ОРТОГОНАЛНОСТ НА ОБЈЕКТИМА У КОМПЛЕКСНОЈ РАВНИ И ПРИМЕНЕ[1]

Градимир В. Миловановић[2]

Айстракт. Овај чланак представља део предавања одржаног на научној трибини Огранка Српске академије наука и уметности у Новом Саду. Поред уводног дела о ортогоналности на реалној правој, у раду се разматра ортогоналност на неким објектима у комплексној равни (јединична кружница и полукружница, радијални зраци) и дају неке примене.

1. Увод

У овом раду описаћемо ортогоналност на неким објектима у комплексној равни и указати на могуће примене, пре свега у нумеричкој интеграцији и нумеричком диференцирању. На неки начин овај рад је повезан са нашим претходним радом [1] из 2006. који се односио на примену Теорије ортогоналности у нумеричким процесима, са посебним освртом на различите концепте ортогоналности на реалној правој, као и више различитих примена у нумеричкој интеграцији, укључујући и концепт ортогоналности заснован на момент функционелама. Иначе, појам ортогоналности објеката није само везан за математику, већ се среће знатно шире у многим областима науке, технике и уметности.

У овом раду, поред неопходне дефиниције појма ортогоналности и стандардног увода који се односи на концепт ортогоналности на реалној правој (секција 2), главни део посвећујемо концепту ортогоналности на неким објектима у комплексној равни, заснованом на примени момент функционела, а указаћемо и на могуће нове примене ове теорије у неким актуелним проблемима нумеричке анализе. Секције 3 и 4 се односе на ортогоналне полиноме на јединичној кружници и јединичној полукружници у комплексној равни, респективно. У секцији 5 укратко разматрамо проблем интеграције квазисингуларних интеграла, а у секцији 6 ортогоналне Лоранове (Laurent) полиноме на јединичној полукружници. Најзад, у последњој седмој секцији разматрамо ортогоналност на радијалним зрацима у комплексној равни и указујемо на једну примену у електростатици.

Нека је X комплексни линеарни простор функција са *унутрашњим* (*скаларним*) *производом* $(f, g){:}X^2 \to \mathbb{C}$ таквим да су за свако $f, g, h \in X$ и свако $\lambda \in \mathbb{C}$ испуњени следећи услови

(а) $(f+g, h) = (f, h) + (g, h)$,
(б) $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$,
(в) $(f, g) = \overline{(g, f)}$,
(г) $(f, f) \geq 0$, $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$,

---

[1] Рад је написан на основу предавања које је одржано у Огранку САНУ у Новом Саду, 10. априла 2019. године.

[2] Члан САНУ.

познате редом као *линеарност*, *хомогеност*, *хермитска симетричност* и *позитивност*. Простор X тада називамо *простор са скаларним производом*.

Ако је X реални линеарни простор, тада за скаларни производ (f, g):$X^2 \to \mathbb{R}$, услов (в) треба заменити условом обичне *симетричности*

(в°) $(f, g) = (g, f)$.

За систем S ($S \subset X$) елемената простора X са скаларним производом кажемо да је *ортогоналан* ако је $(f, g) = 0$ за свако $f \neq g$ ($f, g \in S$). *Норма* елемента f је дефинисана са $\| f \| = \sqrt{(f, f)}$. Ако је $\| f \| = 1$ за свако $f \in S$, за систем кажемо да је *ортонормиран*.

Полазећи од неког система $U = \{g_0, g_1, g_2, \dots\}$ линеарно независних елемената у простору X са скаларним производом, на пример, са добро познатим Грам–Шмитовим (Gram–Schmidt) поступком ортогонализације може се конструисати одговарајући ортогонални (ортонормирани) систем $S = \{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\dots\}$, где је φ_n линеарна комбинација елемената $g_0, g_1, \dots, g_n$, таква да је $(\varphi_n, \varphi_k) = 0$ за свако $k < n$.

У овом излагању ограничићемо се само на ортогоналне алгебарске полиномијалне системе и класу ортогоналних рационалних функција, тзв. Лоранових полинома, које ћемо овде дефинисати. Иначе, могуће је разматрати тригонометријске ортогоналне системе, као и читав низ неполиномијалних система, попут Минцових (Müntz) система, Малмквист–Такенака (Malmquist–Takenaka) система, генералисаних експоненцијалних система, итд. (видети, на пример, [2]–[4], [5, стр. 79–89]).

2. Стандардни ортогонални полиноми на реалној правој

Нека је $\mathcal{P}$ простор реалних полинома, а $\mathcal{P}_n$ његов подскуп који се састоји од полинома степена не вишег од n. Нека је даље $\mathrm{d}\mu$ позитивна мера на $\mathbb{R}$ са коначним или неограниченим носачем, за коју сви моменти постоје

$$\mu_k = \int_{\mathbb{R}} t^k \,\mathrm{d}\mu(t) < \infty,\ k \geq 0;\ \mu_0 > 0.$$

У том случају, скаларни производ

$$(p, q) = \int_{\mathbb{R}} p(t)q(t)\mathrm{d}\mu(t)\ \ (p, q \in \mathcal{P})$$

је добро дефинисан и он генерише јединствен систем моничних ортогоналних полинома $\pi_k(\cdot) = \pi_k(\mathrm{d}\mu; \cdot)$, таквих да је

$$\pi_k(t) = t^k + \text{чланови нижег степена},$$
$$(\pi_k, \pi_n) = \|\pi_n\|^2 \delta_{k,n}.$$

У специјалном случају када је дата тзв. (ненегативна) тежинска функција $t \mapsto w(t)$ на (a, b), имамо $\mathrm{d}\mu(t) = w(t)\mathrm{d}t$.

Због особине скаларног производа $(tp, q) = (p, tq)$, ови ортогонални полиноми задовољавају *трочлану рекурентну релацију*

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t),$$

за свако $k \geq 0$, са $\pi_0(t) = 1$, $\pi_{-1}(t) = 0$.

Низови рекурзивних коефицијената (α_k) и (β_k) фундаменталне су величине у тзв. *конструктивној теорији ортогоналних полинома и квадратурних формула Гаусовог типа,* коју је почетком осамдесетих година прошлог века развио Волтер Гаучи (Walter Gautschi) [6] (видети такође [7]). Ови низови зависе само од мере $\mathrm{d}\mu$, тј. тежинске функције $w(t)$, али су нажалост познати, у експлицитном облику, само за неке уске класе тежинских функција, какве су, на пример, класичне тежине: Јакобијева (Jacobi) тежина на $(-1,1)$

$$w(t) = (1 - t)^\alpha (1 + t)^\beta, \qquad \alpha, \beta > -1;$$

генералисана Лагерова (Laguerre) тежина на $(0,\infty)$;

$$w(t) = t^\alpha \mathrm{e}^{-t}, \quad \alpha > -1;$$

и Ермитова (Hermite) тежина на $(-\infty,\infty)$

$$w(t) = \mathrm{e}^{-t^2}.$$

За једну карактеризацију класичних ортогоналних полинома видети [8].

Исти рекурзиони коефицијенти (α_k) и (β_k) појављују се и у Јакобијевом верижном разломку, који је придружен мери $\mathrm{d}\mu$ (Стилтјесова трансформација мере)

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\mu(t)}{z - t}$$

$$\sim \frac{\beta_0}{z - \alpha_0 -} \frac{\beta_1}{z - \alpha_1 -} \cdots .$$

За n-ти *конвергент*

$$R(z) = \frac{\beta_0}{z - \alpha_0 -} \frac{\beta_1}{z - \alpha_1 -} \cdots \frac{\beta_{n-1}}{z - \alpha_{n-1}} ,$$

тј.

$$R(z) = \frac{\sigma_n(z)}{\pi_n(z)},$$

који је иначе рационална функција, нуле ортогоналног полинома $z = \tau_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, n$, прости су полови функције $R(z)$. У бројиоцу ове рационалне функције су тзв. придружени полиноми $\sigma_n(z)$, који такође задовољавају претходну трочлану рекурентну релацију, са истим рекурзивним коефицијентима, али са другим почетним условима: $\sigma_0(t) = 0$ и $\sigma_{-1}(t) = -1$.

Развојем рационалне функције $R(z)$ у парцијалне разломке добијамо

$$R(z) = \frac{\sigma_n(z)}{\pi_n(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^{(n)}}{z - \tau_k^{(n)}} .$$

С друге стране, квадратурна формула Гаусовог (Gauss) типа,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \mathrm{d}\mu(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(\tau_k^{(n)}) + R_n(f),$$

тачна је за све полиноме степена не вишег од $2n - 1$, тј. $R_n(\mathcal{P}_{2n-1}) = 0$. Може се показати да су тежински коефицијенти (Кристофелови (Christoffel) бројеви) у Гаусовој квадратури управо једнаки коефицијентима у развоју функције $R(z)$ у парцијалне разломке (видети [5, стр. 114–115]), што даје фундаменталну везу између ортогоналних полинома и Гаусових квадратурних формула. Уколико су познати коефицијенти (α_k) и (β_k) у трочланој рекурентној релацији, конструкција одговарајућих Гаусових квадратурних формула може се једноставно извести применом Голуб–Велчовог (Golub–Welsch) алгоритма [9].

У општем случају конструкција коефицијената (α_k) и (β_k) реализује се нумеричким методама [6], на пример, методом момената, дискретизованом Стиелтјес–Гаучијевом процедуром, итд. (видети, такође, [7] и [5]). При њиховој нумеричкој конструкцији јавља се проблем велике нестабилности, у односу на мале пертурбације улазних величина. Међутим, прогрес који је учињен последњих двадесетак година у симболичком израчунавању и у тзв. аритметици промењљиве прецизности, данас омогућава генерисање низова рекурзивних коефицијената директно применом оригиналног Чебишевљевог метода момената, уз коришћење аритметике довољно високе прецизности, што омогућава превазилажење нумеричке нестабилности! Такви софтвери за ортогоналне полиноме и квадратурне формуле су данас доступни:

Matlab-пакет **SOPQ** (Gautschi);

Mathematica-paket **OrthogonalPolynomials** (Цветковић и Миловановић [10], [11]) доступан на сајту Математичког института САНУ: http://www.mi.sanu.ac.rs/~gvm/

3. Ортогонални полиноми на јединичној кружници

Ову класу ортогоналних полинома увео је Сеге (G. Szegö) у радовима [12] и [13], што су касније развили многи аутора (Смирнов, Ахиезер, Креин, Геронимус, Неваи, Тотик, Алфаро, Марсељан, итд.). Бари Сајмон (Barry Simon) је објавио обимну књигу у два тома на преко 1000 страна 2005. године у издању Америчког математичког друштва.

Скаларни производ је овде уведен помоћу

$$(p, q) = \int_0^{2\pi} p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\overline{q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\mathrm{d}\mu(t),$$

где је $\mathrm{d}\mu$ коначна позитивна мера на интервалу $[0,2\pi]$, чији је носач бесконачни скуп. Ако је $\theta \mapsto \mu(\theta)$ апсолутно непрекидна функција на $[0,2\pi]$ кажемо да је $\mu'(\theta)=w(\theta)$ *тежинска* функција. За овако изабрани скаларни производ егзистира јединствен систем моничних ортогоналних полинома $\phi_k(z)$, $k = 0,1,2, \ldots$, али они не задовољавају трочлану рекурентну релацију (као ортогонални полиноми на реалној правој), што је последица релације $(zp, q) \neq (p, zq)$.

Међутим, скаларни производ, код ове ортогоналности на јединичној кружници, задовољава релацију $(zp, zq) = (p, q)$, што омогућава доказ да се све нуле полинома $\phi_n(z)$ налазе у јединичном кругу $|z| < 1$.

Монични ортогонални полиноми $\phi_k(z)$ на јединичној кружници $|z| = 1$, за $k = 0,1,2, \ldots$ задовољавају рекурентне релације

$$\phi_{k+1}(z) = z\phi_k(z) + \phi_{k+1}(0)\phi_k^*(z),$$

$$\phi_{k+1}^*(z) = \phi_k^*(z) + \overline{\phi_{k+1}(0)}z\phi_k^*(z),$$

где је $\phi_k^*(z) = z^k\overline{\phi}_k(1/z)$.

Ови полиноми су нашли примену у статистици, дигиталним филтрима у телекомуникацијама, Теорији временских серија, Теорији расипања, процесирању слика, Теорији аутоматске контроле, итд.

4. Ортогонални полиноми на јединичној полукружници

Ортогоналност се може третирати и у случајевима када (p, q) не испуњава услов позитивности (г). Један такав приступ је дат у нашем заједничком раду [14] са Гаучијем, коришћењем концепта ортогоналности у односу на момент функционелу $\mathcal{L}[z^k] = \mu_k$, који се може наћи у књизи Чихаре [15] (T. S. Chihara). Полиноми ортогонални на полукружници
$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ у односу на момент функционелу

$$\mathcal{L}[z^k] = \int_0^{\pi} e^{ik\theta}\, d\theta$$

чија је вредност $2i/\pi$ када је k непарно и 0 за парно k, осим за $k = 0$ када је ова вредност једнака π.

Одговарајући не-хермитски скаларни производ је дат са

$$(p, q) = \int_{\Gamma} p(z)q(z)(iz)^{-1}\, dz,$$

тј.

$$(p, q) = \int_0^{\pi} p(e^{i\theta})q(e^{i\theta})d\theta,$$

а првих неколико полинома овог ортогоналног система су

$$\pi_0(z) = 1, \quad \pi_1(z) = z - \frac{2i}{\pi},$$

$$\pi_2(z) = z^2 - \frac{\pi i}{6}z - \frac{1}{3},$$

$$\pi_3(z) = z^3 - \frac{8i}{5\pi}z^2 - \frac{3}{5}z + \frac{8i}{15\pi}, \text{ итд.}$$

Слика 1. W. Gautschi, T. S. Chihara, G. V. Milovanović (Purdue University, 2018)

Коришћењем моментних детерминаната, након једног веома сложеног процеса, добија се трочлана рекурентна релација за комплексне ортогоналне полиноме $\{\pi_k\}$ (јер важи особина $(zp, q) = (p, zq)$)

$$\pi_{k+1}(z) = (z - i\alpha_k)\pi_k(z) - \beta_k\pi_{k-1}(z),$$

са почетним вредностима $\pi_0(z)=1$, $\pi_{-1}(z)=0$, где су $\alpha_0 = \theta_0$,

$$\alpha_k = \theta_k - \theta_{k-1}, \quad \beta_k = \theta_{k-1}^2, \quad k \geq 1,$$

и

$$\theta_k = \frac{2}{2k+1}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\right]^2, \qquad k \geq 0.$$

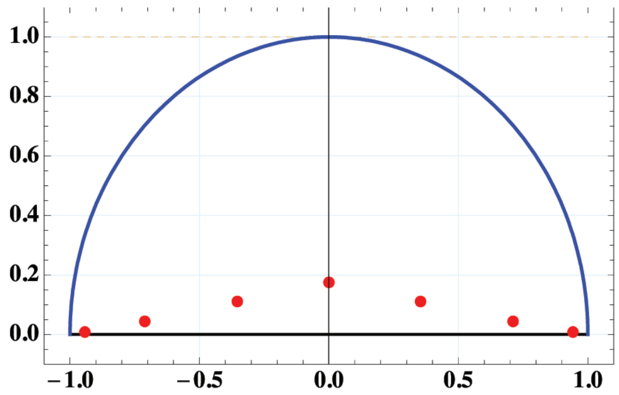
Може се, такође, показати да се ови полиноми могу изразити помоћу моничних Лежандрових (Legendre) полинома $\hat{P}_k(z)$ као

$$\pi_k(z) = \hat{P}_k(z) - \mathrm{i}\theta_{k-1}\hat{P}_{k-1}(z), \qquad k \geq 1,$$

као и да се све нуле полинома $\pi_k(z)$ налазе у јединичном горњем полукругу

$$D_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\},$$

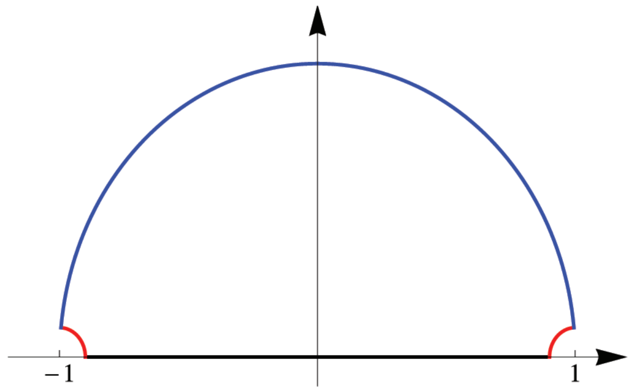
са тежњом да падну на интервал $[-1,1]$, када степен полинома $k \to \infty$. На Слици 2 приказан је положај нула полинома $\pi_7(z)$.



Слика 2. Нуле ортогоналног полинома $\pi_7(z)$

У поменутом раду [14] дате су особине нула, диференцијална једначина коју задовољавају ортогонални полиноми $\pi_k(z)$, као и конструкција одговарајућих квадратурних формула Гаусовог типа на полукружници. Такође, разматране су примене у нумеричкој интеграцији, посебно на израчунавање Кошијеве (A. L. Cauchy) главне вредности несвојствених интеграла, као и у нумеричком диференцирању [16]–[17].

Нека је w тежинска функција (позитивна и интеграбилна) на отвореном интервалу $(-1,1)$, са могућим сингуларитетима у ± 1, и која се може аналитички продужити у холоморфну функцију $w(z)$ у полудиску D_+ (видети Слику 3).



Слика 3. Полудиск D_+ *са могућим дефектима у* ± 1

У раду [18] доказали смо егзистенцију комплексних ортогоналних полинома $\{\pi_k\}$ на полукружници Γ у односу на нехермитски скаларни производ

$$(1) \qquad [p, q] = \int_0^{\pi} p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})w(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta,$$

претпостављајући само услов

$$\operatorname{Re}[p, q] = \operatorname{Re}\int_0^{\pi} w(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta \neq 0.$$

Ортогоналност у односу на Гегенбауерову тежинску функцију

$$w(z) = (1 - z^2)^{\lambda - 1/2}, \quad \lambda > -\frac{1}{2},$$

са посебним освртом на Чебишевљеве тежине ($\lambda = 0$ и $\lambda = 1$) као и примене у нумеричкој интеграцији и нумеричком диференцирању, разматрани су [19].

5. Интеграција квазисингуларних интеграла

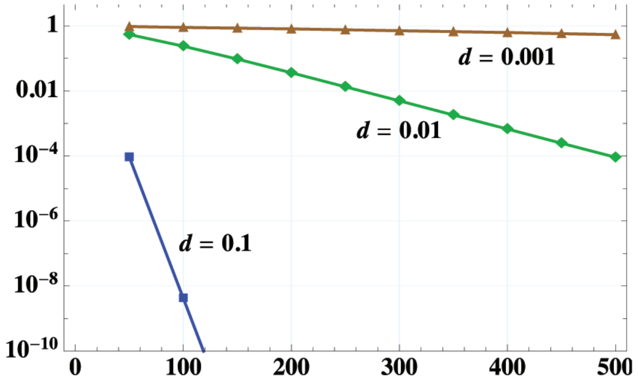
Један од веома атрактивних актуелних проблема је интеграција тзв. квазисингуларних интеграла, који се појављују у многим проблемима у физици, електротехници, механици флуида, итд. Најједноставнији пример таквих интеграла је

$$(2) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{f(x)w(x)}{(x-c)^2 + d^2}\,\mathrm{d}x,$$

где су $|c| < 1$ и $|d| \ll 1$. Очигледно, у овом примеру квазисингуларитети су $c \pm \mathrm{i}d$. За $d = 0$ интеграл је дивергентан, осим ако тежинском функцијом $w(x)$ не „убијемо" сингуларитет (пол другог реда). За $d \neq 0$ интеграл постоји, али за мале вредности d конвергенција квадратурних процеса примењених на израчунавање датог интеграла веома је спора, тако да су стандардни методи нумеричке интеграције неупотребљиви.

Као пример посматрајмо интеграл (2) за $f(x) = \cos x$, $w(x) = 1$, $c = 0$ и $d = 0.1, 0.01, 0.001$.

Примена Гаус–Лежандрове (Gauss–Legendre) квадратурне формуле, чак са великим бројем чворова N, нпр. $50 \leq N \leq 500$, није ефикасна. Релативне грешке у квадратурним сумама су приказане на Слици 4 (у логаритамској размери).



Слика 4. Релативне грешке у Гаусовим квадратурним сумама за интеграл (2)

Са графика можемо приметити да за $d = 0.01$, квадратурна формула са 500 чворова даје само четири тачне децималне цифре у резултату, док су за $d = 0.001$ све цифре погрешне.

Применом Кошијеве теореме о остацима имамо

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)w(x)}{(x-c)^2+d^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left\{\frac{\pi}{d} f(c+\mathrm{i}d)w(c+\mathrm{i}d) - \int_\Gamma \frac{f(z)w(z)}{(z-c)^2+d^2}\,\mathrm{d}z\right\},$$

при чему за интеграл на контури Γ важи

$$\int_\Gamma \frac{f(z)w(z)}{(z-c)^2+d^2}\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})w(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-c)^2+d^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Дакле, израчунавање квазисингуларног интеграла смо овим свели на израчунавање интеграла на полукружници, али се квадратурне формуле добијене применом ортогоналности на полукружници не могу применити, с обзиром на то да се чворови таквих квадратура као нуле ортогоналних полинома $\pi_n(z)$ могу произвољно приближити квазисингуларитету $c \pm \mathrm{i}d$.

У наредној секцији изложићемо једну идеју за ефикасно израчунавање претходног интеграла на полукружници, која захтева развој тзв. Лоранових полинома ортогоналних на јединичној полукружници.

6. Ортогонални Лоранови полиноми на јединичној полукружници

Као и раније користимо концепт ортогоналности у односу на комплексну момент функционелу $\mathcal{L}[z^k] = \mu_k$, уз укључивање и негативних експонената $-n+1 \leq k \leq n$

Нека је $\Lambda_{p,q}$ линеарни простор монома генерисан базом

$$\mathcal{B}_{p,q} = \{z^p, z^{p+1}, \ldots, z^q\}, \quad p \leq q,$$

где су p и q цели бројеви. Као и раније, користимо не-хермитски скаларни производ дефинисан помоћу (1) да бисмо, на пример, Грам–Шмитовим поступком, добили ортогонални систем елемената $\{R_\nu\}_{\nu=0}^{2n-1}$ на $\Lambda_{-n+1,n}$, чија је димензија $2n$. На основу конструкције, закључујемо да се општи елемент овог система који ћемо назвати *Лоранов полином*, може представити у облику

$$R_\nu(z) = \frac{Q_\nu(z)}{z^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}},$$

где је $[x]$ ознака за највеће цело од x ($\in \mathbb{R}$), а $Q_\nu(z)$ је (моничан) алгебарски полином степена ν. Може се показати егзистенција и јединственост таквог система и доказати следећи резултат:

Теорема 5.1. *Систем ортогоналних функција* $\{R_\nu(z)\}$ *задовољава следеће рекурентне релације*

$$R_{2k+1}(z) = (z - a_{2k})R_{2k}(z) + b_{2k}R_{2k-1}(z),$$

$$R_{2k+2}(z) = \left(1 - \frac{a_{2k+1}}{z}\right)R_{2k+1}(z) + b_{2k+1}R_{2k}(z),$$

где су $\{a_k\}$ *и* $\{b_k\}$ *низови коефицијената зависни само од тежинске функције.*

Ако је тежинска функција $w(z) = 1$, коефицијенти a_k су

$$a_0 = \frac{2\mathrm{i}}{\pi}, \quad a_1 = \frac{2\mathrm{i}\pi}{\pi^2 - 4},$$

$$a_2 = \frac{\mathrm{i}(16 - \pi^2)(\pi^2 - 4)}{6\pi(\pi^2 - 8)},$$

$$a_3 = \frac{12\mathrm{i}\pi(\pi^2 - 8)(32 - 3\pi^2)}{4096 - 2048\pi^2 + 256\pi^4 - 9\pi^6},$$

итд., док су коефицијенти b_k

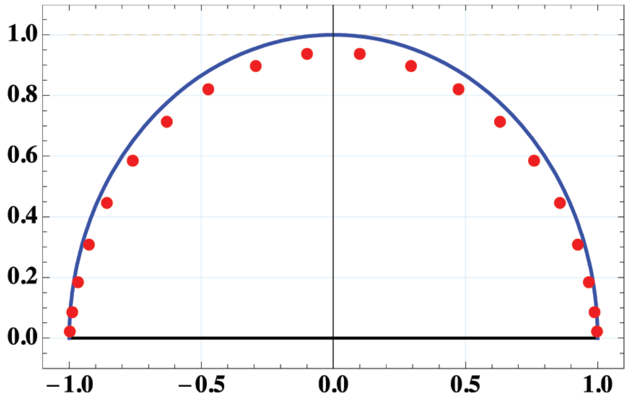
$$b_1 = \frac{2\mathrm{i}}{\pi}, \quad b_2 = \frac{\mathrm{i}\pi(16-\pi^2)}{6(\pi^2-4)},$$

$$b_3 = \frac{4\mathrm{i}(\pi^2-4)(3\pi^2-32)}{3\pi(\pi^2-16)(\pi^2-8)}, \text{ итд.}$$

Може се доказати да су

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \mathrm{i} \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} b_k = \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

Интересантна је, такође, и дистрибуција нула Лорановых ортогоналних полинома. На Слици 5 приказана је дистрибуција нула Лорановог полинома $R_N(z)$ када је $N = 20$ и $w(z) = \sqrt{1 - z^2}$ (Чебишевљева тежинска функција друге врсте). Може се уочити да све нуле Лорановог полинома (рационалне функције) $R_N(z)$ теже да дођу на горњу полукружницу када $N \to \infty$.



Слика 5. Дистрибуција нула Лорановог полинома $R_{20}(z)$ *за Чебишевљеву тежину друге врсте*

Претходно анализирани ортогонални системи $\{R_\nu\}_{\nu=0}^{2n-1}$ се могу повезати са тежинским квадратурама Гаусовог типа са максималним степеном тачности на $\Lambda_{-n+1,n}$. Главни резултат се може исказати на следећи начин.

Теорема 5.2. *За свако* $F \in \Lambda_{-n+1,n}$ *постоји јединствена квадратура максималног степена тачности, тј. Гаусовог типа,*

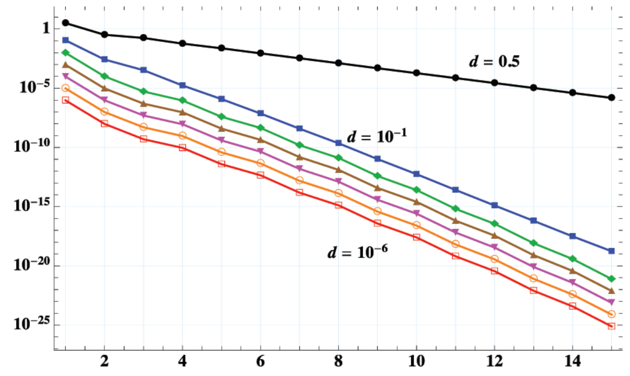
$$(3) \quad \int_0^\pi F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})w(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu F(\zeta_\nu),$$

где су ζ_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, *нуле Лорановог полинома* $R_n(z)$ (*тј. моничног полинома* $Q_n(z)$), *а тежински коефицијенти* A_ν *су дати са*

$$A_\nu = \frac{1}{Q'_n(\zeta_\nu)} \int_0^\pi \frac{Q_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})w(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \zeta_\nu}\, \mathrm{d}\theta,$$

за свако $\nu = 1,\ldots,n$.

Примена добијене квадратурне формуле (3) на интеграл (2), за $f(x) = \cos x$, $w(x) = 1$, $c = 0$ и сада за $d = 0.5$ и $d = 10^{-k}$, $k = 1,\ldots,6$, са малим бројем чворова ($n \leq 15$), (показује високу ефикасност и даје боље резултате када је d ближе нули (Слика 6).



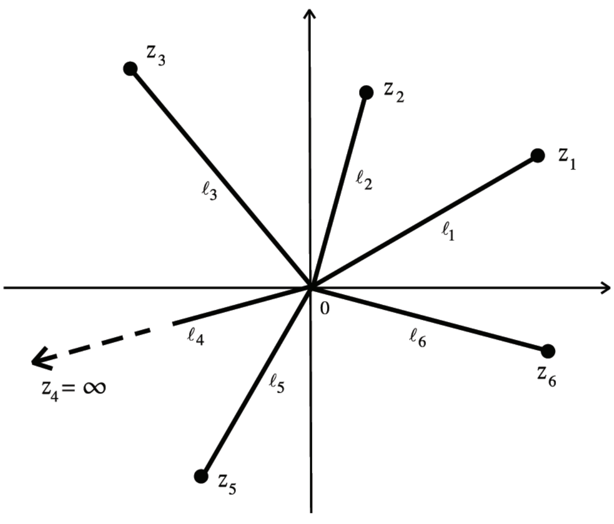
Слика 6. Релативне грешке у квадратурним сумама (3) за интеграл (2)

7. Ортогоналност на радијалним зрацима у комплексној равни

Нека су $M\in\mathbb{N}$, $a_s>0$, $s=1,\dots,M$, и $0\le\theta_1\le\dots\le\theta_M<2\pi$. У комплексној равни $\mathbb{C}$ уочимо M тачака, стављајући $\varepsilon_s=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_s}$), тако да су

$$z_s=a_s\varepsilon_s,\quad s=1,\dots,M.$$

Неки од a_s (или сви) се могу поклапати и могу бити ∞ (видети Слику 7).



Слика 7. Радијални зраци у комплексној равни

Скаларни производ може бити уведен тако да је хермитски

$$(f,g)=\sum_{s=1}^{M}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_s}\int_{\ell_s}f(z)\,\overline{g(z)}|w_s(z)|\mathrm{d}z$$

где су $\omega_s(x)=|w_s(x\varepsilon_s)|=|w_s(z)|$ $(z\in\ell_s; s=1,\dots,M)$ тежинске функције на $(0,a_s)$, тј. ненегативне на $(0,a_s)$ и са позитивним интегралом на интервалу $(0,a_s)$. Тада

$$(f,g)=\sum_{s=1}^{M}\int_0^{a_s}f(x\varepsilon_s)\overline{g(x\varepsilon_s)}\omega_s(x)\mathrm{d}x\,.$$

Коришћењем момената $\mu_{p,q}=(z^p,z^q)$ може се доказати егзистенција и јединственост одговарајућих моничних ортогоналних полинома $\pi_N(z)$, $N\ge 0$ (видети [20], [21], [25]).

Теорема 7.1. *Све нуле ортогоналног полинома $\pi_N(z)$ леже у конвексном омотачу радијалних зракова*

$$L=\ell_1\cup\ell_2\cup\cdots\cup\ell_M\,.$$

Посебно су интересантни симетрични случајеви у односу на распоред радијалних зрака (чији број може бити паран или непаран) и тежинских функција на њима. У таквим случајевима ортогонални полиноми на зрацима задовољавају интересантне рекурентне релације (видети [20]–[25]), посебно када је број зрака паран, $M=2m$. Тада за скаларни производ важи особина $(z^m f,g)=(f,z^m g)$ [21].

У простом Лежандровом (Legendre) случају са четири зрака ($m=2$) и скаларним производом

$$(f,g)=\int_0^1[f(x)\overline{g(x)}+f(\mathrm{i}x)\overline{g(\mathrm{i}x)}+f(-x)\overline{g(-x)}+f(-\mathrm{i}x)\overline{g(-\mathrm{i}x)}]\mathrm{d}x$$

можемо директно одредити коефицијент b_N у рекурентној релацији

$$\pi_{N+2}(z)=z^2\pi_N(z)-b_N\pi_{N-2}(z),$$
$$\pi_N(z)=z^N,\quad N=0,1,2,3.$$

Наиме, за $N=4n+\nu$ имамо

(а) када је $\nu=0,1$

$$b_{4n+\nu}=\frac{16n^2}{(8n+2\nu-3)(8n+2\nu+1)}\,;$$

(б) када је $\nu = 2,3$

$$b_{4n+\nu} = \frac{(4n+2\nu-3)^2}{(8n+2\nu-3)(8n+2\nu+1)}.$$

Теорема 7.2. *Нека су* $N = Mn + \nu$,

$n = \left[\frac{N}{M}\right]$, $\nu \in \{0, 1, ..., M-1\}$, *и нека је унутрашњи производ дат помоћу*

$$(f, g) = \int_0^r \sum_{s=1}^{M} f(x\varepsilon_s)\overline{g(x\varepsilon_s)}\omega(x)\mathrm{d}x.$$

Тада су све нуле полинома $\pi_N(z)$ *просте и распоређене на радијалним зрацима* ℓ_s, $s = 1,...,M$, *са могућим изузетком вишеструке нуле реда* ν *у координатном почетку* $z = 0$.

Интересантни случајеви: $r = 0$ и $r = \infty$.

Асиметрични случајеви су знатно тежи. Као пример, посматрамо асиметрични случај са пет зрака ($M = 5$), дефинисан тачкама у комплексној равни:

$$z_1 = 6, \quad z_2 = 5e^{9\pi i/14}, \quad z_3 = 2e^{4\pi i/5},$$

$$z_4 = 5e^{6\pi i/5}, \quad z_5 = 5e^{7\pi i/4},$$

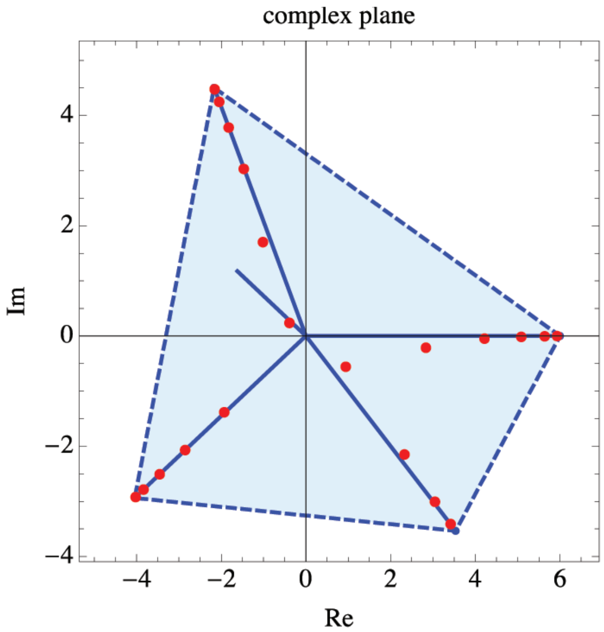
респективно са тежинским функцијама трансформисаним на $(0, 1)$:

$$\omega_1(x) = 1, \quad \omega_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}},$$

$$\omega_3(x) = \sqrt{x(1-x)},$$

$$\omega_4(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}, \quad \omega_5(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Дистрибуција нула одговарајућих ортогоналних полинома $\pi_N(z)$ степена $N = 20$ и $N = 50$ приказана је на сликама 8 и 9.



Слика 8. Дистрибуција нула за полином степена $N = 20$

На крају, помињемо електростатичку интерпретацију нула полинома $\pi_N(z)$ за симетрични случај, претпостављајући логаритамски потенцијал.

Теорема 7.3. *Електростатички систем од* M *позитивних наелектрисања* q, *која се налазе у фиксираним тачкама*

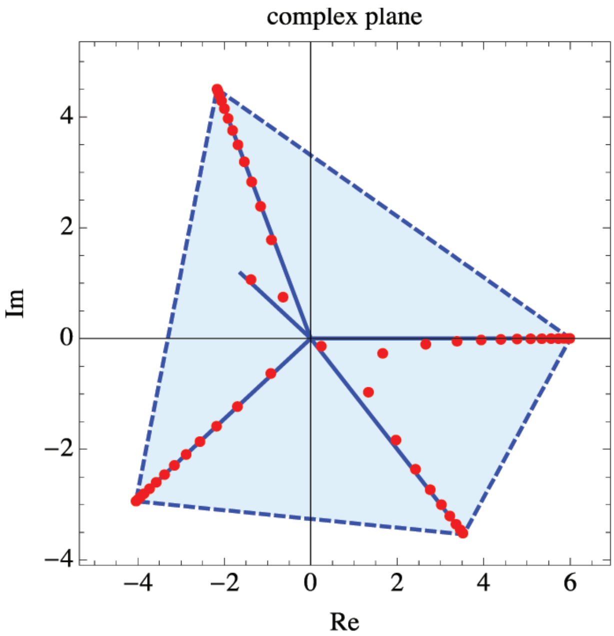
$$z_s = \exp\left(\frac{2(s-1)\pi i}{M}\right), \quad s = 1,...,M,$$

и наелектрисања p $(> -(M-1)/2)$ *у координатном почетку* $z = 0$, *као и* N *позитивних слободних јединичних наелектрисања позиционираних у тачкама* $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_N$, *је у електростатичкој равнотежи ако су ове тачке* ζ_k *нуле полинома* $\pi_N(z)$ *ортогоналног у односу на скаларни производ*

$$(f, g) = \int_0^1 \sum_{s=1}^{M} f(x\varepsilon_s)\overline{g(x\varepsilon_s)}\omega(x)\mathrm{d}x,$$

са тежинском функцијом

$$\omega(x) = (1 - x^M)^{2q-1}x^{M+2(p-1)}.$$



Слика 9. Дистрибуција нула за полином степена $N = 50$

ЛИТЕРАТУРА

1. Миловановић ГВ *Ортогоналност у нумеричким процесима са посебним освртом на квадратуре*. Анали Огранка САНУ у Новом Саду. Год. 2006. Бр.2, Нови Сад, САНУ, Огранак у Новом Саду, 2007, 29–38.
2. Milovanović GV *Müntz orthogonal polynomials and their numerical evaluation*. In: Applications and Computation of Orthogonal Polynomials (Gautschi W, Golub GH, Opfer G, editors), 179–202, ISNM, Vol. 131, Birkhäuser (Basel), 1999.
3. Milovanović GV *Some generalized orthogonal systems and their connections*, In: Proceedings of the Symposium „Contemporary Mathematics" (Belgrade, 1998) (Bokan N, editor), 181–200, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, 2000.
4. Milovanović GV, Cvetković AS *Gaussian type quadrature rules for Müntz systems*, SIAM J. Sci. Comput. 27 (2005), 893–913.
5. Mastroianni G, Milovanović GV *Interpolation Processes – Basic Theory and Applications*. Springer Monographs in Mathematics, Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg, 2008.
6. Gautschi W *On generating orthogonal polynomials*, SIAM J. Sci. Statist. Comput. 3 (1982), 289–317.
7. Gautschi W *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*, Clarendon Press, Oxford 2004.
8. Agarwal RP, Milovanović GV *Extremal problems, inequalities, and classical orthogonal polynomials,* Appl. Math. Comput. 128 (2002), 151–166.
9. Golub G, Welsch JH, *Calculation of Gauss quadrature rules*. Math. Comp. 23 (1969), 221–230.
10. Cvetković AS, Milovanović GV *The Mathematica package „Orthogonal-Polynomials"*. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 19 (2004), 17–36.
11. Milovanović GV, Cvetković AS *Special classes of orthogonal polynomials and corresponding quadratures of Gaussian type*. Math. Balkanica 26 (2012), 169–184.
12. Szegö G *Beiträge zur Theorie der Toeplizschen Formen*. Math. Z. 6 (1920), 167–203.
13. Szegö G *Beiträge zur Theorie der Toeplizschen Formen II*. Math. Z. 9 (1921), 167–190.
14. Gautschi W, Milovanović GV *Polynomials orthogonal on the semicircle*, J. Approx. Theory (1986), 230–250.
15. Chihara TS *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach, New York, 1978.
16. Milovanović GV *Some applications of the polynomials orthogonal on the semicircle*. In: Numerical Methods (Miskolc, 1986), pp. 625–634, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, Vol. 50, North–Holland, Amsterdam – New York, 1987.
17. Calio' F, Frontini M, Milovanović GV *Numerical differentiation of analityc functions using quadratures on the semicircle. Comput. Math. Appl. 22 (1991), 99*–106.
18. Gautschi W, Landau H, Milovanović GV *Polynomials orthogonal on the semicircle*, II, Constr. Approx. (1987), 389–404.

19. Milovanović GV *Complex orthogonality on the semicircle with respect to Gegenbauer weight: theory and applications*. In: Topics in Mathematical Analysis (Rassias ThM, editor), 695–722, Ser. Pure Math., 11, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.
20. Milovanović GV *Generalized Hermite polynomials on the radial rays in the complex plane*. In: Theory of Functions and Applications, Collection of Works Dedicated to the Memory of M.M. Djrbashian (H.B. Nersessian HB, editor), 125–129, Yerevan, Louys Publishing House, 1995.
21. Milovanović GV *A class of orthogonal polynomials on the radial rays in the complex plane*. J. Math. Anal. Appl. 206 (1997), 121–139.
22. Milovanović GV, Rajković PM, Marjanović ZM *A class of orthogonal polynomials on the radial rays in the complex plane, II*. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 11 (1996), 29–47.
23. Milovanović GV, Rajković PM, Marjanović ZM *Zero distribution of polynomials orthogonal on the radial rays in the complex plane*. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 12 (1997), 127–142
24. Milovanović GV *Orthogonal polynomials on the radial rays and an electrostatic interpretation of zeros*. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 64 (78) (1998), 53–68
25. Milovanović GV *Orthogonal polynomials on the radial rays in the complex plane and applications*. Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, Suppl. 68 (2002), 65–94.

ORTHOGONALITY ON OBJECTS IN THE COMPLEX PLANE AND APPLICATIONS

Abstract

This article is part of the lecture held at the Branch of the Serbian Academy of Sciences and Arts in Novi Sad. In addition to the introductory part on orthogonality on the real line, the paper also discusses orthogonality on some objects in the complex plane (unit circle and semicircle, radial rays) and gives some applications.