NUMERIČKA ANALIZA
Novi pravci i izazovi

Gradimir V. Milovanović

MI, Beograd, 14. maj 2013.

Sistem linearnih jednačina

$$
\begin{aligned}
121734x_1 + 169217x_2 + 176624x_3 + 166662x_4 &= 634237\\
169217x_1 + 235222x_2 + 245505x_3 + 231653x_4 &= 881597\\
176624x_1 + 245505x_2 + 256423x_3 + 242029x_4 &= 920581\\
166662x_1 + 231653x_2 + 242029x_3 + 228474x_4 &= 868818
\end{aligned}
$$

Sistem linearnih jednačina

$$121734x_1 + 169217x_2 + 176624x_3 + 166662x_4 = 634237$$
$$169217x_1 + 235222x_2 + 245505x_3 + 231653x_4 = 881597$$
$$176624x_1 + 245505x_2 + 256423x_3 + 242029x_4 = 920581$$
$$166662x_1 + 231653x_2 + 242029x_3 + 228474x_4 = 868818$$

Rešenje: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$

Sistem linearnih jednačina

$$
\begin{aligned}
121734x_1 + 169217x_2 + 176624x_3 + 166662x_4 &= 634238\\
169217x_1 + 235222x_2 + 245505x_3 + 231653x_4 &= 881596\\
176624x_1 + 245505x_2 + 256423x_3 + 242029x_4 &= 920580\\
166662x_1 + 231653x_2 + 242029x_3 + 228474x_4 &= 868819
\end{aligned}
$$

Rešenje: $\cancel{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1}$

Sistem linearnih jednačina

$$121734x_1 + 169217x_2 + 176624x_3 + 166662x_4 = 634238$$
$$169217x_1 + 235222x_2 + 245505x_3 + 231653x_4 = 881596$$
$$176624x_1 + 245505x_2 + 256423x_3 + 242029x_4 = 920580$$
$$166662x_1 + 231653x_2 + 242029x_3 + 228474x_4 = 868819$$

Rešenje: $\cancel{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1}$

Novo rešenje: $x_1 = 130214370,\ x_2 = 78645876,$
$x_3 = -32701403,\ \ x_4 = 19395881.$

Sistem linearnih jednačina

$$
\begin{aligned}
121734x_1 + 169217x_2 + 176624x_3 + 166662x_4 &= 634238\\
169217x_1 + 235222x_2 + 245505x_3 + 231653x_4 &= 881596\\
176624x_1 + 245505x_2 + 256423x_3 + 242029x_4 &= 920580\\
166662x_1 + 231653x_2 + 242029x_3 + 228474x_4 &= 868819
\end{aligned}
$$

Rešenje: $\cancel{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1}$

Novo rešenje: $x_1 = 130214370$, $x_2 = 78645876$, $x_3 = -32701403$, $x_4 = 19395881$.

$$\|\mathbf{b}\|_\infty = \max_{1\le i\le 4} |b_i| = 920581, \quad \|\Delta\mathbf{b}\|_\infty = \max_{1\le i\le 4} |\Delta b_i| = 1,$$

tj. $\|\Delta\mathbf{b}\|_\infty / \|\mathbf{b}\|_\infty \cong 1.1 \times 10^{-6}$.

- Odgovarajuća promena u rešenju:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le 4} |x_i| = 1, \ \|\Delta\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le 4} |x_i^* - x_i| = 130214369,$$

- Odgovarajuća promena u rešenju:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le 4} |x_i| = 1, \ \|\Delta\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le 4} |x_i^* - x_i| = 130214369,$$

- $\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty / \|\mathbf{x}\|_\infty \cong 1.3 \times 10^8.$

- Odgovarajuća promena u rešenju:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le 4} |x_i| = 1, \ \|\Delta\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le 4} |x_i^* - x_i| = 130214369,$$

- $\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty / \|\mathbf{x}\|_\infty \cong 1.3 \times 10^8$.
- Dakle, relativna promena od samo 10^{-6} u slobodnom članu izaziva ogromnu promenu u rešenju (reda 10^8), što znači

- Odgovarajuća promena u rešenju:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le 4} |x_i| = 1, \ \|\Delta\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le 4} |x_i^* - x_i| = 130214369,$$

- $\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty / \|\mathbf{x}\|_\infty \cong 1.3 \times 10^8$.
- Dakle, relativna promena od samo 10^{-6} u slobodnom članu izaziva ogromnu promenu u rešenju (reda 10^8), što znači

$$k(A) \ge \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty / \|\mathbf{x}\|_\infty}{\|\Delta\mathbf{b}\|_\infty / \|\mathbf{b}\|_\infty} \cong \frac{1.3 \times 10^8}{1.1 \times 10^{-6}} \cong 1.18 \times 10^{14}.$$

- Odgovarajuća promena u rešenju:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le 4} |x_i| = 1, \ \|\Delta\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le 4} |x_i^* - x_i| = 130214369,$$

- $\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty / \|\mathbf{x}\|_\infty \cong 1.3 \times 10^8$.
- Dakle, relativna promena od samo 10^{-6} u slobodnom članu izaziva ogromnu promenu u rešenju (reda 10^8), što znači

$$k(A) \ge \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty / \|\mathbf{x}\|_\infty}{\|\Delta\mathbf{b}\|_\infty / \|\mathbf{b}\|_\infty} \cong \frac{1.3 \times 10^8}{1.1 \times 10^{-6}} \cong 1.18 \times 10^{14}.$$

- Tipičan slabo-uslovljeni sistem jednačina!

- Odgovarajuća promena u rešenju:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le 4} |x_i| = 1, \ \|\Delta\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le 4} |x_i^* - x_i| = 130214369,$$

- $\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty / \|\mathbf{x}\|_\infty \cong 1.3 \times 10^8$.
- Dakle, relativna promena od samo 10^{-6} u slobodnom članu izaziva ogromnu promenu u rešenju (reda 10^8), što znači

$$k(A) \ge \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty / \|\mathbf{x}\|_\infty}{\|\Delta\mathbf{b}\|_\infty / \|\mathbf{b}\|_\infty} \cong \frac{1.3 \times 10^8}{1.1 \times 10^{-6}} \cong 1.18 \times 10^{14}.$$

- Tipičan slabo-uslovljeni sistem jednačina!

Petar B. Madić (1922–2009)

- Kako je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 64975255 & -39243257 & -16317569 & 9678288 \\ -39243257 & 23701842 & 9855360 & -5845418 \\ -16317569 & 9855360 & 4097916 & -2430559 \\ 9678288 & -5845418 & -2430559 & 1441615 \end{bmatrix}$$

- Kako je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 64975255 & -39243257 & -16317569 & 9678288 \\ -39243257 & 23701842 & 9855360 & -5845418 \\ -16317569 & 9855360 & 4097916 & -2430559 \\ 9678288 & -5845418 & -2430559 & 1441615 \end{bmatrix}$$

možemo izračunati faktor uslovljenosti $k(A) = \text{cond}\, A$:

$$\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{4} |a_{ij}| \right) = 920581, \quad \|A^{-1}\|_\infty = 130214369,$$

- Kako je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 64975255 & -39243257 & -16317569 & 9678288 \\ -39243257 & 23701842 & 9855360 & -5845418 \\ -16317569 & 9855360 & 4097916 & -2430559 \\ 9678288 & -5845418 & -2430559 & 1441615 \end{bmatrix}$$

možemo izračunati faktor uslovljenosti $k(A) = \operatorname{cond} A$:

$$\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{4} |a_{ij}| \right) = 920581, \quad \|A^{-1}\|_\infty = 130214369,$$

- $k(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \cong 1.20 \times 10^{14}.$

Zašto je važan faktor uslovljenosti?

- Prethodna izračunavanja su izvedena potpuno tačno na skupu svih racionalnih brojeva!

Zašto je važan faktor uslovljenosti?

- Prethodna izračunavanja su izvedena potpuno tačno na skupu svih racionalnih brojeva!
- To je ekvivalentno korišćenju aritmetike beskonačne dužine.

Zašto je važan faktor uslovljenosti?

- Prethodna izračunavanja su izvedena potpuno tačno na skupu svih racionalnih brojeva!
- To je ekvivalentno korišćenju aritmetike beskonačne dužine.
- Kod korišćenja aritmetike konačne dužine (IEEE standard kod računara iz 1985.), visok faktor uslovljenosti "jede" cifre u rezultatu!

Zašto je važan faktor uslovljenosti?

- Prethodna izračunavanja su izvedena potpuno tačno na skupu svih racionalnih brojeva!
- To je ekvivalentno korišćenju aritmetike beskonačne dužine.
- Kod korišćenja aritmetike konačne dužine (IEEE standard kod računara iz 1985.), visok faktor uslovljenosti “jede” cifre u rezultatu!
- **Faktor 10^m “jede” oko m cifara!**

Zašto je važan faktor uslovljenosti?

- Prethodna izračunavanja su izvedena potpuno tačno na skupu svih racionalnih brojeva!
- To je ekvivalentno korišćenju aritmetike beskonačne dužine.
- Kod korišćenja aritmetike konačne dužine (IEEE standard kod računara iz 1985.), visok faktor uslovljenosti "jede" cifre u rezultatu!
- **Faktor 10^m "jede" oko m cifara!**
- Dakle, ako želimo rezultat sa relativnom greškom manjom od 10^{-d}, tj. sa d korektnih značajnih cifara u mantisi, neophodno je koristiti aritmetiku sa dužinom najmanje $d + m$.

Još jednostavniji primer:

$$
\begin{aligned}
2x + 6y &= 8, \\
2x + 6.0001y &= 8.0001
\end{aligned}
$$

Još jednostavniji primer:

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 8, \\ 2x + 6.0001y &= 8.0001 \end{aligned}$$

- Rešenja su: $x = 1,\ y = 1.$

Još jednostavniji primer:

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 8, \\ 2x + 6.0001y &= 8.0001 \end{aligned}$$

- Rešenja su: $x = 1,\ y = 1.$
- Ako se koeficijenti druge jednačine neznatno promene, na primer,

$$2x + 5.99999y = 8.00002$$

Još jednostavniji primer:

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 8, \\ 2x + 6.0001y &= 8.0001 \end{aligned}$$

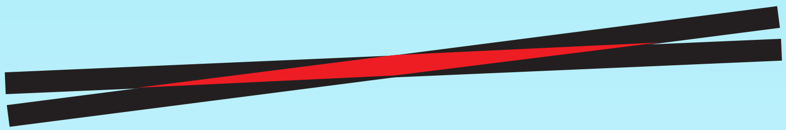
- Rešenja su: $x = 1,\ y = 1.$
- Ako se koeficijenti druge jednačine neznatno promene, na primer,

$$2x + 5.99999y = 8.00002$$

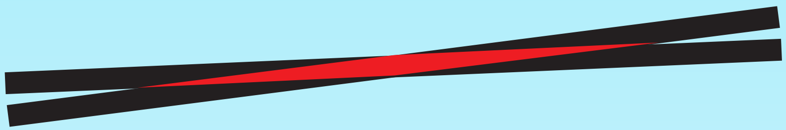
- Rešenja su: $x = 10,\ y = -2.$

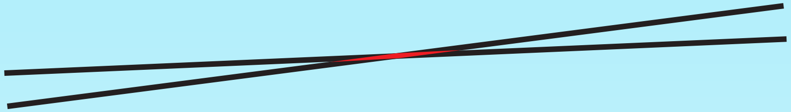
Ilustracija:

Ilustracija:

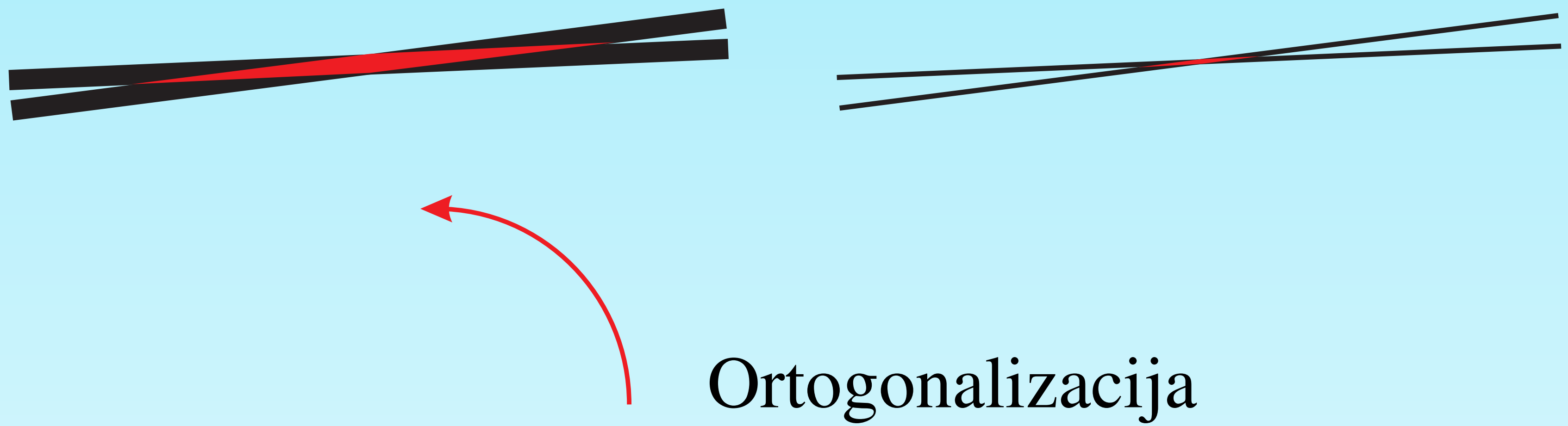


Ilustracija:

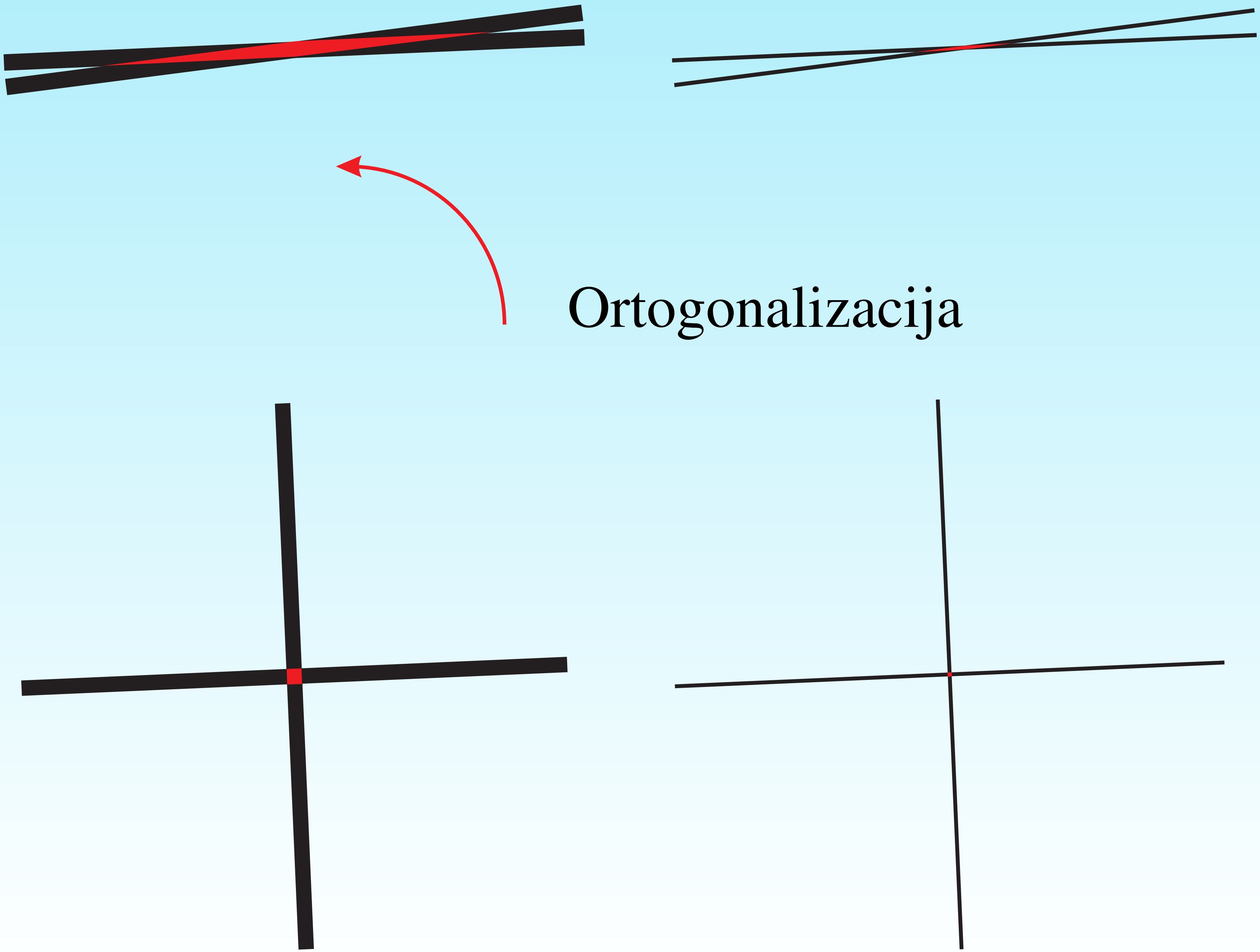




Ilustracija:



Ilustracija:



Razvoj novih naučnih disciplina

Poslednjih decenija velika ekspanzija numeričke matematike i teorije aproksimacija, uz buran razvoj računarskih arhitektura, dovela je do novih disciplina:

Razvoj novih naučnih disciplina

Poslednjih decenija velika ekspanzija numeričke matematike i teorije aproksimacija, uz buran razvoj računarskih arhitektura, dovela je do novih disciplina:

- **Naučna izračunavanja** (specijalne funkcije sa visokom tačnošću, generisanje slučajnih brojeva, algoritmi u teoriji brojeva, brze transformacije, FFT, talasići, fraktali, . . .)

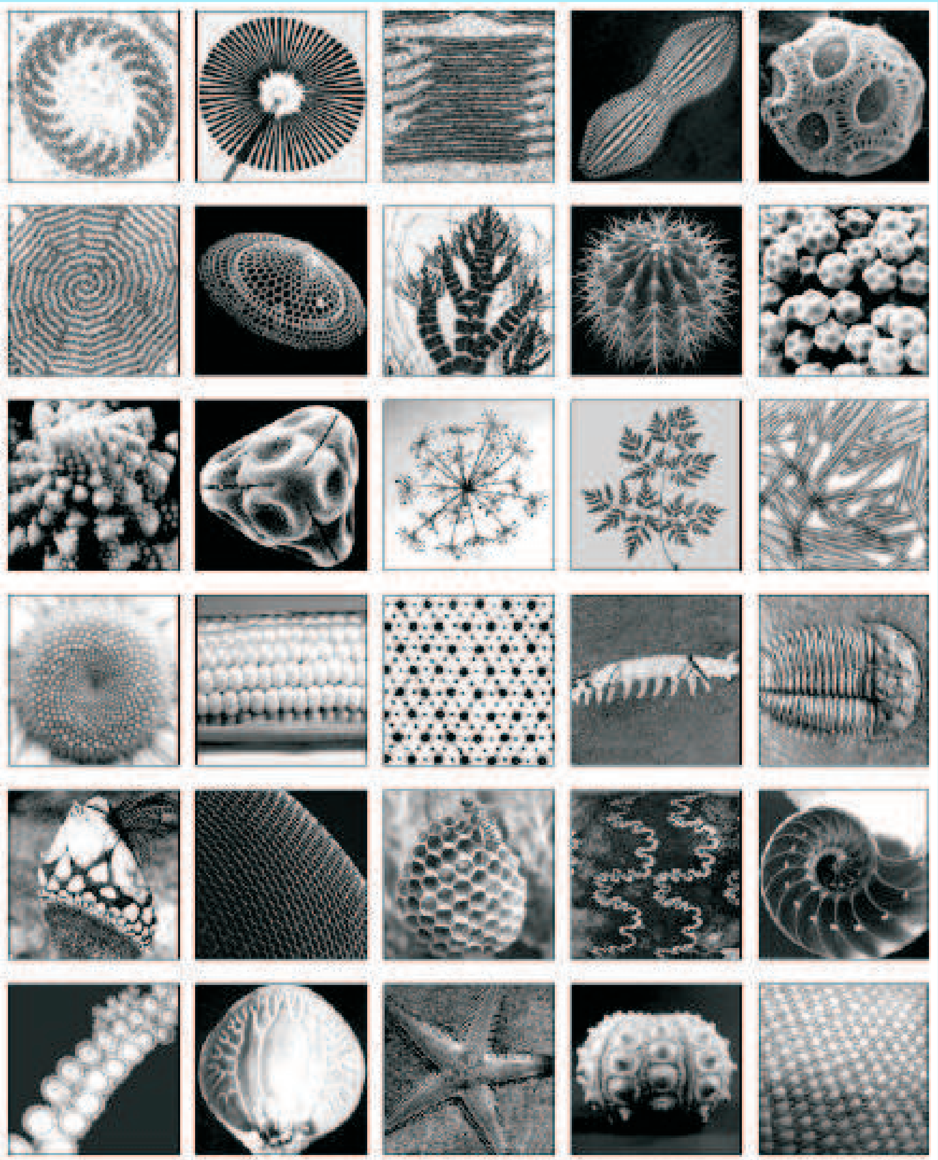
Razvoj novih naučnih disciplina

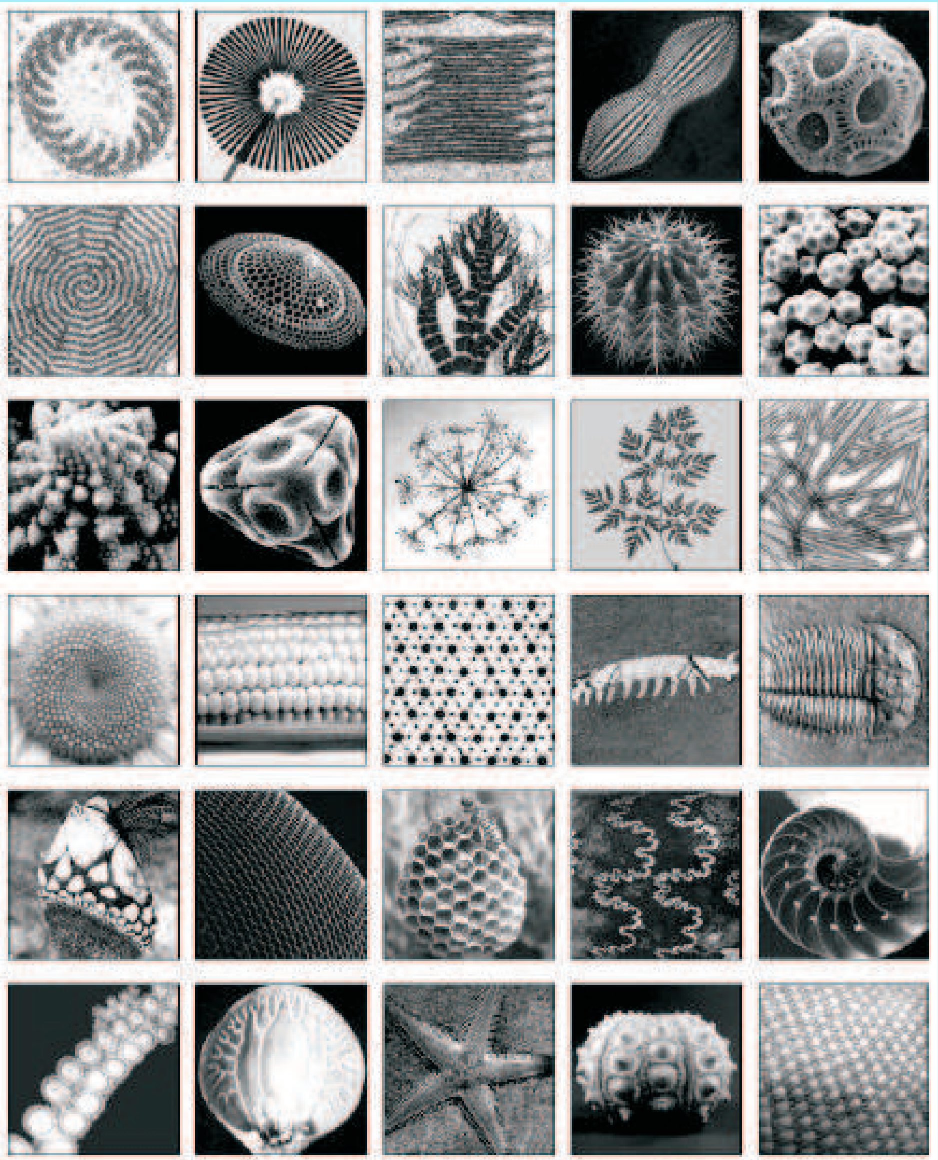
Poslednjih decenija velika ekspanzija numeričke matematike i teorije aproksimacija, uz buran razvoj računarskih arhitektura, dovela je do novih disciplina:

- **Naučna izračunavanja** (specijalne funkcije sa visokom tačnošću, generisanje slučajnih brojeva, algoritmi u teoriji brojeva, brze transformacije, FFT, talasići, fraktali, ...)
- **Obrada signala** (analogna i digitalna obrada svih vrsta signala koji se pojavljuju u realnom svetu, uključujući sintezu signala, detekciju, modeliranje, korelaciju i spektralnu analizu signala, konstrukciju i primenu odgovarajućih filtara, kompresija signala, ...)

- **Teorija kompleksnosti** obezbeđuje okvir za razumevanje cene rešavanja problema, merene zahtevima za resursima (vreme i memorijski prostor). Ova teorija grupiše probleme u tzv. *klase kompleksnosti* i razmatra njihov odnos.

- **Teorija kompleksnosti** obezbeđuje okvir za razumevanje cene rešavanja problema, merene zahtevima za resursima (vreme i memorijski prostor). Ova teorija grupiše probleme u tzv. *klase kompleksnosti* i razmatra njihov odnos.
- **Geometrijsko modeliranje** (CAGD) proučava metode konstruisanja geometrijskih i prirodnih formi sredstvima računarske grafike. U pozadini složenih grafičkih algoritama stoje sofisticirani numerički pristupi, neophodni u procesu optimizacije algoritamskih tokova i izbora najboljih modela. Vodič i inspiracija su *priroda* i njene tvorevine. Bilo da su žive ili nežive strukture one fasciniraju svojom racionalnom geometrijom kojoj u osnovi stoji hijerarhija samosličnosti i veoma složeni iterativni procesi.





- S. WOLFRAM, *The Future of Computation*, The Mathematica Journal **10** (2) (2006), 329–362.

- **Paralelna izračunavanja** se bave konstrukcijom algoritama koji su mogu implementirati na višeprocesorskim sistemima, koji se, s druge strane, sve više razvijaju i usavršavaju.

- **Paralelna izračunavanja** se bave konstrukcijom algoritama koji su mogu implementirati na višeprocesorskim sistemima, koji se, s druge strane, sve više razvijaju i usavršavaju.
- **Simbolička izračunavanja** se danas, takođe, mogu izdvojiti u posebnu disciplinu. Ona se često nazivaju i **kompjuterska algebra**, **algebarska izračunavanja**, **simbolička matematika**, itd.

- **Paralelna izračunavanja** se bave konstrukcijom algoritama koji su mogu implementirati na višeprocesorskim sistemima, koji se, s druge strane, sve više razvijaju i usavršavaju.
- **Simbolička izračunavanja** se danas, takođe, mogu izdvojiti u posebnu disciplinu. Ona se često nazivaju i **kompjuterska algebra**, **algebarska izračunavanja**, **simbolička matematika**, itd.

  Za razliku od numeričkih izračunavanja koja se uglavnom realizuju u *aritmetici konačne dužine*, simbolička izračunavanja se izvode sa brojevima, simbolima, izrazima i formulama na egzaktan način.

Ona su nastala kao rezultat težnje da se sa numeričkih izračunavanja krene ka apstraktim izračunavanjima, što je omogućeno razvojem tzv. *veštačke inteligencije* i novih programskih jezika, poput jezika LISP i njegovih usavršenih naslednika.

Ona su nastala kao rezultat težnje da se sa numeričkih izračunavanja krene ka apstraktim izračunavanjima, što je omogućeno razvojem tzv. *veštačke inteligencije* i novih programskih jezika, poput jezika LISP i njegovih usavršenih naslednika.

Najpopularniji interaktivni paketi za simbolička izračunavanja su:

Ona su nastala kao rezultat težnje da se sa numeričkih izračunavanja krene ka apstraktim izračunavanjima, što je omogućeno razvojem tzv. *veštačke inteligencije* i novih programskih jezika, poput jezika LISP i njegovih usavršenih naslednika.

Najpopularniji interaktivni paketi za simbolička izračunavanja su:

- MAPLE, MACSYMA, MATLAB i MATHEMATICA

Ona su nastala kao rezultat težnje da se sa numeričkih izračunavanja krene ka apstraktim izračunavanjima, što je omogućeno razvojem tzv. *veštačke inteligencije* i novih programskih jezika, poput jezika LISP i njegovih usavršenih naslednika.

Najpopularniji interaktivni paketi za simbolička izračunavanja su:

- MAPLE, MACSYMA, MATLAB i MATHEMATICA
- Mogu se koristiti i za numerička izračunavanja, kao i za grafičke prezentacije.

- U časopisu *Quarterly J. Pure & Appl. Math.* **45** (1913/14), str. 350, čuveni indijski matematičar **Srinivasa Ramanujan** (1887–1920) je postavio hipotezu da je $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}}$ ceo broj, pri čemu je, radeći "ručno", našao da je

$$\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}} \approx 262\,53741\,26407\,68743.99999\,99999\,99.$$

- U časopisu *Quarterly J. Pure & Appl. Math.* **45** (1913/14), str. 350, čuveni indijski matematičar **Srinivasa Ramanujan** (1887–1920) je postavio hipotezu da je $e^{\pi\sqrt{163}}$ ceo broj, pri čemu je, radeći "ručno", našao da je
  $$e^{\pi\sqrt{163}} \approx 262\,53741\,26407\,68743.99999\,99999\,99.$$
- Njegov metod nije omogućavao dobijanje sledeće decimale, i on je pretpostavio da se cifra 9 stalno ponavlja, pa da je onda zaključio:

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,53741\,26407\,68744.$$

- U časopisu *Quarterly J. Pure & Appl. Math.* **45** (1913/14), str. 350, čuveni indijski matematičar **Srinivasa Ramanujan** (1887–1920) je postavio hipotezu da je $e^{\pi\sqrt{163}}$ ceo broj, pri čemu je, radeći "ručno", našao da je
  $$e^{\pi\sqrt{163}} \approx 262\,53741\,26407\,68743.99999\,99999\,99.$$
- Njegov metod nije omogućavao dobijanje sledeće decimale, i on je pretpostavio da se cifra 9 stalno ponavlja, pa da je onda zaključio:
  $$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,53741\,26407\,68744.$$
- MATHEMATICA jednostavno daje

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743.99999999999925007259 7\ldots$$

Pojam velikih sistema jednačina

- U matričnom računu pojam “veliki sistem jednačina” (VSJ) istorijski se značajno menjao.

Pojam velikih sistema jednačina

- U matričnom računu pojam “veliki sistem jednačina” (VSJ) istorijski se značajno menjao.
- Na svakih petnaestak godina dimenzija VSJ se uvećavala 10 puta, počev od pedesetih godina prethodnog veka (**Wilkinson**ov period) . Svaki sistem sa dimenzijom većom od $n = 20$ je VSJ.

Pojam velikih sistema jednačina

- U matričnom računu pojam "veliki sistem jednačina" (VSJ) istorijski se značajno menjao.
- Na svakih petnaestak godina dimenzija VSJ se uvećavala 10 puta, počev od pedesetih godina prethodnog veka (**Wilkinson**ov period) . Svaki sistem sa dimenzijom većom od $n = 20$ je VSJ.
- **James Hardy Wilkinson** (1919–1986), čuveni engleski naučnik u oblasti numeričke analize i kompjuterskih nauka. Postoji **JHW**-nagrada za dostignuća u oblasti numeričkog softvera, koja se svake četvrte godine (od 1991.) dodeljuje od strane Argonne National Laboratory (SAD), National Physical Laboratory (GB) i softverske kompanije Numerical Algorithms Group (NAG).

- U “**Forsythe–Moler**-ovoj eri” (pojava njihove knjige) ta granica se pomera na $n = 200$

- U “**Forsythe–Moler**-ovoj eri” (pojava njihove knjige) ta granica se pomera na $n = 200$

  G. Forsythe, C. B. Moler, *Computer solution of linear algebraic systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.

- U “**Forsythe–Moler**-ovoj eri” (pojava njihove knjige) ta granica se pomera na $n = 200$

  G. Forsythe, C. B. Moler, *Computer solution of linear algebraic systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
- **George E. Forsythe** (1917–1972), poznati američki naučnik u oblasti kompjuterskih nauka.

- U “**Forsythe–Moler**-ovoj eri” (pojava njihove knjige) ta granica se pomera na $n = 200$

  G. Forsythe, C. B. Moler, *Computer solution of linear algebraic systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
- **George E. Forsythe** (1917–1972), poznati američki naučnik u oblasti kompjuterskih nauka.
- **Cleve Barry Moler** (1939 –), poznati američki matematičar, programer i ekspert u numeričkoj analizi. Jedan je od autora u razvoju FORTRAN programskih paketa za linearnu algebru LINPACK and EISPACK, kreator programskog sistema MATLAB i jedan od osnivača kompanije MathWorks za razvoj i komercijalizaciju ovog sistema.

- Osamdesetih godina, sa pojavom paketa LINPACK, dimenzija se povećava na $n = 2000$.

- Osamdesetih godina, sa pojavom paketa LINPACK, dimenzija se povećava na $n = 2000$.
- Paket LAPACK (Linear Algebra PACKage) je nastao iz paketa LINPACK i EISPACK (za probleme sopstvenih vrednosti) i on obezbeđuje rutine za rešavanje sistema linearnih jednačina, problema sopstvenih vredosti i faktorizaciju proizvoljnih realnih ili kompleksnih matrica, poput SVD (Singular Value Decomposition).

- Osamdesetih godina, sa pojavom paketa LINPACK, dimenzija se povećava na $n = 2000$.
- Paket LAPACK (Linear Algebra PACKage) je nastao iz paketa LINPACK i EISPACK (za probleme sopstvenih vrednosti) i on obezbeđuje rutine za rešavanje sistema linearnih jednačina, problema sopstvenih vredosti i faktorizaciju proizvoljnih realnih ili kompleksnih matrica, poput SVD (Singular Value Decomposition).
- LAPACK, pisan orginalno na jeziku FORTRAN 77, pojavio se sredinom devedesetih pomerio je granicu “velikih sistema” na $n = 20000$.

- Dakle, za nepunih pedeset godina dimenzije matrica sa kojima možemo jednostavno operisati povećale su se za faktor 10^3 (od 20 na 20000).

- Dakle, za nepunih pedeset godina dimenzije matrica sa kojima možemo jednostavno operisati povećale su se za faktor 10^3 (od 20 na 20000).
- Impresivni progres je, međutim, u velikoj meri uzrokovan mnogo većim progresom u tom periodu u računarskom hardveru, podizanjem brzine sa faktorom od 10^9 (od sekunde do nano sekunde po operaciji).

- Dakle, za nepunih pedeset godina dimenzije matrica sa kojima možemo jednostavno operisati povećale su se za faktor 10^3 (od 20 na 20000).
- Impresivni progres je, međutim, u velikoj meri uzrokovan mnogo većim progresom u tom periodu u računarskom hardveru, podizanjem brzine sa faktorom od 10^9 (od sekunde do nano sekunde po operaciji).
- Broj operacija $O(n^3)$ velika prepreka!

- Dakle, za nepunih pedeset godina dimenzije matrica sa kojima možemo jednostavno operisati povećale su se za faktor 10^3 (od 20 na 20000).
- Impresivni progres je, međutim, u velikoj meri uzrokovan mnogo većim progresom u tom periodu u računarskom hardveru, podizanjem brzine sa faktorom od 10^9 (od sekunde do nano sekunde po operaciji).
- Broj operacija $O(n^3)$ velika prepreka!
- Metodi sa $O(n^p)$ operacija, $p < 3$, mogu se primeniti na matrice znatno veće dimenzije!

- Dakle, za nepunih pedeset godina dimenzije matrica sa kojima možemo jednostavno operisati povećale su se za faktor 10^3 (od 20 na 20000).
- Impresivni progres je, međutim, u velikoj meri uzrokovan mnogo većim progresom u tom periodu u računarskom hardveru, podizanjem brzine sa faktorom od 10^9 (od sekunde do nano sekunde po operaciji).
- Broj operacija $O(n^3)$ velika prepreka!
- Metodi sa $O(n^p)$ operacija, $p < 3$, mogu se primeniti na matrice znatno veće dimenzije!
- Za neke klase matrica $O(n^2)$ je postignuto sa iterativnim metodima.

- Dakle, za nepunih pedeset godina dimenzije matrica sa kojima možemo jednostavno operisati povećale su se za faktor 10^3 (od 20 na 20000).
- Impresivni progres je, međutim, u velikoj meri uzrokovan mnogo većim progresom u tom periodu u računarskom hardveru, podizanjem brzine sa faktorom od 10^9 (od sekunde do nano sekunde po operaciji).
- Broj operacija $O(n^3)$ velika prepreka!
- Metodi sa $O(n^p)$ operacija, $p < 3$, mogu se primeniti na matrice znatno veće dimenzije!
- Za neke klase matrica $O(n^2)$ je postignuto sa iterativnim metodima.
- LAPACK (Ver. 3.2) [2008 (FORTRAN 90)].

Theodorus-ova konstanta

- Pojavljuje se u teoriji spirala.

Theodorus-ova konstanta

- Pojavljuje se u teoriji spirala.

  P.J. Davis, Spirals: from Theodorus to Chaos, A.K. Peters, Wellaesley, MA, 1993.

Theodorus-ova konstanta

- Pojavljuje se u teoriji spirala.

  P.J. Davis, Spirals: from Theodorus to Chaos, A.K. Peters, Wellaesley, MA, 1993.

- Teodorus-ova konstanta:

$$T_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} = 1.86\ldots$$

Theodorus-ova konstanta

- Pojavljuje se u teoriji spirala.

  P.J. Davis, Spirals: from Theodorus to Chaos, A.K. Peters, Wellaesley, MA, 1993.

- Teodorus-ova konstanta:

$$T_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} = 1.86\ldots$$

- Prvih milion članova reda daje tri tačne cifre!

Theodorus-ova konstanta

- Pojavljuje se u teoriji spirala.

  P.J. Davis, Spirals: from Theodorus to Chaos, A.K. Peters, Wellaesley, MA, 1993.

- Teodorus-ova konstanta:

$$T_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} = 1.86\ldots$$

- Prvih milion članova reda daje tri tačne cifre!
- **Problem:** Sumiranje sporokonvergentnih redova

Theodorus-ova konstanta

- Pojavljuje se u teoriji spirala.

  P.J. Davis, Spirals: from Theodorus to Chaos, A.K. Peters, Wellaesley, MA, 1993.
- Teodorus-ova konstanta:

$$T_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} = 1.86\ldots$$

- Prvih milion članova reda daje tri tačne cifre!
- **Problem:** Sumiranje sporokonvergentnih redova
- Redukcija sumacionog u kvadraturni proces!

- Osnovna ideja je u zameni sume reda konačnom kvadraturnom sumom

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\pm 1)^k f(k) \approx \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu g(x_\nu),$$

- Osnovna ideja je u zameni sume reda konačnom kvadraturnom sumom

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\pm 1)^k f(k) \approx \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu g(x_\nu),$$

gde je funkcija g povezana sa f na neki način, $A_\nu \equiv A_\nu^{(n)}$, $x_\nu \equiv x_\nu^{(n)}$, $\nu = 1, \ldots, N$, parametri kvadrature.

- Osnovna ideja je u zameni sume reda konačnom kvadraturnom sumom

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\pm 1)^k f(k) \approx \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu g(x_\nu),$$

  gde je funkcija g povezana sa f na neki način, $A_\nu \equiv A_\nu^{(n)}$, $x_\nu \equiv x_\nu^{(n)}$, $\nu = 1, \ldots, N$, parametri kvadrature.
- Kvadratura je najčešće Gauss-ovog tipa.

- # Metod integralnih transformacija

- **Metod integralnih transformacija**

  (a) Metod Laplaceove transformacije

- **Metod integralnih transformacija**

  (a) Metod Laplaceove transformacije

  [**Gautschi & Milovanović**, Math. Comp. (1985)]

- **Metod integralnih transformacija**

  (a) Metod Laplaceove transformacije

  [**Gautschi & Milovanović**, Math. Comp. (1985)]

  (b) Metod konturne integracije

- **Metod integralnih transformacija**

  (a) Metod Laplaceove transformacije

  [**Gautschi & Milovanović**, Math. Comp. (1985)]

  (b) Metod konturne integracije

  [**Milovanović** (1993, 2011)]

- **Metod integralnih transformacija**

  (a) Metod Laplaceove transformacije

  [**Gautschi & Milovanović**, Math. Comp. (1985)]

  (b) Metod konturne integracije

  [**Milovanović** (1993, 2011)]

- Naš postupak samo sa $N = 25$ članova (čvorova u kvadraturi) daje 30 tačnih decimala

$$T_1 = 1.860025079221190307180695915 72\ldots$$

- **Metod integralnih transformacija**

  (a) Metod Laplaceove transformacije

  [**Gautschi & Milovanović**, Math. Comp. (1985)]

  (b) Metod konturne integracije

  [**Milovanović** (1993, 2011)]
- Naš postupak samo sa $N = 25$ članova (čvorova u kvadraturi) daje 30 tačnih decimala

$$T_1 = 1.860025079221190307180695915 72 \ldots$$

- **Direktni metodi** $(g \equiv f)$

Aproksimacija polinomima

- Dve osobine polinoma su esencijalne u teoriji aproksimacija:

Aproksimacija polinomima

- Dve osobine polinoma su esencijalne u teoriji aproksimacija:

1° Svaka realna neprekidna funkcija f na konačnom intervalu $[a, b]$ može se uniformno aproksimirati algebarskim (trigonometrijskim) polinomima.

Aproksimacija polinomima

- Dve osobine polinoma su esencijalne u teoriji aproksimacija:

1° Svaka realna neprekidna funkcija f na konačnom intervalu $[a, b]$ može se uniformno aproksimirati algebarskim (trigonometrijskim) polinomima.

2° Svaki polinom $p_n \in \mathcal{P}_n$ ($t_n \in \mathcal{T}_n$) može se jedinstveno interpolirati u $n + 1$ ($2n + 1$) tačaka.

Aproksimacija polinomima

- Dve osobine polinoma su esencijalne u teoriji aproksimacija:

1° Svaka realna neprekidna funkcija f na konačnom intervalu $[a, b]$ može se uniformno aproksimirati algebarskim (trigonometrijskim) polinomima.

2° Svaki polinom $p_n \in \mathcal{P}_n$ ($t_n \in \mathcal{T}_n$) može se jedinstveno interpolirati u $n + 1$ ($2n + 1$) tačaka.

- Weierstrass (1885):

Aproksimacija polinomima

- Dve osobine polinoma su esencijalne u teoriji aproksimacija:

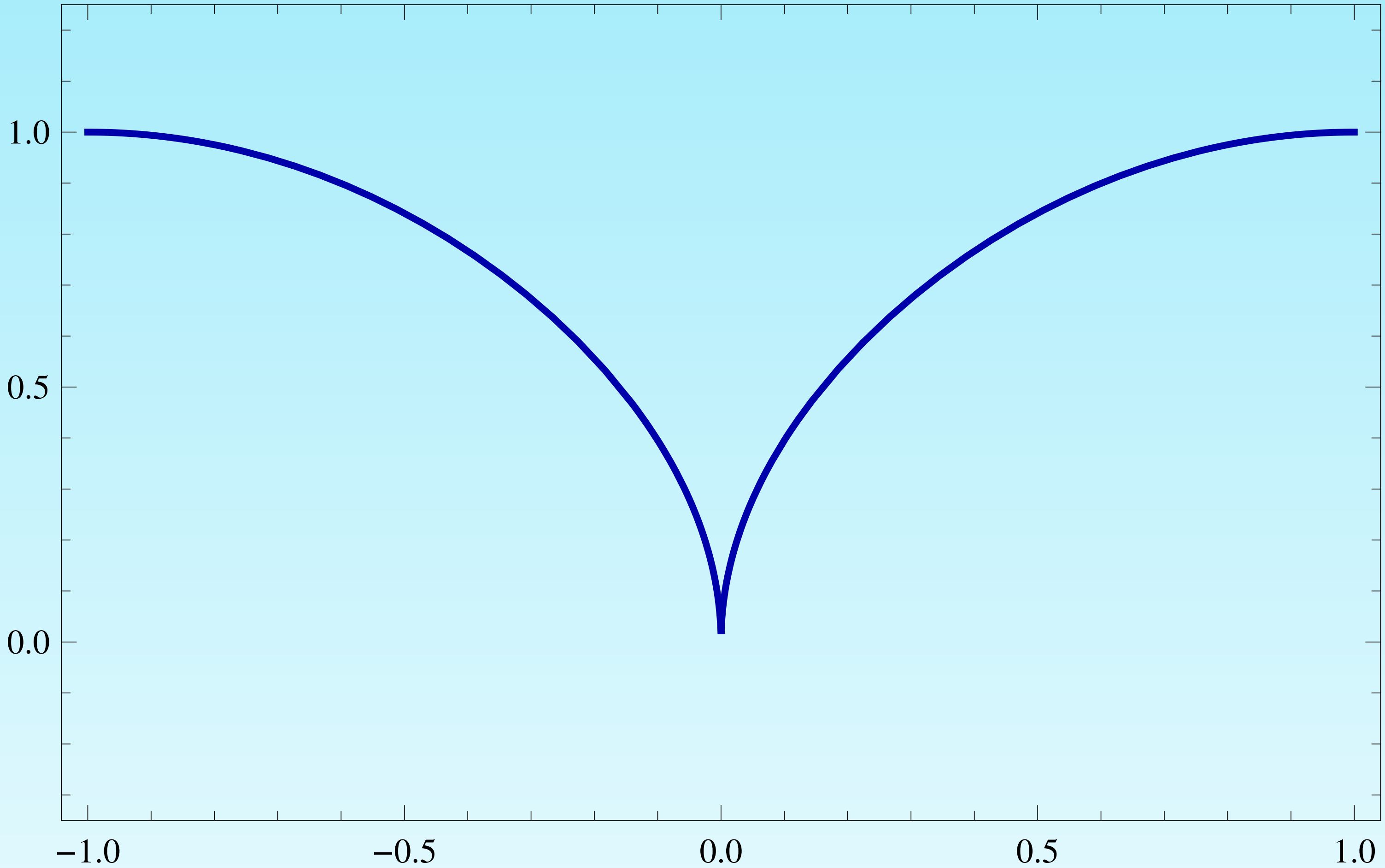
1° Svaka realna neprekidna funkcija f na konačnom intervalu $[a, b]$ može se uniformno aproksimirati algebarskim (trigonometrijskim) polinomima.

2° Svaki polinom $p_n \in \mathcal{P}_n$ ($t_n \in \mathcal{T}_n$) može se jedinstveno interpolirati u $n + 1$ ($2n + 1$) tačaka.

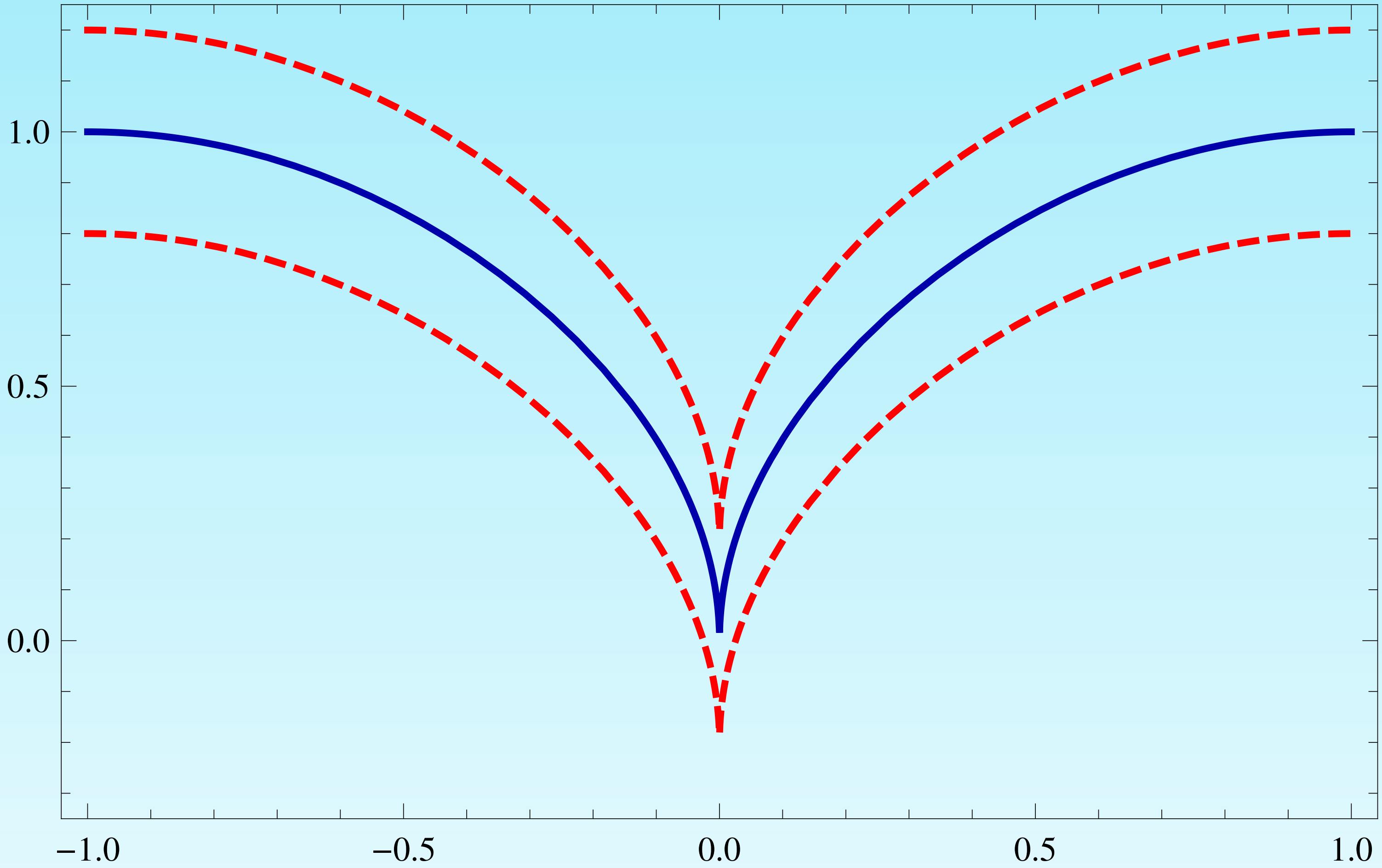
- Weierstrass (1885):

Teorema. *Za svako $f \in C[a, b]$ i svako $\varepsilon > 0$ postoji algebarski polinom p takav da da je*

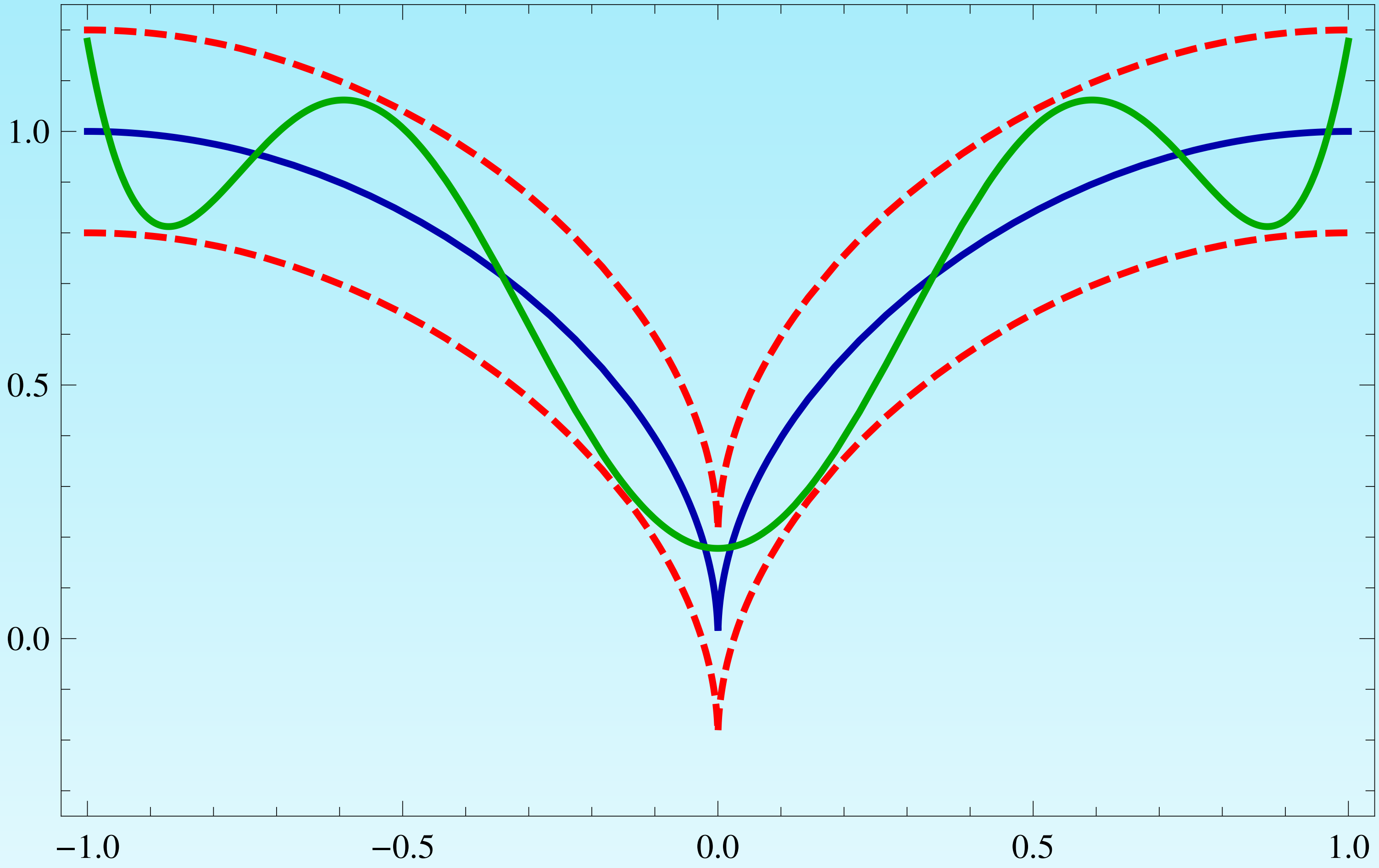
$$|f(t) - p(t)| < \varepsilon \quad (a \le t \le b).$$



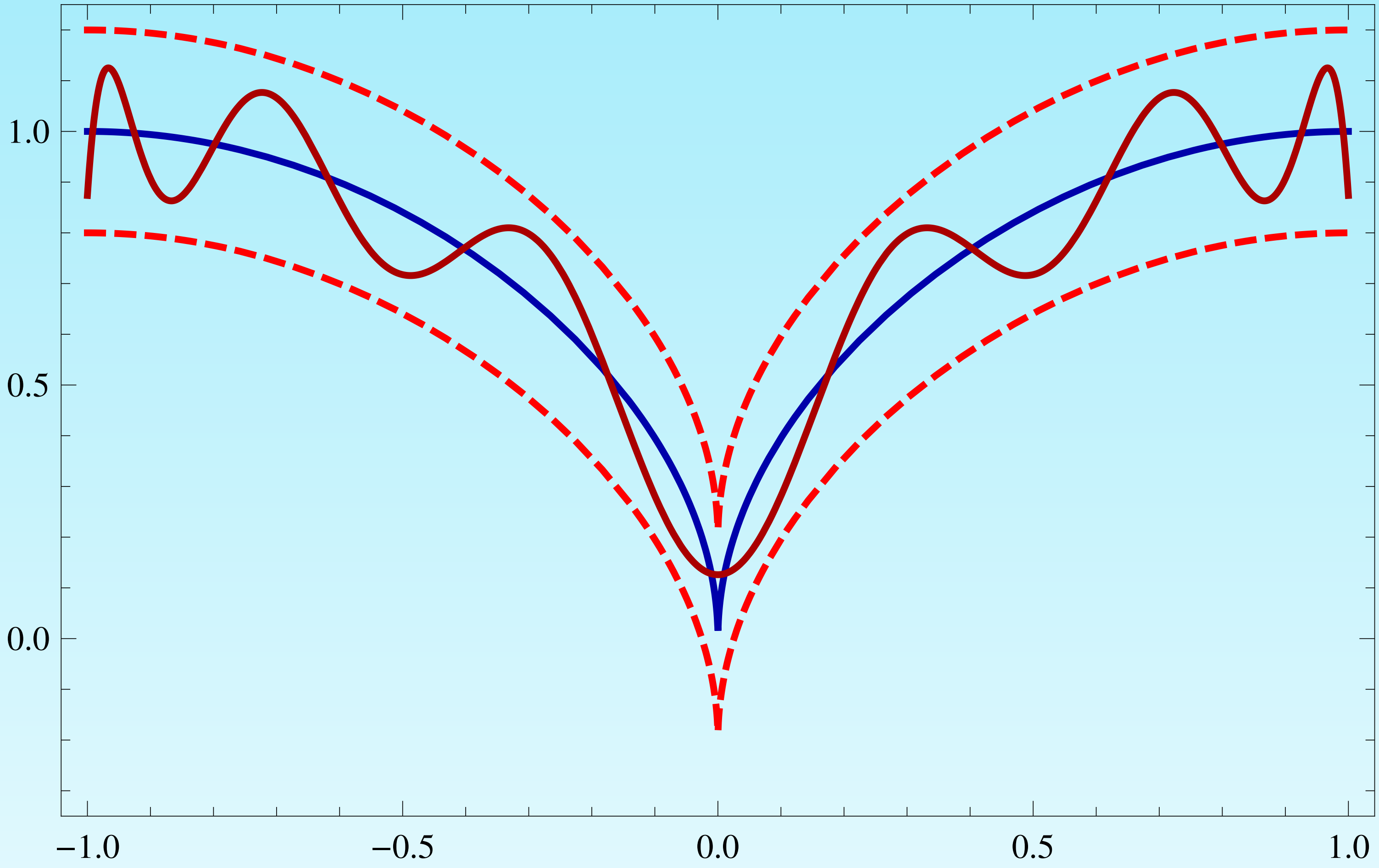
$$f(t)$$



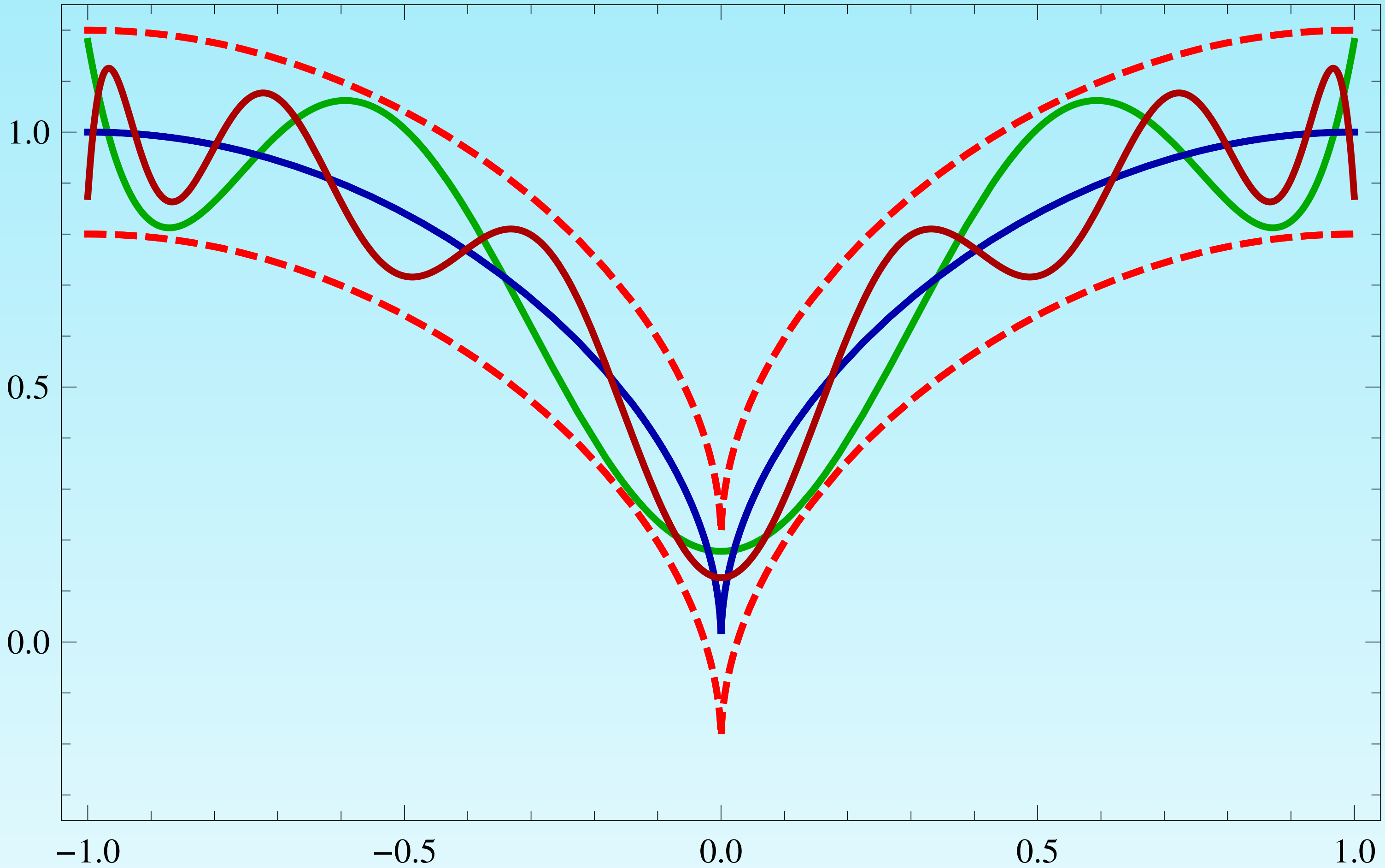
$$f(t),\ f(x)-\varepsilon,\ f(x)+\varepsilon$$



$f(t)$, $f(x) - \varepsilon$, $f(x) + \varepsilon$, $p_1(t)$



$$f(t),\ f(x)-\varepsilon,\ f(x)+\varepsilon,\ p_2(t)$$



$f(t)$, $f(x) - \varepsilon$, $f(x) + \varepsilon$, $p_1(t)$, $p_2(t)$

- **Weierstrassova teorema** u terminima “**najbolje aproksimacije u uniformnoj normi**”

- **Weierstrassova teorema** u terminima “**najbolje aproksimacije u uniformnoj normi**”

  Neka je

$$E_n(f) = \min_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_{[a,b]}.$$

- **Weierstrassova teorema** u terminima “**najbolje aproksimacije u uniformnoj normi**”

  Neka je

$$E_n(f) = \min_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_{[a,b]}.$$

  Tada je

$$\lim_{n \to \infty} E_n(f) = 0, \qquad f \in C[a, b].$$

- **Weierstrassova teorema** u terminima “**najbolje aproksimacije u uniformnoj normi**”

  Neka je

$$E_n(f) = \min_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_{[a,b]}.$$

  Tada je

$$\lim_{n \to \infty} E_n(f) = 0, \qquad f \in C[a, b].$$

- Skup polinoma je **svuda gust** u $C[a, b]$.

Interpolacija?

– Konstrukcija novih podataka u opsegu datih podataka

Interpolacija?

- Konstrukcija novih podataka u opsegu datih podataka
- čitanje između redova

Interpolacija?

- Konstrukcija novih podataka u opsegu datih podataka
- čitanje između redova
- Analitički izraz – konstruktivni elementi

Interpolacija?

- Konstrukcija novih podataka u opsegu datih podataka
- čitanje između redova
- Analitički izraz – konstruktivni elementi
- algebarski polinomi

Interpolacija?

- Konstrukcija novih podataka u opsegu datih podataka
- čitanje između redova
- Analitički izraz – konstruktivni elementi
- algebarski polinomi
- trigonometrijski polinomi

Interpolacija?

- Konstrukcija novih podataka u opsegu datih podataka
- čitanje između redova
- Analitički izraz – konstruktivni elementi
- algebarski polinomi
- trigonometrijski polinomi
- Müntzovi polinomi

Interpolacija?

- Konstrukcija novih podataka u opsegu datih podataka
- čitanje između redova
- Analitički izraz – konstruktivni elementi
- algebarski polinomi
- trigonometrijski polinomi
- Müntzovi polinomi
- splajnovi

Interpolacija?

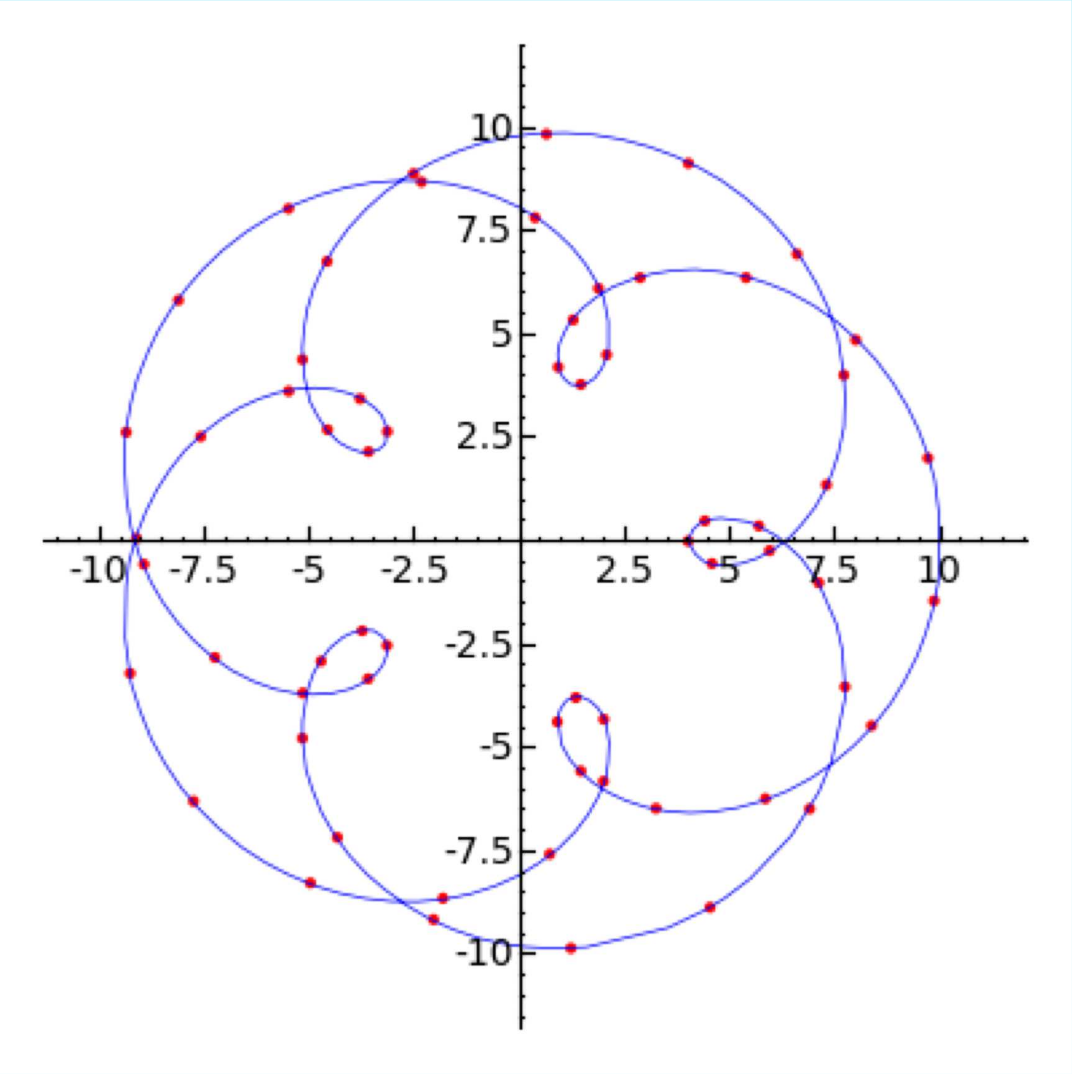
- Konstrukcija novih podataka u opsegu datih podataka
- čitanje između redova
- Analitički izraz – konstruktivni elementi
- algebarski polinomi
- trigonometrijski polinomi
- Müntzovi polinomi
- splajnovi
- talasići (wavelets)

Interpolacija?

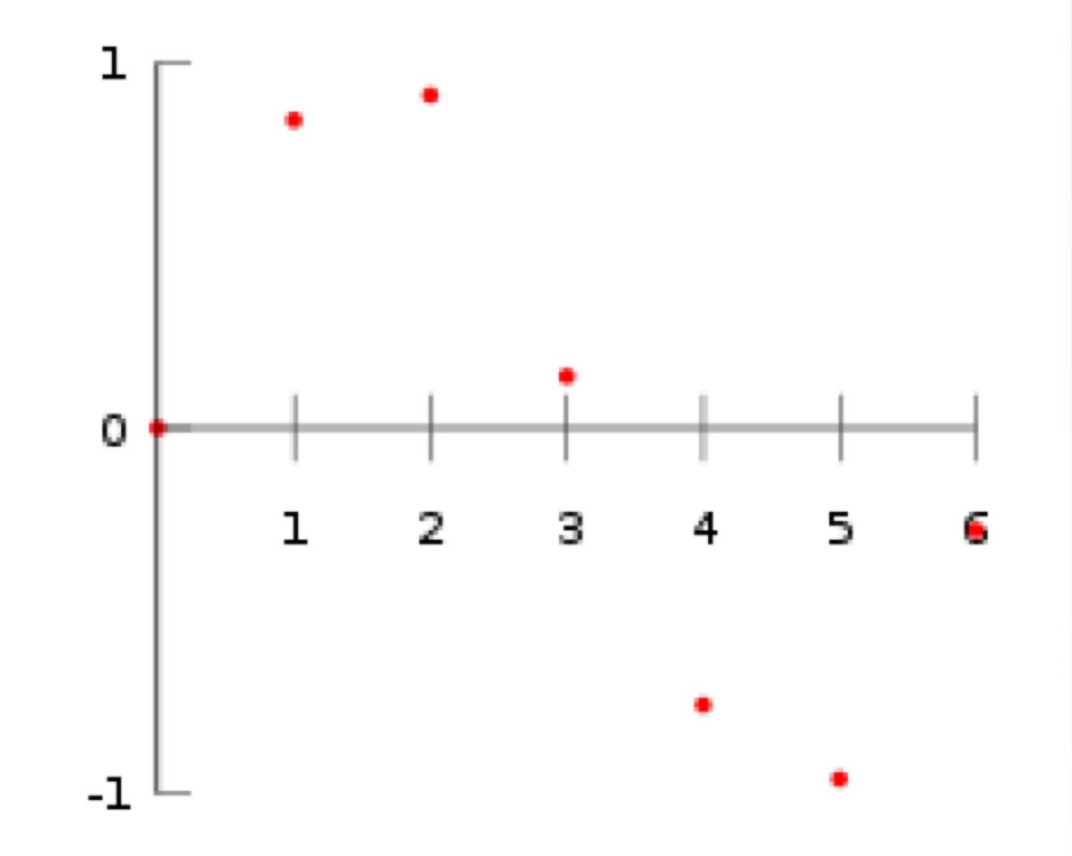
- Konstrukcija novih podataka u opsegu datih podataka
- čitanje između redova
- Analitički izraz – konstruktivni elementi
- algebarski polinomi
- trigonometrijski polinomi
- Müntzovi polinomi
- splajnovi
- talasići (wavelets)
- racionalne funkcije

Interpolacija?

- Konstrukcija novih podataka u opsegu datih podataka
- čitanje između redova
- Analitički izraz – konstruktivni elementi
- algebarski polinomi
- trigonometrijski polinomi
- Müntzovi polinomi
- splajnovi
- talasići (wavelets)
- racionalne funkcije
- eksponencijalne funkcije


10
7.5
5
2.5
-2.5
-5
-7.5
-10
-10
-7.5
-5
-2.5
2.5
5
7.5
10

Podaci

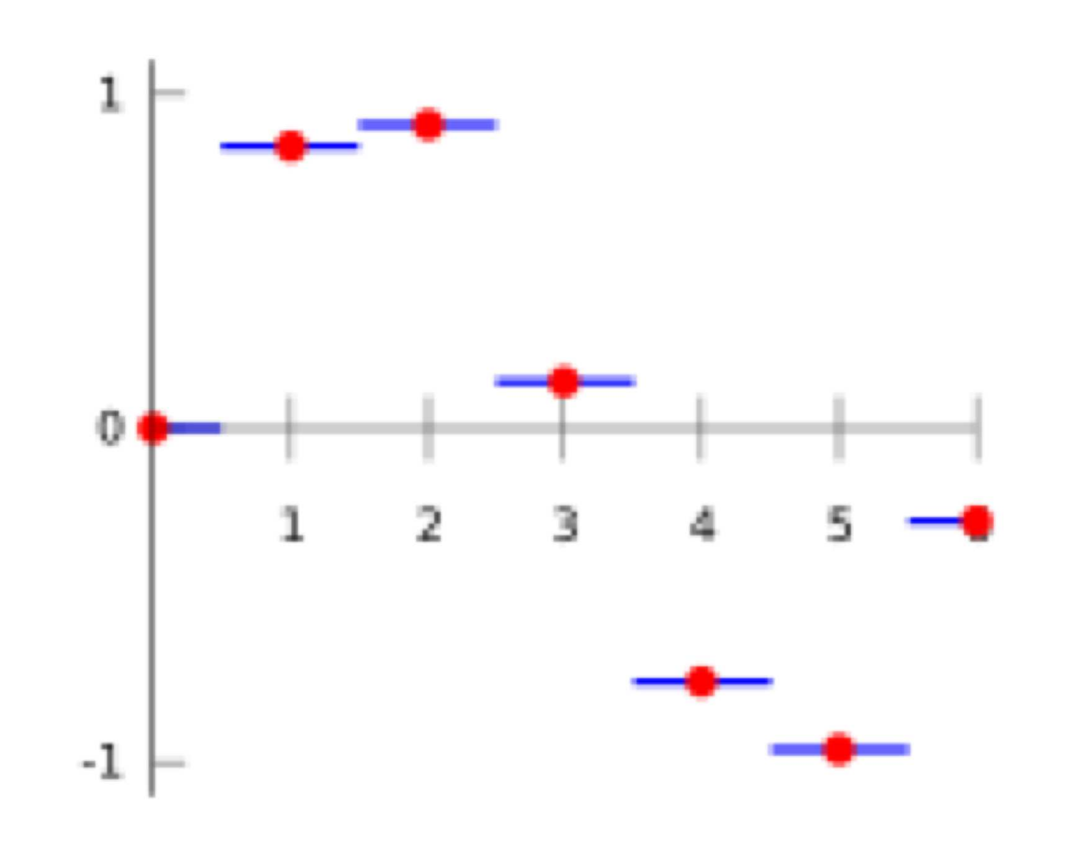


Deo-po-deo konstanta

(Splajn nultog stepena)

Deo-po-deo konstanta

(Splajn nultog stepena)

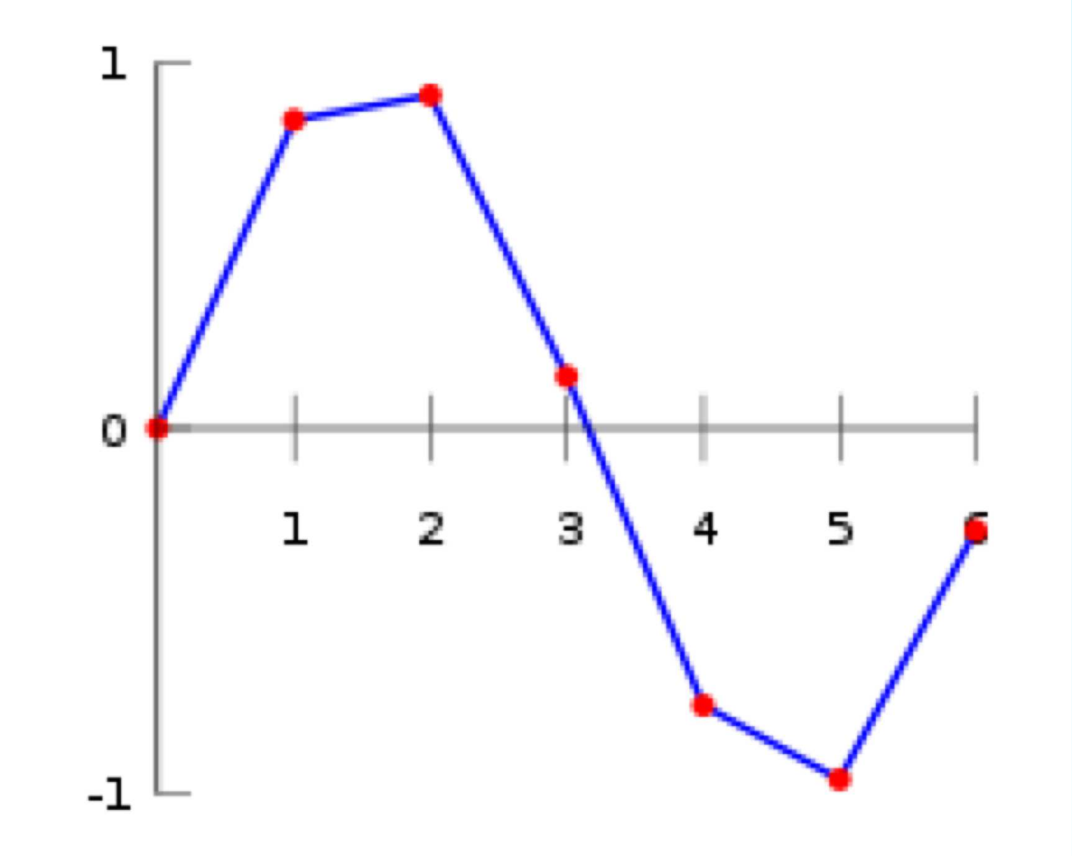


Linearna interpolacija

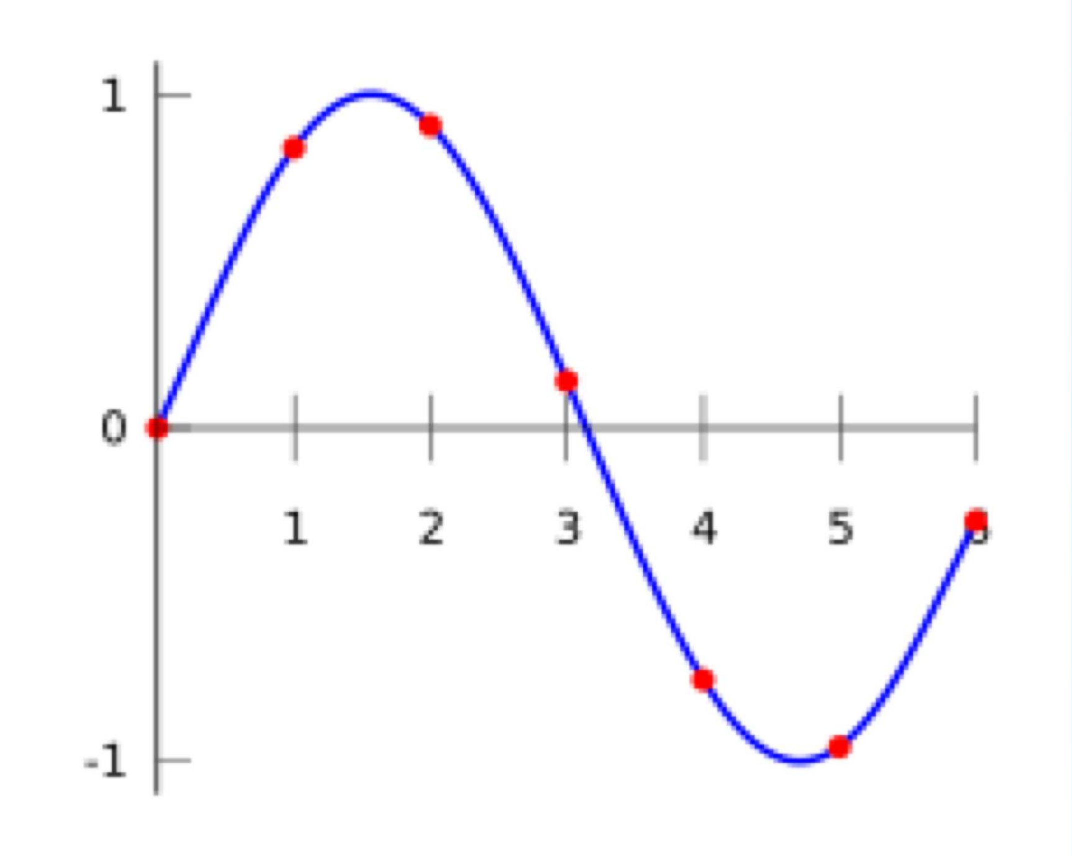
(Splajn prvog stepena)

Linearna interpolacija

(Splajn prvog stepena)



Polinomska interpolacija



Interpolacija (Rungeov primer)

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x/a)^2}, \quad x \in [-1, 1], \quad a = 2/11$$

Interpolacija (Rungeov primer)

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x/a)^2}, \quad x \in [-1, 1], \;\; a = 2/11$$

- **Interpolacioni čvorovi:** $x_k, \;\; k = 1, 2, \ldots, n$

Interpolacija (Rungeov primer)

$$f(x) = \frac{1}{1+(x/a)^2}, \qquad x \in [-1, 1], \quad a = 2/11$$

- **Interpolacioni čvorovi:** $x_k, \; k = 1, 2, \dots, n$
- **Ekvidistantni čvorovi:** $x_k = -1 + \dfrac{2(k-1)}{n-1}$

Interpolacija (Rungeov primer)

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x/a)^2}, \quad x \in [-1, 1], \quad a = 2/11$$

- **Interpolacioni čvorovi:** $x_k, \; k = 1, 2, \ldots, n$
- **Ekvidistantni čvorovi:** $x_k = -1 + \dfrac{2(k-1)}{n-1}$
- **Čebiševljevi čvorovi:** $x_k = -\cos \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$

Interpolacija (Rungeov primer)

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x/a)^2}, \qquad x \in [-1, 1], \quad a = 2/11$$

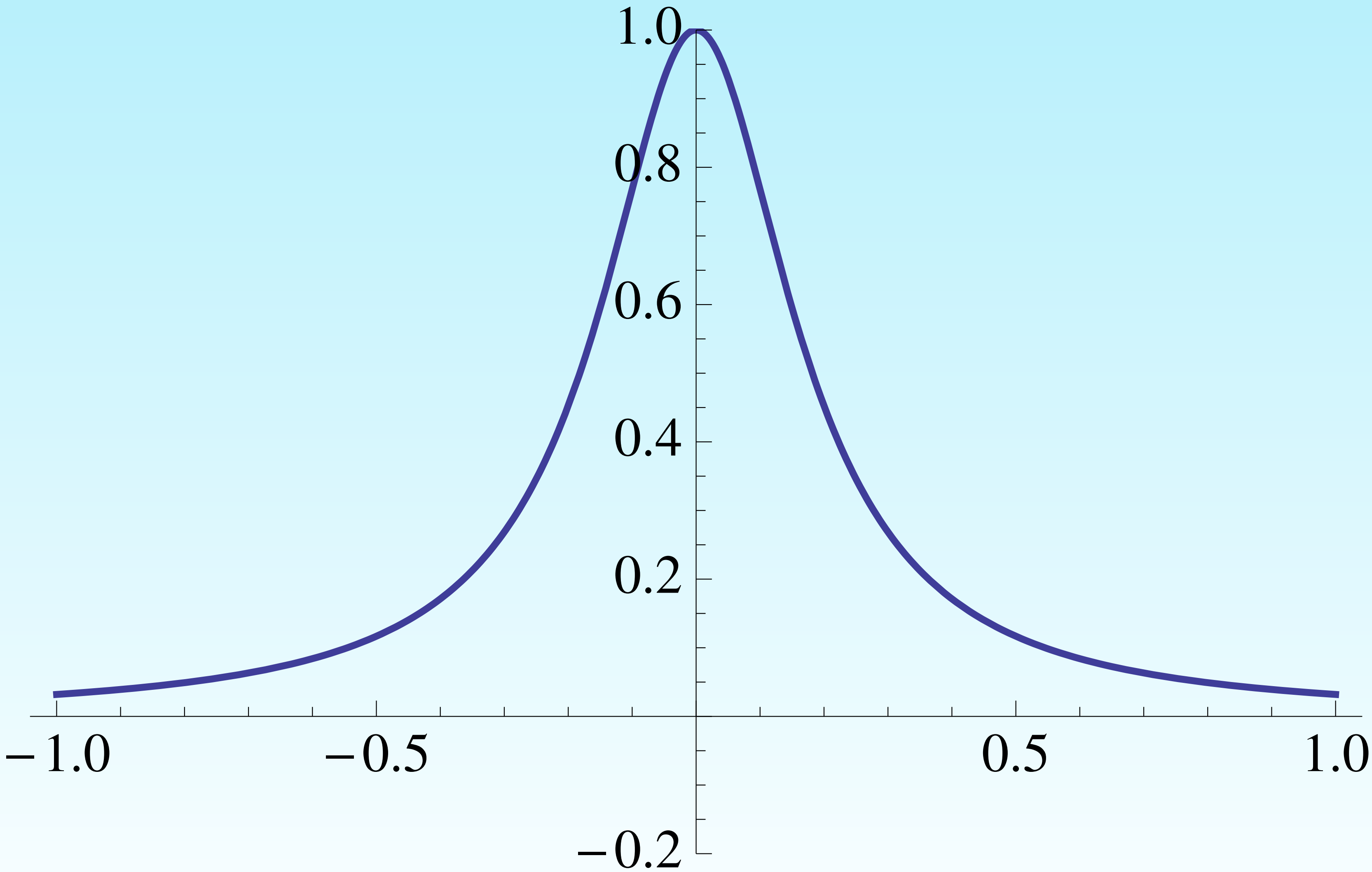
- **Interpolacioni čvorovi:** $x_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$
- **Ekvidistantni čvorovi:** $x_k = -1 + \dfrac{2(k-1)}{n-1}$
- **Čebiševljevi čvorovi:** $x_k = -\cos \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$

  Nule Čebiševljevih polinoma

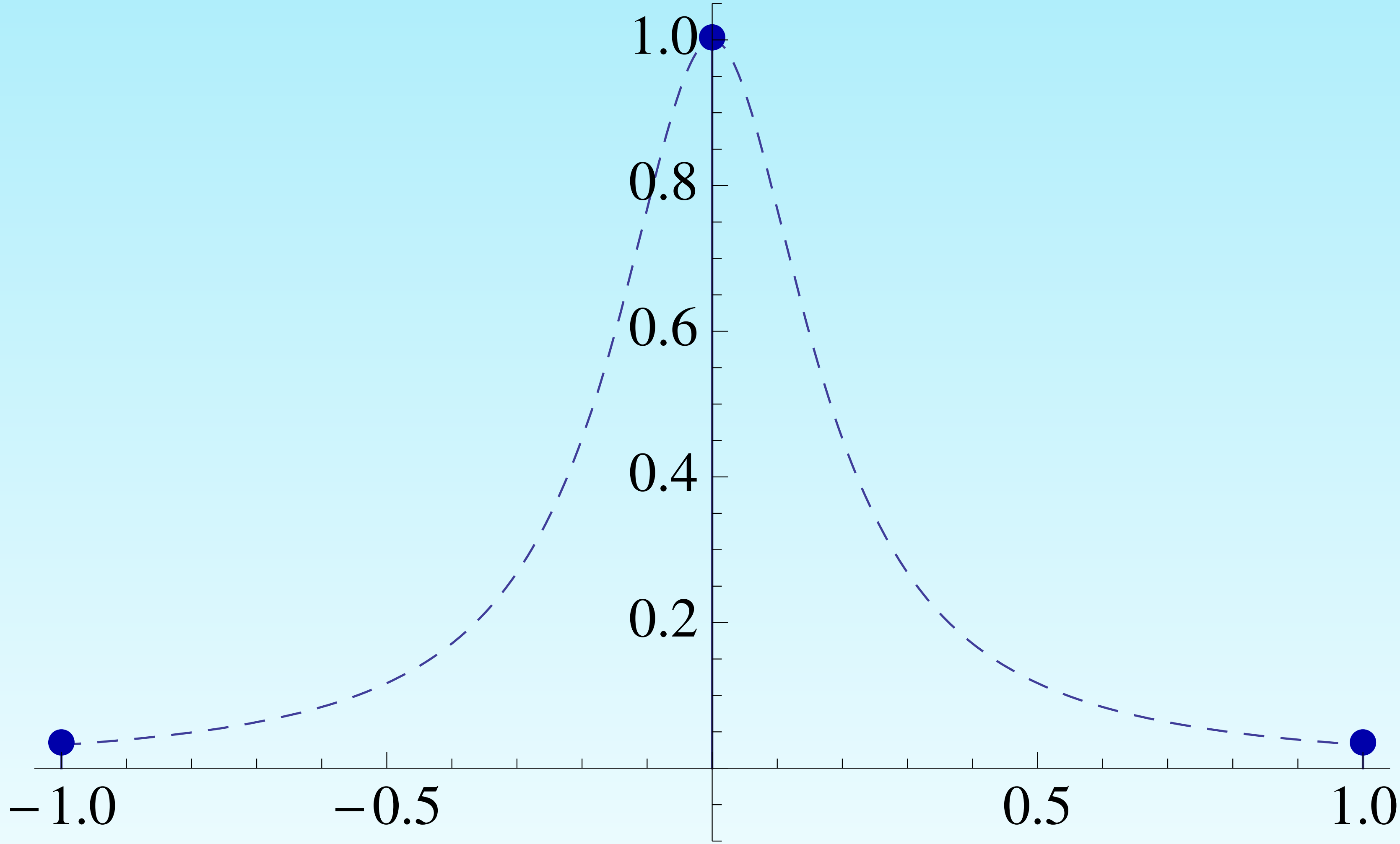
$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad -1 \leq x \leq 1$$

Interpolacija (Runge-ov primer)

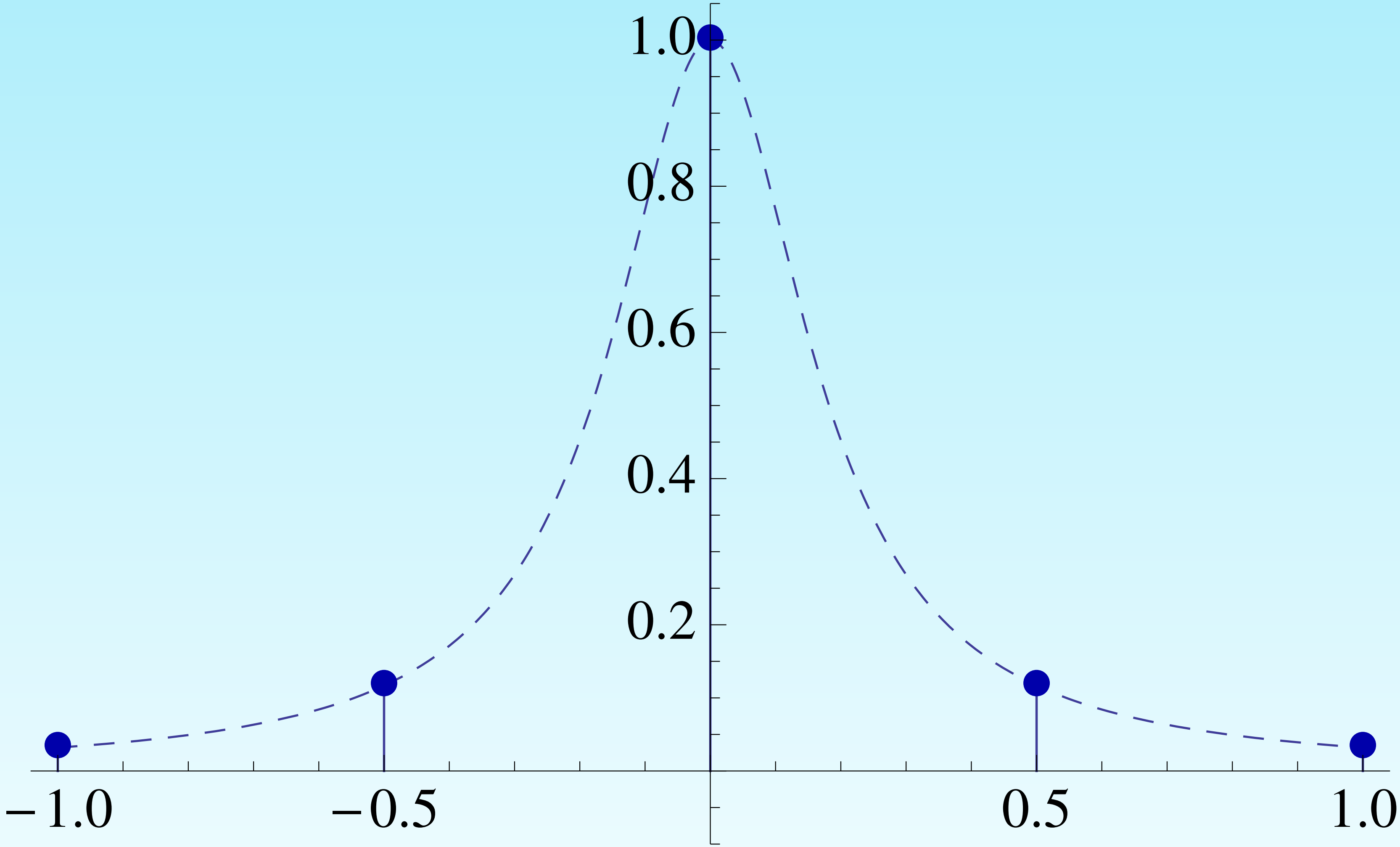
$y = f(x)$



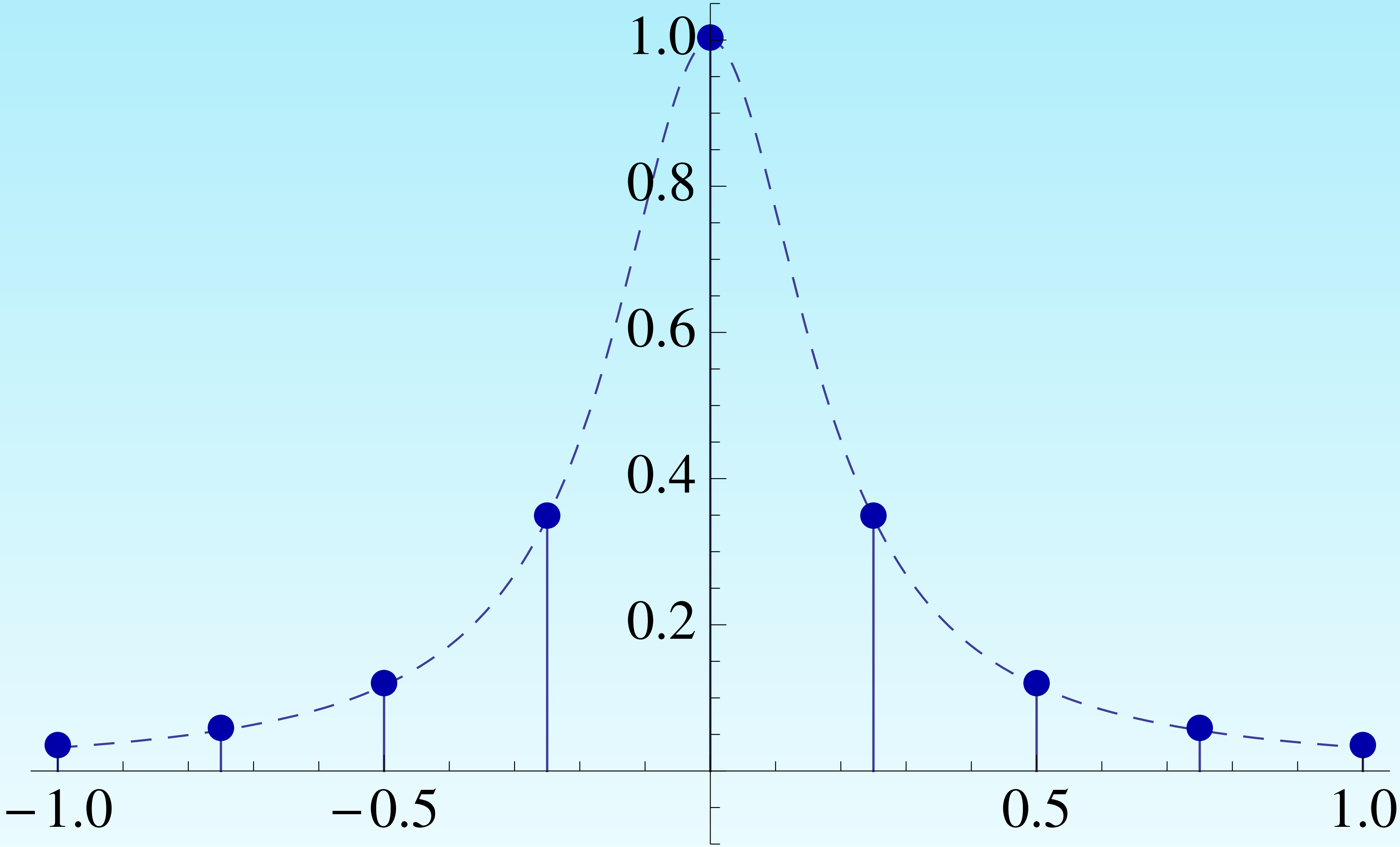
- $n = 3$ $\qquad x_k = -1 + \frac{2(k-1)}{n-1}$



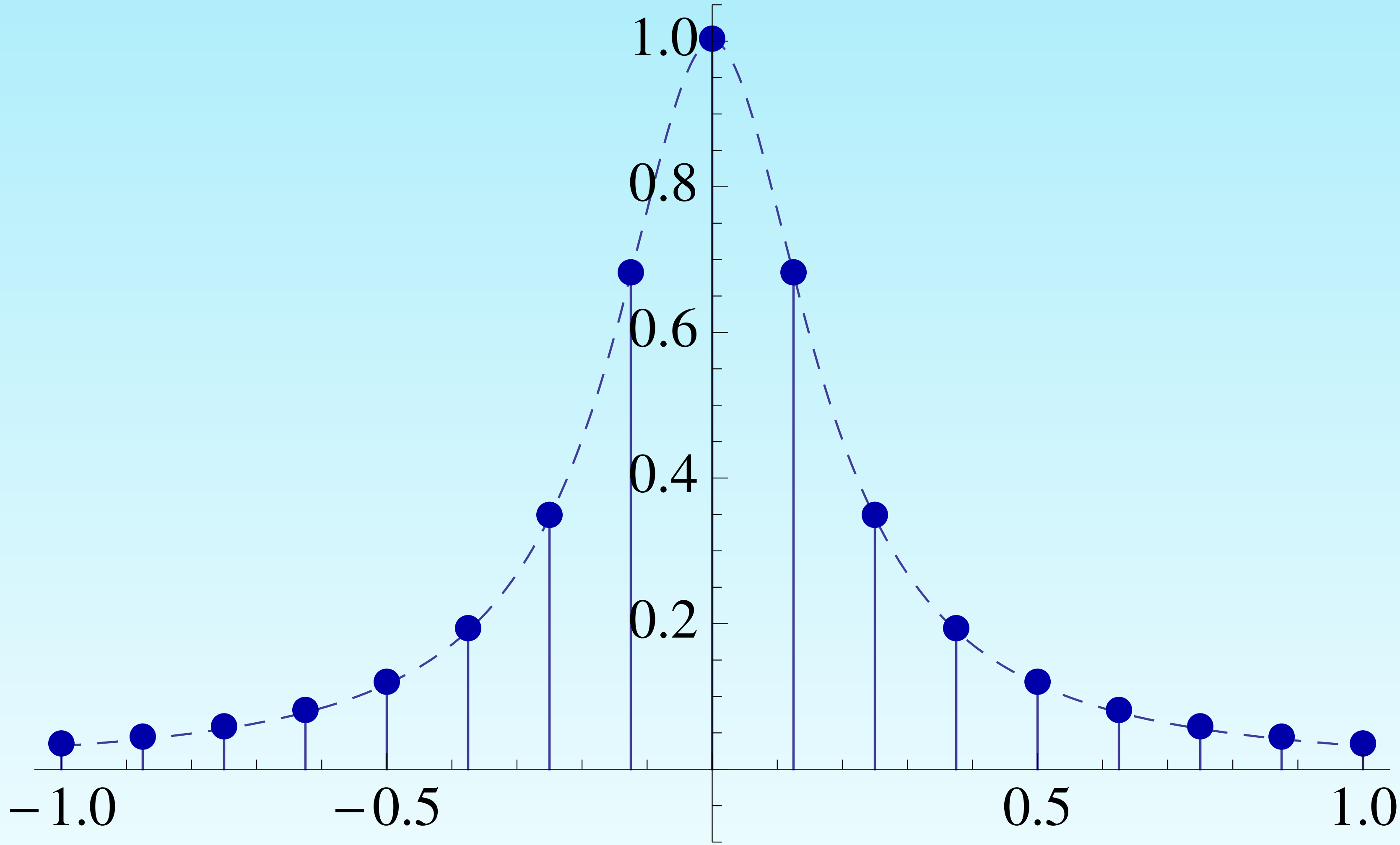
- $n = 5$ $\qquad x_k = -1 + \frac{2(k-1)}{n-1}$



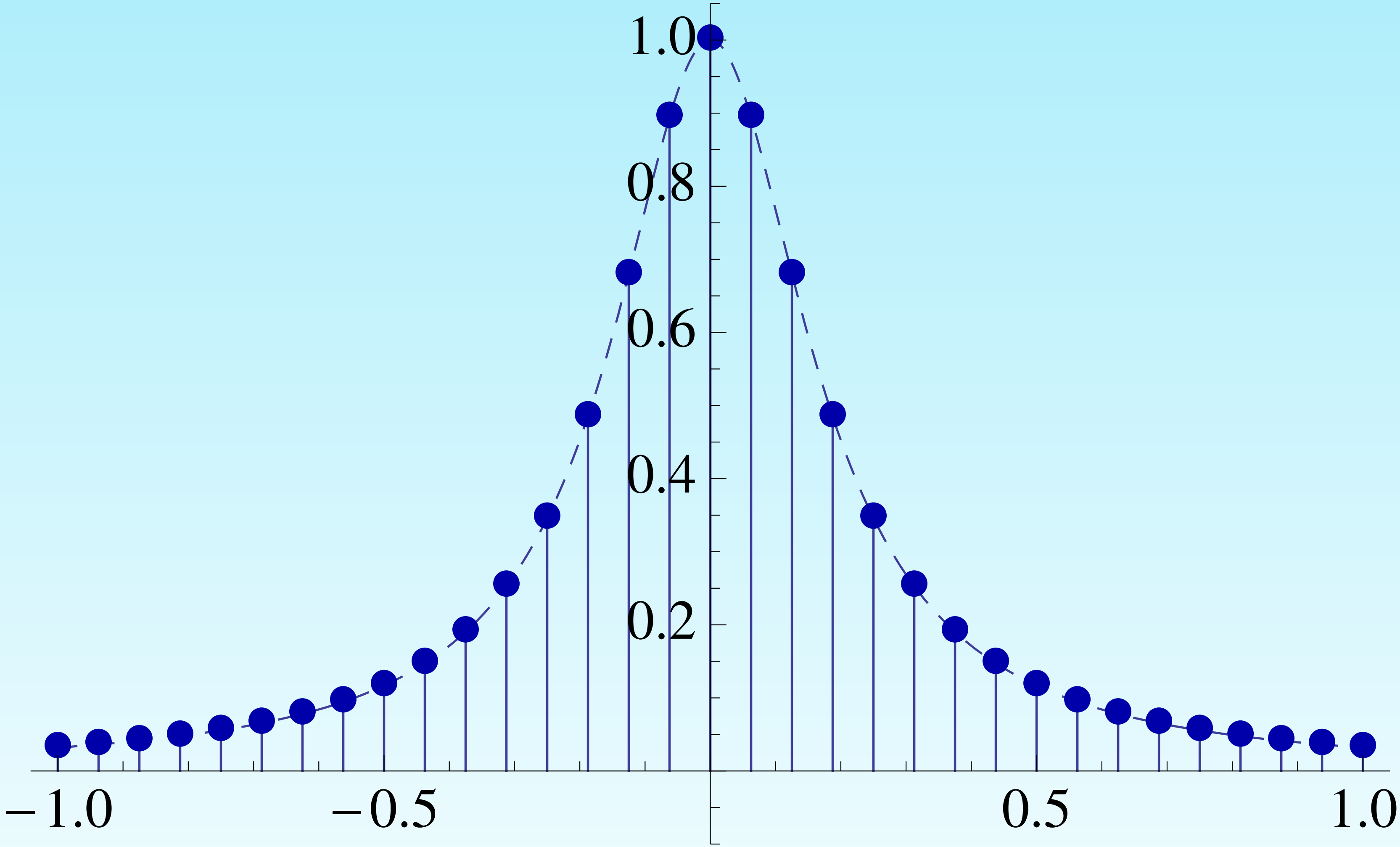
- $n = 9$ $x_k = -1 + \frac{2(k-1)}{n-1}$



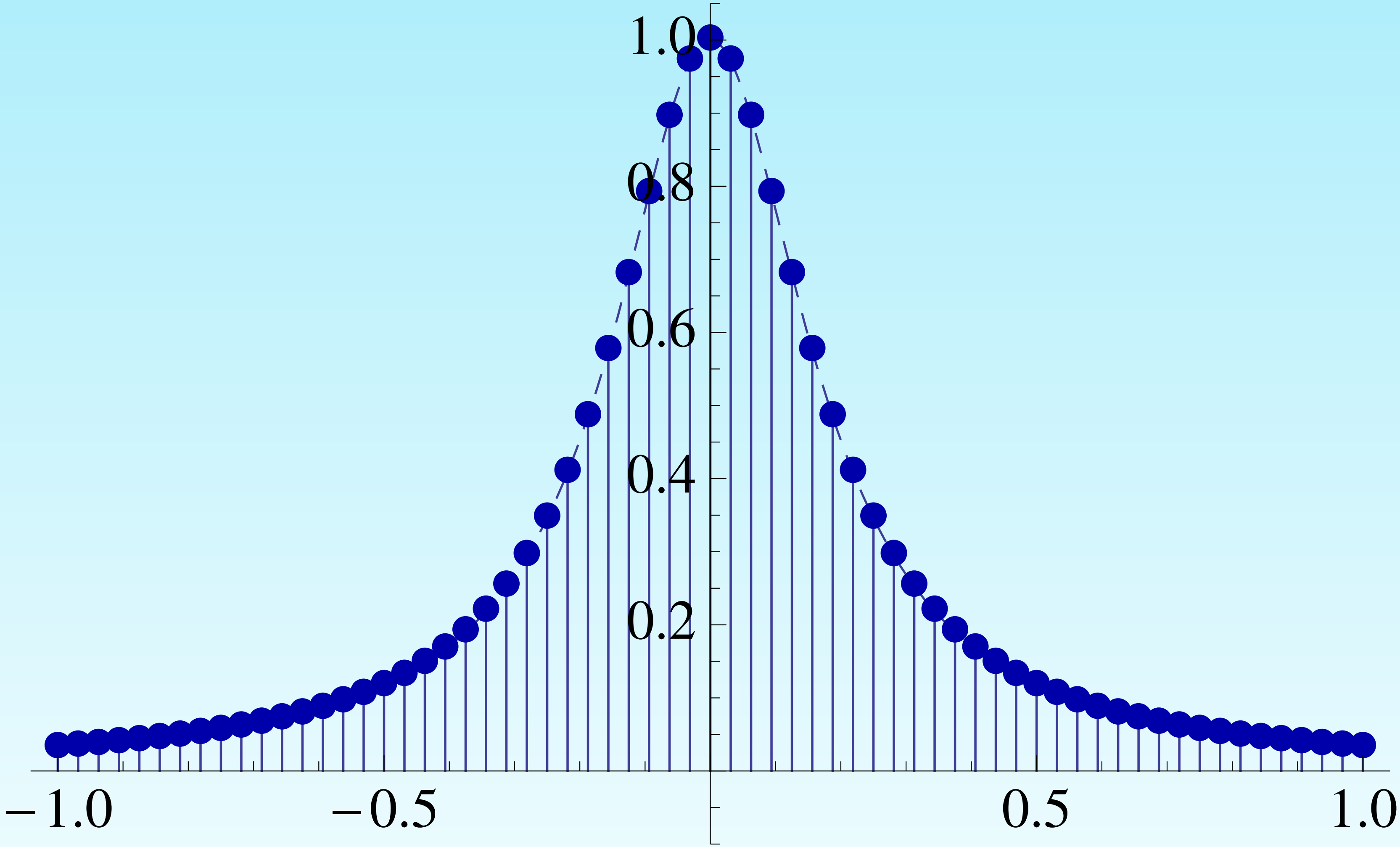
- $n = 17$ $\qquad x_k = -1 + \frac{2(k-1)}{n-1}$



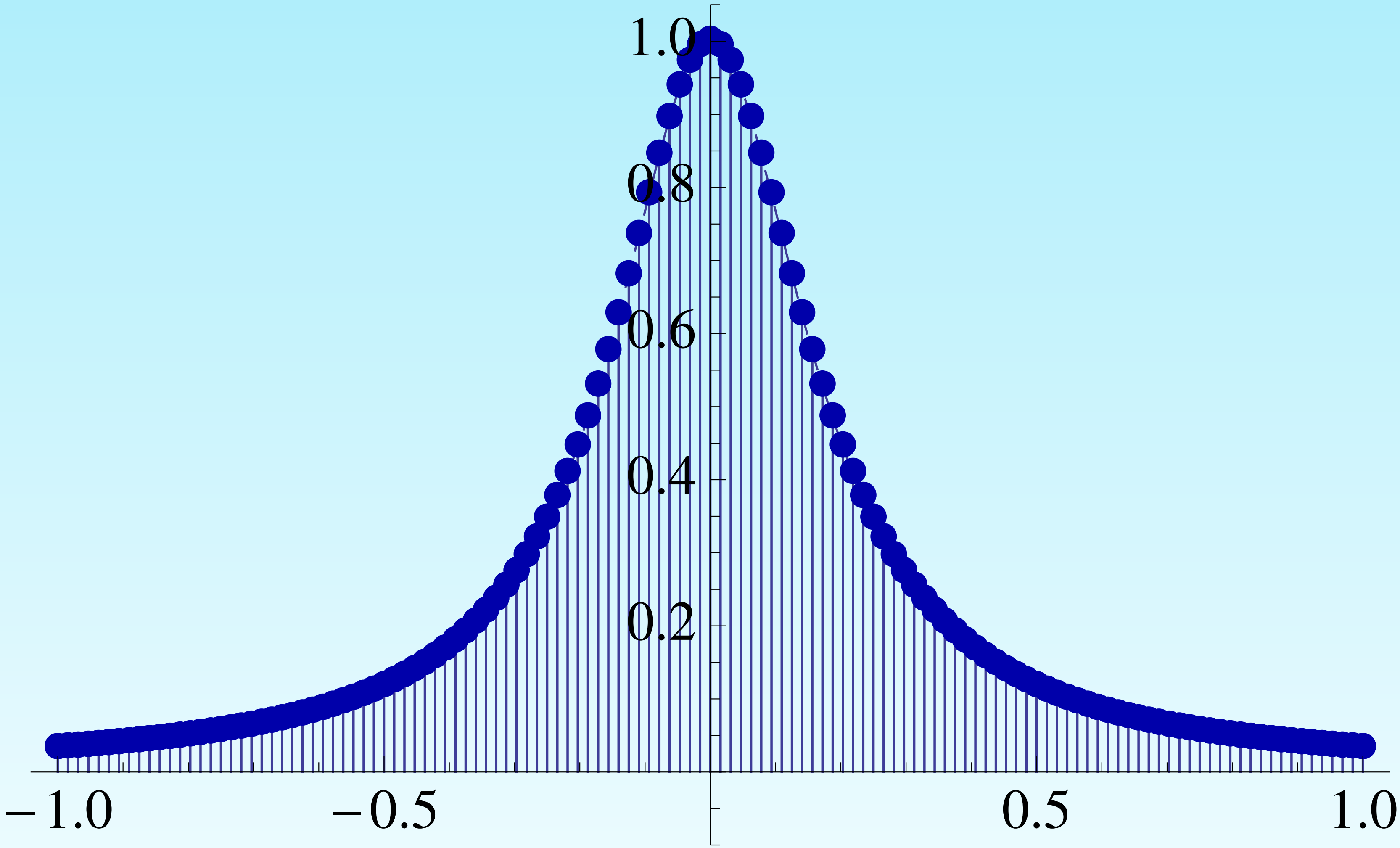
- $n = 33$ $\qquad x_k = -1 + \frac{2(k-1)}{n-1}$



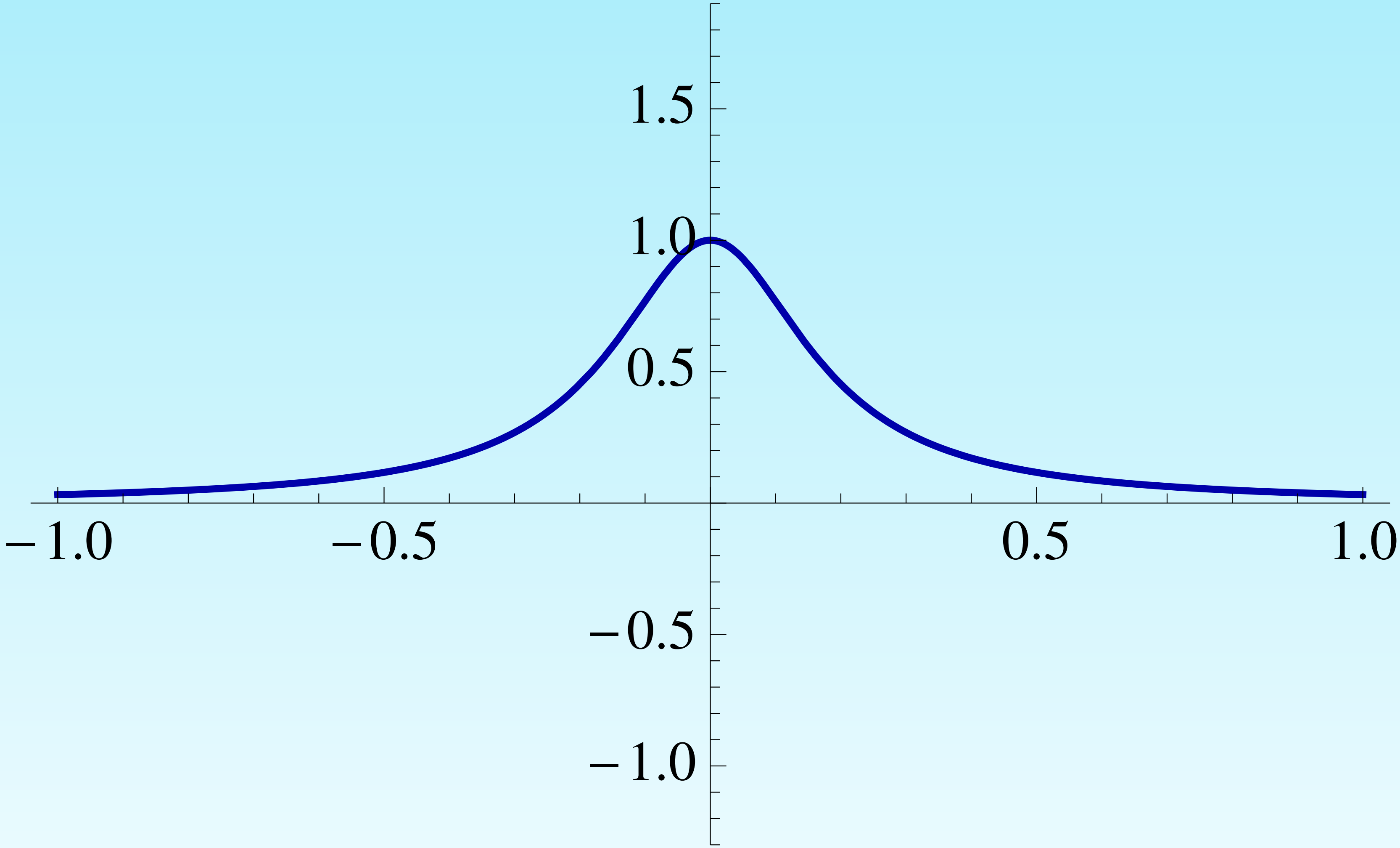
- $n = 65$ $x_k = -1 + \frac{2(k-1)}{n-1}$



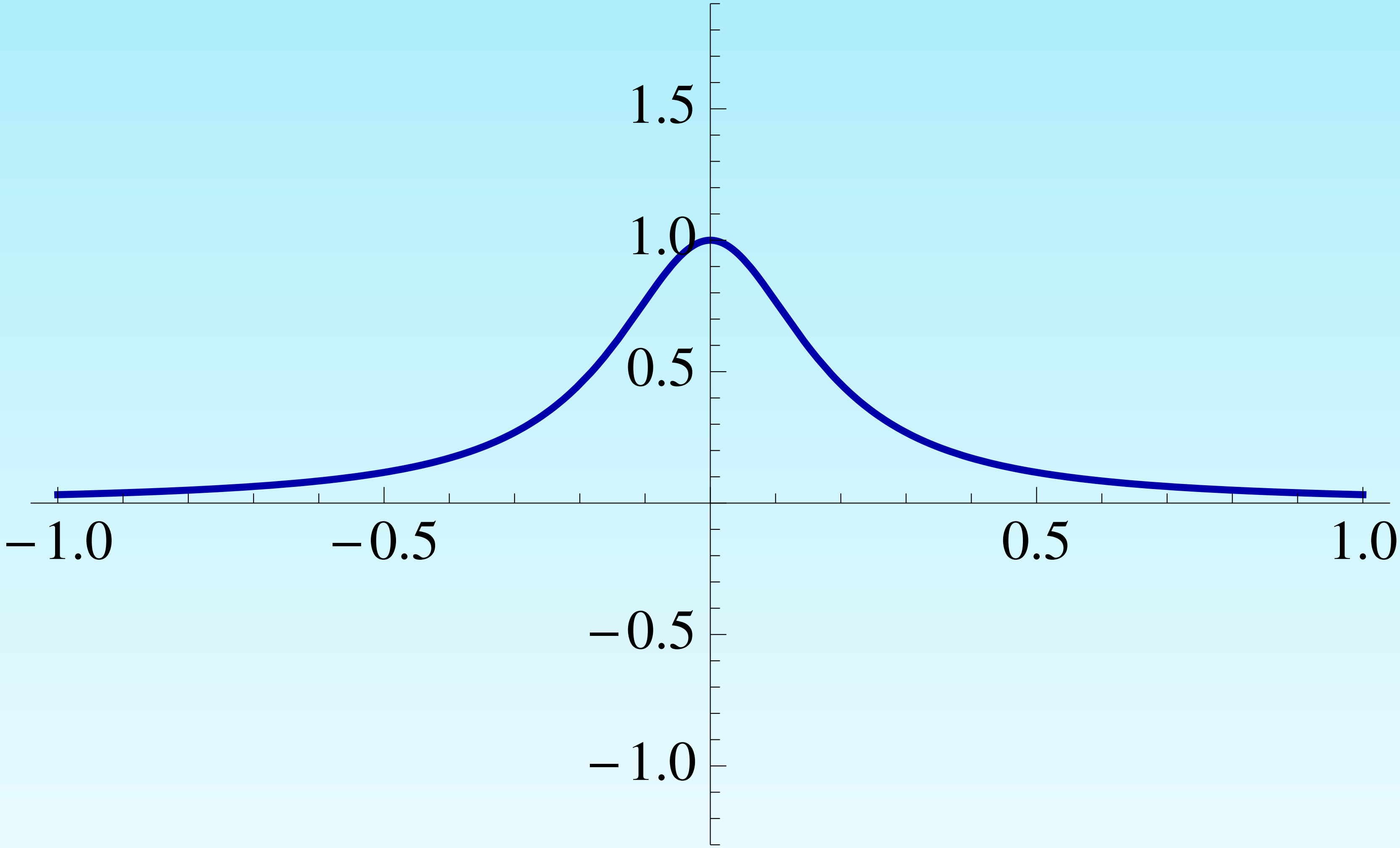
- $n = 129$ $\qquad x_k = -1 + \frac{2(k-1)}{n-1}$



- $y = f(x)$

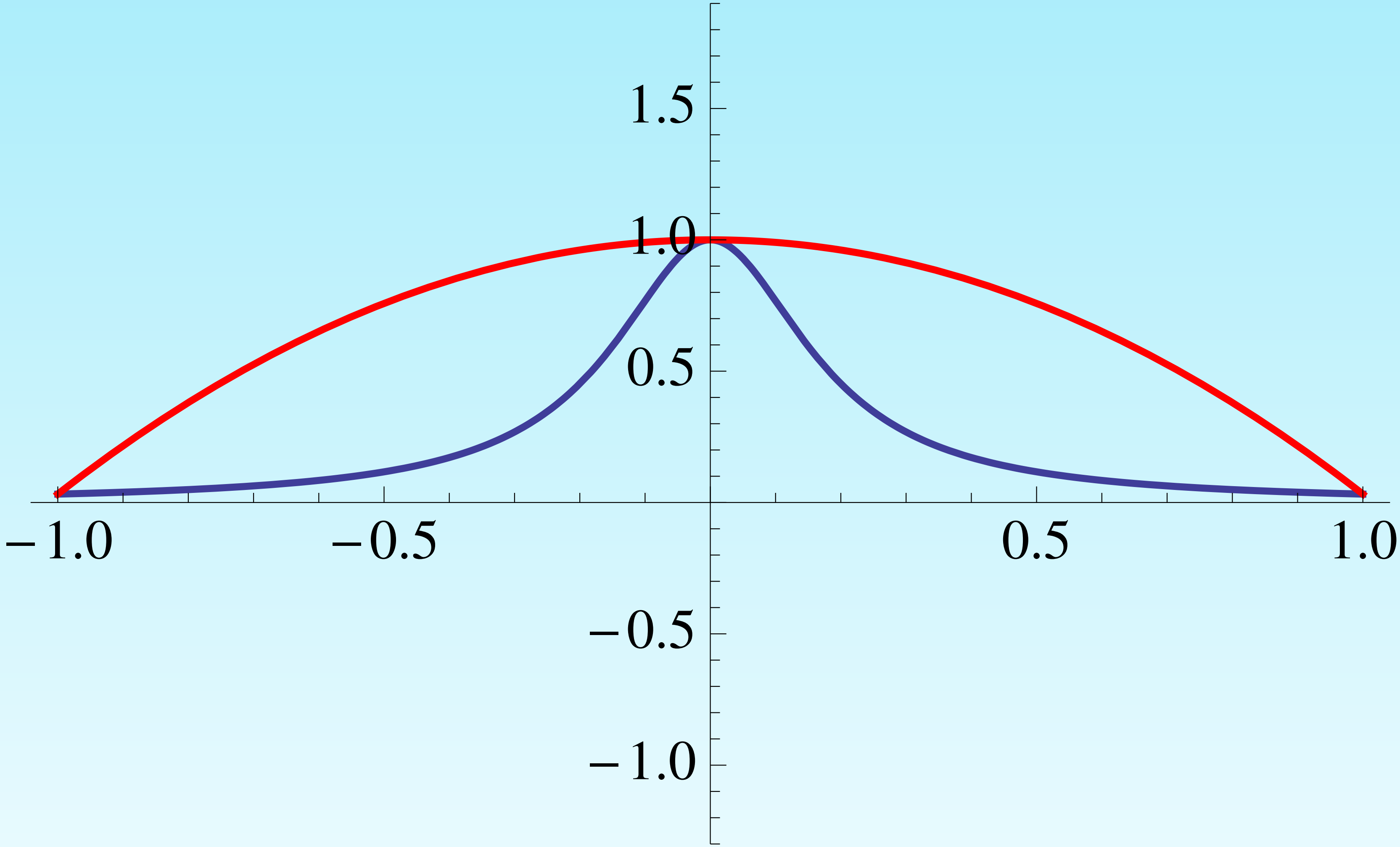


- $y = f(x)$

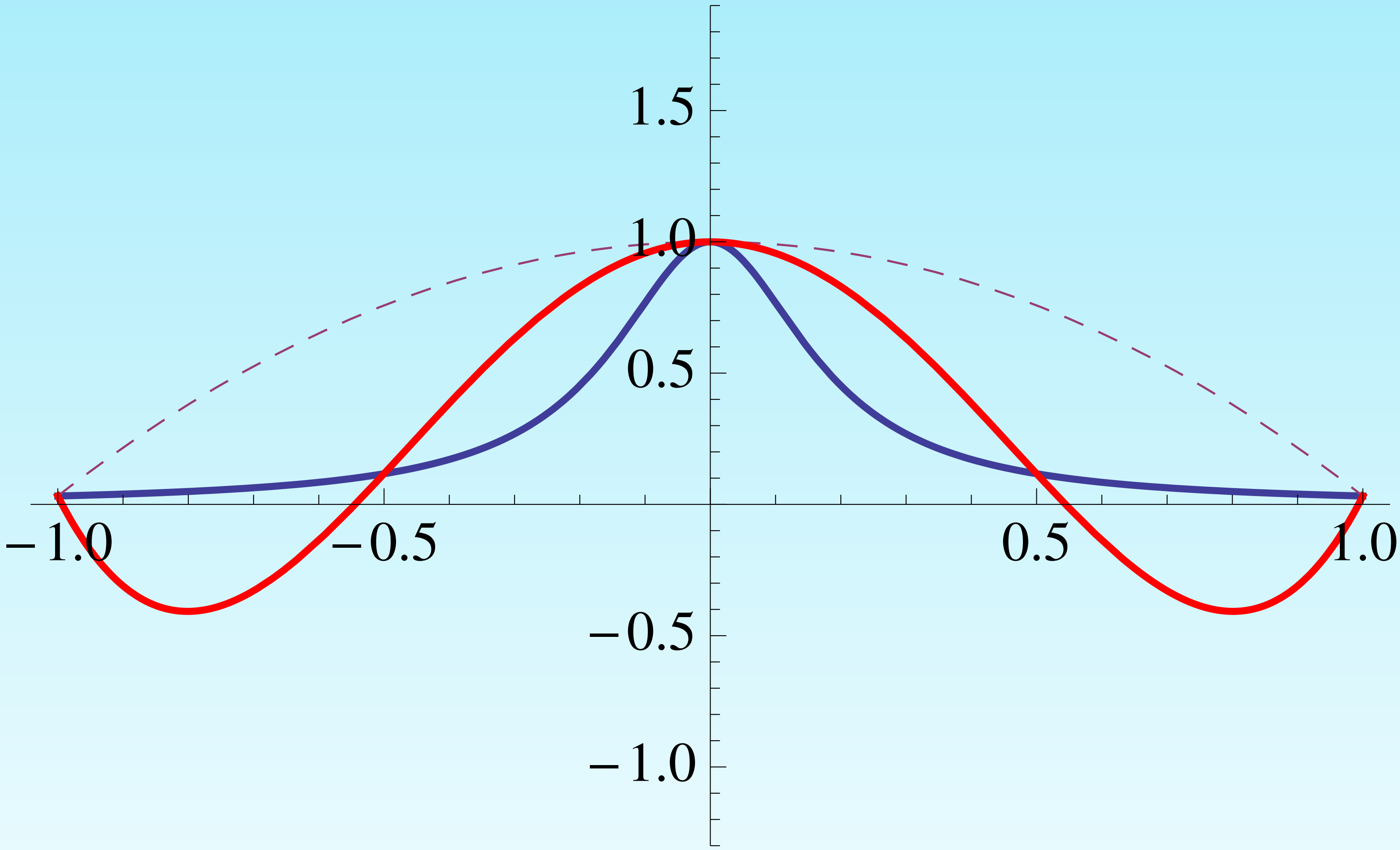


- **Interpolacioni polinom za** $n = 3, 5, 9, 17$

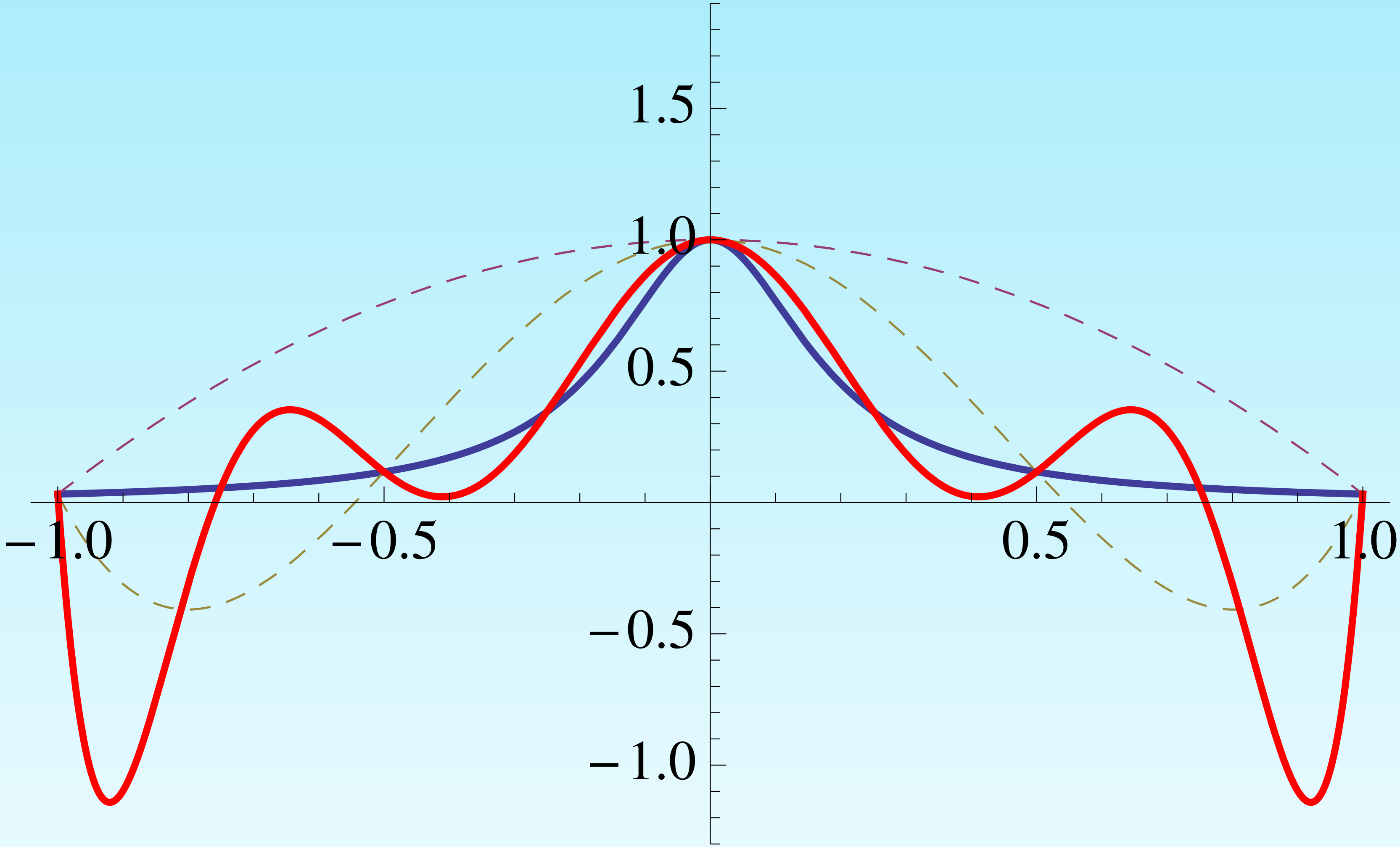
- $n = 3$



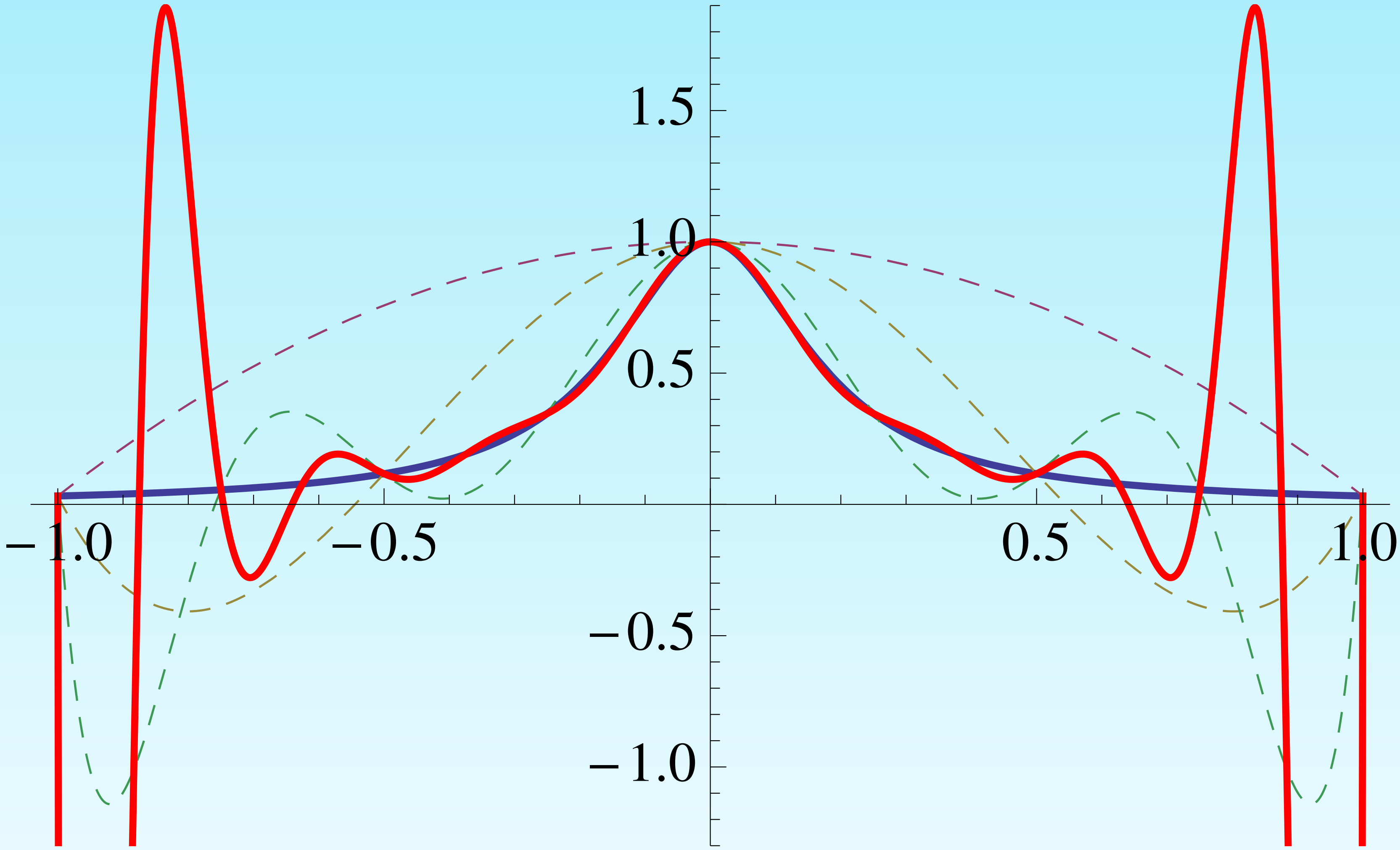
- $n = 5$



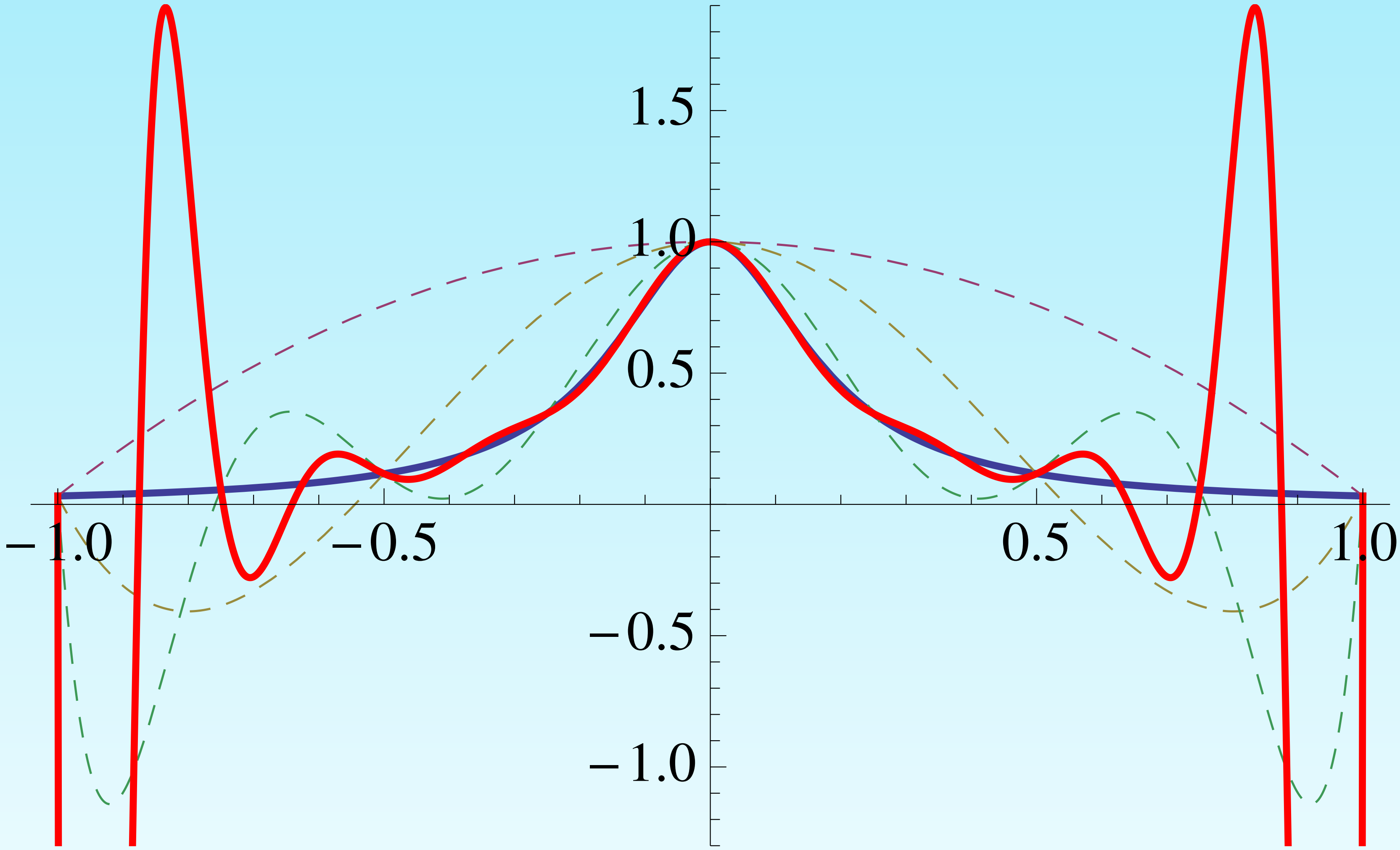
- $n = 9$



- $n = 17$

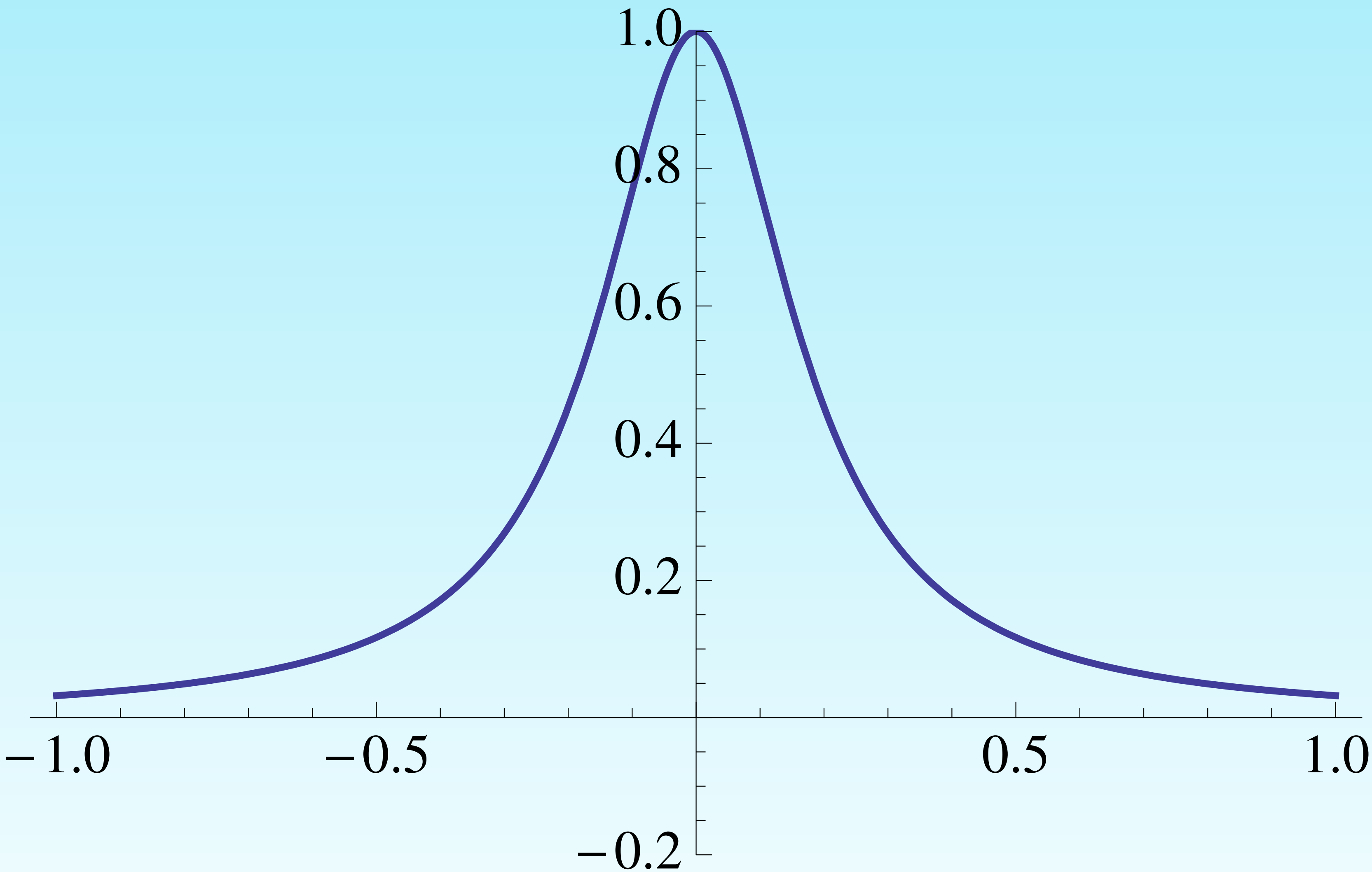


- $n = 17$

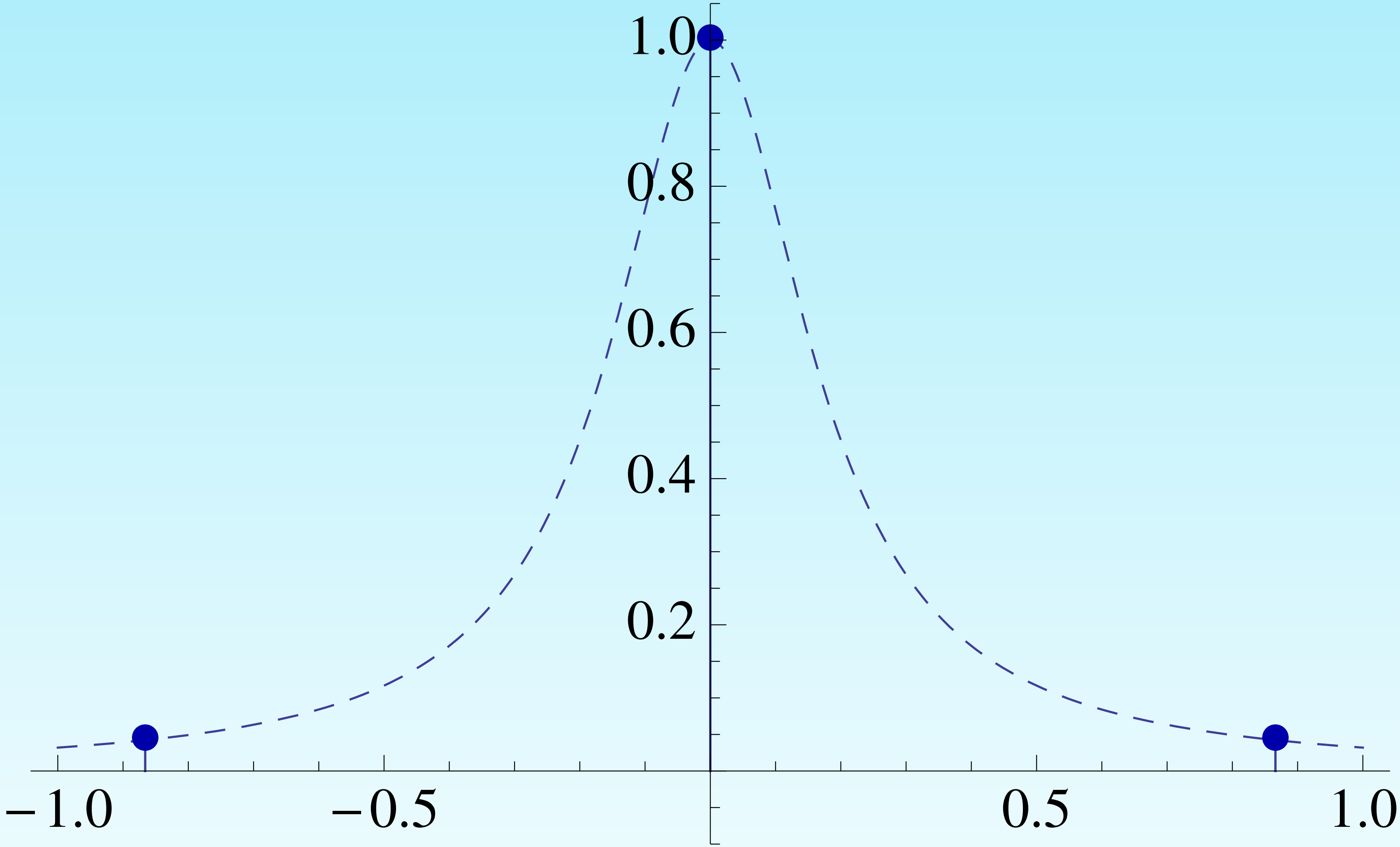


divergencija **konvergencija** **divergencija**

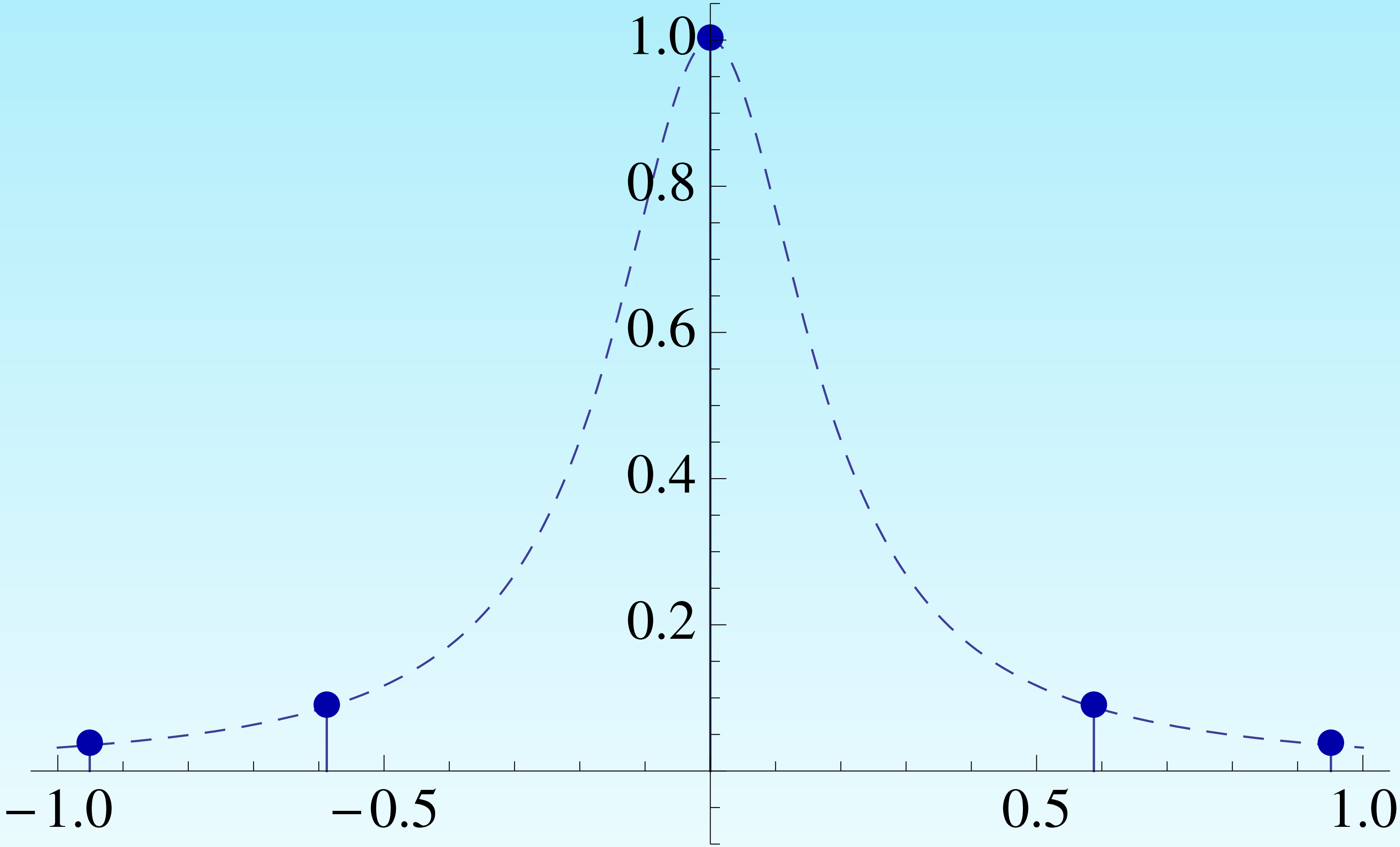
- $y = f(x)$



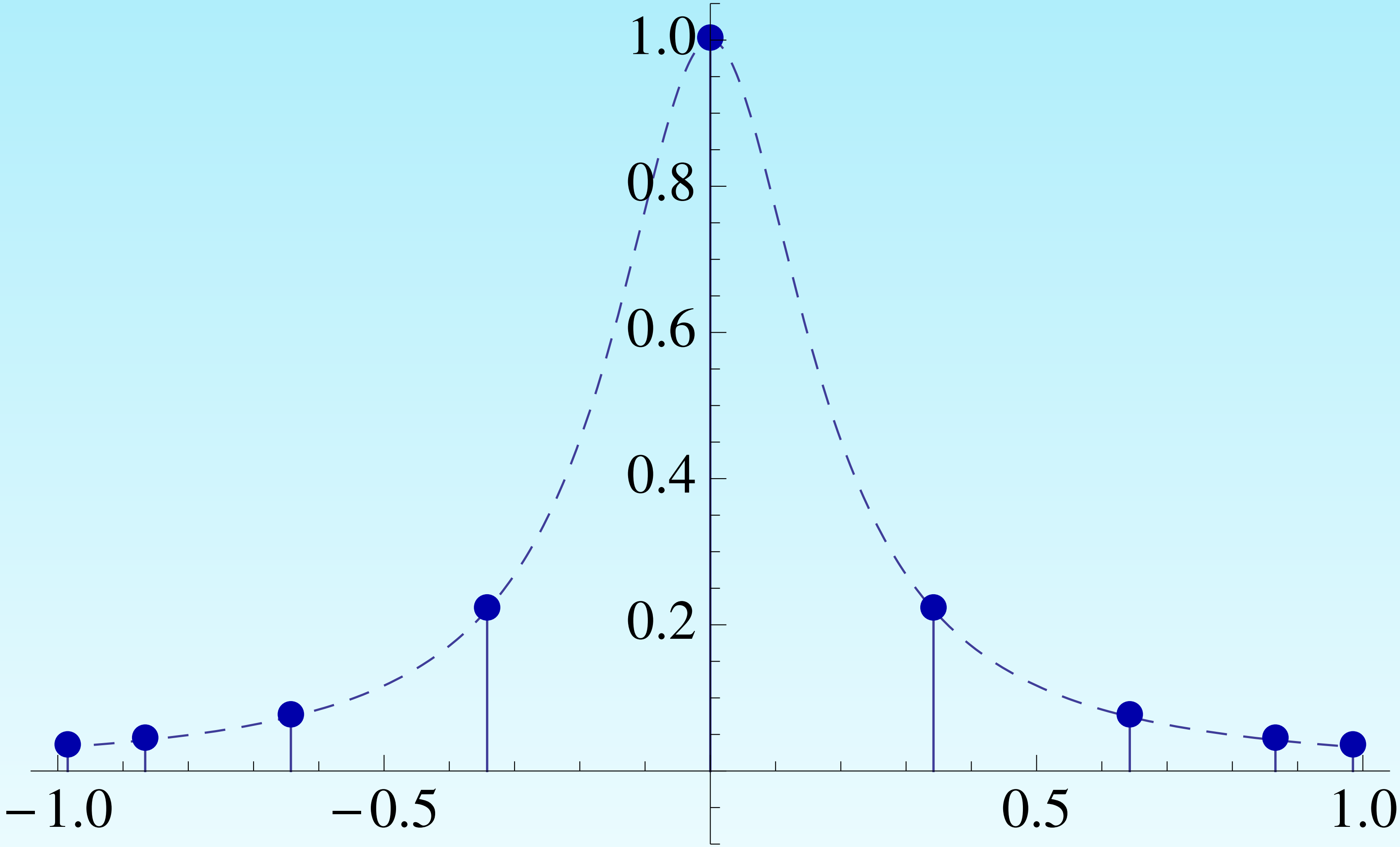
- $n = 3$ $\qquad x_k = -\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$



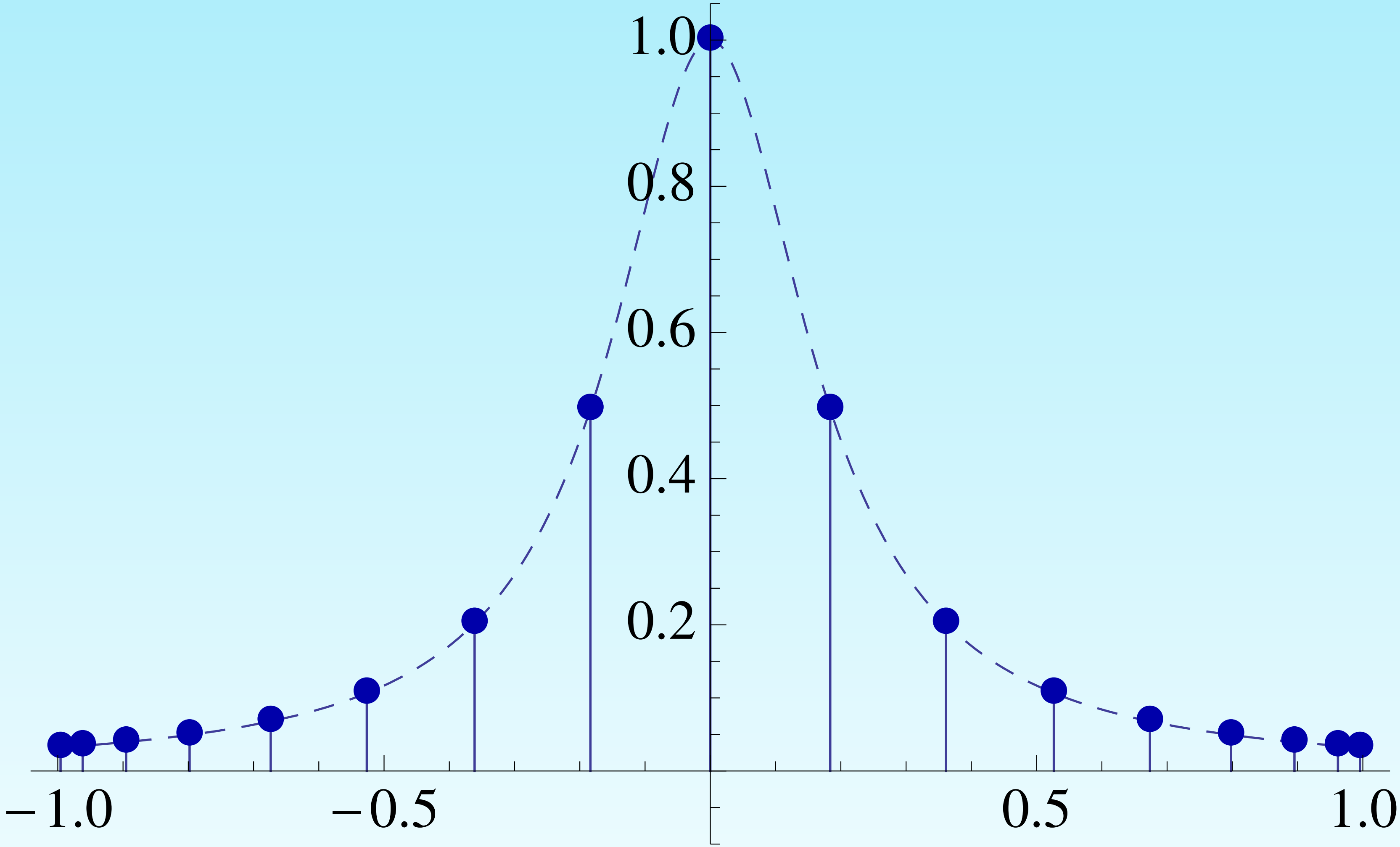
- $n = 5$ $\qquad x_k = -\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$



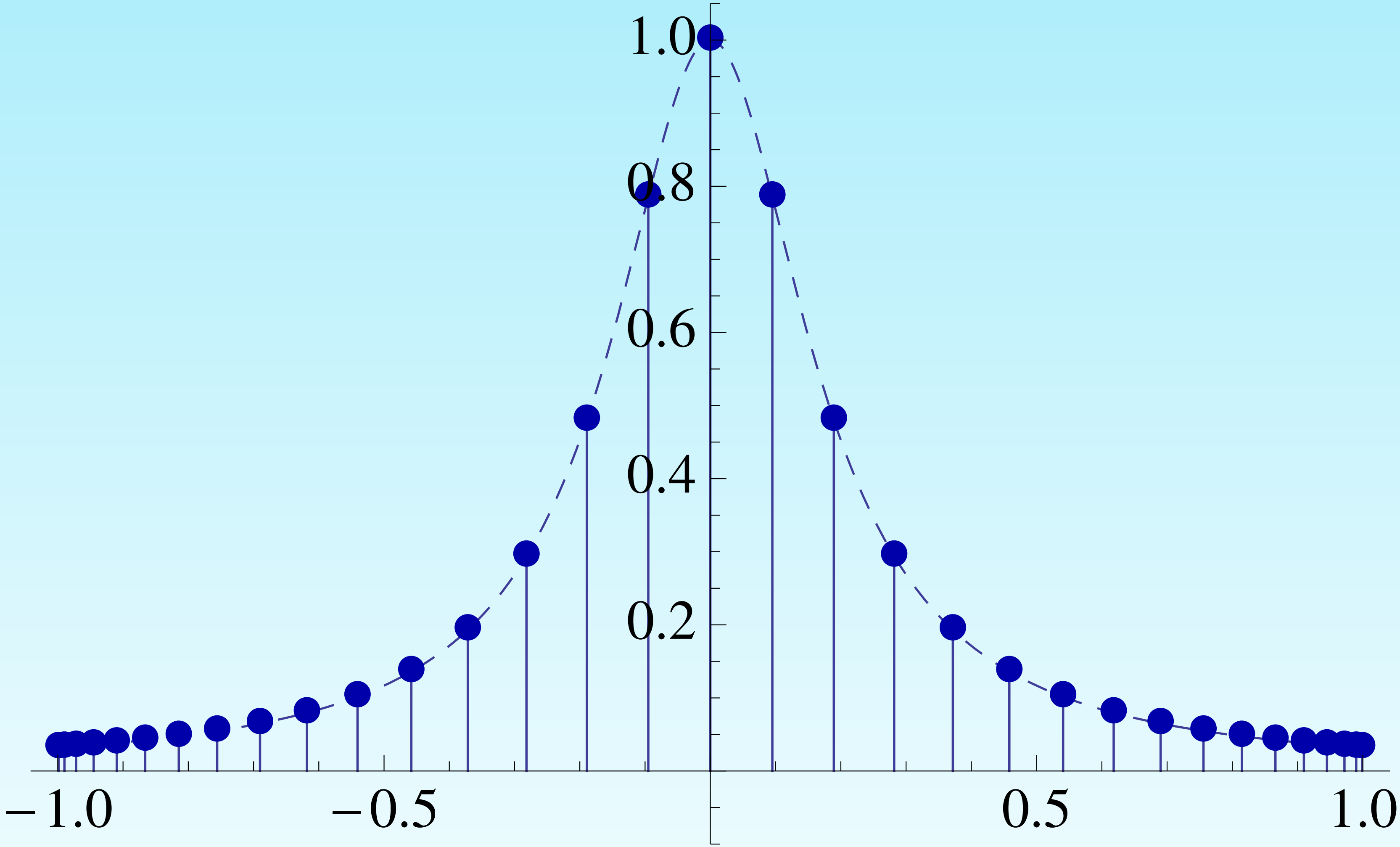
- $n = 9$ $\qquad x_k = -\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$



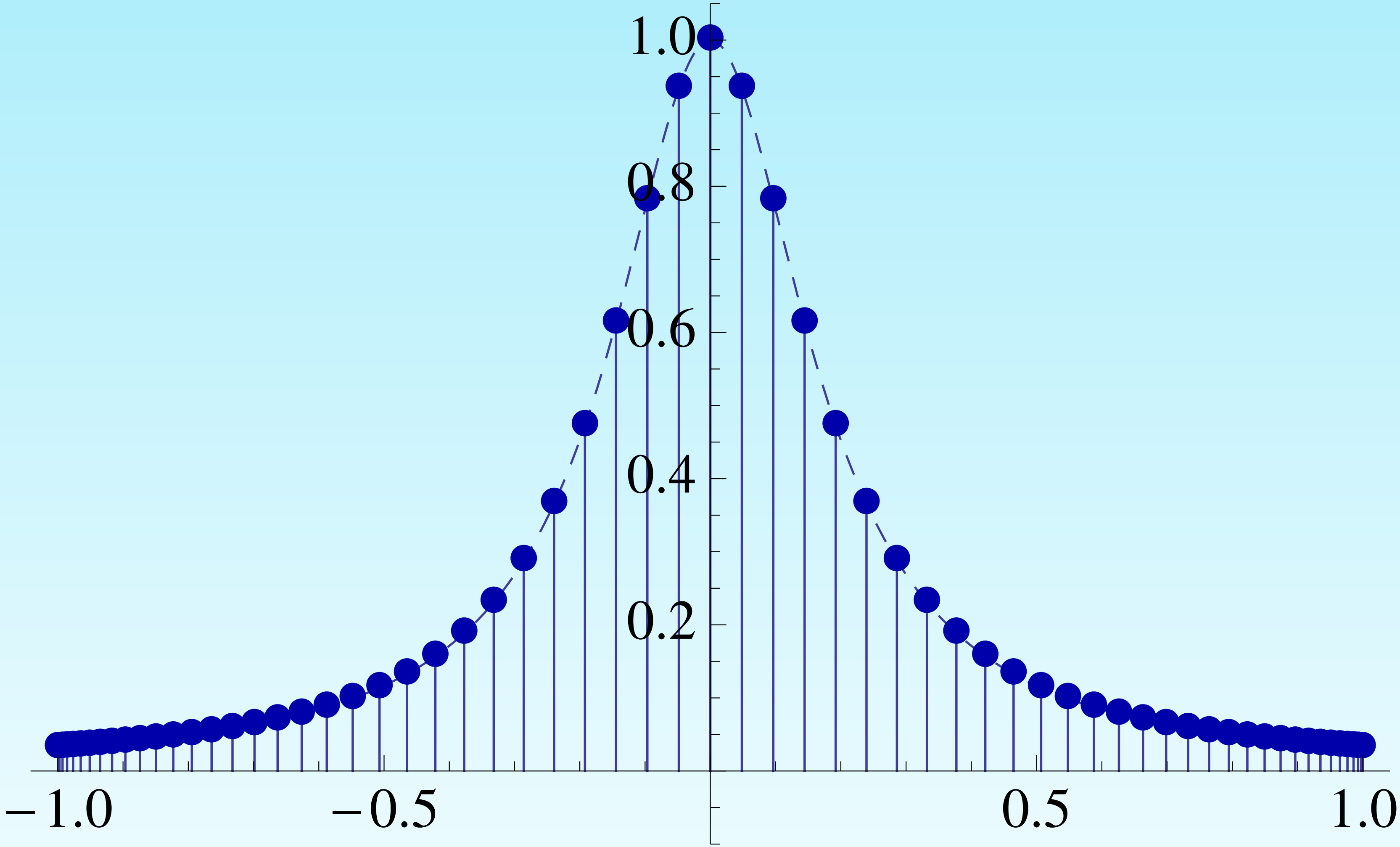
- $n = 17$ $\qquad x_k = -\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$



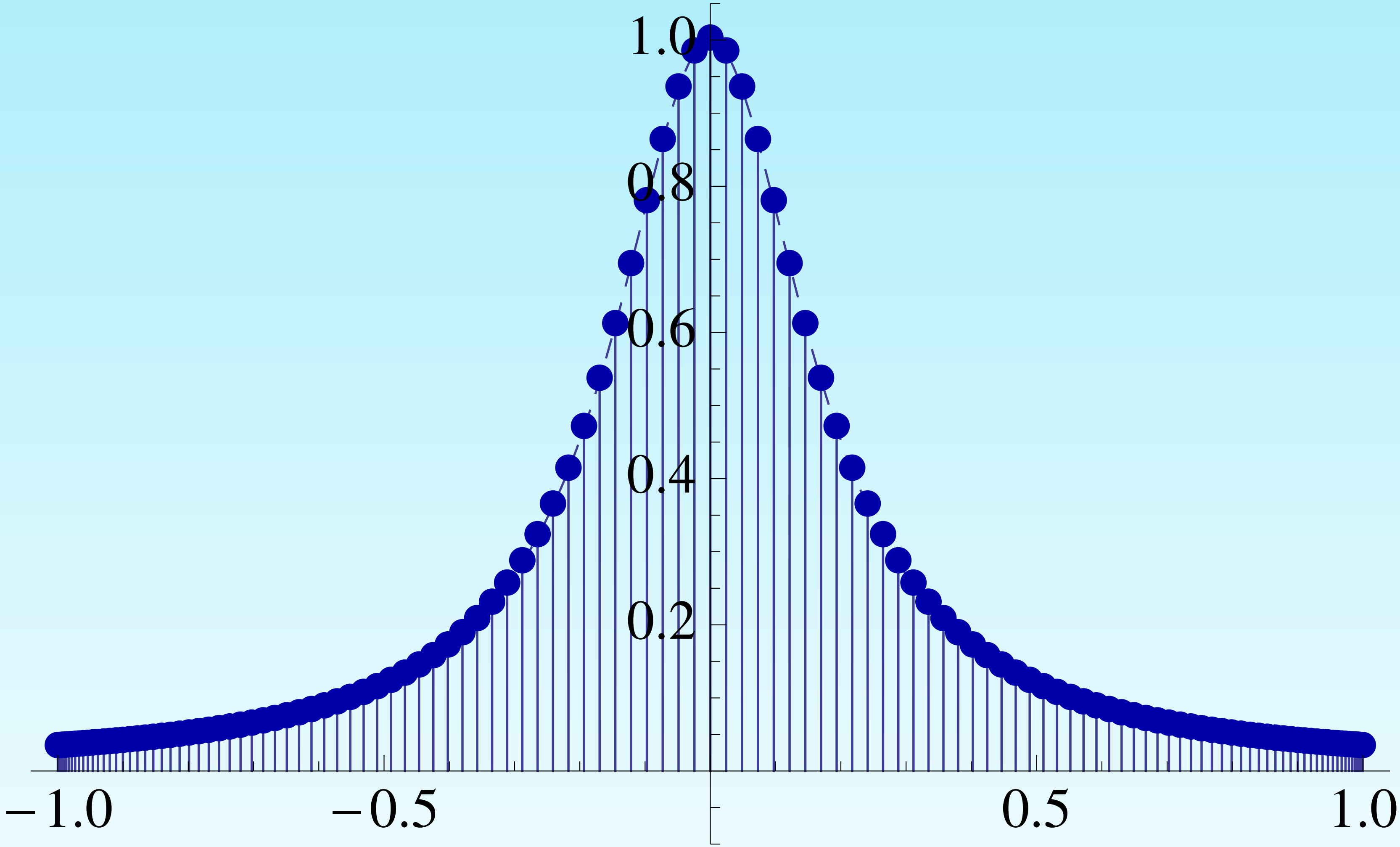
- $n = 33$ $\qquad x_k = -\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$



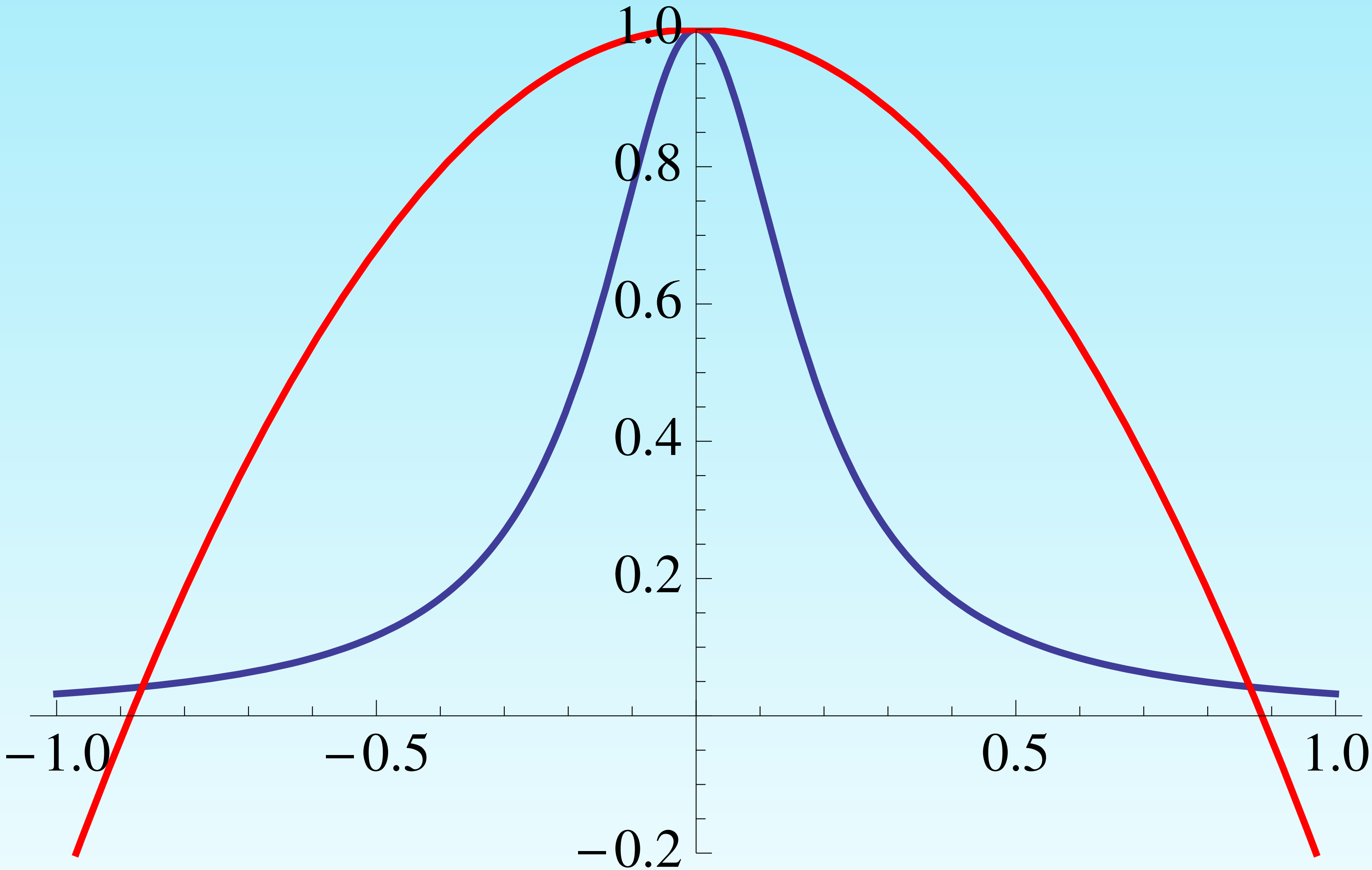
- $n = 65$ $\qquad x_k = -\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$



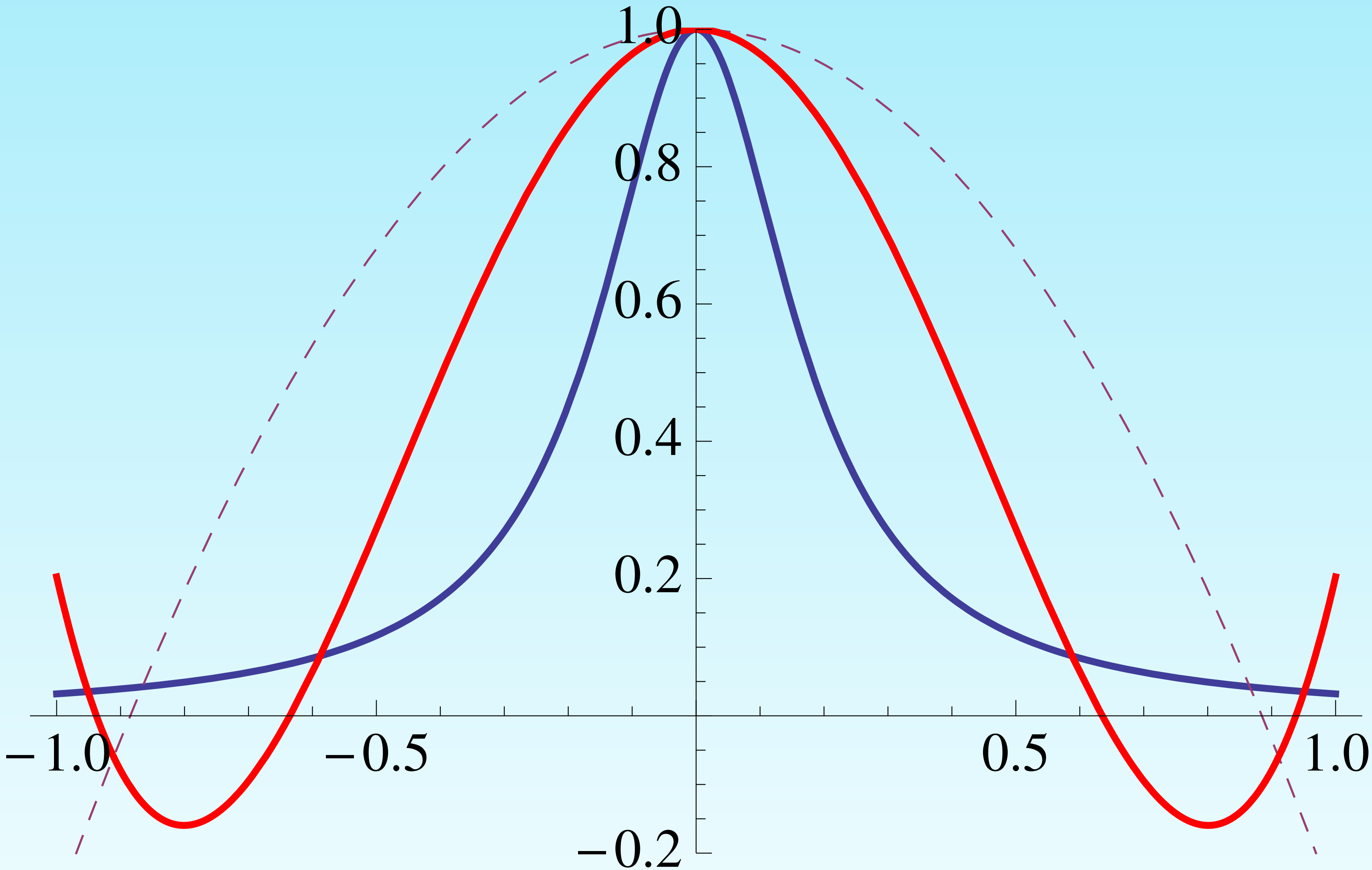
- $n = 129$ $\qquad x_k = -\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$



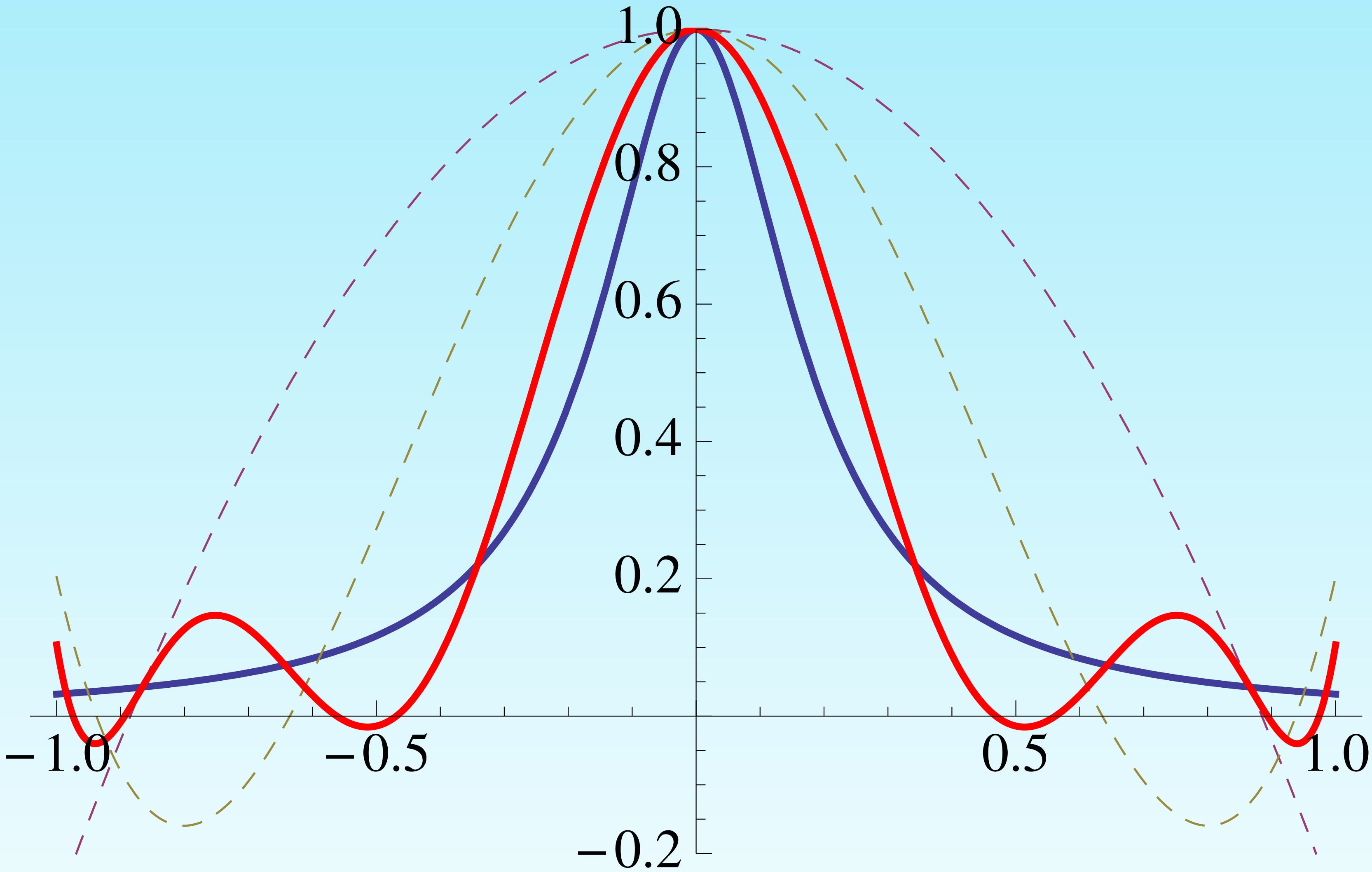
- $n = 3$



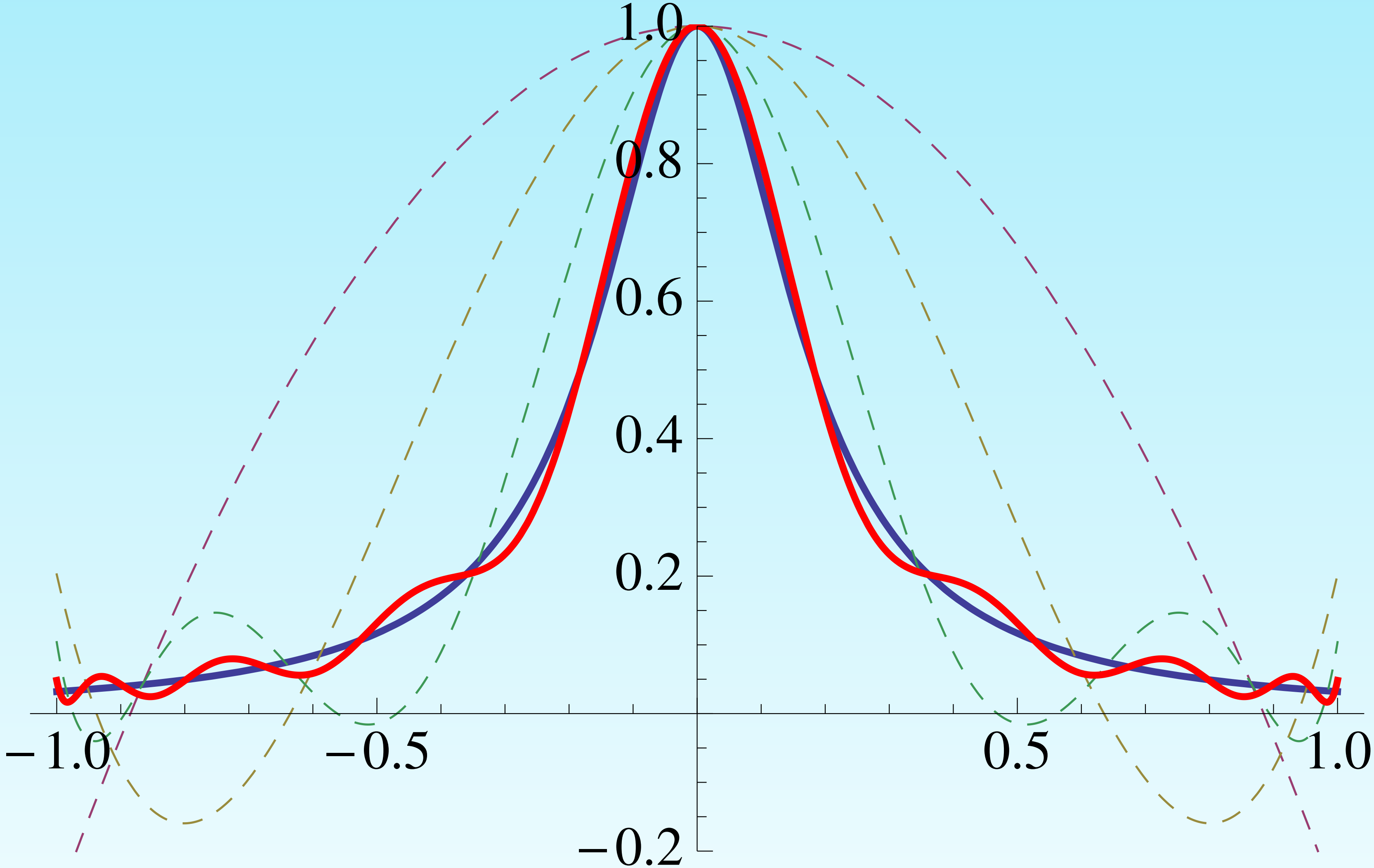
- $n = 5$



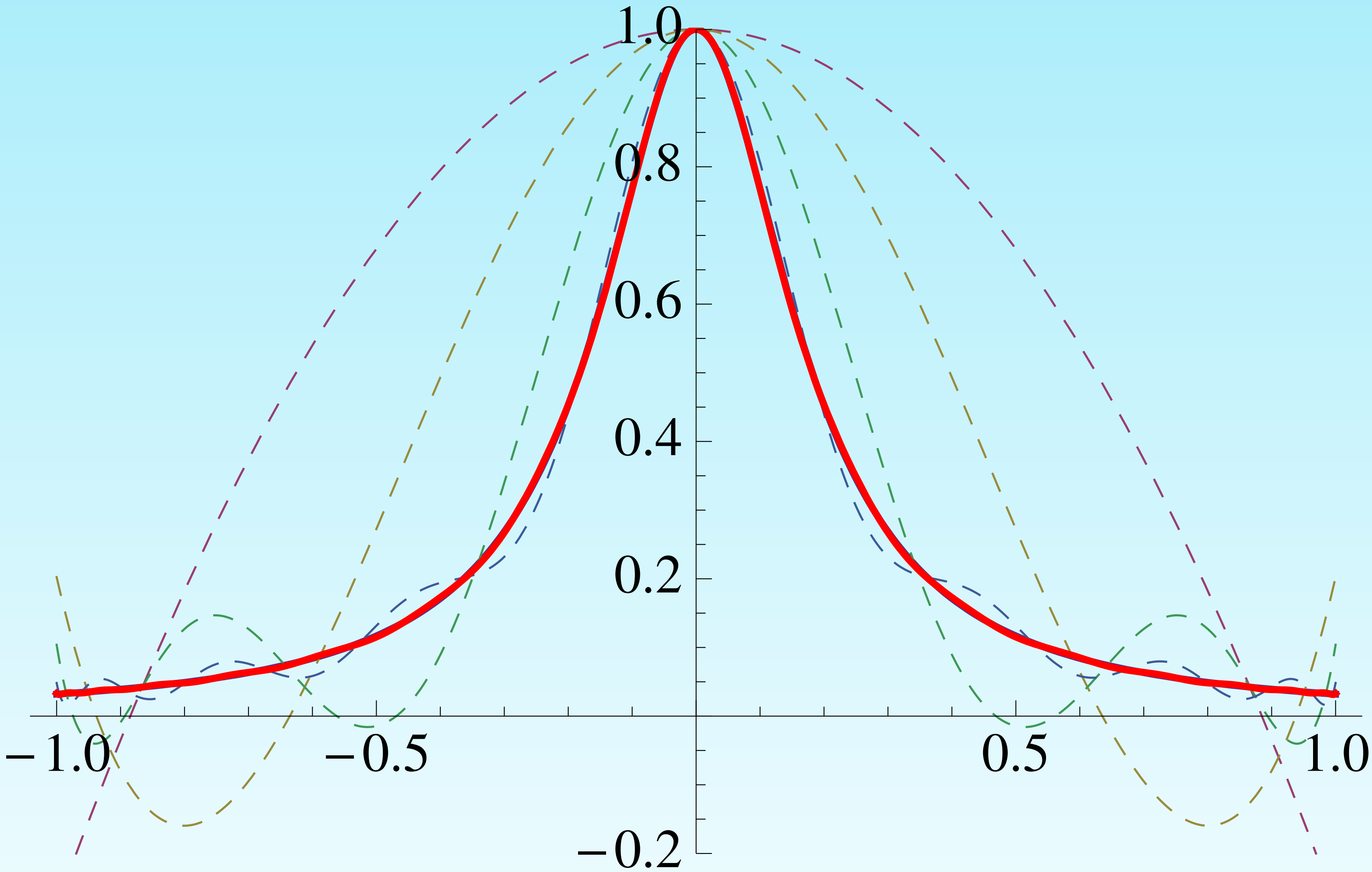
- $n = 9$



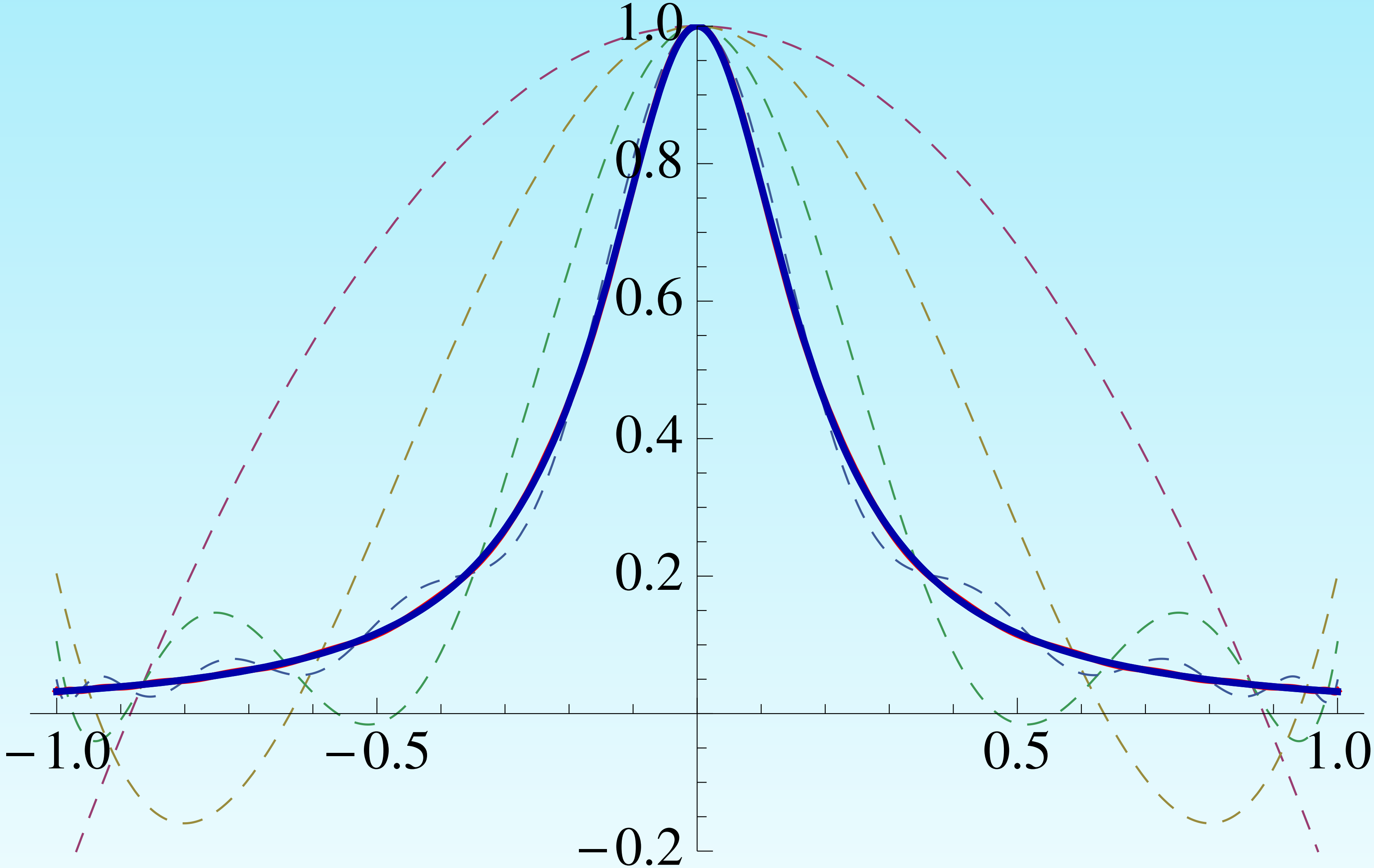
- $n = 17$



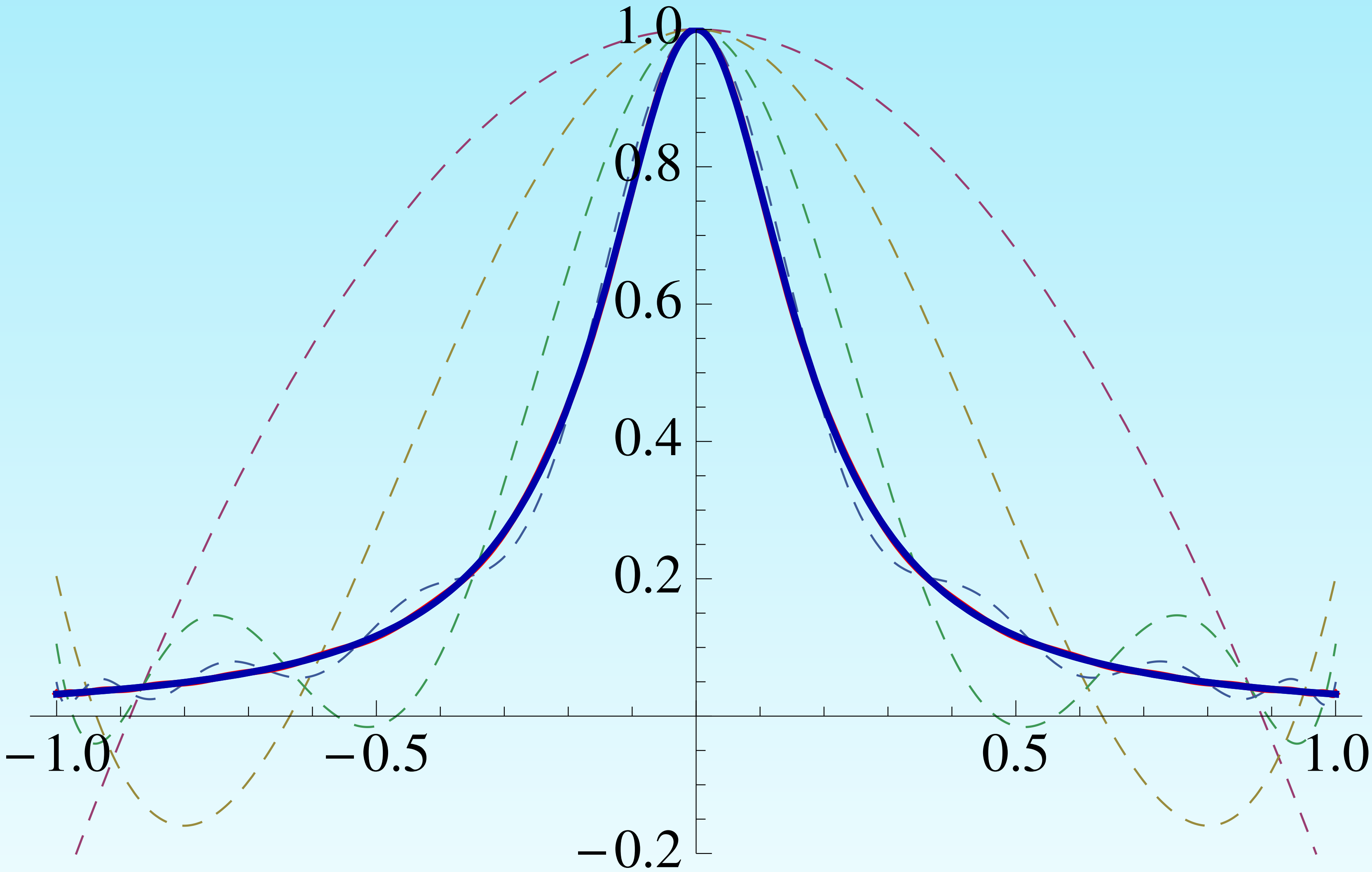
- $n = 33$



- $n = 33$

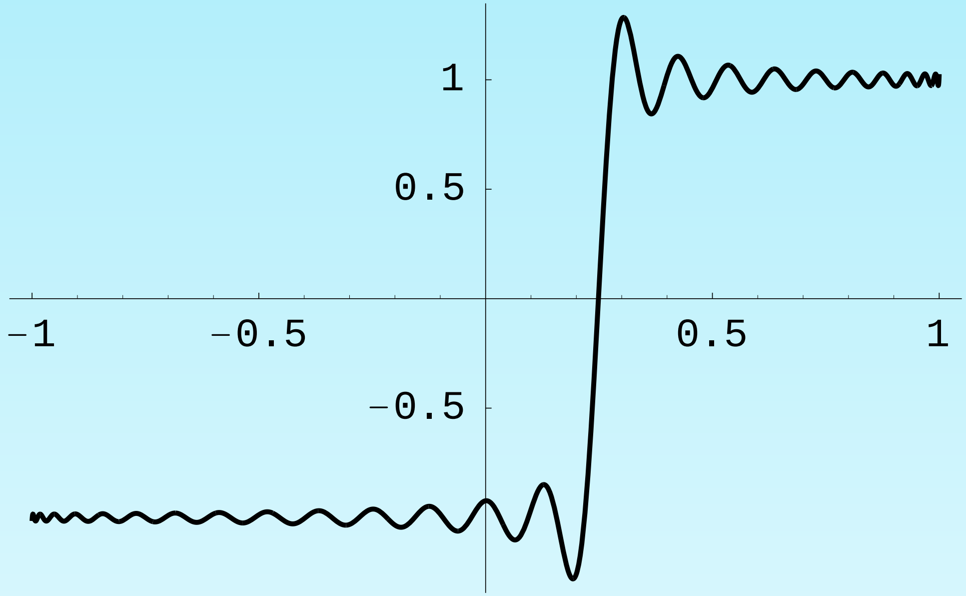


- $n = 33$

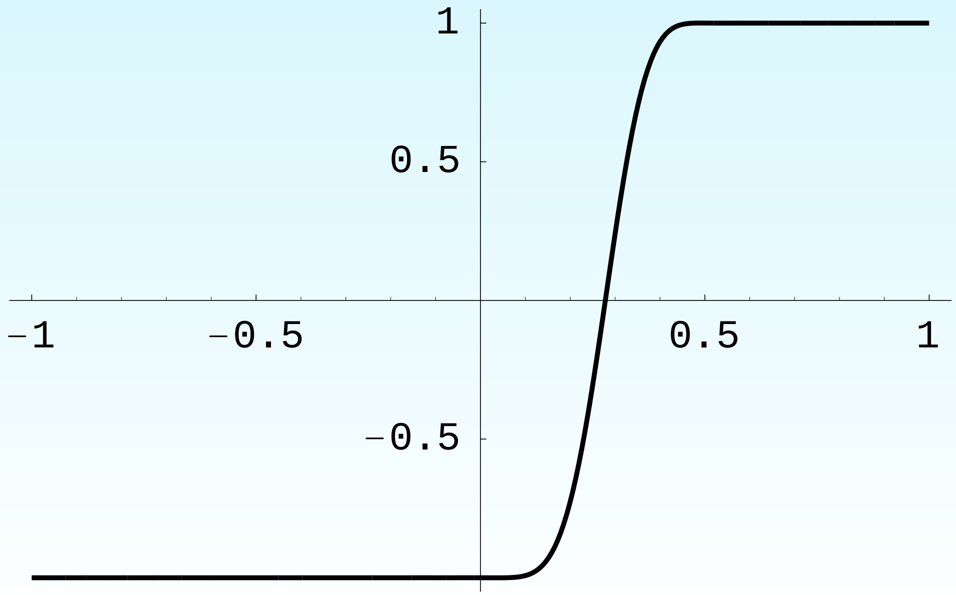


Konvergencija za svako $x \in [-1, 1]$

Standardan i težinski Lagrange-ov polinom za $f(x) = \mathrm{sgn}(x - 1/4)$ na $[-1, 1]$ i $n = 50$ čvorova

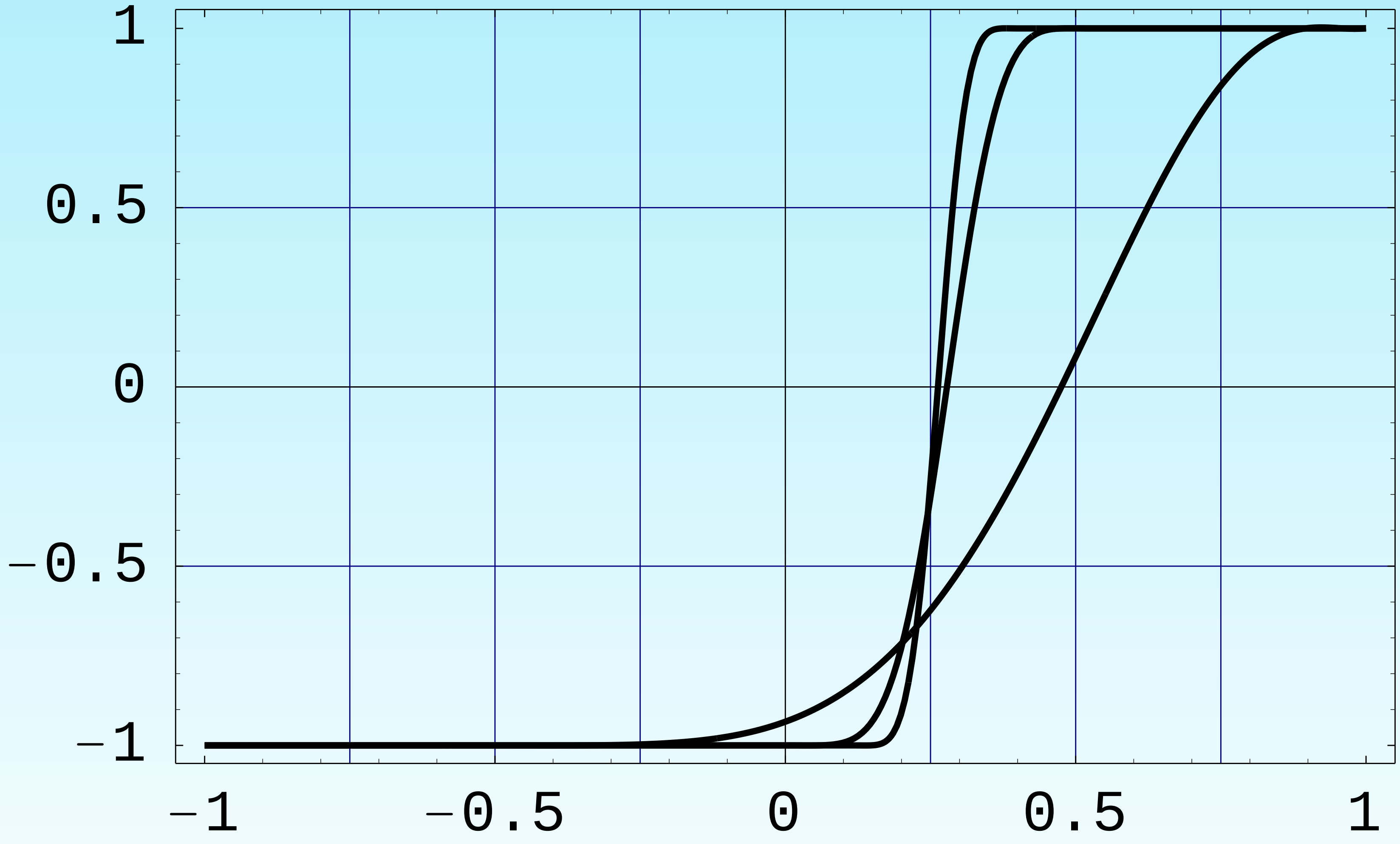


$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



- $n = 10,\ 50,\ 100; \quad w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$

- $n = 10,\ 50,\ 100; \quad w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$



Primer funkcije sa singularitetom u $(-1, 1)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|\sin(x - \frac{1}{2})|}} \log \frac{1}{1 - x^2}$$

Primer funkcije sa singularitetom u $(-1,1)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|\sin(x-\frac{1}{2})|}} \log \frac{1}{1-x^2}$$

$$\lim_{x\to\pm 1} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\pm 1/2} f(x) = +\infty.$$

Primer funkcije sa singularitetom u $(-1,1)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|\sin(x - \frac{1}{2})|}} \log \frac{1}{1 - x^2}$$

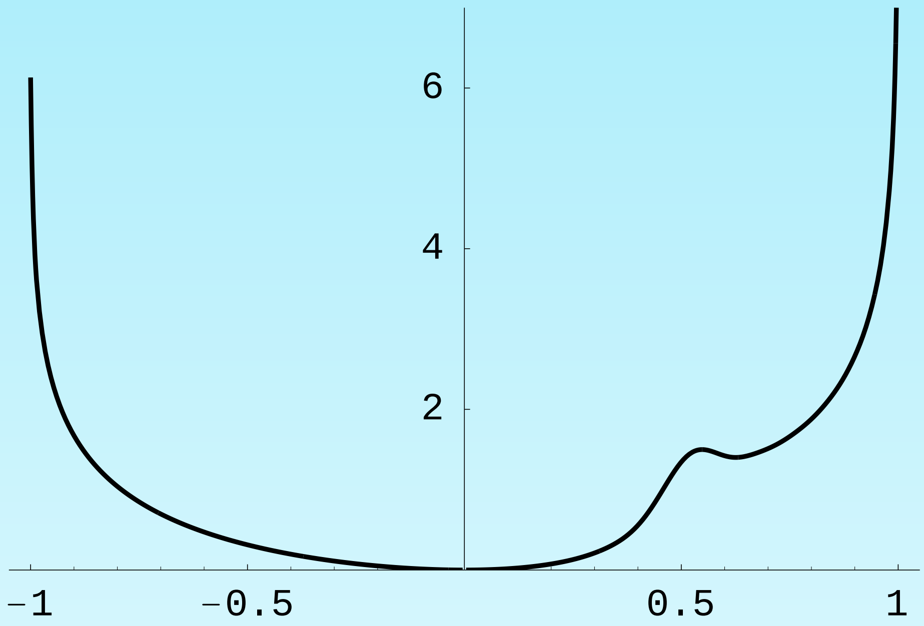
$$\lim_{x \to \pm 1} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pm 1/2} f(x) = +\infty.$$

- Težinska interpolacija sa

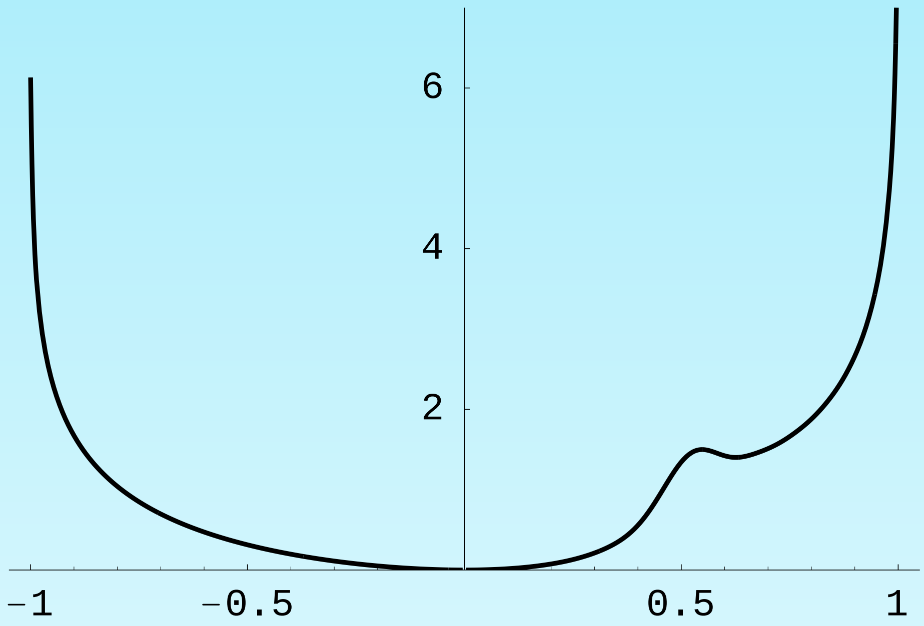
$$u(x) = (1 - x^2)^{3/2} |x - 1/2|^{5/2}.$$

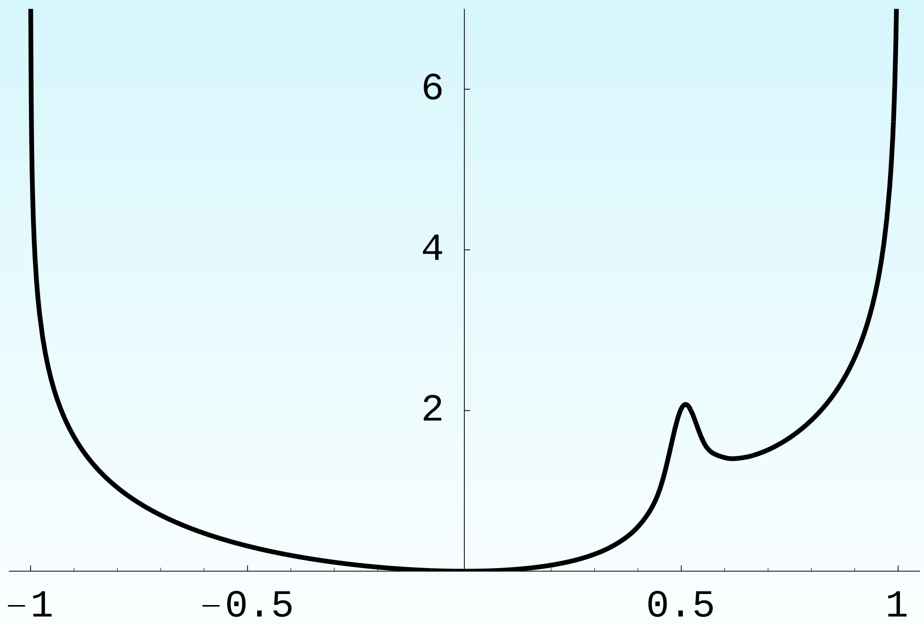
Težinski Lagrange-ov polinom ($n = 50,\ 100$)

Težinski Lagrange-ov polinom ($n = 50,\ 100$)



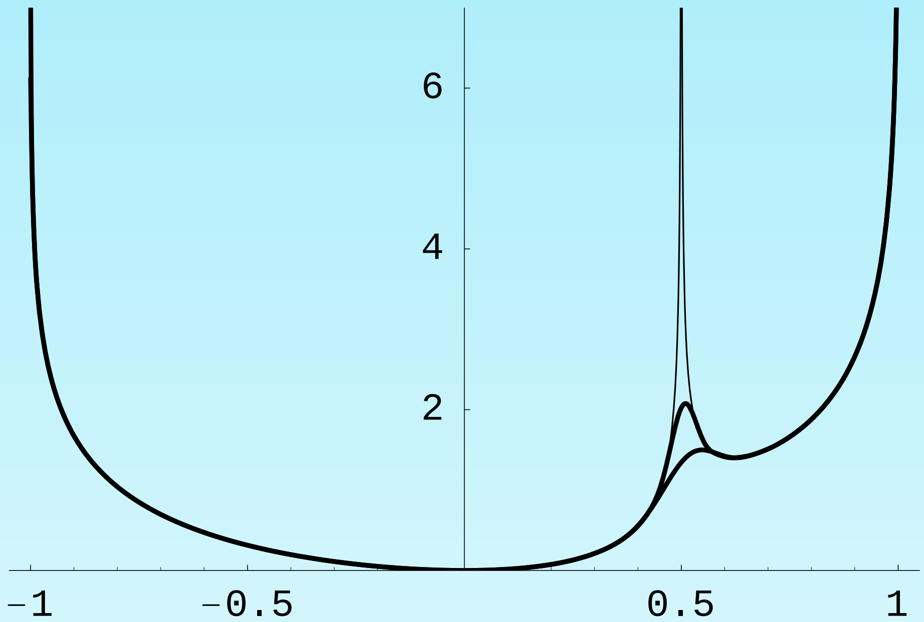
Težinski Lagrange-ov polinom ($n = 50,\ 100$)



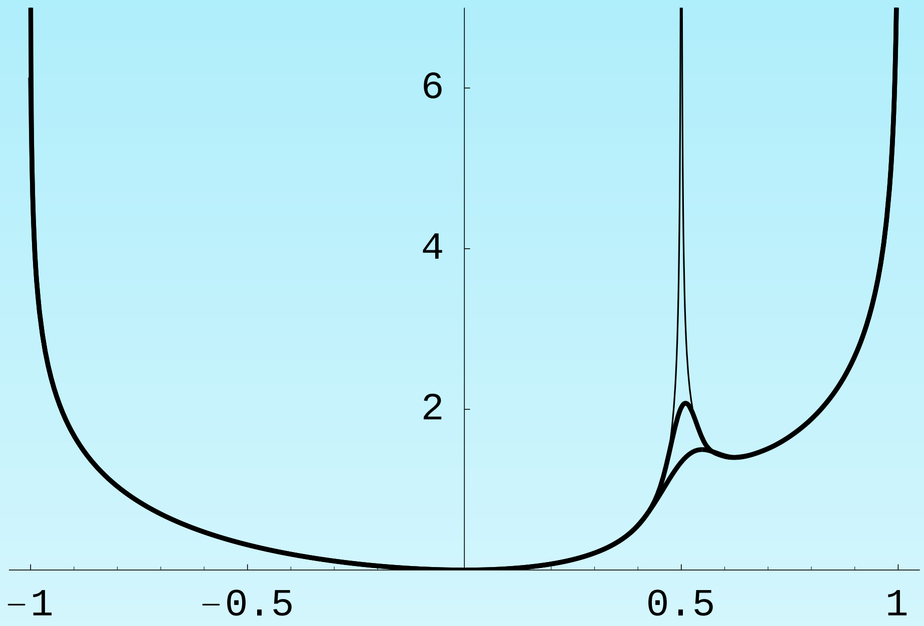


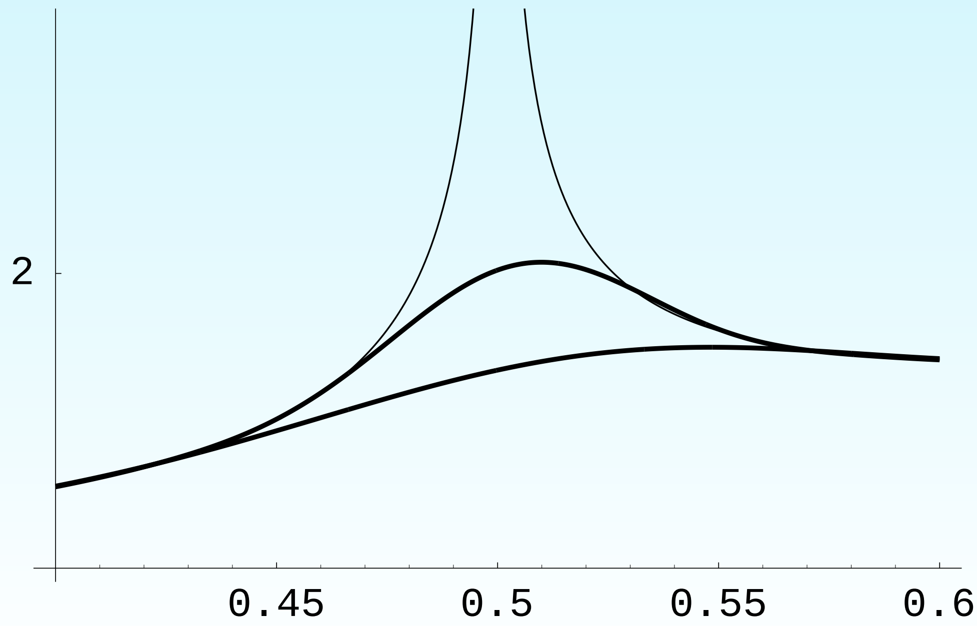
Na istom grafiku ($n = 50,\ 100$)

Na istom grafiku ($n = 50,\ 100$)



Na istom grafiku ($n = 50,\ 100$)





Primer funkcije na $(0, +\infty)$ sa (unutrašnjim) singularitetom

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{sgn}(x - 10).$$

Primer funkcije na $(0, +\infty)$ sa (unutrašnjim) singularitetom

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{sgn}(x - 10).$$

$$v(x) = x^{3/2}\mathrm{e}^{-x/2}|x - 10|^2, \quad w_{5/2}(x) = x^{5/2}\mathrm{e}^{-x}.$$

Primer funkcije na $(0, +\infty)$ sa (unutrašnjim) singularitetom

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{\sqrt{x}} \operatorname{sgn}(x - 10).$$

$$v(x) = x^{3/2}\mathrm{e}^{-x/2}|x - 10|^2, \quad w_{5/2}(x) = x^{5/2}\mathrm{e}^{-x}.$$

- Težinski interpolacioni polinom $L_{n+1}(w_{5/2}; x)$ je prikazan za $n = 50, 100, 200, 300$

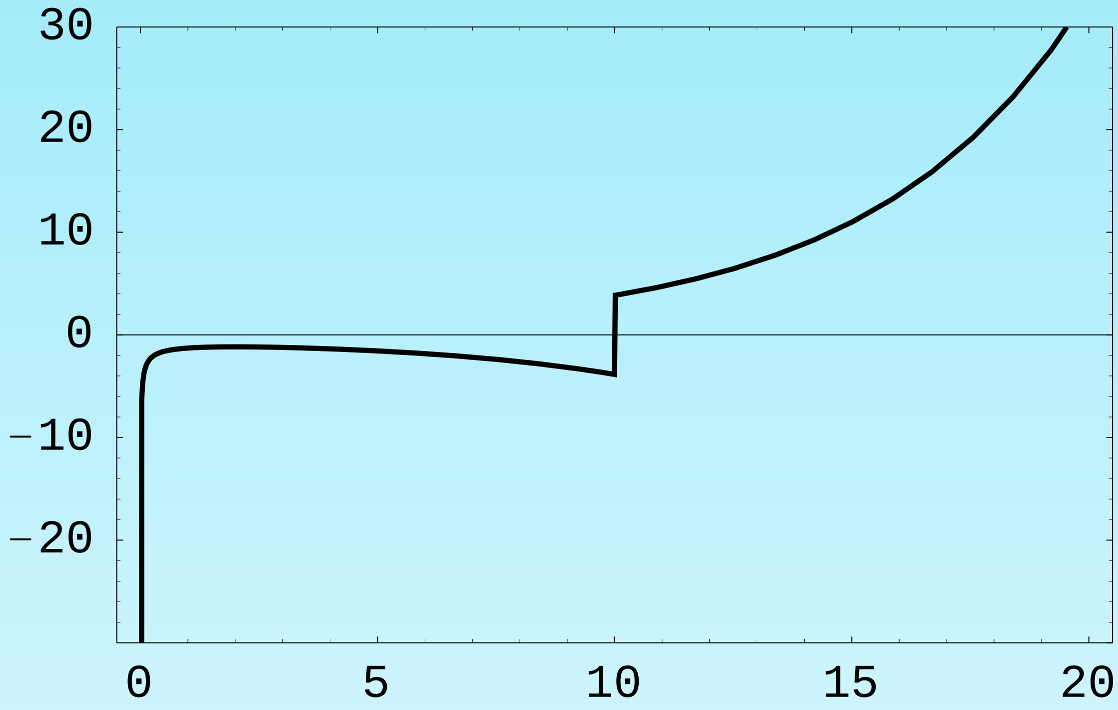
Primer funkcije na $(0, +\infty)$ sa (unutrašnjim) singularitetom

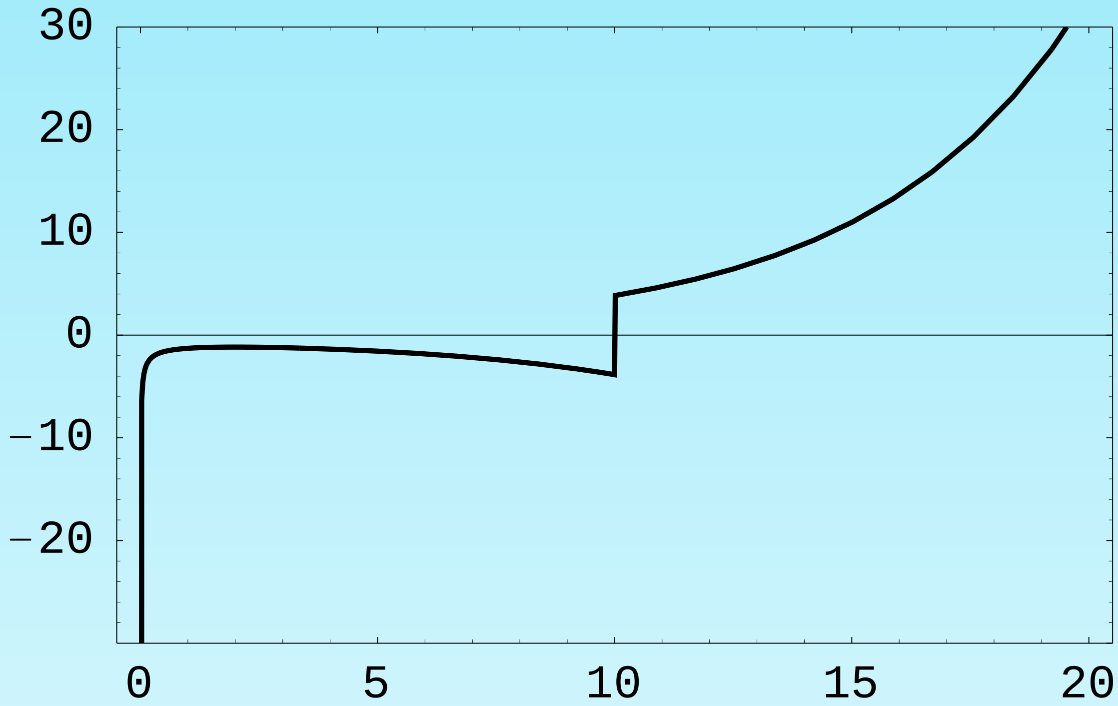
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{\sqrt{x}} \operatorname{sgn}(x - 10).$$

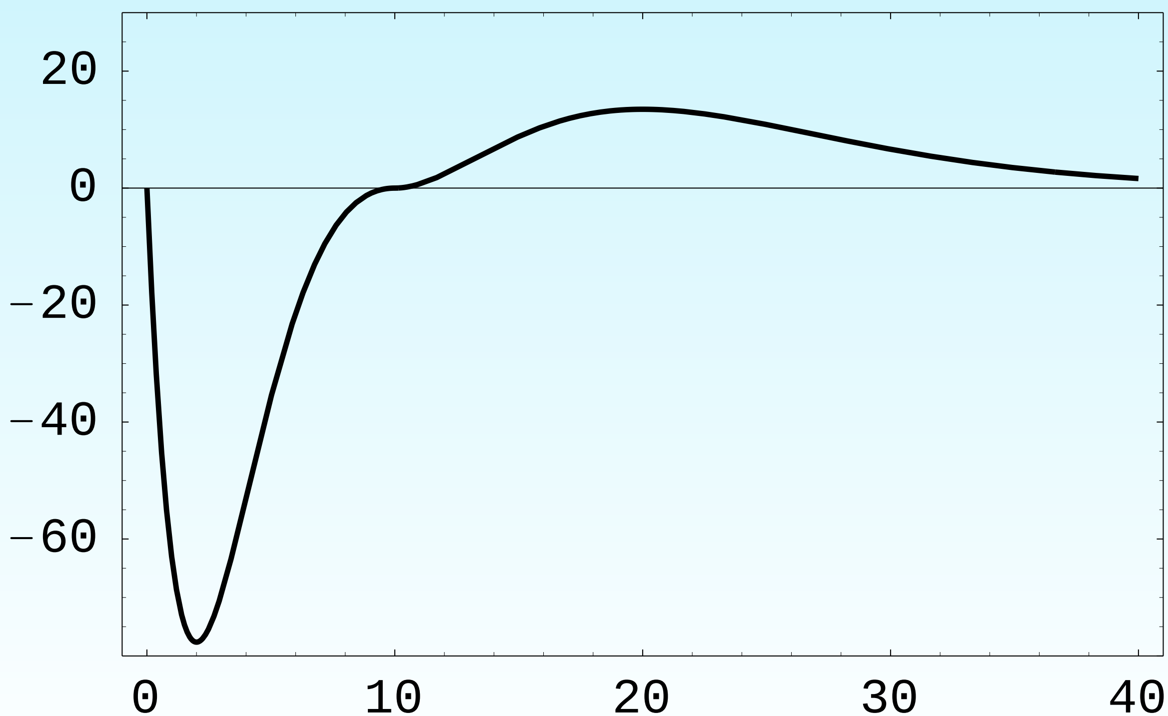
$$v(x) = x^{3/2}\mathrm{e}^{-x/2}|x - 10|^2, \quad w_{5/2}(x) = x^{5/2}\mathrm{e}^{-x}.$$

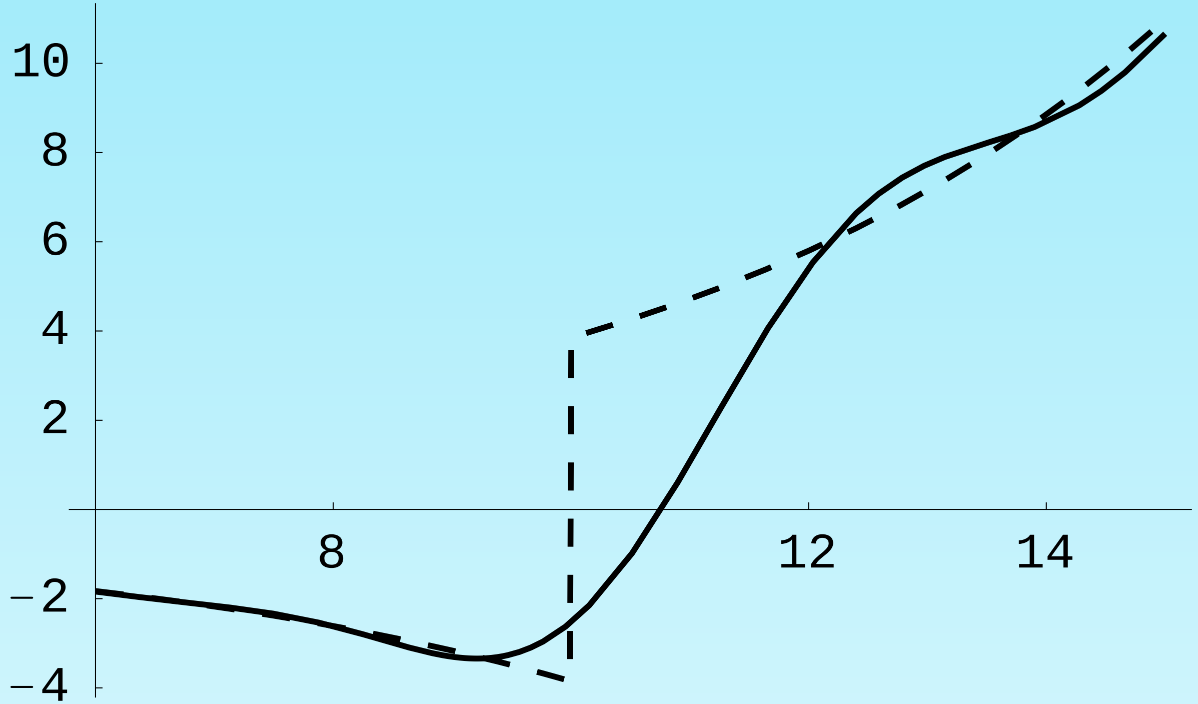
- Težinski interpolacioni polinom $L_{n+1}(w_{5/2}; x)$ je prikazan za $n = 50, 100, 200, 300$

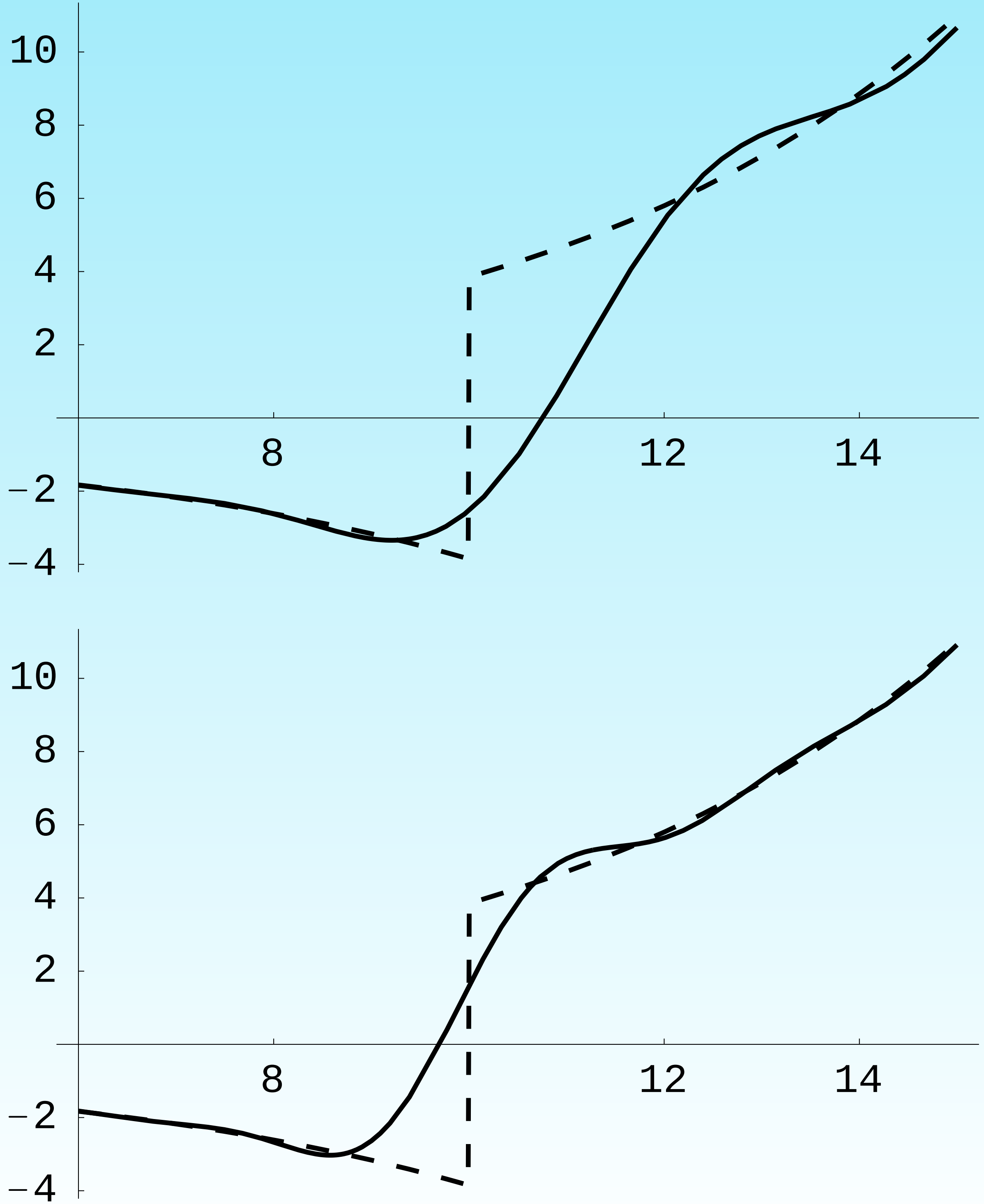
  na segmentima (a) $[6, 5]$ i (b) $[20, 40]$.

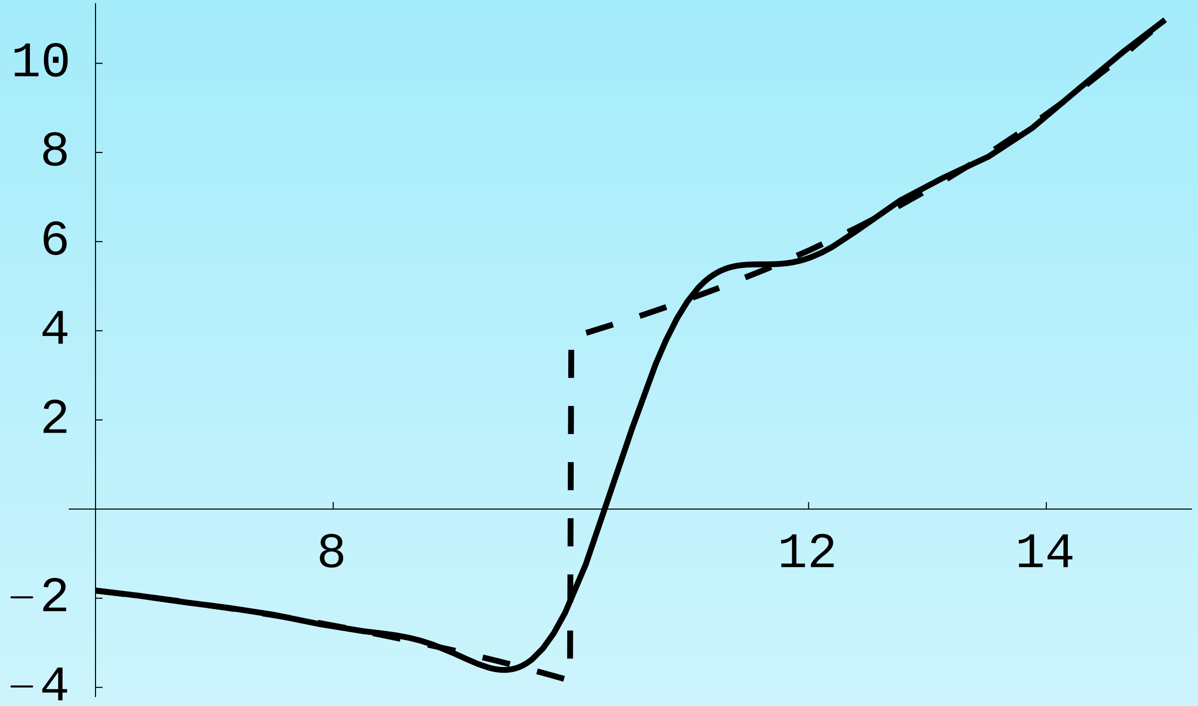

30
20
10
0
−10
−20
0
5
10
15
20

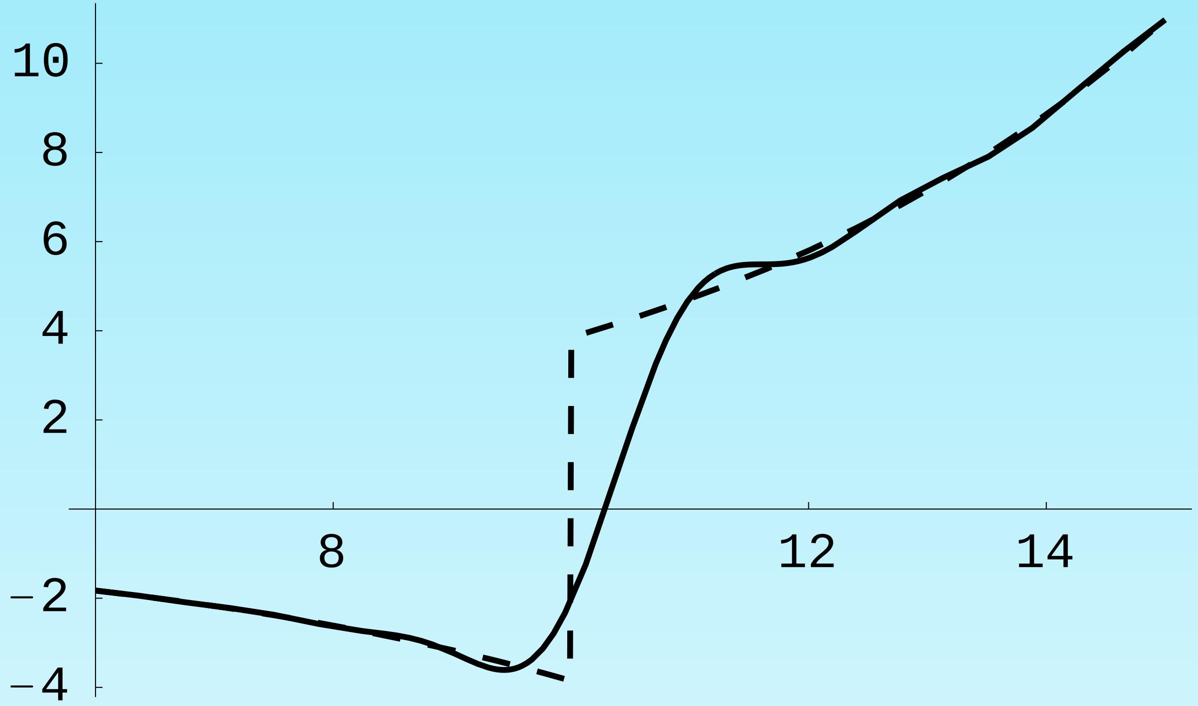

30
20
10
0
−10
−20
0
5
10
15
20

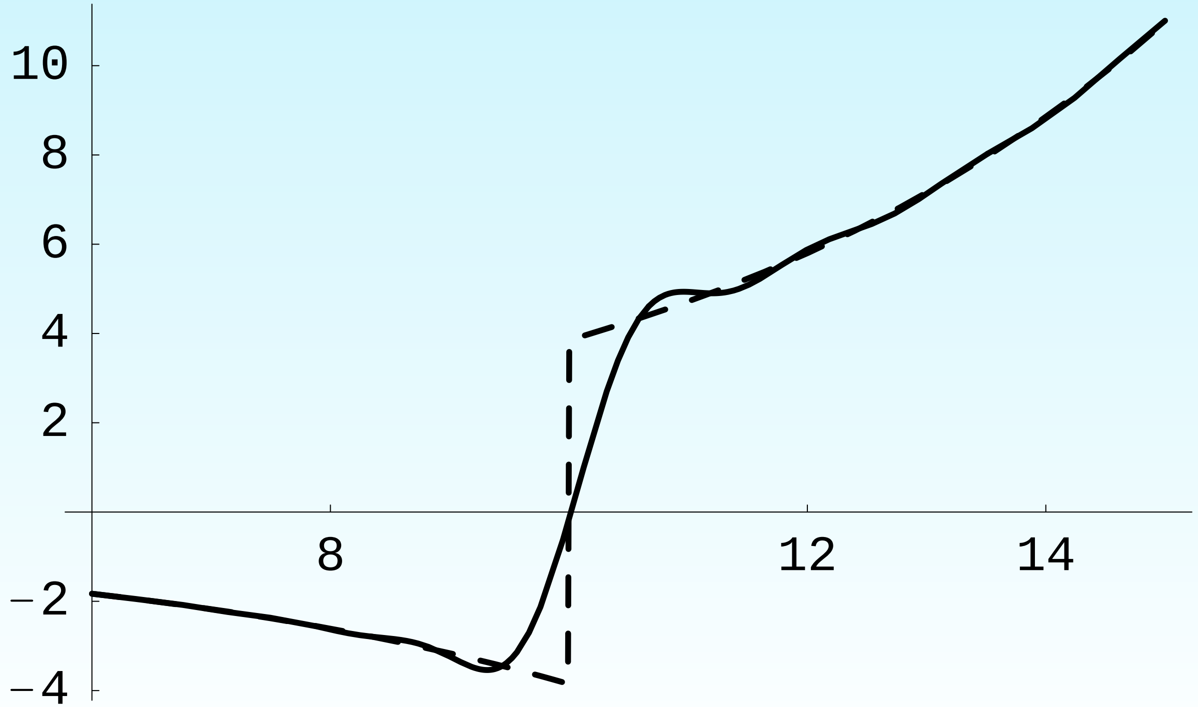

20
0
−20
−40
−60
0
10
20
30
40

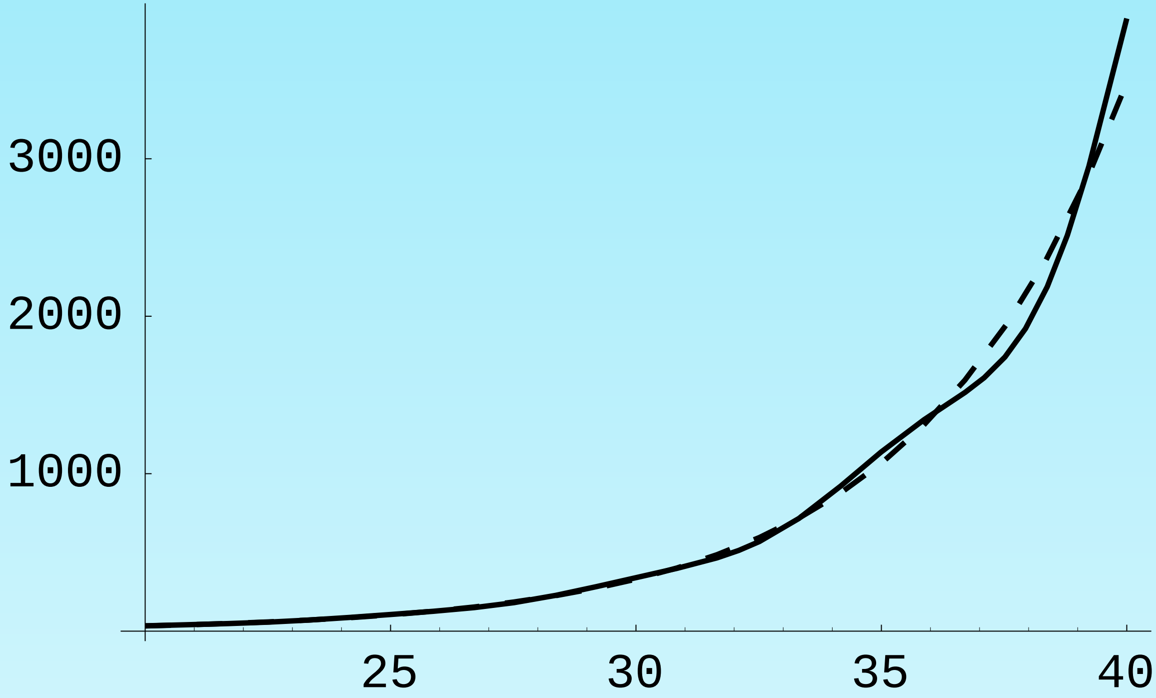

10
8
6
4
2
−2
−4
8
12
14


10
8
6
4
2
−2
−4
8
12
14
10
8
6
4
2
−2
−4
8
12
14

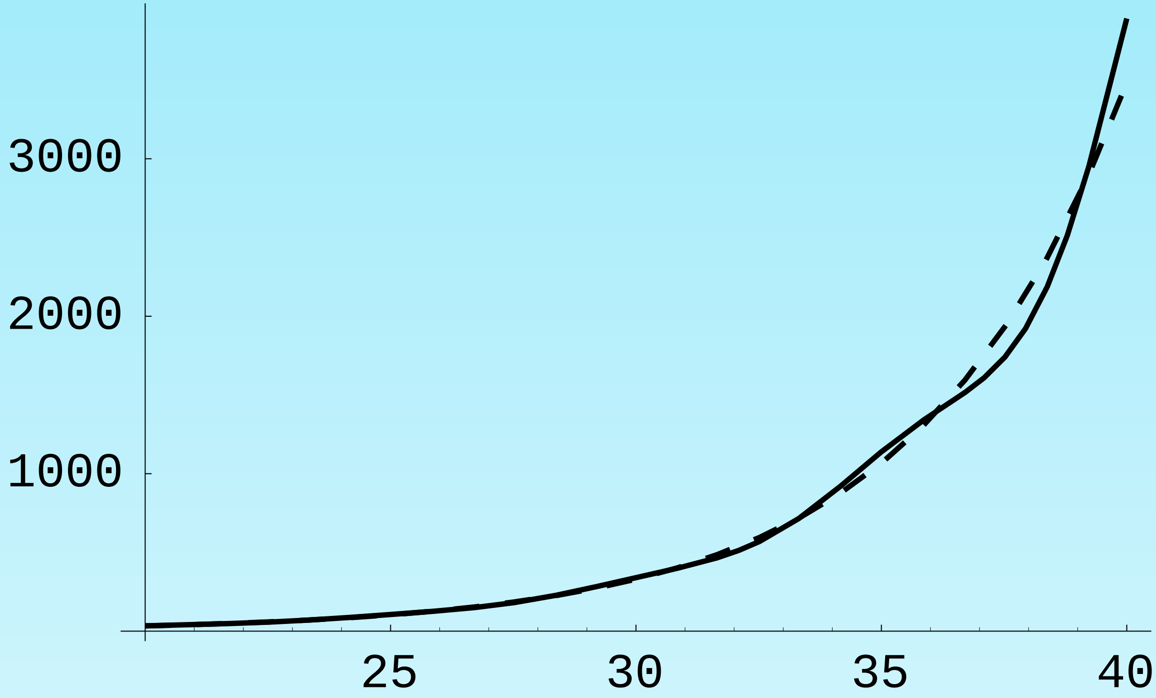

10
8
6
4
2
−2
−4
8
12
14

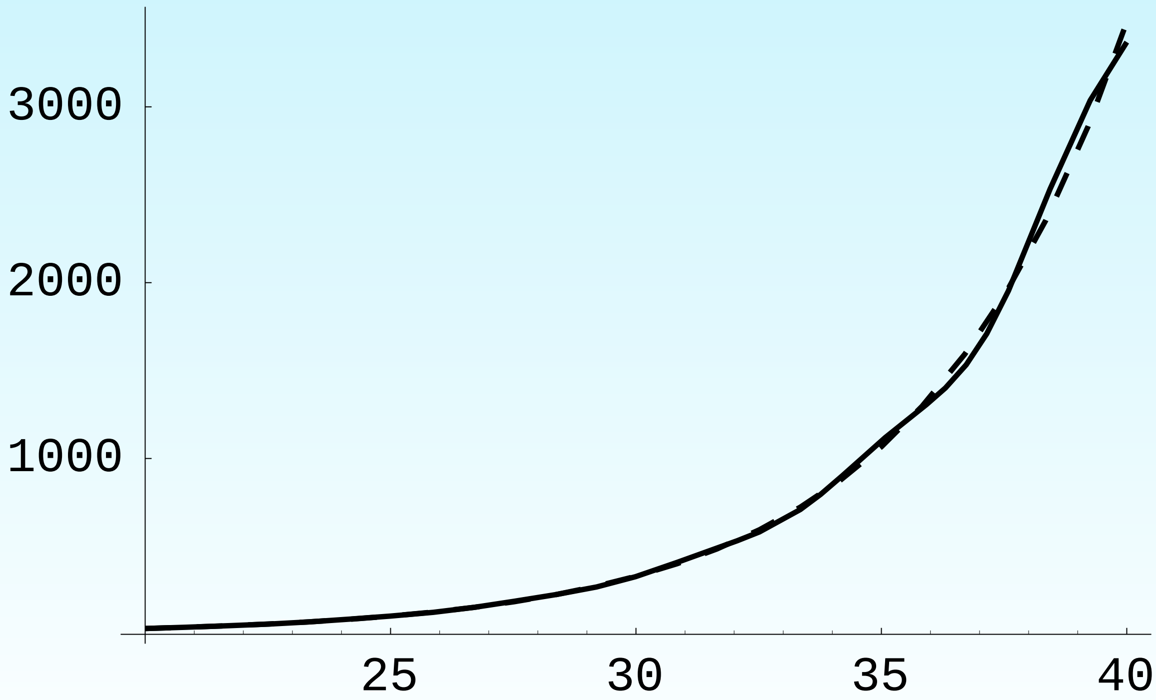

10
8
6
4
2
8
12
14
−2
−4


10
8
6
4
2
8
12
14
−2
−4

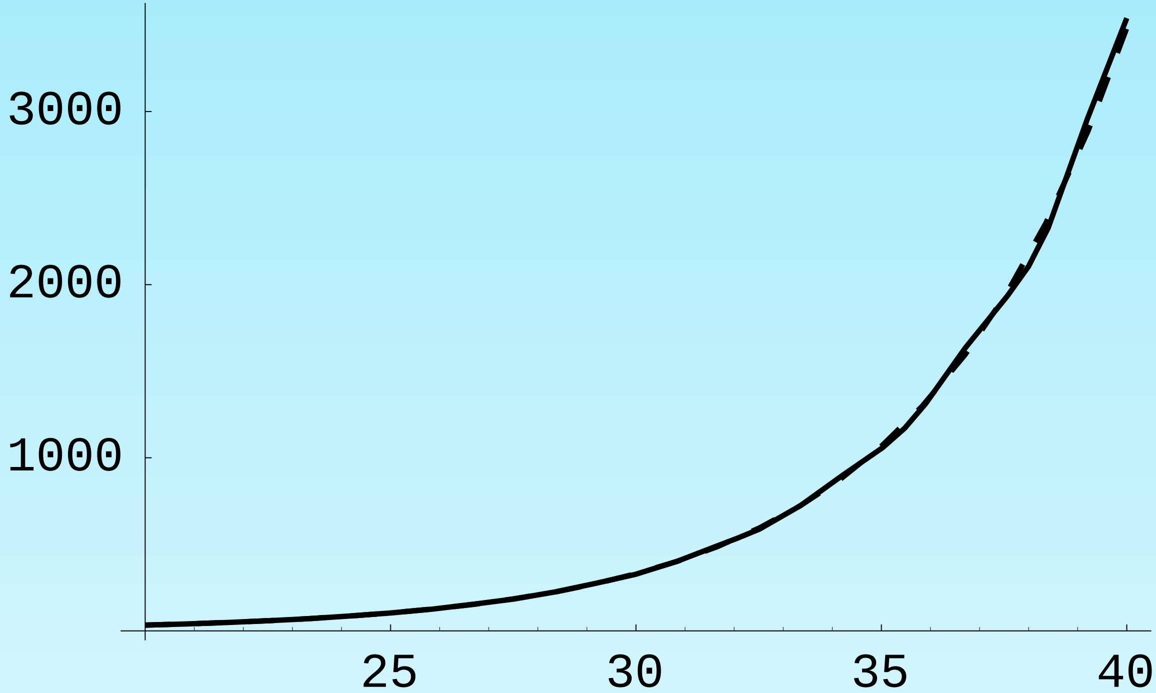


3000
2000
1000
25
30
35
40

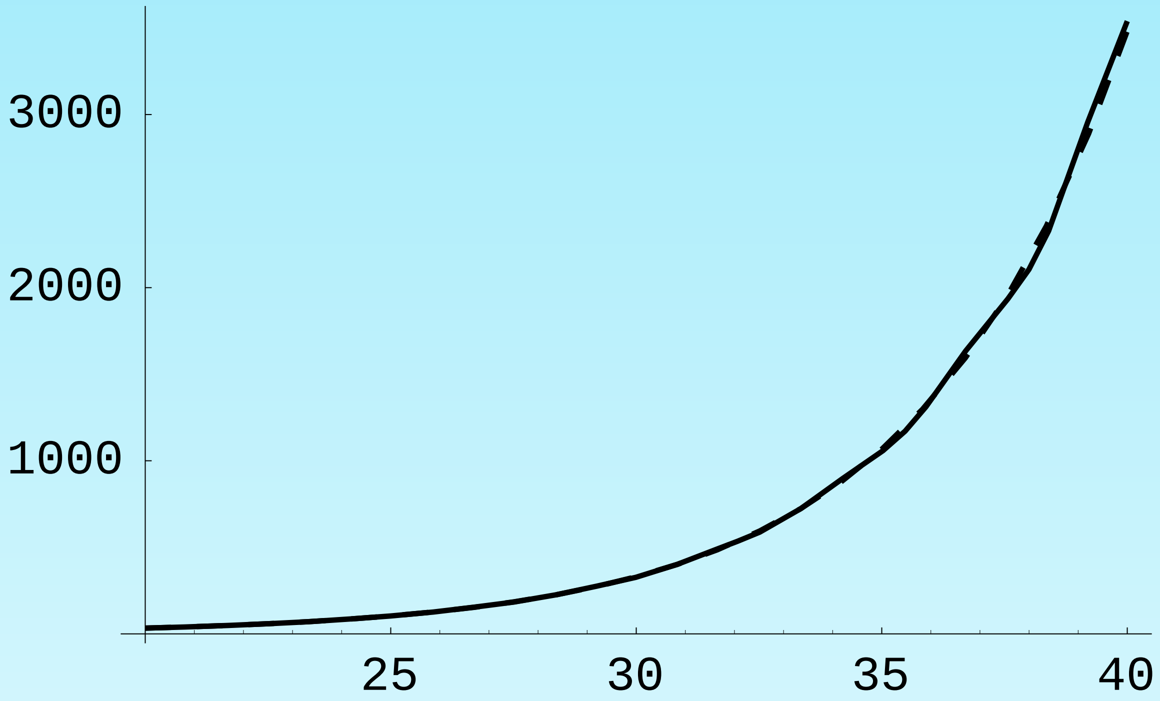

3000
2000
1000
25
30
35
40

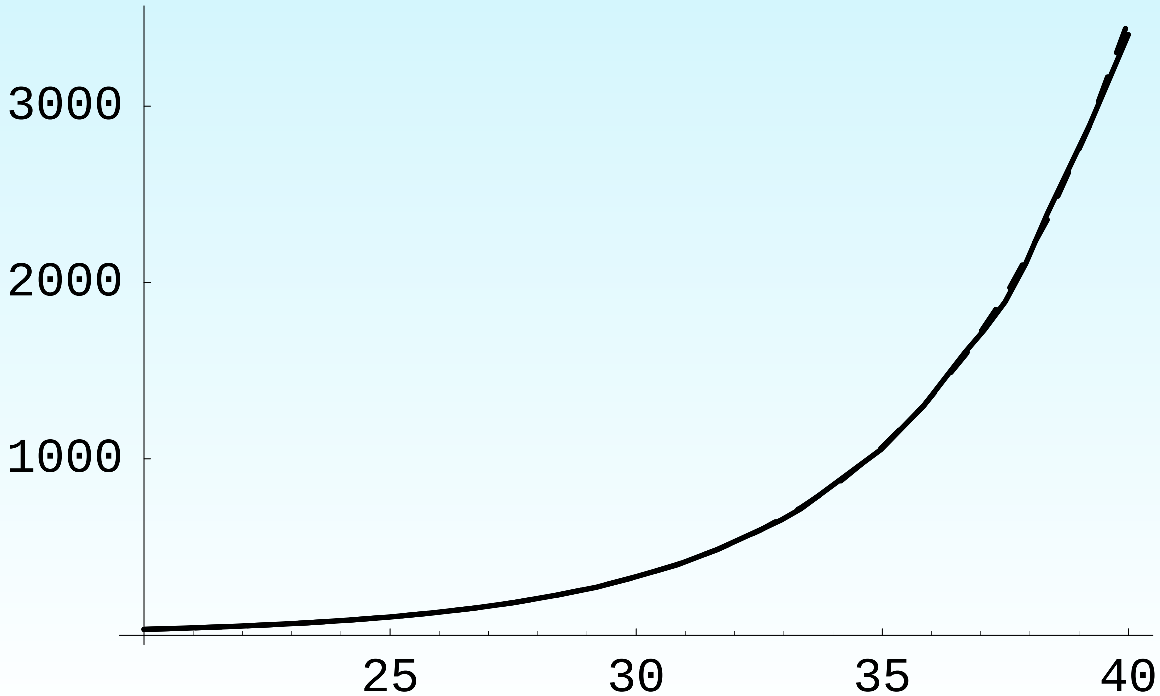

3000
2000
1000
25
30
35
40

$n = 50$, $n = 100$, $n = 200$, and $n = 300$

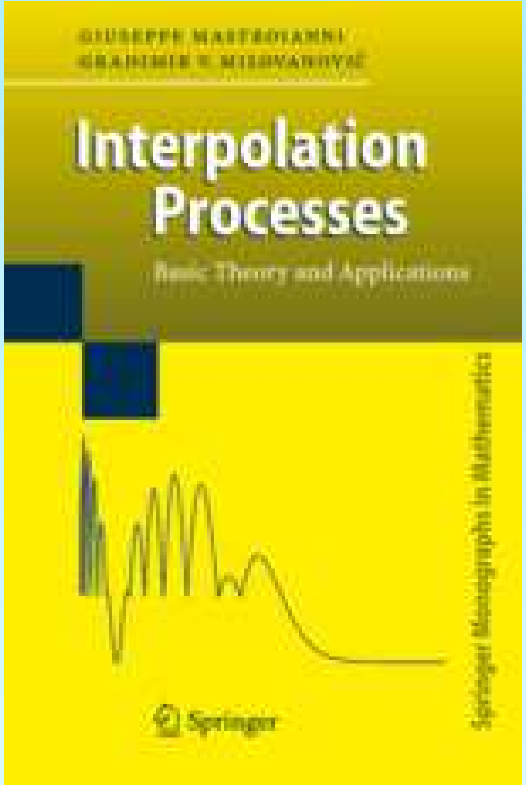


$n = 50$, $n = 100$, $n = 200$, and $n = 300$





Za detalje videti:



HVALA NA PAŽNJI

I STRPLJENJU!