Forma y Simetría: Arte y Ciencia
Congreso de Buenos Aires, 2007

MAS RESULTADOS SOBRE EL NUMERO DE PLATA

VERA M. WINITZKY DE SPINADEL Y LEONARD L. ECHAGÜE

Nombre: Vera M. Winitzky de Spinadel, Dra. en Ciencias Matemáticas (nacida en Buenos Aires, Argentina, 1929).
Dirección: Laboratorio de Matemática y Diseño, Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo (FADU), Universidad de Buenos Aires (UBA), Ciudad Universitaria, 3er. Pabellón, 4to. Piso, lado del río.
E-mail: vspinade@fibertel.com.ar; vwinit@fadu.uba.ar; myd_lab@yahoo.com.ar
Areas de interés: procesos no lineales, estructuras fractales y multi-fractales, transición del orden al Caos.
Premios: Premio a la Producción Científica y Tecnológica de la Secretaría de Ciencia y Técnica de la UBA, otorgado en 1993, 1994 y 1995. Incorporada al Ateneo Académico de la Facultad de Ciencias Económicas de la UBA, 2005.
Publicaciones y/o Exhibiciones: Gestión académica de organización de la exhibición: "Fractales: Fronteras entre el Arte y la Matemática", 29 Junio al 24 de Julio del 2000, FADU, UBA.
"The Metallic Means family and forbidden symmetries", International Mathematical Journal, vol. 2, No. 3, pp. 279-288, 2002. ISSN 1311-6797. Referato internacional.
"Symmetry groups in Mathematics, Architecture and Art", Special Issue of the papers presented at the Matomium Euro-Workshop 2002. Edited by the Department of Architecture Sint-Lucas, Bruselas, Bélgica. Symmetry: Art and Science, vol. 2 (new series), Nos. 1-4, pp. 385-403, 2002, ISBN 1447-607X. Referato internacional.
"Geometría Fractal", libro en colaboración con Jorge G. Perera y Jorge H. Perera. Edit. Nobuko S. A., 2003, ISBN 987-1135-20-3. 2da.. edición ampliada y corregida. Edit. Nueva Librería S.R.L., 2007, ISBN 978-987-1104-45-1.
"From the Golden Mean to Chaos", libro publicado por Edit. Nueva Librería. Buenos Aires, Argentina, 1998, ISBN 950-43-9329-1. 2da. edición de Edit. Nobuko S. A., 2004, ISBN 987-1135-48-3. 3ra. edición ampliada y corregida, en prensa, Edit. Nueva Librería S.R.L., 2007.

Nombre: Leonard Lucas Echagüe, Dr. en Diseño Gráfico (nacido en Rio de Janeiro, Brasil, 1955).
Dirección: Museo Interactivo de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires (UBA), Ciudad Universitaria, 1er. Pabellón, 2o. Piso.
E-mail: lechague@dm.uba.ar Web-page: http:// www.dm.uba.ar -- web-link a MateUBA Museum.
Areas de interés: dispositivos de visualización matemática por medios informáticos.
Exhibiciones: Diseño y Dirección del proyecto de instalación del Museo Interactivo de Matemática de la Universidad de Buenos Aires, realizado en el marco académico de la Cátedra Spinadel (FADU-UBA) de Matemática para el Diseño Industrial, 1996-1999, FCEN, UBA.

Resumen: *La Familia de Números Metálicos (FNM) es un conjunto infinito de números irracionales cuadráticos positivos descubierta por la Dra. Spinadel en 1994, cuyas propiedades matemáticas comunes los hacen sumamente aptos para aplicar en problemas de Diseño interdisciplinar. El miembro más preponderante de la FNM es el conocido Número de Oro* $\Phi = 1,618\ldots$ *El que le sigue es el Número de Plata* $\sigma_{Ag} = 1+\sqrt{2}$ *. Ambos números poseen una descomposición en fracciones continuas periódica pura y el primer objetivo de este trabajo fue relacionar la descomposición correspondiente al Número de Plata con una sucesión de rectángulos gnomónicos. En base a la misma, pudimos construir* *diferentes formas correspondientes a la espiral de Plata, similares a la tradicional espiral áurea. No solamente construimos las versiones planas de la espiral de Plata sino que también hicimos una representación esférica loxodrómica, animada con un software creado ad hoc. Por último relacionamos el Número de Plata y sus potencias sucesivas con diseños arquitectónicos, que van desde las ruinas romanas encontradas en la ciudad de Ostia hasta proyectos contemporáneos. Como detalle interesante, encontramos una relación entre el Número de Plata y la famosa "proporción cordobesa".*

1 LA FAMILIA DE NUMEROS METALICOS

Los miembros de la FNM ([1] y [2]) pueden obtenerse como soluciones positivas de ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 - px - q = 0$, donde p y q son números naturales. Si consideramos el caso $q = 1$, está demostrado [3] que las soluciones positivas de las correspondientes ecuaciones cuadráticas son números irracionales cuadráticos cuyo desarrollo en fracciones continuas es periódico puro, esto es

$$x= [p,p,p,\ldots]= p+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\ldots}}$$

Para $p = 1$ tenemos el Número de Oro $\Phi= [1,1,1,\ldots]$, $\sigma_{Ag}= [2,2,2,\ldots]$ geométricamente asociado a la simetría pentagonal pues es la diagonal de un pentágono de lado unitario. Le sigue el Número de Plata , relacionado con la simetría octogonal ya que es el valor de la segunda diagonal de un octógono de lado unitario [4]. Y así siguiendo. Si, en cambio, buscamos soluciones positivas de la ecuación obtenida tomando $p = 1$, obtenemos números irracionales cuadráticos cuyo desarrollo en fracciones continuas es periódico.

2 EL NUMERO DE PLATA Y LA SUCESION DE RECTANGULOS GNOMONICOS

Comenzamos con un rectángulo de Plata, esto es, tal que la relación entre sus lados sea el Número de Plata y le añadimos un "gnomon" (o esquema gráfico para incrementarlo manteniendo su forma). Así obtenemos sucesivamente rectángulos formados por la unión de cuadrados adosados uno al lado del otro [5]. En la Figura 1 se comprueba que las proporciones sucesivas del sistema de rectángulos así obtenidos coinciden con las aproximantes racionales de la fracción continua correspondiente al Número de Plata. En efecto, la sucesión de aproximaciones racionales para la fracción continua es:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}} \text{ es : } 2, \frac{5}{2}; \frac{12}{5}; \ldots$$

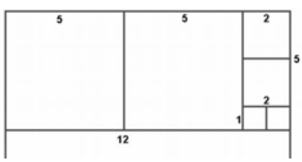

Figura 1 Sistema de rectángulos gnomónicos correspondientes al Número de Plata.

3 ESPIRALES DE PLATA DESDE EL PUNTO DE VISTA DE MATILA GHYKA

Siguiendo a Matila Ghyka [6], que presenta tres desarrollos usando el Número de Oro y sus potencias como coeficientes de crecimiento de diferentes espirales, presentamos un método similar con el Número de Plata. Tomando la “relación cuadrantal” establecida entre dos radios vectores sucesivos y perpendiculares entre sí, puede asignarse a la misma el valor del Número de Plata, quedando trazada una espiral que tiene un ángulo respecto del radio vector de aproximadamente 60o, como se indica en la Figura 2.
Tomando la “relación diametral” establecida entre dos radios vectores sucesivos y opuestos, le asignamos el valor del Número de Plata, quedando trazada una espiral que tiene un ángulo respecto del radio vector de aproximadamente 74o, que se muestra en la Figura 3. Tomando la “relación radial” establecida entre dos radios vectores sucesivos y coincidentes, le asignamos el valor del Número de Plata, quedando trazada una espiral que tiene un ángulo respecto del radio vector de aproximadamente 82o, dibujada en la Figura 4.

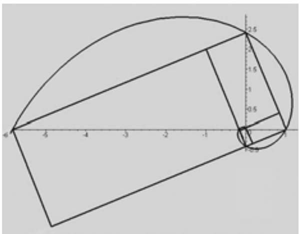

Figura 2 Espiral de Plata cuadrantal.

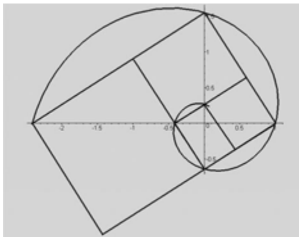

Figura 3 Espiral de Plata diametral.

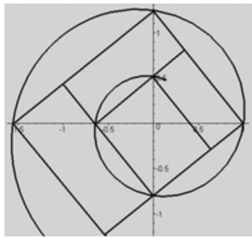

Figura 4 Espiral de Plata radial.

En los tres casos ilustrados se desarrolla y extiende una familia de infinitos rectángulos adyacentes que se generan gnomónica y sucesivamente por agregado de otros rectángulos correspondientes, siendo el proceso susceptible de generalizar con otros miembros de la FNM.

4 ESPIRAL DE PLATA PLANA Y ESPIRAL ESFÉRICA LOXODRÓMICA

Tomando la fórmula de la espiral logarítmica en coordenadas polares, es sabido que el coeficiente del exponente es función del ángulo α formado por la perpendicular al radio vector y la tangente a la espiral en el punto considerado. A mayor coeficiente del exponente mayor será α y por ende, más expansiva la espiral correspondiente, como se indica en la Figura 5. Consideremos ahora la proyección estereográfica, establecida entre el plano y una esfera tangente al mismo y situada sobre el centro de coordenadas. Dicha proyección se realiza haciendo corresponder a cada punto de la esfera, salvo su polo Norte, un punto del plano y se lleva a cabo mediante una recta pasante por el polo Norte de la esfera y por el punto en cuestión. Esta transformación es “conforme”, esto es, preserva los ángulos. Un haz central de rectas pasantes por el origen de coordenadas del plano se corresponde con un haz de círculos máximos sobre el eje vertical, que son los meridianos de la esfera. En la navegación marítima ha tenido siempre interés establecer trayectorias sobre el globo terráqueo que formen ángulos constantes respecto de los meridianos. Dichos recorridos se denominaron “rumbos”, y matemáticamente dichas curvas sobre la esfera se denominan “loxodrómicas”, habiéndose comprobado que toda loxodrómica sobre la esfera se corresponde con alguna espiral logarítmica y viceversa. En la Figura 6 se muestra la espiral de Plata cuadrantal y su loxodrómica esférica, como imágenes del software diseñado ad-hoc.

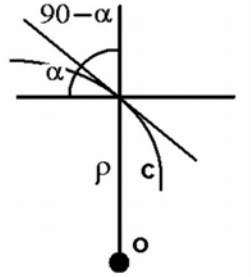

Figura 5 Ángulos radio-tangenciales.

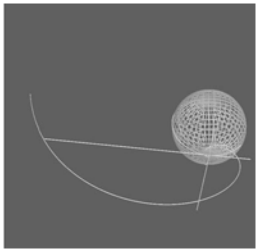

Figura 6 Espiral de Plata y su proyección estereográfica.

5 APLICACIÓN DEL NÚMERO DE PLATA EN DISEÑO ARQUITECTÓNICO

El sistema romano de proporciones estaba basado en el Número de Plata y sus potencias sucesivas o bien sus aproximaciones enteras [3]. En particular, Donald y Carol Watts, un matrimonio de arquitectos norteamericanos, han estudiado las ruinas de las casas de Ostia, la ciudad portuaria del imperio romano, comprobando que estaban enteramente organizadas por un sistema proporcional originado por el Número de Plata y sus potencias sucesivas. Tanto les entusiasmó este sistema proporcional que lo usaron para diseñar su propia casa (ver [7] y [8]). En las Figuras 7 y 8 se ilustra la inclusión de los posibles rectángulos de Plata dentro de los esquemas que los autores mencionados utilizan para sus desarrollos analíticos geométricos aplicados a las ruinas de la ciudad de Ostia.

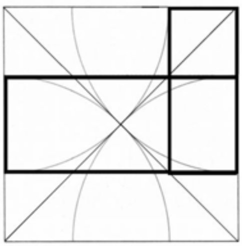

Figura 7 Esquema constructivo de Watts.

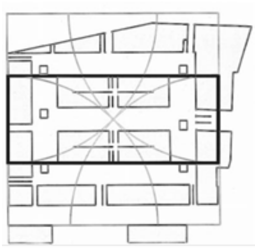

Figura 8 Aplicación del esquema a una planta.

Referencias

Vera W. de Spinadel (1997), “La familia de Números Metálicos en Diseño”, ler. Seminario Nacional de Gráfica Digital, sesión de Morfología y Matemática, FADU, UBA, vol. II, pp. 173-179, ISBN 950-25-0424-9.

Vera W. de Spinadel (1998), “The Metallic Means and Design”, NEXUS II:Architecture & Mathematics. Editora: Kim Williams. Edizioni dell´Erba, pp. 143-157, ISBN 88-86888-13-9.

Vera W. de Spinadel (1998), “From the Golden Mean to Chaos”, libro editado por Nueva Librería, ISBN 950-43-9329-1. 2da. edición Editorial Nobuko 2004, ISBN 987-1135-48-3. 3ra. edición ampliada y corregida Editorial Nueva Librería, en prensa.

Vera W. de Spinadel (1999), “The Metallic Means Family and Multifractal Spectra”, Nonlinear Analysis 36, pp. 721-745.