

ZBORNİK RADOVA Prirodno-matematičkog fakulteta
u Kragujevcu, 4(1983) 99-104.

COLLECTION OF SCIENTIFIC PAPERS of the Faculty
of Science Kragujevac, 4(1983) 99-104.

KONSTRUKCIJA KVADRATURNIH FORMULA LOBATTO-OVOG TIPA ZA INTEGRACIJU FUNKCIJA SA LOGARITAMSKOM TEŽINOM

Gradimir V. Milovanović

Elektronski fakultet u Nišu, Katedra za matematiku

(Primljeno 25. aprila 1983)

U radu se daje konstrukcija kvadraturnih formula Lobatto-ovog tipa za integraciju funkcija na $(0,1)$ sa težinskom funkcijom $p(x)=\log(1/x)$. Konstrukcija se zasniva na primeni Gautschievog metoda modifikovanih momenata [4]. Odgovarajuće formule Gaussovog tipa razmatrao je D.G.Anderson [1]. U radovima [5] i [7], razmatrana su neka uopštenja Gaussovih formula u smislu uvodjenja dodatnih informacija o podintegralnoj funkciji i njenim izvodima u nekoj fiksiranoj tački van intervala integracije.

Predmet ovog rada je konstrukcija kvadraturnih formula Lobatto-ovog tipa

$$\int_0^1 \log(1/x) f(x) dx = Af(0) + Bf(1) + \sum_{k=1}^n C_k f(x_k) + R_{n+2}(f). \quad (1)$$

U [7] su razmatrane tzv. uopštene Gaussove formule oblika

$$\int_0^1 \log(1/x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n C_k f(x_k) + \sum_{r=0}^{m-1} B_r f^{(r)}(c) + R(f), \quad (2)$$

za funkcije koje imaju izvode do reda $m-1$ u nekoj fiksiranoj tački $x=c$ ($\notin (0,1)$). Algebarski stepen tačnosti formule (2) jednak je $2n+m-1$.

U cilju konstrukcije formule (1) posmatrajmo kvadraturni problem

$$\int_0^1 \log(1/x) F(x) dx = \sum_{k=1}^n C_k F(x_k) + R(F), \quad (3)$$

kođ koga je $R(F) \equiv 0$, za svako $g \in \pi_{2n-1}$, gde je $F(x) = x(1-x)g(x)$ i π_{2n-1} skup svih algebarskih polinoma ne višeg stepena od $2n-1$. Drugim rečima, u (3) treba odrediti A_k i x_k ($k=1, 2, \dots, n$) tako da je

$$\int_0^1 x(1-x) \log(1/x) g(x) dx = \sum_{k=1}^n C_k x_k (1-x_k) g(x_k) \quad (4)$$

za $g(x) = 1, x, \dots, x^{2n-1}$.

Definišimo novu težinsku funkciju p pomoću $p(x) = x(1-x) \log \frac{1}{x}$. Neka je $(S_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sistem ortonormiranih polinoma na $(0, 1)$ u odnosu na težinsku funkciju p , tj. u odnosu na skalarni proizvod

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) p(x) dx.$$

Rešenje kvadrturnog problema (3) može se dobiti rešavajući sistem nelinearnih jednačina (4). Medjutim, ako se (3) interpretira kao Gaussova kvadratura ([2], [5], [6]) sa težinom p , tj. kao

$$\int_0^1 p(x) g(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k g(x_k) + R_n(g), \quad (5)$$

gde su x_k nule polinoma S_n i

$$A_k = \left(\sum_{i=0}^{n-1} S_i(x_k)^2 \right)^{-1} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

to se jednostavno upoređivanjem dobija

$$C_k = \frac{A_k}{x_k(1-x_k)} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Da bismo odredili $R(F)$, pretpostavimo da $F \in C^{2n+1}[0, 1]$. S obzirom da je ([6])

$$R_n(g) = \frac{\|S_n\|^2}{(2n)! k_n^2} g^{(2n)}(\xi) \quad (0 < \xi < 1),$$

gde je k_n koeficijent uz najviši stepen u polinomu S_n , može se dokazati da važi

$$R(F) = \frac{\|S_n\|^2}{(2n+2)!k_n^2} F^{(2n+2)}(\eta) \quad (0 < \eta < 1).$$

Primetimo da smo funkciji F nametnuli uslove $F(0) = F(1) = 0$.

Kvadraturnu formulu (1) za integraciju funkcije f sa težinom $x \mapsto \log(1/x)$ možemo sada dobiti iz (3). Naime, ako stavimo

$$F(x) = f(x) - (1-x)f(0) - xf(1),$$

iz (3) sledi (2), pri čemu su x_k nule polinoma S_n ,

$$A = \frac{3}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{x_k}, \quad B = \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{1-x_k},$$

$$C_k = \frac{A_k}{x_k(1-x_k)} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

i A_k koeficijenti Gaussove formule (5).

Ako $f \in C^{2n+2}[0, 1]$, imajući u vidu da je $R(f) = R(F)$, zaključujemo da formula Lobatto-ovog tipa (1) ima algebarski stepen tačnosti $2n+1$, tj. da je ostatak $R(f)$ jednak nuli za sve polinome ne višeg stepena od $2n+1$.

Parametre Gaussove formule sa težinskom funkcijom p dobijamo metodom modifikovanih momenata [4], paketom programa pisanih na FORTRAN jeziku za računar PDP 11/40 u DOUBLE PRECISION aritmetici.

S obzirom na jednakost (Gatteschi [3])

$$\int_0^1 x^\beta (1-x)^\alpha \log(1/x) P_n^{(\alpha, \beta)}(2x-1) dx = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} (\psi(\alpha+\beta+2) - \psi(\beta+1)), & n=0, \\ (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{n \Gamma(n+\alpha+\beta+2)}, & n \geq 1 \end{cases}$$

gde su $p_n^{(\alpha, \beta)}(2x-1)$ pomereni Jacobievi polinomi i $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ logaritamski izvod gama funkcije $\Gamma(x)$, za bazisni niz polinoma $(W_k)_{k \in N_0}$, u odnosu na koji se odredjuju modifikovani momenti za težinsku funkciju p , može se uzeti niz Gegenbauerovih pomeranih polinoma $W_k(x) = C_k^{3/2}(2x-1)$, za koje važi rekurentna relacija

$$xW_{k-1}(x) = \frac{k}{2(2k+1)} W_k(x) + \frac{1}{2} W_{k-1}(x) + \frac{k+1}{2(2k+1)} W_{k-2}(x),$$

sa $W_0 = 1$ i $W_{-1} = 0$. Potrebne modifikovane momente dobijamo iz Gatteschieve jednakosti za $\alpha = \beta = 1$

$$v_k = \int_0^1 x(1-x) \log(1/x) W_k(x) dx = \begin{cases} \frac{5}{36}, & k=0, \\ \frac{(-1)^k}{2k(k+3)}, & k \geq 1. \end{cases}$$

Parametre formula odredili smo za $n=1(1)12$. U tabeli 1 navedeni su parametri za $n=2(1)5$. U slučaju $n=1$, formula (1) ima oblik

$$\int_0^1 \log(1/x) f(x) dx = \frac{89}{252} f(0) + \frac{17}{468} f(1) + \frac{500}{819} f(7/20) + R_3(f),$$

gde ostatak ima oblik $R_3(f) = \frac{79}{345600} f^{(4)}(\xi)$, $0 < \xi < 1$.

TABELA 1

n	Parametri Lobatto-ove formule	
2	A = 0.21727 75827 $x_1 = 0.19215$ 67673 $x_2 = 0.60024$ 82959	B = 0.01018 91049 $C_1 = 0.54865$ 36562 $C_2 = 0.22387$ 96562
3	A = 0.15045 64284 $x_1 = 0.12218559244$ $x_2 = 0.40370$ 68490 $x_3 = 0.73611$ 05252	B = 0.00391 53228 $C_1 = 0.45131$ 50473 $C_2 = 0.29878$ 66121 $C_3 = 0.09552$ 65842
4	A = 0.11166 17854 70141 $x_1 = 0.08478$ 71901 41850 $x_2 = 0.28785$ 93711 75200 $x_3 = 0.55619$ 11411 59444 $x_4 = 0.81440$ 09853 05528	B = 0.00181 52707 28861 $C_1 = 0.36987$ 17832 44672 $C_2 = 0.30776$ 04319 61881 $C_3 = 0.16222$ 54166 51876 $C_4 = 0.04666$ 53119 42568
5	A = 0.08679 24543 20288 $x_1 = 0.06238$ 53806 75856 $x_2 = 0.21492$ 82742 04417 $x_3 = 0.42908$ 34039 74564 $x_4 = 0.66123$ 39593 53319 $x_5 = 0.86288$ 23543 84297	B = 0.00095 40730 77711 $C_1 = 0.30677$ 14176 42170 $C_2 = 0.29159$ 24649 51456 $C_3 = 0.19562$ 33022 74937 $C_4 = 0.09299$ 45177 52212 $C_5 = 0.02527$ 17699 81226

Za testiranje dobijenih formula posmatrali smo integral

$$I = \int_0^1 \log(1/x) e^x dx = 1.31790 \ 21514 \ 54403 \ 8... .$$

TABELA 2

n	Približna vrednost integrala	Relativna greška
1	1.31 <u>8</u> 25	-0.27E-3
2	1.31790 2 <u>7</u> 576	-0.46E-6
3	1.31790 215 <u>2</u> 0	-0.46E-9
4	1.31790 21514 54 <u>7</u> 97	-0.30E-12
5	1.31790 21514 5440 <u>4</u>	-0.21E-15

U tabeli 2 date su približne vrednosti integrala I, dobijene primenom kvadrturnih formula (1) za $n=1(1)5$. Prva pogrešna cifra u vrednosti integrala je podvučena. U poslednjoj koloni ove tabele data je odgovarajuća relativna greška, koja je već za $n=5$ reda 10^{-15} .

L I T E R A T U R A

- [1] Anderson, D.G. (1965): *Gaussian quadrature formulae for*
 $\int_0^1 -\ln(x)f(x)dx$. -Math. Comp. 19, 477-481.
- [2] Davis, P.J. - Rabinowitz, P. (1975): *Methods of numerical integration*. - Academic Press, New York.
- [3] Gatteschi, L. (1980): *On some orthogonal polynomial integrals*. - Math. Comp. 35, 1291-1298.
- [4] Gautschi, W. (1970): *On the construction of Gaussian quadrature rules from modified moments*. - Math. Comp. 24, 245-260.
- [5] Lyashchenko, N.Ya. (1971): *On some quadrature formulas for approximate calculation of* $\int_0^1 -\ln x f(x) dx$. - Vyčisl. i prikl. mat. Kiev, 4, 84-95.
- [6] Milovanović, G.V. (1979): *Numerička analiza (I deo)*. - Univerzitet u NIšu, Niš.

- [7] Milovanović, G.V. - Stojanović, S.Č. (1982): *Uopštene Gauss-ove kvadrature formule za logaritamsku težinu*. Zbornik radova IV znanstvenog skupa PPPR, Stubičke Toplice, 457-462.

CONSTRUCTION OF QUADRATURE FORMULAS OF LOBATTO TYPE
FOR INTEGRATION OF FUNCTIONS WITH LOGARITHMIC WEIGHT

Gradimir V. Milovanović

Faculty of Electronic Engineering, Department of Mathematics

S U M M A R Y

Lobatto quadrature formulas on $(0,1)$, with respect to the weight function $p(x) = \log(1/x)$ are constructed. The Gautschi's method of modified moments is used. The parameters of Lobatto-formulas, determined in DOUBLE PRECISION arithmetic, are given. The efficiency of this quadrature has been checked on an example.