Parcijalno rekurzivne funkcije

Ivona Aleksandrić 59/2007
Informatika,Beograd
Novembar, 2009.
Profesor: Zoran Ognjanović

Parcijalne rekurzivne funkcije

Prošlog predavanja smo radili primitivne rekurzivne funkcije. Radili smo Akermanovu funkciju, koja nije primitivno rekuzivna, ali je izračunljiva funkcija.

Najmanja klasa funkcija koja sadrži sve inicijalne funkcije, te je zatvorena za kompoziciju, primitivnu rekurziju i μ-operator, naziva se klasa parcijalno rekurzivnih funkcija. (ovaj μ-operator je bitna razlika između primitivno rekurzivnih i izračunljivih funkcija! Njenom definicijom dobijamo ove funkcije!)

Klasa parcijalno rekurzivnih funkcija se dobija tako što oduzmemo ograničenje za klasu primitivnih rekurzivnih funkcija, a to je <u>zatvorenost za operaciju minimizacije</u>. I nakon svega toga, klasa se proširuje toliko da se poklopi sa Tjuring – izračunljivim funkcijama

Definicija parcijalno rekurzivnih funkcija

Klasa parcijalno rekurzivnih funkcija sadrži osnovne funkcije:

Funkcija	Oznaka
Nula funkcija za svako $\forall n \in \mathbb{N}$	Z(n)=0
Funkcija naslednika za $\forall n \in \mathbb{N}$	S(n)
Funkcija projekcije 1≤i≤k	$P_k^i=(x_1, x_2, \ldots, x_k)=x_i$
Funkcija kompozicije*	$f(x_{1,\ldots}, x_k)=g(h_1(x_{1,\ldots}, x_k), \ldots, h_m(x_{1,\ldots}, x_k))$
Funkcija primitivne rekurzije*	$f(0, x_1, \ldots, x_m)=g(x_1, \ldots, x_m)$ $f(n+1, x_1, \ldots, x_m)=h(f(n, x_1, \ldots, x_m), n, x_{1,\ldots}, x_m)$
Funkcija neograničene minimizacije*	$(\mu y)(f(x_{1,\ldots}, x_k, y)=0)=\begin{cases} \min(z)\ za\ koje\ je\ f(x_{1,\ldots}, x_k, z)=0 \\ i\ za\ \forall\ y<z\ je\ f(x_{1,\ldots}, x_k, y)\ definisano \\ nedefinisano,\ inače \end{cases}$

* sve funkcije koje se od prve tri dobijaju konačnim putem ovih operacija

Bez sledećih operacija ne bismo mogli da definišemo pojam rekurzivnih funkcija.

Ukratko o operacijama:

- **Kompozicija** - Ako su već definisane m-arna funkcija g i k-arna funkcija h1,...,hm, definisana je i k-arna funkcija f
- **Primitivna rekurzija** – Ako su već definisane m-arna funkcija g i m+2-arna funkcija h, definisana je i m+1-arna funkcija f
- **Neograničena minimizacija μ-operator** – f je definisana primitivnom
- rekurzijom nad h sa bazom g i njenom stavkom. Ona znači da ako je
- već definisana k+1-arna funkcija, definisana je i funkcija nad oznakom.

Neograničena minimizacija

Funkcija neograničene minimizacije je funkcija arnosti k čiji su argumenti $x_{1,\dots}, x_k$ i da je intuitivno izračunljiva.

Dokazujemo na osnovu sledećeg postupka:

Prvo računamo $f(x_{1,\dots}, x_k, 0)$. Ako je ova funkcija definisana za ove argumente i ima vrednost 0, rezultat je 0. A ako joj vrednost nije 0, onda se računa $f(x_{1,\dots}, x_k, 1)$.

Ako funkcija nije definisana za prve gorenavedene argumente ni funkcija $(\mu y)(f(x_{1,\dots}, x_k, y) = 0)$ neće biti definisana.

Značajno: operacijom neograničene minimizacije se mogu dobiti i parcijalno primitivne funkcije!

Primeri

Funkcija $(\mu y)(\frac{x}{y} - 1 = 0)$ nije definisana ni za jedno x pošto nije definisano ni za deljenje nulom.

Funkcija $2 \simeq (2\frac{(x+1)}{(x+1)})$ vredi za $\forall x \in \mathbb{N}$

Zato kažemo da klasa parcijalno rekurzivnih funkcija sadrži sve primitivno rekurzivne funkcije, jer se u njoj nalaze osnovne funkcije i zatvorena je za te funkcije.

Značajno je što u klasi parcijalno rekurzivnih funkcija postoje i funkcije koje nisu totalne, a to znači da nisu ni primitivno rekurzivne.

I naravno, Akermanova funkcija je primer totalne funkcije koja nije primitivno rekurzivna, a jeste parcijalno rekurzivna, o čemu je bilo reči.

Definicija

Rekurzivne funkcije su totalno parcijalno rekurzivne funkcije.

*Funkcija je totalna ako je njen domen skup $\mathbb{N}^k$: Ako želimo naglasiti da neka funkcija moguće nije totalna tada kažemo da je ona parcijalna!

Definicija

Predikat R je rekurzivan (odlučiv) ako je njegova karakteristična funkcijaC_R rekurzivna. Ž

Rekurzivni predikati se često nazivaju i odlučivim predikatima. (O predikatima detaljnije će se pričati kasnije, a ovde je navedeno jer je bitno imati početni uvid o njima)

Oznake

Oznake $f\,(x_{1,\ldots}, x_k)\downarrow$[1], $f\,(x_{1,\ldots}, x_k)\downarrow y$[2] *i* $f\,(x_{1,\ldots}, x_k)\uparrow$[3] (analogno oznakama Tjuringovih mašina) znače da je funkcija *f* arnosti k i da je definisana za argumente $x_{1,\ldots}, x_k$, da je njen rezltat *y*, odnosno da nije definisana za te argumente.

1 f konvergira
2 f konvergira ka y
3 f divergira

Definicija

Dve parcijalno rekurzivne funkcije f i g su jednake (poklapaju se kao skupovi uređenih k+1-torki) ($f \simeq g$) ako su iste arnosti i za sve iste argumente ili obe nisu definisane $(f(\ldots)\uparrow i\, g(\ldots)\uparrow)$ ili su obe definisane $(f(\ldots)\downarrow i\, g(\ldots)\downarrow)$ i imaju istu vrednost $(f(\ldots)=g(\ldots))$.

Parcijalno rekurzivne operacije

TEOREMA:
Ako je predikat $R \subset \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivan, a h k+1-arna parcijalno rekurzivna funkcija, parcijalno rekurzivne su sledeće funkcije:

- $(\mu y)(h(x_{1,\ldots}, x_k, y) = a), \, za \, a \in \mathbb{N}$
- $(\mu y)(R(x_{1,\ldots}, x_k, y))$

•Dokazujemo:

- U prvom slučaju umesto $h(x_{1,\ldots}, x_k, y)$ dovoljno je posmatrati funkciju $sgn(-(h(x_{1,\ldots.} x_k, y), a) + (a, h(x_{1,\ldots}, x_k, y)))$ i tvrđenje mora da sledi neposredno.

- U slučaju funkcije $(\mu y)(R(x_{1,\ldots}, x_k, y))$, umesto predikata $(R(x_{1,\ldots}, x_k, y))$posmatra se jednakost $C_R(x_{1,\ldots}, x_k, y) = 1$

Izračunljive i parcijalno rekurzivne funkcije

Pominjali smo gedelizaciju i znamo da je ona korišćena da bi se primenio postupak dijagonalizacije. Ovde to ne smemo da koristimo jer možda neko *f(x)* nije definisano.
Dijagonalizacija ne prolazi!
To nam pokazuje da postoje intuitivno izračunljive funkcije koje nisu primitivno rekurzivne i da parcijalno rekurzivnih funkcija ima prebrojivo mnogo.

Teorema

Pokazujemo da se problem, koji definiše da li je funkcija *f(x)* definisana za x, ne može rešiti u opštem slučaju. $(f_x(x)\downarrow)$

T: Ne postoji funkcija definisana sa

$$g(x)=\begin{cases} 1\ ako\ je\ f_x(x)\ definisano \\ 0\ ako\ f_x(x)\ nije\ definisano \end{cases}$$

Dokaz:

pretpostavljamo da je moguće definisati ovu funkciju *g*:

$$h(x)=\begin{cases} nedefinisana\ ako\ je\ f_x(x)\ definisano \\ 0\quad ako\ f_x(x)\ nije\ definisano \end{cases}$$

Tada je *h(x)* parcijalno rekurzivna funkcija oblika $(\mu y)(y+g(x)=0)$, pa ona postaje f_l ,za neki indeks *l*, iz niza svih unarnih parcijalno rekurzivnih funkcija. Ali...

- f0, f1,... - niz svih unarnih parcijalno rekurzivnih funkcija

Ona postaje kontradikcija!

$$h(l) = \begin{cases} nedefinisano & ako\ je\ h(l) = f_l(l)\ definisano \\ 0 & ako\ h(l) = f_l(l)\ nije\ definisano \end{cases}$$

Nabrajanje parcijalno rekurzivnih funkcija

Koriste se:

- Funkcije: *p(n), [x]n, duzina x,*
- Kod niza brojeva $(a_{0,} a_{1,\ldots}, a_n)$ je:

  $$gb(a_{0,} a_{1,\ldots}, a_n) = p(0)^{a_0+1} \cdot p(1)^{a_1+1} \cdot \ldots \cdot p(n)^{a_n+1}$$

- a_i koji se nalazi na i-tom mestu u nizu:
  - Kodira se sa: $p(i)^{a_i+1}$
  - Dekodira se sa: $(x)_i = -(1, [x]_i)$

    za 1 umanjen stepen n-tog broja u dekompoziciji

Osnovne funkcije	Nule funkcije: *gb(Z)=0* Funkcije sledbenika: *gb(S)=gb(1)* Funkcije projekcije: $gb(P_k^i)=gb(1,i)$
Ako su $gb(g)=a, gb(h_1)=b_{1,\ldots}, gb(h_m)=b_m$ ***određeni***	Broj funkcije preko kompozicije funkcija jednak je: $gb(g(h_{1,\ldots}, h_m))=gb(a, gb(b_{1,\ldots}, b_m),0)$
Ako su *gb(g)=a* ***i*** *gb(h)=b* ***određeni***	Broj funkcija koji se dobija primitivnom rekurzijom nad h sa osnovom g jednak: *gb(a,b,0,0)*
Ako je *gb(g)=a* ***određen***	Broj funkcija koji se dobija neograničenom minimizacijom $(\mu y)(g(x_{1,\ldots}, x_k, y)=0)$ jednak: *gb(a,0,0,0)*

Broj promenljivih ne može da se uokviri u samom kodiranju, određuje se prilikom dekodiranja – odgovara izračunavanju funkcija sa promenljivim brojem argumenata.

Različitim funkcijama i operacijama pridruženi su kodovi niza različitih dužina.

Postigao se dogovor pri dekodiranju, broj x kodira sekvencu dužine do *duzina(x)*, zbog čega beskonačno mnogo različitih brojeva označava istu funkciju.

Primer:

Dobili smo funkciju primitivnom rekurzijom nad funkcijama sa indeksima *a* i *b*. Toj funkciji pridružujemo svaki broj *x* sa osobinom da je *duzina(x)*=4 i $(x)_0 = a$ i $(x)_1 = b$. Moramo da obezbedimo i da je svaki prirodan broj *kod* neke funkcije. Sad pravimo pretpostavku da je *duzina(x)*≥5, pa time *x* kodira funkciju dobijenu neograničenom minimizacijom funkcije $f\,(x)_0$.

Ideja za dekodiranje

Koristi se jedinstvenost dekompozicije *x* na proste faktore, redom dobijamo konačne nizove prirodnih brojeva sve do potpunog opisa odgovarajuće funkcije (kako se definiše i izračunava).

Primer: recimo $x=gb(3276, 817, 0, 0)$. Funkcija f_x je dobijena primenom primitivne rekurzije na funkciju f_{817} sa bazom koja predstavlja funkciju f_{3276} . (Ako su $gb(g)=a$ i $gb(h)=b$ već određeni, onda je gb(a, b, 0, 0) kod funkcije dobijene primitivnom rekurzijom nad *h* sa osnovom *g*)

To znači da dekodiranjem ili analizom indeksa 817 i 3276 postupak ponavljamo dok se ne stigne do osnovnih funkcija.

Znamo da se kodiranje sprovodi u skladu sa načinom definisanja funkcija, znamo i da dekodiranje dovodi do opisa funkcije koji koristi osnovne funkcije i operacije nad njima. To nam omogućava izračunavanje funkcije za proizvoljne argumente.

Isti kod dobijaju odgovarajuće funkcije sa različitim argumentima! ($gb()=gb()$)

Oznake:

Promenljive: $x_{1,\dots}, x_k$

Funkcija sa $k \geq 1$ promenljivih čiji je indeks n: f_n

Funkcija arnosti k čiji je indeks n

Funkcije	**Kodiranje**
Nula funkcije	*gb(Z)=0*
Funkcija sledbenika	*gb(S)=gb(1)*
Funkcija projekcije	$gb(P_k^i)=gb(1,i)$
$gb(g)=a, gb(h_1)=b_{1,\ldots}, gb(h_m)=b_m$	Kod kompozicije je: $gb(g(h_{1,\ldots}, h_m))=gb(a, gb(b_{1,\ldots}, b_m), 0)$
gb(g)=a i gb(h)=b	*(gb(a,b,0,0)) je kod funkcije dobijene primitivnom rekurzijom nad h sa osnovom g*
gb(g)=a	*(gb(a,0,0,0)) je kod funkcije dobijene neograničenom minimizacijom* $(\mu y)(g(x_{1,\ldots}, x_k, y)=0)$

Funkcije	**Dekodiranje**
Nula funkcije	*duzina(n)=0* tj. n kodira prazni niz brojeva
Funkcija sledbenika	*duzina(n)=1* tj.n kodira jednočlani niz brojeva $(n)_0$
Funkcija projekcije	*duzina(n)=2* tj. n kodira niz brojeva$((n)_0,(n)_1)$i ako je: •$(n)_0$ *=0 ili se projektuje po koordinati* $(n)_1$*=0 =>Z(0)* •$(n)_0 \geq 1$ *i projektuje se po koordinati* $1 \leq (n)_1 \leq k$ $=> P_k^{(n)_1}$ • $(n)_0 \geq 1$ *i projektuje se po koordinati* $(n)_1 > k => P_k^k$
$gb(g)=a, gb(h_1)=b_{1,\ldots}, gb(h_m)=b_m$	*duzina(n)=3* tj. n kodira niz brojeva $((n)_0,(n)_1,(n)_2)$ i ako je: •Kod funkcija argumenata *duzina*$(n)_1$*=0, => funkcija* $f_{(n)_0}^k$ •Kod funkcija argumenata *duzina*$(n)_1$*>1,* preko kompozicije: $f_{(n)_0}^{duzina((n)_1)}(f_{((n)_1)_0}^k, \ldots, f_{((n)_1)_{-(1,duzina((n)_1))}}^k)$
gb(g)=a i gb(h)=b (gb(a,b,0,0))	*duzina(n)=4* tj. n kodira niz brojeva$((n)_0,(n)_1,(n)_2,(n)_3)$ i ako je: •Broj argumenata k=1 =>$f_n^1(0)=(n)_0, f_n^1(x_1+1)=f_{(n)_1}^2(f_n^1(x_1), x_1)$ dobijenoj primitvnom rekurzijom •Broj argumenata k>1 =>$f_n^k(0,x_{2,\ldots},x_k)=f_{(n)_0}^{k-1}(x_{1,\ldots},x_k)$, $f_n^k(x_1+1,x_2,\ldots,x_k)=f_{(n)_1}^{k+1}(f_n^k(x_{1,\ldots},x_k),x_{1,\ldots},x_k)$ prim. rekurz.
gb(g)=a (gb(a,0,0,0))	*duzina(n)≥ 5* tj. n kodira niz brojeva $((n)_0,(n)_1,(n)_2,(n)_3,(n)_4,\ldots)$ onda je: $f_n^k(x_1,x_2,\ldots,x_k)=(\mu x_{k+1}) f_{(n)_0}^{k+1}(x_{1,\ldots},x_{k+1}=0)$

Za kraj

Parcijalno rekurzivnih funkcija ima prebrojivo mnogo i postoji postupak za nabrajanje koji je primitivno rekurzivan.

Svaka parcijalno rekurzivna funkcija je RAM-izračunljiva.

Aritmetička funkcija je izračunljiva ako i samo ako je rekurzivna.

Rekurzivne funkcije spadaju u rekurzivne funkcije (u intuitivnom smislu).
Obrnuto, veruje se da je svaka izračunljiva funkcija rekurzivna, tj. da se skup izračunljivih funkcija poklapa sa skupom rekurzivnih funkcija. Ovo verovanje naziva se Čerčova teza.

Svaka primitivno rekurzivna funkcija ujedno i rekurzivna, a onda i parcijalno rekurzivna.