2017

KOMBINATORNA OPTIMIZACIJA

XLIV Symposium on Operational Research
SYM-OP-IS 2017
Zlatibor, 25-28 Septembar 2017

KONVEKSNA I SLABO KONVEKSNA DOMINACIJA ZA HAMINGOVE GRAFOVE

CONVEX AND WEAK CONVEX DOMINATION NUMBER OF HAMMING GRAPHS

ALEKSANDAR SAVIĆ[1], ZORAN MAKSIMOVIĆ[2], MILENA BOGDANOVIĆ[3], JOZEF KRATICA[4],

[1] Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, asavic@matf.bg.ac.rs
[2] Vojna akademija, zoran.maksimovic@gmail.com
[3] Pedagoški fakultet Univerziteta u Nišu, mb2001969@beotel.net
[4] Matematički institut SANU, jkratica@mi.sanu.ac.rs

Rezime: *U ovom radu su razmatrani problemi konveksne dominacije i slabo konveksne dominacije za Hamingove grafove. Dobijena je tačna vrednost konveksnog dominantnog broja za Hamingove grafove. Pokazano je da tačna vrednost konveksnog dominantnog broja za Hamingov graf predstavlja gornju granicu za slabo konveksni dominantni broj Hamingovog grafa koja može biti dostignuta.*

Ključne reči: *Konveskni dominantan broj grafa, slabi konveksni dominantan broj grafa, Hamingovi grafovi.*

Abstract: *In this paper Convex Domination Problem and Weakly Convex Domination Problem for Hamming graphs are discussed. The exact value of Convex Domination number for Hamming graphs is given. It was shown that upper bound for Weakly Convex Domination number for Hamming graphs is tight.*

Keywords: *Convex domination number, Weakly convex domination number, Hamming graphs.*

1. UVOD

Ovaj rad je posvećen rešavanju problema konveksne (Convex Domination Problem – CDP) i slabe konveksne dominacije (Weakly Convex Domination Problem – WCDP) na jednoj specijalnoj klasi grafova. Dominantan skup (Dominating Set) grafa *G* se definiše kao skup *D*, $D \subset V(G)$ takav da je svaki čvor $u \in V(G)$ ili u dominantnom skupu ili mu je sused u dominantnom skupu. Dominantni broj $\gamma(G)$ je broj elemenata najmanjeg dominantnog skupa.

Svi grafovi razmatrani u ovom radu biće prosti, tj. bez petlji i paralelnih grana. Kako bi uveli osobinu konveksnosti u grafove definišimo rastojanje $d(u,v)$ između proizvoljnih čvorova *G* kao dužinu najkraćeg puta između njih. Kako graf nije težinski, rastojanje $d(u,v)$ je jednako minimalnom broju grana u putu koji ih spaja.

Reći ćemo da je skup čvorova S, $S \subset V(G)$ slabo konveksan skup (weakly convex set) u G ako za proizvoljna dva čvora $u, v \in S$ svi čvorovi u bar jednom od najkraćih *u*-*v* puteva pripadaju *S*. Slabo konveksan dominantan skup (Weakly Convex Dominating Set) je skup S koji je i slabo konveksan i dominantan. Slično kao i u slučaju dominacije, slabo konveksan dominantan broj $\gamma_{wcon}(G)$ je jednak minimalnoj kardinalnosti među svim slabo konveksnim dominantnim skupovima. Slabo konveksan dominantan problem (WCDSP) je problem nalaženja takve minimalne kardinalnosti.

Konveksna dominacija postavlja strože uslove. Reći ćemo da je skup čvorova *S*, $S \subset V(G)$, konveksan skup u G ako za proizvoljna dva čvora $u, v \in S$ svi čvorovi u svim najkraćim *u*-*v* putevima pripadaju *S*. Skup *S* je konveksan dominantan skup ako je on i konveksan i dominantan. Konveksni dominantni broj $\gamma_{con}(G)$ je minimalna kardinalnost po svim konveksnim dominantnim skupovima datog grafa *G*. Konveksan dominantan problem (CDSP) se može definisati kao problem nalaženja ove minimalne kardinalnosti.

2. RANIJI REZULTATI

Jirži Top je 2002. godine uveo problem nalaženja konveksnog dominantnog broja. U radu (Raczek 2002) je dokazano da su problemi odlučivanja za WCDSP i CDSP, čak i za bipartitne i podeljene grafove, NP kompletni, a samim tim su određivanja slabo konveksnih dominantnih brojeva i konveksnih dominantnih brojeva NP-teški u opštem slučaju.

U radu (Lemanska 2004), su razmatrani odnosi između $\gamma_{con}(G)$ i $\gamma_{wcon}(G)$ za određene klase grafova, a dokazana je sledeća lema za povezane grafove.

Lema 1. Za proivoljan povezan graf G važi:

$$\gamma(G) \leq \gamma_{wcon}(G) \leq \gamma_{con}(G). \tag{1}$$

U radu (Janakiraman i Alphonse 2010) su dobijene različite granice za vrednosti slabo konveksnih i konveksnih dominantnih brojeva. Interesantni rezultati su predstavljeni u (Cyman *et al.* 2006) iz kojih bi istakli sledeću napomenu i dve teoreme.

Napomena 1. Za cikl C_n sa $n \geq 6$ čvorova je $\gamma_{con}(C_n) = n$.

Teorema 1. Ako je $G = (V,E)$ povezan graf sa $\delta(G) \geq 2$ i $g(G) \geq 6$, tada je $\gamma_{con}(G) = |V|$, gde su $\delta(G)$ najmanji stepen čvora u G a $g(G)$ je dužina najkraćeg cikla u G.

Kako bi iskazali drugu od teorema iz (Cyman *et al* 2006) uvedimo prvo pojam *Dekartovog proizvoda grafova*.

Dekartov proizvod $G \square H$ grafova $G = (V_G, E_G)$ i $H = (V_H, E_H)$ je graf sa skupom čvorova $V_G \times V_H = \{(a,v) \mid a \in V_G, v \in V_H\}$ gde je (a,v) sused od (b,w) čim je $a = b$ i $\{v,w\} \in E_H$ ili $v = w$ i $\{a,b\} \in E_G$.

Teorema 2. Za proizvoljne povezane grafove G i H, važi nejednakost

$$\gamma_{con}(G)\gamma_{con}(H) \leq \gamma_{con}(G \square H). \tag{2}$$

Rezultat koji povezuje koveksni dominantni broj Dekartovog proizvoda i broj čvorova grafa daje sledeća teorema dokazana u (Labendia & Canoy, 2012) koja tvrdi

Teorema 3. Neka su G i H proizvoljni povezani grafovi sa m i n čvorova, respektivno. Tada je $\gamma_{con}(G \square H) = \min\{m \cdot \gamma_{con}(H), n \cdot \gamma_{con}(G)\}$.

U ovom radu ćemo posmatrati specijalnu klasu Dekartovih proizvoda grafova: Hamingove grafove (Hamming graphs). Hamingov graf $H_{n,k}$ se definiše kao:

$$H_{n,k} = \underbrace{K_k \square K_k \square \ldots \square K_k}_{n} \tag{3}$$

gde K_k označava kompletan graf (clique) sa k čvorova. Čvorovi Hamingovih grafova se mogu razmatrati kao n-dimenzionalni vektori, sa koordinatama koje uzimaju vrednosti u skupu $\{0,1,\ldots,k-1\}$. Dva čvora su susedna ako se razlikuju u tačno jednoj koordinati. Specijalno, za $k = 2$, graf $H_{n,2}$ se može predstaviti kao hiperkocka Q_n reda n, čiji čvorovi su n-dimenzionalni binarni vektori koji su susedni ako imaju jednu koordinatu različitu.

Očigledno je da $H_{n,k}$ ima k^n čvorova i svaki čvor ima n-dimenzionu okolinu sa $k-1$ grana u odnosu na svaku koordinatu, tako da je ukupan broj grana jednak $k^n \cdot n \cdot (k-1)/2$.

Primer 1. Hamingov graf $H_{3,4}$ ima $4^3 = 64$ čvorova, od kojih svakom odgovara uređena trojka čije koordinate mogu biti brojevi 0,1,2 ili 3. Na primer, čvor (2,0,3) ima susedne čvorove (2,1,3), (2,2,3), (2,3,3), (2,0,0), (2,0,1), (2,0,2), (0,0,3), (1,0,3) i (3,0,3).

3. KONVEKSNI I SLABO KONVEKSNI DOMINANTNI BROJEVI ZA HAMINGOVE GRAFOVE

Vrednost konveksnog dominantnog broja za Hamingov graf $H_{n,k}$ u potpunosti je određena sledećom teoremom.

Teorema 4. Za proizvoljan Hamingov graf $H_{p,q}$ konveksni dominantni broj je $\gamma_{con}(H_{p,q}) = q^{p-1}$.

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti indukcijom po vrednosti parametra p.

Za $p = 1$ Hamingov graf $H_{1,q} = K_q$. Kako je K_q kompletan graf, konveksan dominantan skup sa minimalnom kardinalnošću se sastoji od jednog čvora pa je tvrđenje zadovoljeno jer je $q^0 = 1$.

Za $p = 2$ Hamingov graf $H_{2,q} = K_q \Box K_q$. Koristeći rezultat Teoreme 3 imamo da je

$$\gamma_{con}(K_q \Box K_q) = \min\{q\gamma_{con}(K_q), q\gamma_{con}(K_q)\} = \min\{q \cdot 1, q \cdot 1\} = q = q^{2-1}$$

Pretpostavimo da tvrđenje važi za svako $r < p$, tj. $\gamma_{con}(H_{r,q}) = q^{r-1}$. Pokažimo da tada tvrđenje važi i za p. Posmatrajmo $H_{p,q}$. Iz definicije Hamingovog grafa je $H_{p,q} = H_{p-1,q} \Box K_q$. Ponovo koristeći Teoremu 3 i primedbu o broju čvorova Hamingovog grafa, dobijamo

$$\gamma_{con}(H_{p-1,q} \Box K_q) = \min\{q\gamma_{con}(H_{p-1,q}), q^{p-1}\gamma_{con}(K_q)\} \quad (4)$$

Koristeći induktivnu hipotezu da je $\gamma_{con}(H_{p-1,q}) = q^{p-2}$ izraz (4) postaje

$$\gamma_{con}(H_{p-1,q} \Box K_q) = \min\{q \cdot q^{p-2}, q^{p-1} \cdot 1\} = q^{p-1} \quad (5)$$

Odavde i sledi tvrđenje teoreme.

U slučaju slabo konveksnog dominantnog broja ne postoji ovako direktna veza (formula). Ovo se vidi iz Tabele 1 gde su date vrednosti slabo konveksnog dominantnog broja za neke manje vrednosti parametara p i q. Takođe su date i vrednosti za hiperkocke Q_n za vrednosti $n \leq 5$. Vrednosti u Tabeli 1 su dobijene primenom totalne enumeracije. Kako je određivanje slabo konveksnih dominantnih brojeva i konveksnih dominantnih brojeva NP-teško u opštem slučaju, egzaktni algoritmi ne mogu se koristiti za određivanje rešenja za grafove srednje i velike veličine. Konstruisanim algoritmom totalne enumeracije mogu se dobiti tačna rešenja za grafove sa oko 30 čvorova (Q_5 ima 32 čvora). U procesu traženja egzaktnog rešenja, posmatraju se svi podskupovi S, $S \subseteq V(G)$ počevši od $S = V(G)$ i proverava da li je $|S|$ manje od broja čvorova najboljeg rešenja do tada, kao i da li je S dominantan i (slabo) konveksan. U slučaju da su navedeni uslovi zadovoljeni, S se proglašava za najbolje rešenje do tada. Ako uslovi nisu ispunjeni, postupak se ponavlja za drugi podskup S skupa čvorova grafa G. Kada algoritam završi sa radom, najbolje dostignuto rešenje predstavlja i rešenje problema određivanja (slabo) konveksnih dominantnih brojeva.

Tabela 1: Vrednost slabo konveksnog dominantnog broja za neke Hamingove grafove

Hamingov graf	**Vrednost** γ_{wcon}	Vreme izvršavanja (u sekundama)
Q_1	1	0.000001
Q_2	2	0.000001
Q_3	4	0.000001
$H_{2,3}$	3	0.000001
$H_{2,4}$	4	0.015000
Q_4	8	0.015000
$H_{3,3}$	9	32.619000
$H_{2,5}$	5	8.782000
Q_5	14	1034.063000

Kao što se može videti iz Tabele 1, u slučaju hiperkocke Q_5 (parametri su $p = 5$, $q = 2$) ne može se primeniti formula koja je važila za konveksne dominantne zato što je $\gamma_{con}(Q_5) = 2^{5-1} = 16$, a totalnom enumeracijom je dobijeno da je $\gamma_{wcon}(Q_5) = 14$. U nekim drugim slučajevima, kao na primer $H_{3,3}$, vrednosti iz formule i u tabeli se poklapaju, jer je $3^{3-1} = 9$.

5. ZAKLJUČAK

Razmatrani su problemi konveksne dominacije i slabe konveksne dominacije za Hamingove grafove. Dobijena je tačna vrednost konveksnog dominantnog broja za Hamingove grafove. Pokazano je da tačna vrednost slabo konveksnog dominantnog broja može dostići tačnu vrednost konveksnog dominantnog broja za Hamingov graf (hiperkocku) Q_5.

LITERATURA

[1] J. Cyman, M. Lemanska, J. Raczek: Graphs with convex domination number close to their order. Discuss. Math. Graph Theory, 26 (2006), 307-316.

[2] T.N. Janakiraman, P.J.A. Alphonse: Weak convex domination in graphs. Inter-national Journal of Engineering Science, Adv. Comput. and Bio Tech., 1(1) (2010), 1-13.

[3] M.A. Labendia, S.R. Canoy, Jr.: Convex domination in the composition and Cartesian product of graphs. Czechoslovak Math. J., 62(137)(4) (2012), 1003-1009.

[4] M. Lemanska: Weakly convex and convex domination numbers. Opuscula Math.,24(2) (2004), 181-188.

[5] J. Raczek: NP-completeness of weakly convex and convex dominating set decision problems. Opuscula Math., 24(2) (2004) 189-196.