Odlučivost

Predavač:

Miloš Babić

Profesor:

Zoran Ognjanović

Uvod

- Definicije Tjuring-izračunljivih i parcijalno rekurzivnih funkcija određuju jasnu granicu dosega algoritama.
- Za neke od njih u opštem slučaju ne postoji rešenje
- U problemima koje ćemo sretati se traži izračunavanje posebne vrste funkcija koje uvek imaju vrednost 0 ili 1.
- Za rešive probleme kažemo da su odlučivi.

Odlučivi i neodlučivi predikati i skupovi

- Karakteristična funkcija predikata je totalna funkcija koja za k-torku argumenata ima vrednost 1 ako za tu k-torku predikat važi, inače je vrednost funkcije 0.
- Predikat se naziva rekurzivnim ili odlučivim ako je njegova karakteristična funkcija rekurzivna.
- Ako taj uslov za karakterističnu funkciju nije ispunjen predikat je neodlučiv.
- Neki predikat je odlučiv ako i samo ako postoji program koji izračunava karakterističnu funkciju predikata.

Odlučivi i neodlučivi predikati i skupovi

- Neki skup A je rekurzivan (odlučiv) ako mu je karakteristična funkcija rekurzivna.

- Primeri odlučivih skupova: skup prirodnih brojeva, skup parnih i neparnih brojeva itd.

- Klasa odlučivih skupova je zatvorena za osnovne operacije komplementiranja.

Primer 1

- Neka je C_{Tot} karakteristična funkcija unarnog predikata Tot(x).
- Funkcija h je definisana sa:

$$h(0) = (\mu y)(C_{Tot}(y) = 1)$$

$$h(n + 1) = (\mu y)(y > h(n) \wedge C_{Tot}(y) = 1)$$

- Neka je funkcija f definisiana sa:

$$f(x) = f_{h(x)}(x) + 1$$

Primer 2

- Neka je C_{Halt} karakteristična funkcija binarnog predikata Halt(x, y) koji važi ako i samo ako je $f_x(y)$ definisano.

- Ako bi funkcija $C_{halt}(x, y)$ bila rekurzivna, to bi bila i funkcija $f(x) = C_{halt}(x, x)$.

Primer 3

- Neka je C_O karakteristična funkcija predikata O(x) koji važi ako i samo ako je f_x nula funkcija.
- Nula funkciju cemo obeležiti sa f O.
- Posmatrajmo funkciju f definisanu sa:

  $f(x, y) = f\,O(f_x\,(y))$
- Funkcija f je parcijalno rekurzivna.

Primer 4

- Problem jednakosti dve parcijalno rekurzivne funkcije nije odlučiv.

- Ovo je direktna posledica prethodnog primera.

Rajsova teorema

- Neka je B neprazna prava potklasa klase svih parcijalno rekurzivnih funkcija. Problem da li je $f_x \in B$ nije odlučiv.
- Dokaz:
  - Neka je h unarna funkcija koja nije definisana ni za jedan $n \in N$.
  - Pretpostavimo da h nije iz B
  - Neka je $g \in B$ funkcija različita od h

- Rajsova teorema kaže da su svi netrivijalni skupovi parcijalno rekurzivnih funkcija neodlučivi.
- <u>Teorema:</u> Sledeći problemi nisu odlučivi:
  - Domen funkcije je konačan
  - Domen funkcije je beskonačan
  - Kodomen funkcije je konačan
  - Kodomen funkcije je beskonačan

- Među neodlučive spadaju i sledeći problemi:
  - Problem reči za grupe
  - Rešivost diofantskih jednačina
  - Problemi zadovoljivosti i valjanosti formula predikatskog računa prvog reda
  - Problem pokrivanja ravni (Tiling problem)
- Problemi zadovoljivosti i valjanost iskaznih formula su odlučivi.

- Za neku teoriju T kažemo da je odlučiva ako postoji rekurzivna karakteristična funkcija problema ' formula α je teorema teorije T '.
- Primeri odlučivih teorija: iskazni račun, teorija Bulovih algebri, teorija množenja prirodnih brojeva...
- Primeri neodlučivih teorija: predikatski račun, Peanova aritmetika, teorija grupa, teorija prstena...