СЛАЈДОВИ ЗА УВОДНО ПРЕДАВАЊЕ О ДЕТЕРМИНАНТАМА

Упутство за наставнике

Драгош Цветковић, *Математички институт САНУ, Београд*

У Математичком институту САНУ у Београду, у оквиру пројекта "Теорија графова и математичко програмирање са применама у хемији и техничким наукама", у току је израда колекције слајдова за наставу теорије матрица по књизи

[1] Brualdi R.A., Cvetković D., *A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Application*, CRC Press, Boca Raton, 2008.

Аутори књиге у договору са издавачем припремају колекцију слајдова под називом "*Key Slides for a Course in Combinatorial Matrix Theory*" за јавну употребу. Колекцију слајдова имплементира Владимир Балтић уз коришћење програма LaTeX и пакета WinGCLC за израду математичких цртежа (Предраг Јаничић, Математички факултет, Београд, доступан на адреси:
`http://www.matf.bg.ac.yu/~janicic/gclc/index.html`).

Потписани је за домаће потребе издвојио слајдове за уводно предавање о детерминантама. Они се дистрибуирају уз помоћ три фајла

`determinante_slajdovi.pdf`,
`determinante_opis_slajdova.pdf`,
`determinante_podsetnik_za_studente.pdf`.

Први фајл садржи слајдове, други упутство за наставнике а трећи подсетник за студенте.

Слајдови су прилагођени уџбенику

[2] Cvetković D., Lacković I., Merkle M., Radosavljević Z., Simić S., Vasić P., *Matematika I - Algebra*, IX izdanje, Akademska misao, Beograd, 2005.

по коме је више наставника на Електротехничком факултету у Београду током низа година предавало студентима елементарне чињенице о детерминантама. Међутим, ови слајдови се могу употребити уз предавања по било којем другом уџбенику јер дају само алтернативну дефиницију детерминанте и неколико основних теорема а даља теорија остаје непромењена. Нестандардне дефиниције су дате у подсетнику за студенте. Најбоље је да се овај подсетник умножи и дистрибуира студентима.

Уз адекватну припрему, употреба ових слајдова не представља оптерећивање наставе већ, напротив, доприноси ефикасности наставе и може да буде атрактивна за студенте.

Шире информације на српском језику о комбинаторном приступу теорији матрица могу се наћи у књизи

[3] Cvetkovic1 D., *Kombinatorna teorija matrica sa primenama u elektrotehnici, hemiji i fizici*, Naučna knjiga, Beograd, 1980, II izdanje, 1987.

УПУТСТВО ЗА КОРИШЋЕЊЕ СЛАЈДОВА

Слајдови се могу искористити у оквиру двочасовног уводног предавања о детерминантама на восокошколским установама. Они су комплементарни са текстом у уџбенику [2], стр. 185–202. Уз слајдове су потребна орална објашњења и коришћење табле (или допунских слајдова) како наставник осмисли. Намена слајдова је да ослободи наставника цртања сложених дијаграма графова (на табли или на слајдовима сопствене израде). У уџбенику [2] се налази и увод у теорију графова али се слајдови о детерминантама могу презентовати и студентима који нису претходно упознати са графовима (диграфовима) уз кратко, интуитивно прихватљиво, објашњење о томе шта су графови.

Слајд 1. Слајд илуструје репрезентацију матрице у облику квадратне (правоугаоне) шеме и у облику тежинског диграфа. Обе репрезентације су корисне; прва за записивање матрице а друга у доказима многих теорема линеарне алгебре. Потребно је нагласити да се тежински диграф придружен матрици A појављује у два облика: G^A (елемент a_{ij} је пренос гране која води од чвора i ка чвору j) и G_A (елемент a_{ij} је пренос гране која води од чвора j ка чвору i). У теорији детерминаната оба су подједнако добра јер је детерминанта транспоноване матрице једнака детерминанти полазне матрице. Мање природан избор диграфа G_A за дефиницију детерминанте оправдава се природнијим изразима за кофактор и за решење система линеарних алгебарских једначина.

Слајд 2. Израчунавање детерминанте другог реда према [2], стр. 188. У оквиру овог слајда се даје графовска дефиниција детерминанте. Наставник треба да изложи студентима и класичну дефиницију детерминанте. Ако има времена, може се доказати еквивалентност две дефиниције (према [2]). Уџбеник [2] садржи по два доказа за сваку од теорема о детерминантама; један базира на класичној дефиницији детерминанте а други на графовској. У настави се ови докази могу комбиновано излагати тј. могућно је дати по неколико доказа једне и друге врсте. На овом, и на неким другим слајдовима, доводе се у везу сабирци у развоју детерминанте са факторима придруженог диграфа коришћењем црвене и плаве боје.

Слајд 3. Израчунавање детерминанте трећег реда према [2], стр. 188. Шест фактора је дато црвеном бојом у оквиру основног диграфа а такође издвојено. Пример треба да приближи студенту структуру фактора (колекција дисјунктних контура које покривају све чворове диграфа) тако да он може да замисли како изгледају фактори и у случају детерминаната произвољног реда.

Слајд 4. Слајд помаже студенту да лакше прихвати доказ тврђења да је детерминанта транспоноване матрице једнака детерминанти полазне матрице (Теорема 1, [2], стр. 190-191). Објашњава се најпре да се транспоновањем матрице придружени диграф мења тако што у њему свака грана мења оријентацију. (Треба скренуту пажњу да оријентација петље није битна тако да промена оријентације петље није приказана на цртежима.) За сваки фактор диграфа из претходног слајда се показује да он прелази у фактор новог диграфа при чему су пренос и број контура одржани. Наставник треба да сугерише студентима да је ово тачно и у општем случају (не само за матрицу трећег реда). Студент ће онда моћи лако да прихвати лаконски кратак доказ теореме (који важи за матрице произвољног реда): *Транспоновање матрице изазива промену оријентације свих грана у придруженом диграфу. При томе сваки фактор диграфа прелази у фактор новог диграфа са истом тежином и бројем контура. Дакле, сви сабирци у дефиниционом изразу детерминанте остају непромењени па је детерминанта транспоноване матрице једнака детерминанти полазне матрице.*

Слајд 5. На примеру детерминанте трећег реда илуструје се утицај елемента једнаког нули на вредност и израчунавање детерминанте помоћу придруженог диграфа. Разматрањем свих шест фактора сугерише се да фактори који садрже грану преноса 0 не доприносе вредности детерминанте па да се могу елиминисати тако што ће се грана преноса 0 изоставити са цртежа. У конкретном случају остају само четири фактора али пример сугерише општи закључак да је изостављање грана преноса 0 дозвољено јер после уклањања таквих грана нестају сви они фактори који садрже бар једну такву грану а такви фактори су непотребни јер је њихов пренос 0 и не доприносе вредности детерминанте. Напоменимо да су матрице са великим бројем елемената једнаких нули (слабо попуњене матрице) врло честе и интересантне у теорији и у применама. С друге стране, докази теорема који се базирају на придруженим диграфовима важе у општем случају (без обзира на то да ли је матрица слабо попуњена или не).

Слајд 6. Слајд даје илустрацију теореме о множењу детерминанте бројем (Теорема 2, [2], стр. 191–192). Елементи i-те врсте су преноси грана што улазе у чвор i. Множење i-те врсте бројем α доводи до промене преноса само тих грана. Сваки фактор диграфа садржи тачно једну од тих грана па се његов пренос увећава α пута. У графичкој представи фактора контуре су означене са круговима.

Слајд 7. Илустрација доказа тврђења да детерминанта матрице мења знак ако у матрици две врсте промене места (Теорема 3, [2], стр. 192–193). Ако i-та и j-та врста промене места, диграф се мења тако што све гране које су пре трансформације улазиле у чвор i улазе сада у чвор j и, обрнуто, оне које су улазиле у j улазе сада у i. За факторе диграфа разматрају се два случаја: а) чворови i и j се налазе у истој контури фактора, б) чворови i и j се налазе у различитим контурама фактора. У резултујућем фактору у оба случаја долази до промене парности броја контура, при чему пренос фактора остаје очуван. Дакле, у дефиниционом изразу за детерминанту сваки сабирак мења знак па одатле следује тврђење теореме.

Слајд 8. Слајд садржи три примера израчунавања детерминанте на основу дефиниције.

Београд, 4. новембар 2008.