Linearna algebra
ispitna pitanja

1. Skup $\mathbf{R}^n$, sabiranje i množenje skalarima. Osnovne osobine.

2. Sistemi linearnih jednačina. Partikularno i opšte rešenje. Gausove operacije.

3. Predstavljanje opšteg rešenja sistema linearnih jednačina.

4. Matrice i skraćeni zapis Gausove metode. Sabiranje matrica i množenje skalarima. Redukovana stepenasta forma.

5. Vektorski prostori. Primeri, prostor V^X. $0\vec{v} = \vec{0}$, $(-1)\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$, $r\vec{0} = \vec{0}$.

6. Potprostori i linearni omotači. Za $S, T \subseteq V$ važi $S \subseteq [S]$, $S \subseteq T \Rightarrow [S] \subseteq [T]$, $[[S]] = [S]$.

7. Linearna nezavisnost. Za $\vec{v} \in V$, $S \subseteq V$ važi: $[S] = [S \cup \{\vec{v}\}]$ akko $\vec{v} \in [S]$.

8. Linearna nezavisnost. Sve ne-nula vrste matrice u stepenastoj formi čine linearno nezavisan skup. Za svaki konačan $S \subseteq V$ postoji $T \subseteq S$ takav da je T linearno nezavisan i $[T] = [S]$.

9. Linearna nezavisnost. Za svaki linearno nezavisan $X \subseteq V$ postoji linearno nezavisan M takav da je $X \subseteq M$ i $[M] = V$.

10. Baza vektorskog prostora. Reprezentacija vektora u odnosu na datu bazu.

11. Dimenzija vektorskog prostora. U svakom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru sve baze su jednake dužine.

12. Prostor vrsta i prostor kolona matrice. Ako su dve matrice vrsta-ekvivalentne onda su im kolona-rangovi jednaki. Svaka matrica ima isti vrsta i kolona rang.

13. Potprostori vektorskog prostora i operacije s potprostorima. Za potprostore U i W konačnodimenzionalnog prostora važi: $dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$.

14. Direktna suma potprostora. Za $V = U + W$ važi: svaki $\vec{v} \in V$ se može na jedinstven način predstaviti kao $\vec{u} + \vec{w}$ pri čemu je $\vec{u} \in U$ a $\vec{w} \in W$ akko $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

15. Izomorfizmi vektorskih prostora. Izomorfizam je relacija ekvivalencije. Vektorski prostori su izomorfni akko imaju istu dimenziju.

16. Linearna preslikavanja. Linearno preslikavanje je određeno svojim dejstvom na bazi. Kompozicija linearnih preslikavanja je linearno preslikavanje.

17. Slika linearnog preslikavanja. Za homomorfizam $h : V \to W$ važi $dim(V) = dim(Im(h)) + dim(Ker(h))$.

18. Jezgro linearnog preslikavanja. Za homomorfizam $h\colon V \to W$ važi: h je **1-1** akko $Ker(h) = \{\vec{0}\}$.

19. Reprezentacija linearnih preslikavanja.

20. Rang linearnog preslikavanja. Neka je $h\colon V \to W$ linearno preslikavanje reprezentovano matricom $H \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Tada je h **na** akko je $rank(H) = m$ i h je **1-1** akko je $rank(H) = n$.

21. Množenje matrica. Kompozicija linearnih preslikavanja je reprezentovana proizvodom reprezentacija tih preslikavanja. Množenje matrica je asocijativno i distribuira se nad sabiranjem.

22. Elementarne redukcijske matrice. Za svaku matricu H postoje elementarne redukcijske matrice $R_1, \ldots, R_m$ takve da je $R_m R_{m-1} \ldots R_1 H$ u redukovanoj stepenastoj formi.

23. Invertibilne matrice. Matrica je invertibilna akko je jednaka proizvodu elementarnih redukcijskih matrica. Matrica je invertibilna akko reprezentuje izomorfizam.

24. Promena baze vektorskog prostora.

25. Promena reprezentacije preslikavanja.

26. Matrično ekvivalentne matrice. Dve matrice istog tipa su matrično ekvivalentne akko imaju isti rang.

27. Determinante, definicija i osnovna svojstva.

28. Determinante i elementarne redukcijske matrice. Determinante invertibilnih matrica. $det(AB) = det(A)\, det(B)$.

29. Minori i kofaktori. Za $A \in \mathcal{M}_n$ važi: $A\, adj(A) = adj(A)\, A = det(A)\, E_n$.

30. Laplasov razvoj determinante.

31. Kramerova teorema. Posebno slučaj homogenog sistema.

32. Sličnost matrica. Sličnost matrica je relacija ekvivalencije. Slične matrice imaju jednake determinante. Ako su H i G slične, onda su slične i $p(H)$ i $p(G)$ za proizvoljan polinom $p(x)$.

33. Linearni operatori. Prostor $\mathcal{L}(V)$. Dijagonalizabilnost linearnih operatora i kvadratnih matrica.

34. Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori. Karakterističan polinom i jednačina. Slične matrice imaju iste karakteristične polinome.

35. Sopstveni prostor neke sopstvene vrednosti. Ako su $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ sopstveni vektori koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, onda je $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ linearno nezavisan skup.

36. Prostor realnih nizova. Homogene linearne diferencne jednačine. Vandermondova determinanta.

37. Minimalni polinom. Svaka matrica ima jedinstven minimalni polinom.

38. Kejli-Hamiltonova teorema.

39. Nilpotentni operatori. Za svaki nilpotentan $t : V \to V$ postoji baza t-nizova za V. Reprezentacija u odnosu na bazu t-nizova.

40. Žordanova normalna forma u slučaju kada operator ima jedinstvenu sopstvenu vrednost.

41. Žordanova normalna forma u slučaju kada operator ima više sopstvenih vrednosti.

42. Skalarni proizvod. Nejednakosti Koši-Švarca i Minkovskog.

43. Euklidski prostori. Ugao između vektora. Furijeovi koeficijenti.

44. Neka su $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k$ međusobno ortogonalni, ne-nula vektori u $\mathbf{R}^n$. Neka je $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ i neka je $c_i = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}_i}{\|\vec{w}_i\|^2}$, za $1 \leq i \leq k$. Tada za proizvoljnu k-torku $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ realnih brojeva važi: $\|\vec{v} - \sum_{i=1}^k c_i \vec{w}_i\| \leq \|\vec{v} - \sum_{i=1}^k a_i \vec{w}_i\|$.

45. Neka su $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k$ međusobno ortogonalni, ne-nula vektori u $\mathbf{R}^n$. Neka je $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ i neka je $c_i = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}_i}{\|\vec{w}_i\|^2}$, za $1 \leq i \leq k$. Tada važi: $\| \sum_{i=1}^k c_i \vec{w}_i\| \leq \|\vec{v}\|$.

46. Gram-Šmitova ortogonalizacija.

47. Izomorfizam euklidskih prostora.

48. Ortogonalni komplement potprostora od $\mathbf{R}^n$.

49. Ortogonalna projekcija vektora na potprostor.

50. Ortogonalna projekcija vektora na afini potprostor.

51. Ortogonalne matrice.

52. Hermitski prostor $\mathbf{C}^n$.

53. Simetrične matrice. Svi koreni karakterističnog polinoma simetrične matrice su realni i sopstveni vektori iz $\mathbf{R}^n$ koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima su ortogonalni.

54. Dijagonalizacija simetrične matrice.

55. Dualni prostori. Ako je V konačnodimenzionalan, onda je $V^* \cong V$. Dualni prostori euklidskih prostora.

56. Simetrični operatori.

57. Dvostruki dualni prostor.

58. Bilinearna preslikavanja i bilinearne forme. Tenzorski proizvod vektorskih prostora.

59. Realne kvadratne forme.

60. Ortogonalne matrice u $\mathcal{M}_2$.
61. Definitne kvadratne forme.
62. Kriterijum definitnosti kvadratne forme preko sopstvenih vrednosti.
63. Kriterijum definitnosti kvadratne forme preko determinanti.