THE THIRD MATHEMATICAL CONFERENCE OF REPUBLIC OF SRPSKA
Trebinje, 7. and 8. June 2013.

O klasifikacijskim prostorima monoidalnih kategorija

Sonja Lj. Čukić i Zoran Petrić
Matematički institut SANU
Knez Mihailova 36
P.F. 367, 11001 Beograd, Srbija
sonja@mi.sanu.ac.rs, zpetric@mi.sanu.ac.rs

Abstract

U ovom kratkom radu dajemo pregled algebarskih struktura na kategorijama koje omogućavaju Segal-Tomasonovu bar konstrukciju. To je osnovni korak procedure koja kategoriji $\mathcal{M}$ pridružuje njeno raspetljavanje: prostor X takav da je prostor petlji nad X homotopski ekvivalentan klasifikacijskom prostoru kategorije $\mathcal{M}$. Još je od šezdesetih godina prošlog veka poznato da monoidalna struktura na kategoriji odgovara jednostrukom prostoru petlji. Segal-Tomasonova konstrukcija omogućava da se neke kategorije sa bogatijom strukturom višestruko raspetljaju. Najnoviji rezultati ovog tipa najavljeni su na konferenciji u Trebinju.

1 Uvod

Prve rezultate koji su omogućili da se povežu monoidalne kategorije s prostorima petlji dali su Stašev, [11], i Meklejn, [6]. Nakon toga se pojavila potreba da se odrede uslovi na algebarskoj strukturi kategorije koji omogućavaju njeno povezivanje s prostorima petlji raznih višestrukosti. Sedamdesetih godina prošlog veka su Segal, [10], i Tomason, [13], razvili tehniku koja je odredila jedan pravac u toj oblasti istraživanja.

Segal-Tomasonova ili redukovana, kako ćemo je ovde zvati, bar konstrukcija je postupak nalaženja simplicijalnog objekta u kategoriji čija je monoidalna struktura data konačnim proizvodima. U ovom radu će nam to biti 2-kategorija *Cat* čiji su objekti kategorije, morfizmi su funktori, a 2-morfizmi su prirodne transformacije. Monoid u *Cat* je striktna monoidalna kategorija. Jedna takva kategorija $\mathcal{M}$ je osnova za simplicijalni objekat u *Cat*, to jest funktor $\overline{W}\mathcal{M}$ iz Δ_+^{op} u *Cat*, gde je Δ_+ topološka simplicijalna kategorija. Ovo znači da je $\overline{W}\mathcal{M}(1) = \mathcal{M}$ i, uopštenije, $\overline{W}\mathcal{M}(n) = \mathcal{M}^n$.

Kada se $\overline{W}\mathcal{M}$ komponuje s funktorom nerv, a zatim s geometrijskom realizacijom, dobija se funktor iz Δ_+^{op} u *Top*, to jest simplicijalni prostor. Po rezultatima Segala i Mekdafove, [10], [8], prostor petlji od geometrijske realizacije tog simplicijalnog prostora je homotopski ekvivalentan klasifikacijskom prostoru kategorije $\mathcal{M}$ ili preciznije, njenom grupnom kompletiranju. Dakle, taj simplicijalni prostor je raspetljavanje nerva od $\mathcal{M}$.

Uz malu modifikaciju, ova mašina za raspetljavanje se može prilagoditi nekim složenijim algebarskim strukturama na kategoriji tako da kao rezultat dobijemo višestruko raspetljavanje nerva polazne kategorije. Po rezultatima Segala, [10], i Tomasona, [13], ova tehnika dovodi u vezu simetrične monoidalne kategorije s beskonačnim prostorima petlji, dok se monoidalne kategorije pletenica dovode u vezu s dvostrukim prostorima petlji uz pomoć rezultata Žoajala i Strita, [5]. U ovim rezulatima sama redukovana bar konstrukcija nije dovoljna pošto njen rezultat nije funktor jer ne prolazi kroz kompoziciju morfizama. Medjutim, pošto se svaki put može pokazati da je dobijen relaksiran funktor u smislu [12], onda se rezultati tog rada mogu iskoristiti da bi se dobio pravi funktor koji predstavlja traženi simplicijalni objekat. Da bi se pokazalo da je dobijen relaksiran funktor, svaki put se koristi koherencijski rezultat vezan za dati tip kategorija.

Balteanu, Fjodorovič, Švancl i Fogt, [2], su postavili pitanje dovoljnih uslova za to da kategorija s n monoidalnih struktura može da posluži kao osnova za redukovanu bar konstrukciju koja proizvodi relaksiran funktor odgovarajućeg tipa. Na taj način bismo dobili n-tostruko raspetljavanje nerva polazne kategorije. U tom radu su dati traženi uslovi, ali su oni suviše restriktivni u odnosu na jedinice—zahteva se da sve monoidalne strukture imaju zajedničku jedinicu. Došen i drugi autor ovog teksta, [4], su dali znatno oslabljenje tih uslova za slučaj $n = 2$, što verovatno predstavlja maksimum oslabljenja ukoliko i dalje hoćemo da koherencija bude sredstvo za dokazivanje toga da je rezultat redukovane bar konstrukcije jedan relaksiran funktor.

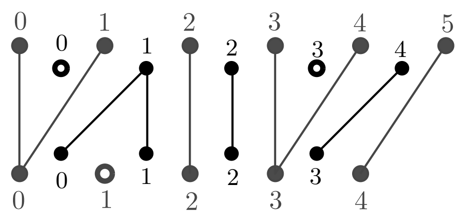
Autori ovog članka, [3], su dali željene uslove direktno proveravajući, bez koherencije, komutativnost dijagrama koji govore da je kao rezultat redukovane bar konstrukcije dobijen relaksiran funktor. Ti uslovi uopštavaju sve gorenavedene. Rezultati iz [3] su najavljeni tokom predavanja koje je drugi autor održao na konferenciji u Trebinju.

2 Redukovana bar konstrukcija

Neki dokazi koji su izostavljeni iz ovog odeljka mogu se naći u [9, Section 6]. Pod *simplicijalnim objektom* kategorije $\mathcal{C}$ podrazumevamo funktor iz Δ_+^{op} u $\mathcal{C}$, gde je Δ_+ standardna topološka *simplicijalna kategorija* (videti [7, VII.5]). U ovom odeljku ćemo pojasniti kako monoid u monoidalnoj kategoriji čija je monoidalna struktura data konačnim proizvodima odredjuje jedan simplicijalni objekat te kategorije.

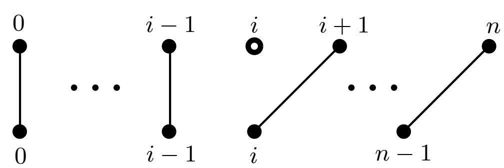
Ono što zbunjuje u ovoj konstrukciji je to što Δ_+^{op} sadrži *univerzalni komonoid*, a na raspolaganju imamo monoid neke kategorije. Ovaj problem prevazilazimo tako što Δ_+^{op} utopimo u Δ, odnosno izjednačimo je s potkategorijom Δ_{Int} kategorije Δ.

Objekti kategorije Δ_{Int} su konačni ordinali veći ili jednaki 2, a strelice su monotone funkcije koje čuvaju prvi i poslednji element. Ta kategorija je slika kategorije Δ_+^{op} u kategoriji Δ pomoću funktora koji objekat n slika u $n+2$, a morfizme slika „senčenjem” kao u sledećem primeru, gde unutrašnji graf predstavlja morfizam iz Δ_+^{op}, a spoljašnji je njegova „senka” iz Δ:



Ovaj funktor je veran i injektivan na objektima, pa stoga Δ_+^{op} možemo smatrati potkategorijom od Δ.

Za naše potrebe uvešćemo još jednu kategoriju srodnu simplicijalnoj koju označavamo sa Δ_{par}. Njeni objekti su takodje konačni ordinali, a morfizmi su monotone *parcijalne* funkcije. Za morfizme koji generišu tu kategoriju možemo uzeti one koji generišu Δ zajedno sa parcijalnim funkcijama $\rho_i^n\colon n{+}1 \to n$ za $n \geq 0$ i $0 \leq i \leq n$, koje se grafički predstavljaju kao



Posmatrajmo funktor koji preslikava Δ_{Int} u Δ_{par}, koji pridružuje objektu $n{+}2$ prve kategorije objekat n druge kategorije, a svakom morfizmu $f\colon m+2 \to n+2$ prve kategorije pridružuje morfizam $g\colon m \to n$ druge kategorije takav da je

$$g(x) = \begin{cases} f(x+1)-1, & \text{kada je } f(x+1)-1 \in n, \\ \text{nedefinisano}, & \text{inače.} \end{cases}$$

Na osnovu identifikacije kategorija Δ_+^{op} i Δ_{Int} on postaje funktor iz Δ_+^{op} u Δ_{par} koji je identitet na objektima.

Neka je $\mathcal{K}$ kategorija čija je monoidalna struktura data konačnim proizvodima. Na osnovu striktifikacije pokazane u [7, XI.3, Theorem 1], možemo slobodno smatrati da je ta monoidalna struktura striktna, to jest da je binarni proizvod asocijativan i da je terminalni objekat neutral za taj proizvod. Neka je $\langle C, \mu, \eta\rangle$ monoid u kategoriji $\mathcal{K}$. Tada postoji jedinstven funktor iz Δ_{par} u $\mathcal{K}$ takav da se objekat n iz Δ_{par} slika u $C^n = C \times \ldots \times C$, zajednički generatori za Δ_{par} i Δ se slikaju u morfizme dobijene pomoću μ i η na osnovu toga što Δ sadrži *univerzalni monoid* (videti [7, VII.5, Proposition 1]), dok se generator ρ_i^n slika u morfizam iz C^{n+1} u C^n dobijen kao

$$\underbrace{\mathbf{1}_C \times \ldots \times \mathbf{1}_C}_{i} \times \kappa_C \times \underbrace{\mathbf{1}_C \times \ldots \times \mathbf{1}_C}_{n-i},$$

gde je κ_C jedinstven morfizam iz C u terminalni objekat kategorije $\mathcal{K}$.

Za nas je posebno interesantan slučaj kada umesto kategorije $\mathcal{K}$ posmatramo 2-kategoriju *Cat*, a umesto monoida C posmatramo monoid $\mathcal{M}$ u *Cat*, što znači da je $\mathcal{M}$ jedna striktna monoidalna kategorija. Na osnovu gorenavedenog postojaće funktor $\overline{W}\mathcal{M}\colon \Delta_+^{op} \to \mathit{Cat}$ koji je zadat sa

$\overline{W}\mathcal{M}(n) = \mathcal{M}^n$,

$\overline{W}\mathcal{M}(d_0^n)(A_1, A_2, \ldots, A_n) = (A_2, \ldots, A_n)$,

$\overline{W}\mathcal{M}(d_n^n)(A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n) = (A_1, \ldots, A_{n-1})$,

a za $1 \leq i \leq n-1$ i $0 \leq j \leq n-1$,

$\overline{W}\mathcal{M}(d_i^n)(A_1, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n) = (A_1, \ldots, A_i \otimes A_{i+1}, \ldots, A_n)$,

$\overline{W}\mathcal{M}(s_j^n)(A_1, \ldots, A_j, A_{j+1}, \ldots, A_{n-1}) = (A_1, \ldots, A_j, I, A_{j+1}, \ldots, A_{n-1})$,

gde su $d_i^n : n \to n-1$, za $n \geq 1$ i $0 \leq i \leq n$, i $s_j^n : n-1 \to n$, za $n \geq 1$ i $0 \leq j \leq n-1$, standardni generatori kategorije Δ_+^{op} (videti [3, Section 3]), dok je $\otimes$ *tenzor*, a I je *jedinica* striktne monoidalne kategorije $\mathcal{M}$.

Funktor $\overline{W}\mathcal{M}$ nazivamo *redukovana bar konstrukcija* bazirana na $\mathcal{M}$. S obzirom da je i $\mathcal{M}^k$ striktna monoidalna kategorija čija je struktura dobijena po komponentama od striktne monoidalne strukture na $\mathcal{M}$, onda postoji i redukovana bar konstrukcija bazirana na $\mathcal{M}^k$ i mi je označavamo sa $\overline{W}\mathcal{M}^k$. Ako kategorija $\mathcal{M}$ ima na sebi n monoidalnih struktura, onda redukovanu bar konstrukciju baziranu na i-toj monoidalnoj strukturi označavamo sa $\overline{W}\mathcal{M}_i$.

3 Višestruka redukovana bar konstrukcija

Osnovna ideja pomoću koje je u [10] i [13] pokazano da simetrične monoidalne kategorije odgovaraju beskonačnim prostorima petlji je da se za proizvoljno $n \geq 1$ one posmatraju kao kategorije s n monoidalnih struktura koje komuniciraju pomoću simetrije. Ta ideja je iskorišćena u [2] da bi se dao dovoljan uslov da kategorija s n monoidalnih struktura odgovara n-tostrukom prostoru petlji. Naša ideja u [3] je bila da, polazeći od kategorije s n striktnih monoidalnih struktura, bez ikakvih pretpostavki unapred, vidimo kakva komunikacija izmedju tih struktura obezbedjuje da uopštenje redukovane bar konstrukcije proizvede jedan relaksiran funktor iz $(\Delta_+^{op})^n$ u *Cat* (videti definiciju niže).

Neka je $\mathcal{M}$ kategorija s n striktnih monoidalnih struktura. Uopštenje redukovane bar konstrukcije bazirano na $\mathcal{M}$ treba da nam proizvede dve funkcije—prva preslikava n-torke konačnih ordinala, što predstavlja objekte od $(\Delta_+^{op})^n$ u kategorije, to jest objekte od *Cat*, dok druga preslikava n-torke morfizama od Δ_+^{op} u funktore. Obe funkcije označavamo sa $\overline{W}\mathcal{M}$. Prva funkcija je sasvim jednostavno definisana i od nje zahtevamo da je

$$\overline{W}\mathcal{M}(m_1, \ldots, m_n) = \mathcal{M}^{m_1 \cdot \ldots \cdot m_n}.$$

Druga funkcija je nešto komplikovanije definisana i tu nam pomaže sledeća notacija. Neka je $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ jedna n-torka morfizama od Δ_+^{op}. Za svako $1 \leq k \leq n$, neka je

$$i(k) = \prod_{k<l\leq n} s_l \quad \text{i} \quad o(k) = \prod_{1\leq l<k} t_l,$$

gde prazan proizvod računamo kao jedinicu i s_l je domen, a t_l je kodomen od f_l. Tada je druga funkcija definisana kao

$$\overline{W}\mathcal{M}(\vec{f}) = (\overline{W}\mathcal{M}_n^{i(n)}(f_n))^{o(n)} \circ \cdots \circ (\overline{W}\mathcal{M}_2^{i(2)}(f_2))^{o(2)} \circ (\overline{W}\mathcal{M}_n^{i(1)}(f_1))^{o(1)}.$$

Na primer, za $n = 3$ i $\vec{f} = (d_1^3, d_1^2, s_1^2)$ imamo da je $\overline{W}\mathcal{M}(\vec{f})$ funktor iz $\mathcal{M}^6$ u $\mathcal{M}^4$ zadat sa

$$\overline{W}\mathcal{M}(\vec{f})(A, B, C, D, E, F) = ((A \otimes_1 C) \otimes_2 (B \otimes_1 D), I_3, E \otimes_2 F, I_3),$$

gde su $\otimes_1$ i $\otimes_2$ tenzori prve, odnosno druge, monoidalne strukture, a I_3 je jedinica treće monoidalne strukture na $\mathcal{M}$.

Ovaj par funkcija ne zadaje funktor iz $(\Delta_+^{op})^n$ u *Cat* zato što u opštem slučaju ne važi

$$\overline{W}\mathcal{M}(\vec{g}) \circ \overline{W}\mathcal{M}(\vec{f}) = \overline{W}\mathcal{M}(\vec{g} \circ \vec{f}).$$

Da bi $\overline{W}\mathcal{M}$ bio *relaksiran funktor* potrebno je da za svaki par kompozabilnih strelica $\vec{f}$ i $\vec{g}$ iz $(\Delta_+^{op})^n$ postoji prirodna transformacija

$$\omega_{\vec{g},\vec{f}} \colon \overline{W}\mathcal{M}(\vec{g}) \circ \overline{W}\mathcal{M}(\vec{f}) \stackrel{\cdot}{\to} \overline{W}\mathcal{M}(\vec{g} \circ \vec{f})$$

takva da sledeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{W}\mathcal{M}(\vec{h}) \circ \overline{W}\mathcal{M}(\vec{g}) \circ \overline{W}\mathcal{M}(\vec{f}) \arrow[dl, "\omega_{\vec{h},\vec{g}}\overline{W}\mathcal{M}(\vec{f})"'] \arrow[dr, "\overline{W}\mathcal{M}(\vec{h})\omega_{\vec{g},\vec{f}}"] & \\
\overline{W}\mathcal{M}(\vec{h} \circ \vec{g}) \circ \overline{W}\mathcal{M}(\vec{f}) \arrow[dr, "\omega_{\vec{h}\circ\vec{g},\vec{f}}"'] & & \overline{W}\mathcal{M}(\vec{h}) \circ \overline{W}\mathcal{M}(\vec{g} \circ \vec{f}) \arrow[dl, "\omega_{\vec{h},\vec{g}\circ\vec{f}}"] \\
 & \overline{W}\mathcal{M}(\vec{h} \circ \vec{g} \circ \vec{f}) &
\end{tikzcd}$$

U [3] je pokazano da je neophodan uslov za postojanje ovakvih prirodnih transformacija ω to da za svako $1 \leq k < l \leq n$ postoje strelice $\kappa_{k,l} \colon I_k \to I_l$, $\beta_{k,l} \colon I_k \to I_k \otimes_l I_k$, $\tau_{k,l} \colon I_l \otimes_k I_l \to I_l$, kao i familija strelica $\iota_{k,l}$

$$(A \otimes_l B) \otimes_k (C \otimes_l D) \to (A \otimes_k C) \otimes_l (B \otimes_k D),$$

indeksirana četvorkama (A, B, C, D) objekata iz $\mathcal{M}$. Glavni rezultat tog rada je da su, pored prirodnosti transformacija $\iota_{k,l}$, sledeće jednakosti na strukturi kategorije $\mathcal{M}$ dovoljne za postojanje željenih prirodnih transformacija ω.

Za sve $1 \leq k < l \leq n$,

$$\begin{array}{llll}
(1) & \iota_{k,l} \circ (\mathbf{1} \otimes_k \iota_{k,l}) = \iota_{k,l} \circ (\iota_{k,l} \otimes_k \mathbf{1}), & (7) & (\mathbf{1} \otimes_l \iota_{k,l}) \circ \iota_{k,l} = (\iota_{k,l} \otimes_l \mathbf{1}) \circ \iota_{k,l}, \\
(2) & \iota_{k,l} \circ (\mathbf{1} \otimes_k \beta_{k,l}) = \mathbf{1}, & (8) & (\mathbf{1} \otimes_l \tau_{k,l}) \circ \iota_{k,l} = \mathbf{1}, \\
(3) & \iota_{k,l} \circ (\beta_{k,l} \otimes_k \mathbf{1}) = \mathbf{1}, & (9) & (\tau_{k,l} \otimes_l \mathbf{1}) \circ \iota_{k,l} = \mathbf{1}, \\
(4) & \tau_{k,l} \circ (\mathbf{1} \otimes_k \tau_{k,l}) = \tau_{k,l} \circ (\tau_{k,l} \otimes_k \mathbf{1}), & (10) & (\mathbf{1} \otimes_l \beta_{k,l}) \circ \beta_{k,l} = (\beta_{k,l} \otimes_l \mathbf{1}) \circ \beta_{k,l}, \\
(5) & \tau_{k,l} \circ (\mathbf{1} \otimes_k \kappa_{k,l}) = \mathbf{1}, & (11) & (\mathbf{1} \otimes_l \kappa_{k,l}) \circ \beta_{k,l} = \mathbf{1}, \\
(6) & \tau_{k,l} \circ (\kappa_{k,l} \otimes_k \mathbf{1}) = \mathbf{1}, & (12) & (\kappa_{k,l} \otimes_l \mathbf{1}) \circ \beta_{k,l} = \mathbf{1}
\end{array}$$

i za sve $1 \leq k < l < m \leq n$,

(13) $\kappa_{l,m} \circ \kappa_{k,l} = \kappa_{k,m}$,

(14) $\beta_{l,m} \circ \kappa_{k,l} = (\kappa_{k,l} \otimes_m \kappa_{k,l}) \circ \beta_{k,m}$,

(15) $\tau_{l,m} \circ (\kappa_{k,m} \otimes_l \kappa_{k,m}) \circ \beta_{k,l} = \kappa_{k,m}$,

(16) $\iota_{l,m} \circ (\beta_{k,m} \otimes_l \beta_{k,m}) \circ \beta_{k,l} = (\beta_{k,l} \otimes_m \beta_{k,l}) \circ \beta_{k,m}$,

(17) $\kappa_{l,m} \circ \tau_{k,l} = \tau_{k,m} \circ (\kappa_{l,m} \otimes_k \kappa_{l,m})$,

(18) $\beta_{l,m} \circ \tau_{k,l} = (\tau_{k,l} \otimes_m \tau_{k,l}) \circ \iota_{k,m} \circ (\beta_{l,m} \otimes_k \beta_{l,m})$,

(19) $\tau_{l,m} \circ (\tau_{k,m} \otimes_l \tau_{k,m}) \circ \iota_{k,l} = \tau_{k,m} \circ (\tau_{l,m} \otimes_k \tau_{l,m})$,

(20) $\iota_{l,m} \circ (\iota_{k,m} \otimes_l \iota_{k,m}) \circ \iota_{k,l} = (\iota_{k,l} \otimes_m \iota_{k,l}) \circ \iota_{k,m} \circ (\iota_{l,m} \otimes_k \iota_{l,m})$.

Pojam kategorije koja zadovoljava ove uslove uveden je u [1, Section 7.6] pod imenom n-monoidalna kategorija. Ono što je važno za nas je da taj pojam uopštava pojmove simetrične monoidalne kategorije, monoidalne kategorije pletenica, bimonoidalne kategorije s intermutacijom (videti [4, Section 12]), simetrične bimonoidalne kategorije s intermutacijom (videti [4, Section 16] i [9, Section 2]) kao i pojam n-tostruke monoidalne kategorije uveden u [2, Section 1]. To znači da korektnost redukovane bar konstrukcije koju smo pokazali povlači korektnost svih redukovanih bar konstrukcija baziranih na kategorijama datih tipova. Naš rezultat, takodje, omogućuje da mnoge kategorije s više prirodno definisanih monoidalnih struktura na sebi dobiju priliku da se raspetljaju u smislu kako smo tu reč upotrebili u uvodu. Na taj način, svaka kategorija s konačnim koproizvodima i proizvodima, kakva je na primer kategorija konačnih skupova, može da se dvostruko raspetlja u odnosu na te dve monoidalne strukture.

Literatura

[1] M. Aguiar and S. Mahajan, ***Monoidal functors, species and Hopf algebras***, CRM Monograph Series, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010

[2] C. Balteanu, Z. Fiedorowicz, R. Schwänzl and R. Vogt, *Iterated monoidal categories*, ***Advances in Mathematics***, vol. 176 (2003), pp. 277-349

[3] S.Lj. Čukić and Z. Petrić, *The n-fold reduced bar construction*, preprint (2013) (arXiv:1309.6209)

[4] K. Došen and Z. Petrić, *Intermutation*, ***Applied Categorical Structures***, vol. 20 (2012), pp. 43-95 (arXiv:math/0701325)

[5] A. Joyal and R. Street, *Braided tensor categories*, ***Advances in Mathematics***, vol. 102 (1993), pp. 20-78

[6] S. Mac Lane, *Natural associativity and commutativity*, ***Rice University Studies, Papers in Mathematics***, vol. 49 (1963), pp. 28-46

[7] ——, ***Categories for the Working Mathematician***, Springer, Berlin, 1971 (expanded second edition, 1998)

[8] D. McDuff and G. Segal, *Homology fibrations and the "group-completion" theorem*, ***Inventiones mathematicae***, vol. 31 (1976), pp. 279-284

[9] Z. Petrić and T. Trimble, *Symmetric bimonoidal intermuting categories and $\omega \times \omega$ reduced bar constructions*, to appear in ***Applied Categorical Structures*** (arXiv:0906.2954)

[10] G. Segal, *Categories and cohomology theories*, ***Topology***, vol. 13 (1974), pp. 293-312

[11] J.D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces*, I, II, ***Transactions of the American Mathematical Society***, vol. 108 (1963), pp. 275-292, 293-312

[12] R. Street, *Two constructions on lax functors*, ***Cahiers de topologie et géométrie différentielle***, vol. 13 (1972), pp. 217-264

[13] R.W. Thomason, *Homotopy colimits in the category of small categories*, ***Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society***, vol. 85, 91 (1979), pp. 91-109