

Градимиp B. Миловановић

Квадратурни процеси и нове примене

(Академска беседа одржана 20. 5. 2013. године)

КВАДРАТУРНИ ПРОЦЕСИ И НОВЕ ПРИМЕНЕ

1. Увод у квадратурне процесе

Најзначајније откриће у нумеричкој анализи у 19. веку биле су Гаусове квадратурне формуле из 1814. године. Гаус¹ [11] је драматично унапредио Њутнове² идеје о нумеричкој интеграцији из 1676. године, увећавајући алгебарски степен тачности квадратурне формуле

$$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=1}^n A_k f(\tau_k) + R_n(f),$$

са $n - 1$ на $2n - 1$. У Њутновом приступу, чворови τ_1, \dots, τ_n , тј. тачке у којима се израчунава вредност функције $t \mapsto f(t)$ били су еквидистантни. Дванаест година након Гауса, Јакоби³ је дао елегантно алтернативно извођење Гаусових формула, а за даље доприносе и прерастање овог открића у теорију током друге половине деветнаестог века заслужни су Мелер⁴, Хајне⁵, Радау⁶ и многи други, међу којима се посебно издваја Кристофел⁷, који је 1877. године дао значајну генерализацију Гаусових формула за произвољне тежинске функције или мере, и тиме омогућио фундаменталну везу са ортогоналним полиномима и верижним разломцима. Такве формуле са максималним (алгебарским) степеном тачности данас су познате као *Гаус-Кристофелове квадратурне формуле*, при чему су *ортогонални полиноми* главни алат у овој теорији. За анализу грешке $R_n(f)$ ових формула у разним класама функција, као и конвергенцију низа квадратурних формула, заслужни су Марков⁸, Стилтјес⁹, Успенски¹⁰, итд.

Први значајан прогрес у конструкцији Гаус-Кристофелових формула (чворова τ_k и тежинских коефицијената A_k) за произвољну позитивну меру $d\mu$ на \mathbb{R} са коначним или неограниченим носачем, за коју сви моменти μ_k постоје и $\mu_0 > 0$, дали су 1969. године Голуб¹¹ и његов сарадник Велш¹² [21], редукујући конструкцију на проблем сопствених вредности за симетричну три-дијагоналну (тзв. Јакобијеву) матрицу

$$J_n(d\mu) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \mathbf{0} \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ \mathbf{0} & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

¹ Carl Friedrich Gauß (1777–1855), немачки математичар и физичар.

² Isaac Newton (1643–1727), енглески математичар и физичар.

³ Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), немачки математичар.

⁴ Gustav Ferdinand Mehler (1835–1895), немачки математичар.

⁵ Heinrich Eduard Heine (1804–1851), немачки математичар.

⁶ Jean Charles Rodolphe Radau (1835–1911), француски астроном и математичар, рођен на територији данашње Пољске.

⁷ Elwin Bruno Christoffel (1829–1900), немачки математичар и физичар.

⁸ Андрџ Андројевич Марков (1856–1922), руски математичар.

⁹ Thomas Joannes Stieltjes (1856–1894), холандски математичар.

¹⁰ Јаков Викторович Успенский (1883–1947), руски и амерички математичар (познат и као James Victor Uspensky као професор Универзитета у Станфорду, САД).

¹¹ Gene Howard Golub (1932–2007), амерички математичар, био је професор Универзитета у Станфорду, САД.

¹² John H. Welsch (нема доступних података).

Низови (α_k) и (β_k) су коефицијенти у трочлавној рекурентној релацији

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k\pi_{k-1}(t), \quad \pi_0(t) = 1, \quad \pi_{-1}(t) = 0,$$

за низ моничних ортогоналних полинома $\pi_k(\cdot) = \pi_k(d\mu; \cdot)$ у односу на скаларни производ дефинисан на скупу свих полинома \mathcal{P} помоћу

$$(p, q) = \int_{\mathbb{R}} p(t)q(t) d\mu(t) \quad (p, q \in \mathcal{P}).$$

Чворови квадратуре τ_k , $k = 1, \dots, n$, су сопствене вредности Јакобијеве матрице $J_n(d\mu)$, а прве компоненте $v_{k,1}$ одговарајућих нормализованих сопствених вектора v_k дају тежинске коефицијенте (Кристофелове бројеве) Гаусових квадратура,

$$A_k = \lambda_{n,k} = \beta_0 v_{k,1}^2, \quad k = 1, \dots, n,$$

где су

$$\mathbf{v}_k = [v_{k,1} \ \dots \ v_{k,n}]^T \quad (\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = 1), \quad \beta_0 = \mu_0 = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t).$$

Низови (α_k) и (β_k) зависе само од мере $d\mu$, тј. тежинске функције $w(t) = d\mu/dt$ ако је мера апсолутно непрекидна, али су они нажалост познати, у експлицитном облику, само за неке уске класе тежинских функција, какве су, на пример, класичне тежине: *Јакобијева тежина* $w(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\alpha, \beta > 1$, на $(-1,1)$; *генералисана Лагерова*¹³ *тежина* $w(t) = t^\alpha e^{-t}$, $\alpha > 1$, на $(0, \infty)$; и *Ермитова*¹⁴ *тежина* $w(t) = e^{-t^2}$ на $(-\infty, \infty)$. Класични ортогонални полиноми су зато заузели значајну улогу у применама.

Други значајан прогрес се десио почетком осамдесетих година прошлог века, када је Волтер Гаучи¹⁵ у серији радова, препознавши низове коефицијената (α_k) и (β_k) као фундаменталне величине, развио тзв. *конструктивну теорију ортогоналних полинома на \mathbb{R}* (видети [12], [13]).

Заиста, исти рекурзиони коефицијенти (α_k) и (β_k) појављују се и у Јакобијевом верижном разломку, који је придружен мери $d\mu$ (Стилтјесова трансформација мере)

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{z-t} \sim \frac{\beta_0}{z-\alpha_0} - \frac{\beta_1}{z-\alpha_1} - \dots$$

За n -ти конвергент

$$R(z) = \frac{\beta_0}{z-\alpha_0} - \frac{\beta_1}{z-\alpha_1} - \dots - \frac{\beta_{n-1}}{z-\alpha_{n-1}} = \frac{\sigma_n(z)}{\pi_n(z)},$$

који је иначе рационална функција $R(z)$, нуле ортогоналног полинома $z = \tau_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, n$, су њени прости полови. У бројиоцу ове рационалне функције су тзв. *придружени полиноми* $\sigma_n(z)$, који такође задовољавају претходну трочлану рекурентну релацију, са истим рекурзивним коефицијентима, али са другим почетним условима: $\sigma_0(t) = 0$ и $\sigma_{-1}(t) = -1$. Развојем рационалне функције $R(z)$ у парцијалне разломке добијамо

$$R(z) = \frac{\sigma_n(z)}{\pi_n(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k^{(n)}}{z - \tau_k^{(n)}},$$

¹³ Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886), француски математичар.

¹⁴ Charles Hermite (1822–1901), француски математичар.

¹⁵ Walter Gautschi (1927–), амерички математичар швајцарског порекла.

где су $A_k^{(n)}$ одговарајући остаци

$$A_k^{(n)} = \lim_{z \rightarrow \tau_k^{(n)}} (z - \tau_k^{(n)}) \frac{\sigma_n(z)}{\pi_n(z)} = \frac{1}{\pi_n'(\tau_k^{(n)})} \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_n(t)}{t - \tau_k^{(n)}} d\mu(t).$$

С друге стране, Гаус-Кристофелова квадратурна формула

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu(t) = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(\tau_k^{(n)}) + R_n(f),$$

која је тачна за све полиноме степена не вишег од $2n - 1$, тј. $R_n(\mathcal{P}_{2n-1}) = 0$, има управо $A_k^{(n)}$ као тежинске коефицијенте и $\tau_k^{(n)}$ као чворове, што даје фундаменталну везу између ортогоналних полинома, верижних разломака и Гаусових квадратурних формула.

Конструктивна теорија ортогоналних полинома укључује: (1) ефективне алгоритме за нумеричко генерисање ортогоналних полинома, тј. коефицијената (α_k) и (β_k), $k \leq N - 1$, за унапред задато N и произвољну меру (метод модификованих момената, дискретизованна Стилтјес-Гаучијева процедура, Ланцошев¹⁶ алгоритам); (2) строгу анализу стабилности таквих алгоритама; (3) опште алгоритме за модификације мера помоћу линеарних и квадратних фактора и делитеља; (4) више нових примена ортогоналних полинома; и (5) неопходан софтвер за имплементацију таквих алгоритама и одговарајућих примена.

Током 1983. године имао сам срећу да отпочнем интензивну сарадњу са Волтером Гаучијем која траје до данашњих дана, из које је проистекло десетак заједничких радова и која је имала значајан утицај на моју научну оријентацију, али и мојих сарадника. Волтерова конструктивна теорија је отворила врата и дала инспирацију за нови приступ ортогоналности, конструкцију великог броја нових класа строго неklasичних ортогоналних полинома, веома често и у односу на извесне екзотичне тежинске функције, као и опсежан нумерички рад са таквим полиномима, укључујући низ нових примена. Навешћу само неколико главних праваца истраживања који су обележили моју научну каријеру у последње три деценије:

- Развој нових класа ортогоналних полинома и одговарајућих квадратурних формула.
- Сплајн апроксимације које задржавају максимални број момената ([17], [10], [36]).
- Развој ортогоналности на јединичној полукружници и кружном луку у односу на нехермитски скаларни производ ([16], [20], [30], [54]).
- Конструктивни приступ у развоју \mathbf{s} и σ -ортогоналности, чиме је покренут даљи развој квадратурних процеса (максималног степена тачности) са вишеструким чворовима, који је након увођења средином прошлог века (Туран¹⁷, Чакалов¹⁸, Поповићи¹⁹, Гисети²⁰, Осичини²¹, Станку²², ...) ушао у засићење због непосто-

¹⁶ Corelius Lanczos (1893–1974), мађарско-амерички математичар и физичар.

¹⁷ Pál Turán (1910–1976), мађарски математичар.

¹⁸ Любомир Николов Чакалов (1886–1963), бугарски математичар.

¹⁹ Tiberiu Popoviciu (1906–1975), румунски математичар.

²⁰ Aldo Ghizzetti (1908–1992), италијански математичар.

²¹ Alessandro Ossicini (1921–1999), италијански математичар.

²² Dimitrie D. Stancu (1927–2014), румунски математичар.

јања алгоритма за стабилну конструкцију. Наши алгоритми ([29], [19], [36]) обезбедили су даљи интензиван развој ове важне области ([55], [61], [56], [57]).

- Развој ортогоналности на радијалним зрацима у комплексној равни ([33], [37]).
- Развој метода код вишеструке (мултипл) ортогоналности и Боргесових²³ квадратура [58], генералисаних Биркхоф²⁴-Јангових²⁵ квадратура [39], итд.
- Примене у разним областима нумеричке и примењене анализе (нумеричка интеграција [39], интерполациони процеси [24], интегралне једначине [25–28]).
- Интеграција брзо осцилаторних функција [34].
- Методи за сумирање спороконвергентних редова ([15], [31], [32], [40]).
- Развој ортогоналних неполиномиалних система и одговарајућих квадратурних процеса ([35], [46], [60]).
- Развој нестандартних квадратурних формула максималног степена тачности ([7], [43–45], [47–50]), итд.

У овој приступној беседи осврнућу се само на неке од ових праваца и укратко описати главне резултате, посебно оне добијене након мог избора за дописног члана САНУ²⁶ (2006). Поред кратког прегледа наших резултата за Гаус-Кристофелове квадратурне формуле у односу на неklasичне тежинске функције на \mathbb{R}_+ , у даљем тексту бавимо се сумирањем споро конвергентних редова, генерализацијама Биркхоф-Јангове квадратуре, нестандартним квадратурама Гаусовог типа, као и методима за решавање Фредхолмове²⁷ интегралне једначине друге врсте.

Поред многобројних примена у математици (нумеричка анализа, теорија апроксимација, вероватноћа и статистика, оптимизација, ...), као и у физици, теоријској хемији, телекомуникацијама, електромагнетици, и многим другим примењеним наукама и инжењерству, квадратурне формуле су нашле у последње време, за многе, неочекивану примену и у тзв. *комплексним мрежама*. Такве мреже обезбеђују моделе за разне системе (физичке, биолошке, друштвене, ...), као на пример, транспортне мреже, молекуларне структуре, генске и протеинске интеракције, интернет (видети део интернет мреже на сл. 1.1), итд. Анализа помоћу графова обезбеђује квантитативне алате за проучавање комплексних мрежа, при чему се углавном користе методи из области спектралне теорије графова, линеарне и мултилинеарне алгебре, теорије апроксимација, теорије вероватноће, оптимизације, итд. Тако се, у последње време, створила мултидисциплинарна *наука о мрежама*²⁸, а основан је и нови часопис *Journal of Complex Networks* у издању Oxford University Press. Не улазећи у моделе (и алгоритме за њихово генерисање), којима се веома квалитетно апроксимирају многи системи, како природни тако и они створени људским умом (интернет, мрежа цитирања, WWW, ...), многи проблеми у квантитативној анализи комплексних мрежа се свode на израчунавање (или процену вредности) билинеарне форме облика $\mathbf{u}^T f(A)\mathbf{v}$, где је A матрица суседства у графу (велике димензије), $f(t)$ аналитичка функција (на пример, $f(t) = \exp(t)$) и \mathbf{u} и \mathbf{v} су погодно изабрани вектори. Након извесних трансформација, билинеарна форма се

²³ Carlos Freitas Borges (1961–), амерички математичар.

²⁴ Garrett Birkhoff (1911–1996), амерички математичар.

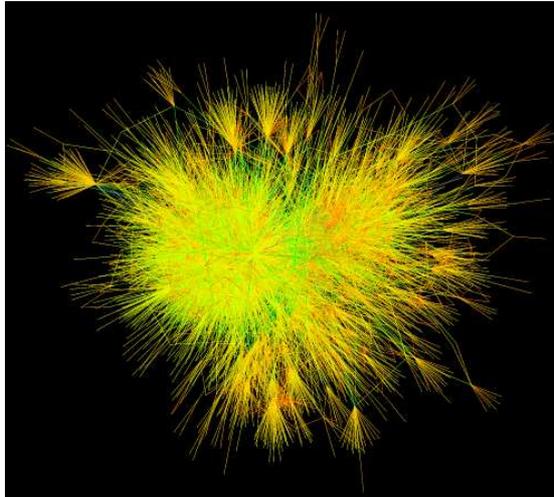
²⁵ David M. Young Jr. (1923–2008), амерички математичар.

²⁶ У приступном предавању под насловом *Квадратурни процеси – развој и нови правци*, које сам одржао на 7. скупу Одељења за математику, физику и гео-науке (26.10.2007.) и које је објављено у раду [38], детаљније су приказане квадратуре са вишеструким чворовима, ортогоналност у односу на момент функционеле са одговарајућим квадратурама, као и квадратуре Гаусовог типа за Минцове системе [(Chaim) Herman Müntz (1884–1956), немачки математичар].

²⁷ Erik Ivar Fredholm (1866–1927), шведски математичар.

²⁸ *Network science*, на engleskom.

може изразити помоћу интеграла $\int_a^b f(t) d\mu(t)$, и тада се за његово израчунавање могу користити квадратурне формуле Гаусовог типа.



Слика 1.1. Део интернета као пример комплексне мреже

2. Гаус-Кристофелове квадратуре за неklasичне тежине на \mathbb{R}_+

Захваљујући методама развијених у оквиру конструктивне теорије ортогоналности, израчунавање коефицијената (α_k) и (β_k) , у општем случају, се реализује нумеричким методама (видети [12], [13], [42]). При њиховој нумеричкој конструкцији јавља се проблем велике нестабилности, у односу на мале пертурбације улазних величина. Међутим, прогрес који је учињен последњих двадесетак година у симболичком израчунавању и у тзв. аритметици променљиве прецизности, данас омогућава генерисање низова рекурзивних коефицијената понекад и директном применом оригиналног Чебишевљевог метода момената, уз коришћење аритметике довољно високе прецизности, што омогућава превазилажење нумеричке нестабилности! Такви софтвери за ортогоналне полиноме и квадратурне формуле су данас доступни:

- **Matlab**-пакет **SOPQ** (Гаучи: <https://www.cs.purdue.edu/archives/2002/wxg/>);
- **Mathematica**-пакет **OrthogonalPolynomials** (видети [7], [52]: доступан на сајту Математичког института САНУ <http://www.mi.sanu.ac.rs/~gvm/>).

У даљем тексту размотрићемо конструкцију ортогоналних полинома и одговарајућих Гаус-Кристофелових квадратурних формула на интервалу $(0, +\infty)$ за неколико типичних строго неklasичних тежина (видети [15], [31], [39], [41]).

2.1. Бозе²⁹-Ајнштајнова³⁰ и Ферми³¹-Диракова³² тежинска функција. Ове тежинске функције су дефинисане на реалној полуоси $(0, +\infty)$ помоћу

$$w_1(t) = \varepsilon(t) = \frac{t}{e^t - 1} \quad \text{и} \quad w_2(t) = \varphi(t) = \frac{1}{e^t + 1},$$

²⁹ Satyendra Nath Bose (1894–1974), индијски математичар и теоријски физичар.

³⁰ Albert Einstein (1879–1955), теоријски физичар, творац теорије релативности, јеврејског порекла, рођен у Немачкој. Радио је у Швајцарској, Немачкој и САД-у.

³¹ Enrico Fermi (1901–1954), италијански физичар.

³² Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984), енглески теоријски физичар.

респективно. Одговарајуће квадратурне формуле користе се за апроксимацију независних честица термодинамичких променљивих у проблемима физике чврстог стања, како за бозоне тако и за фермионе. По први пут у литератури, у нашем раду [15], како је приметио референт у *Math. Reviews* **MR0771039** (86j:65028), појављује се систематска анализа алгоритма за конструкцију квадратурних формула високе прецизности за интеграцију на $(0, +\infty)$ са Бозе-Ајнштајновом и Ферми-Дираковом дистрибуцијом.

Моменти, у оба случаја, се могу израчунати егзактно у терминима Риманове³³ зета функције,

$$\mu_k(\varepsilon) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{k+1}}{e^t - 1} dt = (k+1)! \zeta(k+2), \quad k \in \mathbb{N}_0;$$

$$\mu_k(\varphi) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{e^t + 1} dt = \begin{cases} \log 2, & k = 0, \\ (1 - 2^{-k}) k! \zeta(k+1), & k > 0. \end{cases}$$

Помоћу нашег **Mathematica**-пакета **OrthogonalPolynomials**, са следећим командама (у случају Бозе-Ајнштајнове тежине)

```
<< orthogonalPolynomials'
mEin = Table[(k+1)! Zeta[k+2], {k,0,100}];
{aIE, beE} = aChebyshevAlgorithm[mEin, WorkingPrecision->55];
```

добивамо првих 50 рекурентних коефицијената $\{aIE, beE\}$ са максималном релативном грешком 3.31×10^{-21} , коришћењем аритметике са 55 децималних цифара, тако да сада можемо израчунати Гаусове параметре (чворове и тежинске коефицијенте) за свако $n \leq 50$. На пример, за $n = 10$, са командама

```
PGQ[n_] := aGaussianNodesWeights[n, aIE, beE, WorkingPrecision->25, Precision->20]
{n10, w10} = N[PGQ[10], 20]
```

добивамо квадратурне чворове и тежинске коефицијенте (са 20 коректних децималних цифара)

```
{{0.17127645878001723630, 0.89167285640716281560, 2.1546962419952769267,
3.9409621944320753085, 6.2730549781202005837, 9.2198332084047489872,
12.896129024261770678, 17.492620202296984539, 23.375068766890757875,
31.480929908705477946}, {0.40175819838719705508, 0.61781515020685988777,
0.43092384916712431584, 0.16018318534772922234, 0.031116001568317075487,
0.0030029502799063140584, 0.00013244003563186081692, 2.2807340153227672644*10^-6,
1.1114755872888526597*10^-8, 6.6895094339315858173*10^-12}}
```

2.2. Хиперболичке тежинске функције. За хиперболичке тежине

$$w_1(t) = \frac{1}{\cosh^2 t} \quad \text{и} \quad w_2(t) = \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}$$

на \mathbb{R}_+ , моменти се могу израчунати егзактно у облику

³³ Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), немачки математичар.

$$\mu_k^{(1)} = \int_0^{+\infty} t^k w_1(t) dt = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \log 2, & k = 1, \\ \frac{(2^{k-1} - 1)k!}{4^{k-1}} \zeta(k), & k \geq 2, \end{cases}$$

и

$$\mu_k^{(2)} = \int_0^{+\infty} t^k w_2(t) dt = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ k \left(\frac{\pi}{2}\right)^k |E_{k-1}|, & k = 1, 3, \dots, \\ \frac{2k}{4^k} (\psi^{(k-1)}(1/4) - \psi^{(k-1)}(3/4)), & k = 2, 4, \dots, \end{cases}$$

где су E_k Ојлерови³⁴ бројеви дефинисани функцијом генератрисе

$$\frac{2}{e^t + e^{-t}} = \sum_{k=0}^{+\infty} E_k \frac{t^k}{k!},$$

а $\psi(z)$ је логаритамски извод гама функције $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, познат као *дигамма* функција.

За конструкцију Гаусових формула, на пример, у односу на тежинску функцију w_1 за свако $n \leq 50$ неопходни су моменти за $k \leq 99$. Следећи низ команди

```
<< orthogonalPolynomials'
mom1=Join[{1,Log[2]},Table[(2^(k-1)-1)k!/4^(k-1)Zeta[k],{k,2,99}]];
{al,be}=aChebyshevAlgorithm[mom1, WorkingPrecision -> 100];
```

обезбеђује првих 50 рекурентних коефицијента са максималном релативном грешком 3.65×10^{-63} .

Значај хиперболичких тежина изнео је познати руски математичар Никишин³⁵ у свом пленарном предавању на Светском Конгресу у Хелсинкију 1978. године. Он је указао на важност неких неklasичних ортогоналних полинома, посебно предлажући, ако је могуће, добијање експлицитних облика полинома ортогоналних у односу на хиперболичку тежинску функцију

$$w(t) = \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{t}} - 1} \quad \text{на } [0, \infty).$$

Делимични одговор на његово питање дали су Дик Аски³⁶ и његов докторанд Вилсон³⁷ током 1979–1982 серијом радова у америчком часопису *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. Интересантно је поменути да је ову функцију разматрао и наш математичар, академик Михаило Петровић³⁸, само у другом контексту [64].

Како се моменти за ову тежинску функцију могу тачно израчунати помоћу Риманове зета функције или Бернулијевих³⁹ бројева,

³⁴ Leonhard Euler (1707–1783), велики швајцарски математичар.

³⁵ Евгений Михайлович Никишин (1945–1986), руски математичар.

³⁶ Richard Askey (1933–2019), амерички математичар.

³⁷ James A. Wilson, амерички математичар.

³⁸ Михаило Петровић Алас (1878–1943), српски математичар, члан Српске краљевске академије и оснивач Београдске математичке школе.

³⁹ Jacob Bernoulli (1654–1705), швајцарски математичар.

$$\mu_k = \int_0^{+\infty} t^k w(t) dt = \frac{(2k+1)! \zeta(2k+2)}{2^{2k+1} \pi^{2k+2}} = \frac{(-1)^k B_{2k+2}}{2(k+1)}, \quad k \geq 0,$$

применом **Mathematica**-пакета **OrthogonalPolynomials**, у симболичком моду, добијамо низове коефицијената (α_k) и (β_k) ,

$$\frac{1}{10}, \frac{871}{790}, \frac{1672667011}{539062030}, \frac{50634486717810987107}{8296534235776787390}, \\ \frac{3241115879498605269828015564949609681}{320801324751624360801327631933415050}, \\ \frac{33997166425449190461935977373367509427873901096149062267962539737}{2250982862154466109023940031230828037199191529990062067706688650}, \dots$$

и

$$\frac{1}{12}, \frac{79}{2100}, \frac{1312225}{1441671}, \frac{2491734801234609}{512172182993900}, \frac{27698062380526543547153670700}{1769555822315229089057426013}, \\ \frac{73831654628177585749472101931021709847231607386620121}{1916567747646383756531435551392677231030059362847500}, \dots$$

респективно. Мада смо у могућности да симболички одредимо (разумно) велики број ових коефицијента, који постају све гломазнији разломци, питање њихових експлицитних израза остаје мистерија!

2.3. Тежинска функција $t \mapsto \exp(-t^\alpha - t^\beta)$, $\alpha, \beta > 0$. Када је $\alpha = \beta > 0$ имамо “лакши случај“, када се моменти могу тачно одредити у облику

$$\mu_k = \int_0^{+\infty} t^k w(t) dt = \frac{2}{\beta} K_{(k+1)/\beta}(2), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

где је $K_r(z)$ модификована Беселова⁴⁰ функција друге врсте. У том случају, на пример за $\alpha = \beta = 2$ (са `WorkingPrecision -> 120`) добијамо првих 100 рекурентних коефицијената са максималном релативном грешком мањом од 2.21×10^{-23} или са око 22 тачне децималне цифре. Ово показује да процес конструкције веома сензитиван, који у најгорем случају изазива губитак од око 98 децималних цифара!

Општи случај је много компликованији и захтева коришћење Мејерове⁴¹ G функције

$$G_{p,q}^{m,n} \left(z \mid \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right) \equiv G_{p,q}^{m,n} \left(z \mid \begin{matrix} a_1, \dots, a_n; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m; b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right) \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{\nu=1}^m \Gamma(b_\nu - s) \prod_{\nu=1}^n \Gamma(1 - a_\nu + s)}{\prod_{\nu=m+1}^q \Gamma(1 - b_\nu + s) \prod_{\nu=n+1}^p \Gamma(a_\nu - s)} z^s ds,$$

где празан производ треба интерпретирати као 1 ($1 \leq m \leq q, 1 \leq n \leq p$). За неке специфичне вредности параметара α и β можемо добити моменте у аналитичком облику, на пример,

⁴⁰ Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846), немачки астроном, математичар, физичар и геодета.

⁴¹ Cornelis Simon Meijer (1904–1974), холандски математичар.

$$\begin{aligned}\mu_k^{(1,2)} &= \frac{1}{2^{k+2}\sqrt{\pi}} G_{2,4}^{3,1} \left(\frac{1}{4} \left| \begin{array}{c} -; - \\ -\frac{k+1}{2}, -\frac{k}{2}, 0; - \end{array} \right. \right), \quad k \geq 0; \\ \mu_k^{(2,1)} &= \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} G_{2,4}^{3,1} \left(\frac{1}{4} \left| \begin{array}{c} -; - \\ 0, \frac{k+1}{2}, \frac{k+2}{2}; - \end{array} \right. \right), \quad k \geq 0; \\ \mu_k^{(3,1)} &= \frac{3^{k+1/2}}{2\pi} G_{2,5}^{4,1} \left(\frac{1}{27} \left| \begin{array}{c} -; - \\ 0, \frac{k+1}{3}, \frac{k+2}{3}, \frac{k+3}{3}; - \end{array} \right. \right), \quad k \geq 0; \\ \mu_k^{(1/2,3/2)} &= \frac{1}{3^{2k+5/2}\pi} G_{2,5}^{4,1} \left(\frac{1}{27} \left| \begin{array}{c} -; - \\ -\frac{2k+2}{3}, -\frac{2k+1}{3}, -\frac{2k}{3}, 0; - \end{array} \right. \right), \quad k \geq 0.\end{aligned}$$

Напоменимо да овакве “егзотичне” тежинске функције налазе примену у тзв. тежинским (полиномским) апроксимацијама на \mathbb{R}_+ за “убијање” сингуларитета на крајевима интервала и одговарајућим квадратурним формулама Гаусовог типа за интеграцију функција са експоненцијалним растом у околини нуле и/или бесконачности (за детаље видети [24], [27], [41]).

3. Сумирање споро конвергентних редова

Споро конвергентни редови се појављују у многим проблемима у математици, физици, инжењерству и другим наукама.

Нека је $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ парцијалних сума реда, за који је $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = \rho.$$

Ако је $-1 \leq \rho < 1$, за низ кажемо да конвергира *линеарно*, док за $\rho = 0$ конвергенција је *хиперлинеарна*. За $\rho = 1$ кажемо да низ конвергира *логаритамски*, док за $|\rho| > 1$ имамо *дивергенцију* низа.

Постоји велики број нумеричких метода, базираних на линеарним и нелинеарним трансформацијама, за убрзавање конвергенције низова, а самим тим и за сумирање тзв. *споро конвергентних редова* (на пример, Чезаро⁴² сумирање, Ајткинова⁴³ Δ^2 –трансформација, Вин⁴⁴-Шанков⁴⁵ ε –алгоритам, E –алгоритам, трансформација, ρ –алгоритам, итд.). Основна идеја ових метода је да се на низ парцијалних сума $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ споро конвергентног реда $S \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right)$ примени тзв. *убрзавајућа* трансформација $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, задржавајући притом исту суму, али тако да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n - S}{S_n - S} = 0.$$

Међутим, наши *сумационо-квadratурни* методи за споро конвергентне редове,

$$T_m = \sum_{k=m}^{+\infty} f(k) \quad \text{и} \quad S_m = \sum_{k=m}^{+\infty} (-1)^k f(k),$$

о којима ће овде бити речи, засновани су на интеграцији и захтевају два корака:

⁴² Ernesto Cesàro (1859–1906), италијански математичар.

⁴³ Alexander Aitken (1895–1967), познати математичар са Новог Зеланда.

⁴⁴ Peter Wynn (1931–2017), енглески математичар.

⁴⁵ Daniel Shanks (1917–1996), амерички математичар.

(а) егзактне трансформације редова на интеграле

$$T_m = \int_{\mathbb{R}} g_m(t)w(t)dt \quad \text{и} \quad S_m = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}_m(t)\hat{w}(t)dt,$$

где су функције g_m и \hat{g}_m повезане са оригиналном функцијом f на одређени начин, док су тежинске функције w и \hat{w} дефинисане на \mathbb{R} или \mathbb{R}_+ ;

(б) конструкција квадратурних формула (најчешће Гаусовог типа) у односу на тежинске функције w и \hat{w} .

Функција $z \mapsto f(z)$, која се појављује у редовима T_m и S_m , може зависити од више параметара, нпр. $f(z; x, y, \dots)$, тако да се овај метод сумирања може применити и на неке класе функционалних редова, а не само на нумеричке редове.

У зависности од особина функције f за редове T_1 и S_1 често је погодно одстранити коначан број првих чланова и сумирати их директно, тј.

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 \\ S_1 \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^{+\infty} (\pm 1)^k f(k) = \sum_{k=1}^{m-1} (\pm 1)^k f(k) + \left\{ \begin{array}{l} T_m \\ S_m \end{array} \right\},$$

а сумационо-квадратурну процедуру применити на ред код кога индекс сумирања почиње са $k = m$, тј.

$$T_m = \sum_{k=m}^{\infty} f(k) = \int_{\mathbb{R}} g_m(x)w(x)dx \approx \sum_{\nu=1}^N A_{\nu}g(x_{\nu}),$$

у случају реда T_1 . Слично се може поступити и код алтернативног реда S_1 . Функције g_m и w , као и \hat{g}_m и \hat{w} код сумирања алтернативног реда, зависе од метода трансформације (корак (а)), при чему су тежинске функције, по правилу, неklasичне, тако да је пре конструкције Гаусових квадратурних формула (корак (б)), применом Голуб-Велшовог алгоритма, неопходно одредити коефицијенте у трочлавној рекурентној релацији за моничне полиноме за такве неklasичне тежинске функције. У даљем тексту укратко наводимо само главне идеје на којима се заснивају егзактне трансформације редова на интеграле код наших метода за сумирање споро конвергентних редова (корак (а)). За детаље видети [15], [31], [40].

3.1. Метод заснован на примени Лапласове⁴⁶ трансформације. Претпоставимо да се општи члан реда може изразити преко Лапласове трансформације (или њеног извода) неке познате функције, нпр. $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt$, $\text{Re } s \geq 1$. Тада

$$T_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-kt} g(t) dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kt} \right) g(t) dt,$$

тј.

$$T_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} g(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \frac{g(t)}{t} dt.$$

Дакле, сумирање реда T_1 је овим сведено на проблем интеграције функције $t \mapsto g(t)/t$ са Бозе-Ајнштајновом тежинском функцијом $\varepsilon(t)$ на $(0, +\infty)$, што је већ разматрано у одељку 2.1. Слично, за алтернативне редове, имамо

⁴⁶ Pierre Simon Laplace (1749–1827), француски математичар.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k f(k) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + 1} (-g(t)) dt,$$

где се у интеграцији сада појављује Ферми-Диракова функција $\varphi(t)$ на $(0, +\infty)$, која је разматрана, такође, у одељку 2.1.

3.2. Метод контурне интеграције. Алтернативну сумационо-квдратурну процедуру за редове T_m и S_m , када је за $k \geq m$ функција f аналитичка у области

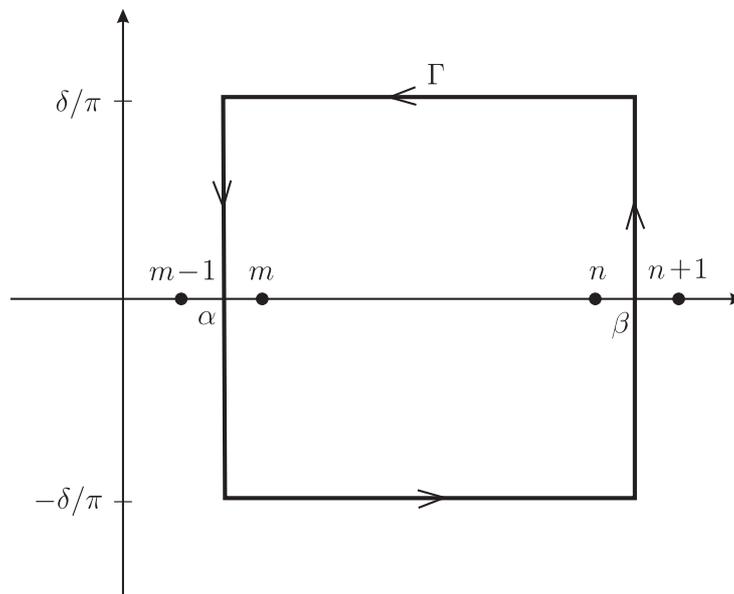
$$D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \alpha, m - 1 < \alpha < m\},$$

дали смо у раду [35], где смо разматрали редове

$$T_{m,n} = \sum_{k=m}^n f(k), \quad S_{m,n} = \sum_{k=m}^n (-1)^k f(k),$$

код којих су $m \in \mathbb{Z}$ и n коначан цео број већи од m или $n = +\infty$. Метод захтева неодређени интеграл од f , у ознаци F , који је изабран тако да задовољава извесне особине (видети за детаље и примене [31], [32], [40], [41]). Коришћењем контурне интеграције дуж правоугаоне контуре у комплексној равни (сл. 3.1), у могућности смо да редукујемо израчунавање сума $T_{m,n}$ и $S_{m,n}$ на проблем Гаусових квадратура на $(0, +\infty)$ у односу на хиперболичке тежинске функције, разматране раније у одељку 2.2,

$$w_1(t) = \frac{1}{\cosh^2 t}, \quad w_2(t) = \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}.$$



Слика 3.1. Контура интеграције

За холоморфну функцију f у области $G = \{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq \operatorname{Re} z \leq \beta, |\operatorname{Im} z| \leq \delta/\pi\}$, где су $m - 1 < \alpha < m$, $n < \beta < n + 1$ ($m, n \in \mathbb{Z}, m < n$), $\delta > 0$ и $\Gamma = \partial G$, коришћењем Кошијеве⁴⁷ теореме о остацима, суме $T_{m,n}$ и $S_{m,n}$ се могу представити у облику

⁴⁷Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), француски математичар.

$$T_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) \frac{\pi}{\tan \pi z} dz, \quad S_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) \frac{\pi}{\sin \pi z} dz.$$

или, након парцијалне интеграције, као

$$T_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 F(z) dz, \quad S_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 \cos \pi z F(z) dz,$$

где је F интеграл од f . Сада за F претпоставимо следеће услове:

(C1) F је холоморфна функција у области D ;

(C2) $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} e^{-c|t|} F(x + it/\pi) = 0$, униформно за $x \geq \alpha$;

(C3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-c|t|} |F(x + it/\pi)| dt = 0$,

где је $c = 2$ или $c = 1$, када разматрамо $T_{m,n}$ или $S_{m,n}$ респективно.

Ако ставимо $\alpha = m - 1/2$, $\beta = n + 1/2$, и пустимо да $\delta \rightarrow +\infty$, претходни интегрални на контури Γ се свде на интеграле са тежинским функцијама w_1 и w_2 ,

$$T_{m,n} = \int_0^{+\infty} w_1(t) [\Phi(\alpha, t/\pi) - \Phi(\beta, t/\pi)] dt$$

и

$$S_{m,n} = \int_0^{+\infty} w_2(t) [(-1)^m \Psi(\alpha, t/\pi) + (-1)^n \Psi(\beta, t/\pi)] dt,$$

где су

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2} [F(x + iy) + F(x - iy)] = -\operatorname{Re} F(x + iy)$$

и

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{2i} [F(x + iy) - F(x - iy)] = \operatorname{Im} F(x + iy).$$

Када $n \rightarrow +\infty$, други члан у претходним интегралима постаје нула, тако да за одговарајуће редове ($\alpha = m - 1/2$) имамо

$$T_m = T_{m,\infty} = \int_0^{+\infty} w_1(t) \Phi\left(\alpha, \frac{t}{\pi}\right) dt, \quad S_m = S_{m,\infty} = (-1)^m \int_0^{+\infty} w_2(t) \Psi\left(\alpha, \frac{t}{\pi}\right) dt.$$

Дакле, за сумирање редова (као и за налажење коначних сума $T_{m,n}$ и $S_{m,n}$) потребне су само одговарајуће Гаусове квадратурне формуле са тежинама w_1 и w_2 , чија је конструкција описана у одељку 2.2.

Илустроваћемо сада примену овог метода и показати његову ефикасност на следећем једноставном примеру

$$T_1(p) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1/p}(k+1)}, \quad p > 0,$$

за који су

$$f_p(z) = \frac{1}{z^{1/p}(z+1)},$$

$$F_p(z) = \frac{pz^{1-1/p}}{p-1} {}_2F_1\left(1, 1 - \frac{1}{p}; 2 - \frac{1}{p}; -z\right) - \frac{\pi}{\sin(\pi/p)},$$

где је ${}_2F_1$ добро позната Гаусова хипергеометријска функција. Ред је споро конвергентан, који за $p \rightarrow +\infty$ постаје дивергентан.

За $p = 2$, ред $T_1(2) = 1.8600250792211903071806959\dots$ се појављује у проучавању спирала и дефинише добро познату Теодорову⁴⁸ константу [8]. Првих n чланова реда $T_1(2)$ даје следеће резултате:

$$\begin{aligned} n = 10^2 &: 1.6611815943068811905, \\ n = 10^4 &: 1.8400262457853669133, \\ n = 10^6 &: 1.8580250803878559488, \end{aligned}$$

са максимално две тачне децималне цифре (приказане подебљано). Напоменимо да је, у овом случају, $F_2(z) = 2 \arctan \sqrt{z} - \pi$. Повећавањем вредности за p , ред постаје све спорији. На пример, за $p = 6$, узимајући првих милион чланова реда $T_1(6)$ (тј. суму $T_{1,10^6}$), све цифре су погрешне.

Показаћемо сада ефикасност наше трансформације. Како је

$$T_1(p) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k^{1/p}(k+1)} + \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{1}{k^{1/p}(k+1)},$$

трансформацију примењујемо на ред чији индекс почиње са $k = m$, затим на добијени интеграл примењујемо Гаусову квадратуру у односу на хиперболичну тежину w_1 , тако да најзад добијамо апроксимацију у облику

$$T_1(p) \approx Q_m^{(N)}(p) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k^{1/p}(k+1)} + \sum_{\nu=1}^N A_{\nu,1}^N \Phi_p(m-1/2, \tau_{\nu,1}^N/\pi),$$

са $\Phi_p(x, y) = -\frac{1}{2} [F_p(x+iy) + F_p(x-iy)]$, где су $\tau_{\nu,1}^N$ и $A_{\nu,1}^N$ параметри Гаусове квадратуре у N тачака. Избором веће вредности за m , добија се бржа конвергенција низа $Q_m^{(N)}(p)$ (видети детаље у напред наведеним радовима). У табели 3.1 приказане су апроксимације за $p = 6$, $m = 10$, примењујући Гаусове квадратуре са $N = 5(10)45$ чворова. Прва погрешна цифра је подвучена.

Табела 3.1. Квадратурне апроксимације $Q_m^{(N)}(6)$

| N | $Q_{10}^{(N)}(6)$ |
|-----|--|
| 5 | 5.69941177638356 <u>30</u> |
| 15 | 5.6994117763835619667430485043356 <u>41</u> |
| 25 | 5.69941177638356196674304850433562773287204829 <u>03</u> |
| 35 | 5.69941177638356196674304850433562773287204829113580049 <u>97</u> |
| 45 | 5.699411776383561966743048504335627732872048291135800493867761 <u>06</u> |

⁴⁸ Теодор из Кирене (грч. Θεόδωρος ο Κυρηναίος, енг. Theodorus of Cyrene) је био старогрчки математичар који је живео током 5. века п.н.е.

Као што можемо видети метод је веома ефикасан. Квадратурна формула са само 45 чворова даје више од 60 тачних децималних цифара у суми $T_1(6)$.

Применом напред изложене трансформације могу се добити нове *интегралне репрезентације* познатих (генералисаних) Матиеувих⁴⁹ редова,

$$S_m(r) = \sum_{n \geq 1} \frac{2n}{(n^2 + r^2)^{m+1}}, \quad \tilde{S}_m(r) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{2n}{(n^2 + r^2)^{m+1}}.$$

Теорема 3.2. *За свако $m \in \mathbb{N}$ и $r > 0$ важе репрезентације*

$$S_m(r) = \frac{\pi}{m} \int_0^\infty \frac{\sum_{j=0}^{[m/2]} (-1)^j \binom{m}{2j} \left(r^2 - x^2 + \frac{1}{4}\right)^{m-2j} x^{2j}}{\left[\left(x^2 - r^2 + \frac{1}{4}\right)^2 + r^2\right]^m} w_1(\pi x) dx,$$

$$\tilde{S}_m(r) = \frac{\pi}{m} \int_0^\infty \frac{\sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} (-1)^j \binom{m}{2j+1} \left(r^2 - x^2 + \frac{1}{4}\right)^{m-2j-1} x^{2j+1}}{\left[\left(x^2 - r^2 + \frac{1}{4}\right)^2 + r^2\right]^m} w_2(\pi x) dx.$$

Теорема 3.1 је доказана у нашем раду са колегом Тибором Погањем⁵⁰ [53], на основу које је добијен нови израз за Беселову функцију прве врсте и реда $m - 1/2$, где је m цео број, решавањем одговарајуће Фредхолмове интегралне једначине прве врсте са недегенерисаним језгром.

4. Генералисане Биркхоф-Јангове квадратуре

У нашим истраживањима недавно смо увели тзв. *Биркхоф-Јангове* интерполационе квадратурне формуле за тежинске интеграле аналитичких функција на јединичном диску $\Omega = \{z: |z| \leq 1\}$ (видети [39])

$$I(f) := \int_{-1}^1 f(z)w(z)dz = Q_N(f) + R_N(f),$$

где је $w: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ парна ненегативна функција, за коју сви моменти $\mu_k = \int_{-1}^1 z^k w(z)dz$, $k = 0,1,\dots$, постоје и $\mu_0 = \int_{-1}^1 w(z)dz > 0$. $R_N(f)$ је одговарајући остатак.

За свако цело $m \geq 1$ и свако $N \in \mathbb{N}$, ставимо $N = 2mn + \nu$, где је $n = [N/(2m)]$ и $\nu \in \{0,1,\dots,2m-1\}$. Уведимо сада интерполациону квадратуру у облику

$$Q_N(f) = \sum_{j=0}^{\nu-1} C_j f^{(j)}(0) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m A_{k,j} \left[f(x_k e^{i\theta_j}) + f(-x_k e^{i\theta_j}) \right],$$

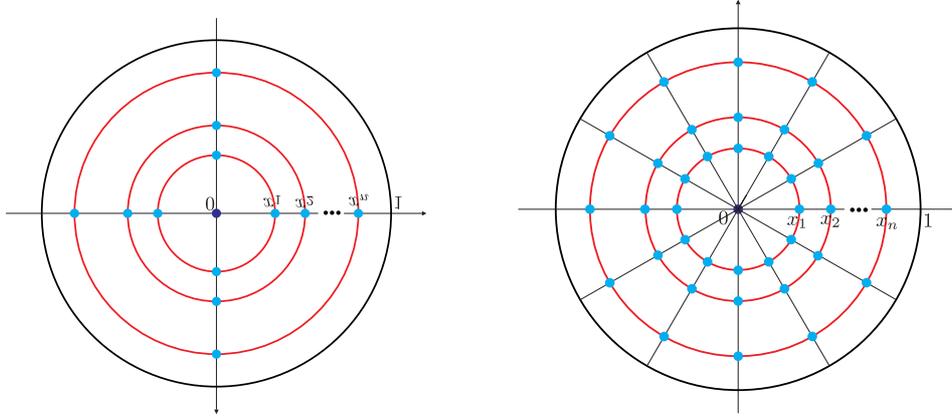
за коју је “чворни” полином дефинисан помоћу

⁴⁹ Émile Leonard Mathieu (1835–1890), француски математичар, у чијој се књизи о еластичности чврстих тела [23] први пут појављује ред $S_1(r)$.

⁵⁰ Tibor K. Pogány (1954–), професор Универзитета у Ријечи, Хрватска.

$$\omega_N(z) = z^\nu p_{n,\nu}(z^{2m}) = z^\nu \prod_{k=1}^n (z^{2m} - r_k), \quad 0 < r_1 < \dots < r_n < 1,$$

$$x_k = \sqrt[2m]{r_k}, \quad k = 1, \dots, n; \quad \theta_j = \frac{(j-1)\pi}{m}, \quad j = 1, \dots, m.$$



Слика 4.1. Дистрибуција чворова за $m = 2$ (лево) и $m = 6$ (десно)

Полином $p_{n,\nu}$ се може интерпретирати у терминима тзв. *полинома вишеструке ортогоналности типа IF^1* (видети [1], [67], [58], [59]) и доказати следећи резултат [39]:

Теорема 4.1. Нека су m и N природни бројеви, а n и ν цели бројеви такви да је $N = 2mn + \nu$, тј. $n = \lfloor N/(2m) \rfloor$ и $\nu \in \{0, 1, \dots, 2m - 1\}$. Дефинишимо $s := \nu - 1$ за парно ν и $s := \nu$, када је ν непарно. Тада за свако $N \in \mathbb{N}$ постоји јединствена интерполациона квадратурна формула $Q_N(f)$ са максималним алгебарским степеном тачности $d_{\max} = 2(m+1)n + s$. У том случају чворни полином $p_{n,\nu}(t)$ је вишеструко ортогоналан типа II у односу на тежинске функције $w_j(t) = t^{(s+2j)/(2m)-1} w(t^{1/(2m)})$, $j = 1, \dots, m$, тј. карактерише се следећим релацијама ортогоналности,

$$\int_0^1 t^\ell p_{n,\nu}(t) w_j(t) dt = 0, \quad \ell = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-j}{m} \right\rfloor.$$

У случају $m = 1$, чворни полином $\omega_{2n+\nu}(z) = z^\nu p_{n,\nu}(z^2)$, са $\nu = 0$ или $\nu = 1$, је монични полином степена $2n + \nu$, који је ортогоналан на простор $\mathcal{P}_{2n+\nu-1}$ у односу на парну тежинску функцију w на $(-1, 1)$, тако се наша квадратурна формула своди на стандардну Гаусову формулу на $(-1, 1)$ са $2n + \nu$ чворова. Низови полинома $p_{n,0}(t) = \omega_{2n}(\sqrt{t})$ и $p_{n,1}(t) = \omega_{2n+1}(\sqrt{t})/\sqrt{t}$ су ортогонални на $(0, 1)$ у односу на тежинске функције $w(\sqrt{t})/\sqrt{t}$ и $w(\sqrt{t})\sqrt{t}$, респективно (видети [24, Theorem 2.2.11]).

Дистрибуција чворова за $m = 2$ и $m = 6$ је приказана на сл. 4.1.

Биркхоф и Јанг [3] су 1950. године извели квадратурну формулу

$$\int_{z_0-h}^{z_0+h} f(z) dz = \frac{h}{15} \left\{ 24f(z_0) + 4[f(z_0+h) + f(z_0-h)] - [f(z_0+ih) + f(z_0-ih)] \right\} + R_5^{BY}(f)$$

⁵¹ Type II multiple orthogonal polynomials, на engleskom.

за нумеричку интеграцију дуж линијског сегмента у комплексној равни, где је $z \mapsto f(z)$ аналитичка функција у диску $\{z: |z - z_0| \leq r\}$ и $|h| \leq r$. Ова формула у пет тачака је тачна за све алгебарске полиноме степена не вишег од петог, а за њен остатак се може доказати (видети [68], [9, str. 136])

$$|R_5^{BY}(f)| \leq \frac{|h|^7}{1890} \max_{z \in S} |f^{(6)}(z)|,$$

где S означава квадрат са теменима у тачкама $z_0 + i^k h$, $k = 0, 1, 2, 3$. Трансформацијом линијског сегмента $[z_0 - h, z_0 + h]$ на $[-1, 1]$, формула се своди на

$$\int_{-1}^1 f(z) dz = \frac{8}{5} f(0) + \frac{4}{15} [f(1) + f(-1)] - \frac{1}{15} [f(i) + f(-i)] + R_5(f).$$

Значајно побољшање ове формуле је добио Тошић⁵² [66]

$$\int_{-1}^1 f(z) dz = \frac{16}{15} f(0) + \frac{1}{6} \left(\frac{7}{5} + \sqrt{\frac{7}{3}} \right) [f(r) + f(-r)] + \frac{1}{6} \left(\frac{7}{5} - \sqrt{\frac{7}{3}} \right) [f(ir) + f(-ir)] + R_5^T(f),$$

где су $r = \sqrt[4]{3/7}$ и

$$R_5^T(f) = \frac{1}{793800} f^{(8)}(0) + \frac{1}{61122600} f^{(10)}(0) + \dots$$

У то време, пре три деценије, у раду [52] генералисали смо Тошићеву формулу, увођењем два параметра r_1 и r_2 ($0 < r_1 < r_2 < 1$),

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(z) dz &= Af(0) + C_{11} [f(r_1) + f(-r_1)] + C_{12} [f(ir_1) + f(-ir_1)] \\ &\quad + C_{21} [f(r_2) + f(-r_2)] + C_{22} [f(ir_2) + f(-ir_2)] + R_9(f; r_1, r_2), \end{aligned}$$

и доказали да за

$$r_1 = r_1^* = \sqrt[4]{\frac{63 - 4\sqrt{114}}{143}}, \quad r_2 = r_2^* = \sqrt[4]{\frac{63 + 4\sqrt{114}}{143}},$$

оваква квадратурна формула има алгебарски степен тачности 13, са грешком

$$R_9(f; r_1^*, r_2^*) = \frac{1}{28122661066500} f^{(14)}(0) + \dots \approx 3.56 \cdot 10^{-14} f^{(14)}(0).$$

Ово је специјалан случај нашег општег резултата из теореме 4.1, који се добија за $m = 2$ и $N = 9$. Тада су $n = 2$ и $\nu = s = 1$, тако да је $d_{\max} = 2(m + 1)n + s = 13$ и

$$p_{2,1}(z) = z^2 - \frac{126}{143}z + \frac{15}{143}.$$

Тошићева формула је, такође, специјалан случај из теореме 4.1 за $m = 2$ и $N = 5$. Тада су $n = 1$ и $\nu = s = 1$, тако да је $d_{\max} = 2(m + 1)n + s = 7$ и $p_{1,1}(z) = z - 3/7$.

5. Нестандардне квадратуре Гаусовог типа

Ако се информације о функцији $\{f(\tau_k)\}_{k=1}^n$ у стандардним квадратурним формулама (СК)

⁵² Добрило Ђ. Тошић (1932–), професор Електротехничког факултета Универзитета у Београду, у пензији.

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu(t) = \sum_{k=1}^n w_k f(\tau_k) + R_n(f)$$

замене са $\{(\mathcal{A}^{h_k} f)(\tau_k)\}_{k=1}^n$, где је \mathcal{A}^h екстензија неког линеарног оператора $\mathcal{A}^h: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, $h \geq 0$, добијају се тзв. *нестандардне* квадратурне формуле (НСК)

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu(t) = \sum_{k=1}^n w_k (\mathcal{A}^{h_k} f)(\tau_k) + R_n(f).$$

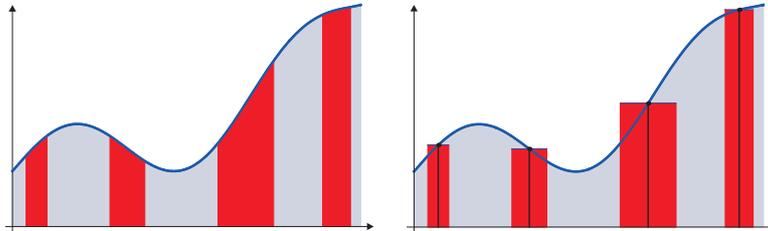
Приметимо да овде користимо исту нотацију за линеарне операторе дефинисане на простору свих алгебарских полинома и за њихове екстензије на неким класама интегралних функција. Типичан пример таквих оператора је *оператор усредњења* или *оператор Стеклова*⁵³, како се још назива,

$$(\mathcal{A}^h f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt, \quad h > 0.$$

У случају $h = 0$ овај оператор се интерпретира као *идентички* оператор $\mathcal{A}^0 = \mathcal{I}$, тако да је, за непрекидну функцију f , његова вредност у тачки x једнака $f(x)$, тј.

$$(\mathcal{A}^0 f)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (\mathcal{A}^h f)(x) = (\mathcal{I}f)(x) = f(x).$$

Нестандардне квадратуре (НСК) са оператором усредњења су познате као *интервалне квадратуре*, које су се појавиле крајем седамдесетих година прошлог века (видети [63], [65]). У многим применама, посебно у експерименталној физици и инжењерству, није могуће тачно измерити вредности функције $f(\tau_v)$, $v = 1, \dots, n$, већ само њихове средње вредности, тако да се уместо стандардних квадратура (СК) могу користити интервалне квадратуре са оператором усредњења (видети сл. 5.1 (лево)). Иначе, стандардне квадратуре се могу интерпретирати као нестандардне са оператором дефинисаним са



Слика 5.1. Информације о функцији: (лево) интервална квадратура са оператором усредњења; (десно) стандардна квадратура интерпретирана као нестандардна

$$(\mathcal{A}^h f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(x) dt = f(x),$$

тако да су вредности $(\mathcal{A}^{h_k} f)(\tau_k) = f(\tau_k)$, $k = 1, \dots, n$ (видети сл. 5.1 (десно)).

Уместо оператора усредњења \mathcal{A}^h могуће је разматрати и *тежински оператор усредњења* дат помоћу

$$(\mathcal{A}_w^h f)(x) = \frac{(\mathcal{A}^h fw)(x)}{(\mathcal{A}^h w)(x)} = \frac{\int_{x-h}^{x+h} f(t)w(t) dt}{\int_{x-h}^{x+h} w(t) dt},$$

⁵³ Владíмир Андрéевич Стеклóв (1864–1926), руски математичар, механичар и физичар.

или, чак у простијем облику, као

$$(\mathcal{B}_w^h f)(x) = (\mathcal{A}^h f w)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)w(t) dt,$$

где су $h > 0$ и w дата тежинска функција на коначном интервалу $[a, b]$.

5.1. Гаусове интервалне квадратурне формуле. За дату тежинску функцију $w: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ и $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, $h_\nu \geq 0$, $\nu = 1, \dots, n$, у овом одељку, користимо тежински оператор усредњења и уводимо интервалну квадратуру Гаусовог типа (ИКГТ) на I ,

$$\int_I f(x)w(x) dx = \sum_{\nu=1}^n \frac{\sigma_\nu}{w(I_\nu)} \int_{I_\nu} f(x)w(x) dx + R_n(f),$$

која је тачна за све алгебарске полинома степена не вишег од $2n - 1$, тј. $R_n(\mathcal{P}_{2n-1}) = 0$, где су $I_\nu = (x_\nu - h_\nu, x_\nu + h_\nu)$, $\nu = 1, \dots, n$, непреклапајући интервали чија је унија одговарајући подскуп од I . Величине $w(I_\nu)$, $\nu = 1, \dots, n$, су дате помоћу

$$w(I_\nu) = \int_{I_\nu} w(x) dx, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Средње тачке x_ν интервала I_ν , $\nu = 1, \dots, n$, су *чворови* интервалне квадратуре (ИКГТ), а величине σ_ν , $\nu = 1, \dots, n$, су њени *тежински коефицијенти*.

Приметимо да за непрекидне функције имамо

$$\lim_{h_\nu \rightarrow 0^+} \frac{1}{w(I_\nu)} \int_{I_\nu} f(x)w(x) dx = f(x_\nu), \quad \nu = 1, \dots, n,$$

тако да се (ИКГТ) за $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, своди на стандардну Гаусову квадратурну формулу. Такође, ако уместо тежинског оператора усредњења \mathcal{A}_w^h у (ИКГТ) ставимо његову једноставнију верзију \mathcal{B}_w^h , долазимо до квадратурне формуле

$$\int_I f(x)w(x) dx = \sum_{\nu=1}^n \frac{w_\nu}{2h_\nu} \int_{I_\nu} f(x)w(x) dx + R_n(f),$$

где су $w_\nu = 2h_\nu \sigma_\nu / w(I_\nu)$, $\nu = 1, \dots, n$.

За коначан интервал $I = [a, b]$, Бојанов⁵⁴ и Петров⁵⁵ [4] су доказали да оваква квадратурна формула егзистира, са позитивним тежинским коефицијентима w_ν , $\nu = 1, \dots, n$, као и да је јединствена у специјалном случају $h_\nu = h$, $\nu = 1, \dots, n$. Две године касније (2003) они доказују јединственост у општем случају, али само за Лежандрову⁵⁶ тежину ($w(x) = 1$), указујући да је доказ јединствености, у случају квадратура са произвољним тежинским функцијама, јако тежак проблем [5].

Коришћењем тополошког степена нелинеарних пресликавања, заједно са својим сарадником Цветковићем, у серији радова [43–45, 47–49] доказали смо јединственост општих интервалних квадратура Гаусовог типа за све класичне тежинске функције (*Јакобијева тежина* $w(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, на $(-1, 1)$; *генералисана Лагерова тежина* $w(t) = t^\alpha e^{-t}$, $\alpha > -1$, на $(0, \infty)$; и *Ермитова тежина* $w(t) = e^{-t^2}$ на $(-\infty, \infty)$) и дали алгоритме за њихову нумеричку конструкцију. Штавише, доказали смо егзистенцију и јединственост за неklasичне експоненцијалне тежине $w(x) = e^{-Q(x)}$ на

⁵⁴ Борислав Д. Бојанов (1944–2009), професор Универзитета у Софији, редовни члан Бугарске академије наука и мој дугогодишњи пријатељ, који је нажалост прерано преминуо.

⁵⁵ Петар П. Петров, бугарски математичар.

⁵⁶ Adrien-Marie Legendre (1752–1833), француски математичар.

неограниченим интервалима $I = \mathbb{R}$ и $I = \mathbb{R}_+$, претпостављајући да је Q непрекидна функција на I и да су сви алгебарски полиноми интегрални у односу на тежину w (видети [7]).

Теорема 5.1. *За дато $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, $h_\nu \geq 0$, $\nu = 1, \dots, n$, постоји јединствена Гаусова интервална квадратурна формула у односу на тежинску функцију $w(x) = e^{-Q(x)}$ на I , где су $I_\nu = (x_\nu - h_\nu, x_\nu + h_\nu)$, $\nu = 1, \dots, n$, непреклапајући интервали. У случају тежине w на $I = \mathbb{R}_+$, додатно имамо $x_1 - h_1 > 0$.*

5.2. Гаусове квадратуре базиране на операторским вредностима. Други приступ у квадратурним формулама са интервалима исте дужине и са оператором усредњења \mathcal{A}^h разматрао је Омладич⁵⁷ 1992. године у раду [62]. Средње тачке интервала су нуле неких ортогоналних полинома. Прецизније, у том раду је доказано да су чворови τ_ν , $\nu = 1, \dots, n$, нуле тзв. усредњених Лежандрових полинома $p_n^h(x) \equiv p_n(x)$, који задовољавају трочлану рекурентну релацију

$$p_{n+1}(x) = x p_n(x) - \frac{n^2(1 - n^2 h^2)}{4n^2 - 1} p_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

У циљу уопштења овог приступа, ставимо $H = H_\delta = [0, \delta)$, $\delta > 0$, и посматрајмо фамилије линеарних оператора \mathcal{A}^h , $h \in H$, на простору свих алгебарских полинома \mathcal{P} , са особином да очувавају степен полинома, $\deg(\mathcal{A}^h p) = \deg(p)$, као и да је

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} (\mathcal{A}^h p)(x) = p(x), \quad x \in \mathbb{C},$$

за свако $p \in \mathcal{P}$ и свако $h \in H$. Ако ставимо $\deg(0) \stackrel{\text{def}}{=} -1$, прва особина биће тачна и за нула полином.

За дату фамилију линеарних оператора \mathcal{A}^h , $h \in H$, у раду [49] разматрали смо нестандардну интерполациону квадратуру Гаусовог типа (ИКГТ)

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n w_k (\mathcal{A}^h f)(x_k) + R_n(f),$$

која је тачна за све алгебарске полиноме степена не вишег од $2n - 1$ и доказали следећи резултат:

Теорема 5.2. *Нека је $d\mu$ коначна позитивна Борелова⁵⁸ мера са носачем $\text{supp}(d\mu) \subset \mathbb{R}$. За свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $\varepsilon > 0$, тако да за свако $h \in H_\varepsilon = [0, \varepsilon)$ постоји јединствена интерполациона квадратура Гаусовог типа (ИКГТ), са чворовима $x_k \in \text{Co}(\text{supp}(d\mu))$ и позитивних тежина $w_k > 0$, $k = 1, \dots, n$.*

За конструкцију квадратурних формула (ИКГТ) предложен је стабилан нумерички алгоритам [49], а за специјалне класе линеарних оператора:

- оператор усредњења (оператор Стеклова)

$$(\mathcal{A}^h f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt, \quad h > 0;$$

- диференцни оператори

$$(\mathcal{A}^h p)(x) = \sum_{k=-m}^m a_k p(x+kh), \quad (\mathcal{A}^h p)(x) = \sum_{k=-m}^{m-1} a_k p\left(x + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right);$$

⁵⁷ Matjaž Omladič (1950–), словеначки математичар, професор Универзитета у Љубљани, Словенија.

⁵⁸ Émile Borel (1871–1956), француски математичар.

- диференцијални оператор

$$(\mathcal{A}^h p)(x) = \sum_{k=0}^m b_k \frac{h^k}{k!} D^k p(x), \quad D^k = \frac{d^k}{dx^k},$$

добијени су интересантни експлицитни резултати повезани са теоријом ортогоналних полинома. На пример, за конструкцију нестандартне квадратуре Гаусовог типа за оператор усредњења неопходан нам је n -ти полином из ортогоналног низа у односу на линеарну функционелу

$$\mathcal{L}^h(p) = \frac{\pi}{2h} \int_{\mathbb{R}} d\mu(x) \int_{\mathbb{R}} p(x + iy) \frac{\exp(-\pi y/h)}{(1 + \exp(-\pi y/h))^2} dy, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Приметимо да се у последњем интегралу појављује *логистичка тежина* [24, стр. 159]. Неки даљи резултати о нестандартним квадратурама које користе вредности извода интегранда могу се наћи у раду [50].

6. Фредхолмове интегралне једначине друге врсте

Интегралне једначине се појављују у разним математичким областима, али и многим областима попут класичне и квантне механике, кинетичке теорије гасова, оптималних система управљања, електромагнетици, теорији телекомуникација, геофизици, биологији и генетици, математичкој економији, итд. Многи контурни проблеми са диференцијалним једначинама могу се формулисати у терминима интегралних једначина, али има и таквих проблема који се формулишу само помоћу интегралних једначина.

Нас овде интересују само *Фредхолмове интегралне једначине друге врсте* (ФИЈ2),

$$f(\mathbf{y}) + \mu \int_{\mathcal{D}} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = g(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathcal{D},$$

где су језгро $k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, тежинска функција $w(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ су познате функције, $\mu \in \mathbb{R}$ је дати параметар, а $f(\mathbf{x})$ непозната функција.

Нумерички приступ у решавању интегралних једначина је један од основних проблема нумеричке анализе (за различите методе видети [2], [22], [24, стр. 362–385]). Нумерички методи за линеарне интегралне једначине доводе до алгебарских система линеарних једначина, који су често слабо условљени, тј. кондициони број (фактор условљености) одговарајућих матрица је велики. Иначе, решења интегралних једначина се најчешће апроксимирају полиномима, сплајновима, итд.

У даљем тексту разматраћемо веома важан једнодимензионални случај Фредхолмове интегралне једначине (ФИЈ2) на $\mathcal{D} = A = [-1, 1]$,

$$f(y) + \mu \int_A k(x, y) f(x) w(x) dx = g(y), \quad y \in A,$$

у односу Јакобијеву тежинску функцију, као и дводимензионалан случај на троуглу $\mathcal{D} = T$, који може бити редукован на квадрат $\mathcal{D} = Q = A^2$. Предложени методи су веома ефикасни и засновани су на прогресу који учињен у последње време у области полиномске интерполације [24].

6.1. Једнодимензионалан случај на $[-1, 1]$. За ФИЈ2 са Јакобијовом тежинском функцијом $w(t) = v^{\alpha, \beta}(x) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\alpha, \beta > 1$, дали смо нумерички метод за решавање једначине у просторима непрекидних функција снабдених униформним тежинским нормама. Увођењем

$$(Kf)(y) = \mu \int_{-1}^1 k(x, y)f(x)w(x) dx,$$

једначина (ФИЈ2) се може записати у операторском облику као $(I + K)f = g$, где је I идентички оператор. Претпостављајући непрекидност језгра и коришћењем Нистромове⁵⁹ методе, доказали смо стабилност и конвергенцију, као и добру условљеност одговарајућих матрица.

Уочимо још једну Јакобијеву тежину $v^{\gamma, \delta}(x) = (1-t)^\gamma(1+t)^\delta$, $\gamma, \delta > 0$, и дефинишемо простор функција као

$$C_{v^{\gamma, \delta}} = \left\{ f \in C^0((-1, 1)) : \lim_{x \rightarrow \pm 1} (fv^{\gamma, \delta})(x) = 0 \right\},$$

са нормом $\|f\|_{C_{v^{\gamma, \delta}}} = \|fv^{\gamma, \delta}\|_\infty$. Штавише, са

$$E_n(f)_{v^{\gamma, \delta}} = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \|(f - P_n)v^{\gamma, \delta}\|_\infty$$

означимо грешку најбоље тежинске апроксимације функције f из простора $C_{v^{\gamma, \delta}}$ помоћу полинома степена не вишег од n . Сада користимо Гаусову квадратуру са n чворова, у односу на Јакобијеву тежину $v^{\alpha, \beta}(x)$, за апроксимацију оператора K оператором K_n , који је дефинисан са

$$(K_n f)(y) = \mu \sum_{k=1}^n \lambda_k(v^{\alpha, \beta}) k(x_k, y) f(x_k),$$

где су x_k , $k = 1, \dots, n$, су нуле (ортонормираног) Јакобијевог полинома $p_n(v^{\alpha, \beta})$, а $\lambda_k(v^{\alpha, \beta})$, $k = 1, \dots, n$, одговарајући Кристофелови бројеви. На овај начин, решавамо следећи систем апроксимативних једначина

$$(I + K_n)f_n = g, \quad n = 1, 2, \dots$$

Множењем обе стране овог система једначина са $v^{\gamma, \delta}$, уз колокацију⁶⁰ у нулама x_i , $i = 1, \dots, n$, добијамо систем линеарних једначина (СЈ),

$$\sum_{k=1}^n \left[\delta_{i,k} + \mu \frac{v^{\gamma, \delta}(x_i)}{v^{\gamma, \delta}(x_k)} k(x_k, x_i) \lambda_k(v^{\alpha, \beta}) \right] a_k = g(x_i) v^{\gamma, \delta}(x_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

где су $a_k = f_n(x_k) v^{\gamma, \delta}(x_k)$, $k = 1, \dots, n$, непознате величине. Ако за довољно велико n (рецимо $n > n_0$), систем једначина има јединствено решење (a_1^*, \dots, a_n^*) , тада можемо конструисати Нистромов интерполант

$$f_n^*(y) = g(y) - \mu \sum_{k=1}^n k(x_k, y) \frac{\lambda_k(v^{\alpha, \beta})}{v^{\gamma, \delta}(x_k)} a_k^*.$$

Под рестрикцијом параметара, $0 \leq \gamma < 1 - \alpha$ и $0 \leq \delta < 1 - \beta$, и особине језгра

$$\lim_n \sup_{|y| \leq 1} v^{\gamma, \delta}(y) E_n(k_y) = 0, \quad \lim_n \sup_{|x| \leq 1} E_n(k_x)_{v^{\gamma, \delta}} = 0,$$

⁵⁹ Evert Johannes Nyström (1895–1960), фински математичар.

⁶⁰ У нумеричкој анализи појам *колокација* се користи за изједначавање (подешавање) леве и десне стране једначине у изабраним тачкама.

можемо доказати (видети [26]) да је $K: C_{v,\gamma,\delta} \rightarrow C_{v,\gamma,\delta}$ компактан оператор,

$$\sup_n \|K_n\|_{C_{v,\gamma,\delta} \rightarrow C_{v,\gamma,\delta}} \leq A < +\infty, \quad \limsup_N \sup_n \sup_{\|fv^{\gamma,\delta}\|_\infty=1} E_N(K_n f)_{v,\gamma,\delta} = 0,$$

$$(\forall f \in C_{v,\gamma,\delta}) \quad \lim_n \|(K - K_n)f\|_{C_{v,\gamma,\delta}} = 0,$$

$$\lim_n \|(K - K_n)K_n\|_{C_{v,\gamma,\delta} \rightarrow C_{v,\gamma,\delta}} = 0.$$

Штавише, ако је $\text{Ker}(I + K) = \{0\}$ у простору $C_{v,\gamma,\delta}$ и $g \in C_{v,\gamma,\delta}$ важи следећи резултат (видети [26]):

Теорема 6.1. *Систем једначина (СЈ) има јединствено решење за свако $n > n_0$ и низ $\{f_n^*\}_n$ конвергира у простору $C_{v,\gamma,\delta}$ ка егзактном решењу f^* операторске једначине $(I + K)f = g$, са следећом оценом грешке*

$$\|f^* - f_n^*\|_{C_{v,\gamma,\delta}} \leq C \left\{ \|f\|_{C_{v,\gamma,\delta}} \sup_{|y| \leq 1} v^{\gamma,\delta}(y) E_{n-1}(k_y) + \sup_{|y| \leq 1} v^{\gamma,\delta}(y) \|k_y\|_\infty E_{n-1}(f)_{v,\gamma,\delta} \right\},$$

у којој константа C не зависи од n и f^* . Штавише, ако V_n означава матрицу система једначина (СЈ), тада важи $\text{cond}(V_n) \leq \text{cond}(I + K_n) < \text{const}$.

Оцена грешке се може такође дати и у простору Собољева⁶¹

$$W^r(v^{\gamma,\delta}) = \{f \in C_{v,\gamma,\delta} : f^{(r-1)} \in AC((-1,1)) \wedge \|f^{(r)} \varphi^r v^{\gamma,\delta}\|_\infty < +\infty\}, \quad r \geq 1,$$

са нормом

$$\|f\|_{W^r(v^{\gamma,\delta})} := \|fv^{\gamma,\delta}\|_\infty + \|f^{(r)} \varphi^r v^{\gamma,\delta}\|_\infty,$$

где су $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ и $AC((-1,1))$ је простор апсолутно непрекидних функција на сваком компактном скупу на $(-1,1)$. Краткоће ради, ставимо $W^r(v^{0,0}) = W^r$. Под истим рестрикцијама за параметре $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (као у претходној теорему), измењеним условима за језгро

$$\sup_{|y| \leq 1} v^{\gamma,\delta}(y) \|k_y\|_{W^r} < +\infty, \quad \sup_{|x| \leq 1} \|k_x\|_{W^r(v^{\gamma,\delta})} < +\infty$$

и под претпоставком да $g \in W^r(v^{\gamma,\delta})$, оцена из теореме 6.1 постаје

$$\|(f^* - f_n^*)v^{\gamma,\delta}\|_\infty = \mathcal{O}(n^{-r}).$$

Докази, примери и други детаљи се могу наћи у нашем раду [26], док се слични резултати за Фредхолмове интегралне једначине друге врсте у односу на тежинске функције $w(x) = x^\alpha e^{-x^\beta}$ ($\alpha > 1, \beta > 1/2$) на полуоси $A = [0, +\infty)$ могу наћи у [25] и [26].

6.2. Фредхолмове једначине са две променљиве на троуглу. Овде разматрамо апроксимацију решења дводимезионалне Фредхолмове интегралне једначине друге врсте на троуглу са теменима у тачкама $(0,0), (0,1), (1,0)$, тј.

$$T = \left\{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \in [0, 1] \right\}.$$

⁶¹ Сергѝй Львович Соболев (1908–1989), руски математичар.

Дакле, разматрамо Фредхолмову једначину (ФИЈ2), када су $D = T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2$, k и g су дате функције дефинисане на T , f је непозната функција, док је тежинска функција w дата помоћу

$$w(x_1, x_2) = x_1^{p-1} x_2^{q-1} (x_1 + x_2)^a (1 - x_1 - x_2)^b, \quad p, q > 0, \quad p + q + a > 0, \quad b > -1.$$

Постоје више примена овог типа интегралних једначина у дводимензионалном електромагнетном расејању, аеродинамици, механици лома, итд.

Коришћењем погодне трансформације, можемо добити интегралну једначину на квадрату $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$, где се одговарајућа тежина појављује као производ две Јакобијеве тежине. Наиме, за тачке $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in T$ и $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in Q$ уводимо трансформацију квадрата Q на троугао T помоћу

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 + u_1)(1 + u_2), \quad x_2 = \frac{1}{4}(1 + u_1)(1 - u_2),$$

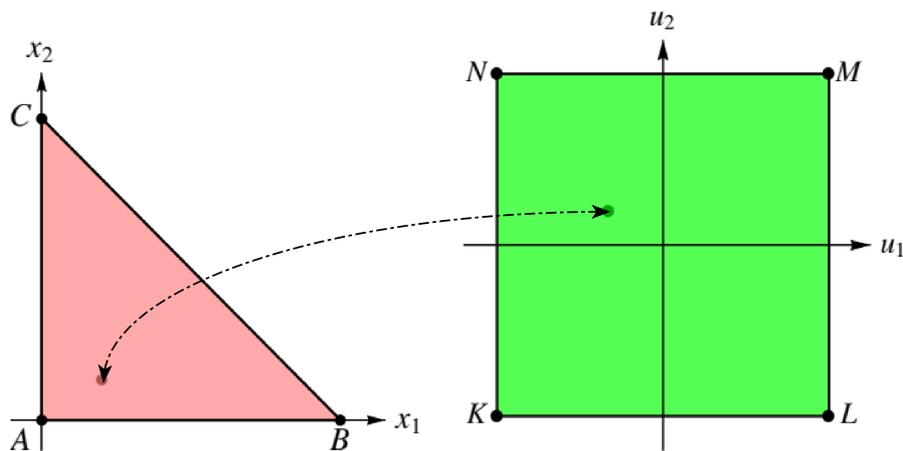
или обрнуто

$$u_1 = 2(x_1 + x_2) - 1, \quad u_2 = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2},$$

када за $x_1 + x_2 = 0$ (тачка A), пресликавање није једнозначно. Јакобијан пресликавања је дат са

$$J(x_1, x_2) = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} = -\frac{1}{8}(1 + u_1), \quad |J(x_1, x_2)| = \frac{1}{8}v^{0,1}(u_1).$$

Приметимо да се свака тачка странице квадрата \overline{NK} (када је $u_1 = -1$) пресликава у тачку A ($x_1 = x_2 = 0$), док се остале странице квадрата \overline{KL} , \overline{ML} , \overline{NM} , овом трансформацијом (видети сл. 6.1) пресликавају у странице троугла \overline{AC} , \overline{CB} , \overline{AB} , респективно. Напоменимо да постоје много различитих трансформација $T \leftrightarrow Q$, али све оне не обезбеђују услов да је резултујућа тежинска функција у интегралној једначини на квадрату Q једнака производу две Јакобијеве тежинске функције, као у овом случају. Заиста, дата интегрална једначина на троуглу (ФИЈ2), са тежинском функцијом $w(x_1, x_2)$, редукује се на једначину



Слика 6.1. Пресликавање $T \leftrightarrow Q$

$$F(\mathbf{v}) + \nu \int_Q h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) F(\mathbf{u}) \Omega(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = G(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in Q,$$

са новим параметром $\nu = \mu/2^{2p+2q+a+b-1}$, где су

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{v}) &= F(v_1, v_2) = f\left(\frac{(1+v_1)(1+v_2)}{4}, \frac{(1+v_1)(1-v_2)}{4}\right), \\
G(\mathbf{v}) &= G(v_1, v_2) = g\left(\frac{(1+v_1)(1+v_2)}{4}, \frac{(1+v_1)(1-v_2)}{4}\right), \\
\Omega(\mathbf{u}) &= \Omega(u_1, u_2) = w\left(\frac{(1+u_1)(1+u_2)}{4}, \frac{(1+u_1)(1-u_2)}{4}\right),
\end{aligned}$$

а језгро $h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = h(u_1, u_2, v_1, v_2) = k(x_1, x_2, y_1, y_2)$ је дато са

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k\left(\frac{(1+u_1)(1+u_2)}{4}, \frac{(1+u_1)(1-u_2)}{4}, \frac{(1+v_1)(1+v_2)}{4}, \frac{(1+v_1)(1-v_2)}{4}\right).$$

Једноставно је проверити да се тежина $\Omega(\mathbf{u})$ своди на производ две Јакобијеве тежине,

$$\Omega(\mathbf{u}) = v^{b,p+q+a-1}(u_1)v^{q-1,p-1}(u_2),$$

где је $v^{\gamma,\delta}(t) = (1-t)^\gamma(1+t)^\delta$.

Овим поступком, могући сингуларитети језгра на контури троугла T трансформишу се у одговарајуће сингуларитете дуж контуре квадрата Q и притом се “апсорбују” у оквиру Јакобијевих тежина. У раду [28] предложили смо глобалну апроксимацију решења интегралне једначине (ФИЈ2) на троуглу $\mathcal{D} = T$ помоћу Нистромовог метода базираног на тензорском производу две једнодимензионалне Гаусове квадратуре, и за такав метод смо доказали стабилност, конвергенцију и добру условљеност, као и оцену грешке у тежинским униформним просторима. Нумерички тестови су показали високу ефикасност предложеног метода.

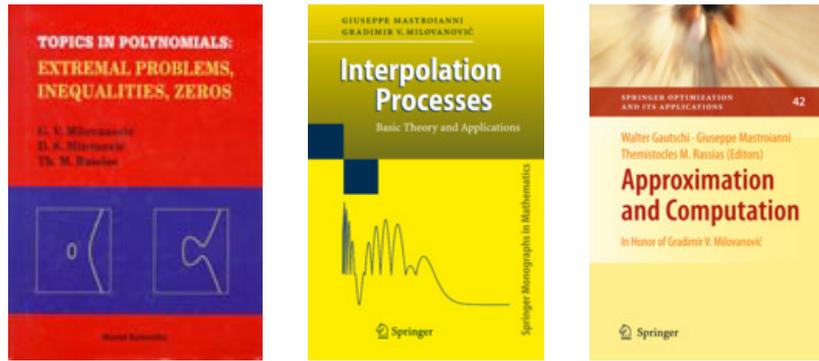
7. Закључак

У предходним одељцима укратко смо описали неке од наших резултата у контексту развоја поменутих области. У закључку ове беседе поменуо бих још неке од сродних области, у којима смо добили резултате, као што су *квадратурни процеси са вишеструким чворовима* ([36], [55–57], [60]), *интеграција брзо-осцилаторних функција* [34], *тригонометријски квадратурни процеси* [60], *Минцови системи и квадратуре* [35], [46], *оптималне квадратуре и сплајнови, ортогоналност на радијалним зрацима, специјалне функције, као и специјалне класе полинома и бројева*. Најзад, поменуо бих *интерполационе процесе и тежинске апроксимације*, којима смо са колегом Ђ. Мастројанијем⁶² посветили монографију [24] на око 450 страница у издању Springer Verlag (2008). Такође, поменуо бих и монографију “*Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*” објављену на око 830 страница (коаутори: Д.С. Митриновић⁶³ и Т.М. Расиас⁶⁴) у издању World Scientific (1994), која је доживела високу цитираност. Поред ових монографија на сл. 7.1 приказана је и књига “*Approximation and Computation*”, у издању Springer Verlag (уредници: В. Гаучи, Ђ. Мастројани и Т. Расиас), која представља Зборник радова са научне конференције одржане на Универзитету у Нишу (2008) и која је била посвећена мом 60-том рођендану.

⁶²Giuseppe Mastroianni (1939–), професор на Универзитету Базиликата у Потенци (Università degli Studi della Basilicata, Potenza), Италија. Наша сарадња је започела након његовог учешћа на интернационалној конференцији “*Numerical methods and approximation theory III*” (Niš, August 18–21, 1987).

⁶³ Драгослав С. Митриновић (1908–1995), српски математичар. Био је професор Електротехничког факултета Универзитета у Београду.

⁶⁴ Themistocles M. Rassias (1951–), професор Националног техничког универзитета (Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο) у Атини, Грчка. Наша сарадња је започела крајем осамдесетих година прошлог века.



Слика 7.1. Објављене књиге

У свом досадашњем раду сарађивао сам са многим математичарима из земље и иностранства, од којих бих посебно истакао професора Драгослава С. Митриновића, као руководиоца моје докторске дисертације (1976), Волтера Гаучија, Ђузепеа Мастојанија, Темистокла Расаиаса и Алала Гесаба⁶⁵, као и неке од мојих сарадника којима сам био руководиоца код израде докторских дисертација: Предраг Станимировић⁶⁶ (1996), Ненад Цакић⁶⁷ (1996), Миодраг Спалевић⁶⁸ (1997), Александар Цветковић⁶⁹ (2004) и Марија Станић⁷⁰ (2007). Све моје публикације и друге активности могу се наћи на сајту Математичког института САНУ: <http://www.mi.sanu.ac.rs/~gvm/>.

⁶⁵ Allal Guessab (1957 –), професор на Универзитету По (Université de Pau), Француска. Наша сарадња је почела након мог учешћа у Комисији за оцену и одбрану његове докторске дисертације (1987).

⁶⁶ Предраг С. Станимировић (1959 –), професор Природно-математичког факултета Универзитета у Нишу.

⁶⁷ Ненад П. Цакић (1952 –), професор Електротехничког факултета Универзитета у Београду.

⁶⁸ Миодраг М. Спалевић (1961 –), професор Машинског факултета Универзитета у Београду.

⁶⁹ Александар С. Цветковић (1972–), професор Машинског факултета Универзитета у Београду.

⁷⁰ Марија П. Станић (1975 –), професор Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу.

7. Литература

1. A.I. Aptekarev, Multiple orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* **99** (1998), 423–447.
2. K.E. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
3. G. Birkhoff, D.M. Young, Numerical quadrature of analytic and harmonic functions, *J. Math. Phys.* **29** (1950), 217–221.
4. B.D. Bojanov, P.P. Petrov, Gaussian interval quadrature formula, *Numer. Math.* **87** (2001), 625–643.
5. B.D. Bojanov, P.P. Petrov, Uniqueness of the Gaussian interval quadrature formula, *Numer. Math.* **95** (2003), 53–62.
6. A.S. Cvetković, G.V. Milovanović, The Mathematica Package “OrthogonalPolynomials”, *Facta Univ. Ser. Math. Inform.* **19** (2004), 17–36.
7. A.S. Cvetković, G.V. Milovanović, Gaussian interval quadrature rule for exponential weights, *Appl. Math. Comput.* **218** (2012), 9332–9341.
8. P.J. Davis, *Spirals: from Theodorus to Chaos* (With contributions by Walter Gautschi and Arieh Iserles), A.K. Peters, Wellesley, MA, 1993.
9. P. J. Davis, P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration* (2nd edn.), Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984.
10. M. Frontini, W. Gautschi, G.V. Milovanović, Moment-preserving spline approximation on finite intervals, *Numer. Math.* **50** (1987), 503–518.
11. C.F. Gauss, Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi, *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis Recentiores* **3**, 1814 [Werke III, pp. 163–196].
12. W. Gautschi, On generating orthogonal polynomials, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* **3** (1982), 289–317.
13. W. Gautschi, Orthogonal polynomials: applications and computation, *Acta Numerica* (1996), 45–119.
14. W. Gautschi, My collaboration with Gradimir V. Milovanović, In: *Approximation and Computation: In Honor of Gradimir V. Milovanović* (W. Gautschi, G. Mastroianni, Th.M. Rassias, eds.), pp. 33–43, Springer Optimization and Its Applications 42, Springer, New York – Dordrecht – Heidelberg – London, 2011.
15. W. Gautschi, G.V. Milovanović, Gaussian quadrature involving Einstein and Fermi functions with an application to summation of series, *Math. Comp.* **44** (1985), 177–190.
16. W. Gautschi, G.V. Milovanović, Polynomials orthogonal on the semicircle, *J. Approx. Theory* **46** (1986), 230–250.
17. W. Gautschi, G.V. Milovanović, Spline approximations to spherically symmetric distributions, *Numer. Math.* **49** (1986), 111–121.
18. W. Gautschi, G.V. Milovanović, S -orthogonality and construction of Gauss–Turán– type quadrature formulae, *J. Comput. Appl. Math.* **86** (1997) 205–218.
19. W. Gautschi, G.V. Milovanović, S -orthogonality and construction of Gauss–Turán– type quadrature formulae, *J. Comput. Appl. Math.* **86** (1997) 205–218.
20. W. Gautschi, H. Landau, G.V. Milovanović, Polynomials orthogonal on the semicircle, II, *Constr. Approx.* **3** (1987), 389–404.
21. G.H. Golub, J.H. Welsch, Calculation of Gauss quadrature rules, *Math. Comp.* **23** (1969), 221–230.
22. P.K. Kythe, P. Puri, *Computational Methods for Linear Integral Equations*, Birkhäuser, Boston – Basel – Berlin, 2002.
23. É.L. Mathieu, *Traité de Physique Mathématique VI–VII: Théorie de l’Elasticité des Corps Solides*, Gauthier–Villars, Paris, 1890.
24. G. Mastroianni, G.V. Milovanović, *Interpolation Processes – Basic Theory and Applications*, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 2008.

25. G. Mastroianni, G.V. Milovanović, Some numerical methods for second kind Fredholm integral equation on the real semiaxis, *IMA J. Numer. Anal.* **29** (2009), 1046–1066.
26. G. Mastroianni, G.V. Milovanović, Well-conditioned matrices for numerical treatment of Fredholm integral equations of the second kind, *Numer. Linear Algebra Appl.* **16** (2009), 995–1011.
27. G. Mastroianni, G.V. Milovanović, I. Notarangelo, Gaussian quadrature rules with an exponential weight on the real semiaxis, *IMA J. Numer. Anal.* (2013) doi: 10.1093/imanum/drt034, (to appear).
28. G. Mastroianni, G.V. Milovanović, D. Occorsio, Nyström method for Fredholm integral equations of the second kind in two variables on a triangle, *Appl. Math. Comput.* **219** (2013), 7653–7662.
29. G.V. Milovanović, Construction of s -orthogonal polynomials and Turán quadrature formulae, In: G.V. Milovanović (Ed.), *Numerical Methods and Approximation Theory III (Niš, 1987)*, Univ. Niš, Niš, 1988, pp. 311–328.
30. G.V. Milovanović, Complex orthogonality on the semicircle with respect to Gegenbauer weight: Theory and applications, In: *Topics in Mathematical Analysis* (Th.M. Rassias, ed.), pp. 695–722, Ser. Pure Math., 11, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989.
31. G.V. Milovanović, Summation of series and Gaussian quadratures, In: *Approximation and Computation* (R.V.M. Zahar, ed.), ISNM Vol. 119, Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin, 1994, pp. 459–475.
32. G.V. Milovanović, Summation of series and Gaussian quadratures, II, *Numer. Algorithms* **10** (1995), 127–136.
33. G.V. Milovanović, A class of orthogonal polynomials on the radial rays in the complex plane, *J. Math. Anal. Appl.* **206** (1997), 121–139.
34. G.V. Milovanović, Numerical calculation of integrals involving oscillatory and singular kernels and some applications of quadratures, *Comput. Math. Appl.* **36** (1998), 19–39.
35. G. V. Milovanović, Müntz orthogonal polynomials and their numerical evaluation, In: *Applications and Computation of Orthogonal Polynomials* (W. Gautschi, G.H. Golub, G. Opfer, eds.), ISNM, Vol. 131, Birkhäuser, Basel, 1999, pp. 179–202.
36. G.V. Milovanović, Quadrature with multiple nodes, power orthogonality, and moment-preserving spline approximation, *J. Comput. Appl. Math.* **127** (2001), 267–286.
37. G.V. Milovanović, Orthogonal polynomials on the radial rays in the complex plane and applications, *Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II*, Suppl. **68** (2002), 65–94.
38. G.V. Milovanović, Quadrature processes – development and new directions, *Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math.* **33** (2008), 11–41.
39. G.V. Milovanović, Numerical quadratures and orthogonal polynomials, *Stud. Univ. Babeş–Bolyai Math.* **56** (2011), 449–464.
40. G.V. Milovanović, Summation processes and Gaussian quadratures, *Sarajevo J. Math.* **7** (20) (2011), 185–200.
41. G.V. Milovanović, Quadrature processes and new applications, *Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math.* **38** (2013), 83–120.
42. G.V. Milovanović, Chapter 11: Orthogonal polynomials on the real line, In: *Walter Gautschi: Selected Works and Commentaries, Volume 2* (C. Brezinski, A. Sameh, eds.), Birkhäuser, Basel, 2013.
43. G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Uniqueness and computation of Gaussian interval quadrature formula for Jacobi weight function, *Numer. Math.* **99** (2004), 141–162.
44. G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Standard and non-standard quadratures of Gaussian type, In: *Approximation Theory: A volume dedicated to Borislav Bojanov* (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, R. Uluchev, eds.), pp. 186–200, Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2004.
45. G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Gauss–Laguerre interval quadrature rule, *J. Comput. Appl. Math.* **182** (2005), 433–446.
46. G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Gaussian type quadrature rules for Müntz systems, *SIAM J. Sci. Comput.* **27** (2005), 893–913.

47. G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Gauss–Radau and Gauss–Lobatto interval quadrature rules for Jacobi weight function, *Numer. Math.* **102** (2006), 523–542.
48. G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Gauss–Hermite interval quadrature rule, *Comput. Math. Appl.* **54** (2007), 544–555.
49. G.V. Milovanović, A. A.S. Cvetković, Nonstandard Gaussian quadrature formulae based on operator value, *Adv. Comput. Math.* **32** (2010), 431–486.
50. G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Gaussian quadrature rules using function derivatives, *IMA J. Numer. Anal.* **31** (2011), 358–377.
51. G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, Special classes of orthogonal polynomials and corresponding quadratures of Gaussian type, *Math. Balkanica* **26** (2012), 169–184.
52. G.V. Milovanović, R.Ž. Đorđević, On a generalization of modified Birkhoff–Young quadrature formula, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fis.*, No. 735 – No. 762 (1982), 130–134.
53. G.V. Milovanović, T.K. Pogány, New integral forms of generalized Mathieu series and related applications, *Appl. Anal. Discrete Math.* **7** (2013), 180–192.
54. G.V. Milovanović, P.M. Rajković, On polynomials orthogonal on a circular arc, *J. Comput. Appl. Math.* **51** (1994), 1–13.
55. G.V. Milovanović, M.M. Spalević, Error bounds for Gauss–Turán quadrature formulae of analytic functions, *Math. Comp.* **72** (2003), 1855–1872.
56. G.V. Milovanović, M.M. Spalević, An error expansion for some Gauss–Turán quadratures and L^1 -estimates of the remainder term, *BIT* **45** (2005), 117–136.
57. G.V. Milovanović, M.M. Spalević, Gauss–Turán quadratures of Kronrod type for generalized Chebyshev weight functions, *Calcolo* **43** (2006), 171–195.
58. G.V. Milovanović, M. Stanić, Construction of multiple orthogonal polynomials by a discretized Stieltjes–Gautschi procedure and corresponding Gaussian quadratures, *Facta Univ. Ser. Math. Inform.* **18** (2003), 9–29.
59. G.V. Milovanović, M.P. Stanić, Multiple orthogonality and applications in numerical integration, In: *Nonlinear Analysis: Stability, Approximation, and Inequalities* (P. Georgiev, P.M. Pardalos, H.M. Srivastava, eds.), Series: Springer Optimization and its Applications, Vol. 68, Chapter 26, pp. 431–455, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 2012.
60. G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, M.P. Stanić, Trigonometric orthogonal systems and quadrature formulae, *Comput. Math. Appl.* **56** (11), 2915–2931.
61. G.V. Milovanović, M.M. Spalević, A.S. Cvetković, Calculation of Gaussian type quadratures with multiple nodes, *Math. Comput. Modelling* **39** (2004), 325–347.
62. M. Omladič, Average quadrature formulas of Gauss type, *IMA J. Numer. Anal.* **12** (1992), 189–199.
63. M. Omladič, S. Pahor, A. Suhadolc, On a new type quadrature formulas, *Numer. Math.* **25** (1976), 421–426.
64. M. Petrovitch, Remarques sur l'intégrales $\int uv dx$, *L'Enseignement mathématique*, Genève **20** (4) (1919), 268–270.
65. Fr. Pitnauer, M. Reimer, Interpolation mit Intervallfunktionalen, *Math. Z.* **146** (1976), 7–15.
66. D. Dj. Tošić, A modification of the Birkhoff–Young quadrature formula for analytic functions, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fis.* No. 602 – No. 633 (1978), 73–77.
67. W. Van Assche, Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence. In: *Continued Fractions: From Analytic Number Theory to Constructive Approximation* (B.C. Berndt and F. Gesztesy, eds.), Contemporary Mathematics **236** (1999), 325–342.
68. D. M. Young, An error bound for the numerical quadrature of analytic functions, *J. Math. Phys.* **31** (1952), 42–44.