

La Geometría de los Polígonos Cordobeses

Antonia Redondo Buitrago
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Bachiller Sabuco
Avenida de España, 9 – 02002 Albacete, Spain
aredondo@sabuco.com

Encarnación Reyes Iglesias
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Valladolid
Avenida Salamanca, s/n – 47014 Valladolid, Spain
ereyes@maf.uva.es

Resumen

Este artículo está enfocado principalmente al estudio de la proporción Cordobesa y sus propiedades geométricas. Se presentan resultados generales en relación con el octógono regular y con varios polígonos no considerados hasta el momento. A partir de esta proporción, se encuentran nuevas formas poligonales. La combinación de tales formas permite generar bellos dibujos y mosaicos con polígonos irregulares.

1. Introducción

La proporción más conocida en el octógono regular es el *Número de Plata* $\theta = D : L = 1 + \sqrt{2}$ (ver [24], [11], [16]). Esta proporción dinámica aparece cuando en un octógono regular de lado L , dibujamos la diagonal D , como en la Figura 1, y calculamos la razón $D : L$. Numerosos ejemplos de este número, en relación con la geometría del octógono, pueden encontrarse en [5]. El *Número de Plata* es la solución positiva de la ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 1 = 0$. Este número irracional es uno de los *Números Metálicos* ([24], [16], [13],[14]).

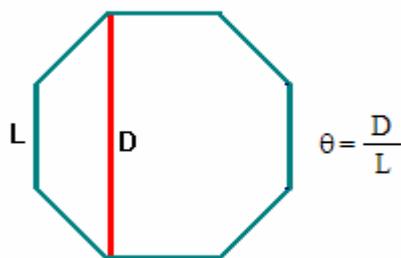


Figura 1: Número de Plata en el octógono

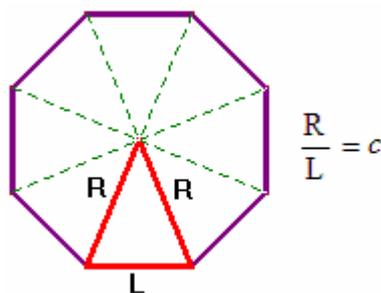


Figura 2: Proporción Cordobesa en el octógono

La segunda proporción importante en el octógono regular es la *Proporción Cordobesa*. Esta proporción fue introducida, en 1973, por el arquitecto español Rafael de la Hoz Arderius, ([8],[9],[10]), como resultado de sus investigaciones acerca de las proporciones presentes en la arquitectura de la ciudad de Córdoba, España. Desde esa fecha, la proporción Cordobesa ha sido considerada en el análisis de trabajos de Arte y Arquitectura.

El principal objetivo de este trabajo es encontrar esta proporción en diferentes formas que no han sido estudiadas anteriormente. En efecto, hemos descubierto una gran cantidad de nuevos polígonos donde la proporción Cordobesa esta presente, y muchas formas, a partir de las cuales podemos generar hermosas teselas, estrellas, rosetones, etc. Sorprendentemente, la presencia de esta proporción, como veremos, es muy frecuente.

La proporción Cordobesa está estrechamente vinculada al ángulo de 45°. En efecto, si calculamos la razón entre el radio R de la circunferencia circunscrita al octógono y su lado L, aplicando el Teorema del coseno en el triángulo de lados R, R y L, señalado en la Figura 2, obtenemos que $R/L=1.306562964\dots$

$$L^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 45^\circ = R^2(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow \frac{R^2}{L^2} = \frac{1}{2 - \sqrt{2}}$$

$$c = \frac{R}{L} = \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = 1.306562964\dots = \text{Número Cordobés}$$

La razón R/L se conoce como *proporción Cordobesa* y el valor c como el *número Cordobés*. Este número es una de las soluciones de la ecuación polinómica de cuarto grado $2x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

El número de Plata θ y el número Cordobés c se relacionan a través de la fórmula $c^2 = (1 + \theta)/2$, que es equivalente a la expresión $\mathbf{q} = \sqrt{2} c^2$.

La interpretación geométrica de esta relación algebraica queda patente en la propiedad 1, donde se muestra la disección canónica de un rectángulo de proporción θ , es decir, un *rectángulo de Plata*. Como es bien sabido, dado un rectángulo T cuyos lados tienen longitudes a y b , se define su proporción $p(T)$, como el cociente $p(T) = \max(a, b) / \min(a, b)$.

2. Polígonos Cordobeses

2.1 Triángulos notables en el octógono regular

La proporción cordobesa puede ser codificada mediante el ángulo de 45° y se modeliza de forma natural gracias a un notable triángulo isósceles.

Definición 1: Llamaremos "*triángulo Cordobés*" al triángulo que es semejante al de lados R , R y L , mostrado en la Figura 2.

Por tanto, un triángulo isósceles es un "triángulo Cordobés" si sus ángulos son de $\pi/4$, $3\pi/8$ y $3\pi/8$ radianes (45° , $135^\circ/2$ y $135^\circ/2$). Las Figuras 2 y 3 muestran su localización en el octógono regular.

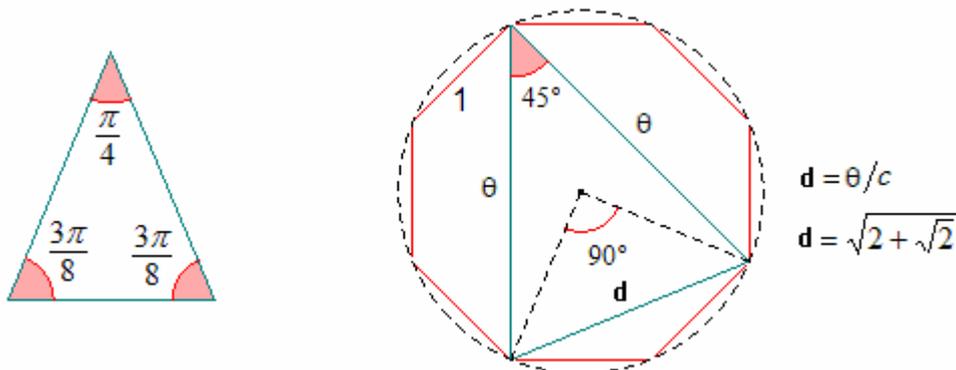


Figura 3: Triángulos Cordobeses

Propiedad 1. El rectángulo de Plata se puede dividir en cuatro triángulos isósceles, como se muestra en la Figura 4. Dos de ellos son triángulos Cordobeses y los otros dos tienen ángulos $3p/4$, $p/8$ y $p/8$.

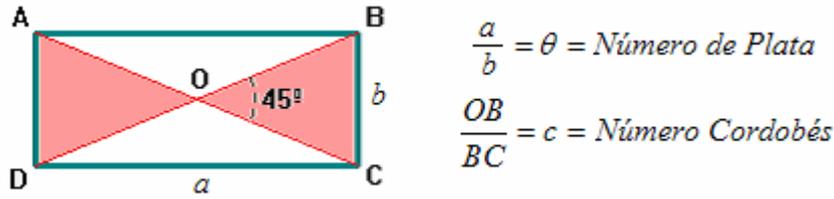


Figura 4: División Cordobesa de un rectángulo de Plata.

En efecto, observando la Figura 4, deducimos que $DB^2 = b^2 + b^2q^2 = b^2(2 + 2q) = 4b^2c^2$, así pues se cumple que

$$OB = \frac{1}{2}DB = bc \Rightarrow \frac{OB}{BC} = \frac{bc}{b} = c.$$

La segunda afirmación del enunciado es consecuencia directa de esta igualdad.

$$\tan(3p/8) = \sqrt{\frac{1 - \cos(3p/4)}{1 + \cos(3p/4)}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}} = 1 + \sqrt{2} = q.$$

El “gnomon” es la figura que yuxtapuesta a una figura dada, origina otra que es semejante a la inicial. Este concepto es uno de los más relevantes en la clásica teoría de la proporción geométrica. A continuación, mostraremos el gnomon del triángulo Cordobés y algunas propiedades relacionadas con él. Para abreviar, al triángulo Cordobés de lados c, c y 1 , lo llamaremos “unitario”.

Propiedad 2. El gnomon de un triángulo Cordobés unitario es el triángulo de lados c, c^2 y $\sqrt{2}/2$. Este triángulo escaleno tiene ángulos $p/8, 2p/8$ y $5p/8$. (Ver Figura 5).

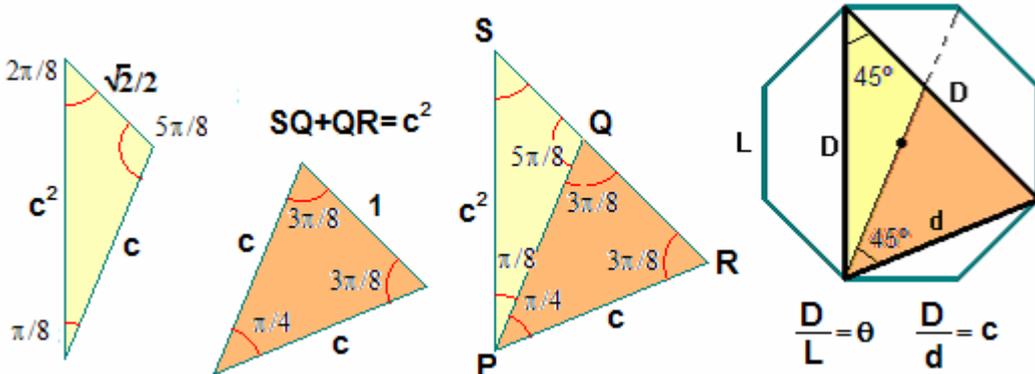


Figura 5: Triángulo Cordobés (naranja) y su gnomon (amarillo).

Partiendo de un triángulo Cordobés unitario PQR, y yuxtaponiendo el triángulo escaleno de ángulos $\pi/8, 2\pi/8$ y $5\pi/8$, el resultado es el triángulo isósceles SPR (ver Figura 5). Se verifica, $SR = SQ + QR = (\sqrt{2}/2) + 1 = (2 + \sqrt{2})/2 = c^2$, por tanto, el triángulo SPR es también Cordobés.

De hecho, si observamos el octógono en esa misma Figura, podemos ver que si dibujamos un segmento desde el vértice izquierdo del triángulo de mayor tamaño, pasando por su centro, el triángulo Cordobés inicial, cuyos lados eran D, D y d , queda dividido en dos triángulos. Uno de ellos (naranja) tiene también un ángulo de 45° . Por tanto el otro (amarillo), tiene ángulos $\pi/8, 2\pi/8$ y $5\pi/8$. Así pues, el triángulo naranja tiene ángulos $\pi/4, 3\pi/8$ y $3\pi/8$, y también es un triángulo Cordobés. Obviamente el triángulo escaleno amarillo es el gnomon del triángulo Cordobés.

Nota 1. En la Figura 6 vemos un triángulo Cordobés inscrito en su octógono regular. Cuando unimos los tres vértices del triángulo con el centro del octógono, dicho triángulo queda dividido

en otros tres triángulos. Uno de ellos es un triángulo rectángulo (el ángulo inscrito es la mitad del arco que abarca). Los otros dos triángulos son congruentes y semejantes al triángulo determinado por la diagonal menor, d , y dos lados consecutivos del octógono. Los tres triángulos en amarillo tienen ángulos $3\pi/4$, $\pi/8$ y $\pi/8$. Observemos que son semejantes al triángulo en color blanco que se obtenía en la disección canónica del rectángulo de Plata, (Figura 4). La Figura 7 ilustra este hecho. Finalmente, este triángulo isósceles posee la curiosa propiedad de ser el gnomon del gnomon del triángulo Cordobés, (ver Figura 8).

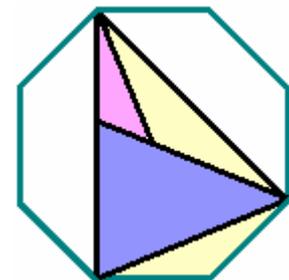
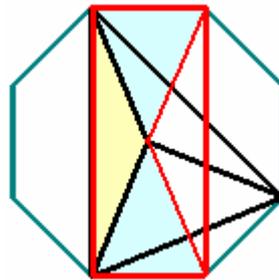
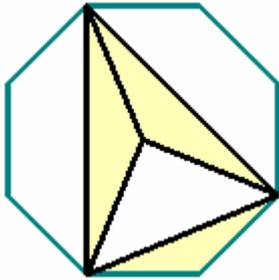


Figura 6: Triángulos $3\pi/4, \pi/8$ y $\pi/8$ **Figura 7:** Rectángulo de Plata **Figura 8:** Gnomones

En la Figura 9 vemos un rectángulo de proporción $\sqrt{2}$ dividido en un cuadrado de lado 1 y un rectángulo PQRS de lados $RQ = 1$ y $PQ = \sqrt{2} - 1$. En consecuencia, la proporción de este rectángulo es $RQ / PQ = q$ y su diagonal mide $d = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. De ello se deduce que el valor del cociente D/d es el número Cordobés.

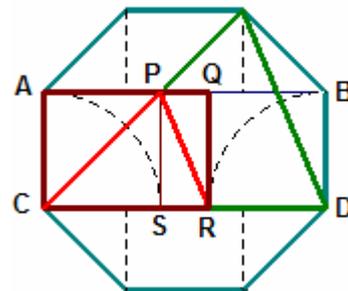
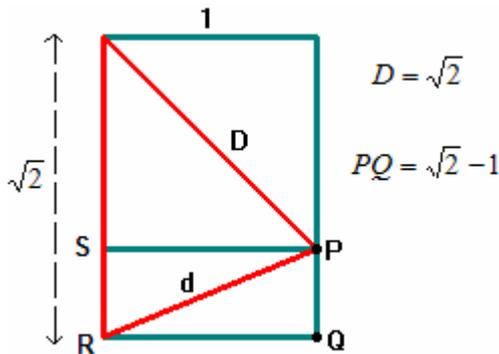


Figura 9: Triángulo Cordobés en un DIN A4 **Figura 10:** DIN A4 en el octógono regular

La mencionada figura muestra también la fácil construcción de un triángulo Cordobés a partir de una hoja de papel con formato DIN A, por ejemplo un DIN A4. Es bien sabido que estos formatos tienen proporción $\sqrt{2}$. El procedimiento es el siguiente:

1. Tomar una hoja de papel DIN A4.
2. Formar un cuadrado de lado igual al menor de los lados de la hoja y dividirlo en dos partes iguales doblándolo por su diagonal.
3. Doblar el papel por una línea que una el punto P con el vértice opuesto R.

En el octógono regular de la Figura 10, puede verse el mismo rectángulo DIN A4 (granate) sobre el rectángulo de Plata ABCD. La semejanza de los triángulos rojo y verde es evidente.

2.2 Cuadriláteros

En esta sección iniciamos la búsqueda de la proporción Cordobesa en polígonos con más de tres lados. Obviamente el primer polígono considerado es el rectángulo.

La siguiente definición extiende las nociones del conocido *rectángulo de Oro* y del anteriormente mencionado, *rectángulo de Plata*.

Definición 2. Llamamos “*rectángulo Cordobés*” a un rectángulo de proporción c .

Por ejemplo, el rectángulo rojo de lados R y L de la Figura 11:

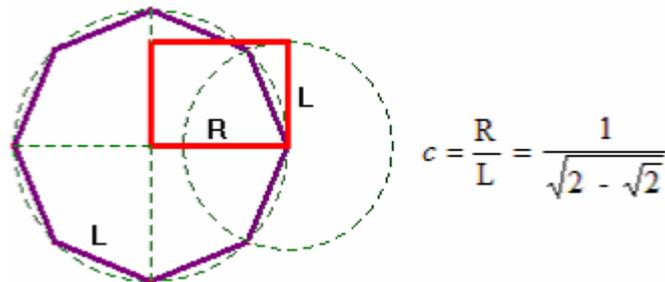


Figura 11: Rectángulo Cordobés en un octógono regular

El arquitecto *Rafael de la Hoz Arderius* encontró este rectángulo en la planta y en el alzado de la Mezquita de Córdoba (España), [1]. La Figura 12 reproduce un dibujo original de este arquitecto de la planta de la Mezquita, [18]. La Figura 13 muestra un dibujo donde se distinguen coloreados tres rectángulos Cordobeses encontrados por de la Hoz.

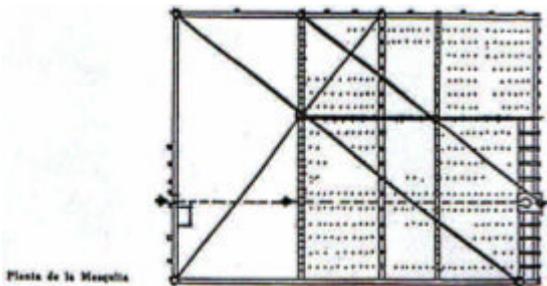


Figura 12: Planta de la Mezquita (Córdoba)

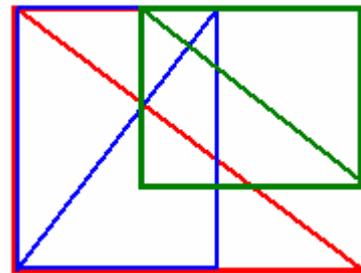


Figura 13: Rectángulos Cordobeses

Es importante señalar que *hasta el momento el rectángulo Cordobés es el único polígono Cordobés* considerado en las referencias consultadas, ([9], [1], [3], [4]).

Volviendo a la Figura 9, donde se construía un triángulo Cordobés a partir de una hoja DIN A4, podemos observar que los dos triángulos sobrantes pueden reagruparse para formar otro triángulo Cordobés, en la forma que muestra la Figura 14.

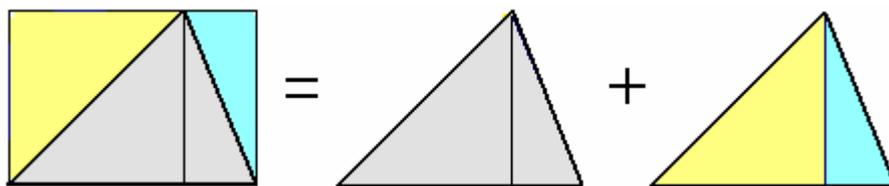


Figura 14: Dos triángulos Cordobeses a partir de una hoja DIN A

Si unimos ambos triángulos por su lado mayor se forma un paralelogramo con ángulos $3\pi/8$ y $5\pi/8$, y si los unimos por su lado menor, se obtiene el paralelogramo considerado en la siguiente definición (Figura 15).

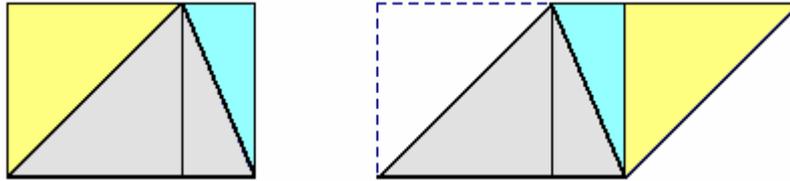


Figura 15: Rombo de 45° y 135° a partir del DIN A

Definición 3. Llamamos “*diamante Cordobés*” a un rombo cuyos ángulos son 45 y 135 grados. Es evidente que el área del diamante Cordobés obtenido a partir de una hoja de papel DIN A4 es igual al área de esta hoja, y obviamente, el área de uno de los triángulos Cordobeses construidos es su mitad.

Este diamante también aparece por intersección de dos octógonos regulares. De hecho, cuatro octógonos que se intersequen como en la Figura 16 (izquierda) originan una estrella en su interior, formada por 4 diamantes. Recíprocamente, la intersección de dos diamantes determina una estrella de cuatro puntas y un octógono en su interior, Figura 16 (derecha). Esta estrella de cuatro puntas puede conseguirse por la intersección de cinco octógonos, como en la Figura 17, donde también vemos un bonito mosaico con ese motivo, en la Alhambra de Granada (España).

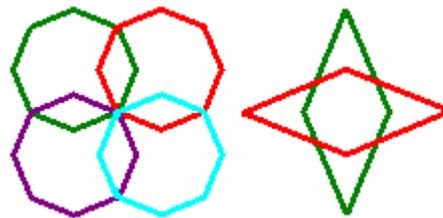


Figura 16: Octógonos y diamantes

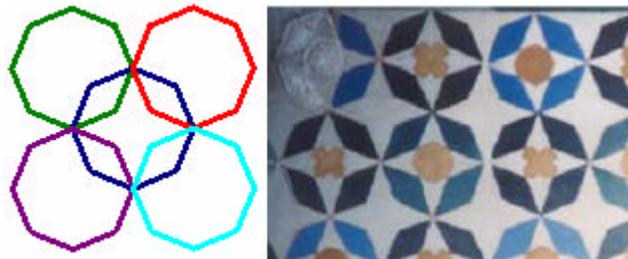


Figura 17: Octógonos y estrellas en la Alhambra de Granada

El diamante Cordobés aparece con frecuencia en el diseño de edificios, pavimentos, colchas, etc. tanto en antiguas como en modernas culturas, [15], [18], [19], [20]. De hecho, este notable rombo permite fácilmente construir y desarrollar mucha Geometría.

El mosaico de la Figura 18 está formado por baldosas cuadradas. Sobre la diagonal de cada cuadrado aparece un diamante y alrededor de éste, cuatro triángulos escalenos. Cuatro cuadrados contiguos determinan un octógono regular. En el centro podemos ver una estrella de cuatro puntas rodeada por cuatro diamantes.

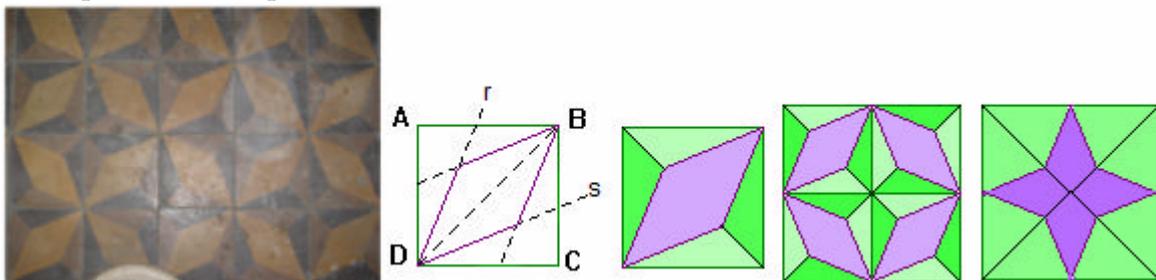


Figura 18: Diamante, octógono y estrella en un mosaico de Lisboa

La estrella de cuatro puntas puede dividirse desde su centro en cuatro cuadriláteros, Figura 18 (derecha). Si colocamos éstos en las esquinas de un cuadrado como en la Figura 19 (izquierda), se determina una perfecta cruz de Malta de Dudeney, ([2]). La combinación de estos polígonos cóncavos, produce de forma natural un bello mosaico formado por estrellas de cuatro puntas y cruces Maltesas.

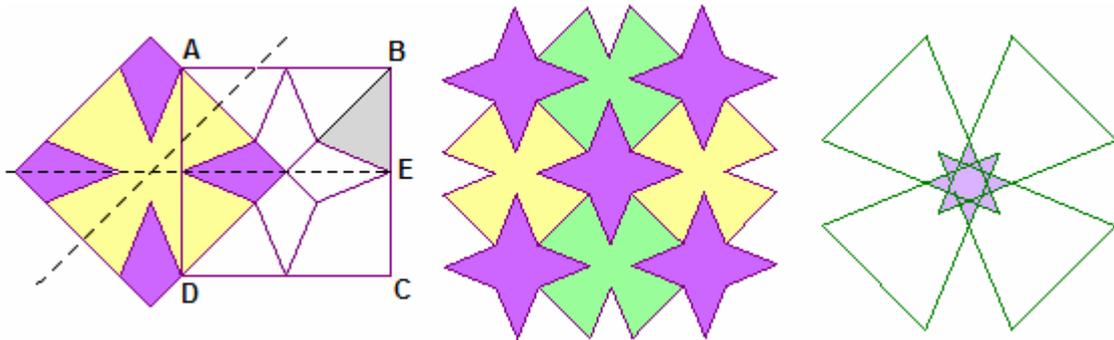


Figura 19: Cruces de Malta de Dudeney y estrellas

La misma cruz se puede generar por la intersección de cuatro triángulos Cordobeses. En este proceso, los cuatro vértices de 45° también determinan una estrella de ocho puntas, de hecho, el polígono estrellado $8/3$, Figura 19 (derecha).

Nota 2. Si el lado del cuadrado ABCD es igual a 1, el perímetro de la estrella de cuatro puntas es igual a $4/c$. Efectivamente, el triángulo isósceles (en gris) es Cordobés, y $BE = 1/2$, luego la longitud de cada uno de los lados de la estrella es $1/(2c)$ y así, su perímetro es $4/c$. En consecuencia, la cruz de Malta de Dudeney tendrá su perímetro igual $4 \cdot (1/2) + 4/c = 2 + 4/c$.

La Figura 20 muestra una labor de ganchillo de artesanía tradicional española. Fácilmente se reconocen la cruz de Malta, la estrella de cuatro puntas, el octógono y la estrella formada por cuatro diamantes.

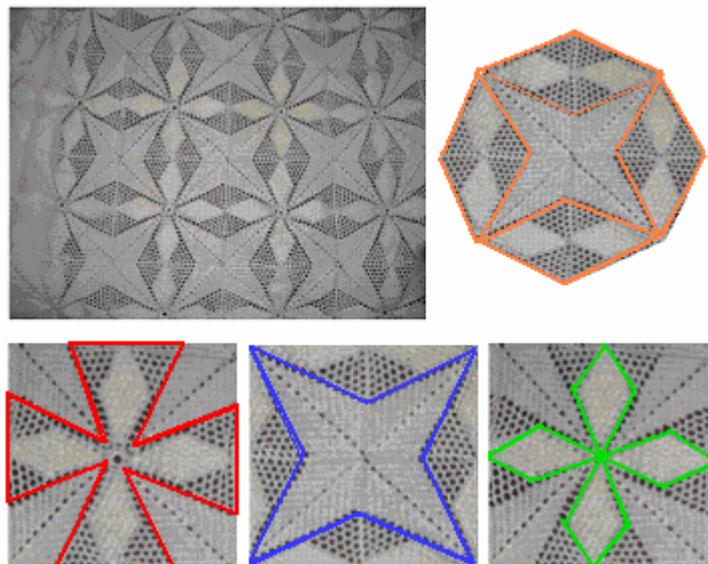


Figura 20: La proporción Cordobesa en ganchillo

Continuando con la división del octógono de la labor de ganchillo anterior, se puede obtener una sucesión expansiva de estrellas de cuatro puntas, diamantes y octógonos cuyos lados están en la proporción del número de Plata.

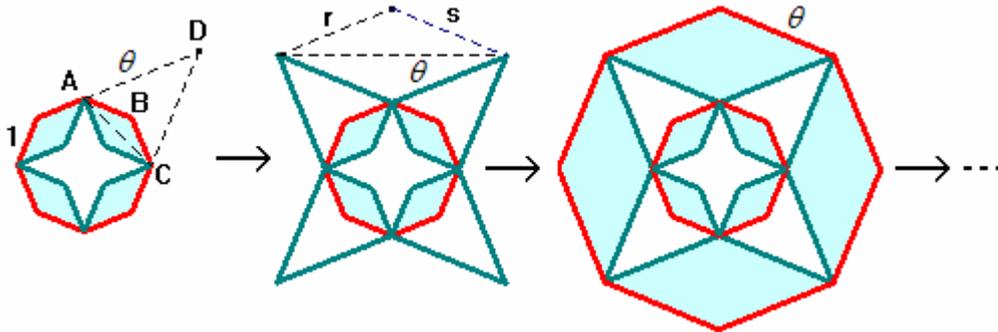


Figura 21: Sucesión de estrellas y octógonos

El punto de partida es un octógono regular dividido en una estrella de cuatro puntas rodeada de cuatro diamantes. El proceso es el siguiente:

1. Sobre la diagonal mayor de cada diamante, se construye un triángulo Cordobés.
2. Los cuatro triángulos trazados determinan una estrella de cuatro puntas.
3. Se dibuja un octógono regular circunscrito a esta estrella, y el proceso continúa.

En la Figura 21, el triángulo ABC tiene lados $AB = BC = 1$ y el ángulo $\angle ABC = 3p/4$. Entonces, mediante el Teorema del coseno, se obtiene fácilmente que $AC^2 = 2 + \sqrt{2}$ y $AC = \sqrt{2}c$. Por otro lado, el ángulo $\angle ADC = p/4$ implica que ADC es un triángulo Cordobés y de ello se deduce que: $AD = AC \cdot c = \sqrt{2}c^2 = q$.

Ahora nos ocuparemos de los trapecios. En la Figura 3, rodeando al *triángulo Cordobés* θ, θ, d tenemos un triángulo isósceles de lados $1, 1, d$ y dos trapecios isósceles con tres lados 1 , su lado mayor igual a θ y sus ángulos $3\pi/4$ y $\pi/4$. Esta nueva forma de Plata también debería ser considerada como una forma Cordobesa. El motivo es que cada trapecio se puede dividir en tres triángulos Cordobeses de lados $1, 1$ y $1/c$ (ver Figura 22) y un triángulo escaleno de lados $1, 1/c$ y $\theta-2$. Los ángulos de este triángulo son $\pi/8, 2\pi/8$ y $5\pi/8$, es decir, es un gnomon del triángulo Cordobés.

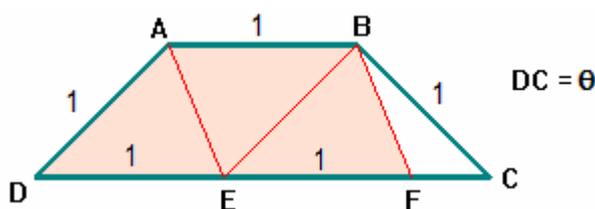


Figura 22: Trapecio Cordobés de Plata

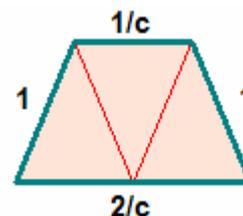


Figura 23: Un trapecio Cordobés

Pero este no es el único trapecio que merece ser llamado Cordobés, puesto que hemos encontrado otros dos más. En efecto, si reordenamos los tres triángulos Cordobeses anteriores como sugiere la Figura 23, obtenemos un trapecio isósceles de lados $1/c, 1, 2/c, 1$, y ángulos $3\pi/8$ y $5\pi/8$. Esta figura es semejante al trapecio isósceles de lados $1, c, 2$ y c , por tanto lo llamaremos *c-trapecio Cordobés*.

Como ya hemos visto, el triángulo Cordobés ABE (Figura 24) puede construirse a partir de un rectángulo ABCD de proporción $\sqrt{2}$. Por reflexión de la figura con respecto a su lado BC, obtenemos el trapecio AA'E'E. El rectángulo AA'D'D está formado por dos cuadrados de lado 1 y dos rectángulos de Plata de lados q^{-1} y 1.

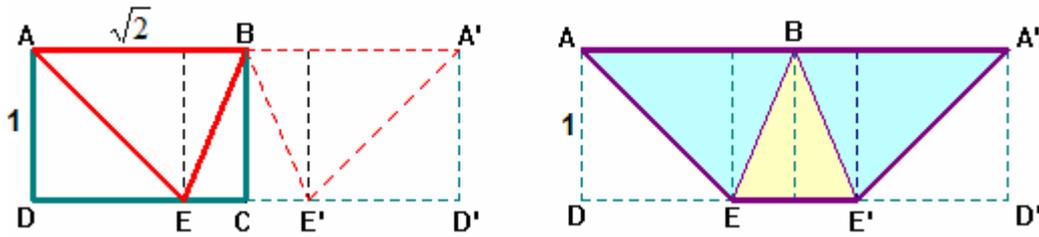


Figura 24: Trapecio Cordobés a partir del rectángulo $\sqrt{2}$

El trapecio AA'E'E está formado por la unión de un triángulo isósceles BEE' y dos triángulos congruentes, ABE y A'BE', de lados $AE=AB=BA'=A'E'=\sqrt{2}$. Ambos triángulos son Cordobeses, luego $BE = BE' = \sqrt{2}c^{-1}$. Por otra parte, $EE' = 2\sqrt{2} - 2 = \sqrt{2}(2 - \sqrt{2}) = \sqrt{2}c^{-2}$, y la razón de los lados de BEE' es c , es decir, BEE' es un triángulo Cordobés, y $BE/EE' = c$.

Por tanto, hemos construido un trapecio de ángulos $\pi/4$ y $5\pi/8$ y de medidas de lados $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2} - 2 = 2\theta^{-1}$ y $\sqrt{2}$, (Figura 25). Esta forma es semejante al trapecio isósceles de lados $2c^2$, c^2 , 1 y c^2 , por tanto, llamaremos a ese trapecio c^2 -trapecio Cordobés.

Este cuadrilátero está relacionado con el trapecio precedente a través de la disección canónica de los dos rectángulos de Plata contenidos en él.

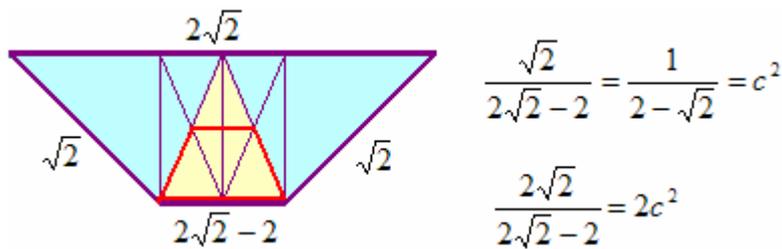


Figura 25: Dos trapecios Cordobeses

En la Figura 24, la prolongación de los segmentos AE y A'E' determina el punto O, centro del cuadrado de lado AA'. Si rotamos el trapecio 90° alrededor del punto O, (Figura 26), la figura generada es la estrella de la Figura 18. Además, la rotación de 90° alrededor de M, punto medio del lado mayor del trapecio, produce un octógono regular inscrito en un cuadrado, (Figura 27).

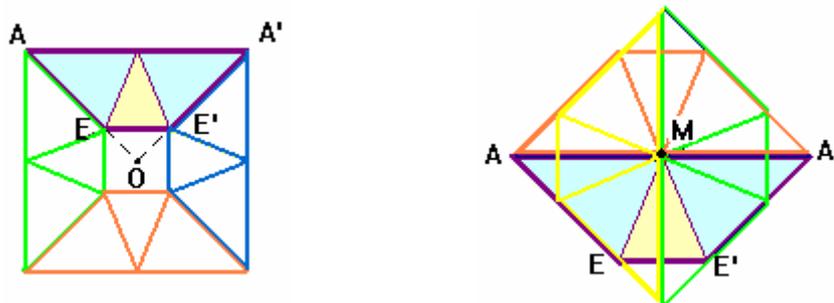


Figura 26: Estrella derivada del trapecio **Figura 27:** Octógono regular derivado del trapecio

Si dibujamos dos c -trapecios Cordobeses dentro del c^2 -trapecio, el proceso anterior produce nuevas losetas que generan armoniosos diseños. (Figura 28).

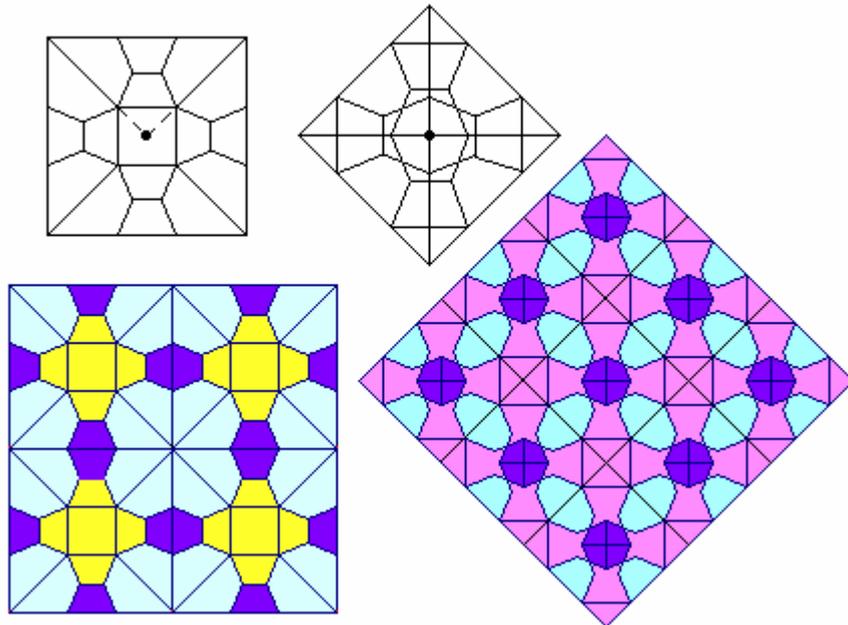


Figura 28: Dos teselados originados a partir de trapecios Cordobeses

A continuación introducimos dos nuevos cuadriláteros. Estas formas elementales son muy simples pero van a jugar un papel muy importante en lo que sigue. De hecho, a partir de dos diámetros perpendiculares del octógono regular, como en la Figura 29 (izquierda), éste queda dividido en cuatro cuadriláteros congruentes, que llamamos “*c-cometas*”. Una *c-cometa* está formada por dos triángulos Cordobeses y tiene ángulos $\pi/2$, $3\pi/8$, $3\pi/4$, y $3\pi/8$. Si el lado del octógono es 1, la *c-cometa* tiene lados 1, 1, *c*, y *c*, ver Figura 29.

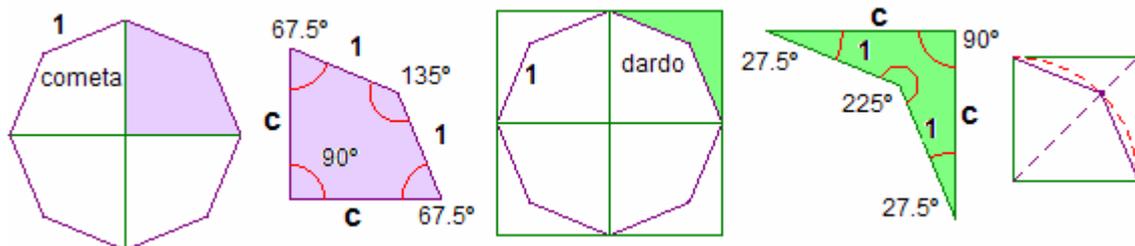


Figura 29: Cometa Cordobesa, dardo Cordobés y sus construcciones a partir de un cuadrado

Si inscribimos el octógono en un cuadrado, se obtienen otros cuatro cuadriláteros cóncavos congruentes (Figura 29, centro). Llamamos a este cuadrilátero “*c-dardo*”. Los ángulos de un *c-dardo* son $\pi/8$, $\pi/2$, $5\pi/4$ y $\pi/8$, y las medidas de sus lados son 1, 1, *c*, y *c*.

En la Figura 29 (derecha), podemos ver una fácil construcción de la *c-cometa* y el *c-dardo* a partir de un cuadrado. La similitud con la cometa y el dardo de Penrose es evidente, pero nuestros cuadriláteros se obtienen a partir del octógono regular y no del pentágono como en los de Penrose. Así, y para que quede más claro, acordamos en nombrarlos como “*cometa Cordobesa*” y “*dardo Cordobés*”, o, más brevemente, *c-cometa* y *c-dardo*.

Reordenando cuatro *c-dardos* como en la Figura 30, se determina una estrella de cuatro puntas, que realmente es un octógono cóncavo. Obviamente, cuatro *c-cometas* forman un octógono regular y el cuadrado puede ser dividido en una estrella de cuatro puntas rodeada de cuatro *c-cometas*. Esta combinación de octógonos y estrellas son el patrón que subyace en los teselados de las Figuras 17 y 18.

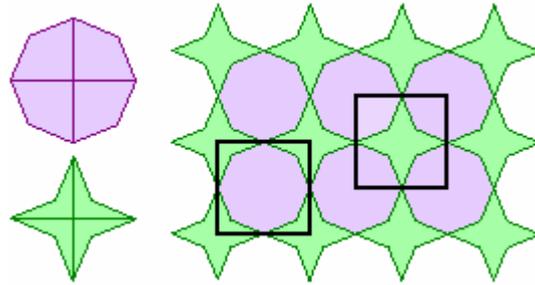


Figura 30: Octógonos y estrellas de cuatro puntas

Tomando como punto de partida un cuadrado, y mediante la disección canónica del rectángulo de Plata, (Figura 4), podemos obtener un octógono regular y la estrella de cuatro puntas. El proceso es como sigue:

- 1) Se dibuja un rectángulo de Plata sobre cada lado del cuadrado, Figura 31.
- 2) Se trazan las diagonales de los cuatro rectángulos de Plata.
- 3) Se prolongan las ocho diagonales.

El octógono regular se obtiene después del paso 2) y finalmente aparecen dos estrellas de cuatro puntas que forman un polígono estrellado $8/3$. En el interior de esta estrella, aparece además, otra estrella de ocho puntas.

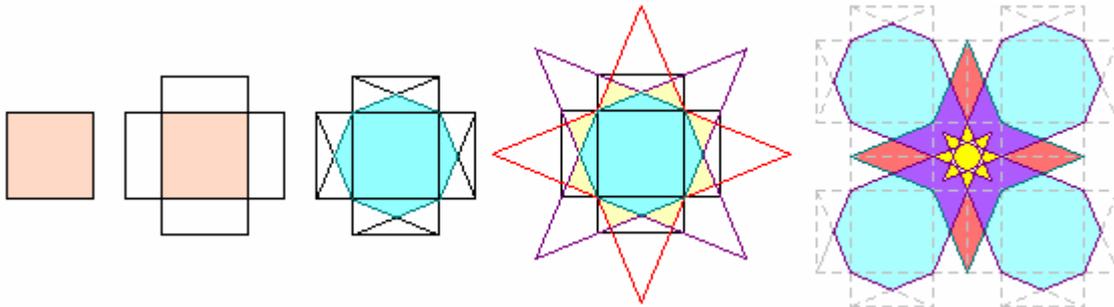


Figura 31: Octógono y estrellas a partir de un cuadrado y del rectángulo de Plata

En la Figura 31 (derecha) aparece una roseta obtenida cuando se aplica el paso 2). Podemos observar además una original Cruz de Malta rodeada por cuatro diamantes y cuatro octógonos regulares. En su interior aparecen otras estrellas $8/3$ y $8/2$.

2.3 Pentágonos y heptágonos

Es posible encontrar muchos pentágonos relacionados con la proporción Cordobesa. El primero está formado por tres triángulos Cordobeses consecutivos. Sus lados miden $1, 1, 1, c$ y c . El mismo pentágono es obtenido por yuxtaposición de una c -cometa y un triángulo Cordobés. El segundo es la unión de cuatro triángulos Cordobeses consecutivos. Las longitudes de los lados de este pentágono son $1, 1, 1, 1$ y $2c$ y puede ser obtenido además por la yuxtaposición de dos c -cometas.

Estos pentágonos están trivialmente contenidos en un octógono regular y pueden ser divididos de muchas formas en polígonos Cordobeses. (Figura 32). Rotando estos pentágonos se pueden generar artísticas figuras. Algunos ejemplos se muestran en la Figura 33.

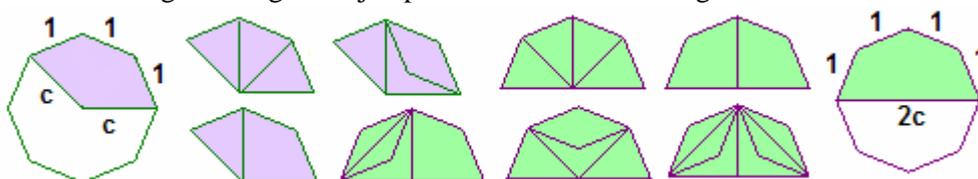


Figura 32: Pentágono Cordobés de primer tipo y de segundo tipo

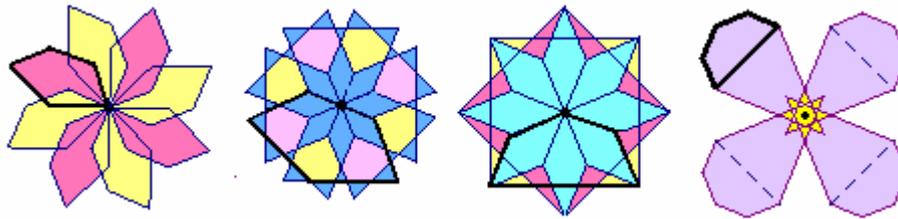


Figura 33: Rosetas derivadas de pentágonos Cordobeses

Notemos que la flor de la Figura 33 (derecha) es la misma que aparece en la construcción de la Figura 31 (derecha), excluyendo los diamantes rojos. Está creada con una Cruz de Malta de Dudeney por adición de cuatro pentágonos Cordobeses.

El tercer pentágono Cordobés es el más relevante. Está formado por la yuxtaposición a un triángulo Cordobés de dos triángulos rectángulos. Este pentágono tiene cuatro lados iguales de medida $c/\sqrt{2}$ y el lado restante tiene longitud 1. Sus ángulos son $5\pi/8$, $\pi/2$, $3\pi/4$, $\pi/2$ y $5\pi/8$. Se puede obtener el mismo pentágono por adición de dos c -cometas y un triángulo rectángulo, Figura 34.

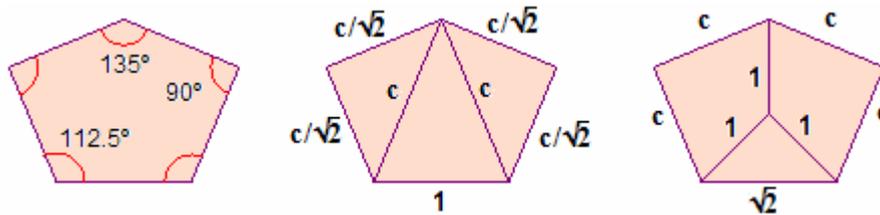


Figura 34: El tercer pentágono Cordobés

Este tercer pentágono Cordobés recubre el plano. De hecho es uno de los catorce pentágonos que teselan el plano. (Concretamente, es del tipo número 9 de la referencia [22], ver además [21]). Rotando este pentágono 90° como en la Figura 35, se obtiene un par-hexágono formado por cuatro de estos pentágonos. Se define un par-polígono como un polígono de lados opuestos paralelos e iguales en longitud. Como es bien sabido, todo par-hexágono recubre el plano. En la Figura 35 puede visualizarse un teselado del plano, generado por el par-hexágono anterior.

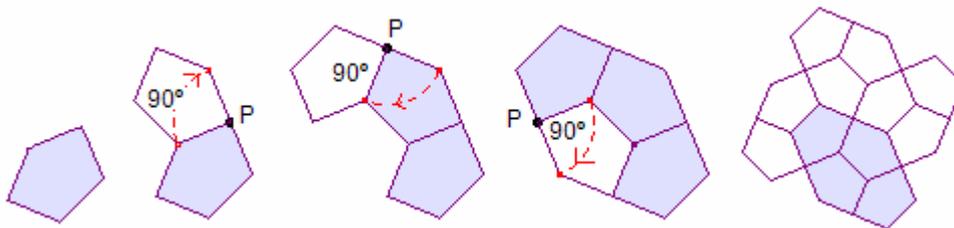


Figura 35: El pentágono Cordobés recubre el plano

Este tercer pentágono Cordobés aparece involucrado en muchas disecciones del octógono. Sorprendentemente, lo hemos descubierto en la famosa disección de Lindgren (Figura 36), [12]. Es bien conocido que reordenando las piezas de esta disección, se obtiene el polígono estrellado $8/3$, ver [6] y [17].

Las autoras presentan en la Figura 37 algunas disecciones originales relacionadas con la proporción Cordobesa. (Se hace notar que las piezas congruentes tienen el mismo color). En *a*), el octógono regular está dividido en dos pentágonos y dos diamantes. Rotando 90° los dos pentágonos morados alrededor del centro del octógono se obtiene una estrella de cuatro puntas.

Además, rotando 90° este pentágono alrededor del vértice de 135° , obtenemos una artística cruz que determina una bella disección del octógono regular (ver Figura 37 *b*, *c*). Las piezas de esta disección son cuatro heptágonos cóncavos, cuatro cuadriláteros y cuatro triángulos isósceles de ángulos $3\pi/4$, $\pi/8$ y $\pi/8$, por tanto semejantes a los triángulos isósceles de la Figura 6.

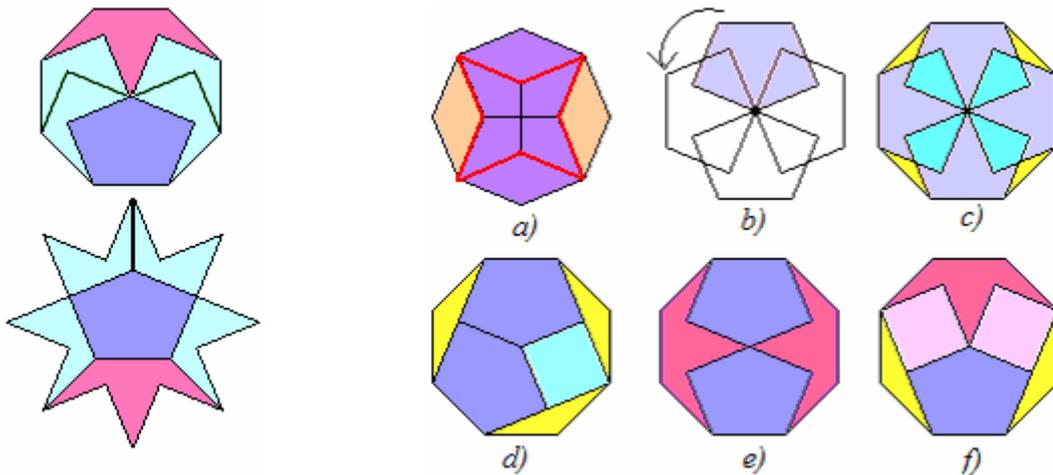


Figura 36: Disección de H. Lindgren **Figura 37:** Disecciones Cordobesas de las autoras

La Figura 37 muestra en *d*), *e*) y *f*) tres disecciones simétricas usando el cuadrado, el “gnomon del gnomon” y el heptágono cóncavo. Este último, el mismo que el de la disección de Lindgren. En la Figura 38 vemos dos bellos diseños creados a partir de las disecciones presentadas.

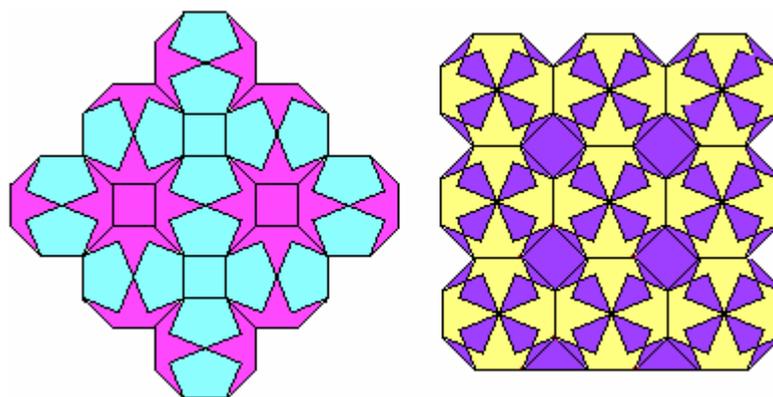


Figura 38: Diseños con pentágonos, heptágonos y cuadrados

En efecto, los cuatro pentágonos cóncavos de la disección de Lindgren, (Figura 36), son polígonos Cordobeses. De hecho, cada uno de estos pentágonos está formado por la yuxtaposición de un triángulo rectángulo isósceles de cateto c , y medio rectángulo de Plata de lados c y c/θ , Figura 39. Por tanto, el pentágono tiene un lado de medida la diagonal $\sqrt{2}$ del rectángulo de Plata y los otros cuatro lados miden c . Sus ángulos son $5\pi/8$, $\pi/8$, $3\pi/2$, $\pi/4$ y $\pi/2$. Cuatro pentágonos de este tipo pueden ser reordenados para formar un par-hexágono. Luego, este pentágono cóncavo recubre el plano. (Figura 39). Observar que dos pentágonos dispuestos como en el tercer polígono de la Figura 39, produce un hexágono no regular que también recubre el plano.

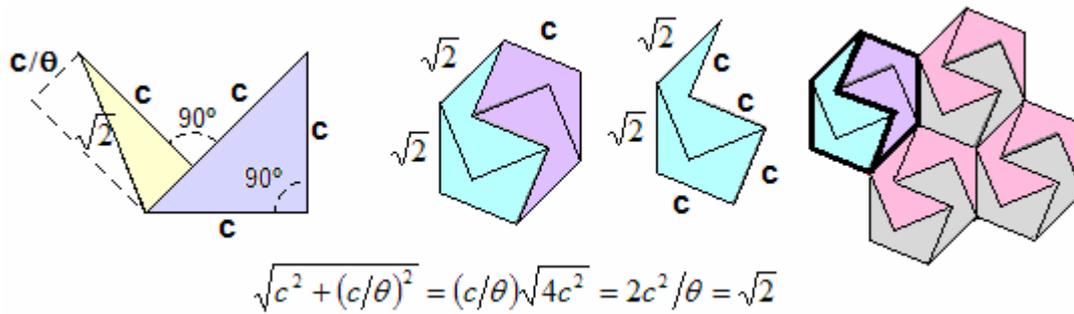


Figura 39: Teselado con polígonos cóncavos Cordobeses

2.4 Par-hexágonos y par-octógonos

Además de los par-hexágonos mencionados anteriormente (Figuras 35 y 39), se pueden construir otros hexágonos y octógonos por combinación de *c*-cometas y *c*-dardos. A continuación presentamos una amplia colección de ellos. Todos ellos generan teselados monoedrales o diedrales [7] que pueden ser dibujados sobre una malla de cuadrados. Para abreviar, vamos a nombrarlos en sus correspondientes Figuras, donde mostramos las longitudes de sus lados. Los ángulos no se especifican puesto que sus valores pueden calcularse fácilmente. Además, en la Figura 40, se muestran los teselados monoedrales y diedrales generados. Hacemos notar que nuestros par-octógonos recubren el plano, lo cual no es un hecho en absoluto trivial.

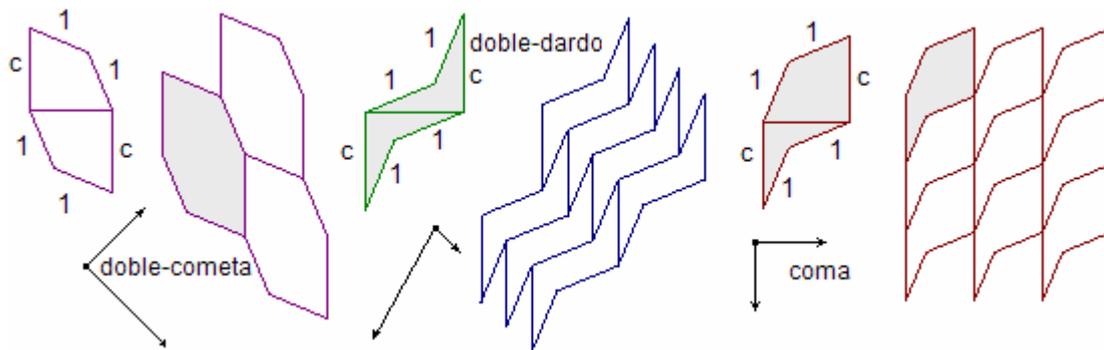


Figura 40: Recubriendo el plano con tres par-hexágonos Cordobeses

El “*c-sol*” (octógono regular) es trivialmente un par-octógono. La estrella de cuatro puntas “*estrella*” o (*c-estrella*) es otro par-octógono que puede ser unido a un octógono regular para recubrir el plano, como hemos visto anteriormente en la Figura 30.

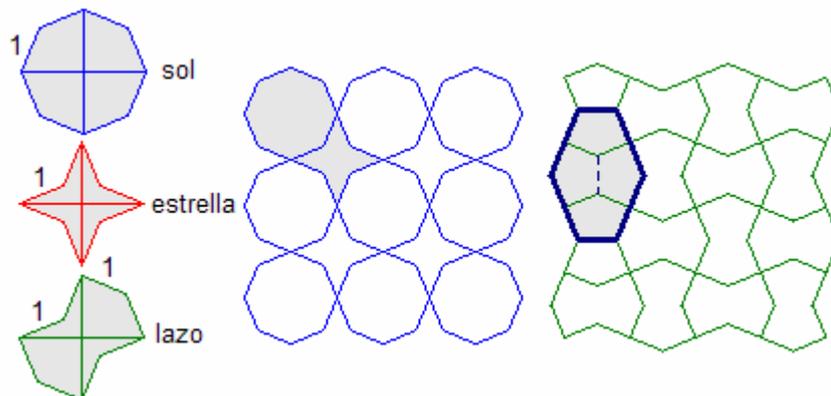


Figura 41: Teselados con soles, estrellas y lazos

Dos *c*-dardos y dos *c*-cometas dispuestas como en la Figura 41, (inferior), forman un par-octógono cóncavo llamado por las autoras “*lazo*” o “*c-lazo*”. El *lazo* es la yuxtaposición de dos pentágonos Cordobeses congruentes de tercer tipo, (Figura 34). Así, este polígono *c-lazo* también recubre el plano (Figura 41). Sobre el teselado generado por el *c-lazo*, pueden dibujarse par-hexágonos para obtener el teselado de la Figura 35.

El *c*-sol, la *c*-estrella y el *c-lazo* son la base del diseño de la alfombra persa de la Figura 42, [23].

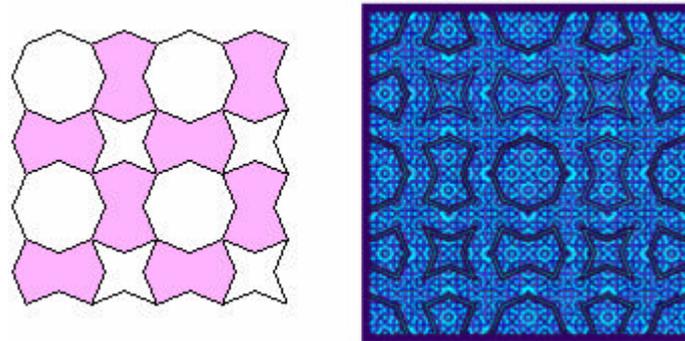


Figura 42: *c*-sol, *c*-estrella y *c*-lazos en una alfombra persa

Dos *c*-dardos y dos *c*-cometas forman además el par-octógono cóncavo mostrado en la Figura 43. Llamamos a este polígono “*sombrilla*”.

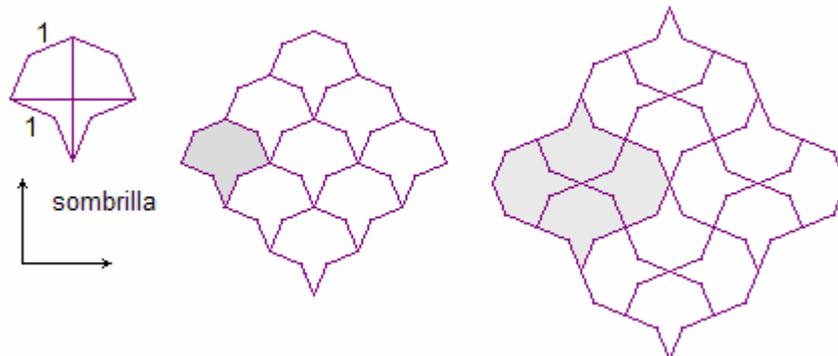


Figura 43: Dos teselados monoedrales con *sombrillas*

Combinando *sombrillas* de dos maneras diferentes se pueden obtener dos teselados de apariencia distinta. En el primero, hemos usado dos traslaciones en dos direcciones independientes, y el segundo está basado en rotaciones.

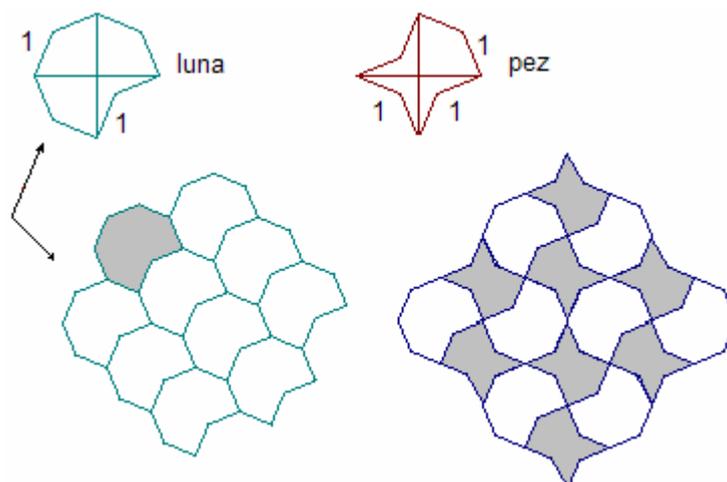


Figura 44: Teselados con *lunas* y *peces*

Y, así podríamos continuar....

3. Conclusiones

En 1973, la proporción Cordobesa fue introducida por el arquitecto de la Hoz. A partir de entonces, esta proporción ha sido mencionada y considerada por algunos autores, pero sólo en formas rectangulares, y siempre a través de la presencia común del Número Cordobés y del Número de Plata en el octógono regular. En este artículo, hemos mostrado el significado geométrico de esta proporción dinámica, esto es, la relevancia del ángulo de 45° . Además, hemos descubierto y estudiado varias formas poligonales relacionadas con la Proporción Cordobesa. Es sorprendente la enorme posibilidad de generación de nuevos diseños y originales teselados.

El número 45 es igual a la suma de los dígitos 0, 1, 2,..., 9. Por esta razón, en Numerología, este número simboliza “todas las posibilidades”. Este hecho puede ser aceptado o no, pero lo que ciertamente hemos constatado, es que el Número Cordobés se encuentra en “casi todas partes”.

4. Referencias

- [1] Doblado, M., *La proporción cordobesa en la arquitectura*. Actas del Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en la Ingeniería y la Arquitectura. Universidad Politécnica de Madrid, (Spain), 2008.
http://www.camino.upm.es/matematicas/maic/congreso%202/026%20La%20proporci_363nDEFINITIVO.pdf.
- [2] Dudeney, H. E. *536 Puzzles & Curious Problems*. Chares Scribner's Sons, New York, 1967.
- [3] Federico, C. y Díaz, N. *La hija no reconocida de la familia de las proporciones*. Journal of Mathematics & Design Vol.2, 89-95, 2005.
- [4] Federico, C. Díaz, N. y M.J. Arias, *La proporción cordobesa. Una secuencia de actividades para su enseñanza*. Journal of Mathematics & Design Vol.6, 21-28, 2006.
- [5] Fernández, I. y Reyes, E. *Geometría con el hexágono y el octógono*. Proyecto Sur de Ediciones. ISBN 84-8254-291-5. Granada (Spain), 2003.
- [6] Frederickson, G. *Disecciones: Plane & Fancy*. Cambridge University Press, 1997.
- [7] Grünbaun B. and Shephard, G.C. *Tilings and Patterns*. Freeman & Company, New York, 1987.
- [8] Hoz, R., *La proporción Cordobesa*. Actas de la quinta asamblea de instituciones de Cultura de las Diputaciones. Ed. Diputación de Córdoba, 1973.
- [9] Hoz, R., *La Proporción Cordobesa*, Actas de las VII Jornadas Yaluzas de Educación Matemática Thales. Ed. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba, 1996.
- [10] Hoz, R., *Rafael de la Hoz*. Consejo Superior de los Colegios de Arquitectos de España. ISBN 8460977234. Córdoba (Spain), 2005.
- [11] Kappraff, J. *Musical proportions at the basis of systems of architectural proportion both ancient y modern*. NEXUS - Architecture y Mathematics. Ed. Kim Williams, 1996.
- [12] Lindgren, H., *Recreational Problems in Geometric Disecciones and How to Solve Them*. Dover, New York, 1972.
- [13] Redondo, A., *Algunos resultados sobre Números Metálicos*, Journal of Mathematics & Design Vol. 6, N°1, pp. 29-45, 2006.

- [14] Redondo, A., *Polygons, diagonals and the Bronze Mean*, Nexus Network Journal, Architecture & Mathematics, Vol. 9, nº2, pp.321-326, 2007.
- [15] Redondo, A. y Reyes, E., *The Cordovan Proportion: Geometry, Art and Paper folding*, Hyperseeing, May-June 2008. Proceedings of Seventh Interdisciplinary Conference ISAMA 2008-Valencia (Spain).
- [16] Špinadel, V., *From the golden mean to chaos*. Ed.Nueva Librería, 1998. 2ª Edición Nobuko.2004.

Web pages

- [17] <http://mathworld.wolfram.com/Disección.html>
- [18] http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/belleza/canoncordobes.htm
- [19] http://maralboran.org/web_ma/descartes/Geometria/belleza/introc.htm
- [20] <http://www.arrakis.es/~mcj/cordoba.htm>
- [21] <http://tessellations.home.comcast.net>
- [22] <http://www.mathpuzzle.com/tilepent.html>
- [23] http://www.uam.es/personal_pdi/filoyletras/jsango/lacework_analysis.htm
- [24] <http://members.tripod.com/vismath1/spinadel/>. *The family of metallic means*. Visual Mathematics, **1**, Nº. 3, 1999.