Tjuring-izračunljive i parcijalno rekurzivne funkcije

Bojana Ljutić 338/2006

Teorema: Svaka parcijalno rekurzivna funkcija je Tjuring-izračunljiva.

- za sve osnovne funkcije $(Z,\ S,\ P_k^j)$ postoje odgovarajuće Tjuringove mašine
- Tjuringovim mašinama je moguće simulirati operacije *kompozicije*, *primitivne rekurzije* i *neograničene minimizacije*

TM-simulacija kompozicije

- neka su $h_1, \ldots h_m$ parc. rek. funkcije arnosti *k*
- g parc. rek. funkcija arnosti *m*
- za njih postoje odgovarajuće TM koje ih izračunavaju:

  $M_{h_1}, \ldots, M_{h_m}$, M_g
- opisaćemo TM M_{komp} koja odgovara kompoziciji:

  $g(h_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_k))$
- na početku rada mašine M_{komp} , traka će sadrzati unarni zapis brojeva $x_1, \ldots x_k$

TM-simulacija kompozicije

- u prvoj fazi rada mašina pravi kopiju ulaznih podataka i na njihovo mesto smešta rezultat rada M_{h_1}
- postupak se ponavlja m-1 puta sa $M_{h_2}, \dots, M_{h_m}$
- na kraju, traka sadrži m unarnih zapisa rezultata mašina $M_{h_1}, \dots, M_{h_m}$
- primenjuje se M_g , nakon čega M_{komp} završava rad

- ako za neko *i*, $h_i(x_1, \dots, x_k)$ nije definisana, funkcija M_{h_i} se neće zaustaviti, kao i M_{komp}

TM-simulacija primitivne rekurzije

- g parc. rek. funkcija arnosti *m*, $f(0, \ldots) = g(\ldots)$
- *h* parc. rek. funkcija arnosti *m*+2
  $f(n+1, \ldots) = h(f(n, \ldots), n, \ldots)$
- za njih postoje odgovarajuće TM koje ih izračunavaju: $M_g,\ M_h$
- treba opisati TM M_{pr} koja odgovara funkciji *f* dobijenoj primitivnom rekurzijom
- na početku rada M_{pr} na traci se nalaze *n*, $x_1, \ldots x_k$

TM-simulacija primitivne rekurzije

- u jednoj petlji M_{pr} proverava da li je argument *n* po kome se radi primitivna rekurzija jednak 0
- ako nije, pomera udesno sadržaj trake i na oslobođeno mesto smešta argumente rekurzivnog poziva
- nakon završetka petlje,kada argument po kome se radi rekurzija ima vrednost 0, izgled trake je:

$$101^{x_1+1}0\ldots01^{x_k+1}01101^{x_1+1}0\ldots01^{x_k+1}0\ldots01^{n+1}01^{x_1+1}0\ldots01^{x_k+1}$$

podseća na stek na kome se nalaze argumenti za pozivanje funkcija

- redom rade M_g i odgovarajući broj puta M_h, nakon čega M_{pr} staje

TM-simulacija neograničene minimizacije

- f parc. rek. funkcija arnosti $k+1$
- za nju postoji odgovarajuća TM koja je izračunava: M_f
- treba opisati TM M_μ koja izračunava funkciju: $(\mu y)(f(x_1, \ldots, x_k, y) = 0)$
- na početku rada mašine M_μ na traci su smešteni unarni zapisi argumenata $x_1, \ldots, x_k, 0$

  funkcije f

TM-simulacija neograničene minimizacije

- sadržaj se kopira na desno do krajnje desne ćelije koja sadrži znak 1
- nad tom kopijom se izvrši M_f
- ako je dobijeni rezultat 0, brišu se svi zapisi brojeva $x_1, \ldots x_k$, rezultat je zapis argumenta po kome se vrši minimizacija
- ako dobijeni rezultat nije 0, briše se, uvećava vrednost argumenta po kome se vrši minimizacija i postupak se ponavlja

Teorema: Svaka Tjuring-izračunljiva funkcija je parcijalno rekurzivna.

- f je funkcija koju izračunava TM M_f
- pretpostavka: f je unarna f-ja, a ako nije ulaz je Gedelov broj niza ulaznih podataka koji najpre raspakuje čime dobija sve ulazne podatke i zatim primenjuje program za M_f

- svim stanjima i operacijama pridružujemo kod
- kod stanja q_z je 0
- kod stanja q_i je $i+1$
- kodovi operacija 0, 1, L, R su 0, 1, 2, 3
- program za M_f opisujemo sa $h(x)=a$, gde je x kod para (q_i, s), a a kod para $(0, q_j)$
- kako je program konačni niz naredbi, funkcija h se definiše po slučajevima, pa je primitivno rekurzivna

- *s(x,t)*= $\begin{cases} 1 & \text{,nakon } t \text{ koraka rada glava } M_f(x) \text{ nalazi iznad ćelije u kojoj je 1} \\ 0 & \text{, inače} \end{cases}$
- *l(x,t)* - Gedelov broj niza znaka koji se nakon *t* koraka rada $M_f(x)$ nalaze levo od aktuelne ćelije zaključno sa najlevljom ćelijom u kojoj se nalazi znak 1
- *d(x,t)* - Gedelov broj niza znaka koji se nakon *t* koraka rada $M_f(x)$ nalaze desno od aktuelne ćelije zaključno sa krajnjom desnom ćelijom u kojoj se nalazi znak 1
- *g(x,t)* - broj tekućeg stanja nakon *t* koraka rada $M_f(x)$

- *l(x,t)*, *s(x,t)*, *d(x,t)* i *q(x,t)* jednoznačno opisuju konfiguraciju mašine $M_f(x)$ nakon *t* koraka rada

$$l(x,t) \quad s(x,t) \quad d(x,t)$$
$$q(x,t)$$

- *l(x,t)*, *s(x,t)*, *d(x,t)* i *q(x,t)* se definišu induktivno

- za t=0, što odgovara početku izvršavanja mašine, ako su na traku smeštene x+1 jedinica koje čine unarni zapis ulaznog podatka x, biće:

  - $q(x,0)= 1$ - početno stanje
  - $l(x,0)= 0$ - levo od glave su sve nule
  - $s(x,0)= 1$ - glava je iznad najlevlje jedinice
  - $d(x,0)= \mathrm{gb}(1^x)$ - desno od glave je x jedinica

- za $t>0$, $h(gb(q(x,t-1), s(x,t-1)))=a$ i $a=gb(o,q(x,t))$ kod para koji čine operacija i naredno stanje

  - $q(x,t)=(a)_1$
  - zavisno od $o=(a)_0$, određuju se $l(x,t)$, $s(x,t)$, $d(x,t)$
  - ako je o kod upisa jednice , $l(x,t)=l(x,t-1)$, $s(x,t)=1$ i $d(x,t)=d(x,t-1)$
  - slično se postupa i u ostalim slučajevima

  -pošto je h primitivno rekurzivna, a f-je l, s, d i q se na osnovu nje definišu po slučajevima i one su primitivno rekurzivne

- M_f se zaustavlja nakon t koraka u standardnoj konfiguraciji akko je ispunjeno:
  - $(\forall i < t)(q(x,i) \neq 0)$ - prethodno nije bila u završnom stanju
  - $q(x,t)=0$ - sada je u završnom stanju
  - $l(x,t)=0$ - levo nema jedinica
  - $s(x,t)=1$ - glava je nad jedinicom, i

$$(\forall i < d(x,0)+t)(\neg \div (p(i)^2, d(x,t)) \rightarrow \neg \div (p(i+1)^2, d(x,t)))$$

- poslednji deo uslova:

$$(\forall i < d(x,0) + t)(\neg \div (p(i)^2, d(x,t)) \rightarrow \neg \div (p(i+1)^2, d(x,t)))$$

- nakon *t* koraka rada broj korišćenih ćelija je manji do jednak od *d(x,0)+t,* na traci postoji tačno jedan neprekidni blok znakova 1, tj
- kada se pojavi prvi znak 0, onda se desno od njega nalaze samo znaci 0
- prisustvo znaka 1 u ćeliji *i* – prisustvo $p(i)^2$ u proizvodu, tj deljivošću koda sa $p(i)^2$
- ako se u standardnoj konfiguraciji pojavi ćelija *i* koja sadrži 0, tj $p(i)^2$ ne deli *d(x,t)* ,isto će važiti i za sve ostale ćelije: *i+1* , *i+2*, ...

- Ako se mašina M_f zaustavi u standardnoj konfiguraciji, tj važi SK, rezultat y je:
  - predstavljen rečju unarnog alfabeta 1^{y+1}
  - odnosno blokom neprekidnih jedinica dužine *duzina(d(x,t))*
  - $f(x) = \mathrm{duzina}(d(x, (\mu t)SK))$

- Čerčova teza:

  svaki algoritam definiše funkciju koja pripada jednoj dobro definisanoj klasi funkcija

  (klasa parcijalno rekurzivnih funkcija, Tjuring-izračunljivih funkcija, klasa λ-definabilnih funkcija ili neka druga), odnosno da se klasa intuitivno izračunljivih funkcija poklapa sa svakom od nabrojanih klasa

- Intuitivni pojam algoritma je zasnovan na iskustvenom znanju o ljudskim umnim sposobnostima,
- dok su klase izračunljivih funkcija precizno definisane odgovarajućim modelima izračunavanja
- Čerčova teza izjednačava neformalni i formalni pristup pojmu efektivne izračunljivosti,
- u strogom smislu se ne može smatrati matematičkim tvrđenjem, već je sličnija formulacijama raznih fizičkih zakona
- Ne može se dokazati u okviru neke formalne teorije

- Može biti opovrgnuta ako bi bila pronađena f-ja koja jeste intuitivno izračunljiva, a nije Tjuring-izračunljiva
- Argumenti u prilog tezi:
  - nema kontraprimera
  - međusobna ekvivalentnost raznorodnih formalnih modela izračunavanja do koje teško da bi došlo da neka od intuitivnih karakteristika algoritama nije njima obuhvaćena
- Čerčova teza se može prihvatiti i kao definicija izračunljivosti.

- da bi se u raznim dokazima istakle suštinske ideje i izbegli tehnički detalji, često se pribegava formulaciji: *funkcija je intuitivno izračunljiva, pa je prema Čerčovoj tezi parcijalno izračunljiva*
- Čerčova teza se koristi i kao argument pri objašnjavanju zašto neki problem nije rešiv:

  postupak za rešavanje problema ne nalazi u nekoj od formalizovanih klasa izračunljivih funkcija, na osnovu Čerčove teze ne postoji efektivni postupak za rešavanje tog problema.

- Postoje rekurzivne funkcije za čije izračunavanje je potrebno vreme duže od vremena proteklog od nastanka kosmosa, i/ili se zahteva veći broj memorijskih registara nego što je broj atoma od kojih je sastavljena naša planeta.
- Postavlja se pitanje da li su takve f-je zaista izračunljive, jer je očigledno da se bar neke njihove vrednosti praktično ne mogu izračunati.
- Čerčova teza predstavlja korisnu granicu klase funkcija izvan koje sigurno nema izračunljivih funkcija.