_n^2 P[1 + (e_0\tilde{a})^2\alpha_n^2] + 2v_n, \quad (5.3.11a)$$

$$v_n = k[1 + (e_0\tilde{a})^2\alpha_n^2]. \quad (5.3.11b)$$

Сопствена фреквенција и критична сила извијања могу се добити на два начина из система алгебарских једначина (5.3.10); (1) нумеричким решавањем детерминанте система (5.3.10), (2) аналитичком методом која је познатија под именом тригонометријска метода. Применом поступка који је приказан у претходној глави, добиће се аналитичке формуле за сопствене фреквенције и критичну силу извијања. Треба нагласити да је аналитичко решење могуће једино у случају када су све нано-греде у систему једнаких материјалних и геометријских карактеристика. Решење система алгебарских једначина (5.3.10) претпостављамо у облику

$$W_{in} = V\cos(i\varphi_{cc}) + M\sin(i\varphi_{cc}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (5.3.12)$$

Ако заменимо претпостављено решење (5.3.12) у  $i$ -ту алгебарску једначину система (5.3.10) добићемо две алгебарске једначине по непознатим  $V$  и  $M$ . Већ описаним поступком у глави 4 добијамо фреквентну једначину у облику

$$S_n = 2v_n\cos\varphi_{cc}. \quad (5.3.13)$$

Из једначине (5.3.13) могуће је одредити сопствене фреквенције и силе извијања у аналитичком облику, али је пре тога потребно одредити вредност непознатог угла  $\varphi_{cc}$ . Да би смо одредили вредности угла  $\varphi_{cc}$ , применићемо већ приказану методологију, када  $W_{1n} = V\cos\varphi_{cc} + M\sin\varphi_{cc}$  и  $W_{2n} = V\cos(2\varphi_{cc}) + M\sin(2\varphi_{cc})$  заменимо у прву, а  $W_{m-1n} = V\cos[(m-1)\varphi_{cc}] + M\sin[(m-1)\varphi_{cc}]$  и  $W_{mn} = V\cos(m\varphi_{cc}) + M\sin(m\varphi_{cc})$  заменимо у последњу једначину (5.3.10), тако да добијамо следећу вредност непознатог угла

$$\varphi_{cc,s} = \frac{s\pi}{m+1}, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (5.3.14)$$

Заменимо ли  $\varphi_{cc,s}$ ,  $S_n$  и  $v_n$  из једначине (5.3.11) у (5.3.13), добија се следећа карактеристична једначина

$$EI\alpha_n^4 - \rho A\omega_n^2[1 + (e_0\tilde{a})^2\alpha_n^2] - \alpha_n^2 P[1 + (e_0\tilde{a})^2\alpha_n^2] + 2v_n(1 - \cos\varphi_{cc,s}) = 0. \quad (5.3.15)$$

У случају када је  $P = 0$ , из једначине (5.3.15) одређујемо сопствене фреквенције осциловања

$$\omega_{ncc,s} = \sqrt{\frac{EI\alpha_n^4 + 2v_n \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right)\right]}{\rho A[1 + (e_0\tilde{a})^2\alpha_n^2]}}, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (5.3.16a)$$

или у бездимензионој форми

$$\Omega_{ncc,s} = \sqrt{\frac{(n\pi)^4 + 2K[1 + \xi^2(n\pi)^2] \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right)\right]}{[1 + \xi^2(n\pi)^2]}}, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (5.3.16b)$$

где су

$$\Omega_{ncc,s} = \omega_{ncc,s} L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \quad K = \frac{kL^4}{EI}, \quad \xi = \frac{(e_0 \tilde{a})}{L},$$

бездимензиони параметри.

Када аксијална притисна сила  $P$  достигне одређену критичну вредност, систем спрегнутих нано-греда постаје нестабилан, у том случају фреквенција осциловања  $\omega_n \rightarrow 0$  па наступа извијање система. Ако у једначину (5.3.15) заменимо  $\omega_n = 0$ , одређујемо силу извијања

$$P_{ncc,s}^b = \frac{EI\alpha_n^4 + 2v_n \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right)\right]}{\alpha_n^2 [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2]}, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (5.3.17a)$$

или у бездимензионој форми

$$N_{cc,s}^b = \frac{(n\pi)^4 + 2K[1 + \xi^2(n\pi)^2] \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right)\right]}{(n\pi)^2 [1 + \xi^2(n\pi)^2]}, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (5.3.17б)$$

где су

$$N_{cc,s}^b = \frac{P_{Bcc,s}^b L^2}{EI}, \quad K = \frac{kL^4}{EI}, \quad \xi = \frac{(e_0 \tilde{a})}{L},$$

бездимензиони параметри.

Из једначине (5.3.17a), можемо добити критичну силу извијања која одговара минималној вредности силе извијања за  $n = 1$ ,

$$P_{1cc,s}^b = \min_{s=1,2,3,\dots,m} \frac{EI\alpha_1^4 + 2v_1 \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right)\right]}{\alpha_1^2 [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_1^2]}, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (5.3.17в)$$

или у бездимензионој форми

$$N_{1cc,s}^b = \frac{\pi^4 + 2K[1 + \xi^2\pi^2] \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right)\right]}{\pi^2 [1 + \xi^2\pi^2]}, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (5.3.17г)$$

### 5.3.4 Слободни ланац

Сада, размотримо систем нано-греда које су тако повезане да образују слободни ланац, који се од претходног случаја разликује само у начину везе прве и последње нано-греде са непокретном основом. У овом случају крутости  $k_0$  и  $k_m$  су једнаке нули. Такође и овде претпостављамо да су све нано-греде једнаке и повезане слојевима једнаке крутости. Систем парцијалних диференцијалних једначина (5.3.6) применом претпостављеног решења (5.3.8) своди се на систем алгебарских једначина, написан у матричном облику



$$\begin{bmatrix} (S_n - v_n) & -v_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -v_n & S_n & -v_n & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_n & -v_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -v_n & S_n & -v_n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -v_n & S_n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_n & -v_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -v_n & (S_n - v_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_{1n} \\ W_{2n} \\ W_{3n} \\ \dots \\ W_{i-1n} \\ W_{in} \\ W_{i+1n} \\ \dots \\ W_{m-2n} \\ W_{m-1n} \\ W_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.3.18)$$

где су релације  $S_n$  и  $v_n$  дефинисане у релацији (5.3.11).

На основу већ описаног поступка, претпостављена решења за амплитуде  $W_{in}$  (5.3.12) замењујемо у  $i$ -ту алгебарску једначину система (5.3.18), тако да се добија фреквентна једначина у следећем облику

$$S_n = 2v_n \cos \varphi_{fc}, \quad (5.3.19)$$

где је  $\varphi_{fc}$  непознати угао који одређујемо из услова да претпостављено решење (5.3.12) задовољава прву и последњу једначину система (5.3.18). Непознати угао  $\varphi_{fc,s}$  има следећу вредност

$$\varphi_{fc,s} = \frac{s\pi}{m}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1. \quad (5.3.20)$$

Заменимо ли вредност угла  $\varphi_{fc,s}$  и једначину (5.3.11) у једначину (5.3.19), карактеристична једначина добија следећи облик

$$EI\alpha_n^4 - \rho A \omega_n^2 [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2] - \alpha_n^2 P [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2] + 2v_n (1 - \cos \varphi_{fc,s}) = 0. \quad (5.3.21)$$

У случају када је  $P = 0$ , из једначине (5.3.21) одређујемо сопствене фреквенције осциловања система

$$\omega_{nfc,s} = \sqrt{\frac{EI\alpha_n^4 + 2v_n \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m}\right)\right]}{\rho A [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2]}}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.3.22a)$$

или у бездимензионој форми

$$\Omega_{nfc,s} = \sqrt{\frac{(n\pi)^4 + 2K [1 + \xi^2 (n\pi)^2] \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m}\right)\right]}{[1 + \xi^2 (n\pi)^2]}}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.3.22b)$$

где су

$$\Omega_{nfc,s} = \omega_{nfc,s} L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \quad K = \frac{kL^4}{EI}, \quad \xi = \frac{(e_0 \tilde{a})}{L},$$

бездимензиони параметри.

Заменом  $\omega_n = 0$  у једначину (5.3.21) добија се вредност силе извијања у случају слободног ланца

$$P_{nfc,s}^b = \frac{EI\alpha_n^4 + 2v_n \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m}\right)\right]}{\alpha_n^2 [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2]}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.3.23a)$$

или у бездимензионој форми

$$N_{fc,s}^b = \frac{(n\pi)^4 + 2K[1 + \xi^2(n\pi)^2] \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m}\right)\right]}{(n\pi)^2[1 + \xi^2(n\pi)^2]}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.3.23б)$$

где су

$$N_{fc,s}^b = \frac{F_{fc,s}^b L^2}{EI}, \quad K = \frac{kL^4}{EI}, \quad \xi = \frac{(e_0 \tilde{a})}{L},$$

бездимензиони параметри.

Из једначине (5.3.23а), када је  $n = 1$  одређујемо критичну вредност силе извијања као минималну вредност аксијалног оптерећења

$$P_{1fc,s}^b = \min_{s=0,1,\dots,m-1} \frac{EI\alpha_1^4 + 2v_1 \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m}\right)\right]}{\alpha_1^2 [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_1^2]}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.3.23в)$$

или у бездимензионој форми

$$N_{1fc,s}^b = \frac{\pi^4 + 2K[1 + \xi^2\pi^2] \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m}\right)\right]}{\pi^2 [1 + \xi^2\pi^2]}, \quad s = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.3.23г)$$

### 5.3.5 Асимптотска анализа

У случају када број нано-греда тежи бесконачно, тј. заменимо ли  $m \rightarrow \infty$  у једначине (5.3.16б) и (5.3.17б) или једначине (5.3.22б) и (5.3.23б), добијамо асимптотску вредност сопствене фреквенције и критична сила извијања у бездимензионој форми

$$\bar{\Omega}_{n,m \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{(n\pi)^4}{[1 + \xi^2(n\pi)^2]}}, \quad \bar{N}_{n,m \rightarrow \infty}^b = \frac{(n\pi)^2}{[1 + \xi^2(n\pi)^2]}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.3.24)$$

Асимптотске вредности приказане једначинама (5.3.24) представљају најниже вредности сопствене фреквенције и критичне силе извијања система спрегнутих нано-греда када број нано-греда тежи бесконачно. Такође, ове вредности не зависе од услова везе, тј. типа ланца. Са физичке тачке гледишта, сопствена фреквенција и критична сила извијања из једначине (5.3.24) представљају сопствену фреквенцију и критичну силу извијања једне просто ослоњене нано-греде.

## 5.4. Трансверзалне осцилације и стабилност система спрегнутих нано-плоча

У овом делу рада анализираћемо слободне трансверзалне осцилације и стабилност система спрегнутих нано-плоча, које су уметнуте у еластични медијум. Претпостављамо да се систем састоји од  $m$  хомогених изотропних просто-ослоњених нано-плоча које су паралелно распоређене и међусобно повезане еластичним слојевима Winkler-овог типа. Применом

d'Alembert-овог принципа, нелокалне Eringen-ове теорије еластичности и Kirchhoff-ове теорије плоче изведен је систем парцијалних диференцијалних једначина које описују кретање анализираног механичког система. Такође, разматрана су два начина везе нано-плоча у систему, тј. уклештени и слободни ланац. Применом тригонометријске аналитичке методе добијене су сопствене фреквенције и критична сила извијања у затвореном облику за оба типа спрезања система. На крају, изведене су асимптотске вредности за сопствене фреквенције и критичну силу извијања система спрегнутих нано-плоча, када број нано-плоча тежи бесконачно.

#### 5.4.1 Диференцијалне једначине кретања система

Размотримо сада систем од  $m$  изотропних нано-плоча између којих је уметнут еластични медијум Сл.5.4.1. Све нано-плоче у систему имају једнаке материјалне и геометријске карактеристике, где је  $E$  - модул еластичности,  $\nu$  - Poisson-ов коефицијент,  $G$  - модул смицања,  $\rho$  - густина,  $h$  - дебљина,  $a$  - дужина и  $b$  - ширина плоче. Еластични медијум који се налази између нано-плоча се моделира као континуално расподељене опруге тј. Winkler-ов еластични слој. Свака нано-плоча је оптерећења притисним силама у својој равни  $N_x$  и  $N_y$  у правцима  $x$  и  $y$  оса Сл. 5.4.1.а. Трансверзално померање  $i$  - те нано-плоче означимо  $w_i(x, y, t)$ . Претпостављамо да све нано-плоче имају слободно ослоњене ивице, а начин спрезања система плоча извршен је на два начина. У првом случају систем је повезан као уклештени ланац, где су прва и последња нано-плоча повезане са непокретном подлогом преко еластичних слојева крутости  $k_0$  и  $k_m$ , Сл. 5.4.1б. У другом случају разматрамо слободни ланац, где прва и последња нано-плоча, нису повезане са непокретном подлогом, тј. крутости  $k_0$  и  $k_m$  су једнаке нули, Сл. 5.4.1в. Остале нано-плоче спрегнуте су у систему преко еластичних Winkler-ових слојева крутости  $k_0 = k_1 = k_2 = \dots = k_i = \dots = k_{m-1} = k_m = k$ .

Применом d'Alembert-овог принципа, одређујемо једначине кретања елементарног дела  $i$ -те нано-плоче у следећем облику

$$\sum F_{zi} = dm \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \Rightarrow q + N_{xx} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}, \quad (5.4.1a)$$

$$\sum M_{yi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x, \quad (5.4.1б)$$

$$\sum M_{xi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y. \quad (5.4.1в)$$

Ако заменимо релације (5.4.1б) и (5.4.1в) у прву једначину кретања (5.4.1а), добија се основна диференцијална једначина кретања  $i$ -те нано-плоче

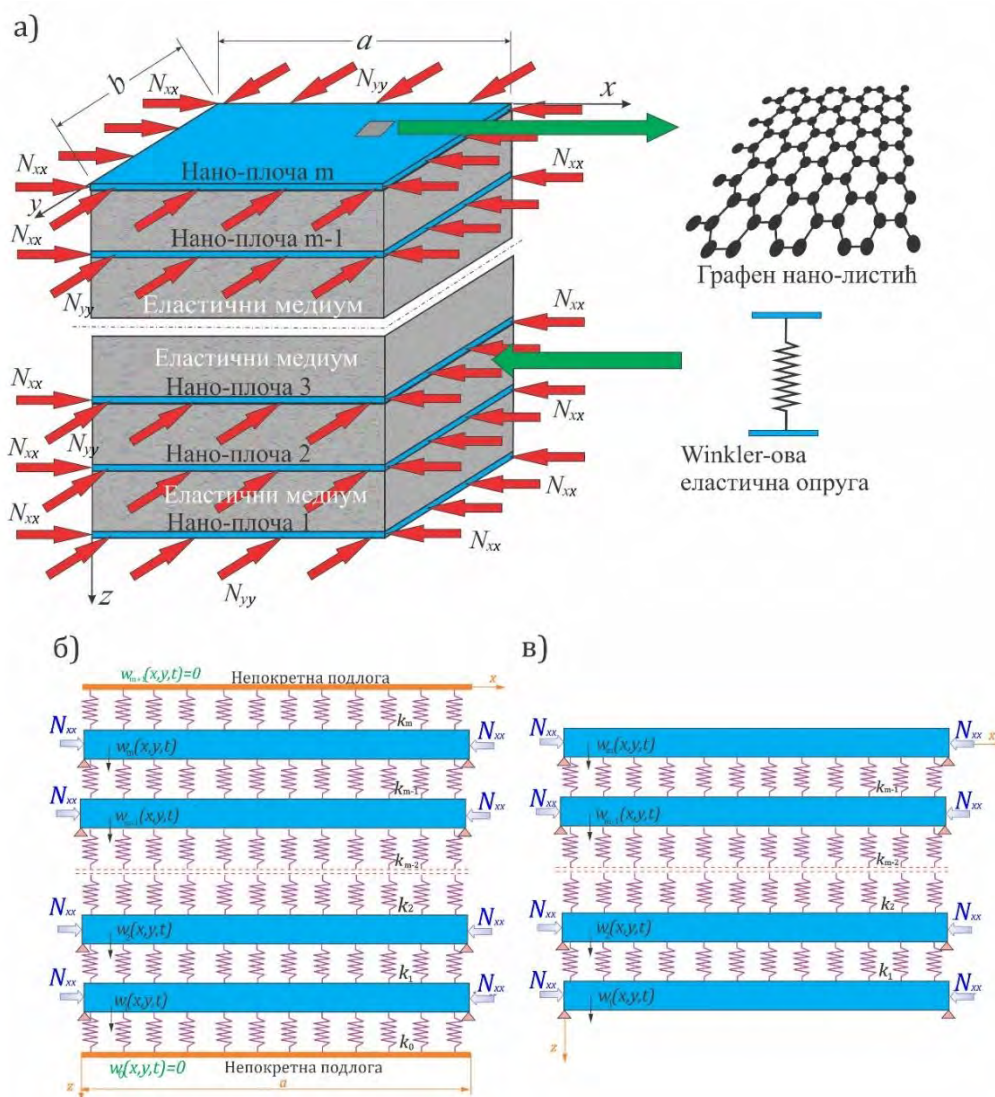
$$q - N_{xx} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - N_{yy} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = \rho h \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}, \quad (5.4.2)$$

где су  $M_{xx}$  и  $M_{yy}$  - моменти савијања, а  $M_{xy}$  - је момент увијања, одређени следећим релацијама

$$(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) z dz. \quad (5.4.3)$$

Спољашње оптерећење Winkler-овог еластичног медијума је дато као

$$q = F_{ki} - F_{ki-1} = k_i(w_{i+1} - w_i) - k_{i-1}(w_i - w_{i-1}). \quad (5.4.4)$$



Сл. 5.4.1. Систем спрегнутих нано-плоча: а) шематски дијаграм система графенских нано-листића уметнут у Winkler-ов еластични медијум; б) уклештени и в) слободани ланац.

Заменом једначина (5.4.3) у нелокалну конститутивну релацију (1.3.8.в), дефинисану у Глави 1 са одговарајућим пољем померања за Kirchoff-ову плочу релације (2.4.1), и применом поступка описаним у Глави 2 добија се

$$[1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta] M_{xx} = -D \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right), \quad (5.4.5a)$$

$$[1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta] M_{yy} = -D \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right), \quad (5.4.5b)$$

$$[1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta] M_{xy} = -D(1 - \vartheta) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y}, \quad (5.4.5в)$$

где је  $D = Eh^3/[12(1 - \vartheta^2)]$  савојна крутост нано-плоче.

Заменимо ли  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  и  $M_{xy}$  из једначине (5.4.5) у једначину (5.4.2) добија се парцијална диференцијална једначина кретања система следећег облика

$$\begin{aligned} & \rho h \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + k_i(w_i - w_{i+1}) + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) \\ & + D \left( \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + N_{xx} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \\ = & (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \rho h \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + k_i(w_i - w_{i+1}) + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) + N_{xx} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right) \\ & + (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \rho h \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + k_i(w_i - w_{i+1}) + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) + N_{xx} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right), \\ & i = 1, 2, 3, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Претпостављамо да су све плоче у систему правоугаоне и да су све ивице плоча просто ослоњене, математичка формулација граничних услови система може се писати у следећем облику

$$w_i(x, 0, t) = w_i(x, b, t) = 0, \quad w_i(0, y, t) = w_i(a, y, t) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (5.4.7)$$

$$M_{xxi}(0, y, t) = M_{xxi}(a, y, t) = 0, \quad M_{yyi}(x, 0, t) = M_{yyi}(x, b, t) = 0. \quad (5.4.8)$$

## 5.4.2 Аналитичко решење

Аналитичко решење система једначина које описују кретање система спрегнутих нано-плоча са просто ослоњеним ивицама, претпостављамо у облику двоструког тригонометријског реда, тј.уводимо Navier-ово решење

$$w_i(x, y, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{irn} \sin(\alpha_r x) \sin(\beta_n y) e^{j\omega_{rn} t}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (5.4.9)$$

где је  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\alpha_r = \frac{r\pi}{a}$ ;  $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$ ;  $r, n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $W_{irn}$  су амплитуде, а  $\omega_{rn}$  су сопствене фреквенције система. Ако заменимо претпостављено решење (5.4.9) у једначине кретања (5.4.6), добија се систем од  $m$  алгебарских једначина по непознатим амплитудама

$$-v_{i-1rn} W_{i-1rn} + S_{irn} W_{irn} - v_{irn} W_{i+1rn} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (5.4.10)$$

где су

$$S_{irn} = -\rho h \omega_{rn}^2 \eta_{rn} + D(\alpha_r^2 + \beta_n^2)^2 - N_{xx}(\alpha_r^2 + \delta \beta_n^2) \eta_{rn} + v_{irn} + v_{i-1rn}, \quad (5.4.11a)$$

$$v_{irn} = k_i \eta_{rn}, \quad (5.4.11b)$$

$$v_{i-1rn} = k_{i-1} \eta_{rn}, \quad (5.4.11в)$$

$$\eta_{rn} = 1 + (e_0 \tilde{a})^2 (\alpha_r^2 + \beta_n^2), \quad (5.4.11г)$$

а  $\delta = N_{yy}/N_{xx}$  дефинише однос између притисних сила које делују у равни сваке нано-плоче  $N_{xx}$  и  $N_{yy}$ .

### 5.4.3 Укљештени ланац

Размотримо најпре систем од  $m$  једнаких нано-плоча повезаних тако да образују укљештени ланац, где су прва и последња нано-плоча повезане преко еластичног слоја са непокретном подлогом, тако да је

$$k_0 \neq 0, k_m \neq 0 \quad \text{и} \quad W_{0rn} = W_{m+1rn} = 0. \quad (5.4.12)$$

Ако заменимо релације (5.4.12) у једначину (5.4.10) претпостављајући да су крутости еластичних слојева између плоча једнаке,  $k_0 = k_1 = \dots = k_m = k$ , добијамо систем алгебарских једначина написан у матричном облику

$$\begin{bmatrix} S_{rn} & -v_{rn} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_{rn} & S_{rn} & -v_{rn} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_{rn} & -v_{rn} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -v_{rn} & S_{rn} & -v_{rn} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -v_{rn} & S_{rn} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_{rn} & -v_{rn} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -v_{rn} & S_{rn} & \dots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_{1rn} \\ W_{2rn} \\ W_{3rn} \\ \dots \\ W_{i-1rn} \\ W_{irn} \\ W_{i+1rn} \\ \dots \\ W_{m-2rn} \\ W_{m-1rn} \\ W_{mrn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}, \quad (5.4.13)$$

где је

$$S_{rn} = -\rho h \omega_{rn}^2 \eta_{rn} + D(\alpha_r^2 + \beta_n^2)^2 - N_{xx}(\alpha_r^2 + \delta \beta_n^2) \eta_{rn} + 2v_{rn}, \quad (5.4.14a)$$

$$v_{rn} = k \eta_{rn}. \quad (5.4.14b)$$

Применом поступка који је који је детаљно описан у Глави 4, можемо одредити аналитичка решења за сопствене фреквенције и критичну силу извијања. Треба нагласити да је аналитичко решење могуће једино у случају када су нано-плоче у систему једнаких материјалних и геометријских карактеристика. Решење  $i$ -те алгебарске једначине претпостављамо као

$$W_{in} = V \cos(i \varphi_{cc}) + M \sin(i \varphi_{cc}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (5.4.15)$$

Заменом (5.4.15) у  $i$ -ту алгебарску једначину система (5.4.14), добијају се две тригонометријске једначине, тако да је карактеристична једначина облика

$$S_n = 2v_n \cos \varphi_{cc}. \quad (5.4.16)$$

Сада из једначине (5.4.16) могуће је добити сопствене фреквенције и критичну силу извијања у аналитичком облику, где је вредност непознатог угла  $\varphi_{cc}$  дато следећом релацијом

$$\varphi_{cc,s} = \frac{s \pi}{m+1}, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (5.4.17)$$

Ако заменимо  $\varphi_{cc,s}$  и једначине (5.4.14) у једначину (5.4.16), добија се карактеристична једначина

$$-\rho h \omega_{rn}^2 \eta_{rn} + D(\alpha_r^2 + \beta_n^2)^2 - N_{xx}(\alpha_r^2 + \delta \beta_n^2) \eta_{rn} + 2v_{rn} \left[ 1 - \cos \left( \frac{s \pi}{m+1} \right) \right] = 0. \quad (5.4.18)$$

За случај када је  $N_{xx} = 0$ , из једначине (5.4.18) добијамо вредности сопствених фреквенција система спрегнутих нано-плоча

$$\omega_{rncc,s} = \sqrt{\frac{D(\alpha_r^2 + \beta_n^2)^2 + 2v_{rn} \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right)\right]}{\rho h \eta_{rn}}}, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (5.4.19)$$

Када притисне силе које делују у равни сваке нано-плоче достигну одређену вредност, тада систем спрегнутих нано-плоча постаје нестабилан и долази до извијања, то се дешава када је  $\omega_{rn} = 0$ . Ако у једначину (5.4.18) заменимо  $\omega_{rn} = 0$  у једначини (5.4.18) добијају се силе извијања

$$N_{xx,rncc,s} = \frac{D(\alpha_r^2 + \beta_n^2)^2 + 2v_{rn} \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right)\right]}{(\alpha_r^2 + \delta\beta_n^2)\eta_{rn}}, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (5.4.20)$$

или ако заменимо бездимензионе параметре

$$\Omega_{rn} = \omega_{rn} a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad \hat{N} = N_{xx} \frac{a^2}{D}, \quad R = \frac{a}{b}, \quad K = k \frac{a^4}{D}, \quad \xi = \frac{(e_0 \tilde{\alpha})}{a}, \quad (5.4.21)$$

у једначине (5.4.19) и (5.4.20) ове величине могу се приказати у бездимензионој форми као

$$\Omega_{rncc,s} = \sqrt{\frac{[(r\pi)^2 + R^2(n\pi)^2]^2 + 2K(1 + \xi^2(r\pi)^2 + \xi^2 R^2(n\pi)^2) \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right)\right]}{1 + \xi^2(r\pi)^2 + \xi^2 R^2(n\pi)^2}}, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (5.4.22)$$

и

$$\hat{N}_{rncc,s} = \frac{[(r\pi)^2 + R^2(n\pi)^2]^2 + 2K(1 + \xi^2(r\pi)^2 + \xi^2 R^2(n\pi)^2) \left[1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right)\right]}{[(r\pi)^2 + \delta R^2(n\pi)^2](1 + \xi^2(r\pi)^2 + \xi^2 R^2(n\pi)^2)}, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (5.4.23)$$

#### 5.4.4 Слободни ланац

Када у систему спрегнутих нано-плоча прва и последња нано-плоча нису повезане са непокретном подлогом тј. када је  $k_0 = 0$  и  $k_m = 0$ , тада можемо да кажемо да систем нано-плоча образује слободни ланац. Услови спрезања код слободног ланца су

$$W_{0rn} = W_{m+1rn} = 0. \quad (5.4.24)$$

Такође, претпостављамо да је систем сачињен од  $m$  једнаких нано-плоча, које су међусобно повезане еластичним слојевима једнаке крутости  $k_1 = \dots = k_{m-1} = k$ . Ако у систем алгебарских једначина (5.4.10) заменимо  $k_0 = 0$  и  $k_m = 0$  добијамо следећи систем алгебарских једначина написан у матричном облику

$$\begin{bmatrix} S_{rn} - v_{rn} & -v_{rn} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -v_{rn} & S_{rn} & -v_{rn} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_{rn} & -v_{rn} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -v_{rn} & S_{rn} & -v_{rn} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -v_{rn} & S_{rn} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_{rn} & -v_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -v_{rn} & S_{rn} - v_{rn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{1rn} \\ W_{2rn} \\ W_{3rn} \\ \dots \\ W_{i-1rn} \\ W_{irn} \\ W_{i+1rn} \\ \dots \\ W_{m-2rn} \\ W_{m-1rn} \\ W_{m rn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.4.25)$$

где су релације  $S_{rn}$  и  $v_{rn}$  дефинисане једначинама (5.4.14).

Заменом претпостављеног решења (5.4.15) у  $i$ -ту алгебарску једначину система (5.4.25), добијамо фреквентну једначину

$$S_{rn} = 2v_{rn} \cos \varphi_{fc}, \quad (5.4.26)$$

где је  $\varphi_{fc}$

$$\varphi_{fc,s} = \frac{s \pi}{m}, \quad s = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (5.4.27)$$

Ако заменимо вредност за  $\varphi_{fc,s}$  и релације (5.4.14) у једначину (5.4.26), добијамо фреквентну једначину

$$-\rho h \omega_{rn}^2 \eta_{rn} + D(\alpha_r^2 + \beta_n^2)^2 - N_{xx}(\alpha_r^2 + \delta \beta_n^2) \eta_{rn} + 2v_{rn} \left[ 1 - \cos \left( \frac{s \pi}{m} \right) \right] = 0. \quad (5.4.28)$$

Када је  $N_x = 0$ , из једначине (5.4.28) одређујемо вредности сопствених фреквенција у следећем облику, као

$$\omega_{rnfc,s} = \sqrt{\frac{D(\alpha_r^2 + \beta_n^2)^2 + 2v_{rn} \left[ 1 - \cos \left( \frac{s \pi}{m} \right) \right]}{\rho h \eta_{rn}}}, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (5.4.29)$$

Ако заменимо  $\omega_{rn} = 0$  у фреквентну једначину (5.4.28) можемо одредити силу извијања система спрегнутих нано-плоча као

$$N_{xx,rnfc,s} = \frac{D(\alpha_r^2 + \beta_n^2)^2 + 2v_{rn} \left[ 1 - \cos \left( \frac{s \pi}{m} \right) \right]}{(\alpha_r^2 + \delta \beta_n^2) \eta_{rn}}, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (5.4.30)$$

Када заменимо бездимензионе параметре дефинисане у једначини (5.4.21), можемо одредити сопствене фреквенције и силе извијања у бездимензионој форми као

$$\Omega_{rnfc,s} = \sqrt{\frac{[(r\pi)^2 + R^2(n\pi)^2]^2 + 2K[1 + \xi^2(r\pi)^2 + \xi^2 R^2(n\pi)^2] \left[ 1 - \cos \left( \frac{s \pi}{m} \right) \right]}{1 + \xi^2(r\pi)^2 + \xi^2 R^2(n\pi)^2}}, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (5.4.31)$$

и

$$\hat{N}_{rnfc,s} = \frac{[(r\pi)^2 + R^2(n\pi)^2]^2 + 2K[1 + \xi^2(r\pi)^2 + \xi^2 R^2(n\pi)^2] \left[ 1 - \cos \left( \frac{s \pi}{m} \right) \right]}{[(r\pi)^2 + \delta R^2(n\pi)^2] (1 + \xi^2(r\pi)^2 + \xi^2 R^2(n\pi)^2)}, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (5.4.32)$$



## 5.4.5 Асимптотска анализа

Када број нано-плоча у систему тежи бесконачно тј. ако  $m \rightarrow \infty$  у једначинама (5.4.22) и (5.4.23) или (5.4.31) и (5.4.32), одређујемо асимптотске вредности за сопствене фреквенције и силе извијања у облику

$$\Omega_{m \rightarrow \infty}^{rn} = \frac{(r\pi)^2 + R^2(n\pi)^2}{\sqrt{1 + \xi^2(r\pi)^2 + \xi^2 R^2(n\pi)^2}}, \quad (5.4.33a)$$

$$\hat{N}_{m \rightarrow \infty}^{rn} = \frac{[(r\pi)^2 + R^2(n\pi)^2]^2}{[(r\pi)^2 + \delta R^2(n\pi)^2](1 + \xi^2(r\pi)^2 + \xi^2 R^2(n\pi)^2)}, \quad (r, n = 1, 2, \dots). \quad (5.4.33b)$$

На основу израза (5.4.33) можемо закључити да су асимптотске вредности за сопствене фреквенције и сила извијања најниже. Са физичке стране те вредности представљају сопствене фреквенције и критичну силу извијања система од једне нано-плоче. Такође, можемо запазити да критичне вредности не зависе од услова везивања нано-плоча у ланчане системе.

## 5.5 Нумерички примери

У овом делу рада извршићемо поређење аналитички и нумерички добијених резултата за сопствене фреквенције и критичну силу извијања система спрегнутих нано-штапова, нано-греда и нано-плоча за оба типа спрезања, уклештен и слободан ланац. Сопствене фреквенције и критична сила извијања одређене нумеричким методама применом софтвера Wolfram Mathematica су упоређене са аналитичким резултатима где је показано одлично слагање. Такође, анализиран је утицај нелокалног параметра, броја нано елемената у систему и коефицијента крутости еластичног слоја на динамичко понашање система повезаних нано-структурних елемената.

### 5.5.1 Нумеричка анализа систем спрегнутих нано-штапова

#### 5.5.1.1 Упоредна анализа

У циљу анализе тачности аналитички добијених резултата сопствених фреквенција система спрегнутих нано-штапова дати релацијама (5.2.28a) и (5.2.36a), упоредићемо тако добијене резултате са резултатима добијеним преко нумеричког решења система једначина (5.2.18) и (5.2.29). Вредности материјалних и геометријских карактеристика нано-штапова коришћене у упоредној анализи су [48]:  $L = 1$  [nm],  $\rho A = 10^{-9}$  [kg/m],  $EA = 1$  [nN],  $(e_0 \tilde{a}) = 2$  [nm],  $k = 8$  [N/nm]. У Табелама 5.1 и 5.2, приказане су вредности за сопствене фреквенције система од три, пет и седам спрегнутих нано-штапа за случајеве уклештеног и

слободног ланца. У случају уклештеног ланца аналитичке вредности за сопствене фреквенције дате су релацијом (5.2.28a), док нумеричке вредности срачунавамо из релације (5.2.18), а у случају слободног ланца, аналитичко решење је дато релацијом (5.2.36a) док се нумеричко решење добија из релације (5.2.29).

На основу приказаних резултата, може се запазити да сопствена фреквенција система опада при повећању броја нано-штапова у систему. Такође, уочава се да основна сопствена фреквенција код слободног ланца не мења своју вредност приликом повећања броја нано-штапова у систему. Из Табеле 5.2, видимо да су сопствене фреквенције система спрегнутих обострано уклештених нано-штапова веће у односу на вредности сопствене фреквенције систем са конзолним нано-штаповима, Табела 5.1. То потиче из чињенице да је систем обострано уклештених нано-штапова има већу крутост и тиме и већу сопствену фреквенцију. Такође, можемо закључити да резултати добијени аналитичким и нумеричким методама се веома добро слажу.

**ТАБЕЛА 5.1**

Упоредна анализа сопствених фреквенција добијених аналитичким и нумеричким путем за систем спрегнутих конзолних нано-штапова

Сопствена фреквенција систем спрегнутих конзолних нано-штапова [GHz]					
Број нано-штапова	s	слободни ланац		уклештен ланац	
		Н.Р. (5.2.29)	А. Р. (5.2.36a)	Н. Р. (5.2.18)	А.Р. (5.2.28a)
m = 3	1	0.4764452569943436	0.47644525699434365	2.216594591694126	2.2165945916941254
	2	2.8682747572212124	2.8682747572212124	4.028275075378096	4.028275075378096
	3	4.922093059147948	4.922093059147948	5.247924216478088	5.247924216478088
m = 5	1	0.47644525699434365	0.47644525699434365	1.5396732193427891	1.5396732193427891
	2	1.811830061819609	1.811830061819609	2.8682747572212137	2.8682747572212124
	3	3.358977251026455	3.3589772510264564	4.028275075378086	4.028275075378096
	4	4.601225053495168	4.601225053495162	4.9220930591479854	4.922093059147948
	5	5.401043602204254	5.401043602204259	5.484834231174469	5.484834231174487
m = 7	1	0.47644525699434376	0.47644525699434365	1.2020513977080258	1.2020513977080258
	2	1.3459190898689635	1.3459190898689637	2.2165945916941237	2.2165945916941254
	3	2.500232639810278	2.5002326398102777	3.1786892212154587	3.1786892212154005
	4	3.5590258694776837	3.559025869477683	4.028275075377916	4.028275075378096
	5	4.44829574401402	4.448295744014041	4.727571786949194	4.727571786948754
	6	5.118870667701247	5.11887066770124	5.2479242164776725	5.247924216478089
	7	5.535566996193857	5.535566996193896	5.568579047036624	5.568579047036415

\*Н. Р.- Нумеричко решење ; \*А.Р.-Аналитичко решење; m- број нано-штапова

**ТАБЕЛА 5.2**

Упоредна анализа сопствених фреквенција добијених аналитичким и нумеричким путем за систем спрегнутих обострано уклештених нано-штапова

Сопствена фреквенција систем спрегнутих обострано уклештених нано-штапова [GHz]					
Број нано-штапова	<i>s</i>	слободни ланац		уклештени ланац	
		Н. Р. (5.2.29)	А. Р. (5.2.36а)	Н.Р. (5.2.18)	А.Р. (5.2.28а)
<i>m</i> = 3	1	0.4937852460756959	0.4937852460756959	2.220386311040778	2.2203863110407784
	2	2.8712059956126508	2.871205995612651	4.030362746607559	4.03036274660756
	3	4.923801769897124	4.923801769897122	5.249526870892919	5.249526870892918
<i>m</i> = 5	1	0.49378524607569596	0.4937852460756959	1.5451269878851441	1.5451269878851441
	2	1.81646688911273	1.8164668891127291	2.87120599561265	2.871205995612651
	3	3.361480620090325	3.361480620090331	4.030362746607549	4.03036274660756
	4	4.603052875998854	4.6030528759988405	4.923801769897134	4.923801769897122
	5	5.40260083471296	5.402600834712962	5.486367680878932	5.486367680878948
<i>m</i> = 7	1	0.49378524607569585	0.4937852460756959	1.209029093554595	1.2090290935545958
	2	1.3521545706032763	1.3521545706032758	2.2203863110407833	2.2203863110407784
	3	2.503594823349475	2.503594823349477	3.1813344607884804	3.1813344607885226
	4	3.5613886232677716	3.5613886232677565	4.030362746607774	4.03036274660756
	5	4.4501863795287155	4.450186379528734	4.729350778603283	4.729350778604128
	6	5.120513714363323	5.120513714363215	5.249526870893934	5.249526870892918
	7	5.5370863959017775	5.537086395901795	5.5700894417788485	5.570089441779425

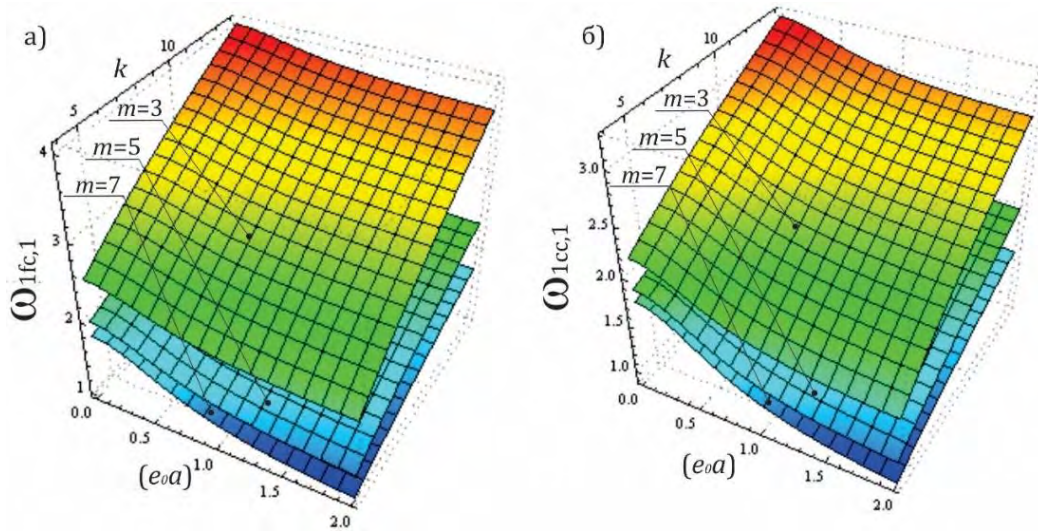
\*Н. Р.- Нумеричко решење ; \*А.Р.-Аналитичко решење; *m*- број нано-штапова

### 5.5.1.2 Параметарска анализа

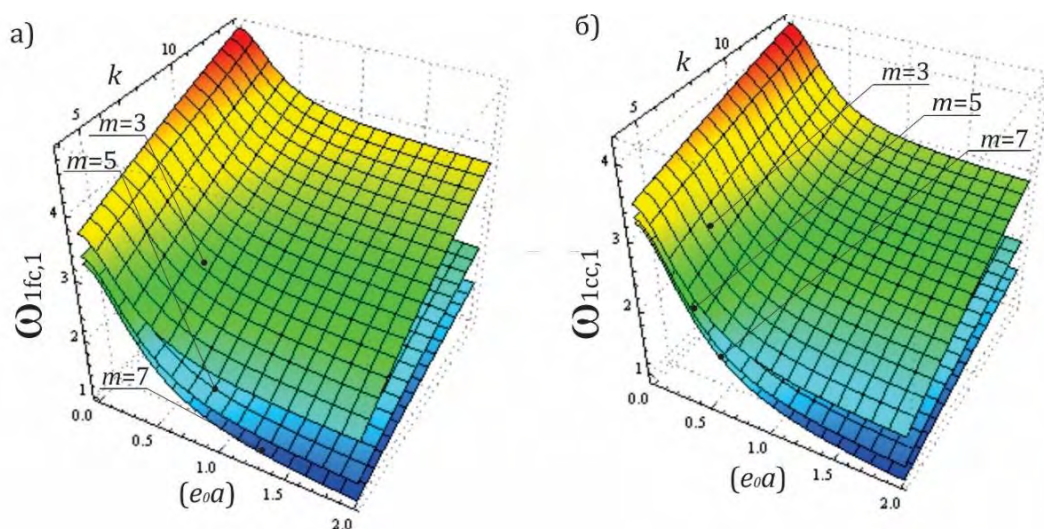
Вредности материјалних и геометријских параметара нано-штапова, усвојени су као у претходној анализи. Сопствене фреквенције су одређене за системе са три, пет и седам (*m* = 3, 5 и 7) повезаних нано-штапова, где је вредност крутости еластичног слоја дата у опсегу  $k = 4 - 12 [N/nm]$ , а параметар нелокалности  $(e_0\tilde{a}) = 0 - 2 [nm]$ . На Сл. 5.5.1 и Сл. 5.5.2, приказане су вредности основне сопствене фреквенције када је параметар  $s = 1$  за оба типа спрезања, уклештен и слободани ланац.

На основу добијених резултата можемо закључити да се основне сопствене фреквенције система спрегнутих нано-штапова смањују са повећањем вредности нелокалног параметра  $(e_0a)$  и броја нано-штапова у систему. Међутим, са повећањем крутости еластичног слоја долази до повећања основне сопствене фреквенције система. Можемо приметити када је нелокални параметар једнак нули  $(e_0\tilde{a}) = 0$ , тј. у случају локалне теорије еластичног штапа, да сопствена фреквенција има највишу вредност. На основу тога можемо закључити, да нелокални параметар има пригушујући ефекат на сопствену фреквенцију, а самим тим и на динамичко понашање система. Овај закључак је потврђен и од стране других аутора за системе сачињене од једног или два нано-штапа у радовима [40, 48]. Такође, анализиран је утицај граничних услова нано-штапова

на динамичко понашање система. За систем конзолних нано-штапова повезаних у слободни и уклештени ланац Сл. 5.5.1, добијене су ниже фреквенције него за системе обострано уклештених штапова приказане на Сл. 5.5.2. За случај када је нелокални параметар  $(e_0\tilde{a}) = 0$ , тј. у случају локалне теорије еластичности, сопствене фреквенције система спрегнутих нано-штапова се веома мало разликују у случају када се мења број нано-штапова у систему. Како се повећава параметар нелокалности долази до веће разлике између сопствених фреквенција, код система са већим бројем спрегнутих нано-штапова. Можемо закључити, да не узимање у рачун параметра нелокалности доводи до грешке код анализе и пројектовања нано-система.



Сл. 5.5.1. Утицај нелокалног параметра  $(e_0\tilde{a})$  и крутости еластичног слоја  $k$  на сопствену фреквенцију система конзолних нано-штапова, спрегнутих у а) слободни и б) уклештен ланац.



Сл. 5.5.2. Утицај нелокалног параметра  $(e_0\tilde{a})$  и крутости еластичног слоја  $k$  на сопствену фреквенцију система обострано уклештених нано-штапова, спрегнутих у а) слободани и б) уклештен ланац.

## 5.5.2 Нумеричка анализа система спрегнутих нано-греда

### 5.5.2.1 Упоредна анализа

Потврду аналитичких резултата за сопствене фреквенције и критичну силу извијања урадићемо тако што ћемо упоредити добијене аналитичке резултате са резултатима добијеним нумеричким путем у софтверу Wolfram Mathematica за системе сачињене од три, пет и седам нано-греда. Модел нано-греде је угљенична нано-цев са следећим материјалним и геометријским карактеристикама: “armchair” (5,5), дебљина -  $h = 0.34 [nm]$ , Poisson-ов коефицијент -  $\nu = 0.3$ , густина -  $\rho = 2300 [kg/m^3]$ , дужина  $L = 20 [nm]$  и модул еластичности -  $E = 0.971 [TPa]$ . У овој анализи, вредности нелокалног параметра узети су следећем опсегу  $(e_0 \tilde{a}) = 0.142 * 0.39 [nm]$ . Крутог Winkler-овог еластичног слоја моделирана је системом континуално расподељених опруга крутости  $k = 0.01 * E [TPa]$ .

**ТАБЕЛА 5.3**

Упоредна анализа аналитички и нумерички добијених резултата за сопствене фреквенције осциловања система спрегнутих нано-греда.

Сопствена фреквенција система спрегнутих нано-греда [THz]					
Број нано-греда	$s$	слободни ланац		уклештени ланац	
		Н. Р.* (5.3.18)	А. Р.* (5.3.22a)	Н.Р.* (5.3.10)	А.Р.* (5.3.16a)
$m = 3$	1	0.12903698278022	0.12903698278022	1.74764121801651	1.74764121801652
	2	2.28082372820514	2.28082372820514	3.22298979448620	3.22298979448620
	3	3.94628553852617	3.94628553852617	4.20964091150470	4.20964091150471
$m = 5$	1	0.12903698278022	0.12903698278022	1.18579204671867	1.18579204671867
	2	1.41327198885515	1.41327198885515	2.28082372820514	2.28082372820514
	3	2.68008284399964	2.68008284399963	3.22298979448622	3.22298979448620
	4	3.68679839156187	3.68679839156188	3.94628553852613	3.94628553852617
	5	4.33335767231853	4.33335767231853	4.40104801753666	4.40104801753664
$m = 7$	1	0.12903698278022	0.12903698278022	0.89782897919498	0.89782897919498
	2	1.02161816197385	1.02161816197385	1.74764121801652	1.74764121801652
	3	1.98026326006163	1.98026326006163	2.53354464905831	2.53354464905833
	4	2.84251575007402	2.84251575007399	3.22298979448624	3.22298979448620
	5	3.56306478208091	3.56306478208097	3.78899431801537	3.78899431801531
	6	4.10534820101474	4.10534820101468	4.20964091150450	4.20964091150471
	7	4.44202912663226	4.44202912663229	4.46869439040569	4.46869439040556

\*Н. Р. – Нумеричко решење; \*А.Р. – Аналитичко решење;

У Табелама 5.3 и 5.4 дате су вредности за основне сопствене фреквенције и критичну силу извијања добијене аналитичким и нумеричким путем за системе од три, пет и седам  $m = 3, 5, 7$  спрегнутих нано-греда. Можемо приметити да се добијени резултати тригонометријским

методом одлично слажу са резултатима добијеним нумеричким решавањем фреквентне детерминанте система алгебарских једначина. Такође, можемо приметити да најниже вредности сопствене фреквенције и критична сила извијања опадају са повећањем броја нано-греда у систему.

**ТАБЕЛА 5.4**

Упоредна анализа аналитички и нумерички одређене критичне силе извијања система спрегнутих нано-греда.

Критична сила извијања система спрегнутих нано-греда [Nn]					
Број нано-греда	s	слободни ланац		уклештен ланац	
		Н.Р.*(5.3.18)	А.Р.*(5.3.23a)	Н.Р.*(5.3.10)	А.Р.* (5.3.17a)
m = 3	1	1.263620624434	1.263620624434	231.789022786629	231.789022786629
	2	394.795097891274	394.795097891274	788.326575158114	788.326575158113
	3	1181.858052424954	1181.858052424954	1344.864127529597	1344.864127529598
m = 5	1	1.263620624434	1.263620624434	106.710062154310	106.710062154310
	2	151.579269297410	151.579269297410	394.795097891274	394.795097891274
	3	545.110746564249	545.110746564250	788.326575158113	788.326575158113
	4	1031.542403751977	1031.542403751977	1181.858052424955	1181.858052424954
	5	1425.073881018818	1425.073881018817	1469.943088161915	1469.943088161917
m = 7	1	1.263620624434	1.263620624434	61.175220666585	61.175220666585
	2	79.207356043971	79.207356043971	231.789022786630	231.789022786629
	3	297.600849585559	297.600849585560	487.130622229753	487.130622229756
	4	613.188591432869	613.188591432863	788.326575158121	788.326575158113
	5	963.464558883356	963.464558883364	1089.522528086411	1089.522528086471
	6	1279.052300730656	1279.052300730667	1344.864127529766	1344.864127529598
	7	1497.445794272270	1497.445794272256	1515.477929649527	1515.477929649642

\*Н. Р. – Нумеричко решење; \*А.Р. – Аналитичко решење;

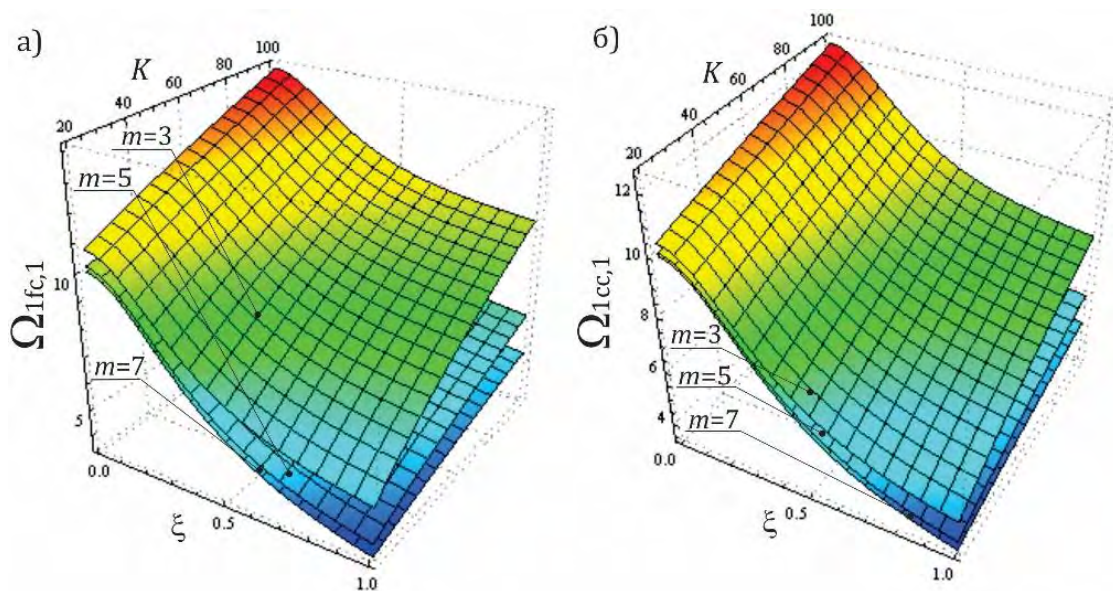
### 5.5.2.2 Параметарска анализа

У циљу анализе утицаја нелокалног параметра ( $e_0 \tilde{a}$ ) и коефицијента крутости еластичног слоја  $k$  на слободне трансверзалне осцилације и статичку стабилност система спрегнутих нано-штапова, користићемо бездимензионе изразе за сопствене фреквенције (5.3.16б) и (5.3.22б) и критичну силу извијања (5.3.17б) и (5.3.23б) за оба типа ланчаних система, уклештен и слободни ланац Сл. 5.5.3 и Сл. 5.5.4. На основу резултата закључујемо, да при повећању броја нано-греда  $m$  у систему сопствене фреквенције и силе извијања опадају и теже основној сопственој фреквенцији и критичној сили извијања. У овој параметарској анализи, размотрићемо утицај бездимензионог нелокалног параметра када је он у опсегу  $\xi = 0 - 1$  и коефицијента крутости еластичног слоја када је он у опсегу  $K = 20 - 100$ . Резултати за сопствене фреквенције и

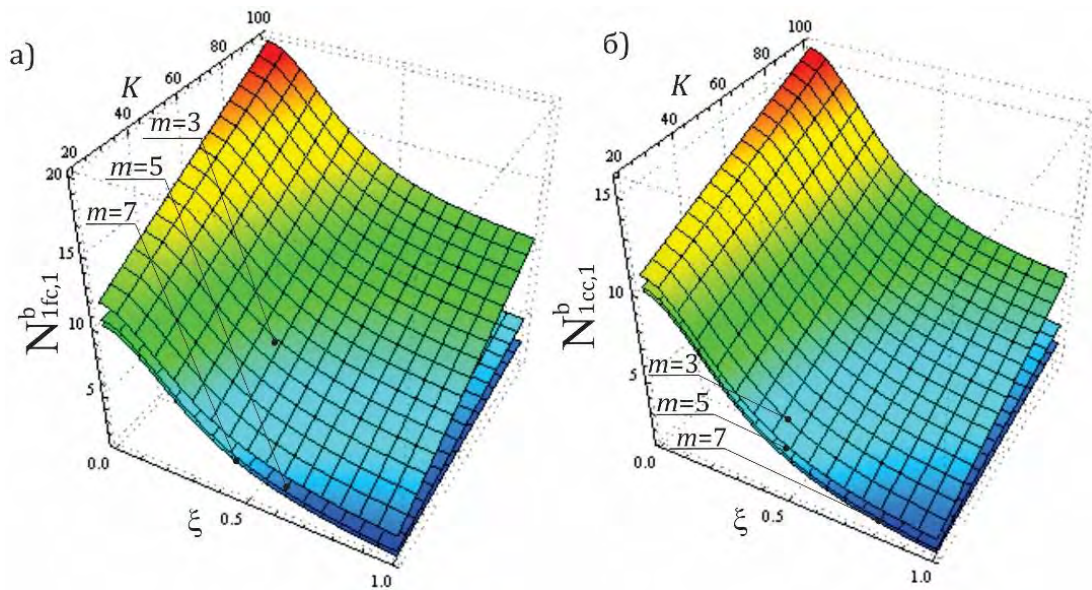
критичну силу извијања у првом моду су приказане на Сл. 5.5.3 и Сл. 5.5.4 где је вредност параметра  $s = 1$ , за оба типа ланчаних система.

Утицај нелокалног параметра  $\xi$  као и коефицијента крутости  $K$  еластичног слоја на бездимензиону вредност сопствене фреквенције  $\Omega_n$  система спрегнутих нано-греда, за случајеве када је систем сачињен од  $m = 3, 5, 7$  нано-греда, приказана је на Сл. 5.5.3. Са слике се може запазити да повећање коефицијента крутости Winkler-овог еластичног слоја смањује утицај нелокалног параметра на сопствене фреквенције система за оба типа ланчаног система. Као што је већ напоменуто, повећање броја нано-греда изазива смањење сопствене фреквенције система.

Да би се анализирао утицај нелокалног параметра  $\xi$  на критичну силу извијања  $N_n^b$ , разматран је систем од три, пет и седам спрегнутих нано-греда. Бездимензиона вредност критична сила извијања је приказана на Сл. 5.5.4, где је показан утицај промене коефицијента крутости  $K$  еластичног слоја као и нелокалног параметра  $\xi$ . Са Сл. 5.5.4 можемо запазити да је критична сила осетљива на промену нелокалног параметра више него сопствена фреквенција система. Са повећањем вредности нелокалног параметра долази до смањења вредности критичне силе извијања, што у физичком смислу значи да нелокални параметар има пригушујући утицај. Треба истаћи да повећање крутости еластичног слоја доводи до повећања укупне крутости система што изазива повећање критичне силе извијања система. Може се запазити да повећање броја нано-греда у систему, изазива смањење критичне силе извијања која тежи асимптотској вредности, што је показано и дато једначином (5.3.24).



Сл. 5.5.3. Утицај нелокалног параметра и коефицијента крутости еластичног слоја на сопствене фреквенције: а) слободни ланац, б) уклештен ланац, за  $s = 1$ .



Сл. 5.5.4. Утицај нелокалног параметра и коефицијента крутости еластичног слоја на критичну силу извијања: а) слободни ланац, б) уклештен ланац, за  $s = 1$ .

### 5.5.3 Нумеричка анализа система спрегнутих нано-плоча

#### 5.5.3.1 Упоредна анализа

Аналитичка решења за сопствене фреквенције и силе извијања добијена тригонометријском методом, релације (5.4.22), (5.4.23), (5.4.31) и (5.4.32), биће упоређена са резултатима добијеним нумеричким поступком датим у Табелама 5.5 и 5.6. У упоредној анализи размотрићемо резултате за први мод осциловања и извијања ( $r = 1, n = 1$ ), где су материјалне и геометријске карактеристике система дате у бездимензионој форми:  $R = 1$  - је однос страница нано-плоче,  $\delta = 0.5$  - је однос сила у равни нано-плоче,  $\xi = 0.5$  - је нелокални параметар и  $K = 100$  - је коефицијент крутости еластичног слоја.

Као што се може видети из Табела 5.5 и 5.6, резултати добијени аналитичким и нумеричким путем се одлично слажу. Као и у случају система спрегнутих нано-штапова и нано-греда, најнижа сопствена фреквенција система спрегнутих нано-плоча добијена је за случај слободног ланца када је  $s = 0$ . Те вредности сопствене фреквенције и силе извијања представљају основне фреквенције и критичну силу извијања система спрегнутих нано-плоча и не зависе од броја нано-плоча у систему. Такође можемо запазити да су вредности фреквенција и критичне силе извијања за уклештени ланац веће у односу на вредности фреквенције и критичне силе извијања добијене за слободни ланац. Потребно је напоменути да при нумеричком решавању израза (5.4.13) и (5.4.25) користе се бездимензиони параметри дати изразом (5.4.21).



**ТАБЕЛА 5.5**

Упоредна анализа аналитички и нумерички добијених бездимензионих сопствених фреквенција за систем спрегнутих нано-плоча.

Сопствене фреквенције система спрегнутих нано-плоча					
Број нано-плоча	<i>s</i>	слободни ланац		уклештени ланац	
		Н.Р.* (5.4.25)	А.Р.* (5.4.31)	Н.Р.* (5.4.13)	А.Р.* (5.4.22)
<i>m</i> = 2	1	8.102641359754337	8.10264135975433	12.870617584436328	12.870617584436328
	2	16.298858763876737	16.29885876387674	19.122050020978442	19.122050020978440
<i>m</i> = 5	1	8.102641359754331	8.102641359754337	9.614973543796884	9.614973543796877
	2	10.190652487932876	10.190652487932857	12.870617584436213	12.870617584436328
	3	14.277583763711931	14.277583763711986	16.298858763876922	16.298858763876740
	4	18.095750768614074	18.095750768613915	19.122050020977852	19.122050020978440
	5	20.675013806036212	20.675013806036286	20.948935003042514	20.948935003042262
<i>m</i> = 10	1	8.102641359756117	8.102641359754337	8.588026681485388	8.588026681485225
	2	8.685706289377503	8.685706289402773	9.869249740408922	9.869249740409114
	3	10.190652487940827	10.190652487932857	11.605199275155108	11.605199275141490
	4	12.169459583146475	12.169459583165843	13.511839045938950	13.511839045978320
	5	14.277583763760147	14.277583763711986	15.400968455233263	15.400968454942843
	6	16.298858763828850	16.298858763876740	17.149803632265010	17.149803633262350
	7	18.095750768947923	18.095750768613915	18.674469194094154	18.674469192059487
	8	19.575746408604815	19.575746408842146	19.915444852405102	19.91544485535080
	9	20.675013806069206	20.675013806036286	20.830350539684872	20.830350538842062
	10	21.350974222653280	21.350974222827220	21.390450946077390	21.390450947273200

\*Н. Р.- Нумеричко решење ; \*А.Р.-Аналитичко решење; *m*- број нано-плоча

**ТАБЕЛА 5.6**

Упоредна анализа аналитички и нумерички добијених бездимензионих критичних сила извијања за систем спрегнутих нано-плоча.

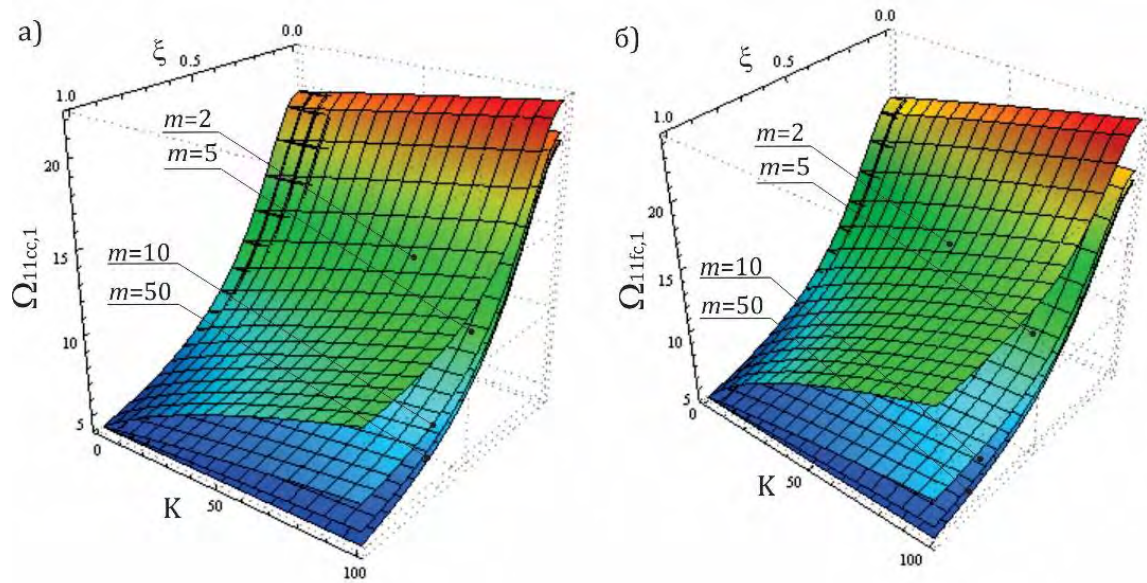
Критична сила извијања система спрегнутих нано-плоча					
Број нано-плоча	$s$	слободни ланац		уклештени ланац	
		Н. Р.* (5.4.25)	А.Р.* (5.4.32)	Н. Р* (5.4.13)	А.Р.* (5.4.23)
$m = 2$	1	4.434679401304418	4.434679401304419	11.189424977460272	11.189424977460272
	2	17.944170553616118	17.94417055361612	24.698916129771966	24.698916129771973
$m = 5$	1	4.4346794013044395	4.434679401304419	6.244608023513074	6.244608023513079
	2	7.014762626037857	7.014762626037962	11.189424977460298	11.189424977460272
	3	13.769508202194016	13.769508202193814	17.9441705536164	17.94417055361612
	4	22.118832905038456	22.118832905038428	24.698916129771334	24.698916129771973
	5	28.87357848119441	28.873578481194283	29.64373308371962	29.64373308371917
$m = 10$	1	4.43467940130375	4.434679401304419	4.981908715865823	4.981908715865823
	2	5.09588096138196	5.095880961378354	6.579263394981978	6.579263394982316
	3	7.01476262603017	7.014762626037962	9.097335262368473	9.097335262385945
	4	10.00349088834649	10.003490888311653	12.332125110984935	12.332125110929688
	5	13.769508202105083	13.769508202193814	16.02156950497541	16.021569505120507
	6	17.94417055361673	17.94417055361612	19.86677160331807	19.866771602111736
	7	22.11883290508726	22.118832905038428	23.55621599538792	23.556215996302555
	8	25.88485021879722	25.88485021892059	26.791005847718235	26.791005844846300
	9	28.87357848144435	28.873578481194283	29.309077707986063	29.309077712249927
	10	30.79246014547570	30.792460145853894	30.906432392673373	30.906432391366423

\*Н. Р.- Нумеричко решење ; \*А.Р.-Аналитичко решење;  $m$ - број нано-плоча

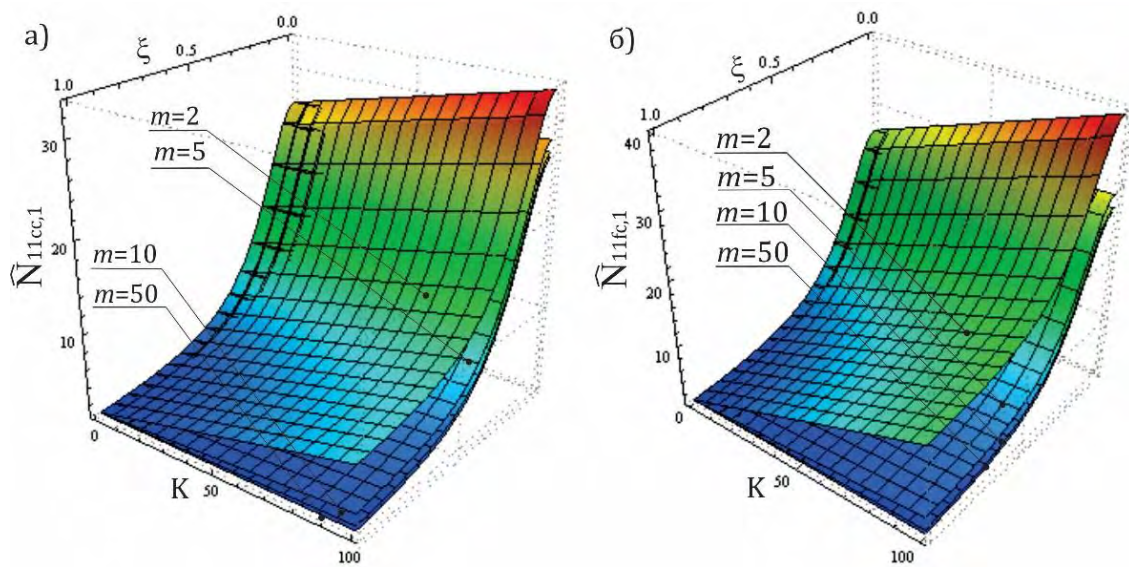
### 5.5.3.2 Параметарска анализа

На следећим сликама графички су приказане добијене вредности за бездимензионе сопствене фреквенције система спрегнутих нано-плоча, за дате вредности бездимензионих параметара система:  $R = 1$  - је однос страница,  $\delta = 0.5$  - је однос сила које делују у равни нано-плоче,  $\xi = 0 - 1$  - је нелокални параметар,  $K = 0 - 100$  - је коефицијент крутости еластичног слоја, а за вредност параметра  $s = 1$  и број мода  $r = 1$ ,  $n = 1$ . Вредности сопствене фреквенције  $\Omega_{rn,s}$  система спрегнутих нано-плоча за оба система, типа уклештени ланац и слободни ланац, приказане су на Сл. 5.5.5 у функцији нелокалног параметра и коефицијента крутости еластичног слоја за различити број нано-плоча у систему. Може се запазити да повећање нелокалног параметра доводи до опадања вредности сопствене фреквенције док повећање коефицијента крутости повећава сопствену фреквенцију система. Када је нелокални параметар једнак нули сопствена фреквенција система се своди на случај локалне сопствене фреквенције система и она је највећа. У том случају можемо рећи да нелокални параметар има пригушујући ефекат на сопствену фреквенцију система. Следећа чињеница коју можемо уочити је да се при повећању броја нано-плоча у систему смањује сопствена фреквенција и да тежи одређеној асимптотској

вредности која је дата једначином (5.4.33a). Сличне закључке можемо извести и за приказане вредности критичне силе извијања, Сл. 5.5.6.



Сл. 5.5.5. Утицај нелокалног параметра и коефицијента крутости еластичног слоја на сопствене фреквенције: а) слободни ланац, б) уклештен ланац, за  $s = 1$ .



Сл. 5.5.6. Утицај нелокалног параметра и коефицијента крутости еластичног слоја на критична сила извијања: а) слободни ланац, б) уклештен ланац, за  $s = 1$ .



# Глава 6

## Динамичко понашање система спрегнутих виско-еластичних нано-структура

### 6.1 Лонгитудиналне осцилације система спрегнутих нано-штапова применом нелокалне теорије виско-еластичности

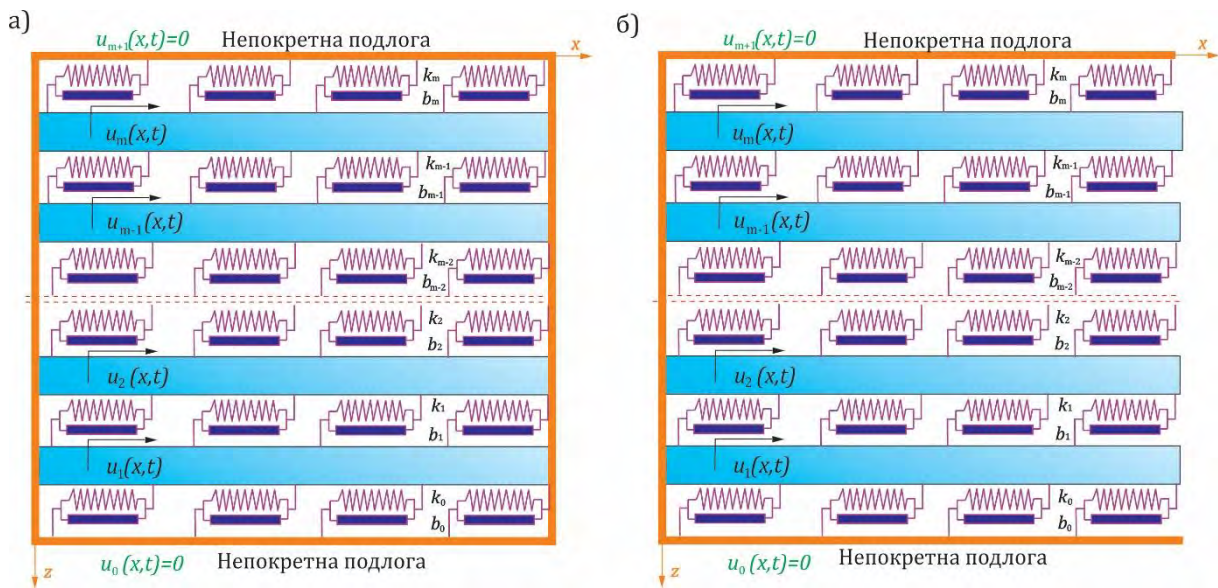
#### 6.1.1 Опште напомене

У наставку ћемо размотрити лонгитудиналне осцилације система од  $m$  спрегнутих виско-еластичних нано-штапова. На основу другог Newton-овог закона кретања и нелокалне виско-еластичне конститутивне релације добиће се систем парцијалних диференцијалних једначина кретања система нано-штапова. Нано-штапови су спрегнути на два начина са непокретном подлогом као уклештен и слободни ланац. Применом методе раздвајања променљивих систем парцијалних диференцијалних једначина кретања се своди на систем хомогених алгебарских једначина. Из тако добијеног система алгебарских једначина могу се одредити кружне фреквенције и коефицијент пригушења виско-еластичног система коришћењем тригонометријске методе. Такође, одређене су асимптотске вредности кружне фреквенције и коефицијент пригушења система када број нано-штапова и број мода теже бесконачно. На крају овог дела рада дати су нумерички примери у којима је истражен утицај материјалних параметара на динамику система.

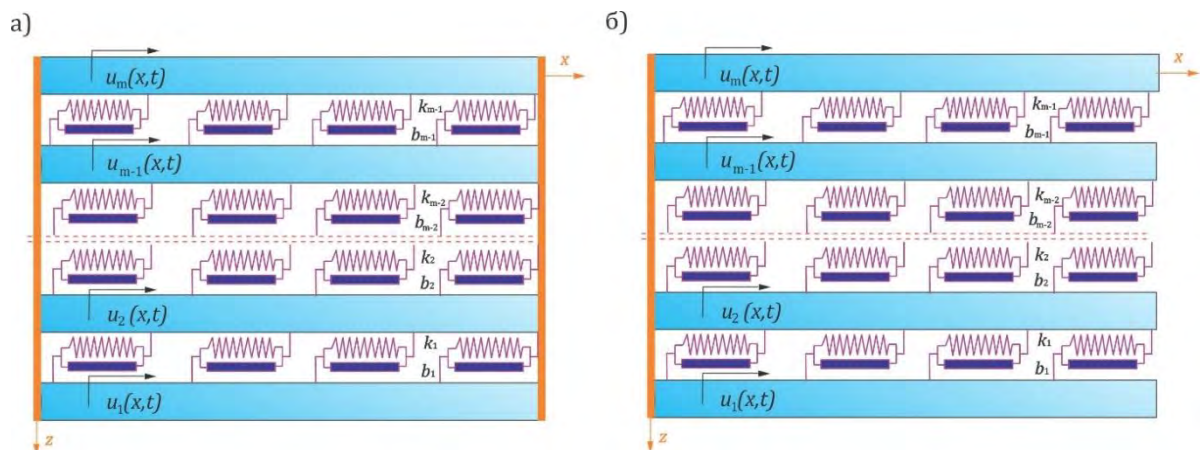
#### 6.1.2 Диференцијалне једначине кретања система

Размотримо систем од  $m$  виско-еластичних нано-штапова међусобно повезаних линеарно виско-еластичним слојевима, за два типа граничних услова, тј. за обострано уклештене (C-C) и конзолне (C-F) нано-штапове. Такође, на сликама су приказана два типа ланчаних система уклештен и слободни ланац. Као што је већ речено код уклештеног ланца Сл. 6.1.1а и Сл. 6.1.1б, први и последњи нано-штап је повезан са непокретном подлогом виско-еластичним слојем  $k_0 = k_m \neq 0$  и  $b_0 = b_m \neq 0$ , док код слободног ланца нема спрезања са непокретном подлогом

$k_0 = k_m = 0$  и  $b_0 = b_m = 0$ , Сл. 6.1.2а и Сл. 6.1.2б. Треба истаћи да су остали нано-штапови у систему међусобно повезани континуално расподељеним виско-еластичним слојевима код којих су  $b_1 = b_2 = \dots = b_i = \dots = b_{m-1} = b$  - коефицијенти пригушења, а  $k_1 = k_2 = \dots = k_i = \dots = k_{m-1} = k$  коефицијенти крутости слоја. Такође претпостављамо, да су сви нано-штапови једнаких материјалних карактеристика:  $\tau_d$  - је структурно пригушење (дато преко нелокалне виско-еластичне конститутивне релације),  $E$  - је модул еластичности,  $\rho$  - је густина масе,  $A$  - је површина попречног пресека и  $L$  - је дужина штапа. Аксијално померање  $i$  - тог нано-штапа означавамо са  $u_i(x, t)$ .



Сл. 6.1.1. Систем спрегнутих нано-штапова у уклештени ланац : а) обострано уклештени нано-штапови; б) конзолни нано-штапови.



Сл. 6.1.2. Систем спрегнутих нано-штапова у слободни ланац : а) обострано уклештени нано-штапови; б) конзолни нано-штапови.

Применом другог Newton-овог закона кретања на елементарном делу  $i$  - тог нано-штапа, као што је приказано у Глави 2 и Глави 5, добијамо следећу једначину кретања

$$\sum F_{xi} = dm\ddot{u}_i \Rightarrow \frac{\partial N_i}{\partial x} dx + F_i dx - F_{i-1} dx = dm\ddot{u}_i, \quad (6.1.1)$$

где су  $dm = \rho A dx$  - маса елементарног дела,  $F_i$  и  $F_{i-1}$  - су спољашње силе које потичу од виско-еластичне интеракције и  $N_i(x, t)$  - су аксијалне силе, дефинисане као

$$F_i = k_i(u_{i+1} - u_i) + b_i(\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i), \quad F_{i-1} = k_{i-1}(u_i - u_{i-1}) + b_{i-1}(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}), \quad (6.1.2a)$$

$$N_i(x, t) = \int_A \sigma_{xx}(x, t) dA. \quad (6.1.2b)$$

Ако заменимо једначине (6.1.2b) у (1.3.8a), а након тога применимо поступак који је описан у Глави 5, добија се систем диференцијалних једначина кретања повезаних нано-штапова у функцији аксијалних померања  $u_i(x, t)$

$$\begin{aligned} \bar{m}\ddot{u}_i - \bar{e} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \tau_d \frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial x^2} \right) + k_i(u_i - u_{i+1}) + b_i(\dot{u}_i - \dot{u}_{i+1}) + k_{i-1}(u_i - u_{i-1}) + b_{i-1}(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}) \\ = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\bar{m}\ddot{u}_i + k_i(u_i - u_{i+1}) + b_i(\dot{u}_i - \dot{u}_{i+1}) + k_{i-1}(u_i - u_{i-1}) + b_{i-1}(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1})], \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

$i = 1, 2, \dots, m,$

где су  $\bar{e}$  и  $\bar{m}$  означавају аксијалну крутост и масу по јединици дужине штапова

$$EA = \bar{e} = Const., \quad \rho A = \bar{m} = Const. \quad (6.1.4)$$

Када су аксијална померања  $u_0(x, t)$  и  $u_{m+1}(x, t)$  једнака нули у једначинама (6.1.3), добијамо систем једначина кретања уклештеног ланца, као

$$\begin{aligned} \bar{m}\ddot{u}_1 - \bar{e} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \tau_d \frac{\partial^2 \dot{u}_1}{\partial x^2} \right) + k(u_1 - u_2) + b(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + ku_1 + b\dot{u}_1 \\ = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\bar{m}\ddot{u}_1 + k(u_1 - u_2) + b(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + ku_1 + b\dot{u}_1], \quad i = 1, \end{aligned} \quad (6.1.5a)$$

$$\begin{aligned} \bar{m}\ddot{u}_i - \bar{e} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \tau_d \frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial x^2} \right) + k(u_i - u_{i+1}) + b(\dot{u}_i - \dot{u}_{i+1}) + k(u_i - u_{i-1}) + b(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}) \\ = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\bar{m}\ddot{u}_i + k(u_i - u_{i+1}) + b(\dot{u}_i - \dot{u}_{i+1}) + k(u_i - u_{i-1}) + b(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1})], \end{aligned} \quad (6.1.5b)$$

$i = 2, \dots, m - 1,$

$$\begin{aligned} \bar{m}\ddot{u}_m - \bar{e} \left( \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + \tau_d \frac{\partial^2 \dot{u}_m}{\partial x^2} \right) + ku_m + b\dot{u}_m + k(u_m - u_{m-1}) + b(\dot{u}_m - \dot{u}_{m-1}) \\ = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\bar{m}\ddot{u}_i + ku_m + b\dot{u}_m + k(u_m - u_{m-1}) + b(\dot{u}_m - \dot{u}_{m-1})], \quad i = m, \end{aligned} \quad (6.1.5b)$$

где су крутости еластичних слојева и коефицијенти пригушења  $k_0 = k_m = k$  и  $b_0 = b_m = b$ .

Диференцијалне једначине кретања за слободни ланац Сл. 6.1.2a и Сл. 6.1.2b добијамо када заменимо  $k_0 = k_m = 0$  и  $b_0 = b_m = 0$ , у једначинама (6.1.3)

$$\begin{aligned} & \bar{m}\ddot{u}_1 - \bar{e} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \tau_d \frac{\partial^2 \dot{u}_1}{\partial x^2} \right) + k(u_1 - u_2) + b(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \\ & = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\bar{m}\ddot{u}_1 + k(u_1 - u_2) + b(\dot{u}_1 - \dot{u}_2)], \quad i = 1, \end{aligned} \quad (6.1.6a)$$

$$\begin{aligned} & \bar{m}\ddot{u}_i - \bar{e} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \tau_d \frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial x^2} \right) + k(u_i - u_{i+1}) + b(\dot{u}_i - \dot{u}_{i+1}) + k(u_i - u_{i-1}) + b(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}) \\ & = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\bar{m}\ddot{u}_i + k(u_i - u_{i+1}) + b(\dot{u}_i - \dot{u}_{i+1}) + k(u_i - u_{i-1}) + b(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1})], \\ & \quad i = 2, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (6.1.6b)$$

$$\begin{aligned} & \bar{m}\ddot{u}_m - \bar{e} \left( \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + \tau_d \frac{\partial^2 \dot{u}_m}{\partial x^2} \right) + k(u_m - u_{m-1}) + b(\dot{u}_m - \dot{u}_{m-1}) \\ & = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\bar{m}\ddot{u}_m + k(u_m - u_{m-1}) + b(\dot{u}_m - \dot{u}_{m-1})], \quad i = m. \end{aligned} \quad (6.1.6b)$$

Гранични услови обострано уклештених нано-штапова (С-С) Сл. 6.1.1а и Сл. 6.1.2а и конзолних нано-штапова (С-F) Сл. 6.1.1б и Сл. 6.1.2б, гласе:

- *Обострано уклештени нано-штапови (С-С)*

$$u_i(0, t) = u_i(L, t) = 0, \quad (6.1.7)$$

- *Конзолни нано-штапови (С -F):*

$$u_i(0, t) = N_i(L, t) = 0, \quad (6.1.8)$$

где су  $N_i(L, t)$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) напонске резултујуће аксијалне силе на слободним крајевима система нано-штапова.

Заменом једначине (6.1.1) и једначине (6.1.2б) у једначину (1.3.8а) добија се напонска резултујућа сила  $N_i$  облика

$$N_i(x, t) = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \bar{e} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} + \tau_d \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x} \right), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6.1.9a)$$

или

$$\begin{aligned} N_i(x, t) &= (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial}{\partial x} [\bar{m}\ddot{u}_i + k(u_i - u_{i+1}) + b(\dot{u}_i - \dot{u}_{i+1}) \\ &+ k(u_i - u_{i-1}) + b(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}) + \bar{e} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} + \tau_d \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x} \right)], \\ & \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.1.9b)$$

Ако заменимо једначину (6.1.9б) у граничне услове (6.1.8), добија се

$$\begin{aligned} N_i(L, t) &= (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial}{\partial x} \{ \bar{m}\ddot{u}_i(L, t) + k[u_i(L, t) - u_{i+1}(L, t)] + b[\dot{u}_i(L, t) - \dot{u}_{i+1}(L, t)] \\ &+ k[u_i(L, t) - u_{i-1}(L, t)] + b[\dot{u}_i(L, t) - \dot{u}_{i-1}(L, t)] \} + \bar{e} \left( \frac{\partial u_i(L, t)}{\partial x} + \tau_d \frac{\partial \dot{u}_i(L, t)}{\partial x} \right) = 0, \\ & \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.1.10)$$



### 6.1.3 Аналитичко решење

На основу методе раздвајања променљивих, опште решење парцијалних диференцијалних једначина кретања (6.1.3) претпостављамо у следећем облику

$$u_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{in} \sin \alpha_n x e^{\lambda_n t}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6.1.11)$$

где је  $i = \sqrt{-1}$ ,  $U_{in}$ -су амплитуде, а  $\lambda_n$ -су карактеристичне вредности.

За обострано уклештене нано-штапове у систему, како је показано у Глави 5 математичка формулација граничних услова је

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty, \quad (6.1.12)$$

док је за конзолне нано-штапове

$$\alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (6.1.13)$$

Ако заменимо претпостављена решења (6.1.11) у једначине (6.1.3), добијамо систем од  $m$  алгебарских једначина по непознатим амплитудама  $U_{in}$

$$-v_{i-1n}U_{i-1n} + S_{in}U_{in} - v_{in}U_{i+1n} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6.1.14)$$

где су

$$S_{in} = \alpha_n^2 \bar{e}(1 + \lambda_n \tau_d) + \bar{m} \lambda_n^2 [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2] + v_{in} + v_{i-1n}, \quad (6.1.15a)$$

$$v_{in} = k_i [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2] + \lambda_n b_i [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2], \quad (6.1.15b)$$

$$v_{i-1n} = k_{i-1} [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2] + \lambda_n b_{i-1} [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2]. \quad (6.1.15v)$$

Систем хомогених алгебарских једначина по непознатим амплитудама  $U_{in}$  има решења различита од тривијалних која као и до сада одређујемо применом већ описане тригонометријске методе. Решење  $i$ -те алгебарске једначине система (6.1.14) претпостављамо као

$$U_{in} = N \cos(i \varphi) + M \sin(i \varphi), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (6.1.16)$$

где је  $\varphi$  непознати параметар која одређујемо на основу граничних услова ланца, тј. прве и последње једначине система (6.1.14). Заменом претпостављеног решења (6.1.16) у  $i$ -ту алгебарску једначину система (6.1.14) и претпостављајући да су сви нано-штапови једнаких материјалних и геометријских карактеристика међусобно повезани идентичним виско-еластичним слојевима добијамо две тригонометријске једначине

$$N\{-v_n \cos[(i-1)\varphi] + S_n \cos(i\varphi) - v_n \cos[(i+1)\varphi]\} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, m-1, \quad (6.1.17a)$$

$$M\{-v_n \sin[(i-1)\varphi] + S_n \sin(i\varphi) - v_n \sin[(i+1)\varphi]\} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, m-1, \quad (6.1.17b)$$

где су

$$S_n = \alpha_n^2 \bar{e}(1 + \lambda_n \tau_d) + \bar{m} \lambda_n^2 [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2] + 2v_n, \quad (6.1.18a)$$

$$v_n = k[1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2] + \lambda_n b [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2]. \quad (6.1.18b)$$

Након елементарних алгебарских трансформација у једначинама (6.1.17) добијамо

$$(S_n - 2v_n \cos \varphi) N \cos(i\varphi) = 0, \quad (6.1.19a)$$

$$(S_n - 2v_n \cos \varphi) M \sin(i\varphi) = 0. \quad (6.1.19b)$$

Решења различита од тривијалних када је  $N \neq 0, \cos(i\varphi) \neq 0, M \neq 0$  и  $\sin(i\varphi) \neq 0$  могућа су када је

$$S_n = 2v_n \cos \varphi. \quad (6.1.20)$$

Ако у једначини (6.1.20) заменимо  $S_n$  и  $v_n$  из (6.1.18) добијамо једначину по непознатим карактеристичним вредностима  $\lambda_n$

$$\bar{m}\beta_n \lambda_n^2 + [\alpha_n^2 \bar{e} \tau_d + 2b\beta_n(1 - \cos\varphi)]\lambda_n + [\alpha_n^2 \bar{e} + 2k\beta_n(1 - \cos\varphi)] = 0, \quad (6.1.21)$$

где је  $\beta_n = [1 + (e_0 \tilde{a})^2 \alpha_n^2]$ .

Решењем карактеристичне једначине (6.1.21), одређујемо аналитичко решење за карактеристичне вредности (или комплексне сопствене вредности)  $\lambda_n$  система повезаних виско-еластичних нано-штапова, као

$$\lambda_{n(1/2)} = -\delta_n \pm \sqrt{\delta_n^2 - \omega_n^2}, \quad (6.1.22a)$$

у коме је  $\delta_n$  је коефицијент пригушења, а  $\omega_n$  сопствена фреквенција непригушених осцилација система

$$\begin{aligned} \delta_n &= \frac{\alpha_n^2 \bar{e} \tau_d + 2b\beta_n(1 - \cos\varphi)}{2\bar{m}\beta_n}, \\ \omega_n^2 &= \frac{\alpha_n^2 \bar{e} + 2k\beta_n(1 - \cos\varphi)}{\bar{m}\beta_n}. \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

Сада карактеристичне вредности  $\lambda_n$  система можемо изразити преко чланова сопствене фреквенције непригушених осцилација система  $\omega_n$  и коефицијента расипања  $\zeta_n = \delta_n/\omega_n$ , као

$$\lambda_{n(1/2)} = \omega_n \left( -\zeta_n \pm i \sqrt{1 - \zeta_n^2} \right) = -\delta_n \pm ip_n, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (6.1.23)$$

где је члан  $\delta_n = \zeta_n \omega_n$ , у карактеристичним вредностима  $\lambda_n$  (6.1.23) представља коефицијент пригушења у систему, док члан  $p_n = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}$  представља кружну фреквенцију система.

Вредности за непознати параметар  $\varphi$  за уклештен и слободни ланац одређени су у Глави 5 и гласе редом  $\varphi_{cc,s} = \frac{s\pi}{m+1}$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ ;  $\varphi_{fc,s} = \frac{s\pi}{m}$ ,  $s = 0, 1, \dots, m-1$ .

Карактеристичне вредности  $\lambda_n$  за уклештен ланац

$$\begin{aligned} \lambda_{cc,n(1/2)} &= - \left[ \frac{\alpha_n^2 \bar{e} \tau_d + 2b\beta_n \left[ 1 - \cos \left( \frac{s\pi}{m+1} \right) \right]}{2\bar{m}\beta_n} \right] \\ &\pm i \sqrt{\frac{4\bar{m}\beta_n \left[ \alpha_n^2 \bar{e} + 2k\beta_n \left[ 1 - \cos \left( \frac{s\pi}{m+1} \right) \right] \right] - \left[ \alpha_n^2 \bar{e} \tau_d + 2b\beta_n \left[ 1 - \cos \left( \frac{s\pi}{m+1} \right) \right] \right]^2}{2\bar{m}\beta_n}}, \end{aligned} \quad (6.1.24)$$

и за слободни ланац

$$\lambda_{fc,n(1/2)} = - \left[ \frac{\alpha_n^2 \bar{e} \tau_d + 2b\beta_n \left[ 1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m}\right) \right]}{2\bar{m}\beta_n} \right] \\ \pm i \sqrt{\frac{4\bar{m}\beta_n \left[ \alpha_n^2 \bar{e} + 2k\beta_n \left[ 1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m}\right) \right] \right] - \left[ \alpha_n^2 \bar{e} \tau_d + 2b\beta_n \left[ 1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m}\right) \right] \right]^2}{2\bar{m}\beta_n}}, \quad (6.1.25)$$

#### 6.1.4 Асимптотска анализа

Претпоставимо да број мода осциловања тежи бесконачно, тј. ако заменимо  $n \rightarrow \infty$  у карактеристичну вредност (комплексну сопствену вредност) система (6.1.21), добијамо асимптотску вредност комплексне сопствене вредности као

$$\lambda_{n \rightarrow \infty, s(1/2)} = - \left[ \frac{\bar{e} \tau_d + 2b(e_0 \tilde{a})^2 (1 - \cos\varphi)}{2\bar{m}(e_0 \tilde{a})^2} \right] \\ \pm i \sqrt{\frac{4\bar{m}(e_0 \tilde{a})^2 [\bar{e} + 2k(e_0 \tilde{a})^2 (1 - \cos\varphi)] - [\bar{e} \tau_d + 2b(e_0 \tilde{a})^2 (1 - \cos\varphi)]^2}{2\bar{m}(e_0 \tilde{a})^2}}, \quad (6.1.26)$$

где је параметар  $\varphi = \varphi_{cc,s} = \frac{s\pi}{m+1}$  за уклештен или  $\varphi = \varphi_{fc,s} = \frac{s\pi}{m}$  слободни ланац. Једначина (6.1.26) је асимптотска карактеристична вредност и не зависи од граничних услова нано-штапова.

У следећем случају разматрана је асимптотска карактеристична вредност система када број нано-штапова тежи бесконачно, тј. ако заменимо  $m \rightarrow \infty$  у релацијама (6.1.24) или (6.1.25), тада  $\cos \varphi_{cc,s} = 1$  и  $\cos \varphi_{fc,s} = 1$ , па се добија

$$\lambda_{m \rightarrow \infty, n(1/2)} = - \frac{\alpha_n^2 \bar{e} \tau_d}{2\bar{m}\beta_n} \pm i \frac{\sqrt{4\bar{m}\beta_n \alpha_n^2 \bar{e} - (\alpha_n^2 \bar{e} \tau_d)^2}}{2\bar{m}\beta_n}. \quad (6.1.27)$$

Из једначине (6.1.27), можемо закључити да асимптотска карактеристична вредност не зависи од броја нано-штапова у систему као и од виско-еластичне интеракције слојева.

Сада можемо размотрити случај када истовремено број мода осциловања и број нано-штапова теже истовремено бесконачно, тј. ако заменимо  $m \rightarrow \infty$  и  $n \rightarrow \infty$  у једначину (6.1.21) добијамо асимптотску карактеристичну вредност система

$$\lambda_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty(1/2)} = - \frac{\bar{e} \tau_d}{2\bar{m}(e_0 \tilde{a})^2} \pm i \frac{\sqrt{4\bar{m}(e_0 \tilde{a})^2 \bar{e} - (\bar{e} \tau_d)^2}}{2\bar{m}(e_0 \tilde{a})^2}. \quad (6.1.28)$$

Једначина (6.1.28) представља карактеристичну вредност система спрегнутих виско-еластичних нано-штапова када је број нано-штапова и број мода осциловања теже бесконачно и једнака је за оба ланчана система и оба типа граничних услова нано-штапа.

### 6.1.5 Нумерички примери

Најпре ћемо извршити упоредну анализу, аналитички добијених резултата за кружне фреквенције  $p_n$  и коефицијенте пригушења  $\delta_n$ , са резултатима из литературе рад [48], за систем од два нано-штапа. Такође извршићемо, упоредну анализу аналитички добијених кружних фреквенција  $p_n$  и коефицијента пригушења  $\delta_n$  за системе који садрже већи број нано-штапова  $m > 2$ , са резултатима добијеним нумеричким решавањем карактеристичног полинома система. Параметри који ће бити коришћени у упоредној анализи су усвојени из рада [48], где је  $L = 1$  [nm],  $\bar{m} = 10^{-9}$  [kg/m],  $\bar{e} = 1$  [nN],  $(e_0\bar{a}) = 2$  [nm], крутост еластичног слоја  $K = 8$  N/nm, структурно пригушење  $\tau_d = 0.001$  [ns] и  $0.004$  [ns]. Кружна фреквенција  $p_n$  и коефицијент пригушења  $\delta_n$  за систем који се састоји од два спрегнута нано-штапа добијени су аналитичким путем применом тригонометријске методе и приказани су у Табели 6.1, за различите вредности нелокалног параметра  $(e_0\bar{a})$ . Запажа се да са порастом параметара виско-еластичног пригушења система долази до веома малог смањења кружне фреквенције  $p_n$  али до знатног повећања коефицијента пригушења  $\delta_n$ . Добијени аналитички резултати упоређени су са резултатима из рада [48], и показано је одлично слагање.

**ТАБЕЛА 6.1**

Упоредна анализа вредности прве четири кружне фреквенције  $p_n$  и коефицијента пригушења  $\delta_n$  система који се састоји од два конзолна (C-F) нано-штапа који су повезани тако да образују слободни ланац.

C-F	$n$	$(e_0\bar{a})=0$ nm	$(e_0\bar{a})=0.5$ nm	$(e_0\bar{a})=1$ nm	$(e_0\bar{a})=1.5$ nm	$(e_0\bar{a})=2$ nm					
		Реф. [48]									
$\tau_d = 0$ ns $b = 0$ Nns/nm $k = 8$ N/nm	1	1.5708	1.2353	0.8436	0.6137	0.4764					
	2	4.2974	4.1864	4.0880	4.0468	4.0283					
	3	47124	1.8411	0.9782	0.6601	0.4972					
	4	6.1812	4.4033	4.1179	4.0541	4.0308					
Слободни ланац- Тригонометријски метод											
		$p_n$	$\delta_n$	$p_n$	$\delta_n$	$p_n$	$\delta_n$	$p_n$	$\delta_n$	$p_n$	$\delta_n$
$\tau_d = 0.001$ ns	1	1.5708	0.0012	1.2353	0.0007	0.8435	0.0003	0.6136	0.0001	0.4764	0.0001
$b = 0.01$ Nns/nm	2	4.2973	0.0112	4.1864	0.0107	4.0879	0.0103	4.0467	0.0101	4.0282	0.0101
$k = 8$ N/nm	3	4.7123	0.0111	1.8410	0.0016	0.9782	0.0004	0.6600	0.0002	0.4972	0.0001
$m=2$	4	6.1811	0.0211	4.4033	0.0116	4.1178	0.0104	4.0540	0.0102	4.0307	0.0101
$\tau_d = 0.004$ ns	1	1.5707	0.0049	1.2353	0.0030	0.8435	0.0014	0.6136	0.0007	0.4764	0.0004
$b = 0.01$ Nns/nm	2	4.2973	0.0149	4.1863	0.0130	4.0879	0.0114	4.0467	0.0107	4.0282	0.0104
$k = 8$ N/nm	3	4.7121	0.0444	1.8410	0.0067	0.9782	0.0019	0.6600	0.0008	0.4972	0.0004
$m=2$	4	6.1809	0.0544	4.4033	0.0167	4.1178	0.0119	4.0540	0.0108	4.0307	0.0104

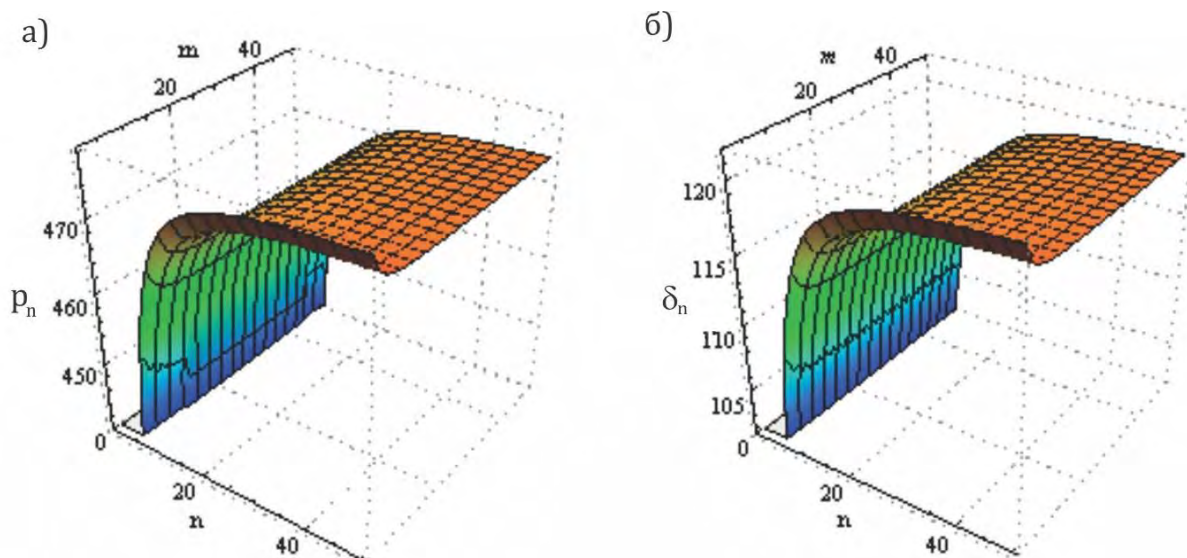
У циљу потврде аналитички добијених резултата за кружне фреквенције  $p_n$  и коефицијенте пригушења  $\delta_n$  система који се састоје од три, пет и десет ( $m = 3, 5, 10$ ) нано-штапова, коришћене су нумеричке методе у решавању карактеристичне једначине система

(6.1.14). Аналитички резултати за кружне фреквенције  $p_n$  и коефицијенте пригушења  $\delta_n$  система добијени применом тригонометријске методе једначине (6.1.24) и (6.1.25) и упоређени су са нумеричким добијеним решењима карактеристичне једначине система хомогених једначина (6.1.14), за оба типа граничних услова. На основу вредности приказаних у Табели 6.2, можемо закључити да се ови резултати одлично слажу.

**ТАБЕЛА 6.2**

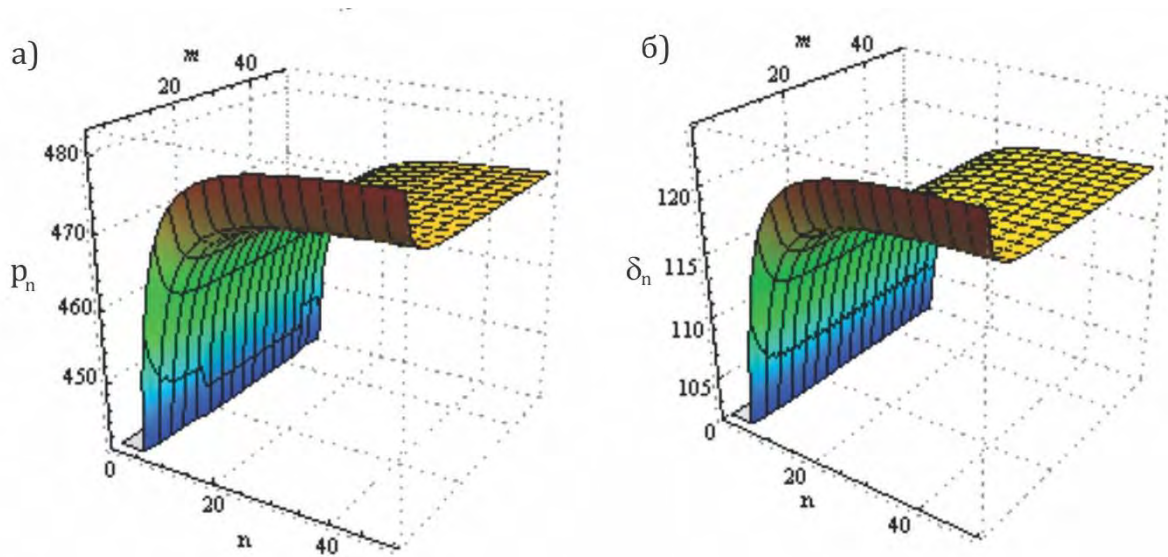
Упоредна анализа вредности кружне фреквенције  $p_n$  и коефицијента пригушења  $\delta_n$  за систем нано-штапова повезаних тако да образују уклештени и слободни ланац, када је броја нано-штапова  $m > 2$ .

$s=1, n=1$		Тригонометријски метод						Нумерички метод					
		$m=3$		$m=5$		$m=10$		$m=3$		$m=5$		$m=10$	
		$p_n$	$\delta_n$	$p_n$	$\delta_n$	$p_n$	$\delta_n$	$p_n$	$\delta_n$	$p_n$	$\delta_n$	$p_n$	$\delta_n$
С-С	Уклештени	2.22038	0.00305	1.54513	0.00146	0.94442	0.00052	2.22038	0.00305	1.54513	0.00146	0.94442	0.00052
	Слободни	2.87120	0.00512	1.81647	0.00203	1.01337	0.00061	2.87120	0.00512	1.81647	0.00203	1.01337	0.00061
С-F	Уклештени	2.21659	0.00304	1.53967	0.00145	0.93547	0.00051	2.21659	0.00304	1.53967	0.00145	0.93547	0.00051
	Слободни	2.86827	0.00511	1.81183	0.00202	1.00504	0.00060	2.86827	0.00511	1.81183	0.00202	1.00504	0.00060

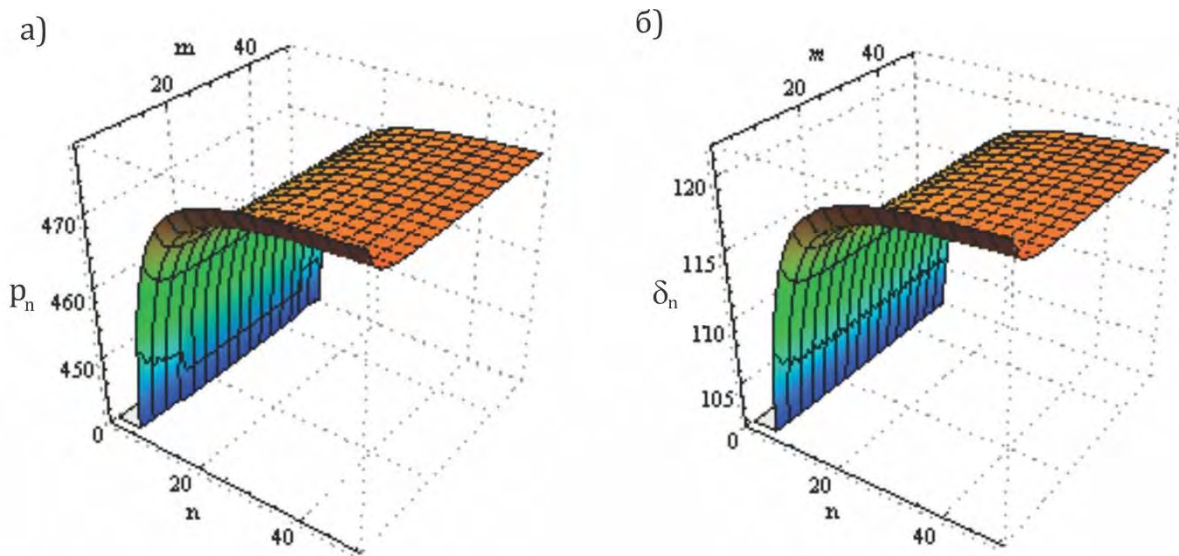


**Сл. 6.1.2. а)** Кружне фреквенције  $p_n$ , **б)** коефицијент пригушења  $\delta_n$  система за обострано уклештене штапове (С-С) повезан у уклештен ланац, за  $s = 1, (e_0 \tilde{a})^2 = 2[nm^2]$ ,

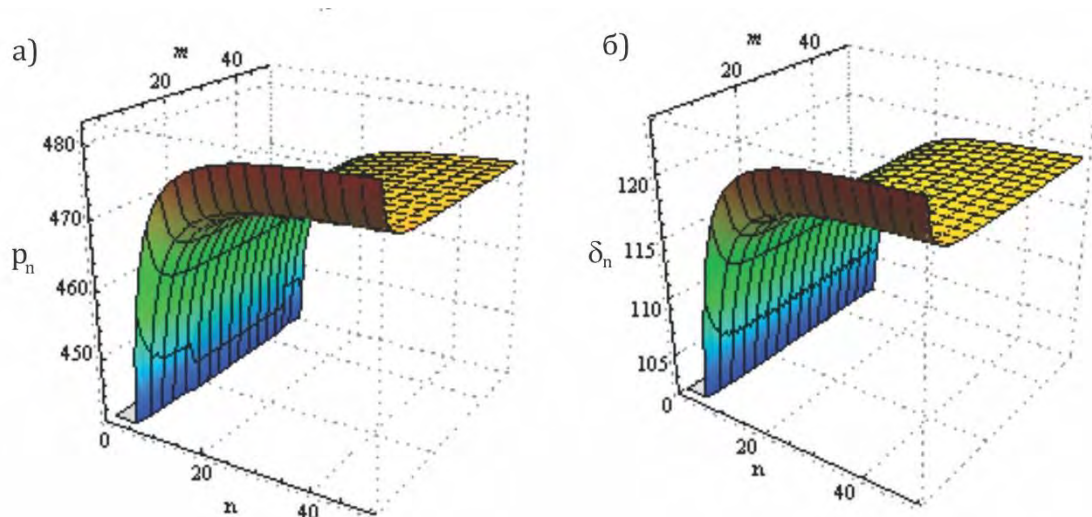
$$\tau_d = 0.001 [ns].$$



Сл. 6.1.3. а) Кржне фреквенције  $p_n$ , б) коефицијент пригушења  $\delta_n$  система за обострано уклештене штапове (C-C) повезан у слободни ланац, за  $s = 1, (e_0 \tilde{a})^2 = 2[nm^2]$ ,  $\tau_d = 0.001 [ns]$ .



Сл. 6.1.4. а) Кржне фреквенције  $p_n$ , б) коефицијент пригушења  $\delta_n$  система за конзолне штапове (C-F), повезан у уклештен ланац, за  $s = 1, (e_0 \tilde{a})^2 = 2[nm^2], \tau_d = 0.001 [ns]$ .



Сл. 6.1.5. а) Кругне фреквенције  $p_n$ , б) коефицијент пригушења  $\delta_n$  система за конзолне штапове (C- F), повезан у слободни ланац, за  $s = 1$ ,  $(e_0 \tilde{a})^2 = 2[nm^2]$ ,  $\tau_d = 0.001$  [ns].

Међутим, за детаљнију и општију осцилаторну анализу система спрегнутих виско-еластичних нано-штапова, размотрићемо систем од  $m$  међусобно повезаних једнослојних угљеничних нано-цеви са виско-еластичним особинама. Утицаји нелокалног параметра, број угљеничних нано-цеви, број мода осциловања као и виско-еластичних параметара на кругне фреквенције  $p_n$  и коефицијенте пригушења  $\delta_n$  система за оба типа граничних и ланчаних услова су дати на одговарајућим дијаграмима. Вредности материјалних и геометријских параметара коришћени у овом делу анализе су усвојени и једнаки су:  $d = 1.1$  [nm] пречник нано-цеви,  $L = 10 d$  дужина нано-цеви,  $E = 1.1$  [ТПа] модул еластичности,  $\rho = 2300$  [kg/m<sup>3</sup>] густина масе,  $k = 10$  [N/nm] и  $b = 0.01$  [Nns/nm] крутост и пригушење виско-еластичног слоја. У циљу анализе утицаја броја угљеничних нано-цеви и броја мода осциловања на кругне фреквенције  $p_n$  и коефицијент пригушења  $\delta_n$  система спрегнутог система за оба типа граничних услова, нацртани су дијаграми Сл. 6.1.2 - Сл.6.1.5. Број мода осциловања је дата у опсегу  $n = 1 \div 50$ , док је број нано-штапова у систему је  $m = 2 \div 50$ . Са приказаних дијаграма може се запазити да је утицај мода осциловања и броја нано-штапова у свим случајевима идентичан, тј. повећање броја мода осциловања  $n$  изазива повећање кругне фреквенције  $p_n$  и коефицијента пригушења  $\delta_n$  система, док повећање броја нано-штапова у систему изазива њихово смањење. Међутим, када број мода осциловања и број нано-штапова теже великим вредностима ( $n \rightarrow \infty$ ,  $m \rightarrow \infty$ ), долазимо до асимтопске карактеристичне вредности (кругне фреквенције  $p_n$  и коефицијента пригушења  $\delta_n$ ), што је и показано у једначинама (6.1.26 – 6.1.28).

## 6.2 Трансверзалне осцилације система спрегнутих виско-еластичних нано-греда под дејством лонгитудиналног магнетног поља применом нелокалне теорије виско-еластичности

### 6.2.1 Опште напомене

Слободне трансверзалне осцилације система угљеничних нано-цеви под дејством лонгитудиналног магнетног поља, разматране су у овом одељку. Еквивалентни механички модел система угљеничних нано-цеви представљен је као систем виско-еластичних просто-ослоњених нано-греда међусобно повезаних виско-еластичним слојевима. Основне једначине кретања изведене су користећи другог Newton-овог закона кретања, Euler-Bernoulli-јеву теорију греде и нелокалну конститутивну релацију где су узети у обзир ефекти мале скале, утицај инерције ротације попречних пресека нано-греде као и структурно пригушење (уведено преко нелокалне виско-еластичне конститутивне релације) нано-греде. Утицај лонгитудиналног магнетног поља је узет преко дејства Lorenz-ове магнетне силе добијене применом класичних Maxwell-ових релација. Аналитичка решења за кружне фреквенције и коефицијент пригушења система одређена су методом раздвајања променљивих и тригонометријским решењем за систем нано-греда повезан као уклештен ланац. Такође, добијене су асимптотске вредности кружне фреквенције и коефицијента пригушења у затвореној форми, где је показано да оне не зависе од мода осциловања као и броја нано-греда у систему. Потврда аналитички добијених резултата је урађена поређењем са резултатима добијеним нумеричким путем. Такође, дата је анализа утицаја нелокалног параметра, магнетног параметра и параметара виско-еластичног слоја на кружне фреквенције и коефицијенте пригушења система нано-греда.

### 6.2.2 Диференцијалне једначине кретања система

Размотримо систем од  $m$  једнослојних угљеничних нано-цеви уметнут у полимерну матрицу Сл. 6.2.1а. Механички модел таквог система је образован од  $m$  виско-еластичних просто-ослоњених нано-греда између којих су виско-еластични слојеви Сл. 6.2.1б. Виско-еластични слојеви су моделирани као Kelvin-Voigt-ов виско-еластични модел сачињен од паралелне везе опруга и пригушница, где је  $k_i$  крутост опруга, а  $b_i$  вискозност пригушница. Угљенична нано-цев је моделирана коришћењем нелокалне Euler-Bernoulli-јеве теорије греде где је узет у обзир и утицај обртања попречних пресека нано-греде. Све нано-греде у систему индентичних материјалних и геометријских карактеристика где је:  $E$  - модул еластичности материјала нано-греда,  $\rho$  - густина масе,  $A$  - повешина попречног пресека,  $I$  - момент инерције,  $(e_0 \tilde{a})$  - нелокални параметар и  $\tau_d$  - унутрашње (структурно) пригушење. Такође треба нагласити да су све нано-греде под дејством Lorenz-ове магнетне силе изазване лонгитудиналним магнетним пољем.



Кретање система спрегнутих нано-греда дефинисано је почевши од нано-греде 1, нано-греда 2 итд. до  $m$ -те нано-греде, одговарајућим трансверзалним померањим  $w_1(x, t)$ ,  $w_2(x, t)$ , ...,  $w_{m-1}(x, t)$  и  $w_m(x, t)$ . Претпостављамо да је систем нано-греда повезан у уклештени ланац Сл. 6.2.1б, у коме су прва и последња нано-греда повезане са непокретном подлогом виско-еластичним слојевима коефицијената крутости  $k_0$  и  $k_m$  и коефицијената вискозности  $b_0$  и  $b_m$ . У том случају су трансверзална померања  $w_0(x, t) = 0$  и  $w_{m+1}(x, t) = 0$  и она представљају граничне услове за уклештени ланац. Размотрићемо системе када су виско-еластични слојеви између нано-греда једнаких карактеристика  $k_1 = k_2 = \dots = k_i = \dots = k_{m-1} = k_m = k$  и  $b_1 = b_2 = \dots = b_i = \dots = b_{m-1} = b_m = b$ .

Уочимо сада,  $i$ -ту нано-греду која је под дејством лонгитудиналног магнетног поља и виско-еластичне интеракције Сл. 6.2.1в. Применом другог Newton-овог закона кретања можемо писати следеће једначине кретања елементарног дела нано-греде, када је узет у обзир и утицај инерције ротације попречних пресека нано-греде

$$\sum F_{zi} = dm \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial F_T}{\partial x} + q_i - q_{i-1} + \tilde{q}_i = \rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}, \quad (6.2.1a)$$

$$\sum M_{yi} = dJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Rightarrow F_T - \frac{\partial M_f}{\partial x} = \rho I \frac{\partial^3 w_i}{\partial x \partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (6.2.1b)$$

где је  $dJ$  инерција ротације елементарног дела греде, а  $\theta$  представља угао ротације попречног пресека греде дефинисани као

$$dJ = \rho I dx, \quad \theta = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (6.2.2a)$$

док су силе које одређују спољашње оптерећење, а потичу од виско-еластичне интеракције дефинисане као

$$q_i = k_i(w_{i+1} - w_i) + b_i(\dot{w}_{i+1} - \dot{w}_i), \quad q_{i-1} = k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) + b_{i-1}(\dot{w}_i - \dot{w}_{i-1}), \quad (6.2.2b)$$

где је  $\tilde{q}_i$  утицај лонгитудиналног магнетног поља дефинисан у једначини (4.9).

Диференцијалне једначине које описују кретања система нано-греда, као функције трансверзалног померања  $w_i(x, t)$ , одређујемо заменом једначина (6.2.1a), (6.2.1б) и (6.2.2a), (6.2.2б) у једначину (1.3.8a), као што је детаљније приказано у одељку 5.3, тако да добијамо

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w_i}{\partial t^2 \partial x^2} + k_i(w_i - w_{i+1}) + b_i(\dot{w}_i - \dot{w}_{i+1}) \\ & + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) + b_{i-1}(\dot{w}_i - \dot{w}_{i-1}) - \eta A H_x^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + EI \left( 1 + \tau_a \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \\ & = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w_i}{\partial t^2 \partial x^2} + k_i(w_i - w_{i+1}) + b_i(\dot{w}_i - \dot{w}_{i+1}) \right. \\ & \left. + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) + b_{i-1}(\dot{w}_i - \dot{w}_{i-1}) - \eta A H_x^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right], \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (6.2.3a) \end{aligned}$$

или у бездимензионом облику

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial \tau^2} - \delta \frac{\partial^4 \bar{w}_i}{\partial \tau^2 \partial \xi^2} + K_i(\bar{w}_i - \bar{w}_{i+1}) + B_i(\dot{\bar{w}}_i - \dot{\bar{w}}_{i+1}) \\
& + K_{i-1}(\bar{w}_i - \bar{w}_{i-1}) + B_{i-1}(\dot{\bar{w}}_i - \dot{\bar{w}}_{i-1}) - MP \frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial \xi^2} + \left(1 + T_d \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial^4 \bar{w}_i}{\partial \xi^4} \\
& = \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial \tau^2} - \delta \frac{\partial^4 \bar{w}_i}{\partial \tau^2 \partial \xi^2} + K_i(\bar{w}_i - \bar{w}_{i+1}) + B_i(\dot{\bar{w}}_i - \dot{\bar{w}}_{i+1}) \right. \\
& \quad \left. + K_{i-1}(\bar{w}_i - \bar{w}_{i-1}) + B_{i-1}(\dot{\bar{w}}_i - \dot{\bar{w}}_{i-1}) - MP \frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial \xi^2} \right], i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (6.2.36)
\end{aligned}$$

где су бездимензиони параметри

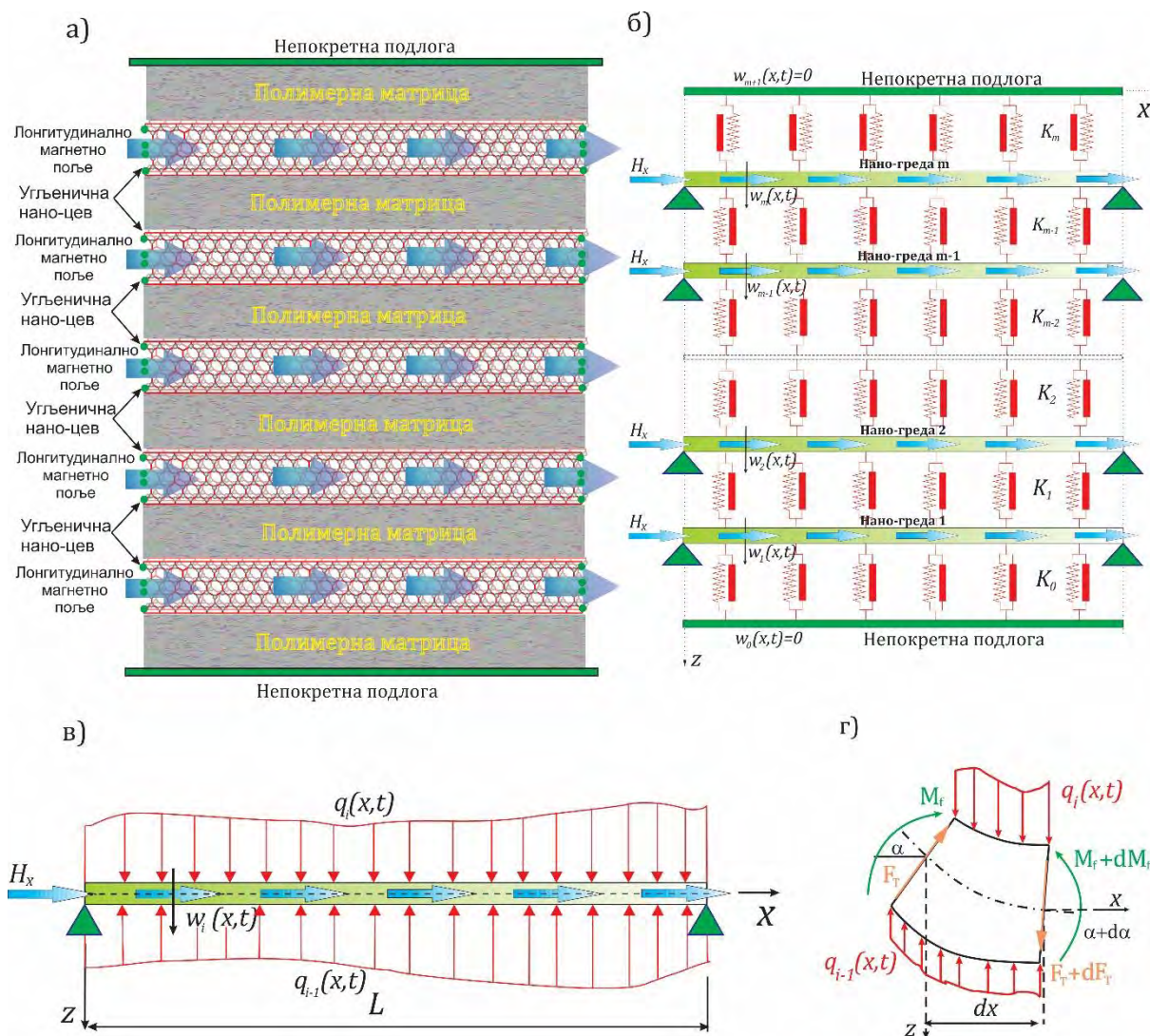
$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{I}{AL^2}, \quad K = k \frac{L^4}{EI}, \quad B = b \sqrt{\frac{L^4}{\rho AEI}}, \quad T_d = \frac{\tau_d}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \\
MP &= \frac{\eta AH_x^2}{EI} L^2, \quad \nu^2 = \frac{(e_0 \tilde{\alpha})^2}{L^2}, \quad \bar{w}_i = \frac{w_i}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \dot{\bar{w}}_i = \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \tau}. \quad (6.2.4)
\end{aligned}$$

У горњим релацијама  $\Omega_n$ ,  $K$ ,  $B$ ,  $T_d$ ,  $MP$  и  $\nu$  представљају следеће параметре, бездимензиона фреквенција, крутост и пригушење виско-еластичног слоја, структурно пригушење (унутрашње пригушење), магнетни и нелокални параметар, редом. Уведећи претпоставке да су трансверзална померања  $\bar{w}_0(x, t) = 0$  и  $\bar{w}_{m+1}(x, t) = 0$  у систем једначина (6.2.36) и претпостављајући да су сви слојеви једнаких материјалних карактеристика, добијамо систем диференцијалних једначина за уклештени ланац као

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} - \gamma \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \tau^2 \partial \xi^2} + K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) + B(\dot{\bar{w}}_1 - \dot{\bar{w}}_2) \\
& + K\bar{w}_1 + B\dot{\bar{w}}_1 - MP \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \xi^2} + \left(1 + T_d \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \xi^4} \\
& = \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} - \gamma \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \tau^2 \partial \xi^2} + K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) + B(\dot{\bar{w}}_1 - \dot{\bar{w}}_2) + K\bar{w}_1 + B\dot{\bar{w}}_1 - MP \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \xi^2} \right], \\
& \quad \quad \quad i = 1, \quad (6.2.5a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial \tau^2} - \gamma \frac{\partial^4 \bar{w}_i}{\partial \tau^2 \partial \xi^2} + K(\bar{w}_i - \bar{w}_{i+1}) + B(\dot{\bar{w}}_i - \dot{\bar{w}}_{i+1}) \\
& + K(\bar{w}_i - \bar{w}_{i-1}) + B(\dot{\bar{w}}_i - \dot{\bar{w}}_{i-1}) - MP \frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial \xi^2} + \left(1 + T_d \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial^4 \bar{w}_i}{\partial \xi^4} \\
& = \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial \tau^2} - \gamma \frac{\partial^4 \bar{w}_i}{\partial \tau^2 \partial \xi^2} + K(\bar{w}_i - \bar{w}_{i+1}) + B(\dot{\bar{w}}_i - \dot{\bar{w}}_{i+1}) \right. \\
& \quad \left. + K(\bar{w}_i - \bar{w}_{i-1}) + B(\dot{\bar{w}}_i - \dot{\bar{w}}_{i-1}) - MP \frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial \xi^2} \right], \quad i = 2, 3, \dots, m - 1, \quad (6.2.56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \bar{w}_m}{\partial \tau^2} - \gamma \frac{\partial^4 \bar{w}_m}{\partial \tau^2 \partial \xi^2} + K \bar{w}_m + B \dot{\bar{w}}_m \\
& + K(\bar{w}_m - \bar{w}_{m-1}) + B(\dot{\bar{w}}_m - \dot{\bar{w}}_{m-1}) - MP \frac{\partial^2 \bar{w}_m}{\partial \xi^2} + \left(1 + T_d \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial^4 \bar{w}_m}{\partial \xi^4} \\
& = v^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}_m}{\partial \tau^2} - \gamma \frac{\partial^4 \bar{w}_m}{\partial \tau^2 \partial \xi^2} + K \bar{w}_m + B \dot{\bar{w}}_m + K(\bar{w}_m - \bar{w}_{m-1}) + B(\dot{\bar{w}}_m - \dot{\bar{w}}_{m-1}) - MP \frac{\partial^2 \bar{w}_m}{\partial \xi^2} \right], \\
& i = m. \quad (6.2.5в)
\end{aligned}$$



Сл. 6.2.1. а) Систем од  $m$  једнослојних угљеничних нано-цеви повезан висло-еластичним слојевима под дејством лонгитудиналног магнетног поља,

б) Еквивалентни механички модел, в)  $i$ -та нано-греда, г) Елементарни део  $i$ -те нано-греде.

Како су све нано-греде у систему просто ослоњене, математичка формулација граничних услова се може написати у следећој математичкој форми

$$\bar{w}_i(0, \tau) = \bar{w}_i(1, \tau) = 0, \quad \bar{M}_{fi}(0, \tau) = \bar{M}_{fi}(1, \tau) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (6.2.6)$$

### 6.2.3 Аналитичко решење

Аналитичко решење система парцијалних диференцијалних једначина претпостављамо у облику тригонометријског реда, као

$$\bar{w}_i(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_{in} \sin(n\pi\xi) e^{\lambda_n \tau}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.2.7)$$

где су  $\bar{W}_{in}$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ) амплитуде,  $\lambda_n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots, m$ ) су карактеристичне вредности система. Заменом релације (6.2.7) у систем парцијалних диференцијалних једначина (6.2.5), систем се своди на  $m$  алгебарских једначина по непознатим амплитудама  $\bar{W}_{in}$

$$\bar{S}_n \bar{W}_{1n} - \bar{v}_n \bar{W}_{2n} = 0, \quad i = 1, \quad (6.2.8a)$$

$$-\bar{v}_n \bar{W}_{i-1n} + \bar{S}_n \bar{W}_{in} - \bar{v}_n \bar{W}_{i+1n} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, m-1, \quad (6.2.8b)$$

$$-\bar{v}_n \bar{W}_{m-1n} + \bar{S}_n \bar{W}_{mn} = 0, \quad i = m, \quad (6.2.8b)$$

који можемо написати у матричном облику као

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_n & -\bar{v}_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{v}_n & \bar{S}_n & -\bar{v}_n & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{S}_n & -\bar{v}_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\bar{v}_n & \bar{S}_n & -\bar{v}_n & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\bar{v}_n & \bar{S}_n & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{S}_n & -\bar{v}_n & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\bar{v}_n & \bar{S}_n & \dots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{W}_{1n} \\ \bar{W}_{2n} \\ \bar{W}_{3n} \\ \dots \\ \bar{W}_{i-1n} \\ \bar{W}_{in} \\ \bar{W}_{i+1n} \\ \dots \\ \bar{W}_{m-2n} \\ \bar{W}_{m-1n} \\ \bar{W}_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.2.9)$$

где је

$$\bar{S}_n = \lambda_n^2 (1 + \gamma n^2 \pi^2) k_n + 2\bar{v}_n + n^2 \pi^2 MP k_n + n^4 \pi^4 (1 + \lambda_n T_d), \quad (6.2.10a)$$

$$\bar{v}_n = (K + \lambda_n B) k_n, \quad (6.2.10b)$$

$$k_n = (1 + \nu^2 n^2 \pi^2). \quad (6.2.10b)$$

Поступком детаљније описаним раније, или на примеру у Глави 6.1, одређујемо карактеристичну једначину

$$\bar{S}_n = 2\bar{v}_n \cos \varphi_{cc}. \quad (6.2.11)$$

где је  $\varphi_{cc}$  непознати параметар за обострано уклештен ланац просто ослоњених нано-греда

$$\varphi_{cc,s} = \frac{s \pi}{m+1}, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (6.2.12)$$

Ако заменимо релацију за  $\varphi_{cc,s}$  и једначине (6.2.10) у карактеристичну једначину (6.2.11), добија се

$$\lambda_n^2 (1 + \gamma n^2 \pi^2) k_n + 2(K + \lambda_n B) k_n (1 - \cos \varphi_{cc,s}) + n^2 \pi^2 MP k_n + n^4 \pi^4 (1 + \lambda_n T_d) = 0. \quad (6.2.13)$$

Сада карактеристичне вредности или комплексне сопствене вредности система  $\lambda_n$  можемо изразити преко чланова сопствене фреквенције непригушених осцилација система  $\omega_n$  и коефицијента пригушења  $\delta_n$ , као

$$\lambda_{n(1/2)} = -\delta_n \pm i\sqrt{\omega_n^2 - \delta_n^2} = -\delta_n \pm ip_n, \quad n = 1, 2, 3 \dots, \quad (6.2.14a)$$

где је

$$\delta_n = \frac{2Bk_n \left[ 1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right) \right] + T_d n^4 \pi^4}{2(1 + \gamma n^2 \pi^2) k_n}, \quad (6.2.14б)$$

$$\omega_n^2 = \frac{2K \left[ 1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right) \right] k_n + n^2 \pi^2 MP k_n + n^4 \pi^4}{(1 + \gamma n^2 \pi^2) k_n}, \quad (6.2.14в)$$

док  $p_n = \sqrt{\omega_n^2 - \delta_n^2}$  представља кружну фреквенцију система.

Заменом вредности за  $\delta_n$  и  $\omega_n$  у (6.2.14а), можемо одредити карактеристичне вредности система за обострано уклештен ланац, као

$$\lambda_{ncc,s} = -\frac{2Bk_n \left[ 1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right) \right] + T_d n^4 \pi^4}{2(1 + \gamma n^2 \pi^2) k_n} \pm i \sqrt{\frac{4(1 + \gamma n^2 \pi^2) k_n \left[ 2Kk_n \left[ 1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right) \right] + n^2 \pi^2 MP k_n + n^4 \pi^4 \right] - \left[ 2Bk_n \left[ 1 - \cos\left(\frac{s\pi}{m+1}\right) \right] + T_d n^4 \pi^4 \right]^2}{4(1 + \gamma n^2 \pi^2)^2 k_n^2}}, \quad (6.2.14г)$$

Потребно је нагласити да реални део карактеристичне вредности система представља коефицијент пригушења  $\delta_n$ , док имагинарни део представља кружну фреквенцију  $p_n$  система спрегнутих нано-греда.

## 6.2.4 Асимптотска анализа

Размотримо случај када број нано-греда у систему тежи бесконачно. Комплексне сопствене вредности осциловања система за овај случај, добићемо када у израз (6.2.13) заменимо да  $m \rightarrow \infty$

$$\lambda_{m \rightarrow \infty}^n = -\frac{T_d n^4 \pi^4}{2(1 + \gamma n^2 \pi^2) k_n} \pm i \sqrt{\frac{4(1 + \gamma n^2 \pi^2) k_n (n^2 \pi^2 MP k_n + n^4 \pi^4) - (T_d n^4 \pi^4)^2}{4(1 + \gamma n^2 \pi^2)^2 k_n^2}}. \quad (6.2.15)$$

Критичну вредност структурног пригушења одређујемо из услова да је кружна фреквенција једнак нули,

$$p_{m \rightarrow \infty}^n = 0, \quad \Rightarrow \quad (T_d)_{m \rightarrow \infty}^{cr} = \frac{\sqrt{4(1 + \gamma n^2 \pi^2) k_n (n^2 \pi^2 MP k_n + n^4 \pi^4)}}{n^4 \pi^4}. \quad (6.2.16)$$

Када број мода осциловања система тежи бесконачно, комплексне сопствене вредности система осциловања система, добићемо када у израз (6.2.13) заменимо да  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\lambda_{n \rightarrow \infty} = -\frac{T_d}{2\gamma v^2} \pm i \frac{\sqrt{4\gamma v^2(1+v^2MP) - (T_d)^2}}{2\gamma v^2}. \quad (6.2.17)$$

На основу резултата датих релацијама (6.2.15), (6.2.16) и (6.2.17) може се закључити да ове асимптотске вредности не зависе од утицаја пригушења у виско-еластичним слојевима. Критична вредност структурног пригушења добија се изједначавањем имагинарног дела релације (6.2.17) са нулом,

$$p_{n \rightarrow \infty} = 0, \quad \Rightarrow \quad (T_d)_{n \rightarrow \infty}^{cr} = 2v\sqrt{\gamma(1+v^2MP)}. \quad (6.2.18)$$

Овако добијени резултати зависе само од материјалних карактеристика система нано-греда.

## 6.2.5 Нумерички примери

У овом делу рада одредићемо и упоредити кружне фреквенције  $p_n$  и коефицијенте пригушења  $\delta_n$  система добијене применом тригонометријске методе и нумеричким решавањем карактеристичног полинома за систем виско-еластичних нано-греда који осцилује под дејством лонгитудиналног магнетног поља. Претпоставићемо да су све нано-греде у систему једнаких материјалних и геометријских карактеристика, што нам омогућава примену тригонометријске методе у налажењу аналитичких решења за карактеристичне вредности система. Вредности материјалних и геометријских параметара коришћених у овој анализи су  $K = 50$ ,  $B = 15$ ,  $T_d = 0.05$ ,  $v = 0.5$ ,  $\gamma = 0.5$  и  $MP = 25$ . У циљу провере тачности добијених аналитичких решења за карактеристичне вредности система, применом нумеричких метода одређено је решење фреквентног полинома система алгебарских једначина (6.2.9), а вредности су приказане у Табели 6.3. На основу овако добијених резултата запажамо да се вредности за кружне фреквенције  $p_n$  и коефицијенте пригушења  $\delta_n$  система добијене аналитичким и нумеричким путем одлично слажу. Треба истаћи да утицај повећања броја нано-греда у систему доводи до смањења оба дела карактеристичне вредности система, које теже асимптотским вредностима. Са физичке тачке гледишта асимптотска карактеристична вредност система за случај када број нано-греда тежи бесконачно представља карактеристичну вредност система једне просто-ослоњене виско-еластичне нано-греде. Такође, можемо уочити да повећањем броја нано-греда утицај виско-еластичног слоја на динамику система опада, што је у складу са једначином (6.2.15).

У наставку биће приказани утицај нелокалног параметра, јачине магнетног поља, броја нано-греда и коефицијената унутрашњег и спољашњег пригушења на кружну фреквенцију  $p_n$  и коефицијент пригушења  $\delta_n$  система. Треба напоменути да је анализиран само први мод осциловања система.

На Сл. 6.2.2а и Сл. 6.2.2б приказане су кружне фреквенције  $p_n$  и коефицијент пригушења  $\delta_n$  система, где се параметар магнетног поља мења у домену 0 - 25, а нелокални параметар у домену 0 - 1. Кружне фреквенције  $p_n$  расту скоро линеарно са повећањем параметра

магнетног поља, а коефицијент пригушења  $\delta_n$  система остаје непромењен. Нелокални параметар има нелинеарни утицај на оба дела карактеристичне вредности система и његовим повећањем вредности кружне фреквенције  $p_n$  и коефицијента пригушења  $\delta_n$  система се смањују. Међутим, може се уочити да је утицај нелокалности значајно већи на кружне фреквенције  $p_n$  него на коефицијенте пригушења  $\delta_n$  система. Такође, у општем случају можемо закључити да магнетни утицај има “ојачавајући” ефекат на систем нано-греда тако што повећава укупну крутост система, са друге стране нелокални параметар има “пригушујући” ефекат на динамику система и чини да систем буде “мекши”. Пажљивим бирањем ових двају параметара, можемо добити систем са одговарајућим динамичким одзивом, што је веома корисно при пројектовању нано-електромеханичких система. Што се тиче утицаја броја нано-греда у систему, њиховим повећањем долази до опадања вредности оба дела карактеристичне вредности система тј. кружне фреквенције  $p_n$  и коефицијента пригушења  $\delta_n$ , виско-еластичног система нано-греда.

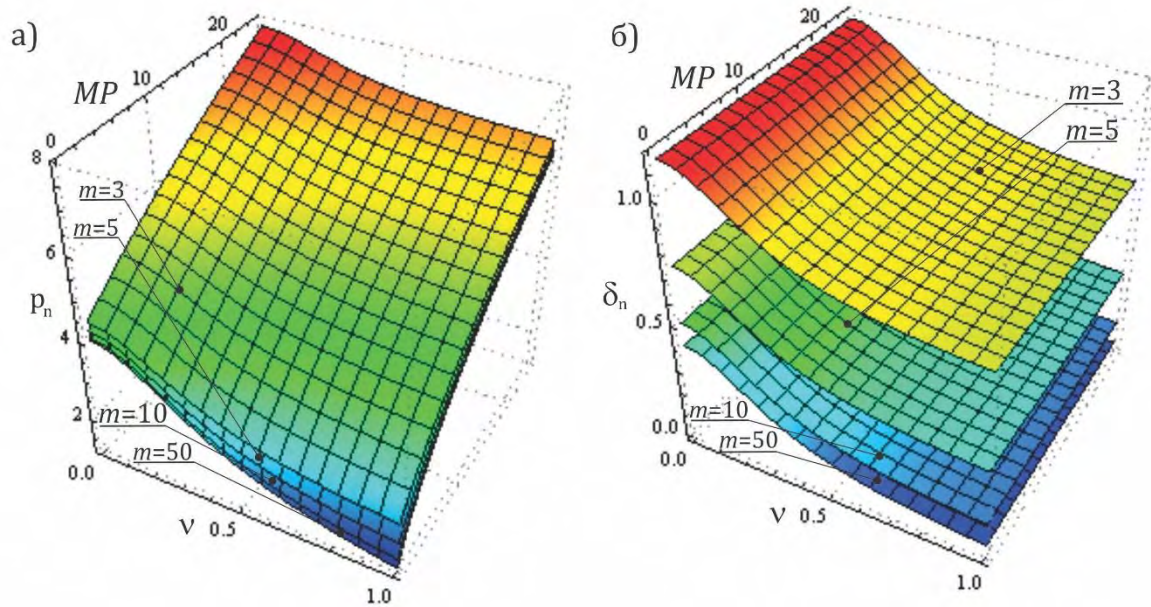
**ТАБЕЛА 6.3**

Добијене вредности за бездимензионе карактеристичне вредности виско-еластичног система спрегнутих нано-греда, за различит број нано-греда у систему.

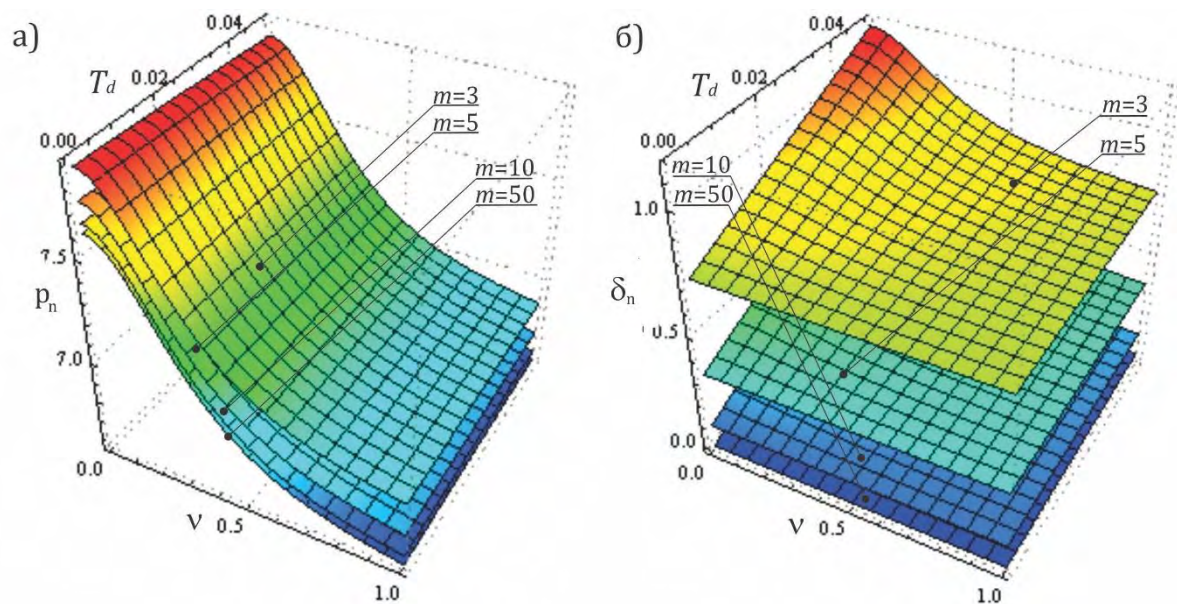
$n=1$	$s$	Нумеричка решење (6.2.9)		Тригонометријско решење (6.2.14г)	
		$p_n$	$\delta_n$	$p_n$	$\delta_n$
$m=3$	1	7.106803207007234	0.858616467032355	7.106803207007234	0.8586164670323561
	2	7.444570457727209	4.432990594218853	7.444570457727200	4.4329905942188590
	3	7.493876043935568	2.645803530625613	7.493876043935575	2.6458035306256074
$m=5$	1	6.953943128363628	0.456955340272326	6.953943128363753	0.4569553402723789
	2	7.267974436531825	1.382071438710205	7.267974436531376	1.3820714387099455
	3	7.374070686560821	4.834651720978800	7.374070686561144	4.8346517209788360
	4	7.493876043934701	2.645803530625339	7.493876043935575	2.6458035306256074
	5	7.503257047003444	3.909535622541435	7.503257047002612	3.9095356225412687
$m=10$	1	6.851460422768405	0.220719405037133	6.851460422839132	0.2207194051771522
	2	6.979511814332560	0.519565357800634	6.979511814312691	0.5195653568732285
	3	7.151418559430514	0.990666475118477	7.151418559043098	0.9906664801814060
	4	7.322006580188391	5.070887654979121	7.322006580644942	5.0708876560740626
	5	7.322025077236097	1.595856969829816	7.322025078960496	1.5958569638375157
	6	7.386541385971538	4.772041706313426	7.386541383798568	4.7720417043779860
	7	7.452126829862110	2.286107864740458	7.452126825875755	2.2861078740621320
	8	7.462882253737417	4.300940581996953	7.462882258592229	4.3009405810698090
	9	7.516616897306076	3.695750090978755	7.516616890636129	3.6957500974136980
	10	7.518204576847910	3.005499200270248	7.518204583815520	3.0054991871890824

Слике 6.2.3а и 6.2.3б приказују утицаје промене унутрашњег пригушења и нелокалног параметра на кружне фреквенције  $p_n$  и коефицијента пригушења  $\delta_n$  система. У овом случају утицај унутрашњег пригушења на кружне фреквенције  $p_n$  система је веома мали скоро

занемарљив, док је утицај на коефицијент пригушења  $\delta_n$  система линеаран. Потребно је нагласити да се утицај унутрашњег пригушења на динамику система смањује са повећањем нелокалног параметра.



Сл. 6.2.2. Утицај магнетног и нелокалног параметра на а) кружне фреквенције  $p_n$  и б) коефицијента пригушења  $\delta_n$  система.

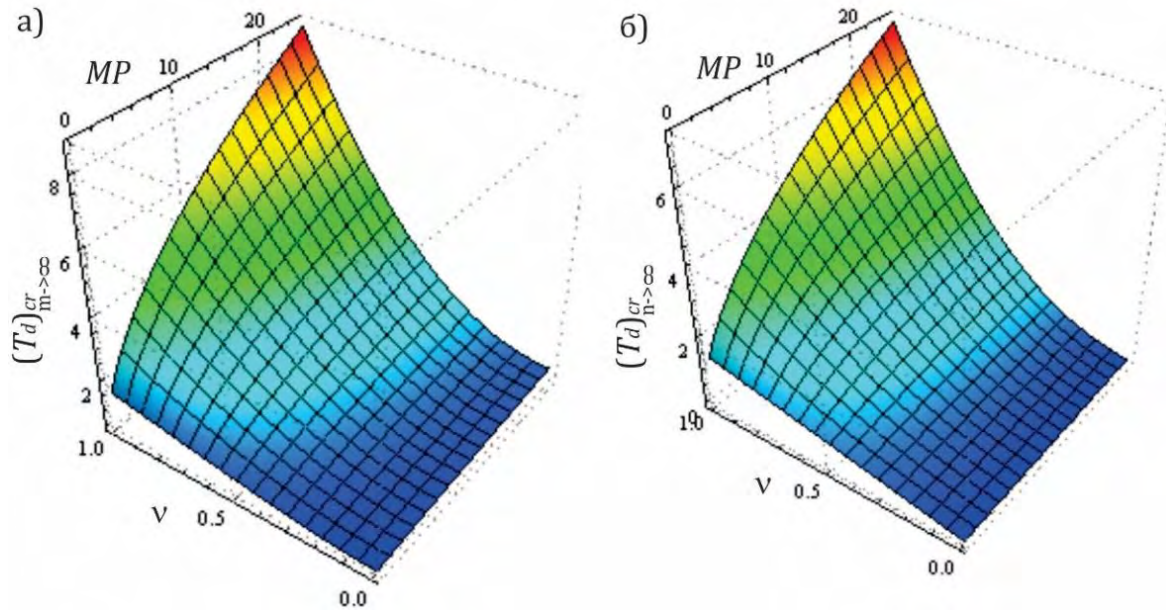


Сл. 6.2.3. Утицај унутрашњег пригушења и нелокалног параметра на а) кружне фреквенције  $p_n$  и б) коефицијента пригушења  $\delta_n$  система.

Утицај интензитета магнетног поља и нелокалног параметра на асимптотске вредности критичног структурног пригушења када број нано-града тежи бесконачно је приказано на Сл.



6.2.4a. Такође на Сл. 6.2.4б је приказан случају када број мода осциловања тежи бесконачно. Са дијаграма може се запазити да параметар магнетног поља има веома мали утицај на асимптотске вредности критичног структурног пригушења у случају када је вредност нелокалног параметра мала. Међутим, овај ефекат долази до изражаја када вредност нелокалног параметра расте. За веће вредности нелокалног параметра, критично унутрашње пригушење постаје веома осетљиво на промене вредности интензитета магнетног поља.



Сл. 6.2.4. Утицај интензитета магнетног поља и нелокалног параметра на асимптотске вредности унутрашњег пригушења, а) број нано-греда тежи бесконачно, б) број мода осциловања тежи бесконачно.

## 6.3 Трансверзалне осцилације система спрегнутих виско-еластичних ортотропних нано-плоча применом нелокалне теорије виско-еластичности

### 6.3.1 Опште напомене

У овом делу рада анализираћемо слободне трансверзалне осцилације система од  $m$  виско-еластичних нано-плоча између којих се налазе виско-еластични слојеви, на основу нелокалне теорије виско-еластичности. Модификована Kelvin-Voigt-ова виско-еластична конститутивна релација узима у обзир утицаје нелокалности и унутрашњег пригушења у материјалу виско-еластичних нано-плоча. На основу Kirchhoff-ове теорије плоча, другог Newton-овог закона кретања и нелокалне виско-еластичне конститутивне релације, изведен је систем хомогених парцијалних диференцијалних једначина које описују кретање система спрегнутих нано-плоча. Треба истаћи да су све нано-плоче у систему просто ослобођене по ивицама. Аналитичка решења кружне фреквенције и коефицијента пригушења система добијене су применом Navier-овог решења и тригонометријске методе, за случај када је систем нано-плоча спрегнут у конзолни ланац. Одређено аналитичко решење је упоређено са резултатима из литературе и показано је одлично њихово слагање. На крају су дати нумерички примери у којима је показан утицај нелокалног параметра, структурног пригушења, однос дужина страница нано-плоча као и коефицијената виско-еластичног слоја на кружне фреквенције и коефицијент пригушења система.

### 6.3.2 Диференцијалне једначине кретања система

Претпоставимо да се систем састоји од  $m$  ортотропних виско-еластичних нано-плоча између којих се налазе виско-еластични слојеви Kelvin-Voigt-овог типа, Сл. 6.3.1 а. Као што се може запазити овај систем спрегнутих нано-плоча представља модел система графенских нано-листића уметнут у полимерну матрицу. Систем нано-плоча је повезан тако да образује конзолни ланац, где је прва нано-плоча повезана са непокретном подлогом виско-еластичним слојем коефицијента крутости  $k_0$  и пригушења  $b_0$ , док је последња нано-плоча у систему слободна и није везана са непокретном подлогом. Остале нано-плоче у систему су међусобно повезане Kelvin-Voigt-овим виско-еластичним слојем који је моделиран континуално расподељеним системом опруга-пригушница, где су крутости  $k_1 = k_2 = \dots = k_i = \dots = k_{m-1} = k$ , а коефицијенти пригушења  $b_1 = b_2 = \dots = b_i = \dots = b_{m-1} = b$ . Све нано-плоче у систему су једнаких материјалних и геометријских особина где су:  $\tau_d$  - структурно (унутрашње) пригушење,  $\rho$  - густина масе материјала нано-плоча,  $h$  - дебљина нано-плоче. Треба напоменути да се код ортотропних плоча материјалне карактеристике разликују за два управна правца где су  $E_1$  и  $E_2$  - модули еластичности,  $\nu_{12}$  и  $\nu_{21}$  - Poisson-ови коефицијенти,  $G_{12}$  - модул смицања. У овој анализи

разматране су само просто-ослоњене нано-плоче. На Сл. 6.3.1б приказан је усвојени координатни систем механичког модела графенских нано-листића. Координатне осе  $x$  и  $y$  су у правцима дужине и ширине, а координатна оса  $z$  у правцу дебљине нано-плоча. Трансверзално померање  $i$ -те нано-плоче је означено са  $w_i(x, t)$ .

На основу Kirchhoff-ове теорије плоча и другог Newton-овог закона кретања можемо писати следећу парцијалну диференцијалну једначину кретања (за више детаља видети Глава 2 и 5), као

$$q_i + \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = \rho h \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6.3.1)$$

где су  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  и  $M_{xy}$  моменти савијања и увијања дати у следећем облику

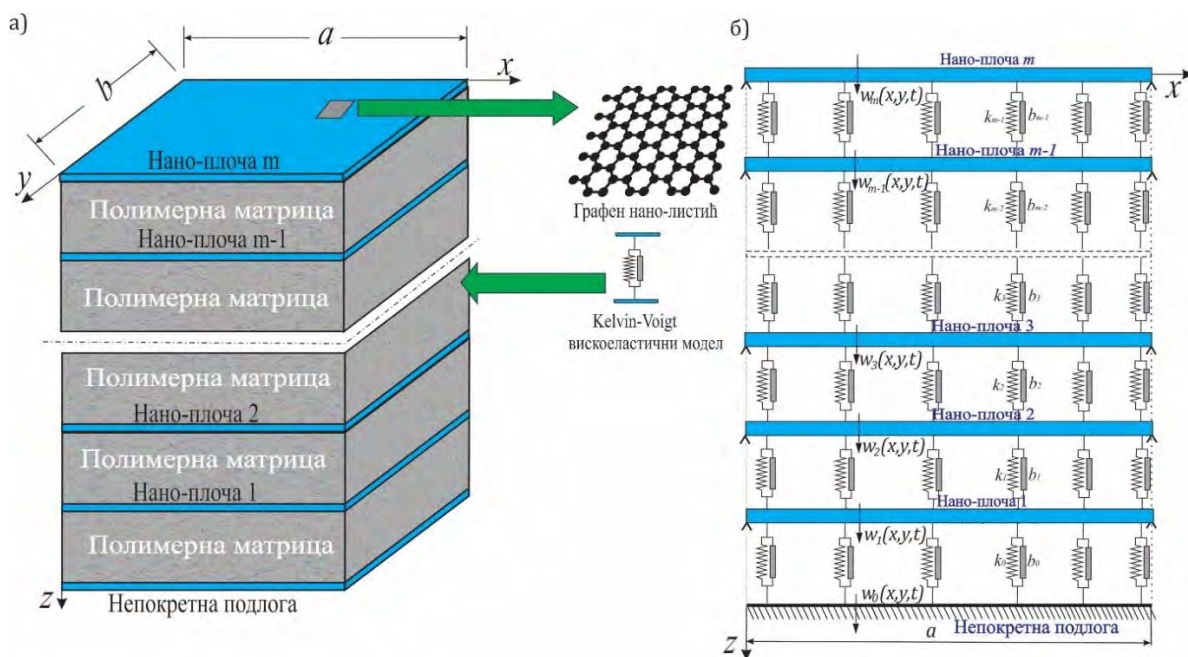
$$(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (z\sigma_{xx}, z\sigma_{yy}, z\tau_{xy}) dz, \quad (6.3.2)$$

а спољашње оптерећење  $q_i(x, y, t)$  потиче од виско-еластичне интеракције и дефинисано је као

$$q_i = F_{ki} - F_{ki-1}. \quad (6.3.3)$$

где су

$$F_{ki} = k_i(w_{i+1} - w_i) + b_i(\dot{w}_{i+1} - \dot{w}_i), \quad F_{ki-1} = k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) + b_{i-1}(\dot{w}_i - \dot{w}_{i-1}). \quad (6.3.4)$$



Сл. 6.3.1 а) Систем од  $m$  виско-еластичних графенских нано-листића;

б) Одговарајући механички модел ортотропних нано-плоча повезаних тако да образују конзолни ланац са усвојеним координатним системом.

Нелокална Kelvin-Voigt-ова виско-еластична конститутивна релација за ортотропне нано-плоче дата је у раду [76], као

$$[1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta] \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t})}{1 - \vartheta_{12}\vartheta_{21}} & \frac{\vartheta_{12}E_1(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t})}{1 - \vartheta_{12}\vartheta_{21}} & 0 \\ \frac{\vartheta_{12}E_2(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t})}{1 - \vartheta_{12}\vartheta_{21}} & \frac{E_2(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t})}{1 - \vartheta_{12}\vartheta_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (6.3.5)$$

у коме су:  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  - нормални напони и  $\tau_{xy}$  - је напон смицања. Члан  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  је Laplace-ов оператор за правоугли координатни систем. Заменом једначина (6.3.2) у једначину (6.3.5) и применом поступка објашњеног у Глави 2, добија се

$$[1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta] M_{xx} = -D_{11} \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - D_{12} \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2}, \quad (6.3.6a)$$

$$[1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta] M_{yy} = -D_{12} \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - D_{22} \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2}, \quad (6.3.6b)$$

$$[1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta] M_{xy} = -2D_{66} \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y}, \quad i = 1, 2, 3 \dots, m, \quad (6.3.6v)$$

где су:  $D_{11}, D_{12}, D_{22}$  и  $D_{66}$  - крутости при савијању ортотропне нано-плоче дефинисане као

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \vartheta_{12}\vartheta_{21})}, \quad D_{12} = \frac{\vartheta_{12} E_2 h^3}{12(1 - \vartheta_{12}\vartheta_{21})}, \\ D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \vartheta_{12}\vartheta_{21})}, \quad D_{66} = \frac{G_{12} h^3}{12}. \quad (6.3.6r)$$

Када из једначине (6.3.6) заменимо моменте савијања и увијања  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  и  $M_{xy}$  у једначину (6.3.1), добија се

$$\begin{aligned} & \rho h \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + k_i(w_i - w_{i+1}) + b_i(\dot{w}_i - \dot{w}_{i+1}) + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) + b_{i-1}(\dot{w}_i - \dot{w}_{i-1}) \\ & + D_{11} \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + D_{22} \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho h \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + k_i(w_i - w_{i+1}) + b_i(\dot{w}_i - \dot{w}_{i+1}) + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) + b_{i-1}(\dot{w}_i - \dot{w}_{i-1}) \right] \\ & + (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \rho h \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + k_i(w_i - w_{i+1}) + b_i(\dot{w}_i - \dot{w}_{i+1}) + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) + b_{i-1}(\dot{w}_i - \dot{w}_{i-1}) \right], \\ & \quad i = 1, 2, 3 \dots, m. \quad (6.3.7) \end{aligned}$$

Релације (6.3.7) представљају систем од  $m$  хомогених парцијалних диференцијалних једначина које описују кретање система спрегнутих нано-плоча. Након замене услова који дефинишу конзолни ланац када су трансверзално померање  $w_0(x, y, t)$  и коефицијенти вискоеластичног слоја  $k_m$  и  $b_m$  једнаки нули у (6.3.7), добијамо систем парцијалних диференцијалних једначина кретања конзолног ланца

$$\begin{aligned}
& \rho h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + k(w_1 - w_2) + b(\dot{w}_1 - \dot{w}_2) + kw_1 + b\dot{w}_1 \\
& + D_{11} \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + D_{22} \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + k(w_1 - w_2) + b(\dot{w}_1 - \dot{w}_2) + kw_1 + b\dot{w}_1 \right] \\
& + (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \rho h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + k(w_1 - w_2) + b(\dot{w}_1 - \dot{w}_2) + kw_1 + b\dot{w}_1 \right], \\
& i = 1, \quad (6.3.8a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho h \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + k_i(w_i - w_{i+1}) + b_i(\dot{w}_i - \dot{w}_{i+1}) + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) + b_{i-1}(\dot{w}_i - \dot{w}_{i-1}) \\
& + D_{11} \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + D_{22} \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho h \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + k_i(w_i - w_{i+1}) + b_i(\dot{w}_i - \dot{w}_{i+1}) + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) + b_{i-1}(\dot{w}_i - \dot{w}_{i-1}) \right] \\
& + (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \rho h \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + k_i(w_i - w_{i+1}) + b_i(\dot{w}_i - \dot{w}_{i+1}) + k_{i-1}(w_i - w_{i-1}) + b_{i-1}(\dot{w}_i - \dot{w}_{i-1}) \right], \\
& i = 2, 3, \dots, m-1, \quad (6.3.8b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho h \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + k(w_m - w_{m-1}) + b(\dot{w}_m - \dot{w}_{m-1}) \\
& + D_{11} \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} + D_{22} \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 w_m}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho h \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + k(w_m - w_{m-1}) + b(\dot{w}_m - \dot{w}_{m-1}) \right] \\
& + (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \rho h \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + k(w_m - w_{m-1}) + b(\dot{w}_m - \dot{w}_{m-1}) \right], \\
& i = m, \quad (6.3.8в)
\end{aligned}$$

где је  $k_0 = k_1 = k_2 = \dots = k$  и  $b_0 = b_1 = b_2 = \dots = b$ .

Претпоставили смо да су све нано-плоче правоугле Сл. 6.3.1а, са просто-ослоњеним ивицама, тада је математичка формулација граничних услова

$$w_i(x, 0, t) = w_i(x, b, t) = 0, \quad w_i(0, y, t) = w_i(a, y, t) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (6.3.9a)$$

$$M_{xxi}(0, y, t) = M_{xxi}(a, y, t) = 0, \quad M_{yyi}(x, 0, t) = M_{yyi}(x, b, t) = 0. \quad (6.3.9б)$$

### 6.3.3 Аналитичко решење

У циљу добијања аналитичког решења, користиће се Navier-ов метод, где је трансверзално померање  $w_i$  претпостављено у облику двоструког тригонометријског реда,

$$w_i(x, y, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{irn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{\lambda_{rn} t}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (6.3.10)$$

где су  $\alpha_r = \frac{r\pi}{a}$  и  $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$ ;  $W_{irn}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ),  $\lambda_{rn}$  су амплитуде и сопствене вредности система спрегнутих нано-плоча. Такође, ово решење мора да задовољи и граничне услове система (6.3.9)

Заменом решења (6.3.10) у једначинама (6.3.8), добијамо систем од  $m$  хомогених алгебарских једначина по непознатим амплитудама  $W_{irn}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ),

$$S_{rn}W_{1rn} - v_{rn}W_{2rn} = 0, \quad i = 1, \quad (6.3.11a)$$

$$-v_{rn}W_{i-1rn} + S_{rn}W_{irn} - v_{rn}W_{i+1rn} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, m-1, \quad (6.3.11b)$$

$$-v_{rn}W_{m-1rn} + (S_{rn} - v_{rn})W_{mrn} = 0, \quad i = m, \quad (6.3.11b)$$

који можемо написати у матричном облику, као

$$\begin{bmatrix} S_n & -v_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -v_n & S_n & -v_n & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_n & -v_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -v_n & S_n & -v_n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -v_n & S_n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_n & -v_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -v_n & S_n - v_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{1rn} \\ W_{2rn} \\ W_{3rn} \\ \dots \\ W_{i-1rn} \\ W_{irn} \\ W_{i+1rn} \\ \dots \\ W_{m-2rn} \\ W_{m-1rn} \\ W_{mrn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (6.3.12)$$

$$S_{rn} = \lambda_{rn}^2 \rho h \xi_{rn} + D_{11} \alpha_r^4 (1 + \tau_d \lambda_{rn}) +$$

$$D_{22} \beta_n^4 (1 + \tau_d \lambda_{rn}) + 2(D_{12} + 2D_{66})(1 + \tau_d \lambda_{rn}) \alpha_r^2 \beta_n^2 + 2v_{rn}, \quad (6.3.13a)$$

$$v_{rn} = k \xi_{rn} + b \lambda_{rn} \xi_{rn}, \quad (6.3.13b)$$

$$\xi_{rn} = 1 + (e_0 \tilde{a})^2 (\alpha_r^2 + \beta_n^2). \quad (6.3.13b)$$

Решења система хомогених алгебарских једначина (6.3.12), различита од тривијалних  $W_{irn} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ , применом тригонометријске методе претпостављамо у облику

$$W_{irn} = N \cos(i \varphi) + M \sin(i \varphi), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6.3.14)$$

одакле добијамо карактеристичну једначину као

$$S_{rn} - 2v_{rn} \cos \varphi = 0. \quad (6.3.15)$$

Потребно је сада одредити непознати параметар  $\varphi$  за случај конзолног ланца, када је прва нано-плоча у систему повезана преко виско-еластичног слоја са непокретном подлогом, док је последња нано-плоча слободна. Из система (6.3.12), можемо запазити да се прва и последња алгебарска једначина разликује од осталих једначина у систему, тако да претпостављено решење (6.3.14) мора да задовољи и те једначине. Ако заменимо  $W_{1rn} = N \cos(\varphi) + M \sin(\varphi)$  и  $W_{2rn} = N \cos(2\varphi) + M \sin(2\varphi)$  у прву једначину система и  $W_{m-1rn} = N \cos[(m-1)\varphi] + M \sin[(m-1)\varphi]$  и  $W_{mrn} = N \cos(m\varphi) + M \sin(m\varphi)$  у последњу једначину система (6.3.12), добијамо следећи систем алгебарских једначина по непознатим  $N$  и  $M$

$$N[S_{rn}\cos\varphi - v_{rn}\cos(2\varphi)] + M[S_{rn}\sin\varphi - v_{rn}\sin(2\varphi)] = 0, \quad (6.3.16a)$$

$$\begin{aligned} & N[(S_{rn} - v_{rn})\cos(m\varphi) - v_{rn}\cos[(m-1)\varphi]] \\ & + M[(S_{rn} - v_{rn})\sin(m\varphi) - v_{rn}\sin[(m-1)\varphi]] = 0. \end{aligned} \quad (6.3.16b)$$

Нетривијално решење за  $N$  и  $M$  даје следећу тригонометријску једначину

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos[(m+1)\varphi] - \cos(m\varphi) & \sin[(m+1)\varphi] - \sin(m\varphi) \end{vmatrix} = 0,$$

одакле следи

$$\cos\left[\frac{(2m+1)}{2}\varphi\right] = 0, \quad (6.3.17)$$

из које добијамо решење за непознати параметар  $\varphi = \varphi_{cc,s}$  за конзолни ланац

$$\varphi_{cc,s} = \frac{(2s-1)\pi}{2m+1}, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (6.3.18)$$

Ако заменимо релацију за  $\varphi_{cc,s}$  и једначине (6.3.13) у (6.3.15), добија се карактеристична једначина у следећем облику

$$\begin{aligned} & \lambda_{rn}^2 \rho h \xi_{rn} + D_{11} \alpha_r^4 (1 + \tau_d \lambda_{rn}) + D_{22} \beta_n^4 (1 + \tau_d \lambda_{rn}) \\ & + 2(D_{12} + 2D_{66})(1 + \tau_d \lambda_{rn}) \alpha_r^2 \beta_n^2 + 2v_{rn}(1 - \cos\varphi_{cc,s}) = 0, \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

Решење карактеристичне једначине по непознатим карактеристичним вредностима или комплексним сопственим вредностима  $\lambda_{rn}$  је

$$\lambda_{rn(1/2)} = -\tilde{\delta}_{rn} \pm i\sqrt{\tilde{\omega}_{rn}^2 - \tilde{\delta}_{rn}^2} = -\tilde{\delta}_{rn} \pm i\tilde{p}_{rn}, \quad (r, n) = 1, 2, 3 \dots \quad (6.3.20)$$

где чланови  $\tilde{\delta}_{rn}$  и  $\tilde{\omega}_{rn}$  представљају коефицијент пригушења и сопствену фреквенцију непригушених осцилација система,

$$\tilde{\delta}_{rn} = \frac{2b\xi_{rn}(1 - \cos\varphi_{cc,s}) + D_{11}\alpha_r^4\tau_d + D_{22}\beta_n^4\tau_d + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha_r^2\beta_n^2\tau_d}{2\rho h\xi_{rn}}, \quad (6.3.21)$$

$$\tilde{\omega}_{rn}^2 = \frac{2k\xi_{rn}(1 - \cos\varphi_{cc,s}) + D_{11}\alpha_r^4 + D_{22}\beta_n^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha_r^2\beta_n^2}{\rho h\xi_{rn}}. \quad (6.3.22)$$

Уводећи бездимензионе параметре

$$\begin{aligned} \lambda_{rn} &= \Lambda_{rn} \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho h}}, \quad k = K \frac{D_{11}}{a^4}, \quad b = B \sqrt{\frac{\rho h D_{11}}{a^2}}, \quad \tau_d = T a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}}, \quad (e_0 \tilde{a})^2 = (\eta a)^2, \\ D_{22} &= \tilde{D}_{22} D_{11}, \quad D_{12} = \tilde{D}_{12} D_{11}, \quad D_{66} = \tilde{D}_{66} D_{11}, \quad c = \frac{a}{b}, \end{aligned} \quad (6.3.23)$$

можемо писати карактеристичну вредност у следећој форми

$$\Lambda_{rn(1/2)} = \omega_{rn} \left( -\zeta_{rn} \pm i\sqrt{1 - \zeta_{rn}^2} \right) = -\delta_{rn} \pm i p_{rn}, \quad r, n = 1, 2, 3 \dots, \quad (6.3.24)$$

и

$$\omega_{rn} = \sqrt{\frac{2K[1 + \eta^2(r^2\pi^2 + c^2n^2\pi^2)](1 - \cos\varphi_{cc,s}) + r^4\pi^4 + \tilde{D}_{22}c^4n^4\pi^4 + 2c^2r^2n^2\pi^4(\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66})}{1 + \eta^2(r^2\pi^2 + c^2n^2\pi^2)}}$$

(6.3.25a)

$$\zeta_{rn} = \frac{2B[1 + \eta^2(r^2\pi^2 + c^2n^2\pi^2)](1 - \cos\varphi_{cc,s}) + T[r^4\pi^4 + \tilde{D}_{22}c^4n^4\pi^4 + 2c^2r^2n^2\pi^2(\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66})]}{2[1 + \eta^2(r^2\pi^2 + c^2n^2\pi^2)]\omega_{rn}}$$

(6.3.256)

где су  $\omega_{rn}$  бездимензиона сопствена фреквенција непригушених осцилација, а  $\zeta_{rn}$  коефицијент расипања. Треба напоменути да члан  $\delta_{rn} = \zeta_{rn}\omega_{rn}$  у карактеристичној вредности система (6.3.24) представља коефицијент пригушења, док члан  $p_{rn} = \omega_{rn}\sqrt{1 - \zeta_{rn}^2}$  представља кружну фреквенцију система.

### 6.3.4 Асимптотска анализа

У случају када број нано-плоча тежи бесконачно можемо наћи асимптотску карактеристичну вредност система. Заменом  $m \rightarrow \infty$  у релацији (6.3.18), а добијени резултат у (6.3.24), карактеристична вредност система добија следећи облик

$$\Lambda_{m \rightarrow \infty}^{rn(1/2)} = -\delta_{m \rightarrow \infty}^{rn} \pm ip_{m \rightarrow \infty}^{rn}, \quad (r, n) = 1, 2, 3 \dots \text{ и } m \rightarrow \infty, \quad (6.3.26a)$$

где су асимптотске вредности коефицијента пригушења и кружне фреквенције осциловања система дате као

$$\delta_{m \rightarrow \infty}^{rn} = \zeta_{m \rightarrow \infty}^{rn} \omega_{m \rightarrow \infty}^{rn}, \quad (6.3.26a)$$

$$p_{m \rightarrow \infty}^{rn} = \omega_{m \rightarrow \infty}^{rn} \sqrt{1 - \zeta_{m \rightarrow \infty}^{rn2}} \quad (6.3.26b)$$

док су

$$\omega_{m \rightarrow \infty}^{rn} = \sqrt{\frac{r^4\pi^4 + \tilde{D}_{22}c^4n^4\pi^4 + 2c^2r^2n^2\pi^2(\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66})}{1 + \eta^2(r^2\pi^2 + c^2n^2\pi^2)}}, \quad (6.3.26b)$$

$$\zeta_{m \rightarrow \infty}^{rn} = \frac{T[r^4\pi^4 + \tilde{D}_{22}c^4n^4\pi^4 + 2c^2r^2n^2\pi^2(\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66})]}{2[1 + \eta^2(r^2\pi^2 + c^2n^2\pi^2)]\omega_{m \rightarrow \infty}^{rn}}. \quad (6.3.27)$$

На основу горњих резултата, може се закључити да критична вредност кружне фреквенције система  $p_{m \rightarrow \infty}^{rn}$  и коефицијента пригушења  $\delta_{m \rightarrow \infty}^{rn}$  зависе само од материјалних параметра система повезаних виско-еластичних ортотропних нано-плоча. Међутим са физичке тачке гледишта једначине (6.3.26) репрезентују кружне фреквенције и коефицијент пригушења за једну просто-ослоњену виско-еластичну нано-плочу.

### 6.3.5 Нумерички примери

У овом делу рада одредићемо и упоредити кружне фреквенције и коефицијенте пригушења система добијене применом тригонометријске методе и нумеричким решавањем



карактеристичног полинома система за случај слободних трансверзалних осцилација виско-еластичних нано-плоча између којих се налазе виско-еластични слојеви. Прегледом доступне литературе утврдили смо да је систем који се састоји од једне виско-еластичне нано-плоче детаљно анализиран од стране Poursmaeeli и остали [76]. Добијени резултати за сопствену фреквенцију непригушених осцилација и коефицијента расипања у раду [76], добро се слажу са резултатима добијеним у овом раду, када у одговарајућим изразима заменимо  $m = 1$  и  $s = 1$ . Тада се систем од  $m$  ортотропних нано-плоча своди на систем од једне нано-плоче, какав је анализиран у раду [76]. Ако заменимо  $m = 1$  у (6.3.18) добијамо

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \quad (6.3.27)$$

а затим ову вредност заменимо у (6.3.25а) и (6.3.25б) добија се

$$\omega_{m=1}^{rn} = \sqrt{\frac{K[1 + \eta^2(r^2\pi^2 + c^2n^2\pi^2)] + r^4\pi^4 + \tilde{D}_{22}c^4n^4\pi^4 + 2c^2r^2n^2\pi^4(\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66})}{1 + \eta^2(r^2\pi^2 + c^2n^2\pi^2)}}, \quad (6.3.28a)$$

и

$$\zeta_{m=1}^{rn} = \frac{B[1 + \eta^2(r^2\pi^2 + c^2n^2\pi^2)] + T[r^4\pi^4 + \tilde{D}_{22}c^4n^4\pi^4 + 2c^2r^2n^2\pi^4(\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66})]}{2[1 + \eta^2(r^2\pi^2 + c^2n^2\pi^2)]\omega_{rn}}. \quad (6.3.28б)$$

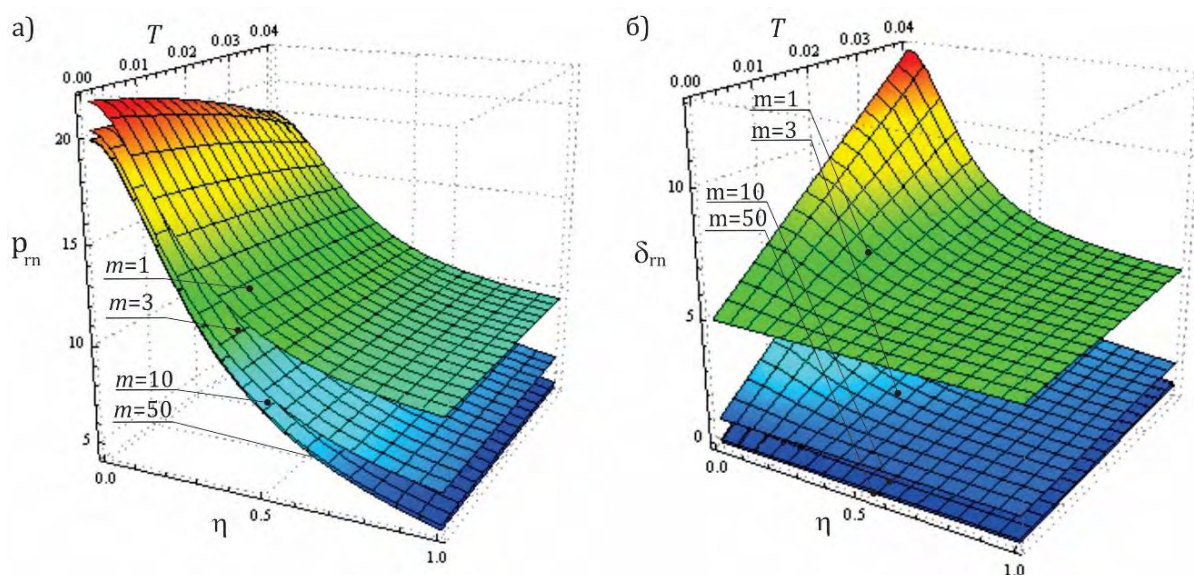
сопствена фреквенција непригушених осцилација и коефицијент расипања у бездимензионом облику.

У случају када се систем састоји од две или више међусобно повезаних нано-плоча, тада упоредну анализу извршићемо поређењем резултата добијених тригонометријском методом и нумеричким решавањем детерминанте система хомогених алгебарских једначина (6.3.12). У циљу добијања нумеричких решења карактеристичне једначине разматраћемо систем који се састоји од  $m = 3, 5,$  и  $10$  спрегнутих виско-еластичних нано-плоча. Вредности материјалних и геометријских параметара система дат је у раду [76]: модули еластичности ортотропне нано-плоче су  $E_1 = 2.434 [TPa]$  и  $E_2 = 2.473 [TPa]$ , Poisson-ови коефицијенти су  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.197$ , дебљина нано-плоче је  $h = 0.129 [nm]$  и густина материјала нано-плоче је  $\rho = 6316 [kg/m^3]$ . Коефицијенти крутости и пригушења виско-еластичних слојева  $K = 100, B = 10$  и  $T = 0.01$ , Упоредни приказ резултата за кружне фреквенције  $p_{rn}$  и коефицијента пригушења  $\delta_{rn}$  одређени аналитичким поступком релација (6.3.24), и нумеричким решавањем детерминанте система хомогених алгебарских једначина (6.3.12), приказано је у Табели 6.4. Упоређујући ове резултате можемо закључити да се они одлично слажу. Потребно је напоменути да вредности кружне фреквенције  $p_{rn}$  и коефицијента пригушења  $\delta_{rn}$  опадају са повећањем броја нано-плоча  $m$  у систему и теже асимптотској вредности кружне фреквенције  $p_{rn}$  и коефицијента пригушења  $\delta_{rn}$  (6.3.26).

**ТАБЕЛА 6.4**

Упоредна анализа аналитички и нумерички добијених резултата за кружне фреквенције  $\tilde{p}_{rn}$  и коефицијената пригушења  $\tilde{\delta}_{rn}$ , за случај када је систем повезан у конзолни ланац.

$r=1, n=1$	Тригонометријска метода (6.3.22)		Нумеричко решење (6.3.12)		
	$s$	$\tilde{p}_{rn}$	$\tilde{\delta}_{rn}$	$\tilde{p}_{rn}$	$\tilde{\delta}_{rn}$
$m=3$	1	0.1364552524906614	0.013336146095487	0.1364552524906614	0.013336146095487
	2	0.1380794031321649	0.019690607633735	0.1380794031321648	0.019690607633735
	3	0.1485217922929304	0.070278896522997	0.1485217922929307	0.070278896522997
$m=5$	1	0.1282456884950779	0.149598955360616	0.1282456884950800	0.149598955360618
	2	0.1362642849038659	0.015326773331037	0.1362642849038675	0.015326773331036
	3	0.1421400250963865	0.117846419928750	0.1421400250963785	0.117846419928747
	4	0.1440248297231636	0.038041594873398	0.1440248297231562	0.038041594873400
	5	0.1485739517436332	0.076259442613679	0.1485739517436432	0.076259442613679
$m=10$	1	0.1228620507917776	0.158123141398325	0.1228620507428730	0.158123141224418
	2	0.1288942028372332	0.148479383904409	0.1288942026588724	0.148479383953484
	3	0.1352922600066203	0.013139204191243	0.1352922600070882	0.013139204189114
	4	0.1364552524906614	0.133361460954874	0.1364552527666980	0.133361460910539
	5	0.1380794031321649	0.019690607633735	0.1380794031235362	0.019690607621836
	6	0.1424193714591120	0.032211293572491	0.1424193714518172	0.032211293555703
	7	0.1432237833862978	0.114112666347696	0.1432237831070445	0.114112666352842
	8	0.1464694205942431	0.049588744115729	0.1464694206101271	0.049588744116892
	9	0.1475040561581054	0.092443339955669	0.1475040558995336	0.092443339856548
	10	0.1485217922929304	0.070278896522997	0.1485217921954858	0.070278896480443



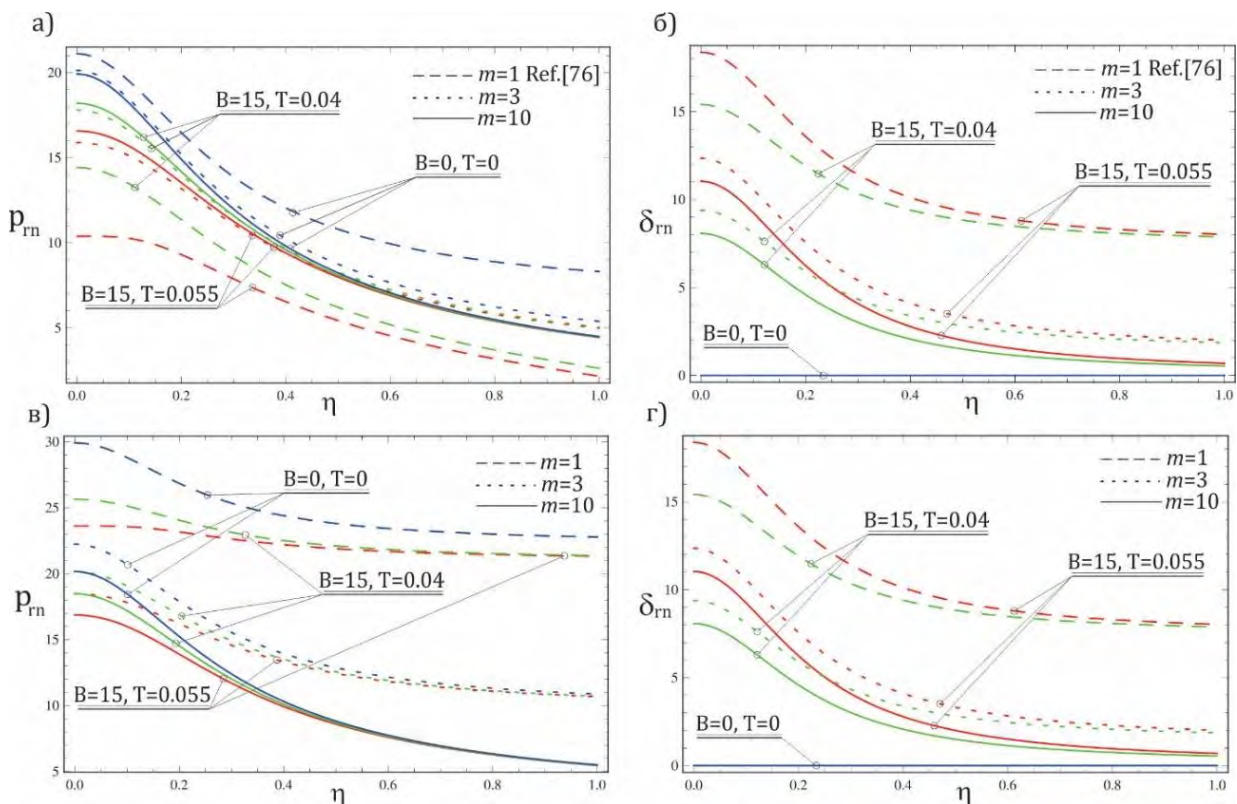
Сл. 6.3.2. Утицај нелокалног параметра и структурног пригушења на а) кружне фреквенције  $p_{rn}$  и б) коефицијент пригушења  $\delta_{rn}$ , за различити број нано-плоча у систему ( $m = 1, 3, 10, 50$ ),  $K=100$  и  $B=10$ .

На Сл. 6.3.2 је приказан утицај параметара структурног пригушења  $T$  и нелокалног параметра  $\eta$  на кружне фреквенције  $p_{rn}$  и коефицијент пригушења  $\delta_{rn}$  виско-еластичног система за различити број нано-плоча. Са слике се може запазити да вредности оба дела карактеристичне вредности система опадају са повећањем вредности нелокалног параметра. Може се закључити да нелокални ефекат смањује укупну крутост система, тако да систем повезаних нано-плоча постаје “мекши”. Такође, треба нагласити да повећање броја нано-плоча  $m$  у систему изазива смањење кружне фреквенције  $p_{rn}$  и коефицијента пригушења  $\delta_{rn}$  система, тј. вредности теже асимптотској вредности кружне фреквенције  $p_{rn}$  и коефицијент пригушења  $\delta_{rn}$  система датој у једначини (6.3.26). Што се тиче ефекта структурног пригушења  $T$ , може се запазити да је његов утицај на коефицијент пригушења  $\delta_{rn}$  много већи него на кружне фреквенције  $p_{rn}$  система. Такође, треба истакнути да повећање структурног пригушења доводи до значајног повећања коефицијент пригушења  $\delta_{rn}$  система што је и за очекивати. Такође доводи и до повећања расипања укупне енергије система. Пажљивим посматрањем учоавамо да ефекат нелокалности смањује утицај структурног пригушења код кружне фреквенције  $p_{rn}$  и коефицијента пригушења  $\delta_{rn}$  система.

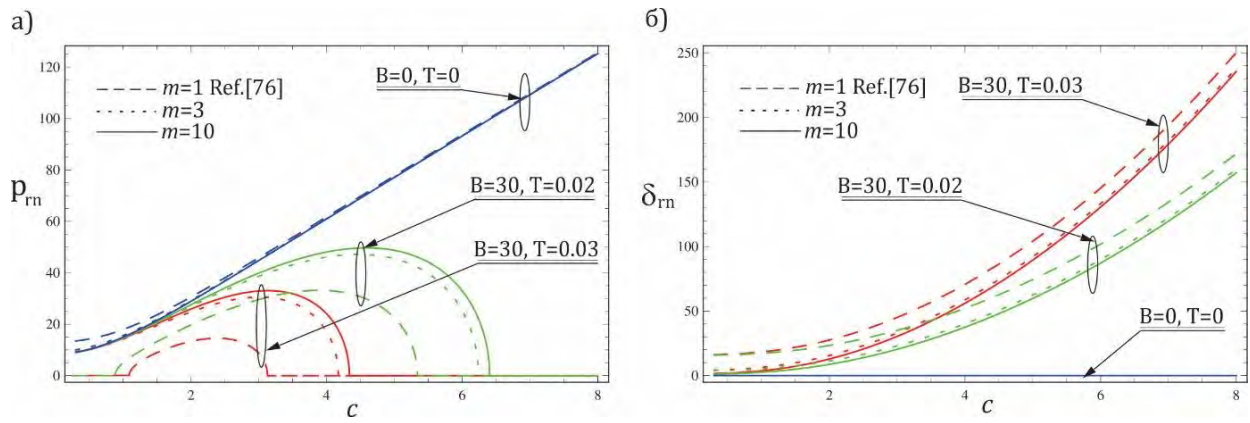
На Сл. 6.3.3, представљене су вредности кружне фреквенције  $p_{rn}$  и коефицијента пригушења  $\delta_{rn}$  система као функције нелокалног параметра за различите вредности структурног пригушења  $T$  и коефицијента пригушења виско-еластичног слоја  $B$ . Такође, разматран је утицај броја нано-плоча  $m$  у систему и приказан је значајан утицај на оба дела карактеристичне вредности система. Шта више може се запазити да кружна фреквенција  $p_{rn}$  система се смањује са повећањем броја нано-плоча у систему као и са повећањем оба параметра пригушења. У случају када се параметри пригушења смањују, долази и до смањења коефицијента пригушења  $\delta_{rn}$ , а самим тим и до повећања кружне фреквенције  $p_{rn}$  система. Закључујемо да понашање кружне фреквенције  $p_{rn}$  система зависи од односа укупне крутости и пригушења у систему спрегнутих виско-еластичних нано-плоча. У овој анализи разматран је случај када је крутост виско-еластичног слоја  $K = 50$ , Сл. 6.3.3а и Сл. 6.3.3б, и када је  $K = 500$ , Сл. 6.3.3в и Сл. 6.3.3г. Установљено је да вредности кружне фреквенције  $p_{rn}$  система расту са повећањем коефицијента крутости виско-еластичног слоја, што са физичке тачке гледишта можемо рећи да долази до повећања укупне крутости система. Треба истаћи да повећање коефицијента крутости виско-еластичног слоја не утиче на коефицијента пригушења  $\delta_{rn}$  система. Услед повећања вредности нелокалног параметра долази до смањења кружне фреквенције  $p_{rn}$  и коефицијента пригушења  $\delta_{rn}$  система. Потребно је напоменути, да у случају када је  $m = 1$  систем спрегнутих нано-плоча се своди на систем који анализиран у раду [76], када је вредност коефицијента крутости виско-еластичног слоја  $K = 50$ .

Утицај промене броја нано-плоча  $m$  на карактеристичне вредности система, тј. кружне фреквенције  $p_{rn}$  и коефицијента пригушења  $\delta_{rn}$  су приказане на Сл. 6.3.4 у функцији односа

страница плоче  $c$ . Може се запазити са Сл. 6.3.4а, да кружне фреквенције  $p_{rn}$  достижу коначне вредности са повећањем односа страница плоча  $c$ , али за случај када су оба параметра виско-еластичног пригушења једнака нули имамо скоро линеарну зависност кружне фреквенције  $p_{rn}$ . Када су вредности кружне фреквенције  $p_{rn}$  једнаке нули, осцилације система престају. Са слике 6.3.4б) може се уочити да повећање односа страница плоче  $c$  доводи до повећања коефицијента пригушења  $\delta_{rn}$ . У општем случају повећањем параметра структурног пригушења  $T$  као и пригушења виско-еластичног слоја  $B$  доводи до повећања коефицијента пригушења  $\delta_{rn}$ . Овај закључак важи у свим анализираним случајевима. Шта више, са Сл. 6.3.4 може се запазити да повећање броја нано-плоча доводи до повећања кружне фреквенције  $p_{rn}$ , док се коефицијент пригушења  $\delta_{rn}$  система смањује. Овакав утицај промене броја нано-плоча у систему на кружне фреквенције  $p_{rn}$  је сличан као у прошлом случају када је крутост виско-еластичног слоја  $K$  имала нижу вредност. Коначно, може се закључити да је коефицијент пригушења  $\delta_{rn}$  веома осетљив на однос укупног виско-еластичног пригушења и крутости система спрегнутих виско-еластичних нано-плоча.



Сл. 6.3.3. Утицај нелокалног параметра на а) кружне фреквенције  $p_{rn}$  и б) коефицијента пригушења  $\delta_{rn}$ , при нижој вредности коефицијента крутости  $K = 50$ , и в) кружне фреквенције  $p_{rn}$  и г) коефицијента пригушења  $\delta_{rn}$ , при вишој вредности коефицијента крутости  $K = 500$ .



Сл. 6.3.4. Утицај односа страница плоче  $c$  на а) кружне фреквенције  $p_{rn}$  и б) коефицијент пригушења  $\delta_{rn}$ , при нижој вредности коефицијента крутоћи слоја  $K = 100$ .



# Глава 7

## Динамичко понашање нано-греде са геометријском нелинеарношћу уметнуте у виско-еластични медијум

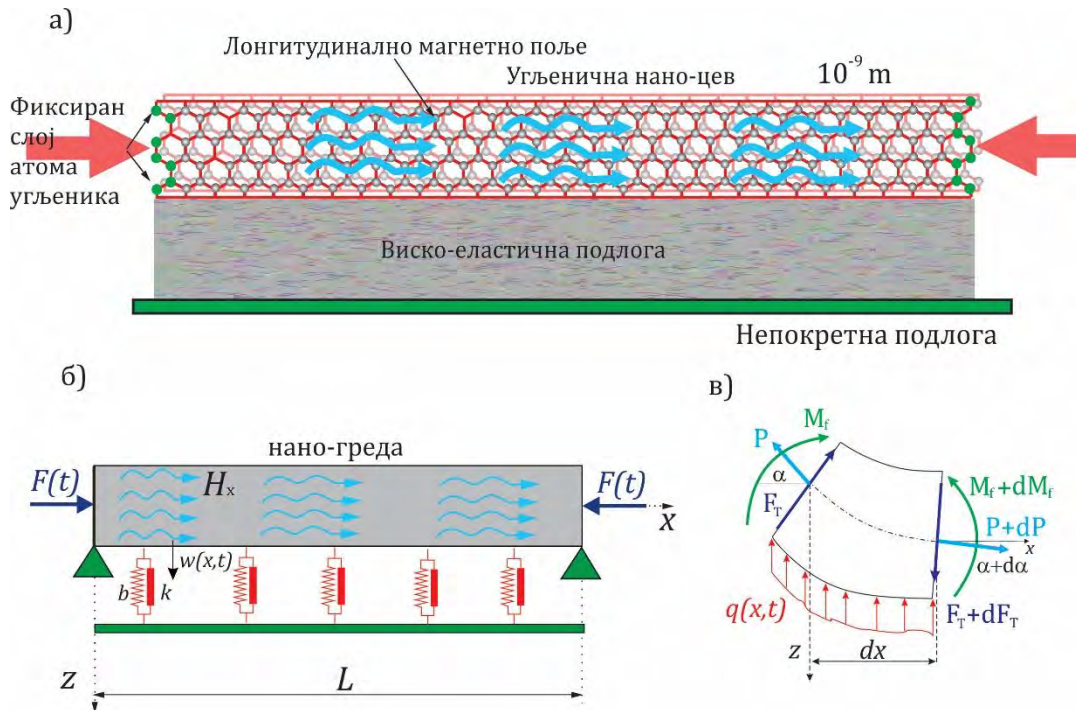
### 7.1 Опште напомене

У овој глави анализиран је утицај геометријске нелинеарности и лонгитудиналног магнетног поља на слободне осцилације и динамичку стабилност угљеничне нано-цеви, коришћењем нелокалне теорије еластичности и Rayleigh-јеве теорије греде. Претпоставићемо да се угљенична нано-цев налази у виско-еластичном медијуму Kelvin-Voigt-овог типа и да је под дејством временски променљивог аксијалног оптерећења. Диференцијалне једначине кретања система угљеничне нано-цеви изведене су применом другог Newton-овог закона кретања, а утицај лонгитудиналног магнетног поља је представљен класичним Maxwell-овим релацијама. Применом методе више временских скала добијена су апроксимативна аналитичка решења за нелинеарне сопствене фреквенције, амплитудно-фреквентне криве и области стабилности односно нестабилности. Треба истаћи да је анализиран случај устаљеног стања (steady-state response) када је фреквенција аксијалног оптерећења два пута већа од сопствене фреквенције система, такозвана суб-хармонијска резонанца. Такође, дата су неколико нумеричка примера који приказују утицај лонгитудиналног магнетног поља, коефицијената виско-еластичног слоја и нелокалног параметра на динамичко понашање угљеничне нано-цеви.

### 7.2 Формулација проблема

Размотримо сада једнослојну угљеничну нано-цев која је уметнута у виско-еластични медијум, Сл. 7.1а. Виско-еластични медијум је моделиран као Kelvin-Voigt-ов тип подлоге сачињене од паралелно повезаних опруга и пригушења, где је коефицијент крутости  $k$  и коефицијент пригушења  $b$ , Сл.7.1б. Механички модел једнослојне угљеничне нано-цеви

заснован је на нелокалној Rayleigh-јевој теорији греде, са просто ослоњеним крајевима, Сл. 7.1б. Материјалне и геометријске карактеристике угљеничне нано-цеву су:  $E$  - је модул еластичности,  $\rho$  - је специфична густина,  $A$  - је површина попречног пресека,  $I$  - је момент инерције површине, и  $L$  - је дужина нано-греде. У приказаној анализи претпоставићемо да је угљенична нано-цев под дејством аксијалног променљивог оптерећења  $F(t)$  и Lorenz-ове магнетне силе која је проузрокована дејством лонгитудиналног магнетног поља. У даљој анализи трансверзално померање нано-греде је означено са  $w(x, t)$ , Сл. 7.1б.



Сл. 7.1. а) Једнослојна угљенична нано-цев уметнута у виско-еластични материјал под утицајем лонгитудиналног магнетног поља и временски променљивог оптерећења  $F(t)$ , б) еквивалентни механички модел, в) елементарни део нано-греде.

Коришћењем Rayleigh-јеве теорије греде која узима у обзир и инерцију обртања попречних пресека греде, померања произвољне тачке нано-греде пишемо у следећем облику

$$\bar{u}_x = u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad \bar{w}_z = w(x, t), \quad (7.1)$$

где су  $\bar{u}_x = \bar{u}_x(x, z, t)$  и  $\bar{w}_z = \bar{w}_z(x, t)$  аксијално и трансверзално померање нано-греде. Ако заменимо у von Karman-ове нелинеране деформације померања (7.1), добијамо следећу релацију

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (7.2)$$

где је  $\varepsilon_{xx}$  деформација у  $x$  - правцу. Применом другог Newton-овог закона кретања на елементарни део нано-греде, једначине кретања добијамо у следећем облику



$$\sum F_x = dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (7.3a)$$

$$\sum F_z = dm \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Rightarrow \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial F_T}{\partial x} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \chi A H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - kw - b \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (7.3b)$$

$$\sum M_y = dJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Rightarrow \rho I \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = F_T - \frac{\partial M_f}{\partial x}, \quad (7.3b)$$

где су чланови  $dJ$  и  $\theta$  дефинисани у релацији (6.2.2.a), а напонске резултанте дефинисане као

$$(F_T, P, M_f) = \int_A (\tau_{xz}, \sigma_{xx}, z\sigma_{xx}) dA, \quad (7.4)$$

а  $F_T$ ,  $P$  и  $M_f$  су трансверзална сила, аксијална сила и момент савијања;  $\tau_{xz}$  и  $\sigma_{xx}$  су компоненте смичућег и нормалног напона. Аксијални инерциони члан  $\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  из једначине (7.3a) може се занемарити у случају греде са униформним попречним пресеком, како је то учињено у раду [120]. У књизи Ковашић и Brennan [120], аутори су показали да аксијална сила  $P$  представља суму сила која дејствује на крају просто ослоњене нано-греде  $F = \left(\frac{\Delta L}{L}\right) EA$  и дела силе који потиче услед геометријске нелинеарности  $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$ . Ако заменимо једначину (7.2) у нелокалну еластичну конститутивну релацију (1.3.8a), а затим тако добијени резултат заменимо у једначину (7.4), добијамо

$$P - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right], \quad (7.5a)$$

$$M_f - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (7.5b)$$

Када занемаримо аксијални инерциони члан  $\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  у једначине (7.3a), тада је  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ , па после замене у једначину (7.5a), следи

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{EA} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2. \quad (7.6)$$

Интеграљењем једначине (7.6) у области  $(0 - L)$  и коришћењем граничних услова аксијалног померања ослонаца  $u(0, t) = 0$  и  $u(L, t) = \Delta L$ , добијамо

$$u(L, t) = \frac{PL}{EA} - \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx. \quad (7.7)$$

Сада из једначине (7.7) одређујемо аксијалну силу као

$$P = F + \frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx. \quad (7.8)$$

Ако претпоставимо да је аксијална сила притиска  $F$ , временски зависна и да се састоји од два дела  $F = -(F_0 + F_1 \cos \Omega t)$ , коришћењем једначина (7.3) и нелокалне конститутивне релације (1.3.8а), добијамо нелинеарну парцијалну диференцијалну једначину кретања нано-греде

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + (F_0 + F_1 \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{EA}{2L} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \\ & \quad - \chi A H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + kw + b \frac{\partial w}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ & = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + (F_0 + F_1 \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{EA}{2L} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx - \chi A H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + kw + b \frac{\partial w}{\partial t} \right], \end{aligned} \quad (7.9)$$

где су  $F_0$  и  $F_1$  амплитуде статичког и динамичког аксијалног оптерећења, а  $\Omega$  је фреквенција динамичког дела аксијалног оптерећења. Математичке релације граничних услова просто ослоњених крајева у случају нелокалне Rayleigh-јеве нано-греде су

$$\text{на } x = 0: \quad u(0, t) = 0, \quad w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (7.10a)$$

$$\text{на } x = L: \quad u(L, t) = \Delta L = \frac{PL}{EA} - \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad w(L, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (7.10b)$$

Ако заменимо следеће бездимензионе параметре

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{I}{AL^2}, \quad \theta = \frac{1}{\delta}, \quad K = k \frac{L^4}{EI}, \quad \varepsilon B = b \sqrt{\frac{L^4}{\rho A EI}}, \quad \bar{F}_0 = F_0 \frac{L^2}{EI}, \quad \varepsilon \bar{F}_1 = F_1 \frac{L^2}{EI}, \\ MP &= \frac{\chi A H_x^2}{EI} L^2, \quad \eta^2 = \frac{(e_0 \tilde{a})^2}{L^2}, \quad W = \frac{w}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \end{aligned} \quad (7.11)$$

тада нелинеарна парцијална диференцијална једначина (7.9) у бездимензионој форми постаје

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - \delta \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + (\bar{F}_0 + \varepsilon \bar{F}_1 \cos \bar{\Omega} \tau) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \varepsilon \theta \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \int_0^1 \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \\ & \quad - MP \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + KW + \varepsilon B \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} \\ & = \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - \delta \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + (\bar{F}_0 + \varepsilon \bar{F}_1 \cos \bar{\Omega} \tau) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \varepsilon \theta \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \int_0^1 \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 d\xi - MP \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + KW + \varepsilon B \frac{\partial W}{\partial \tau} \right], \end{aligned} \quad (7.12)$$

у којој су  $\delta$  и  $\theta$  утицаји инерције и ротације попречних пресека,  $K$  и  $B$  - су бездимензионе вредности крутости и вискозног пригушења виско-еластичне подлоге,  $\bar{F}_0$  и  $\bar{F}_1$  - су амплитуде статичког и динамичког аксијалног оптерећења,  $MP$  - је амплитуда лонгитудиналног магнетног поља,  $\eta$  - је нелокални параметар,  $W$  - је трансверзално померање и  $\tau$  - је време у бездимензионој форми. Члан  $\varepsilon$  представља мали параметар који дефинише однос величина у једначини кретања (7.12).

### 7.3 Апроксимативно аналитичко решење

Апроксимативно аналитичко решење нелинеарне парцијалне диференцијалне једначине кретања нано-греде (7.12) добиће се применом методе раздвајања променљивих и пертурбационе методе више временских скала. У случају просто ослоњене нано-греде, претпоставићемо решење једначине (7.12) у следећој форми

$$W(\xi, \tau) = q(\tau) \sin \alpha_n \xi, \quad (7.13)$$

у коме је  $q(\tau)$  - временска функција,  $\alpha_n = n\pi$  - је константа која се одређује из граничних услова, а  $n$ -је броја мода. Ако заменимо претпостављено решење (7.13) у једначину (7.12), а затим множећи цео израз релацијом (7.13) и интегралњем по дужини нано-греде, добија се Duffing-ова нелинеарна диференцијална једначина

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + \varepsilon\zeta \frac{dq}{d\tau} + (\omega_n^2 - \varepsilon\gamma\bar{F}_1 \cos \bar{\Omega} \tau)q + \frac{1}{4}\varepsilon\bar{\alpha}q^3 = 0, \quad (7.14)$$

где је  $\omega_n$  сопствена фреквенција линеарног система,  $\zeta$  је коефицијент пригушења

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K + \alpha_n^2 MP - \alpha_n^2 \bar{F}_0 + \frac{\alpha_n^4}{1 + \alpha_n^2 \eta^2}}{1 + \alpha_n^2 \delta}}, \quad \zeta_n = \frac{B}{1 + \alpha_n^2 \delta}, \quad (7.15a)$$

$\bar{\alpha}$  је редукована нелинеарна крутост и  $\gamma$  је константа

$$\bar{\alpha}_n = \frac{\theta \alpha_n^4}{1 + \alpha_n^2 \delta}, \quad \gamma_n = \frac{\alpha_n^2}{1 + \alpha_n^2 \delta}. \quad (7.15b)$$

Треба напоменути да се код суб-хармонијског резонантног стања у Duffing-овој једначини (7.14) јавља тврда нелинеарност. Овај феномен зависи од знака (плус или минус) испред кубног члана у Duffing-овој диференцијалној једначини (7.14). У овом случају позитиван знак испред кубног члана једначине (7.14) изазива тврду нелинеарност, тако да фреквентно-амплитудна карактеристика има закривљење на десну страну што ће се касније показати.

### 7.3.1 Пертурбациона метода више скала

Диференцијална једначина (7.14) је позната у литератури као параметарска Duffing-ова диференцијална једначина. У циљу одређивања њеног апроксимативног решења, претпоставићемо решење методом више скала у следећем облику

$$q(T_0, T_1, \varepsilon) = q_0(T_0, T_1) + \varepsilon q_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (7.16)$$

где  $T_0 = \tau$  и  $T_1 = \varepsilon\tau$  представљају брзу и спору временску скалу. Брза временска скала је повезана са линеарним непоремећеним системом са одговарајућом сопственом фреквенцијом, док спора скала одговара модулацијама амплитуде и фазе за случај временски променљивог аксијалног оптерећења. Разматрајући суб-хармонијску резонанцу [120] нано-греде, бездимензиона фреквенција спољашње побуде може се узети да је

$$\bar{\Omega} = 2\omega_n + \varepsilon\sigma, \quad (7.17)$$

у коме је  $\varepsilon$  мали бездимензиони параметар, а  $\sigma$  је параметар подешавања које описује близину побудне фреквенције  $\bar{\Omega}$  у односу на двоструку вредност сопствене линеарне фреквенције  $\omega_n$  непоремећеног система. Ако заменимо једначине (7.16) и (7.17) у једначину (7.14) добија се

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} \right) (q_0 + \varepsilon q_1) + \varepsilon \zeta_n \left( \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} \right) (q_0 + \varepsilon q_1) \\ & + \left[ \omega_n^2 - \varepsilon \frac{1}{2} \gamma_n \bar{F}_1 (e^{j\bar{\Omega}T_0} + e^{-j\bar{\Omega}T_0}) \right] (q_0 + \varepsilon q_1) + \frac{1}{4} \varepsilon \bar{\alpha}_n (q_0 + \varepsilon q_1)^3 = 0, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где су временски изводи  $\frac{d}{d\tau}$  и  $\frac{d^2}{d\tau^2}$  дефинисани као

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2), \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + O(\varepsilon^2). \quad (7.19)$$

У једначинама (7.19) занемарићемо чланове реда  $O(\varepsilon^2)$ .

Изједначавањем чланова, уз исте степене  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon^1$  малог параметра, са леве и десне стране једначине (7.18) добијамо две парцијалне диференцијалне једначине

$$\varepsilon^0: \quad \frac{\partial^2 q_0}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 q_0 = 0, \quad (7.20)$$

$$\varepsilon^1: \quad \frac{\partial^2 q_1}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 q_1 = -2 \frac{\partial^2 q_0}{\partial T_0 \partial T_1} - \zeta_n \frac{\partial q_0}{\partial T_0} + \frac{1}{2} \gamma_n \bar{F}_1 (e^{j\bar{\Omega}T_0} + e^{-j\bar{\Omega}T_0}) q_0 - \frac{1}{4} \bar{\alpha}_n q_0^3. \quad (7.21)$$

Решење једначине (7.20) је облика

$$q_0(T_0, T_1) = A_n(T_1) e^{j\omega_n T_0} + \bar{A}_n(T_1) e^{-j\omega_n T_0}, \quad (7.22)$$

где је  $j = \sqrt{-1}$ ,  $A_n$  је комплексна функција споре временске скале  $T_1$ , а  $\bar{A}_n$  је коњуговано комплексна функција од  $A_n$ .

Заменом решења (7.22) у једначину (7.21) и користећи релацију за суб-хармонијску резонанцију једначина (7.17), добијамо

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 q_1 = \left[ -j\omega_n \left( 2 \frac{\partial A_n}{\partial T_1} + \zeta_n A_n \right) + \frac{1}{2} \gamma_n \bar{F}_1 \bar{A}_n e^{j\sigma T_1} - \frac{3}{4} \bar{\alpha}_n A_n^2 \bar{A}_n \right] e^{j\omega_n T_0} + cc + NST, \quad (7.23)$$

у коме су  $cc$  и  $NST$  коњуговано комплексна вредност и несекуларни чланови.

У општем случају секуларни члан може да расте неограничено са порастом времена  $T_0$ , и тада добијено пертурбационо решење одговара само за мали интервал времена  $T_0$ . У циљу добијања решења непознате функције  $A_n$ , а која зависи од споро променљивог времена  $T_1$ , секуларни члан из диференцијалне једначине (7.23), тј. израз уз  $e^{j\omega_n T_0}$  изједначимо са нулом, тако да следи

$$-j\omega_n \left( 2 \frac{\partial A_n}{\partial T_1} + \zeta_n A_n \right) + \frac{1}{2} \gamma_n \bar{F}_1 \bar{A}_n e^{j\sigma T_1} - \frac{3}{4} \bar{\alpha}_n A_n^2 \bar{A}_n = 0. \quad (7.24)$$

Решење диференцијалне једначине (7.24) можемо претпоставити у облику

$$A_n(T_1) = a_n(T_1) e^{j\beta_n(T_1)}, \quad (7.25)$$

где чланови  $a_n(T_1)$  и  $\beta(T_1)$  представљају амплитуду и фазу нелинеарних осцилација нано-греде. Ако заменимо претпостављено решење (7.25) у (7.24), после раздвајања имагинарног од реалног дела, добија се

$$\frac{\partial a_n}{\partial T_1} + \frac{1}{2} \zeta_n a_n - \frac{1}{4} \gamma_n \bar{F}_1 \frac{a_n}{\omega_n} \sin \psi_n = 0, \quad (7.26)$$

$$\frac{\partial \beta_n}{\partial T_1} - \frac{3}{8} \frac{\bar{\alpha}_n}{\omega_n} a_n^2 + \frac{1}{4} \gamma_n \frac{\bar{F}_1}{\omega_n} \cos \psi_n = 0, \quad (7.27)$$

где је  $\psi_n = \sigma T_1 - 2\beta_n$  нови фазни угао. У циљу разматрања слободних непригушених осцилација, у једначинама (7.26) и (7.27) замењујемо  $\bar{F}_1 = 0$  и  $\zeta_n = 0$ , одакле следи

$$a_n(T_1) = a_{0n} = Const., \quad (7.28)$$

$$\beta_n(T_1) = \frac{3}{8} \frac{\bar{\alpha}_n}{\omega_n} a_{0n}^2 T_1 + \beta_{0n}, \quad (7.29)$$

где су  $a_{0n}$  и  $\beta_{0n}$  константе које се одређују из почетних услова кретања нано-греде.

Ако заменимо  $a_n(T_1)$  и  $\beta_n(T_1)$  у једначину (7.25), а затим  $A_n(T_1)$  и  $\bar{A}_n(T_1)$  у једначину (7.22) добија се закон кретања, у првој апроксимацији, слободних непригушених осцилација

$$q_0(T_0, T_1) = a_{0n} e^{j[(\omega_{nl})_n \tau + \beta_{0n}]} + cc, \quad (7.30)$$

где је  $(\omega_{nl})_n$  нелинеарна фреквенција система

$$(\omega_{nl})_n = \omega_n \left( 1 + \varepsilon \frac{3}{8} \frac{\bar{\alpha}_n}{\omega_n^2} a_{0n}^2 \right). \quad (7.31)$$

У циљу анализе динамичке стабилности анализираног нелинеарног динамичког система, претпоставићемо да амплитуда  $a_n$  и фазни угао  $\psi_n$  не зависе од времена  $T_1$ , тако да се у том случају разматрамо кретање у устаљеном стању (steady-state motion). За услове устаљеног (стационарног) стања  $\partial a_n / \partial T_1 = 0$  и  $\partial \psi_n / \partial T_1 = 0$  једначине (7.26) и (7.27), сада гласе

$$\frac{1}{2} \gamma_n \frac{\bar{F}_1}{\omega_n} \sin \psi_n = \zeta_n, \quad (7.32a)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_n \frac{\bar{F}_1}{\omega_n} \cos \psi_n = -\sigma + \frac{3}{4} \frac{\bar{\alpha}_n}{\omega_n} a_n^2. \quad (7.32b)$$

Ако из ових једначина елиминишемо фазни угао  $\psi_n$  добијамо следећу алгебарску једначину по параметру  $\sigma$

$$\sigma^2 - \frac{3}{2} \sigma \frac{\bar{\alpha}_n}{\omega_n} a_n^2 + \left( \frac{3}{4} \frac{\bar{\alpha}_n}{\omega_n} a_n^2 \right)^2 + \zeta_n^2 = \left( \frac{\gamma_n \bar{F}_1}{2\omega_n} \right)^2. \quad (7.32b)$$

Решења ове алгебарске једначине одређују амплитудно-фреквентне криве за различите вредности параметра  $\sigma$

$$\sigma_{1/2} = \frac{3}{4} \frac{\bar{\alpha}_n}{\omega_n} a_n^2 \mp \sqrt{\left[ \left( \frac{\gamma_n \bar{F}_1}{2\omega_n} \right)^2 - \zeta_n^2 \right]}. \quad (7.33a)$$

Ако занемаримо утицај инерције ротације  $\delta$ , пригушења  $\zeta_n$  и геометријске нелинеарности  $\bar{\alpha}_n$ , амплитудно-фреквентна крива постаје

$$\sigma_{1/2} = \mp \frac{\bar{F}_1}{2\omega_n} (n\pi)^2. \quad (7.33b)$$

Овај резултат дат једначином (7.33b) приказан је у раду Li и остали [121].

### 7.3.2 Стабилност система

У овом делу извршиће се анализа стабилности аналитичког решења устаљеног стања, коришћењем Јасоби-јеве матрице. Једначине (7.26) и (7.27) сада пишемо у следећем облику

$$\frac{\partial a_n}{\partial T_1} = -\frac{1}{2} \zeta_n a_n + \frac{1}{4} \gamma_n \bar{F}_1 \frac{a_n}{\omega_n} \sin \psi_n = F_1(a_n, \psi_n), \quad (7.34)$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial T_1} = \sigma - \frac{3}{4} \frac{\bar{\alpha}_n}{\omega_n} a_n^2 + \frac{1}{2} \gamma_n \frac{\bar{F}_1}{\omega_n} \cos \psi_n = F_2(a_n, \psi_n), \quad (7.35)$$

За услове устаљеног (стационарног) стања када је  $a_n = a_{0n}$ ,  $\psi_n = \psi_{0n}$ ,  $\partial a_n / \partial T_1 = 0$  и  $\partial \psi_n / \partial T_1 = 0$  следи

$$F_1(a_n, \psi_n) = -\frac{1}{2} \zeta_n a_{0n} + \frac{1}{4} \gamma_n \bar{F}_1 \frac{a_{0n}}{\omega_n} \sin \psi_{0n} = 0, \quad (7.36)$$

$$F_2(a_n, \psi_n) = \sigma - \frac{3 \bar{\alpha}_n}{4 \omega_n} a_{0n}^2 + \frac{1}{2} \gamma_n \frac{\bar{F}_1}{\omega_n} \cos \psi_{0n} = 0, \quad (7.37)$$

па Јасоби-јева матрица гласи

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(a_n, \psi_n)}{\partial a_n} & \frac{\partial F_1(a_n, \psi_n)}{\partial \psi_n} \\ \frac{\partial F_2(a_n, \psi_n)}{\partial a_n} & \frac{\partial F_2(a_n, \psi_n)}{\partial \psi_n} \end{bmatrix}_{\substack{a_n=a_{0n} \\ \psi_n=\psi_{0n}}} \cdot \quad (7.38)$$

Карактеристичну једначину система једначина (7.36) и (7.37) пишемо у облику

$$|J - \lambda I| = l_0 \lambda^2 + l_1 \lambda + l_2 = 0, \quad (7.39)$$

где су  $l_0, l_1$  и  $l_2$  константе за разматрани пример, гласе

$$l_0 = 1, \quad l_1 = \zeta_n, \quad l_2 = \frac{3 \bar{\alpha}_n}{4 \omega_n} a_{0n}^2 \left( \frac{3 \bar{\alpha}_n}{4 \omega_n} a_{0n}^2 - \sigma \right). \quad (7.40)$$

Потребан и довољан услов за стабилност устаљеног (стационарног) стања (steady-state motion) је да су сви коефицијенти карактеристичне једначине позитивни и да су све Routh-ове детерминанте такође позитивне.

## 7.4 Нумерички примери

У овом делу размотрићемо утицај различитих физичких параметара на нелинеарне осцилације и динамичку стабилност уметнуте једнослојне угљеничне нано-цеви у вискоеластичном слоју Kelvin-Voigt-овог типа која се налази под дејством магнетног поља и временски променљивог аксијалног оптерећења. Претрагом литературе је установљено да овај модел још увек није анализиран молекуларно динамичким симулацијама нити експериментом. Међутим, приказани модел може бити полазна тачка у даљим истраживањима нелинеарних осцилација сложенијих нано-структура, које се налазе под дејством различитих побуда. Такође, извршена је и валидација анализираниог модела, а добијени резултати упоређени су са резултатима датим у раду Li и остали [121]. Анализиран је утицај коефицијената вискоеластичног слоја, нелокалног параметра, лонгитудиналног магнетног поља као и утицај статичке и динамичке амплитуде аксијалног оптерећења на нелинеарну сопствену фреквенцију, област нестабилности и на фреквентно-амплитудну криву.

### 7.4.1 Упоредна анализа

У циљу упоредне анализе резултата из рада Li и остали [121] и добијених у овој анализи, претпоставићемо да је променљиво аксијално оптерећење са позитивним знаком  $F = (F_0 + F_1 \cos \Omega t)$ , како би наш систем одговарао систему [121]. Такође занемарићемо утицај

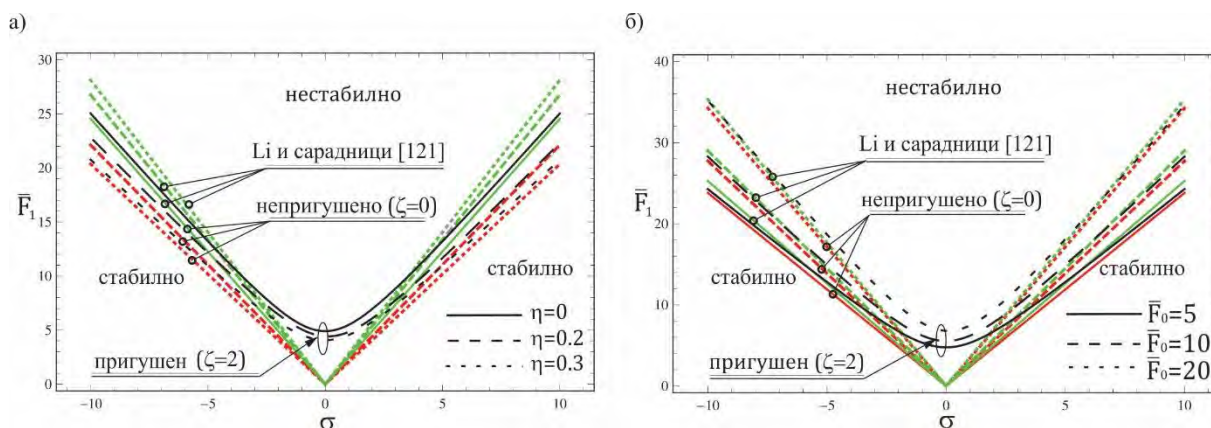
крутости и вискозности виско-еластичног слоја, инерцију обртања попречних пресека нано-греде и интензитета магнетног поља. За овакав систем сада сопствена фреквенција (7.15а) добија облик

$$\omega_n = \sqrt{\alpha_n^2 \bar{F}_0 + \frac{\alpha_n^4}{1 + \alpha_n^2 \eta^2}}. \quad (7.42)$$

Ако заменимо одређену сопствену фреквенцију  $\omega_n = \tilde{\omega}_n$ , израз (7.42) у (7.33), добићемо амплитудно-фреквентну криву линеаризованог система

$$\sigma_{1/2} = \mp \sqrt{\left[ \left( \frac{\gamma_n \bar{F}_1}{2 \tilde{\omega}_n} \right)^2 - \zeta_n^2 \right]}. \quad (7.43)$$

На Сл. 7.2 приказане су области нестабилности за линеаризован систем и резултати из рада Li и остали [121] за различите вредности нелокалног параметра  $\eta$  и статичког аксијалног оптерећења  $\bar{F}_0$ . Упоредјујући приказане резултате на Сл. 7.2а можемо приметити да порастом нелокалног параметра  $\eta$  добијене области нестабилности је нешто већа него што је показано у раду [121]. Међутим, у случају константне вредности нелокалног параметра  $\eta$  и за различите вредности амплитуде статичког аксијалног оптерећења  $\bar{F}_0$ , Сл. 7.2б, може се запазити добро слагање са резултатима из рада [121]. Као што се може и очекивати за случај пригушених осцилација област нестабилности се смањује усред повећања пригушења у систему.



Сл. 7.2. Упоредни приказ области нестабилности за линеаризован систем и резултата из рада [121] за различите вредности а) нелокалног параметра  $\eta$  и б) статичког аксијалног оптерећења  $\bar{F}_0$ .

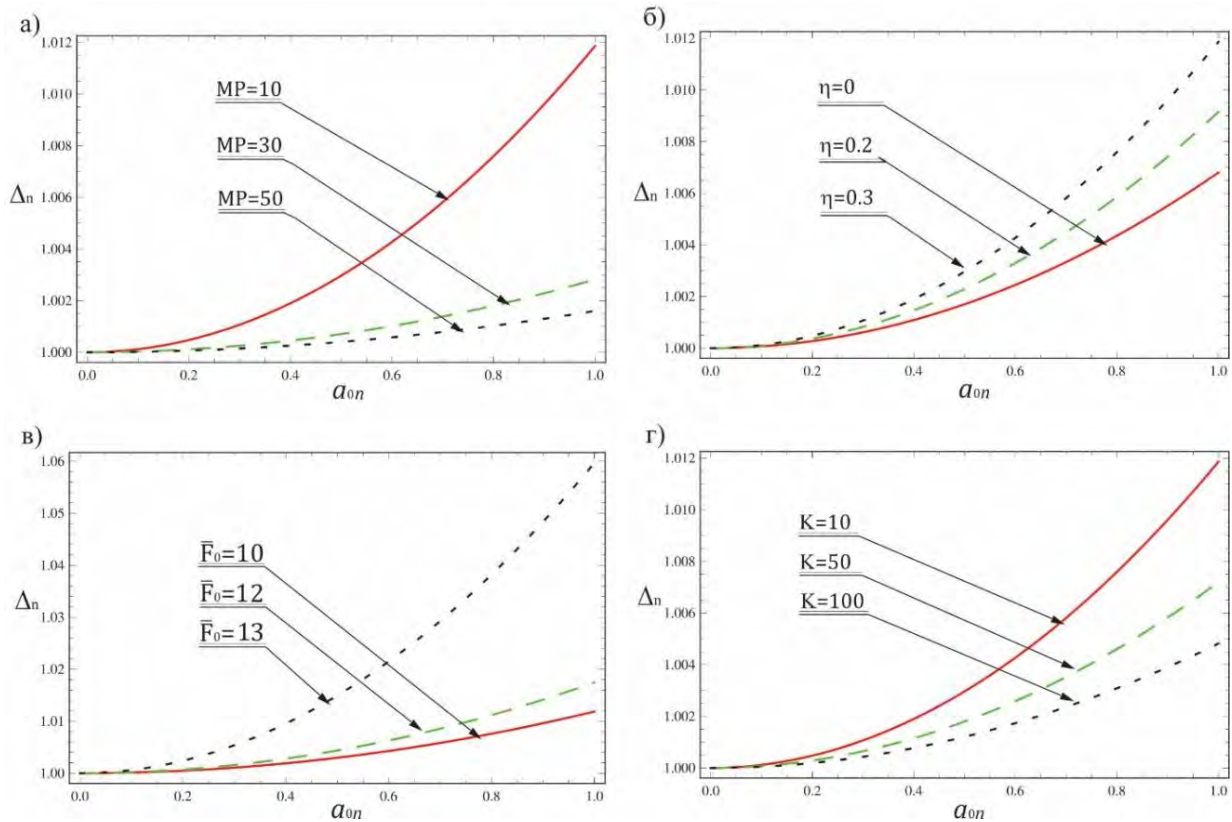
#### 7.4.2 Параметарска анализа

На сликама 7.3а, б, в и г приказан је однос сопствене фреквенције за нелинеарни и линеарни систем  $\Delta_n$ , у даљем тексту фреквентни однос, у функцији амплитуде устаљеног стања  $a_{0n}$ , а за различите вредности интензитета логитудиналног магнетног поља  $MP$ , нелокалног



параметра  $\eta$ , амплитуде статичког аксијалног оптерећења  $\bar{F}_0$  и крутости еластичног слоја  $K$ . Овај однос одређујемо из израза (7.31) као

$$\Delta_n = \frac{(\omega_{nl})_n}{\omega_n} = 1 + \varepsilon \frac{3 \bar{\alpha}_n}{8 \omega_n^2} a_{0n}^2. \quad (7.44)$$



Сл. 7.3. Фреквентни однос за различите вредности материјалних параметара, а) параметра магнетног поља  $MP$ , б) нелокални параметар  $\eta$ , в) статичко аксијално оптерећење  $\bar{F}_0$ , и г) коефицијент крутости еластичног слоја  $K$ .

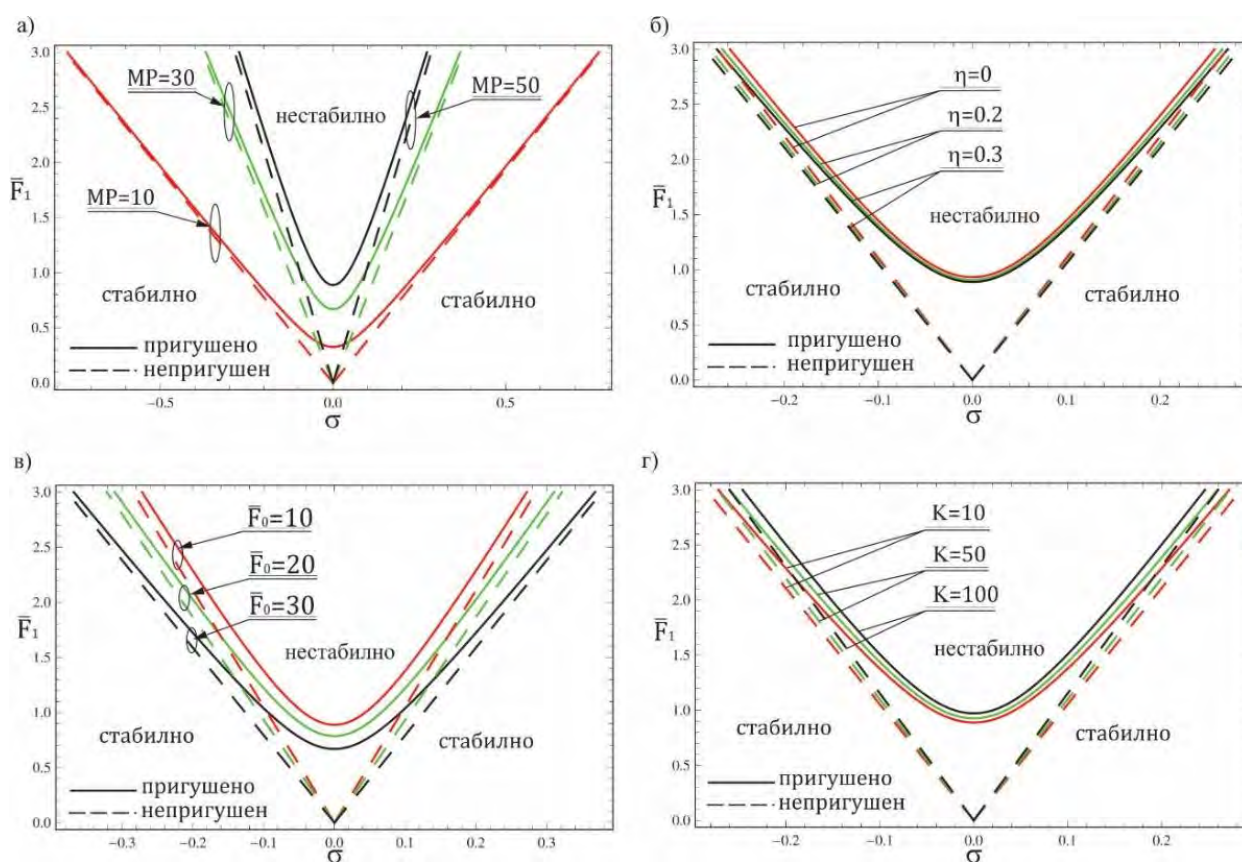
Криве на Сл. 7.3а нацртане су за следеће параметре система  $K = 10, \bar{F}_0 = 10, \delta = 0.5, \varepsilon = 0.01$  и  $\eta = 0.3$ . Можемо приметити да са повећањем интензитета лонгитудиналног магнетног поља  $MP = 10, 20, 30$  долази до смањења фреквентног односа  $\Delta_n$ . То значи да повећањем интензитета лонгитудиналног магнетног поља  $MP$  има већи утицај на сопствену фреквенцију линеарног система  $\omega_n$ . Такође, одговарајућим избором интензитета лонгитудиналног магнетног поља  $MP$  можемо утицати на фреквенцију осциловања линеарног и нелинеарног система, а тиме можемо избегнути резонантна стања у систему.

Криве на Сл. 7.3б нацртане су за следеће параметре система  $K = 10, \bar{F}_0 = 10, \delta = 0.5, \varepsilon = 0.01$  и  $MP = 10$ . Можемо приметити да са повећањем нелокалног параметра  $\eta$  повећава се фреквентни однос  $\Delta_n$ , што значи да се сопствена фреквенција осциловања система  $\omega_n$  смањује.

Криве на Сл. 7.3в нацртане су за следеће параметре система  $K = 10$ ,  $\eta = 0.3$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.01$  и  $MP = 10$ . Можемо приметити да са повећањем интензитета аксијалног оптерећења  $\bar{F}_0$  расте фреквентни однос  $\Delta_n$ , што значи да овај параметар значајније утиче на сопствену фреквенцију нелинеарног система.

Криве на Сл. 7.3г, нацртане су за следеће параметре система  $\bar{F}_0 = 10$ ,  $MP = 10$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.01$  и  $\eta = 0.3$ . Повећање крутости еластичног слоја  $K$  изазива смањење фреквентног односа  $\Delta_n$ , што значи да овај параметар веома утиче на сопствену фреквенцију линеарног система.

У свим приказаним случајевима важи да повећање амплитуде осциловања  $a_{0n}$  доводи и до повећања фреквентног односа Сл. 7.3.

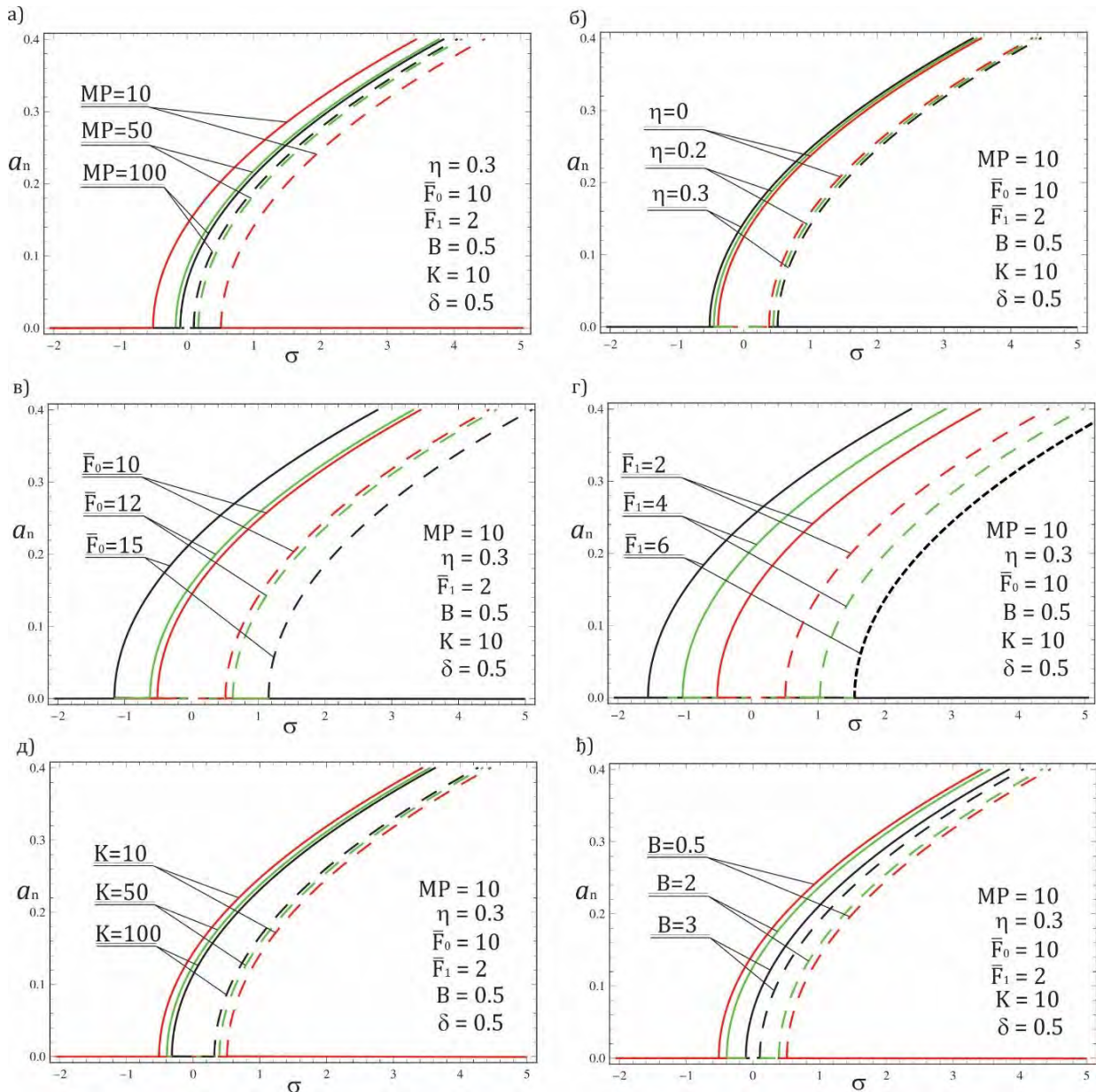


Сл. 7.4 Области нестабилности за линеаран случај динамичке стабилности нано-греде.

На сликама 7.4 а, б, в и г приказане су области динамичке стабилности нано-греде за случај линеарног система. Области стабилности одређене су функционалном зависношћу амплитуде динамичког аксијалног оптерећења и параметра подешења  $\sigma$ , а за различите вредности параметара система.

Утицај повећања интензитета лонгитудиналног магнетног поља  $MP$ , коефицијента крутости  $K$  на област динамичке стабилности односно нестабилности система, приказано је на Сл. 7.4 а и г. Може се приметити да повећањем ових параметара система утиче тако, да се област нестабилности смањује односно повећава стабилност система.

Утицај повећања нелокалног параметра  $\eta$  и амплитуде статичког аксијалног оптерећења  $\bar{F}_0$  на област динамичке стабилности односно нестабилности система, Сл. 7.4б и в. Може се приметити да повећањем ових параметара система утиче тако, да се област нестабилности повећава односно смањује се стабилност система.



Сл. 7.5 Утицај различитих физичких параметара на фреквентно-амплитудне криве.

На сликама 7.5а, б, в, г, д, и ж приказан је утицај различитих физичких параметара система на амплитудно-фреквентну криву за случај параметарских осцилација система. Релацијом (7. 33а) одређена је веза између амплитуда  $a_n$  и параметра подешавања фреквенције  $\sigma$ . Пуном

линијом је означена стабилна грана амплитуде, а испрекиданом нестабилна. Област нестабилности система је површина између ових кривих.

Утицај повећања интензитета лонгитудиналног поља  $MP$ , коефицијента крутости  $K$  и коефицијента пригушења виско-еластичног слоја  $B$  на амплитудно-фреквентну криву приказан је на Сл. 7.5а, д и ђ. Може се приметити да повећањем ових параметара система утиче тако, да смањује област нестабилности односно повећава стабилност система.

Утицај повећања интензитета нелокалног параметра  $\eta$ , статичког  $\bar{F}_0$  и динамичког аксијалног оптерећења  $\bar{F}_1$  на амплитудно-фреквентну криву приказан је на Сл. 7.5б, в, и г. Може се приметити да повећање ових параметара система, утиче тако, да повећава област нестабилности односно смањује област стабилности система.

# Закључак

У овој докторској дисертацији представљени су и анализирани модели сложених нано-структура засновани на једнослојним угљеничним нано-цевима и графенским нано-листићима. Треба напоменути да механички модел угљеничне нано-цеви представља нано-греда, док механички модел графенског нано-листића представља нано-плоча. Проучавање динамичког понашања и стабилности сложених система који се састоје из више нано-цеви и више нано-плоча је веома значајно у пројектовању и анализи нано-електромеханичких система, нано-сензора и нано-резонатора. Парцијалне диференцијалне једначине које описују кретање оваквих система добијене су коришћењем другог Newton-овог закона кретања и Hamilton-овог принципа, Eringen-ове теорије континуума и одређене структурне теорије у зависности да ли је у питању модел греде или модел плоче. Треба истаћи да су у оквиру дисертације обрађени и проблеми унутрашњег пригушења у материјалу, које је обухваћено нелокалном виско-еластичном конститутивном релацијом. Такође, разматран је утицај различитих физичких поља као што је магнетно и температурно поље на динамичко понашање нано-система, где је показан веома значајан утицај и могућност подешавања карактеристика променом њихове вредности. Сложени модели који су анализирани у оквиру докторске дисертације представљају системе спрегнутих нано-греда односно нано-плоча између којих се налазе еластични или виско-еластични слојеви. Разматране су трансверзалне и лонгитудиналне осцилације и стабилност система нано-греда као и трансверзалне осцилације и стабилност система нано-плоча. Потребно је напоменути да су за приказане еластичне моделе, изведени аналитички изрази за сопствене фреквенције и критичну силу извијања док код виско-еластичних модела добијени су аналитички изрази за кружне фреквенције и коефицијент пригушења система. Анализирани су и специјални случајеви када број нано елемената (нано-греда или нано-плоча) и број мода тежи бесконачно и у тим случајевима добијене су асимптотске вредности фреквенције и критичне силе извијања. Случај нелинеарних слободних осцилација и динамичке стабилности угљеничне нано-цеви под дејством временски променљивих аксијалних сила и спољашњег магнетног поља, приказан је на моделу једне нелокалне нано-греде са геометријском нелинеарношћу, уметнуте у виско-еластичну средину. Добијени су апроксимативни аналитички изрази за нелинеарне фреквенције и амплитудно-фреквентне криве методом вишеструких временских скала, а такође одређене су области стабилности и нестабилности система. Показана је могућност избегавања резонантних стања као и промена области стабилности и нестабилности система, усред промене само спољашњег магнетног поља, без промене било ког другог структурног параметра система. За приказане случајеве извршена је вишепараметарска анализа, где је показан утицај различитих физичких и геометријских параметара на динамичко понашање и стабилност система.

У оквиру Главе 1 дат је преглед литературе и уводна разматрања о нелокалној теорији континуума. Такође дата је математичка формулација конститутивних релација за нелокално еластично и виско-еластично тело. Треба истаћи да се у Главама 2 - 6 разматрају линеарне трансверзалне и лонгитудиналне осцилације система нано-греда односно нано-плоча, док је у седмој глави разматран нелинеаран случај параметарских осцилација и динамичке стабилности једне нано-греде.

У другој глави докторске дисертације изведене су основне диференцијалне једначине кретања система лонгитудиналних и трансверзалних осцилација нано-греда и трансверзалне осцилације нано-плоча применом другог Newton-овог закона кретања и нелокалне еластичне конститутивне релације. Добијени су аналитички изрази за сопствене фреквенције и критичну силу извијања методом раздвајања променљивих. Као модел греде коришћена је Euler-Bernoulli-јева теорија док је за модел нано-плоче коришћена Kirchoff-ова теорија. Модели нано-греда односно нано-плоча су засновани на нелокалној теорији еластичности. Код трансверзалних осцилација нано-греде односно нано-плоче разматрани су просто ослоњени гранични услови, док код лонгитудиналних осцилација разматран је обострано уклештен и конзолни нано-штап.

Примена виших теорија греде, као што су Reddy-јева и Huu-Thai-јева, у анализи динамичког понашања и стабилности једнослојне угљеничне нано-цеви, разматрано је у трећој глави. Применом Hamilton-овог принципа и градијентних конститутивних релација изведене су диференцијалне једначине кретања система модела нано-греде са простим ослоњцима. Градијентне теорије еластичности које су анализирани у Глави 3 су напонско градијентна или Eringen-ова нелокална теорија и два типа деформационо градијентних теорија еластичности. Методом раздвајања променљивих добијена су аналитичка решења за сопствене фреквенције и критичну силу извијања за оба модела нано-греде. Верификација тако добијених резултата урађена је поређењем са резултатима молекуларно динамичких симулација из литературе и показано је одлично слагање. Детаљном параметарском анализом утврђен је утицај: односа дужине и висине ( $L/D$ ), нелокалног параметра и различитих конститутивних релација на сопствене фреквенције и критичну силу извијања нано-греде. Утврђено је да повећање оба параметра доводи до опадања сопствене фреквенције и критичне силе извијања, што се физички може протумачити да ова два параметра имају пригушујуће својство на систем.

Утицај магнетног поља и промене температуре на осцилације једнослојне нано-греде са оштећењем уметнуте у еластичну средину разматрано је у четвртој глави. Треба напомену да је разматрано оштећење у виду процепа, тј. неправилност у кристалној решетки угљеничне нано-цеви изазвано недостатком атома угљеника у кристалној решетки. Механички модел оштећене угљеничне нано-цеви састоји се од дво-сегментне нано-греде чији су сегменти повезани торзионом опругом на месту оштећења, која је уметнута у Winkler-ов слој. Треба истаћи, да фактор утицаја прслине зависи од дубине и ширине оштећења и може се одредити молекуларно динамичким симулацијама. Парцијалне диференцијалне једначине кретања дво-сегментне нано-

греде добијене су применом другог Newton-овог закона кретања, нелокалне термо-еластичне конститутивне релације и класичних Maxwell-ових релација. Разматрана су два типа граничних услова, греда са простим ослоњцима и обострано уклештена греда. Нумеричко решење за сопствене фреквенције система одређена су применом методе раздвајања променљивих и нумеричких метода у софтверу Wolfram Mathematica. У нумеричким примерима приказан је утицај оштећења на осцилације у прва четири мода осциловања оштећене нано-греде. Такође, анализиран је утицај нелокалног, магнетног, температурног и фактора утицаја прслине на динамику система.

У петој глави анализирано је осцилаторно понашање и стабилност еластично повезаних нано-штапова, греда и плоча применом нелокалне теорије еластичности. Анализирана су три случаја, у првом случају су разматране лонгитудиналне осцилације система спрегнутих нано-штапова, други случај је посвећен анализи трансверзалних осцилација система спрегнутих нано-греда док се у трећем случају разматрају трансверзалне осцилације система спрегнутих нано-плоча. Системи парцијалних диференцијалних једначина су добијени применом d'Alembert-овог принципа и нелокалне еластичне конститутивне релације. Аналитичка решења за сопствене фреквенције и критичну силу извијања су добијена применом методе раздвајања променљивих и тригонометријске методе. Валидација тако добијених аналитичких решења извршена је применом нумеричких метода и показана су одлична слагања. Треба истаћи да су анализирани случајеви када број нано елемената тежи бесконачно, где су добијене асимптотске вредности за сопствене фреквенције и критичне силе извијања. У нумеричким примерима приказана је детаљна анализа утицаја нелокалног параметра, крутости еластичног слоја и броја нано елемената на сопствене фреквенције и критичну силу извијања. Показано је да повећањем броја нано елемената у систему доводи до опадања сопствене фреквенције и критичне силе извијања.

У шестој глави разматрано је динамичко понашање виско-еластичних система који су сачињени од већег броја једнаких нано елемената као што су виско-еластични нано-штапови, греде и плоче између којих се налазе виско-еластични слојеви. Применом другог Newton-овог закона кретања и нелокалне виско-еластичне конститутивне релације изведене су основне парцијалне диференцијалне једначине кретања које узимају у обзир утицај мале скале и унутрашње пригушење. Добијена су аналитичка решења за кружне фреквенције и коефицијент пригушења система методом раздвајања променљивих и тригонометријском методом, а за случајеве када су нано-елементи спрегнути у уклештени и слободни ланац. Такође, разматрани су и случајеви када број нано-елемената тежи бесконачно као и када број мода тежи бесконачно и у тим случајевима добијени су асимптотске вредности кружне фреквенције и коефицијента пригушења система. Извршено је поређење тако добијених аналитичких резултата са нумерички добијеним резултатима, и показано је одлично слагање. Детаљна параметарска анализа је урађена и показан је утицај различитих параметара система на кружну фреквенцију и коефицијент пригушења система.

У последњој глави дисертације разматран је модел једнослојне угљеничне нано-цеви где је узет у обзир утицај геометријске нелинеарности и лонгитудиналног магнетног поља на слободне осцилације и динамичку стабилност, коришћењем нелокалне теорије еластичности и Rayleigh-јеве теорије греде. Потребно је напоменути да се угљенична нано-цев налази у виско-еластичном слоју Kelvin-Voigt-овог типа и да је под дејством временски променљивог аксијалног оптерећења и лонгитудиналног магнетног поља. Диференцијалне једначине кретања система угљеничне нано-цеви су изведене применом другог Newton-овог закона кретања, а утицај лонгитудиналног магнетног поља је уведем преко класичних Maxwell-ових релација. Применом методе више временских скала добијена су апроксимативна аналитичка решења за нелинеарне фреквенције, амплитудно-фреквентне криве и области стабилности односно нестабилности. Треба истаћи да је анализиран случај устаљеног стања (steady-state response) када је фреквенција аксијалног оптерећења два пута већа од сопствене фреквенције система. Такође, дати су нумерички примери у којима је приказан утицај лонгитудиналног магнетног поља, коефицијената крутости и пригушења виско-еластичног слоја и нелокалног параметра на динамичко понашање уметнуте угљеничне нано-цеви. Показана је могућност избегавања резонантних стања као и промена области стабилности и нестабилности система, усред промене само спољашњег магнетног поља, без промене било ког другог структурног параметра система.

Даљи рад у овој области могуће је наставити увођењем стохастичких утицаја и нелинеарности у различитим нано-системима.



# Литература

- [1] Yang, W., Ratinac, K. R., Ringer, S. P., Thordarson, P., Gooding, J. J., & Braet, F. (2010). Carbon nanomaterials in biosensors: should you use nanotubes or graphene?. *Angewandte Chemie International Edition*, 49(12), 2114-2138.
- [2] Thostenson, E. T., & Chou, T. W. (2002). Aligned multi-walled carbon nanotube-reinforced composites: processing and mechanical characterization. *Journal of physics D: Applied physics*, 35(16), L77.
- [3] Stankovich, S., Dikin, D. A., Dommett, G. H., Kohlhaas, K. M., Zimney, E. J., Stach, E. A., ... & Ruoff, R. S. (2006). Graphene-based composite materials. *Nature*, 442(7100), 282-286.
- [4] Ni, Z. H., Wang, H. M., Kasim, J., Fan, H. M., Yu, T., Wu, Y. H., ... & Shen, Z. X. (2007). Graphene thickness determination using reflection and contrast spectroscopy. *Nano letters*, 7(9), 2758-2763..
- [5] Duan, W. H., Wang, C. M., & Zhang, Y. Y. (2007). Calibration of nonlocal scaling effect parameter for free vibration of carbon nanotubes by molecular dynamics. *Journal of applied physics*, 101(2), 024305-024305.
- [6] Lehtinen, O., Kotakoski, J., Krasheninnikov, A. V., Tolvanen, A., Nordlund, K., & Keinonen, J. (2010). Effects of ion bombardment on a two-dimensional target: Atomistic simulations of graphene irradiation. *Physical review B*, 81(15), 153401.
- [7] Eringen, A. C., & Edelen, D. G. B. (1972). On nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 10(3), 233-248.
- [8] Eringen, A. C. (1972). Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *International Journal of Engineering Science*, 10(5), 425-435.
- [9] Eringen, A. C. (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 54(9), 4703-4710.
- [10] Su, Y., Wei, H., Gao, R., Yang, Z., Zhang, J., Zhong, Z., & Zhang, Y. (2012). Exceptional negative thermal expansion and viscoelastic properties of graphene oxide paper. *Carbon*, 50(8), 2804-2809.
- [11] Imboden, M., & Mohanty, P. (2014). Dissipation in nanoelectromechanical systems. *Physics Reports*, 534(3), 89-146.

- [12] Zhou, X., Shin, E., Wang, K. W., & Bakis, C. E. (2004). Interfacial damping characteristics of carbon nanotube-based composites. *Composites Science and Technology*, 64(15), 2425-2437.
- [13] Levy, N., Burke, S. A., Meaker, K. L., Panlasigui, M., Zettl, A., Guinea, F., ... & Crommie, M. F. (2010). Strain-induced pseudo-magnetic fields greater than 300 tesla in graphene nanobubbles. *Science*, 329(5991), 544-547.
- [14] Novoselov, K. S., Geim, A. K., Morozov, S. V., Jiang, D., Zhang, Y., Dubonos, S. V., ... & Firsov, A. A. (2004). Electric field effect in atomically thin carbon films. *science*, 306(5696), 666-669.
- [15] Balandin, A. A., Ghosh, S., Bao, W., Calizo, I., Teweldebrhan, D., Miao, F., & Lau, C. N. (2008). Superior thermal conductivity of single-layer graphene. *Nano letters*, 8(3), 902-907.
- [16] Kumar, B., Lee, K. Y., Park, H. K., Chae, S. J., Lee, Y. H., & Kim, S. W. (2011). Controlled growth of semiconducting nanowire, nanowall, and hybrid nanostructures on graphene for piezoelectric nanogenerators. *Acs Nano*, 5(5), 4197-4204.
- [17] Lee, H. L., & Chang, W. J. (2008). Free transverse vibration of the fluid-conveying single-walled carbon nanotube using nonlocal elastic theory. *Journal of Applied Physics*, 103(2), 024302.
- [18] Wang, B., Deng, Z., Ouyang, H., & Zhang, K. (2013). Wave characteristics of single-walled fluid-conveying carbon nanotubes subjected to multi-physical fields. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 52, 97-105.
- [19] Gartstein, Y. N., Zakhidov, A. A., & Baughman, R. H. (2003). Mechanical and electromechanical coupling in carbon nanotube distortions. *Physical Review B*, 68(11), 115415.
- [20] Karličić, D., Murmu, T., Adhikari, S., & McCarthy, M. (2015). *Non-local Structural Mechanics*. John Wiley & Sons., (Hardback 372 pp, ISBN: 9781848215221).
- [21] Murmu, T., & Adhikari, S. (2012). Nonlocal frequency analysis of nanoscale biosensors. *Sensors and Actuators A: Physical*, 173(1), 41-48.
- [22] Murmu, T., & Adhikari, S. (2013). Nonlocal mass nanosensors based on vibrating monolayer graphene sheets. *Sensors and Actuators B: Chemical*, 188, 1319-1327.
- [23] Li, C., & Chou, T. W. (2003). Single-walled carbon nanotubes as ultrahigh frequency nanomechanical resonators. *Physical review B*, 68(7), 073405.
- [24] Chandra, Y., Scarpa, F., Chowdhury, R., Adhikari, S., & Sienz, J. (2013). Multiscale hybrid atomistic-FE approach for the nonlinear tensile behaviour of graphene nanocomposites. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 46, 147-153.

- [25] Liang, J., Huang, Y., Oh, J., Kozlov, M., Sui, D., Fang, S., ... & Chen, Y. (2011). Electromechanical actuators based on graphene and graphene/Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub> hybrid paper. *Advanced Functional Materials*, 21(19), 3778-3784.
- [26] Drechsler, U., Bürer, N., Despont, M., Dürig, U., Gotsmann, B., Robin, F., & Vettiger, P. (2003). Cantilevers with nano-heaters for thermomechanical storage application. *Microelectronic engineering*, 67, 397-404.
- [27] Guz, I. A., Rodger, A. A., Guz, A. N., & Rushchitsky, J. J. (2007). Developing the mechanical models for nanomaterials. *COMPOSITES Part A: applied science and manufacturing*, 38(4), 1234-1250.
- [28] Sundararaghavan, V., & Waas, A. (2011). Non-local continuum modeling of carbon nanotubes: physical interpretation of non-local kernels using atomistic simulations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(6), 1191-1203.
- [29] Eringen, A. C. (Ed.). (2002). *Nonlocal continuum field theories*. Springer Science & Business Media.
- [30] Peddieson, J., Buchanan, G. R., & McNitt, R. P. (2003). Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, 41(3), 305-312.
- [31] Reddy, J. N. (2007). Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, 45(2), 288-307.
- [32] Ansari, R., Gholami, R., & Rouhi, H. (2012). Vibration analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories. *Composites Part B: Engineering*, 43(8), 2985-2989.
- [33] Aydogdu, M. (2009). A general nonlocal beam theory: its application to nanobeam bending, buckling and vibration. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 41(9), 1651-1655.
- [34] Thai, H. T. (2012). A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams. *International Journal of Engineering Science*, 52, 56-64.
- [35] Reddy, J. N., & Pang, S. D. (2008). Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 103(2), 023511.
- [36] Wang, Q., & Varadan, V. K. (2006). Vibration of carbon nanotubes studied using nonlocal continuum mechanics. *Smart Materials and Structures*, 15(2), 659.
- [37] Wang, Q., & Wang, C. M. (2007). The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modelling carbon nanotubes. *Nanotechnology*, 18(7), 075702.

- [38] Karličić, D., Kozić, P., & Pavlović, R. (2015). Flexural vibration and buckling analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories based on Reddy and Huu-Tai formulations. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 53, 1, 217-233.
- [39] Karličić, D., Kozić, P., & Pavlović, R. (2016). Nonlocal vibration and stability of a multiple-nanobeam system coupled by the Winkler elastic medium. *Applied Mathematical Modelling*, 40(2), 1599-1614.
- [40] Aydogdu, M. (2012). Axial vibration analysis of nanorods (carbon nanotubes) embedded in an elastic medium using nonlocal elasticity. *Mechanics Research Communications*, 43, 34-40.
- [41] Danesh, M., Farajpour, A., & Mohammadi, M. (2012). Axial vibration analysis of a tapered nanorod based on nonlocal elasticity theory and differential quadrature method. *Mechanics Research Communications*, 39(1), 23-27.
- [42] Narendar, S., & Gopalakrishnan, S. (2011). Axial wave propagation in coupled nanorod system with nonlocal small scale effects. *Composites Part B: Engineering*, 42(7), 2013-2023.
- [43] Hsu, J. C., Lee, H. L., & Chang, W. J. (2011). Longitudinal vibration of cracked nanobeams using nonlocal elasticity theory. *Current Applied Physics*, 11(6), 1384-1388.
- [44] Kiani, K. (2013). Longitudinal, transverse, and torsional vibrations and stabilities of axially moving single-walled carbon nanotubes. *Current Applied Physics*, 13(8), 1651-1660.
- [45] Şimşek, M. (2012). Nonlocal effects in the free longitudinal vibration of axially functionally graded tapered nanorods. *Computational Materials Science*, 61, 257-265.
- [46] Huang, Z. (2012). Nonlocal effects of longitudinal vibration in nanorod with internal long-range interactions. *International Journal of Solids and Structures*, 49(15), 2150-2154.
- [47] Chang, T. P. (2012). Small scale effect on axial vibration of non-uniform and non-homogeneous nanorods. *Computational Materials Science*, 54, 23-27.
- [48] Murmu, T., & Adhikari, S. (2010). Nonlocal effects in the longitudinal vibration of double-nanorod systems. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 43(1), 415-422.
- [49] Murmu, T., & Adhikari, S. (2011). Nonlocal vibration of carbon nanotubes with attached buckyballs at tip. *Mechanics Research Communications*, 38(1), 62-67.
- [50] Karličić, D., Čajić, M., Murmu, T., Kozić, P., & Adhikari, S. (2015). Nonlocal effects on the longitudinal vibration of a complex multi-nanorod system subjected to the transverse magnetic field. *Meccanica*, 50(6), 1605-1621.

- [51] Geim, A. K., & Novoselov, K. S. (2007). The rise of graphene. *Nature materials*, 6(3), 183-191.
- [52] Gil, A. J., Adhikari, S., Scarpa, F., & Bonet, J. (2010). The formation of wrinkles in single-layer graphene sheets under nanoindentation. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 22(14), 145302.
- [53] Chandra, Y., Chowdhury, R., Adhikari, S., & Scarpa, F. (2011). Elastic instability of bilayer graphene using atomistic finite element. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 44(1), 12-16.
- [54] Allen, M. J., Tung, V. C., & Kaner, R. B. (2009). Honeycomb carbon: a review of graphene. *Chemical reviews*, 110(1), 132-145.
- [55] Pradhan, S. C., & Murmu, T. (2009). Small scale effect on the buckling of single-layered graphene sheets under biaxial compression via nonlocal continuum mechanics. *Computational Materials Science*, 47(1), 268-274.
- [56] Pradhan, S. C., & Murmu, T. (2009). Small scale effect on the buckling of single-layered graphene sheets under biaxial compression via nonlocal continuum mechanics. *Computational Materials Science*, 47(1), 268-274.
- [57] Aksencer, T., & Aydogdu, M. (2011). Levy type solution method for vibration and buckling of nanoplates using nonlocal elasticity theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 43(4), 954-959.
- [58] Pradhan, S. C., & Kumar, A. (2011). Vibration analysis of orthotropic graphene sheets using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method. *Composite Structures*, 93(2), 774-779.
- [59] Murmu, T., & Pradhan, S. C. (2009). Small-scale effect on the free in-plane vibration of nanoplates by nonlocal continuum model. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 41(8), 1628-1633.
- [60] Zhou, S. M., Sheng, L. P., & Shen, Z. B. (2014). Transverse vibration of circular graphene sheet-based mass sensor via nonlocal Kirchhoff plate theory. *Computational Materials Science*, 86, 73-78.
- [61] Lu, P., Zhang, P. Q., Lee, H. P., Wang, C. M., & Reddy, J. N. (2007, December). Non-local elastic plate theories. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (Vol. 463, No. 2088, pp. 3225-3240). The Royal Society.
- [62] Ansari, R., Sahmani, S., & Arash, B. (2010). Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets. *Physics Letters A*, 375(1), 53-62.

- [63] Aghababaei, R., & Reddy, J. N. (2009). Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates. *Journal of Sound and Vibration*, 326(1), 277-289.
- [64] Pradhan, S. C., & Sahu, B. (2010). Vibration of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity and higher order shear deformation theory. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 7(6), 1042-1050.
- [65] Mohammadi, M., Goodarzi, M., Ghayour, M., & Farajpour, A. (2013). Influence of in-plane pre-load on the vibration frequency of circular graphene sheet via nonlocal continuum theory. *Composites Part B: Engineering*, 51, 121-129.
- [66] Wang, C. Y., Murmu, T., & Adhikari, S. (2011). Mechanisms of nonlocal effect on the vibration of nanoplates. *Applied Physics Letters*, 98(15), 153101.
- [67] Pradhan, S. C., & Phadikar, J. K. (2009). Small scale effect on vibration of embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models. *Physics Letters A*, 373(11), 1062-1069.
- [68] Pradhan, S. C., & Phadikar, J. K. (2010). Scale effect and buckling analysis of multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum mechanics. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 7(10), 1948-1954.
- [69] Murmu, T., & Adhikari, S. (2011). Nonlocal vibration of bonded double-nanoplate-systems. *Composites Part B: Engineering*, 42(7), 1901-1911.
- [70] Pouresmaeeli, S., Fazelzadeh, S. A., & Ghavanloo, E. (2012). Exact solution for nonlocal vibration of double-orthotropic nanoplates embedded in elastic medium. *Composites Part B: Engineering*, 43(8), 3384-3390.
- [71] Ansari, R., Arash, B., & Rouhi, H. (2011). Vibration characteristics of embedded multi-layered graphene sheets with different boundary conditions via nonlocal elasticity. *Composite Structures*, 93(9), 2419-2429.
- [72] Karličić, D., Adhikari, S., Murmu, T., & Cajić, M. (2014). Exact closed-form solution for non-local vibration and biaxial buckling of bonded multi-nanoplate system. *Composites Part B: Engineering*, 66, 328-339.
- [73] Lei, Y., Adhikari, S., & Friswell, M. I. (2013). Vibration of nonlocal Kelvin–Voigt viscoelastic damped Timoshenko beams. *International Journal of Engineering Science*, 66, 1-13.
- [74] Arani, A. G., & Roudbari, M. A. (2013). Nonlocal piezoelectric surface effect on the vibration of visco-Pasternak coupled boron nitride nanotube system under a moving nanoparticle. *Thin Solid Films*, 542, 232-241.

- [75] Karličić, D., Cajić, M., Murmu, T., & Adhikari, S. (2015). Nonlocal longitudinal vibration of viscoelastic coupled double-nanorod systems. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 49, 183-196.
- [76] Poursmaeeli, S., Ghavanloo, E., & Fazelzadeh, S. A. (2013). Vibration analysis of viscoelastic orthotropic nanoplates resting on viscoelastic medium. *Composite Structures*, 96, 405-410.
- [77] Karličić, D., Kozić, P., & Pavlović, R. (2014). Free transverse vibration of nonlocal viscoelastic orthotropic multi-nanoplate system (MNPS) embedded in a viscoelastic medium. *Composite Structures*, 115, 89-99.
- [78] Karličić, D., Jovanović, D., Kozić, P., & Cajić, M. (2015). Thermal and magnetic effects on the vibration of a cracked nanobeam embedded in an elastic medium. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 10, 43-62.
- [79] Murmu, T., & Pradhan, S. C. (2009). Thermo-mechanical vibration of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity theory. *Computational Materials Science*, 46(4), 854-859.
- [80] Murmu, T., & Pradhan, S. C. (2010). Thermal effects on the stability of embedded carbon nanotubes. *Computational Materials Science*, 47(3), 721-726.
- [81] Ke, L. L., & Wang, Y. S. (2012). Thermoelectric-mechanical vibration of piezoelectric nanobeams based on the nonlocal theory. *Smart Materials and Structures*, 21(2), 025018.
- [82] Hosseini-Hashemi, S., Nahas, I., Fakher, M., & Nazemnezhad, R. (2014). Surface effects on free vibration of piezoelectric functionally graded nanobeams using nonlocal elasticity. *Acta Mechanica*, 225(6), 1555-1564.
- [83] Kiani, K. (2014). Vibration and instability of a single-walled carbon nanotube in a three-dimensional magnetic field. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 75(1), 15-22.
- [84] Karličić, D., Murmu, T., Cajić, M., Kozić, P., & Adhikari, S. (2014). Dynamics of multiple viscoelastic carbon nanotube based nanocomposites with axial magnetic field. *Journal of Applied Physics*, 115(23), 234303.
- [85] Murmu, T., McCarthy, M. A., & Adhikari, S. (2012). Vibration response of double-walled carbon nanotubes subjected to an externally applied longitudinal magnetic field: A nonlocal elasticity approach. *Journal of Sound and Vibration*, 331(23), 5069-5086.
- [86] Sudak, L. J. (2003). Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics. *Journal of Applied Physics*, 94(11), 7281-7287.

- [87] Duan, W. H., Wang, C. M., & Zhang, Y. Y. (2007). Calibration of nonlocal scaling effect parameter for free vibration of carbon nanotubes by molecular dynamics. *Journal of applied physics*, *101*(2), 024305-024305.
- [88] Wang, Q., Han, Q. K., & Wen, B. C. (2008). Estimate of material property of carbon nanotubes via nonlocal elasticity. *Advanced Theoretical Applied Mechanics*, *1*(1), 1-10.
- [89] Wang, Q., & Wang, C. M. (2007). The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modelling carbon nanotubes. *Nanotechnology*, *18*(7), 075702.
- [90] Wang, Q. (2005). Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics. *Journal of Applied Physics*, *98*(12), 124301.
- [91] Lu, P., Lee, H. P., Lu, C., & Zhang, P. Q. (2006). Dynamic properties of flexural beams using a nonlocal elasticity model. *Journal of Applied Physics*, *99*(7), 073510.
- [92] Ansari, R., Ajori, S., & Arash, B. (2012). Vibrations of single-and double-walled carbon nanotubes with layerwise boundary conditions: a molecular dynamics study. *Current Applied Physics*, *12*(3), 707-711.
- [93] Reddy, J. N. (2002). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
- [94] Kozčić, P., Pavlović, R., & Karličić, D. (2014). The flexural vibration and buckling of the elastically connected parallel-beams with a Kerr-type layer in between. *Mechanics Research Communications*, *56*, 83-89.
- [95] Askes, H., & Aifantis, E. C. (2009). Gradient elasticity and flexural wave dispersion in carbon nanotubes. *Physical Review B*, *80*(19), 195412.
- [96] Zhou, L. G., & Shi, S. Q. (2003). Formation energy of Stone–Wales defects in carbon nanotubes. *Applied physics letters*, *83*(6), 1222-1224.
- [97] Charlier, J. C. (2002). Defects in carbon nanotubes. *Accounts of chemical research*, *35*(12), 1063-1069.
- [98] Sammalkorpi, M., Krasheninnikov, A., Kuronen, A., Nordlund, K., & Kaski, K. (2004). Mechanical properties of carbon nanotubes with vacancies and related defects. *Physical Review B*, *70*(24), 245416.
- [99] Belytschko, T., Xiao, S. P., Schatz, G. C., & Ruoff, R. S. (2002). Atomistic simulations of nanotube fracture. *Physical Review B*, *65*(23), 235430.



- [100] Yang, J., & Chen, Y. (2008). Free vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks. *Composite Structures*, 83(1), 48-60.
- [101] Liu, C., Ke, L. L., Wang, Y. S., Yang, J., & Kitipornchai, S. (2013). Thermo-electro-mechanical vibration of piezoelectric nanoplates based on the nonlocal theory. *Composite Structures*, 106, 167-174.
- [102] Karličić, D., Cajić, M., Kozić, P., & Pavlović, I. (2015). Temperature effects on the vibration and stability behavior of multi-layered graphene sheets embedded in an elastic medium. *Composite Structures*, 131, 672-681.
- [103] Zhang, Y. Q., Liu, X., & Zhao, J. H. (2008). Influence of temperature change on column buckling of multiwalled carbon nanotubes. *Physics Letters A*, 372(10), 1676-1681.
- [104] Hsieh, J. Y., Lu, J. M., Huang, M. Y., & Hwang, C. C. (2006). Theoretical variations in the Young's modulus of single-walled carbon nanotubes with tube radius and temperature: a molecular dynamics study. *Nanotechnology*, 17(15), 3920.
- [105] Narendar, S., Gupta, S. S., & Gopalakrishnan, S. (2012). Wave propagation in single-walled carbon nanotube under longitudinal magnetic field using nonlocal Euler–Bernoulli beam theory. *Applied Mathematical Modelling*, 36(9), 4529-4538.
- [106] Murmu, T., McCarthy, M. A., & Adhikari, S. (2012). Vibration response of double-walled carbon nanotubes subjected to an externally applied longitudinal magnetic field: A nonlocal elasticity approach. *Journal of Sound and Vibration*, 331(23), 5069-5086.
- [107] Zhang, S., Mielke, S. L., Khare, R., Troya, D., Ruoff, R. S., Schatz, G. C., & Belytschko, T. (2005). Mechanics of defects in carbon nanotubes: atomistic and multiscale simulations. *Physical Review B*, 71(11), 115403.
- [108] Loya, J., López-Puente, J., Zaera, R., & Fernández-Sáez, J. (2009). Free transverse vibrations of cracked nanobeams using a nonlocal elasticity model. *Journal of Applied Physics*, 105(4), 044309.
- [109] Loya, J. A., Rubio, L., & Fernández-Sáez, J. (2006). Natural frequencies for bending vibrations of Timoshenko cracked beams. *Journal of Sound and Vibration*, 290(3), 640-653.

- [110] Fernandez-Saez, J., Rubio, L., & Navarro, C. (1999). Approximate calculation of the fundamental frequency for bending vibrations of cracked beams. *Journal of Sound and Vibration*, 225(2), 345-352.
- [111] Fernandez-Saez, J., & Navarro, C. (2002). Fundamental frequency of cracked beams in bending vibrations: an analytical approach. *Journal of Sound and Vibration*, 256(1), 17-31.
- [112] Torabi, K., & Nafar Dastgerdi, J. (2012). An analytical method for free vibration analysis of Timoshenko beam theory applied to cracked nanobeams using a nonlocal elasticity model. *Thin Solid Films*, 520(21), 6595-6602.
- [113] Kisa, M., & Arif Gurel, M. (2006). Modal analysis of multi-cracked beams with circular cross section. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(8), 963-977.
- [114] Loya, J. A., Aranda-Ruiz, J., & Fernández-Sáez, J. (2014). Torsion of cracked nanorods using a nonlocal elasticity model. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 47(11), 115304.
- [115] Rašković, D. (1963). Small forced damping vibrations of homogeneous torsional system with special static constraints, *Publications de l'Institut Mathématique* 3 (13) 27-34.
- [116] V. Stojanović, P. Kozić, G. Janevski, Exact closed-form solutions for the natural frequencies and stability of elastically connected multiple beam system using Timoshenko and high-order shear deformation theory *Journal of Sound Vibration*. 332 (2013)563–576.
- [117] Stojanović, V., Kozić, P., & Ristić, M. (2015). Vibrations and stability analysis of multiple rectangular plates coupled with elastic layers based on different plate theories. *International Journal of Mechanical Sciences*, 92, 233-244.
- [118] Rašković, D. (1957). *Teorija oscilacija*. Naučna knjiga.
- [119] Stojanović, V., & Kozić, P. (2015). *Vibrations and Stability of Complex Beam Systems*. Springer.
- [120] Kovacic, I., & Brennan, M. J. (2011). *The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour*. John Wiley & Sons.
- [121] Li, C., Lim, C. W., & Yu, J. L. (2011). Dynamics and stability of transverse vibrations of nonlocal nanobeams with a variable axial load. *Smart Materials and Structures*, 20(1), 015023.

## Биографија



Данило Карличић рођен је 31.10.1986. године у Нишу. Основну школу „Ратко Вукићевић“ у Нишу завршио је са врло-добрим успехом. Средњу „Машинску школу“ у Нишу, такође завршио са врло-добрим успехом. Машински факултет у Нишу уписао је школске 2005/2006 године, а завршио 30. септембра 2010. године на профилу Мехатроника и управљање са средњом оценом 9.00 (девет) одбравивши дипломски рад под називом „Моделирање динамике машинских система“ оценом 10. Школске 2010/2011 уписао је докторске студије на Машинском факултету у Нишу и положио све испите предвиђене планом и програмом Машинског факултета у Нишу са просечном оценом 10 (десет). Као дипломирани машински инжењер засновао је радни однос на „Математичком институту САНУ“ у Београду, преко пројекта ОИ174001 под називом „Динамика хибридних система сложених структура. Механика материјала“, руководиоц пројекта проф. др Катица (Стевановић) Хедрих. Докторанд Данило Карличић активно је учествовао у раду научних и семинара за младе истраживаче који су се организовали на Математичком институту САНУ. Од 01. августа 2014. год. почиње са радом на Катедри за теоријску и примењену механику Машинског факултета Универзитета у Нишу на радно место асистента. Истовремено прелази на пројекат ОИ174011 под називом „Динамичка стабилност и нестабилност механичких система под дејством стохастичких поремећаја“, руководиоц пројекта проф. др Ратко Павловић. Објавио је петнаест радова у часописима са ИСИ листе као и монографију међународног значаја. На конференцијама националног значаја је саопштио неколико радова према плану и програму докторских студија.

### Књига

[1] **Karličić, D.**, Murmu, T., Adhikari, S., & McCarthy, M. (2015). Non-local Structural Mechanics. John Wiley & Sons., (Hardback 372 pp, ISBN: 9781848215221).

### Списак публикованих радова у часописима са ИСИ листе

- [1] **Karličić, D.**, Kozić, P., & Pavlović, R. (2014). Free transverse vibration of nonlocal viscoelastic orthotropic multi-nanoplate system (MNPS) embedded in a viscoelastic medium. *Composite Structures*, 115, 89-99.
- [2] Kozić, P., Pavlović, R., & **Karličić, D.** (2014). The flexural vibration and buckling of the elastically connected parallel-beams with a Kerr-type layer in between. *Mechanics Research Communications*, 56, 83-89.
- [3] **Karličić, D.**, Cajić, M., Murmu, T., & Adhikari, S. (2015). Nonlocal longitudinal vibration of viscoelastic coupled double-nanorod systems. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 49, 183-196.
- [4] **Karličić, D.**, Murmu, T., Cajić, M., Kozić, P., & Adhikari, S. (2014). Dynamics of multiple viscoelastic carbon nanotube based nanocomposites with axial magnetic field. *Journal of Applied Physics*, 115(23), 234303.

- [5] **Karličić, D.**, Adhikari, S., Murmu, T., & Cajić, M. (2014). Exact closed-form solution for non-local vibration and biaxial buckling of bonded multi-nanoplate system. *Composites Part B: Engineering*, 66, 328-339.
- [6] **Karličić, D.**, Kozić, P., Adhikari, S., Cajić, M., Murmu, T., & Lazarević, M. (2015). Nonlocal mass-nanosensor model based on the damped vibration of single-layer graphene sheet influenced by in-plane magnetic field. *International Journal of Mechanical Sciences*, 96, 132-142.
- [7] **Karličić, D.**, Cajić, M., Murmu, T., Kozić, P., & Adhikari, S. (2015). Nonlocal effects on the longitudinal vibration of a complex multi-nanorod system subjected to the transverse magnetic field. *Meccanica*, 50(6), 1605-1621.
- [8] Pavlović, I., Pavlović, R., Ćirić, I., & **Karličić, D.** (2015). Dynamic stability of nonlocal Voigt–Kelvin viscoelastic Rayleigh beams. *Applied Mathematical Modelling*. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.02.044>
- [9] **Karličić, D.**, Kozić, P., & Pavlović, R. (2015). Flexural vibration and buckling analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories based on Reddy and Huu-Tai formulations. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 53, 1, 217-233.
- [10] **Karličić, D.**, Jovanović, D., Kozić, P., Cajić, M., (2015), Thermal and magnetic effects on the vibration of a cracked nanobeam embedded in an elastic medium. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 10(1), 43-62.
- [11] **Karličić, D.**, Cajić, M., Kozić, P., & Pavlović, I. (2015). Temperature effects on the vibration and stability behavior of multi-layered graphene sheets embedded in an elastic medium. *Composite Structures*, 131, 672–681.
- [12] **Karličić, D.**, Kozić, P., Murmu, T., & Adhikari, S. (2015). Vibration insight of a nonlocal viscoelastic coupled multi-nanorod system. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 54, 132-145.
- [13] **Karličić, D.**, Kozić, P., & Pavlović, R. (2016). Nonlocal vibration and stability of a multiple-nanobeam system coupled by the Winkler elastic medium. *Applied Mathematical Modelling*, 40(2), 1599-1614.
- [14] Stamenković, M., **Karličić, D.**, Janevski, G., & Kozić, P., (2016). Nonlocal forced vibration of a double single-walled carbon nanotube system under the influence of an axial magnetic field, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, (accepted for publication)- <http://msp.org/scripts/coming.php?jpath=jomms>
- [15] Cajić, M., **Karličić, D.**, & Lazarević, M. (2016). Damped vibration of a nonlocal nanobeam resting on viscoelastic foundation: fractional derivative model with two retardation times and fractional parameters. *Meccanica*, DOI 10.1007/s11012-016-0417-z.