



МЕТАХЕУРИСТИЧКИ ПРИСТУП ОПТИМИЗАЦИОНИМ ПРОБЛЕМИМА

МЕТАНЕУРИСТИК APPROACH TO OPTIMIZATION PROBLEMS

ТАТЈАНА ДАВИДОВИЋ¹

¹ Математички институт САНУ, Београд, tanjad@mi.sanu.ac.rs

Резиме: Многи проблеми у свакодневном животу представљају проблеме оптимизације. Примери таквих проблема су кућне посете пацијентима, достава робе корисницима, планирање локација за разне услужне објекте и сл. Њихова поставка често подразумева једноставну формулацију, али је проналажење решења веома тешко. Оптимизација се бави проналажењем оптималног (најбољег) или барем неког довољно доброг решења за разматрани проблем. Постоји много метода за оптимизационе проблеме, које се грубо могу поделити на егзактне и приближне. Егзактне методе гарантују оптималност генерисаног решења за разматрани проблем, али су најчешиће временски и меморијски веома захтевне па ретко успевају да генеришу оптимално решење. Приближне методе треба да омогуће добијање квалитетних решења за веома кратко време која могу да задовоље захтеве корисника. Та решења обично нису оптимална и не може се показати колико су лошија од оптималног решења, али су често најбоље што се може генерисати у разумном времену. Посебну врсту приближних метода чине метахеуристике. Ове методе су уопштени скуп правила која се приликом имплементације прилагођавају сваком конкретном проблему. Овде су издвојене две метахеуристичке методе које су предложили истраживачи из Србије и представљени су резултати њихове примене на неколико оптимизационих проблема.

Кључне речи: Комбинаторна оптимизација, математичка формулација, приближна решења, метода променљивих околина, оптимизација колонијом пчела.

Abstract: Many problems in everyday life are optimization problems. Examples of such problems are home visits to patients, delivery of goods to users, location planning for various service facilities, etc. Their setting often implies a simple formulation, but finding a solution is very difficult. Optimization is concerned with finding the optimal (best) or at least some good enough solution for the considered problem. There are many methods for optimization problems, which can be roughly divided into exact and approximate. Exact methods guarantee the optimality of the generated solution for the considered problem, but they are usually very demanding in terms of time and memory, so they rarely succeed in generating an optimal solution. Approximate methods should allow obtaining quality solutions in a very short time that can satisfy the user's requirements. These solutions are usually not optimal and cannot be shown to be worse than the optimal solution, but they are often the best that can be generated in a reasonable amount of time. Metaheuristics are a special type of approximate methods. These methods are a general set of rules that are adapted to each specific problem during implementation. Here, two metaheuristic methods proposed by researchers from Serbia are singled out and the results of their application to several optimization problems are presented.

Keywords: Combinatorial optimization, mathematical formulation, sub-optimal solutions, variable neighborhood search, bee colony optimization.

1. УВОД

Оптимизациони проблеми дефинишу се задавањем (i) скупа објеката (са припадајућим доприносима) чијим избором или распоредом се формира решење, (ii) функције циља којом се израчунава квалитет одређеног подскопа или распореда објеката, и (iii) правила којима се описују дозвољени (допустиви) подскупови/распореди објеката [59]. Најбоље решење је оно чији објекти (компоненте) задовољавају правила (релацију) допустивости и одговарају

најмањој/највећој вредности функције циља међу свим могућим комбинацијама. Ово решење назива се *оптимално решење (оптимум)*. Сва остала решења која задовољавају релацију допустивости називају се *допустива* или *субоптимална решења*.

Формално, проблем оптимизације подразумева налажење минималне или максималне вредности неке функције $f(x)$ под условом да важе нека задата ограничења. Област дефинисаности функције f обележава се са S и представља *простор решења* оптимизационог проблема. Скуп свих променљивих $x \in X \subseteq S$, које припадају области дефинисаности функције f , а чије вредности су условљене релацијама (ограничењима) допустивости назива се *скуп допустивих решења* или *допустиви домен* X . Дакле, скуп X описује ограничења која променљиве x треба да задовољавају да би се сматрале допустивим решењима. Аргументи x функције циља f називају се променљиве одлучивања. Променљиве одлучивања најчешће узимају ненегативне вредности, а неке или све од њих могу бити дискретне (тј. да узимају целобројне или чак бинарне вредности). Већина оптимизационих проблема има једно или више (коначних) оптималних решења, мада постоје и проблеми код којих је допустив скуп празан или неограничен (када се оптимално решење налази међу бесконачно далеким тачкама).

Глобално оптимално решење $x \in X$ проблема минимизације је оно решење за које важи $f(x^*) \leq f(x)$ за свако $x \in X$, $x \neq x^*$. Проблем максимизације функције $f(x)$ може се свести на минимизацију функције $-f(x)$, тако да га није потребно посебно разматрати.

У наставку рада описане су методе оптимизације, посебно су издвојене оне чији аутори су истраживачи из Србије и приказани су резултати аутора у вези са применом тих метода на неке оптимизационе проблеме који имају примене у реалном животу.

2. МЕТОДЕ ОПТИМИЗАЦИЈЕ

Најопштије, методе оптимизације могу се поделити на:

- Егзактне (које гарантују оптималност добијеног решења)
- Приближне (хеуристичке): (похлепне) конструктивне методе, локална претрага
- Апроксимативне: хеуристике које гарантују квалитет решења
- Метакхеуристичке: уопштене приближне методе
- Хибридне: комбинација раније наведених метода

Егзактне методе заснивају се на потпуној претрази простора решења. Самим тим захтевају много ресурса за своје извршавање, првенствено времена и меморије. Због тога постају практично неупотребљиве када треба да се изврше над примерима великих димензија. Постоје егзактне методе које користе интелигентнији приступ претраживању, тј. имају уграђене механизме за усмеравање претраге ка квалитетнијим решењима и избегавање испитивања решења која су лошијег квалитета. Примери таквих метода су: методе гранања и ограничавања (branch-and-bound, B&B), метода гранања и одсецања (branch-and-cut, B&C), динамичко програмирање, алгоритам A^* [56, 59] и друге. Међутим, често ни оне нису довољно ефикасне, па се у пракси обично користе методе из неке од преосталих група.

Хеуристичке методе [34] представљају технике решавања неког проблема које узимају у обзир *a priori* знање о том проблему. Састоје се од коначног скупа корака који омогућавају добијање неких решења проблема оптимизације (без гаранције њихове оптималности) за релативно кратко време. Та решења обичну буду задовољавајућег квалитета, тј. употребљива су у практичним применама. Основна предност хеуристичких метода је њихова брзина, што омогућава добијање употребљивих решења и за проблеме великих димензија какви се најчешће јављају у реалним применама. Недостатак је што за добијено решење, не само да не постоји гаранција оптималности, већ се не може ни проценити колико су лошија од оптималног решења. Међутим, за проблеме великих димензија основни циљ је да се у разумном времену добије било какво решење, без обзира на његов квалитет. Када решење већ постоји, могу се применити разне технике за његово побољшање, што је у суштини била

основна идеја за развој метaxeуристика. Хеуристичке методе најчешће се користе за конструкцију (генерисање) решења и самим тим се током њиховог извршавања доносе одлуке на основу непотпуних информација. Постоје и итеративне методе које унапред дефинисаним трансформацијама покушавају да поправе нека позната решења. Те трансформације су углавном локалног карактера, тј. омогућавају генерисање решења која су блиска полазном.

Међу хеуристичким методама посебно место заузимају такозвани *апроксимативни алгоритми*, тј. хеуристике које гарантују квалитет добијеног решења [66, 67]. За таква решења се и даље не зна да ли су оптимална, али су сигурно „не више од α пута лошија од оптималног”. Тако на пример, познат је апроксимативни алгоритам за налажење минималног чворног покривача графа са коефицијентом апроксимације $\alpha = 2$ [64]. То значи да је резултујући граф садржи највише дупло више чворова од оптималног решења. Најпознатији апроксимативни алгоритам за распоређивање независних задатака на идентичне процесоре (Largest Processig Time first with Earliest Start scheduling rule, LPT-ES) има коефицијент апроксимације $\alpha = 4/3 - 1/(3m)$ где m представља број процесора [22]. Апроксимативне методе (када постоје) имају значајну улогу у генерисању почетних решења које се затим могу поправљати применом итеративних оптимизационих метода. То нам омогућава добијање решења за која је могуће проценити квалитет, па самим тим њихова примена (поред практичног) има и теоријски значај.

Развој хеуристичких метода у новије време кренуо је у смеру примене неких универзалних принципа, који не зависе од сваког конкретног проблема који се решава. То је довело и до развоја *универзалних хеуристика* или тзв. *метaxeуристика* [4, 59]. Ове универзалне методе састоје се од уопштених скупова правила која се могу применити за решавање разноврсних проблема оптимизације и подразумевају примену итеративних поступака у циљу изградње нових и бољих решења или поправљања неких постојећих. Треба напоменути да је основна мана метaxeуристика што (у општем случају) не могу да гарантују квалитет добијеног решења, осим ако њихово извршавање не полази од хеуристичког решења добијеног апроксимативном методом. У пракси се показало да различите метaxeуристичке методе, за релативно кратко време, успевају да пронађу квалитетна субоптимална решења за сложене проблеме или инстанце великих димензија, што је утицало на њихову широку примену последњих двадесетак година.

Метaxeуристике се могу класификовати на неколико начина. Прва класификација узима у обзир инспирацију за развој методе, па тако разликујемо методе инспирисане природним процесима од оних које су математички засноване. Према другој класификацији разликујемо методе које користе једно решење од оног које раде над популацијом решења, док се трећа класификација односи на то да ли се током рада метaxeуристичких метода решења изграђују или се модификују нека постојећа решења.

У наставку рада описане су две метaxeуристичке методе, једна која користи једно решење и једна популациона, чији су аутори истраживачи из Србије. Такође, представљени су примери примена тих метода на неке познате оптимизационе проблеме кроз преглед одговарајућих радова из литературе.

3. МЕТОДА ПРОМЕНЉИВИХ ОКОЛИНА

У овом одељку прво је описана метода променљивих околина коју су 1997. године предложили Младеновић и Хансен [51], а затим је дат преглед неких радова у којима је ова метода успешно примењена на неке значајне оптимизационе проблеме.

3.1. Кратак опис методе

Основне идеје методе променљивих околина (Variable Neighborhood Search, VNS) изложене су 1995. године [49]. Након првог рада у часопису [51], појавиле су се многе публикације у

којима се описују успешне примене VNS методе, али и оне у којима се предлажу модификације или нове варијанте. Метода се заснива на систематској промени околина унутар локалног претраживања инспирисана следећим једноставним чињеницама [29]:

- (i) локални оптимум у односу на једну околину не мора бити и локални оптимум у односу на неку другу околину;
- (ii) глобални оптимум је локални оптимум о односу на све околине; и
- (iii) за већину проблема локални оптимуми у односу на разне околине су међусобно блиски.

Прва чињеница оправдава увођење више околина, док другу уствари треба тумачити на следећи начин: ако неко решење није локални оптимум у односу на неку околину, онда сигурно није ни глобални оптимум. Решење које је локални оптимум у односу на све разматране околине и даље не мора бити глобални оптимум. Чињеница 3 је само емпиријска, не важи теоријски у општем случају и треба је користити условно. Уколико се процени да је она оправдана, препоручује се детаљно претраживање најближе околине локалних оптимума јер се ту очекује поправљање текућег најбољег решења. Дакле, за успешну имплементацију VNS методе неопходно је увести више околина, било да се мења метрика у односу на коју се дефинише околина, било да се повећава растојање у односу на исту метрику.

Нека је $x \in X$ произвољно допустиво решење и нека је $\mathcal{N}_k$, ($k = 1, 2, \dots, k_{max}$), коначна колекција унапред дефинисаних околина. Тада је $\mathcal{N}_k(x)$ скуп решења у k -тој околини од x , тј. скуп решења која се у односу на усвојену метрику (број трансформација) налазе на растојању k од решења x .

Многе метахеуристичке методе базиране на локалном претраживању углавном користе једну, две или три околине, ретко се јавља потреба за већим бројем околина, али се могу наћи у литератури и такви радови [47].

Основна варијанта VNS методе, (Basic Variable Neighborhood Search, BVNS) састоји се од три корака: (1) *размрдавања*, тј. случајног избора почетног решења у текућој (k -тој) околини тренутно најбољег решења, (2) *побољшања*, тј. примене неке процедуре локалне претраге почев од тог решења и (3) *померања*, тј. систематске (детерминистичке) промене околине зависно од квалитета добијеног локалног оптимума. Ово је најраспрострањенија и једна од најједноставнијих варијанти методе променљивих околина. Основни кораци BVNS методе извршавају се у петљи све док не буде задовољен неки критеријум заустављања. Почетно решење у околини k генерише се на случајан начин како би се обезбедило претраживање различитих региона приликом следећег разматрања околине k . Околине се могу разликовати по основу растојања (броја трансформација) или по основу метрике (врсте трансформација). Важно је напоменути да околине за размрдавање (избор случајног решења) и локално претраживање не морају бити истог типа (не морају бити везане за исту метрику). Описани кораци илустровани су псеудокодом представљеним Алгоритмом 1.

VNS метода у току свог извршавања примењује похлепну стратегију померања, што значи да увек прелази у боље решење и то чим се оно пронађе., тј. метода је First-Improvement (FI) карактера. Основни параметар VNS методе је k_{max} - максималан број околина које се истражују [27, 51]. Критеријум заустављања може бити максимално дозвољено време извршавања алгоритма, максимални број итерација, тј. колико пута се достигне k_{max} , максимални број промена вредности за k (број извршених размрдавања и локалних претрага) или број итерација (размрдавања и локалних претрага) између две поправке глобално најбољег решења. Уколико се локална претрага врши кроз више околина, што иначе претставља методу променљивог спуста (Variable neighborhood Descent, VND), добија се уопштена метода променљивих околина (General Variable Neighborhood Search, GVNS). При томе околине у којима се бира почетно решење и околине у оквиру којих се извршава VND процедура могу бити дефинисане на различите начине.

```

procedure BVNS(instanca,  $k_{max}$ , STOP)
   $x \leftarrow \text{InitSolution}()$ 
   $x_{best} \leftarrow x$ 
   $f_{best} \leftarrow f(x)$ 
  repeat
     $k \leftarrow 1$ 
    repeat
       $x' \leftarrow \text{RandomSolution}(x_{best}, \mathcal{N}_k)$  // Размрдавање
       $x'' \leftarrow \text{LocalSearch}(x')$  // Побољшање
      if ( $f(x'') < f_{best}$ ) then // Померање
         $x_{best} \leftarrow x''$ 
         $f_{best} \leftarrow f(x'')$ 
         $k \leftarrow 1$ 
      else
         $k \leftarrow k + 1$ 
      end if
       $term \leftarrow \text{StoppingCriterion}(\text{STOP})$ 
    until ( $k > k_{max} \vee term$ )
  until ( $term$ )
  return ( $x_{best}$ ,  $f_{best}$ )
end procedure

```

VNS метода је до сада успешно примењена на велики број проблема комбинаторне оптимизације и вештачке интелигенције. Предложено је неколико модификација и побољшања, углавном намењених успешном решавању проблема великих димензија [27, 28, 29, 30]. Ове модификацију могу укључивати нове параметре, али и нове стратегије претраживања. У наставку су приказани неки примери примена, углавном као преглед резултата аутора и сарадника.

3.2. Примери примене VNS методе

Истраживачи широм света прихватили су VNS методу и постоји на хиљаде радова у којима се описују имплементације разних варијанти за решавање многих познатих оптимизационих проблема као и многих нових проблема који имају примену у реалном животу. Прва примена BVNS методе била је на проблем трговачког путника и описана је у већ поменутом раду Младеновића и Хансена из 1997. године [51]. Међу прве примере примене методе спадају и проблеми p -медијане [26] и p -центара [53], при чему је за први проблем разматрана и паралелна верзија методе [10].

Значајни резултати постигнути су и на разним оптимизационим проблемима на графовима [5, 6, 7, 31, 48, 52, 65], проблемима распоређивања [1, 2, 13, 16, 33, 41], кластеровања [8, 38], рутирања [47], аутоматског доказивања теорема [37, 55] и разним проблемима континуалне оптимизације [9, 21, 50].

VNS метода успешно је коришћена и за решавање разних уопштених проблема мешовитог целобројног програмирања [3, 25], а на ову тему најзначајнији резултати постигнути су хибридизацијом са егзактним солверима [32, 24, 23, 39, 42].

Овде су наведени само неки радови везани за резултате остварене у вези са VNS методом. Исцрпан преглед литературе превазилази оквире овог рада. Важно је само напоменути да методу користе истраживачи са свих континената, своје резултате објављују у научним часописима, публикацијама монографског карактера, на научним скуповима од

којих је најважнији међународна конференција посвећена методи (International Conference on VNS, ICVNS) установљена 2005. године на којој се окупљају истраживачи из целог света да размене искуства у развоју и имплементацији VNS методе.

4. ОПТИМИЗАЦИЈА КОЛОНИЈОМ ПЧЕЛА

Метода оптимизације колонијом пчела (Bee Colony Optimization, BCO) је метахеуристика инспирисана понашањем пчела у потрази за храном. То је један од првих алгоритама који користи основне принципе колективне интелигенције пчела у решавању проблема комбинаторне оптимизације. BCO метода првобитно је предложена за примену на познате тешке проблеме комбинаторне оптимизације као што су проблем трговачког путника [43, 44, 45] и рутирање возила [46], али је касније проширена на многе друге проблеме, па и на проблеме континуалне оптимизације [54, 63]. То је итеративна стохастичка метода (користи технику случајне претраге) и ради над популацијом решења. Инспирација за развој методе настала је успостављањем аналогije између понашања пчела у потрази за храном и понашања оптимизационог алгорита током претраживања простора решења датог комбинаторног проблема [20].

4.1. Кратак опис BCO методе

Основна идеја методе је формирање система мулти-агента (колоније вештачких пчела) који би се ефикасно примењивао на тешке проблеме оптимизације. Вештачке пчеле претражују простор решења у потрази за допустивим решењима датог проблема. У циљу поправљања квалитета генерисаних решења, аутономне вештачке пчеле сарађују и размењују информације. Дељењем доступних информација и коришћењем колективног знања, вештачке пчеле концентришу претрагу на области које потенцијално садрже боља решења, а напуштају решења слабијег квалитета. Оваквим поступком вештачке пчеле колективно генеришу све боља и боља решења.

BCO алгоритам ради у итерацијама све до задовољења неког унапред дефинисаног критеријума заустављања. Најчешће коришћени критеријуми заустављања (као и код других метахеуристичких метода) су максимално дозвољено време, максимални број итерација, максимални број итерација без побољшања тренутно најбољег решења, максимални број израчунавања вредности функције циља и многи други, а понекад се користе и комбинације више критеријума. Постоје две основне варијанте BCO методе, конструктивна (која, почевши од празних решења, изграђује решења примењујући неку врсту стохастичког похлепног избора нових компоненти) и варијанта са поправком (која полази од неких комплетних решења и покушава да их побољша применом стохастичких правила замене компоненти). Варијанта са поправком је у литератури позната као *improvement* BCO (BCOi) [17, 54, 57].

Популација вештачких пчела састоји се од N агената који заједно трагају за решењем разматраног оптимизационог проблема. Свака вештачка пчела генерише по једно решење за дати проблем [18]. Псеудокод BCO методе представљен је Алгоритмом 2. Рад алгоритма одвија се кроз итерације, а свака итерација се састоји од NC корака. Корак BCO алгоритма дели се на две фазе: лет унапред (енгл. *forward pass*) и лет уназад (енгл. *backward pass*). Дакле, у оквиру једне итерације ове две фазе се смењују NC пута, тј. док се не изгенеришу комплетна решења, у конструктивној верзији алгоритма, или док се не изврши NC модификација почетних решења, у BCOi верзији. Током лета унапред све вештачке пчеле су укључене у истраживање простора решења. По аналогiji са природним процесом прикупљања нектара, квалитет (парцијалног) решења може се поистоветити са количином сакупљеног нектара и/или са удаљеношћу кошнице од извора хране, а процес сакупљања нектара у природи одговара фази лета унапред у BCO алгоритму. Ова фаза алгоритма

директно зависи од проблема који се решава и мора се приликом имплементације максимално прилагодити том проблему.

Алгоритам 2: Псеудокод за BCO методу

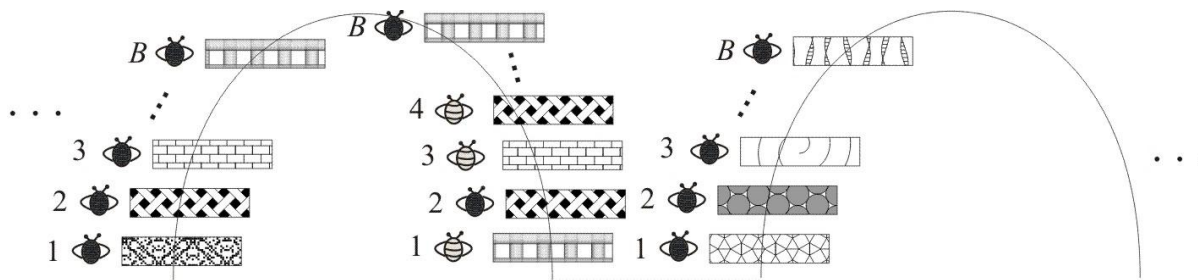
procedure BCO(*instanca*, *B*, *NC*, *STOP*)

```
while  $\neg$ (Terminate  $\leftarrow$  StoppingCriterion(STOP)) do
  for b  $\leftarrow$  1, B do                                // Одређивање иницијалне популације
    Solution(b)  $\leftarrow$  Initialize()
  end for
  Update(xbest, f(xbest))
  for u  $\leftarrow$  1, NC do
    for b  $\leftarrow$  1, B do                                // Лет унапред
      Transform(Solution(b))
    end for
    for b  $\leftarrow$  1, B do                                // Лет уназад
      Loyalty(Solution(b))
    end for
    for b  $\in$  NonLoyal do
      Recruitment(Solution(b))
    end for
  end for
  Update(xbest, f(xbest))
end while
return(xbest, f(xbest))
```

end procedure

У фази лета уназад вештачке пчеле размењују информације о квалитету пронађених решења и то користе за доношење одлуке која решења су перспективна и заслужују даља истраживања, а која треба одбацити и заменити их перспективнима. Ритуални плес пчела у природи у алгоритму претраживања замењен је процењивањем (евалуирањем) квалитета сваког генерисаног (парцијалног) решења релативно у односу на најбоље и најлошије решење у тренутној популацији. Квалитет решења исказује се реалним бројем који припада интервалу $[0,1]$. Најквалитетније решење међу свим вештачким пчелама добија ознаку квалитета 1, а најлошије 0 (или неку вредност блиску нули). Када се сва решења евалуирају, свака вештачка пчела треба да одреди да ли ће остати *лојална* свом (парцијалном) решењу и наставити његово истраживање. Та одлука доноси се на основу вероватноће, која зависи од односа квалитета тренутног решења дате вештачке пчеле и квалитета решења „најбоље“ вештачке пчеле. Најбоља пчела је она која тренутно поседује најквалитетније (парцијално) решење. Она је увек лојална том свом решењу, јер је њена вероватноћа лојалности увек једнака јединици. Вештачка пчела која напусти (одбаци) своје (парцијално) решење постаје *нелојална* и мора да преузме неко од решења лојалних вештачких пчела при чему пчеле које поседују квалитетнија решења имају веће шансе да то решење задрже (да остану лојалне) и рекламирају га осталима. За разлику од пчела у природи, које не морају да изводе ритуални плес и рекламирају своје изворе хране другима, вештачке пчеле које остану лојалне свом (парцијалном) решењу у исто време постају и *регрутери*, односно, међу њима ће нелојалне вештачке пчеле бирати замену за решења која су одбациле. У том моменту издвајају се две врсте пчела *R* регрутера и преосталих *B-R* нелојалних (неопредељених) пчела [18]. Одлуку које од рекламираних решења ће преузети, неопредељена вештачка пчела доноси са вероватноћом која је пропорционална квалитету одговарајућег рекламираног решења и та одлука се реализује помоћу рулета.

Извршавање BCOi методе илустровано је на слици 1. На левом делу полукруга илустрована је фаза лета унапред у којој свака вештачка пчела модификује своје решење. Како су модификације стохастичке, пчеле ће на крају ове фазе имати различита решења. Након фазе лета уназад (евалуације, одређивања лојалности и регрутације) нелојалне пчеле 1 и 4 (које су одбациле своја решења) преузеће решења од неких регрутера и зато на десном делу полукруга пчеле 1 и B и пчеле 2 и 4 имају иста решења. У наредном лету унапред, модификација ће променити иста решења на различите начине и опет ће све пчеле имати различита (потенцијално побољшана) решења.



Слика 1: Илустрација рада BCO методе

4.2. Примери примене BCO методе

Након првих радова са описом и применама BCO методе [43, 44, 45, 46], појавило се још неколико радова у којима је ова метода примењивана на транспортне проблеме. Почев од 2007. године појављују се радови у којима се разматрају локацијски проблеми [16, 17], проблем распоређивања [19, 18] за који је развијена и паралелна верзија ове методе [15], проблем доделе везова бродовима у луци [40], проблем кластеровања [12], проблем задовољности у класичним [35] и не-класичним логикама [57,58] и многи други.

Осим паралелизације, за BCO методу је извршена и теоријска анализа, тј. доказани су потребни и довољни услови под којима решења генерисана овом методом асимптотски конвергирају ка оптималном решењу [36]. За овакву конвергенцију, неопходно је да се приликом имплементације методе укључи и процес учења из већ посећених решења што није уобичајено за већину метахеуристичких метода. Овакав концепт омогућио је да се теоријска анализа примени и на друге, углавном популационе, метахеуристичке методе [14].

Прегледни радови [11, 20, 60, 62], садрже детаљан преглед литературе везане за развој и примене BCO методе.

5. ЗАКЉУЧАК

Метахеуристичке методе представљају, не само моћан, него често и једини алат за решавање тешких оптимизационих проблема. У раду су представљене две метахеуристичке методе чији су аутори истраживачи из Србије: метода променљивих околина и метода оптимизације колонијом пчела. Укратко су описани основни кораци ових метода, примери њихових примена на неке значајне проблеме комбинаторне и континуалне оптимизације и указано на литературу из које се може сазнати више детаља о развоју и примени ових метода. Основна намера је популаризација метода и подстицање истраживача, нарочито млађих колега и доктораната да користе ове методе, учествују у њиховом даљем развоју и промовишу њихову ширу употребу кроз своје резултате.

ЗАХВАЛНИЦА

Истраживања аутора описана у овом раду финансирана су од стране Министарства за науку, технолошки развој и иновације, по основу неколико пројеката. Тренутно финансирање је на основу уговора бр. 451-03-47/2023-01/200029. Наведена истраживања непрекидно и значајно подржавају моја породица и сарадници аутора и овим путем им изражавам огромну захвалност.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Anokić, A., Stanimirović, Z., Stakić, Đ., Davidović, T. (2021). Metaheuristic approaches to a vehicle scheduling problem in sugar beet transportation. *Operational Research*, 21, 2021-2053.
- [2] Anokić, A., Stanimirović, Z., Davidović, T., Stakić, Đ. (2020). Variable neighborhood search based approaches to a vehicle scheduling problem in agriculture. *International Transactions in Operational Research*, 27(1), 26-56.
- [3] Alonso-Ayuso, A., Escudero, L. F., Martín-Campo, F. J., Mladenovic, N. (2012). VNS based algorithm for solving a 0-1 nonlinear nonconvex model for the Collision Avoidance in Air Traffic Management. *Electron. Notes Discret. Math.* 39, 115-120.
- [4] Blum, C., Roli, A. (2003). Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 35(3), 268-308.
- [5] Brimberg, J., Mladenović, N., Urošević, D., Ngai, E. (2009). Variable neighborhood search for the heaviest k-subgraph. *Comput. Oper. Res.*, 36(11), 2885-2891.
- [6] Brimberg J., Mladenović N., Urošević D. (2008). Local and variable neighborhood search for the k -cardinality subgraph problem. *J. Heuristics*, 14(5), 501-517.
- [7] Brimberg J., Urošević D., Mladenović N. (2006). Variable neighborhood search for the vertex weighted k-cardinality tree problem. *Eur. J. Oper. Res.*, 171(1), 74-84.
- [8] Carrizosa, E., Mladenović, N., Todosijević, R. (2013). Variable neighborhood search for minimum sum-of-squares clustering on networks. *Eur. J. Oper. Res.*, 230(2), 356-363.
- [9] Carrizosa, E., Dražić, M., Dražić, Z., Mladenović, N. (2012). Gaussian variable neighborhood search for continuous optimization. *Comput. Oper. Res.*, 39(9), 2206-2213.
- [10] Crainic, T.G., Gendreau, M., Hansen, P., Mladenović, N. (2004). Cooperative Parallel Variable Neighborhood Search for the p-Median, *J. Heuristics*, 10(3), 293-314.
- [11] Davidović, T. (2015) Bee Colony Optimization: Recent Developments and Applications, (plenary talk), *Proc. Balkan Conference on Operational Research, BALCOR 2015*, Constanta, Romania, Sept. 9-12, 2015. Mircea cel Batran Naval Academy Scientific Bulletin, Volume XVIII, Issue 2, 225-235.
- [12] Davidović, T., Glišović, N., Rašković, M. (2018). Bee Colony Optimization for Clustering Incomplete Data. *Proc. The 7th International Conference on Optimization Problems and Their Applications, OPTA 2018*, Omsk, Russia, July 08-14, 2018, In: S. Belim et al. (eds.): *Proceedings of the School-Seminar on Optimization Problems and their Applications (OPTA-SCL 2018)*, CEUR Workshop Proceedings, 94-108.
- [13] Davidović, T., Hansen, P., Mladenović, N. (2005). Permutation based genetic, tabu and variable neighborhood search heuristics for multiprocessor scheduling with communication delays. *Asian Pacific Journal of Operations Research*, 22, 297-326.
- [14] Davidović, T., Jakšić Krüger, T. (2018). Convergence Analysis of Swarm Intelligence Metaheuristic Methods. In: Ereemeev A., Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. (eds.), *Proc. The 7th International Conference on Optimization Problems and Their Applications, OPTA 2018*,

Omsk, Russia, July 08-14, 2018, Communications in Computer and Information Science book series (CCIS, volume 871), Springer, 251-266.

- [15] Davidović, T., Jakšić, T., Ramljak, D., Šelmić, M., Teodorović, D. (2013). Parallelization strategies for bee colony optimization based on message passing communication protocol. *OPTIMIZATION*, 62(8), 1113-1142, Special Issue entitled "Advances in Discrete Optimization", dedicated to BALCOR 2011.
- [16] Davidović, T., Janićijević, S. (2009). Heuristic Approach to Scheduling Independent Tasks on Identical Processor, *Proc. Symp. on information technology*, YUINFO 2009, (on CD 115.pdf), Kopaonik, March 08-11.
- [17] Davidović, T., Ramljak, D., Šelmić, M., Teodorović, D. (2011). Bee Colony Optimization for the p-Center Problem, *Computers and Operations Research*, 38(10), 1367-1376.
- [18] Davidović, T., Šelmić, M., Teodorović, D., Ramljak, D. (2012). Bee Colony Optimization for Scheduling Independent Tasks to Identical Processors, *Journal of Heuristics*, 18(4), 549-569.
- [19] Davidović, T., Šelmić, M., Teodorović, D. (2009). Scheduling Independent Tasks: Bee Colony Optimization Approach. *Proc. 17th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Makedonia Palace, Thessaloniki, Greece, June 24-26, 1020-1025.
- [20] Davidović, T., Teodorović, D., Šelmić, M. (2015). Bee Colony Optimization Part I: The Algorithm Overview, *Yugoslav Journal of Operational Research*, 25(1), 33-56.
- [21] Dražić, M., Lavor, C., Maculan, N., Mladenović, N. (2008). A continuous variable neighborhood search heuristic for finding the three-dimensional structure of a molecule. *Eur. J. Oper. Res.*, 185(3), 1265-1273.
- [22] Graham, R. L. (1969). Bounds on multiprocessor timing anomalies. *SIAM J. Applied Math.*, 17:416-429.
- [23] Hanafi, S., Lazić, J., Mladenović, N. (2010). Variable Neighbourhood Pump Heuristic for 0-1 Mixed Integer Programming Feasibility. *Electron. Notes Discret. Math.* 36, 759-766.
- [24] Hanafi S., Lazić J., Mladenović N., Wilbaut C., Crévits I. (2010). Hybrid Variable Neighbourhood Decomposition Search for 0-1 Mixed Integer Programming Problem. *Electron. Notes Discret. Math.*, 36, 883-890.
- [25] Hansen P., Brimberg J., Urošević D., Mladenović N. (2007). Primal-Dual Variable Neighborhood Search for the Simple Plant-Location Problem. *INFORMS J. Comput.*, 19(4), 552-564.
- [26] Hansen P., Mladenović, N. (1997) Variable neighbourhood search for the p-median, *Location Science* 5, 207-226.
- [27] Hansen, P., Mladenović, N. (2001). Variable neighborhood search: Principles and applications. *Europ. J. Oper. Res.*, 130, 449-467.
- [28] Hansen, P., Mladenović, N. (2002). Developments of the variable neighborhood search. In C. Ribeiro and P. Hansen, editors, *Essays and Surveys in Metaheuristics*, Kluwer Academic Publishers, 415-439.
- [29] Hansen, P. , Mladenović, N. (2003). Variable neighbourhood search. In F. Glover and G. Kochenagen, editors, *Handbook of Metaheuristics*, 145-184. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [30] Hansen, P., Mladenović, N., Brimberg, J., Moreno Pérez. J. A. (2010). Variable neighborhood search. In M. Gendreau and J-Y. Potvin, editors, *Handbook of Metaheuristics*, pages 61-86. (second edition) Springer, New York Dordrecht Heidelberg London.
- [31] Hansen P., Mladenović N., Urošević D. (2004). Variable neighborhood search for the maximum clique, *Discret. Appl. Math.*, 145(1), 117-125.

- [32] Hansen P., Mladenović N., Urošević D. (2006). Variable neighborhood search and local branching, *Comput. Oper. Res.*, 33(10), 3034-3045.
- [33] Hansen P., Oguz C., Mladenović N. (2008). Variable neighborhood search for minimum cost berth allocation, *Eur. J. Oper. Res.*, 191(3), 636-649.
- [34] Jakšić Krüger. T. (2017). Development, implementation, and theoretical analysis of the Bee Colony Optimization (BCO) meta-heuristic method. PhD thesis, Faculty of Technical Science, University of Novi Sad.
- [35] Jakšić Krüger, T., Davidović, T. (2016). Empirical Analysis of the Bee Colony Optimization Method on 3-Sat Problem, *Proc. 43rd Symposium on Operations Research, SYM-OP-IS 2016*, Tara, Sept. 20-23, 2016, 297-301.
- [36] Jakšić Krüger, T., Davidović, T., Teodorović, D., Šelmić, M. (2016). The Bee Colony Optimization Algorithm and its Convergence, *Int. J. Bio-Inspired Computation*, 8(5), 340-354.
- [37] Jovanović, D., Mladenović, N., Ognjanović, Z. (2007). Variable Neighborhood Search for the Probabilistic Satisfiability Problem, in: *Metaheuristics: Progress in Complex Systems Optimization*, Springer Series: Operations Research/Computer Science Interfaces Series, Vol. 39, Doerner, K.F.; Gendreau, M.; Greistorfer, P.; Gutjahr, W.; Hartl, R.F.; Reimann, M. (Eds.), Springer, Berlin-NY, 173-188.
- [38] Jovanović, Đ., Davidović, T., Urošević, D., Jakšić-Krüger, T., Ramljak, D. (2023). Variable Neighborhood Search Approach to Community Detection Problem, in Georgiev, I., Datcheva, M., Georgiev, K., Nikolov, G., (Eds.) *Proc. 10th International Conference on Numerical Methods and Applications (NMA 2022)*, Borovets, Bulgaria, Aug. 22-26, 2022, LNCS 13858, Springer, Cham, 188-199.
- [39] Jovanović, P., Davidović, T., Lazić, J., Mitorvić Minić, S. (2015). The Variable Intensity Neighborhood Search for 0-1 MIP, *Proc. 42nd Symposium on Operations Research, SYM-OP-IS 2015*, Srebrno jezero, Sept. 15-18, 2015, 229-232.
- [40] Kovač, N., Davidović, T., Stanimirović, Z. (2021). Population-based Metaheuristics for the Dynamic Minimum Cost Hybrid Berth Allocation Problem, *International Journal on Artificial Intelligence Tools*, 30(4), 2150017:1-29.
- [41] Kovač, N., Davidović, T., Stanimirović, Z. (2018). Variable neighborhood search methods for the dynamic minimum cost hybrid berth allocation problem, *Information Technology and Control*, 47(3), 471-488.
- [42] Lazić J., Hanafi S., Mladenović N., Urošević D. (2010). Variable neighbourhood decomposition search for 0-1 mixed integer programs, *Comput. Oper. Res.*, 37(6), 1055-1067.
- [43] Lučić, P., Teodorović, D. (2001). Bee system: modeling combinatorial optimization transportation engineering problems by swarm intelligence. In *Preprints of the TRISTAN IV Triennial Symposium on Transportation Analysis*. Sao Miguel, Azores Islands, 441-445.
- [44] Lučić, P., Teodorović, D. (2002). Transportation modeling: an artificial life approach. In *Proceedings of the 14th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence*, Washington, DC, 216-223.
- [45] Lučić, P., Teodorović, D. (2003a). Computing with bees: attacking complex transportation engineering problems. *International Journal on Artificial Intelligence Tools*, 12(3), 375-394.
- [46] Lučić, P., Teodorović, D. (2003b). Vehicle routing problem with uncertain demand at nodes: the bee system and fuzzy logic approach. In J. L. Verdegay, editor, *Fuzzy Sets based Heuristics for Optimization*, Physica Verlag: Berlin Heidelberg, 67-82.
- [47] Matijević, L. (2023). General Variable Neighbourhood Search for Electric Vehicle Routing Problem with Time-dependent Speeds and Soft Time Windows. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 14, 275-292.

- [48] Matijević, L., Jelić, S., Davidović, T. (2022). General Variable Neighborhood Search Approach to Group Steiner Tree Problem. *Optimization Letters*, (accepted), Special Issue dedicated to ICVNS 2021 virtual conference. DOI: 10.1007/s11590-022-01904-7
- [49] Mladenović, N. (1995). A variable neighborhood algorithm - a new metaheuristic for combinatorial optimization applications. In *Optimization Days*, p. 112, Montreal, 1995.
- [50] Mladenović, N., Dražić, M., Kovačević-Vujčić V., Čangalović M. (2008) General variable neighborhood search for the continuous optimization., 191(3), 753-770.
- [51] Mladenovic N., Hansen P. (1997). Variable neighborhood search, *Comput. Oper. Res.*, 24(11), 1097-1100.
- [52] Mladenović N., Kratica J., Kovačević-Vujčić V., Čangalović M. (2012). Variable neighborhood search for metric dimension and minimal doubly resolving set problems. *Eur. J. Oper. Res.*, 220(2), 328-337.
- [53] Mladenović N., Labbé M., Hansen P. (2003). Solving the p-Center problem with Tabu Search and Variable Neighborhood Search. *Networks*, 42(1), 48-64.
- [54] Nikolić, M., Teodorović, D. (2013). Empirical study of the bee colony optimization (BCO) algorithm. *Expert Systems with Applications*, 40(11), 4609–4620.
- [55] Ognjanović Z., Midić U., Mladenović N. (2005). A hybrid genetic and variable neighborhood descent for probabilistic SAT problem, *Lecture notes in Computer Science*, 3636, 42-53.
- [56] Stanimirović, Z. (2007). Genetski algoritmi za rešavanje nekih NP-teških hab lokacijskih problema, Doktorska disertacija, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu.
- [57] Stojanović, T., Davidović, T., Ognjanović, Z. (2015). Bee Colony Optimization for the Satisfiability Problem in Probabilistic Logic, *Applied Soft Computing*, 31, pp. 339-347.
- [58] Stojanović, T., Ikodinović, N., Davidović, T., Ognjanović, Z. (2021). Automated non-monotonic reasoning in System P , *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 89, 471–509.
- [59] Talbi, E.-G. (2009). *Metaheuristics: From Design to Implementation*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- [60] Teodorović, D., Davidović, T., Šelmić, M., Nikolić, M. (2021). Bee Colony Optimization and its Applications, in Kulkarni A., Siarry, P. (Eds.) *Handbook of AI-based Metaheuristics*, CRC Press, Boca Raton, 301-321.
- [61] Teodorović, D., Šelmić, M. (2007). The BCO algorithm for the p-median problem. In *Proceedings of the XXXIV Serbian Operations Research Conferece*, Zlatibor, Serbia (in Serbian), 417–420.
- [62] Teodorović, D., Šelmić, M., Davidović, T. (2015). Bee Colony Optimization Part II: The Applications Survey, *Yugoslav Journal of Operational Research*, 25(2), 185-219.
- [63] D. Teodorović, M. Šelmić, and Lj. Mijatović-Teodorović. (2013). Combining case-based reasoning with bee colony optimization for dose planning in well differentiated thyroid cancer treatment. *Expert Systems with Applications*, 40(6), 2147–2155.
- [64] Tu, J., Zhou, Z. (2011). A factor 2 approximation algorithm for the vertex cover P_3 problem. *Information Processing Letters*, 111(14):683-686.
- [65] Urošević D., Brimberg J., Mladenović N. (2004). Variable neighborhood decomposition search for the edge weighted k-cardinality tree problem, *Comput. Oper. Res.*, 31(8), 1205-1213.
- [66] Vazirani, V. V. (2001). *Approximation algorithms*. Springer Science & Business Media.
- [67] Williamson, D. P., Shmoys, D. B. (2011). *The design of approximation algorithms*. Cambridge University Press.