Linearna algebra A
ispitna pitanja

1. Skup $\mathbf{R}^n$, sabiranje i množenje skalarima. Osnovne osobine.

2. Sistemi linearnih jednačina. Partikularno i opšte rešenje.

3. Gausove operacije. Tvrđenje: *Ako je sistem* σ' *dobijen od sistema* σ *konačnom primenom Gausovih operacija, onda su sistemi* σ *i* σ' *ekvivalentni.*

4. Predstavljanje opšteg rešenja sistema linearnih jednačina. Tvrđenje: *opšte = partikularno + homogeno.*

5. Predstavljanje opšteg rešenja sistema linearnih jednačina. Tvrđenje: *Svaki sistem lin. j-na ili nema rešenja ili ima tačno jedno rešenje ili ih ima beskonačno mnogo.*

6. Matrice i skraćeni zapis Gausove metode. Sabiranje i množenje skalarima.

7. Redukovana stepenasta forma. Tvrđenje: *Svaka matrica je vrsta-ekvivalentna jedinstvenoj matrici u redukovanoj stepenastoj formi.*

8. Vektorski prostori. Prostor V^X (funkcije iz X u v.p. V). Tvrđenje: *Ako su* A *i* B *vrsta-ekv. matrice, onda je svaka vrsta od* B *linearna kombinacija vrsta od* A.

9. Vektorski prostori. Tvrđenje: *U svakom vektorskom prostoru važi:* $0\vec{v} = \vec{0}$, $(-1)\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$, $r\vec{0} = \vec{0}$.

10. Potprostori i linearni omotači. Tvrđenje: *Linearni omotač proizvoljnog skupa vektora nekog vektorskog prostora je potprostor tog vektorskog prostora.*

11. Potprostori i linearni omotači. Tvrđenje: *Za* $S, T \subseteq V$ *važi* $S \subseteq [S]$, $S \subseteq T \Rightarrow [S] \subseteq [T]$, $[[S]] = [S]$.

12. Linearna nezavisnost. Tvrđenje: *Za* $\vec{v} \in V$, $S \subseteq V$ *važi:* $[S] = [S \cup \{\vec{v}\}]$ *akko* $\vec{v} \in [S]$.

13. Linearna nezavisnost. Tvrđenje: *Sve ne-nula vrste matrice u stepenastoj formi čine linearno nezavisan skup.*

14. Linearna nezavisnost. Tvrđenje: *Za svaki konačan* $S \subseteq V$ *postoji* $T \subseteq S$ *takav da je* T *linearno nezavisan i* $[T] = [S]$.

15. Linearna nezavisnost. Tvrđenje: *Za svaki linearno nezavisan* $X \subseteq V$ *postoji linearno nezavisan* M *takav da je* $X \subseteq M$ *i* $[M] = V$.

16. Baza vektorskog prostora. Reprezentacija vektora u odnosu na datu bazu.

17. Baza vektorskog prostora. Tvrđenje: $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ *je baza za* V *akko za svako* $\vec{v} \in V$ *postoji jedinstvena* n*-torka skalara* $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ *takva da je* $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$.

18. Dimenzija vektorskog prostora. Tvrđenje: *U svakom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru sve baze su jednake dužine.*

19. Dimenzija vektorskog prostora. Tvrđenje: *Za svaki podskup* T *konačnodimenzionalnog vektorskog prostora* V *za koji važi da je* $[T] = V$*, postoji* $T' \subseteq T$ *koji daje bazu za* V*.*

20. Dimenzija vektorskog prostora. Tvrđenje: *Svaki linearno nezavisan skup vektora konačnodimenzionalnog prostora* V *se može dopuniti do neuređene baze za* V*.*

21. Vektorski prostori i linearni sistemi. Tvrđenje: *Ako su dve matrice vrsta-ekvivalentne onda su im kolona-rangovi jednaki.*

22. Vektorski prostori i linearni sistemi. Tvrđenje: *Svaka matrica ima isti vrsta i kolona rang.*

23. Operacije s potprostorima. Tvrđenje: *Za potprostore* U *i* W *konačnodimenzionalnog prostora važi:* $dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$*.*

24. Operacije s potprostorima. Tvrđenje: *Za* $V = U + W$ *važi: svaki* $\vec{v} \in V$ *se može na jedinstven način predstaviti kao* $\vec{u} + \vec{w}$ *pri čemu je* $\vec{u} \in U$ *a* $\vec{w} \in W$ *akko* $U \cap W = \{\vec{0}\}$*.*

25. Linearna preslikavanja, izomorfizmi. Tvrđenje: *Vektorski prostori su izomorfni akko imaju istu dimenziju.*

26. Linearna preslikavanja, izomorfizmi. Tvrđenje: *Relacija* $\cong$ *je relacija ekvivalencije.*

27. Linearna preslikavanja. Tvrđenje: *Linearno preslikavanje je određeno svojim dejstvom na bazi.*

28. Slika i jezgro linearnog preslikavanja. Tvrđenje: *Za homomorfizam* $h\colon V \to W$ *važi* $dim(V) = dim(Im(h)) + dim(Ker(h))$*.*

29. Slika i jezgro linearnog preslikavanja. Tvrđenje: *Za homomorfizam* $h\colon V \to W$ *važi:* h *je* ***1-1*** *akko* $Ker(h) = \{\vec{0}\}$*.*

30. Slika i jezgro linearnog preslikavanja. Pokazati da su to potprostori kodomena odnosno domena tog preslikavanja.

31. Linearna preslikavanja. Tvrđenje: *Kompozicija linearnih preslikavanja je linearno preslikavanje.*

32. Reprezentacija linearnih preslikavanja. $Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{v})) = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)\, Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v})$.

33. Linearna preslikavanja. Tvrđenje: *Neka je* $h : V \to W$ *linearno preslikavanje reprezentovano matricom* $H \in \mathcal{M}_{m\times n}$*. Tada je* h ***na*** *akko je* $rank(H) = m$ *i* h *je* ***1-1*** *akko je* $rank(H) = n$*.*

34. Svaka matrica reprezentuje linearno preslikavanje. Tvrđenje: *Rang matrice jednak je rangu svakog preslikavanja koje ona reprezentuje.*

35. Množenje matrica. Tvrđenje: *Kompozicija linearnih preslikavanja je reprezentovana proizvodom reprezentacija tih preslikavanja.*

36. Množenje matrica. Tvrđenje: *Množenje matrica je asocijativno i distribuira se nad sabiranjem.*

37. Elementarne redukcijske matrice. Tvrđenje: *Za svaku matricu H postoje el. red. matrice $R_1, \ldots, R_m$ takve da je $R_m R_{m-1} \ldots R_1 H$ u redukovanoj stepenastoj formi.*

38. Inverzne matrice. Tvrđenje: *Matrica je invertibilna akko je jednaka proizvodu elementarnih redukcijskih matrica.*

39. Inverzne matrice. Tvrđenje: *Matrica je invertibilna akko reprezentuje izomorfizam.*

40. Promena baze. Tvrđenje: *Matrica je matrica promene baze akko je nesingularna.*

41. Promena reprezentacije preslikavanja. Matrično ekvivalentne matrice.

42. Promena reprezentacije preslikavanja. Tvrđenje: *Dve matrice istog tipa su matrično ekvivalentne akko imaju isti rang.*

43. Determinante, definicija i osnovna svojstva. Tvrđenje: *Ako $A \xrightarrow{k\rho_i + \rho_j} B$ $(i \neq j)$ onda $det(B) = det(A)$.*

44. Determinante, definicija i osnovna svojstva. Tvrđenje: $det(AB) = det(A)\, det(B)$.

45. Determinante, definicija i osnovna svojstva. Tvrđenje: *Kvadratna matrica je invertibilna akko je njena determinanta različita od 0.*

46. Minori i kofaktori. Tvrđenje: *Za $A \in \mathcal{M}_n$ važi: $A\, adj(A) = adj(A)\, A = det(A)\, E_n$.*

47. Minori i kofaktori. Laplasov razvoj determinante.

48. Kramerova teorema. Posebno slučaj homogenog sistema.

49. Sličnost matrica. Tvrđenje: *Sličnost matrica je relacija ekvivalencije.*

50. Sličnost matrica. Tvrđenje: *Ako su matrice $H, G \in \mathcal{M}_n$ slične, onda su i matrice $a_0 E_n + a_1 H + \ldots + a_m H^m$ i $a_0 E_n + a_1 G + \ldots + a_m G^m$ slične.*

51. Dijagonalizabilnost linearnih operatora i kvadratnih matrica.

52. Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori. Karakterističan polinom i jednačina. Tvrđenje: *Slične matrice imaju iste karakteristične polinome.*

53. Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori. Tvrđenje: *Ako su $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ sopstveni vektori koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, onda je $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ linearno nezavisan skup.*

54. Homogene linearne diferencne jednačine. Vandermondova determinanta.