Teorija izračunljivosti

Rakonjac Gordana 305/08

Profesor: Zoran Ognjanović

Univerzalni predikat
i
Univerzalna funkcija

Univerzalni predikat i univerzalna funkcija

Pokazujemo:

Da postoji univerzalni predikat pomoću kojeg možemo provjeriti za proizvoljnu funkciju f i neke fiksirane argumente,***da li je funkcija definisana i da li je njena vrijednost jednaka nekom fiksiranom broju?***

Univerzalni predikat i univerzalna funkcija

- Sa $UP(n, gb(a_1, \dots a_k), b, y)$ ćemo označiti da je

  funkcija f_n^k definisana za argumente $a_1, \dots a_k$,

  da je $f_n^k(a_1, \dots, a_k) = b$

  i da je najveći broj koji se koristi u izračunavanju <= od y.

Univerzalni predikat i univerzalna funkcija (teorema)

Postoji primitivno rekurzivni predikat UP arnosti 4 tako da je za sve n i k, $f_n^k(a_1, \ldots, a_k) = b$
ako i samo ako $(\exists y) UP(n, gb(a_1, \ldots, a_k), b, y)$.

Univerzalni predikat i univerzalna funkcija (dokaz)

- Predikat UP ćemo definisati po slučaju koristeći postupak kodiranja zvani postupak gedelizacije.
- Pošto to kodiranje garantuje da je svaki prirodan broj kod neke funkcije, predikat koga razmatramo će uvijek biti definisan .
- Sledeći predikat ćemo razmatrati u slučajevima i on će biti primitivno rekurzivan.

Definicija važenja UP(n,a,b,y)

Argumenti predikata UP(n,a,b,y) su:

n-indeks funkcije

a-kod argumenata

b-rezultat

y-jedno gornje ograničenje brojeva korišćenih u izračunavanju.

Definicija važenja UP(n,a,b,y)

- ***Slučaj nula funkcije***
  ako ***duzina(n)=0*** *i b=0*

- ***Slučaj funkcije naslednika***
  ako duzina(n)=1 i $b=(a)_0+1$

- ***Slučaj funkcije projekcije***
  ako ***duzina(n)=2***

- ***Slučaj kompozicije***
  ako ***duzina(n)=3***

Definicija važenja UP(n,a,b,y)

- ***Slučaj primitivne rekurzije***
  ako ***duzina(n)=4***

- ***Slučaj neograničene minimizacije***
  ako ***duzina(n)>5***

Slučaj nula funkcije

- kodiranje: $gb(Z)=0$

- dekodiranje: *duzina(n)=0* , tj. n kodira prazni niz brojeva,riječ je o 0 funkciji Z.

- $C_{UP}(n,a,b,y)=1$ ako duzina(n)=0 i $b=0$

Ako je duzina(n)=0 radi se o funkciji Z pa predikat UP važi za $b=0$,bez obzira na vrijednosti ostalih argumenata.

Slučaj funkcije naslednika

- kodiranje: $gb(S)=gb(1)$
- dekodiranje: *duzina(n)=1* , tj. n kodira jednočlani niz $(n)_0$ brojeva,riječ je o funkciji naslednika S.
- $C_{UP}(n,a,b,y)=1$ ako duzina(n)=1 i $b=(a)_0+1$

  Ako je duzina(n)=1 radi se o funkciji S pa predikat UP važi Za $b=(a)_0+1$, bez obzira na vrijednosti ostalih argumenata, pri čemu je $(a)_0$ vrijednost prve koordinate u dekompoziciji broja a.

Slučaj funkcije projekcije

- kodiranje: $gb(P_k^i) = gb(1, i)$

- dekodiranje: *duzina(n)*=2 , tj. n kodira niz brojeva $((n)_0, (n)_1)$ i ako je:

  - $(n)_0 = 0$,ili se projektuje po koordinati $(n)_1 = 0$ riječ je o funkciji Z
  - $(n)_0 \geqslant 1$,i projektuje se po koordinati $1 \leqslant (n)_1 \leqslant k$ riječ je o $P_k^{(n)_1}$
  - $(n)_0 \geqslant 1$,i projektuje se po kordinati $(n)_1 > k$ riječ je o funkciji P_k^k

Slučaj funkcije projekcije

- $C_{UP}(n, a, b, y) = 1$ ako *duzina(n)*=2 i
  - Ako je $(n)_0 = 0$ ili $(n)_1 = 0$ i b=0(Z)
  - Ako je $(n)_0 \geqslant 1$ i $1 \leqslant (n)_1 \leqslant duzina(a)$ i $b = (a)_{-(1,(n)_1)}$ $(P_k^{(n)_1})$
  - Ako je $(n)_0 \geqslant 1$ i $duzina(a) < (n)_1$ i $b = (a)_{(1,duzina(a))}$ (P_k^k)

Slučaj kompozicije

- kodiranje: ako su $gb(g)=a, gb(h_1)=(b_1,\ldots,gb(h_m))=b_m$ već odredjeni,kod kompozicije je: $(gb(g(h_1,\ldots,h_m))=gb(a,gb(b_1,\ldots,b_m),0))$
- dekodiranje: *duzina(n)=3* tj. n kodira niz brojeva $((n)_0,(n)_1,(n)_2)$ i ako je:
  - kod funkcija argumenta $(duzina((n)_1)=0)$ riječ je o funkciji $(f^k_{(n)_0})$
  - kod funkcija argumenta $(duzina((n)_1)>0)$ riječ je o funkciji dobijenoj kompozicijom $f^{duzina((n)_1)}_{(n)_0}\left(f^k_{((n)_1)_0},\ldots,f^k_{(((n)_1)_{-(1,duzina((n)_1))})}\right)$

Slučaj kompozicije

- $C_{UP}(n, a, b, y) = 1$ ako $duzina(n) = 3$ i
  - ako je $duzina((n)_1) = 0$ i važi $UP((n)_0, a, b, y)$
  - ako je $duzina((n)_1) \geqslant 1$ i postoji $d \leqslant y$ koje kodira rezultate funkcija argumenta kompozicije za koje je $duzina(d) = duzina((n)_1)$ i važe predikati $UP((((n)_1)_i, a, (d)_i, y)$, $0 \leqslant i \leqslant -(1, duzina((n)_1))$, $UP((n)_0, d, b, y)$

$duzina(n)$	kodiranje	dekodiranje	$C_{UP}(n, a, b, y)=1$
$duzina(n)=0$	$gb(Z)=0$	prazan niz Z	$b=0$
$duzina(n)=1$	$gb(S)=gb(1)$	jednočlani niz S	$b=(a)_0+1$
$duzina(n)=2$	$gb(P_k^i)=gb(1,i)$	niz brojeva $((n)_0,(n)_1)$ $(n)_0=0,(n)_1=0 \to Z$ $(n)_0 \geqslant 1, 1 \leqslant (n)_1 \leqslant k \to P_k^{(n)_1}$ $(n)_0 \geqslant 1,(n)_1 > k \to P_k^k$	$(n)_0=0,(n)_1=0, b=0(Z)$ $(n)_0 \geqslant 1, \quad 1 \leqslant (n)_1 \leqslant duzina(a)$ $b=(a)_{-(1,(n)_1)}, (P_k^{(n)_1})$ $(n)_0 \geqslant 1, \quad duzina(a) < (n)_1$ $b=(a)_{(1, duzina(a))}, \quad (P_k^k)$
$duzina(n)=3$	$gb(g(h_1, \dots, h_m)) =$ $gb(a, gb(b_1, \dots, b_m), 0)$	niz $((n)_0,(n)_1,(n)_2)$ $(duzina((n)_1)=0), \quad (f_{(n)_0}^k)$ $(duzina((n)_1)>0),$ $f_{(n)_0}^{duzina((n)_1)} \quad f_{((n)_1)_0}^k, \dots,$ $f_{(((n)_1)_{-(1, duzina((n)_1))})}^k$	$duzina((n)_1)=0, \ UP((n)_0, a, b, y)$ $duzina((n)_1) \geqslant 1$ $UP(((n)_1)_i, a, (d)_i, y),$ $0 \leqslant i \leqslant -(1, duzina((n)_1)),$ $UP((n)_0, d, b, y)$

Univerzalni predikat i univerzalna funkcija

- Predikat UP nazivamo ***univerzalni predikat.*** Posmatramo funkciju
$$f_U(n,a)=((\mu)(UP(n,a,(z)_0,(z)_1)))_0$$
čiji argumenti su redom kod funkcije *n i kod niza argumenata* $a=gb(a_1,\dots a_k)$ *koja je definisana ako postoji* $z=gb(b,y)$*, kod* dvočlanog niza sastavljenog od rezultata b funkcije f_n i ograničenja y za maksimalno dozvoljeni broj koji se koristi u izračunavanju funkcije f_n.

Univerzalna funkcija i univerzalni predikat

Rezultat funkcije je prva koordinata u dekompoziciji broja z, tj.b. Ova funkcija je parcijalno rekurzivna jer je UP primitivno rekurzivni predikat i naziva se *univerzalna funkcija.* Na osnovu predhodne teoreme, za svaku parcijalno rekurzivnu funkciju f arnost k,njen kod n i sve k-torke argumenata važi

$$f_n(a_1, \ldots a_k) \simeq ((\mu z)(UP(n, a, (z)_0, (z)_1)))_0 .$$

Univerzalni predikat i univerzalna funkcija

- Na osnovu definicije je jasno da je univerzalna funkcija parcijalno rekurzivna, ali nije totalna. Ona zavisi od izbora kodiranja pomoću koga nabrajamo parcijalno rekurzivne funkcije ali prema teoremi 1, za svako fiksirano kodiranje postoji univerzalna funkcija.

  Možemo da primjetimo analogiju između ove funkcije i UTM:
  Funkcija izračunava sve ostale funkcije kao sto UTM simulira izvršavanje svih ostalih Tjuringovih mašina.

Klinijeva teorema o normalnoj formi

Svaka parcijalno rekurzivna funkcija se može definisati korisćenjem najviše jednog operatora neograničene minimizacije.

Klinijeva teorema o normalnoj formi (dokaz)

Tvrđenje je direktna posledica postojanja univerzalne funkcije u čijoj definiciji figuriše samo primitivno rekurzivni predikat UP,odnosno njegova karakteristična funkcija, u čijoj definiciji nema operatora neograničene minimizacije,a na koji je primjenjen tačno jedan operator μ.

s-m-n teorema

Ako posmatramo neku parcijalno rekurzivnu funkciju f(x,y) i predpostavimo da fiksiramo vrijednost prvog argumenta tako da bude jednaka nekom parametru a ,dobija se unarna funkcija f(a,y) čiji je jedini argument y.
Dobijena funkcija je parcijalno rekurzivna, može se izračunati i njen indeks.
Ovo odgovara prenosu argumenata u potprogram.

s-m-n teorema

Neka su prirodni brojevi $m, n \geqslant 1.$ Tada postoji $m+1$ -arna rekurzivna funkcija S_n^m takva da za proizvoljnu $m+n$ -arnu parcijalno rekurzivnu funkciju f_e važi

$$f_e(x_1, \ldots x m, y_1, \ldots, y_n) \simeq f_{S_n^m(e, x_1, \ldots, x_m)}(y_1, \ldots, y_n)$$

s-m-n teorema
(dokaz)

Predpostavimo da je funkcija f nastala iz funkcije f_e zamjenom prvih m argumenata konstantama $a_1, \ldots, a_m$.
Funkcija f je nastala kompozicijom funkcije f_e,konstantnih funkcija i funkcija projekcije tako da je

$$f(y_1, \ldots, y_n) \simeq f_e$$
$$K_n^{a_1}(y_1, \ldots, y_n), \ldots, K_n^{a_m}(y_1, \ldots, y_n), P_n^1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, P_n^n(y_1, \ldots, y_n)$$

s-m-n teorema

Za fiksirane e i $a_1, \ldots a_m$ Gedelov broj funkcije f je:

$S_n^m(e, a_1, \ldots, a_m) =$

$$gb\left(e, gb\left(gb\left(K_n^{a_1}\right), \ldots, gb\left(K_n^{a_m}\right), gb\left(P_n^1\right), \ldots, gb\left(P_n^n\right)\right), 0\right).$$

Funkcija S_n^m koja izračunava taj broj je primitivno rekurzivna , pa i rekurzivna jer je definisana kao kompozicija primitivno rekurzivnih funkcija.

s-m-n teorema

- S-m-n teorema se naziva i teorema o parametrizaciji ili teorema iteracije.Imajući u vidu ekvivalentnost pojmova izračunljivih funkcija i programa, u teoremi se zapravo kaže da se podaci mogu efektivno ugraditi u program. A kako se programi mogu kodirati podacima, teorema u suštini uvodi postupak koji se moze interpretirati kao pozivanje potprograma.

Fiksna tačka funkcije

Ako je h unarna rekurzivna funkcija, postoji prirodan broj n tako da je $f_n \simeq f_{h(n)}$, gdje su f_n i $f_{h(n)}$ parcijalno rekurzivne funkcije sa indeksima n odnosno h(n).

Fiksna tačka funkcije (dokaz)

Posmatrajmo parcijalno rekurzivnu funkciju $g(x, y) \simeq f_{h(f_x(x))}(y)$. Prema s-m-n teoremi postoji rekurzivna funkcija S(x) koja daje indeks tako da je $g(x, y) \simeq f_{S_{(x)}}(y)$, pa je i $f_{h(f_x(x))}(y) \simeq f_{S(x)}(y)$. I sama funkcija S ima svoj indeks m.Fiksirajući x=m i S(m)=n dobijamo $f_{h(f_m(m))}(y) \simeq f_{S_{(m)}}(y)$ odnosno $f_{h(n)}(y) \simeq f_n(y)$.

Fiksna tačka funkcije

Teorema o fiksnoj tački se naziva i teorema o rekurziji. Možemo da primjetimo da se ni u njenoj formulaciji ni u njenom dokazu ne insistira da je $n = h(n)$,već da su jednake parcijalne funkcije čiji su n i h(n) indeksi.I pored toga n iz teoreme se naziva fiksna tačka funkcije h.

Fiksna tačka funkcije
(teorema koja se odnosi na operatore)

- Odnosi se na operatore tj. funkcije koje kao domene i kodomene imaju klase funkcija.
- Jedan operator h* indukovan funkcijom h preslikava funkcije u funkcije, tako da je $h*(f_x) = f_{h(x)}$

  U njoj se dokazuje da svaki rekurzivni operator koji

  preslikava klasu n-arnih parcijalno rekurzivnih funkcija u samu sebe ima najmanju nepokretnu tačku.
- Analogno možemo posmatrati i operatore koji preslikavaju programe, npr. Tjuringovu mašinu, u programe.

Fiksna tačka funkcije (teorema koja se odnosi na operatore)

- Neka je $h^*(P_x)=P_{h(x)}$ gdje su P_x i $P_{h(x)}$ programi koji redom izračunavaju funkcije f_x i $f_{h(x)}$
- Odnosi se i na operatore koji imaju primjenu u semantičkoj analizi programskih jezika jer omogućava da se odredi značenje rekurzivnih programa.

Fiksna tačka funkcije
(jos neke teoreme)

Svaka unarna rekurzivna funkcija
ima beskonačno mnogo fiksnih tačaka.

Fiksna tačka funkcije (dokaz)

Za svaku unarnu rekurzivnu funkciju h i za svaki prirodan broj m postoji prirodan broj n>m tako da je $f_n \simeq f_{h(n)}$
Posmatrajmo skup $M = f_1, \ldots, f_m$ prvih m parcijalno rekurzivnih funkcija.Pošto postoji beskonačno mnogo međusobno različitih parcijalno rekurzivnih funkcija, postoji i parcijalno rekurzivna funkcija $f_c \notin M$.

Definisemo funkciju:

Fiksna tačka funkcije
(dokaz)

$$g(x)=\begin{cases} c & \text{za } x \leq m \\ h(x) & \text{za } x > m \end{cases}$$

I ova funkcija je rekurzivna i ima bar jednu fiksnu tačku n_0 koja je veća od m jer za $n \leqslant m$ je $f_{g(n)} = f_c \not\simeq f_n$

Prema definiciji funkcije g, n_0 je istovremeno i fiksna tačka funkcije h.

Fiksna tačka funkcije (jos neke teoreme)

*

Ako je f(x,y) parcijalno rekurzivna funkcija,onda postoji
Prirodan broj n takav da je $f(n, y) \simeq f_n(y)$

Fiksna tačka funkcije (dokaz)

Neka je indeks n fiksna tačka funkcije $S_1^1(x)$ iz s-m-n teoreme,tj. $f_{S_1^1(n)} \simeq f_n$.
Tada je $f(x,y) \simeq f_{S_1^1(x)}(y)$ i $f(n,y) \simeq f_{S_1^1(n)}(y) \simeq f_n(y)$

Primjer

Primjenjujući predhodnu teoremu na funkciju $f(y,x)=x^y$ zaključujemo da postoji broj $n, n \in N$ takav da je $f(n,x) \simeq f_n(x)$,odnosno da je $f_n(x) \simeq x^n$.
Slično postoji broj $n \in N$ takav da je $Dom(f_n)=n,$ jer za funkciju

$$g(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{za} \quad x=y \\ \uparrow & \text{za} \quad x \neq y \end{cases}$$

Postoji $n \in N$ tako da je $f(n,y) \simeq f_n(y)$ i pri tome je $Dom(f_n)=n$

Samoreprodukujuća funkcija

Definicija:

Funkcija f je samoreprodukujuća ako važi $f(x)\downarrow gb(f)$.

Postoji samoreprodukujuća funkcija.

Samoreprodukujuća funkcija (dokaz)

Posmatrajmo parcijalno rekurzivnu funkciju $f(y,x)=y$.
Prema teoremi * postoji prirodan broj n takav da je
$f(n,x)=f_n(x)=n$.

Samoreprodukujuća funkcija

Zanimljivo je da se ovo razmatranje može primjeniti i na programe i prikazati da postoji samoreprodukujući program koji kao izlaz daje svoj sopstveni kod. Ako analiziramo značenje ovakvog tvrđenja vidjećemo da je taj program upravo ono sto se u savremenom računarstvu naziva programski virus, koji se razmnozava šireći svoje kopije tokom izvršavanja.

samoreprodukujući program=programski virus