Linearna algebra

SKRIPTA

Januar 2013.

Reč autora

Ovo je verzija teksta koji je pod naslovom *Linearna algebra* prvobitno bio pripremljen za studente Odseka za informatiku, Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu. Nova verzija je proširena u nameri da obuhvati sadržaj kurseva Linearna algebra A i B za studente prve godine Matematičkog fakulteta. Kao inspiracija starog teksta je poslužio udžbenik [3].

Neki delovi ovog teksta su nastali pod uticajem knjiga [2], [1], [12], [8] i [11]. Studentima savetujem da koriste udžbenike [7], [5], [6] kao i skripta [13].

Svi komentari su dobrodošli!

U Beogradu, 16. mart 2015. Zoran Petrić

Dopuna

Početkom 2018. Ognjen Milinković se uključio u sređivanje skripata i izmenio redosled nekih delova, a takođe promenio i dopunio njihov sadržaj. To se najviše odnosi na odeljak 11.4. Obojica se nadamo da će ovako izmenjen tekst biti pristupačniji studentima.

U Beogradu, 22. mart 2018. Ognjen Milinković i Zoran Petrić

ognjen7amg@gmail.com, zpetric@mi.sanu.ac.rs

Zahvalnica

Zahvaljujem se asistentu Filipu Samardžiću koji je pomogao u izradi prve verzije ovog teksta. Zahvaljujem se i kolegi Marku Crnobrnji koji je pažljivo pročitao skripta i ukazao mi na grešku u formulaciji Male leme o zameni u prethodnoj verziji. Zahvaljujem se i kolegi Ognjenu Milinkoviću koji je pažljivo pratio kurs, ukazao mi na neke nedoslednosti i sugerisao lepše dokaze nekih tvrđenja.

Posebno bih hteo da se zahvalim prof. Mirjani Borisavljević na dragocenim komentarima i savetima koji su mi pomogli u pripremi završne verzije ovog teksta.

SADRŽAJ

OSNOVNI POJMOVI I NOTACIJA

$\emptyset$	prazan skup
$\{x_1, \ldots, x_n\}$	konačan skup; $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$
$\lvert X \rvert$	broj elemenata konačnog skupa X
(x, y)	uređen par; $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2)$
$X - Y$	razlika skupova X i Y: $\{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$
$X \times Y$	Dekartov proizvod skupova X i Y: $\{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$
$\mathbf{N}$	skup prirodnih brojeva: $\{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbf{N}^+$	skup prirodnih brojeva većih od nule: $\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbf{Z}$	skup celih brojeva: $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbf{R}$	skup realnih brojeva
$\mathbf{C}$	skup kompleksnih brojeva
$\overline{z}$	konjugovanje kompleksnih brojeva $\overline{x + iy} = x - iy$
$\rho \subseteq X \times X$ refleksivna	$(\forall x \in X)(x, x) \in \rho$
$\rho \subseteq X \times X$ simetrična	$(\forall x, y \in X)((x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho)$
$\rho \subseteq X \times X$ tranzitivna	$(\forall x, y, z \in X)(((x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho) \Rightarrow (x, z) \in \rho)$
$\rho \subseteq X \times X$ rel. ekvivalencije	refleksivna, simetrična i tranzitivna
$\mathbf{1}_X$	identitet na X: $(\forall x \in X)\mathbf{1}_X(x) = x$
$f{\restriction}_A$	ograničenje (restrikcija) funkcije na podskup domena
$f\colon X \to Y$ je **1-1**	$(\forall x_1, x_2 \in X)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$
$f\colon X \to Y$ je **na**	$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)y = f(x)$
$f\colon X \to Y$ je bijekcija	**1-1** i **na**, tj. postoji $g\colon Y \to X$ tako da je $g \circ f = \mathbf{1}_X$ i $f \circ g = \mathbf{1}_Y$

V, W, U	vektorski prostori
$U \leq V$	U je potprostor od V
$\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u}$	vektori
$\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$	niz vektora
$\mathcal{B}$, $\underline{\mathcal{B}}$	baza vektorskog prostora, skup elemenata baze
$\mathcal{P}_n$ ili $\mathbf{R}^{n+1}[x]$	prostor polinoma po x stepena ne većeg od n
$[S]$	linearni omotač skupa vektora S
$U + W$	suma potprostora nekog prostora
$U \oplus W$	direktna suma potprostora nekog prostora
A, B, C	matrice
$A \rightsquigarrow B$	matrica A se vrsta-redukuje na matricu B
A^T	transponovana matrica
E_n	jedinična matrica tipa $n \times n$
A^{-1}	obostrani inverz za A
$0_{m\times n}$	nula matrica tipa $m \times n$
$\mathcal{M}_{m\times n}$	skup matrica nad $\mathbf{R}$ tipa $m \times n$
$\mathcal{M}_n$	skup kvadratnih matrica nad $\mathbf{R}$ tipa $n \times n$
V^X	prostor funkcija iz skupa X u prostor V
$\mathcal{L}(V, W)$	prostor linearnih preslikavanja iz V u W
$\mathcal{L}(V)$	prostor linearnih operatora na V

§1. Odeljak 1.

§1.1. Skup $\mathbf{R}^n$ i neke operacije

Glavnu ulogu u ovom kursu igraju vektorski prostori $\mathbf{R}^n$. Za početak definišemo skup

$$\mathbf{R}^n =_{df} \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R} \}.$$

Opredelili smo se da elemente od $\mathbf{R}^n$ posmatramo kao kolone zbog nekih pogodnosti koje će nam taj pristup doneti. Naravno, naročito zbog problema zapisa, taj pristup ima i nekih mana. Elemente od $\mathbf{R}^n$ označavamo sa $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}, \ldots$

Sabiranje u $\mathbf{R}^n$ definišemo prirodno po komponentama, to jest

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Množenje elemenata od $\mathbf{R}^n$ *skalarima* (elementima od $\mathbf{R}$) definišemo na sledeći način

$$r \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} rx_1 \\ \vdots \\ rx_n \end{pmatrix}.$$

Jasno je da ako su $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{R}^n$ i $r \in \mathbf{R}$, onda su i $\vec{u} + \vec{v}, r\vec{u} \in \mathbf{R}^n$. To svojstvo skupa $\mathbf{R}^n$ nazivamo *zatvorenost za sabiranje i množenje skalarima.*

TVRĐENJE 1.1. *Sabiranje u* $\mathbf{R}^n$ *i množenje skalarima zadovoljavaju:*

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}),$$

$$\text{za } \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u},$$

$$\vec{u} + (-1)\vec{u} = \vec{0} = (-1)\vec{u} + \vec{u},$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u},$$

$$r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$$

$$(r + s)\vec{u} = r\vec{u} + s\vec{u}$$

$$(rs)\vec{u} = r(s\vec{u})$$

$$1\vec{u} = \vec{u}.$$

DOKAZ. Direktno po definiciji koristeći svojstva sabiranja i množenja realnih brojeva. $\dashv$

§1.2. Sistemi linearnih jednačina

DEFINICIJA. Izraz oblika $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ za $n \geq 1$, gde su $a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi a $x_1, \ldots, x_n$ promenljive, se zove *linearna kombinacija* promenljivih $x_1, \ldots, x_n$.

DEFINICIJA. Jednačina oblika $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, gde je $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ linearna kombinacija a $b \in \mathbf{R}$ je *linearna jednačina* po promenljivim $x_1, \ldots, x_n$. Ona je *homogena* kada je $b = 0$. Kažemo da je $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ *partikularno rešenje* (ili samo rešenje) gornje jednačine kada je ispunjeno

$$a_1s_1 + \ldots + a_ns_n = b.$$

Opšte rešenje jednačine je skup svih njenih partikularnih rešenja.

DEFINICIJA. Niz od m ($m \geq 1$) linearnih jednačina po promenljivim $x_1, \ldots, x_n$ je *sistem* linearnih jednačina (najčešće ga označavamo sa σ) po promenljivim $x_1, \ldots, x_n$ koji zapisujemo u obliku

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & \ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ & \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + & \ldots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

Kažemo da je $\vec{s} \in \mathbf{R}^n$ *partikularno rešenje* (ili samo rešenje) sistema kada je $\vec{s}$ partikularno rešenje svake jednačine u sistemu. *Opšte rešenje* sistema je skup svih njegovih partikularnih rešenja. *Rešiti* sistem jednačina znači odrediti njegovo opšte rešenje.

NAPOMENA. *Ako je S_i za $1 \leq i \leq m$ opšte rešenje i-te jednačine gornjeg sistema, onda je $S_1 \cap \ldots \cap S_m$ opšte rešenje tog sistema.*

§1.3. Gausove operacije

Pod *Gausovim operacijama* podrazumevamo sledeće:

$(\rho_i \leftrightarrow \rho_j)$ za $i \neq j$, i-ta i j-ta jednačina zamene mesta;

$(r\rho_i)$ za $r \neq 0$, leva i desna strana i-te jednačine se pomnože sa r;

$(r\rho_i + \rho_j)$ za $i \neq j$, i-ta jednačina pomnožena sa r se doda j-toj.

Primer.

$$\begin{array}{rrrl} & & 3x_3 & = 9\\ x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = 2\\ \frac{1}{3}x_1 & +2x_2 & & = 3\end{array} \xrightarrow{\rho_1 \leftrightarrow \rho_3} \begin{array}{rrrl} \frac{1}{3}x_1 & +2x_2 & & = 3\\ x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = 2\\ & & 3x_3 & = 9\end{array}$$

$$\xrightarrow{3\rho_1} \begin{array}{rrrl} x_1 & +6x_2 & & = 9\\ x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = 2\\ & & 3x_3 & = 9\end{array} \xrightarrow{-\rho_1+\rho_2} \begin{array}{rrrl} x_1 & +6x_2 & & = 9\\ & -x_2 & -2x_3 & = -7\\ & & 3x_3 & = 9\end{array}$$

Tvrđenje 1.2. *Ako se sistem σ' dobija od sistema σ primenom neke Gausove operacije, onda se i sistem σ dobija od sistema σ' primenom neke Gausove operacije.*

dokaz. Ako $\sigma \xrightarrow{\rho_i \leftrightarrow \rho_j} \sigma'$, onda $\sigma' \xrightarrow{\rho_i \leftrightarrow \rho_j} \sigma$. Ako $\sigma \xrightarrow{r\rho_i} \sigma'$, onda $\sigma' \xrightarrow{\frac{1}{r}\rho_i} \sigma$. Ako $\sigma \xrightarrow{r\rho_i + \rho_j} \sigma'$, onda $\sigma' \xrightarrow{-r\rho_i + \rho_j} \sigma$. ⊣

Tvrđenje 1.3. *Ako je sistem σ' dobijen od sistema σ primenom neke Gausove operacije, onda je svako rešenje sistema σ ujedno i rešenje sistema σ'.*

dokaz. Neka je $\vec{s} \in \mathbf{R}^n$ rešenje sistema σ. Dakle važi:

$$\begin{array}{lcll} a_{11}s_1 + & \dots & +a_{1n}s_n & = b_1\\ & \dots & & \\ a_{m1}s_1 + & \dots & +a_{mn}s_n & = b_m\end{array}$$

Ako $\sigma \xrightarrow{\rho_i \leftrightarrow \rho_j} \sigma'$, onda je očigledno $\vec{s}$ rešenje sistema σ'.

Pošto iz i-te jednakosti sledi da je $ra_{i1}s_1 + \ldots + ra_{in}s_n = rb_i$, imamo da ako $\sigma \xrightarrow{r\rho_i} \sigma'$, onda je $\vec{s}$ rešenje sistema σ'.

Pošto iz i-te i j-te jednakosti sledi da je

$$(ra_{i1} + a_{j1})s_1 + \ldots + (ra_{in} + a_{jn})s_n = rb_i + b_j,$$

imamo da ako $\sigma \xrightarrow{r\rho_i + \rho_j} \sigma'$, onda je $\vec{s}$ rešenje sistema σ'. ⊣

Definicija. Dva sistema su ekvivalentna kada imaju isto opšte rešenje.

Kao posledicu tvrđenja 1.2 i 1.3 imamo sledeću teoremu.

Teorema 1.4 (Gausov metod). *Ako je sistem σ' dobijen od sistema σ konačnom primenom Gausovih operacija, onda su sistemi σ i σ' ekvivalentni.*

Definicija. Promenljiva x_i $(1 \leq i \leq n)$ je *vodeća* promenljiva u linearnoj jednačini $a_1x_1 + \ldots + a_ix_i + \ldots + a_nx_n = b$, kada je $a_i \neq 0$ a $a_1 = \ldots = a_{i-1} = 0$. Tada za a_i kažemo da je *pivot*.

Definicija. Sistem je u *stepenastoj* formi kada za svaku jednačinu koja ima vodeću promenljivu važi da je ta jednačina ili prva u sistemu ili i prethodna jednačina ima vodeću promenljivu levo od te promenljive.

Primer. Poslednji sistem u prethodnom primeru je u stepenastoj formi, dok svi koji mu prethode nisu.

Napomena 1.5. *Svaki sistem se u konačnom broju koraka (Gausovih operacija) može svesti na sistem u stepenastoj formi.*

§1.4. Predstavljanje opšteg rešenja

Ako sistem ima jedinstveno rešenje ili nema rešenja onda je predstavljanje opšteg rešenja jednostavno. Šta se dešava kada to nije slučaj?

Primer. Redukujemo dati sistem na stepenastu formu.

$$\begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & -w & =1 \\ & y & -z & +w & =-1 \\ 3x & & +6z & -6w & =6 \\ & -y & +z & -w & =1 \end{array} \xrightarrow{-3\rho_1+\rho_3} \begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & -w & =1 \\ & y & -z & +w & =-1 \\ & -3y & +3z & -3w & =3 \\ & -y & +z & -w & =1 \end{array}$$

$$\xrightarrow[\rho_2+\rho_4]{3\rho_2+\rho_3} \begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & -w & =1 \\ & y & -z & +w & =-1 \\ & & & 0 & =0 \\ & & & 0 & =0 \end{array}$$

Definicija. Promenljiva koja se ne pojavljuje kao vodeća u sistemu u stepenastoj formi je *slobodna* promenljiva.

U gornjem primeru, u poslednjem sistemu, z i w su slobodne promenljive. Opšte rešenje ovog sistema dobijamo metodom supstitucije unazad. Promenljive z i w mogu imati proizvoljne vrednosti. Dobijamo da je $y = -1 + z - w$ a onda je $x = 1 - (-1 + z - w) - z + w = 2 - 2z + 2w$. Znači opšte rešenje je:

$$S = \{ \begin{pmatrix} 2-2z+2w \\ -1+z-w \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbf{R} \} = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbf{R} \}$$

i ova poslednja forma je ona u kojoj ćemo ga predstavljati.

Definicija. Za dati sistem (dole levo) kažemo da je sistem (dole desno) njemu *odgo-*

varajući homogen sistem.

$$
\begin{array}{llll}
a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & \dots & & \\
a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{llll}
a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = 0 \\
 & \dots & & \\
a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = 0
\end{array}
$$

TVRĐENJE 1.6. *Sistem linearnih jednačina kome je $\vec{p} \in \mathbf{R}^n$ jedno partikularno rešenje ima opšte rešenje oblika*

$$\{\vec{p} + \vec{h} \mid \vec{h} \text{ je rešenje odgovarajućeg homogenog sistema}\}.$$

DOKAZ. Prvo pokazujemo da je svako $\vec{s} \in \mathbf{R}^n$ koje je rešenje sistema moguće predstaviti u obliku $\vec{p} + \vec{h}$, gde je $\vec{h}$ neko rešenje odgovarajućeg homogenog sistema. Za to je dovoljno pokazati da je $\vec{s} - \vec{p}$ rešenje odgovarajućeg homogenog sistema.

Kad u i-toj jednačini odgovarajućeg homogenog sistema, koja glasi

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = 0,$$

zamenimo umesto svakog x_j razliku $s_j - p_j$ (j-tu komponentu vektora $\vec{s} - \vec{p}$) dobijamo tačnu jednakost, zato što je

$$\begin{aligned} a_{i1}(s_1 - p_1) + \ldots + a_{in}(s_n - p_n) &= a_{i1}s_1 + \ldots + a_{in}s_n - (a_{i1}p_1 + \ldots + a_{in}p_n) \\ &= b_i - b_i = 0. \end{aligned}$$

Pošto to možemo uraditi za svaku jednačinu, dobijamo da je $\vec{s} - \vec{p}$ rešenje odgovarajućeg homogenog sistema.

Kao drugo, pokazujemo da je svaki element od $\mathbf{R}^n$ oblika $\vec{p} + \vec{h}$, gde je $\vec{h}$ rešenje odgovarajućeg homogenog sistema, rešenje polaznog sistema. Kad u i-toj jednačini polaznog sistema, koja glasi

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i,$$

zamenimo umesto svakog x_j zbir $p_j + h_j$ (j-tu komponentu vektora $\vec{p} + \vec{h}$) dobijamo tačnu jednakost, zato što je

$$\begin{aligned} a_{i1}(p_1 + h_1) + \ldots + a_{in}(p_n + h_n) &= a_{i1}p_1 + \ldots + a_{in}p_n + a_{i1}h_1 + \ldots + a_{in}h_n \\ &= b_i + 0 = b_i. \end{aligned}$$

Pošto to možemo uraditi za svaku jednačinu, dobijamo da je $\vec{p} + \vec{h}$ rešenje polaznog sistema. $\dashv$

TVRĐENJE 1.7. *Za homogen sistem po n promenljivih važi:*

(1) $\vec{0} \in \mathbf{R}^n$ *je njegovo partikularno rešenje;*

(2) ako su $\vec{h}_1$ *i* $\vec{h}_2$ *njegova rešenja i* $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$*, onda je i* $c_1\vec{h}_1 + c_2\vec{h}_2$ *njegovo rešenje.*

DOKAZ. Direktno zamenom u proizvoljnoj jednačini homogenog sistema kao i u prethodnom dokazu. ⊣

POSLEDICA 1.8. *Svaki homogen sistem ima ili tačno jedno rešenje ili ih ima beskonačno mnogo.*

DOKAZ. Po tvrđenju 1.7 (1), homogen sistem ima bar jedno rešenje a to je $\vec{0}$. Ako je $\vec{h}$ rešenje različito od $\vec{0}$ onda je za svako $r \in \mathbf{R}$ i $r\vec{h}$ takođe rešenje tog sistema po tvrđenju 1.7 (2), pa sistem ima beskonačno mnogo rešenja. ⊣

POSLEDICA 1.9. *Svaki sistem linearnih jednačina ili nema rešenja ili ima tačno jedno rešenje ili ih ima beskonačno mnogo.*

DOKAZ. Direktno iz posledice 1.8 i tvrđenja 1.6. ⊣

§1.5. Matrice i skraćeni zapis Gausove metode

DEFINICIJA. *Matrica* A tipa $m \times n$ nad $\mathbf{R}$ je pravougaona tabela koja se sastoji od m vrsta i n kolona tako da se u preseku i-te vrste i j-te kolone nalazi $a_{ij} \in \mathbf{R}$. Ako je $m = n$, onda je matrica *kvadratna*. Matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

je *matrica sistema*:

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m, \end{array}$$

dok je

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ & & \dots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

proširena matrica tog sistema.

Gausove operacije iz prethodnog primera matrično zapisujemo kao:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 6 & -6 & 6\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{-3\rho_1+\rho_3} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & 3 & -3 & 3\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\rho_2+\rho_4]{3\rho_2+\rho_3} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Definicija. *Vektor kolona* je matrica tipa $m \times 1$ i to je naš zapis za element od $\mathbf{R}^m$. *Vektor vrsta* je matrica tipa $1 \times n$. Svaka matrica je niz svojih vektor vrsta odnosno vektor kolona.

Skup svih matrica tipa $m \times n$ nad $\mathbf{R}$ označavamo sa $\mathcal{M}_{m\times n}$. Posebno, kada je $m = n$, onda $\mathcal{M}_{n\times n}$ skraćeno zapisujemo kao $\mathcal{M}_n$. Sabiranje u skupu $\mathcal{M}_{m\times n}$ definišemo po komponentama, to jest

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n}\\ & \dots & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ & \dots & \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

dok množenje matrice skalarom definišemo kao

$$r\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} ra_{11} & \dots & ra_{1n}\\ & \dots & \\ ra_{m1} & \dots & ra_{mn}\end{pmatrix}.$$

Treba primetiti da se ove definicije, za $n = 1$, slažu s odgovarajućim definicijama za $\mathbf{R}^m$ datim u sekciji 1.1. Neutral za ovako definisano sabiranje je *nula matrica* $0_{m\times n}$ čiji su svi članovi nule.

Gausove operacije s matricama definisane su kao i one sa sistemima u sekciji 1.3 s tim što je svugde reč ,,jednačina" zamenjena sa ,,vrsta". Jasno je kako se po analogiji sa definicijama vezanim za sisteme mogu definisati *pivot* u matrici i matrica u *stepenastoj formi*.

§2. Odeljak 2.

§2.1. Redukovana stepenasta forma

Primer. Posmatrajmo sistem linearnih jednačina:

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & -2z & =-2 \\ & y & +3z & =7 \\ x & & -z & =-1 \end{array}$$

i njegovo matrično svođenje na stepenastu formu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\rho_1+\rho_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\rho_2+\rho_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right).$$

Međutim, mi možemo i da nastavimo s Gausovim operacijama:

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}\rho_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[2\rho_3+\rho_1]{-3\rho_3+\rho_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-\rho_2+\rho_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Iz poslednje matrice vidimo da je jedinstveno rešenje polaznog sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Definicija. Sistem linearnih jednačina je u *redukovanoj* stepenastoj formi kada je on u stepenastoj formi i još je svaki pivot jednak 1 i on je jedini ne-nula skalar u svojoj koloni. Analogno za matrice.

Napomena 2.1. *Svaki sistem (matrica) u stepenastoj formi se može konačnom primenom Gausovih operacija ($r\rho_i$) i ($r\rho_i + \rho_j$) svesti na redukovanu stepenastu formu. Tom prilikom pivoti ostaju na mestima gde su i bili.*

Primer. Rešiti sistem

$$\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +6x_2 & +x_3 & +2x_4 & =5 \\ & 3x_2 & +x_3 & +4x_4 & =1 \\ & 3x_2 & +x_3 & +2x_4 & =5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{-\rho_2+\rho_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}\rho_2 \\ -\frac{1}{2}\rho_3}]{\frac{1}{2}\rho_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\rho_3+\rho_1]{-\frac{4}{3}\rho_3+\rho_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{9}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & | & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{-3\rho_2+\rho_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & | & -\frac{9}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & | & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2\end{pmatrix}.$$

Iz poslednje matrice odmah vidimo da je opšte rešenje sistema

$$S=\{\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}x_3\\ 3-\frac{1}{3}x_3\\ x_3\\ -2\end{pmatrix}\mid x_3\in\mathbf{R}\}=\{\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}\\ 3\\ 0\\ -2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{3}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\mid x_3\in\mathbf{R}\}.$$

Definicija. Za matricu A kažemo da se (*vrsta*)-*redukuje* na matricu B (u oznaci $A \rightsquigarrow B$) kada postoji konačan (možda i prazan) niz Gausovih operacija koje matricu A prevode u matricu B.

Tvrđenje 2.2. *Relacija $\rightsquigarrow$ je relacija ekvivalencije na skupu matrica.*

dokaz. (*refleksivnost*) prazan niz operacija;

(*simetričnost*) posledica tvrđenja 1.2;

(*tranzitivnost*) nadovežemo nizove Gausovih operacija. $\dashv$

Definicija. Za matrice A i B za koje važi $A \rightsquigarrow B$ kažemo da su *vrsta-ekvivalentne*.

Teorema 2.3. *Svaka matrica je vrsta-ekvivalentna jedinstvenoj matrici u redukovanoj stepenastoj formi.*

dokaz. Po napomenama 1.5 i 2.1, svaka matrica je vrsta-ekvivalentna nekoj u redukovanoj stepenastoj formi. Da je ta forma jedinstvena pokazujemo indukcijom po broju n kolona u polaznoj matrici.

(**baza indukcije**) Ako je $n = 1$ i A je nula matrica onda je ona u redukovanoj stepenastoj formi i svaka matrica vrsta-ekvivalentna sa A je takođe nula matrica. Ako A nije nula matrica, onda se ona ne može redukovati na nula matricu pa se mora svesti na jedinu ne-nula matricu tipa $m \times 1$ koja je u redukovanoj stepenastoj formi a to je matrica $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$.

(**induktivni korak**) Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve matrice sa $n-1$ kolona. Neka je A matrica tipa $m \times n$ i neka su B i C dve različite matrice u redukovanoj stepenastoj formi koje su vrsta-ekvivalentne sa A. Neka je A' matrica koja se dobija od matrice A odbacivanjem poslednje kolone. Primetimo da svaki niz Gausovih operacija koji prevodi A u B takođe prevodi i A' u B' koja je nastala od B odbacivanjem poslednje kolone i koja je u redukovanoj stepenastoj formi. Isto važi i za A' i C', koja nastaje odbacivanjem poslednje kolone iz C. Po induktivnoj hipotezi imamo da je $B' = C'$. Znači B i C se razlikuju u poslednjoj koloni. Neka je $b_{in} \neq c_{in}$. Posmatrajmo sledeće homogene sisteme čije su matrice redom A, B i C:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 \ +\ldots+a_{1n}x_n \ = 0 \\ \qquad\quad \ldots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b_{11}x_1 \ +\ldots+b_{1n}x_n \ = 0 \\ \qquad\quad \ldots \\ b_{m1}x_1+\ldots+b_{mn}x_n = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} c_{11}x_1 \ +\ldots+c_{1n}x_n \ = 0 \\ \qquad\quad \ldots \\ c_{m1}x_1+\ldots+c_{mn}x_n = 0 \end{array}.$$

Po teoremi 1.4, imamo da svi ovi sistemi imaju iste skupove rešenja. Neka je $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ proizvoljno partikularno rešenje. Pokazaćemo da s_n mora biti 0. Ograničavajući se na i-te jednačine u drugom i trećem sistemu imamo:

$$b_{i1}s_1 + \ldots + b_{in}s_n - (c_{i1}s_1 + \ldots + c_{in}s_n) = 0.$$

Odavde, pošto je $b_{i1} = c_{i1}, \ldots, b_{i(n-1)} = c_{i(n-1)}$ imamo da je $(b_{in} - c_{in})s_n = 0$, odakle sledi, pošto je $b_{in} - c_{in} \neq 0$, da je $s_n = 0$.

Znači u svakom partikularnom rešenju je $s_n = 0$ pa x_n mora biti i u drugom i u trećem sistemu vodeća promenljiva. Pošto su B i C u redukovanoj stepenastoj formi i pošto im se prvih $n-1$ kolona poklapaju, to pivoti u poslednjoj koloni moraju biti jedinice na istom mestu. Znači $B = C$. $\dashv$

§2.2. Vektorski prostori

Definicija. V je *vektorski prostor* nad poljem $\mathbf{R}$ kada je $\vec{0} \in V$ i za svako $\vec{u}, \vec{v} \in V$ i $r \in \mathbf{R}$ važi da je $-\vec{u} \in V$, $\vec{u}+\vec{v} \in V$ i $r\vec{u} \in V$ i pritom je zadovoljeno:

(1) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$,

(2) $\vec{u}+\vec{0} = \vec{u} = \vec{0}+\vec{u}$,

(3) $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0} = (-\vec{u})+\vec{u}$,

(4) $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$,

to jest $(V, +, \vec{0})$ je komutativna grupa i

(5) $r(\vec{u}+\vec{v}) = r\vec{u}+r\vec{v}$

(6) $(r+s)\vec{u} = r\vec{u}+s\vec{u}$

(7) $(rs)\vec{u} = r(s\vec{u})$

(8) $1\vec{u} = \vec{u}$.

Pošto ćemo govoriti samo o vektorskim prostorima nad poljem $\mathbf{R}$, zvaćemo ih skraćeno samo *vektorski prostori*.

Primer. Po tvrđenju 1.1, uz $-\vec{u} =_{df} (-1)\vec{u}$, imamo da je $\mathbf{R}^n$ vektorski prostor. Analogno je $\mathcal{M}_{m\times n}$ vektorski prostor u odnosu na operacije definisane u 1.5.

Primer. Prostor geometrijskih vektora (videti početak sekcije 12.1) je vektorski prostor u odnosu na geometrijski zadano sabiranje vektora i množenje vektora skalarima.

Primer 3. $P = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ je vektorski prostor u odnosu na operacije preuzete iz $\mathbf{R}^3$. Ovo će biti posledica tvrđenja 3.1, a zasad bi trebalo proveriti da P sadrži $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \Rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \in P$, da je P zatvoren za sabiranje i množenje skalarima kao i da su zadovoljena svojstva (1)-(8).

Primer. $\{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbf{Z}\}$ nije vektorski prostor zato što nije zatvoren za množenje skalarima.

Primer. $\{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}$ jeste vektorski prostor. To je *trivijalan* vektorski prostor.

Primer. Skup $\mathbf{R}[x]$ svih polinoma po promenljivoj x, s realnim koeficijentima u odnosu na standardno sabiranje polinoma i množenje polinoma realnim brojevima jeste vektorski prostor. Analogno, $\mathcal{P}_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}\}$, to jest skup polinoma po promenljivoj x, s realnim koeficijentima stepena ne većeg od 3 jeste vektorski prostor. Naslućuje se veza između $\mathcal{P}_3$ i $\mathbf{R}^4$ po kojoj bi na primer polinomu $1 + 2x^2 - x^3$ odgovarao vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$. Ovo je i razlog zbog čega $\mathcal{P}_3$ označavamo još i sa $\mathbf{R}^4[x]$.

Primer 7. Neka je X proizvoljan skup i V vektorski prostor. Tada $V^X = \{f \mid f : X \to V\}$, u odnosu na sabiranje definisano sa $(f_1 + f_2)(x) =_{df} f_1(x) + f_2(x)$ i množenje skalarima definisano sa $(rf)(x) =_{df} r(f(x))$, jeste vektorski prostor.

Posebno, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} = \{f \mid f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}\}$ jeste vektorski prostor. Njegov element $f(n) = n^2 + 1$ odgovara beskonačnoj koloni

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 10 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Tvrđenje 2.4. *U svakom vektorskom prostoru važi:*

$$(1)\ 0\vec{v} = \vec{0} \qquad (2)\ (-1)\vec{v} + \vec{v} = \vec{0} \qquad (3)\ r\vec{0} = \vec{0}.$$

dokaz. (1) $0\vec{v} = (0+0)\vec{v} \overset{5}{=} 0\vec{v} + 0\vec{v}$, a odavde dodavanjem $-0\vec{v}$ obema stranama, uz pomoć svojstava 1, 2 i 3 vektorskih prostora zaključujemo da je $\vec{0} = 0\vec{v}$.

(2) $(-1)\vec{v} + \vec{v} \overset{8}{=} (-1)\vec{v} + 1\vec{v} \overset{5}{=} (-1+1)\vec{v} = 0\vec{v} = \vec{0}$.

(3) $r\vec{0} = r(\vec{0} + \vec{0}) = r\vec{0} + r\vec{0}$, a odavde dodavanjem $-r\vec{0}$ obema stranama kao u (1) zaključujemo $\vec{0} = r\vec{0}$. ⊣

Iz dela (2) ovog tvrđenja sledi da je $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$, pa nije neophodno proveravati da je $-\vec{v} \in V$ za svako $\vec{v} \in V$ ako je već provereno da je $r\vec{v} \in V$ za svako $\vec{v} \in V$ i $r \in \mathbf{R}$.

Definicija. Izraz oblika $c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n$ za $n \geq 1$, gde su $c_1, \ldots, c_n$ skalari a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektori, se zove *linearna kombinacija* vektora $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ (videti odeljak 1.2).

Napomena 2.5. *Za m linearnih kombinacija vektora $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ imamo da je njihova linearna kombinacija*

$$d_1(c_{11}\vec{v}_1 + \ldots + c_{1n}\vec{v}_n) + \ldots + d_m(c_{m1}\vec{v}_1 + \ldots + c_{mn}\vec{v}_n)$$

jednaka linearnoj kombinaciji vektora $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$:

$$(d_1c_{11} + \ldots + d_mc_{m1})\vec{v}_1 + \ldots + (d_1c_{1n} + \ldots + d_mc_{mn})\vec{v}_n.$$

Tvrđenje 2.6. *Ako su matrice A i B vrsta-ekvivalentne, onda je svaka vrsta matrice B linearna kombinacija vrsta matrice A.*

dokaz. Neka je $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$ niz matrica iz $\mathcal{M}_{m\times k}$ takvih da je svaka sledeća dobijena od prethodne primenom jedne Gausove operacije. Dokaz izvodimo indukcijom po $n \geq 0$.

(**baza indukcije**) Ako je $n = 0$, onda je $A = B$ i tvrđenje važi.

(**induktivni korak**) Neka je $n > 0$ i pretpostavimo da tvrđenje važi za $n-1$, to jest

$$\begin{array}{llll} \mathbf{w}_1 = & c_{11}\mathbf{v}_1 + & \dots & + c_{1m}\mathbf{v}_m \\ \vdots & & \dots & \\ \mathbf{w}_m = & c_{m1}\mathbf{v}_1 + & \dots & + c_{mm}\mathbf{v}_m, \end{array}$$

gde su $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$, $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$, redom vrste matrica A odnosno A_{n-1}.

Neka su $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ vrste matrice B. Pošto je B dobijena od A_{n-1} primenom jedne Gausove operacije, za vrstu $\mathbf{u}_j$ matrice B mogući su sledeći slučajevi:

(1) $\mathbf{u}_j = \mathbf{w}_j = c_{j1}\mathbf{v}_1 + \dots + c_{jm}\mathbf{v}_m$,

(2) $\mathbf{u}_j = \mathbf{w}_i = c_{i1}\mathbf{v}_1 + \dots + c_{im}\mathbf{v}_m$,

(3) $\mathbf{u}_j = d\mathbf{w}_j = dc_{j1}\mathbf{v}_1 + \dots + dc_{jm}\mathbf{v}_m$,

(4) $\mathbf{u}_j = d\mathbf{w}_i + \mathbf{w}_j = (dc_{i1} + c_{j1})\mathbf{v}_1 + \dots + (dc_{im} + c_{jm})\mathbf{v}_m$.

Dakle, proizvoljna vrsta matrice B je linearna kombinacija vrsta matrice A. $\dashv$

§3. Odeljak 3.

§3.1. Potprostori i linearni omotači

Definicija. Neka je V vektorski prostor. Kažemo da je $U \subseteq V$ *potprostor* od V (oznaka je $U \leq V$) kada je U vektorski prostor u odnosu na nasleđene operacije iz V. To znači da je $\vec{0} \in U$, i U je zatvoren za nasleđeno sabiranje i množenje skalarima (samim tim, na osnovu tvrđenja 2.4 (2) i za inverze u odnosu na sabiranje). Svojstva 1-8 iz definicije vektorskog prostora važe za U pošto su nasleđena iz V.

Tvrđenje 3.1. *Za neprazan podskup U vektorskog prostora V sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) U je potprostor od V;

(2) U je zatvoren za linearne kombinacije parova vektora iz U, to jest za $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ i $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ važi da je $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 \in U$;

(3) U je zatvoren za linearne kombinacije proizvoljnog konačnog skupa vektora iz U, to jest za $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in U$ i $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ važi da je $c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_n\vec{u}_n \in U$.

dokaz. U krugu (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3), samo je implikacija (2) $\Rightarrow$ (1) netrivijalna. Pretpostavka da je U neprazan znači da postoji $\vec{u} \in U$. Iz (2) dobijamo da je $0\vec{u} + 0\vec{u} \in U$, pa je po tvrđenju 2.4 (1) i $\vec{0} \in U$. Ako su $\vec{u}, \vec{v} \in U$, i $r \in \mathbf{R}$, onda su i $1\vec{u} + 1\vec{v}, r\vec{u} + 0\vec{u} \in U$, što znači da je U zatvoren za sabiranje i množenje skalarima. $\dashv$

Primer 1. Skup rešenja homogenog sistema sa n promenljivih je potprostor od $\mathbf{R}^n$. Ovo sledi iz tvrđenja 1.7 i 3.1 (videti treći primer u sekciji 2.2).

Primer. Skup rešenja sistema linearnih jednačina sa n promenljivih ne mora biti potprostor od $\mathbf{R}^n$.

Primer. Prostor $\mathcal{P}_1$ (polinomi po x stepena ne većeg od 1) je potprostor od $\mathcal{P}_3$.

Primer. $\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{R}\}$ je potprostor od $\mathbf{R}^2$.

Primer. $\{\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbf{Z}\}$ nije potprostor od $\mathbf{R}^2$.

Definicija. *Linearni omotač* (*lineal*) nepraznog skupa vektora S nekog vektorskog prostora, u oznaci $[S]$ ili $\mathcal{L}(S)$ ili *span*(S), je skup

$$\{c_1\vec{s}_1 + \ldots + c_n\vec{s}_n \mid n \in \mathbf{N}^+, c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}, \vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n \in S\}.$$

Linearni omotač praznog skupa vektora nekog vektorskog prostora je trivijalan potprostor tog vektorskog prostora.

TVRĐENJE 3.2. *Linearni omotač proizvoljnog skupa vektora nekog vektorskog prostora je potprostor tog vektorskog prostora.*

DOKAZ. Neka je V vektorski prostor i neka je $S \subseteq V$. Ako je $S = \emptyset$ onda je po definiciji $[S]$ trivijalan potprostor od V.

Ako je S neprazan, onda koristimo tvrđenje 3.1. Neka su $\vec{u}, \vec{v} \in [S]$. Po definiciji linearnog omotača, $\vec{u} = a_1\vec{s}_1 + \ldots + a_k\vec{s}_k$ i $\vec{v} = b_1\vec{t}_1 + \ldots + b_l\vec{t}_l$ za $\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_k, \vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_l \in S$. Tada je

$$c\vec{u} + d\vec{v} = ca_1\vec{s}_1 + \ldots + ca_k\vec{s}_k + db_1\vec{t}_1 + \ldots + db_l\vec{t}_l \in [S]. \qquad \dashv$$

NAPOMENA 3.3. *Linearni omotač od $S \subseteq V$ je najmanji potprostor od V koji sadrži S.*

PRIMER. Lineal od $\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\} \subseteq \mathbf{R}^2$ je $\mathbf{R}^2$. To je zato što se za proizvoljno $x, y \in \mathbf{R}$, vektor $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ može dobiti kao linearna kombinacija

$$\frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

PRIMER. Neka je $W = [\{3x - x^2, 2x\}] \subseteq \mathcal{P}_2$. Lako je proveriti da je $W \subseteq \{a_1x + a_2x^2 \mid a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$. Da važi i obrnuta inkluzija sledi iz toga što se za svako $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$, polinom $a_1x + a_2x^2$ može dobiti kao linearna kombinacija

$$-a_2(3x - x^2) + \frac{a_1 + 3a_2}{2}(2x).$$

TVRĐENJE 3.4. *Za $S, T \subseteq V$ važi*

(1) $S \subseteq [S]$;

(2) $S \subseteq T \Rightarrow [S] \subseteq [T]$;

(3) $[[S]] = [S]$.

DOKAZ. (1) Ako je $\vec{v} \in S$, onda zbog $\vec{v} = 1\vec{v}$ sledi da je $\vec{v} \in [S]$.

(2) Ako je $\vec{v} \in [S]$, onda je po definiciji $\vec{v} = c_1\vec{s}_1 + \ldots + c_n\vec{s}_n$ za $\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n \in S$. Pošto je $S \subseteq T$, to je $\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n \in T$, pa je po definiciji $\vec{v} \in [T]$.

(3) Po (1) je $S \subseteq [S]$, pa je po (2) $[S] \subseteq [[S]]$. Za obrnutu inkluziju, pretpostavimo da je $\vec{v} \in [[S]]$. Po definiciji imamo da je $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_n\vec{u}_n$ za $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in [S]$. Pošto je po tvrđenju 3.2, $[S]$ potprostor od V, to je po tvrđenju 3.1 i $\vec{v} \in [S]$. $\dashv$

§3.2. Linearna nezavisnost

Definicija. Skup vektora S nekog vektorskog prostora je *linearno zavisan* kada postoji $\vec{v} \in S$ takav da je $\vec{v} \in [S - \{\vec{v}\}]$. U suprotnom je *linearno nezavisan.*

Napomena 3.5. *Prazan skup vektora je trivijalno linearno nezavisan, dok je* $\{\vec{0}\}$ *linearno zavisan pošto je* $\vec{0} \in [\emptyset] = [\{\vec{0}\} - \{\vec{0}\}]$.

Tvrđenje 3.6. *Skup vektora* S *nekog vektorskog prostora je linearno nezavisan akko za svaki konačan podskup* $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subseteq S$ *važi:*

$$c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow c_1 = \ldots = c_n = 0.$$

dokaz. Oba smera ovog tvrđenja ćemo dokazati *kontrapozicijom.* Koristeći tautologiju $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$, umesto da dokazujemo „ako A, onda B", dokazaćemo „ako nije B, onda nije A".

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da za neki skup $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subseteq S$ važi $c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$ i $c_n \neq 0$ (analogno postupamo ako je bilo koje drugo $c_i \neq 0$). Tada, ako je $n = 1$ dobijamo da je $\vec{v}_n = \vec{0}$, a ako je $n > 1$, onda važi

$$\vec{v}_n = -\frac{c_1}{c_n}\vec{v}_1 - \ldots - \frac{c_{n-1}}{c_n}\vec{v}_{n-1}.$$

U oba slučaja sledi da je $\vec{v}_n \in [S - \{\vec{v}_n\}]$, što znači da je S linearno zavisan.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da za neko $\vec{v} \in S$ i neke $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in S - \{\vec{v}\}$ važi $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_n\vec{u}_n$. Odavde zaključujemo da je

$$c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_n\vec{u}_n + (-1)\vec{v} = \vec{0},$$

pri čemu je skalar uz $\vec{v}$ jednak -1 što je različito od 0. $\dashv$

Primer. Skup $\{\begin{pmatrix}40\\45\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-50\\25\end{pmatrix}\} \subseteq \mathbf{R}^2$ je linearno nezavisan zato što

$$c_1\begin{pmatrix}40\\45\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-50\\25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix}40c_1 - 50c_2 = 0\\45c_1 + 25c_2 = 0\end{matrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0.$$

Primer. Skup $\{1 + x, 1 - x\} \subseteq \mathcal{P}_2$ je linearno nezavisan zato što

$$c_1(1 + x) + c_2(1 - x) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + (c_1 - c_2)x = 0 \Rightarrow \begin{matrix}c_1 + c_2 = 0\\c_1 - c_2 = 0\end{matrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

PRIMER. Skup $\{\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\9\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\18\\4\end{pmatrix}\} \subseteq \mathbf{R}^3$ je linearno zavisan zato što je

$$\begin{pmatrix}4\\18\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\9\\2\end{pmatrix}, \text{ tj. } 0\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\9\\2\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}4\\18\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

PRIMER. Svaki podskup od V koji sadrži $\vec{0}$ je linearno zavisan zato što je $\vec{0} \in [S - \{\vec{0}\}]$ za svako $S \subseteq V$.

TVRĐENJE 3.7. *Skup ne-nula vrsta matrice u stepenastoj formi je linearno nezavisan.*

DOKAZ. Neka je A matrica u stepenastoj formi i neka je k broj njenih ne-nula vrsta. Dokaz izvodimo indukcijom po $k \geq 0$.

(**baza indukcije**) Ako je $k = 0$, onda je skup ne-nula vrsta matrice A prazan pa je on po napomeni 3.5 linearno nezavisan.

(**induktivni korak**) Neka su $\rho_1, \ldots, \rho_k$ ne-nula vrste matrice A. Neka je l broj kolone u kojoj se nalazi pivot prve vrste. Na primer, ako je $A = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 0\\0 & -1 & 0 & -2\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, onda je $l = 1$. Pretpostavimo da je

$$c_1\rho_1 + \ldots + c_k\rho_k = (0 \ldots 0).$$

Ograničimo ovu jednakost na l-tu kolonu i dobijamo

$$c_1 a_{1l} + \ldots + c_k a_{kl} = 0$$

(u našem primeru dobijamo $c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 = 0$). Pošto je matrica u stepenastoj formi imamo da je $a_{2l} = \ldots = a_{kl} = 0$, pa dobijamo $c_1 = 0$. Ako je $k = 1$ ovime je tvrđenje dokazano.

Ako je $k > 1$, onda iz matrice A izbacimo prvu vrstu i ostaje nam matrica A' u stepenastoj formi sa $k-1$ ne-nula vrsta. U našem primeru je $A' = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & -2\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Uz $c_1 = 0$ imamo da

$$c_1\rho_1 + \ldots + c_k\rho_k = (0 \ldots 0) \quad \Rightarrow \quad c_2\rho_2 + \ldots + c_k\rho_k = (0 \ldots 0),$$

pa pomoću induktivne hipoteze zaključujemo da je $c_2 = \ldots = c_k = 0$. ⊣

LEMA 3.8. *Za $\vec{v} \in V$ i $S \subseteq V$ važi:*

(1) $[S] = [S \cup \{\vec{v}\}]$ akko $\vec{v} \in [S]$;

(2) ako je S linearno nezavisan i $\vec{v} \notin S$, onda je

$$S \cup \{\vec{v}\} \text{ linearno nezavisan akko } \vec{v} \notin [S].$$

DOKAZ. (1) ($\Rightarrow$) $\vec{v} \in [S \cup \{\vec{v}\}] = [S]$.

(1) ($\Leftarrow$) Iz $S \subseteq [S]$ (3.4 (1)) i $\{\vec{v}\} \subseteq [S]$ ($\vec{v} \in [S]$) zaključujemo $S \cup \{\vec{v}\} \subseteq [S]$. Po 3.4 (2) i (3) onda važi $[S \cup \{\vec{v}\}] \subseteq [[S]] = [S]$. Obrnutu inkluziju zaključujemo iz $S \subseteq S \cup \{\vec{v}\}$ pomoću 3.4 (2).

(2) ($\Rightarrow$) Iz toga što je $S \cup \{\vec{v}\}$ linearno nezavisan sledi da

$$\vec{v} \notin [(S \cup \{\vec{v}\}) - \{\vec{v}\}] = [S].$$

(2) ($\Leftarrow$) Neka je za $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subseteq S \cup \{\vec{v}\}$, $c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$. Ako je $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subseteq S$, onda zbog linearne nezavisnosti skupa S važi $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Ako je $\vec{v}_1 = \vec{v}$ (analogno postupamo kada je $\vec{v}_i = \vec{v}$), onda je $c_1 = 0$ zbog pretpostavke $\vec{v} \notin [S]$ pa je i $c_2 = \ldots = c_n = 0$ zbog linearne nezavisnosti skupa S. Znači u svakom slučaju je $c_1 = \ldots = c_n = 0$ pa je $S \cup \{\vec{v}\}$ linearno nezavisan po tvrđenju 3.6. ⊣

TVRĐENJE 3.9. *Za svaki konačan $S \subseteq V$ postoji $T \subseteq S$ takav da je T linearno nezavisan i $[T] = [S]$.*

DOKAZ. Indukcijom po broju $k \geq 0$ elemenata od S.

(**baza indukcije**) Ako je $k = 0$, onda je S prazan i po napomeni 3.5 je linearno nezavisan.

(**induktivni korak**) Neka je $k \geq 1$. Ako je S linearno nezavisan, onda za T uzmimo baš skup S. Ako je S linearno zavisan onda za neko $\vec{v} \in S$ važi $\vec{v} \in [S - \{\vec{v}\}]$. Po lemi 3.8 (1) dobijamo $[S - \{\vec{v}\}] = [(S - \{\vec{v}\}) \cup \{\vec{v}\}] = [S]$. Pošto $S - \{\vec{v}\}$ ima $k - 1$ element, na njega možemo primeniti induktivnu hipotezu i zaključiti da postoji $T \subseteq S - \{\vec{v}\} \subseteq S$ takav da je T linearno nezavisan i $[T] = [S - \{\vec{v}\}] = [S]$. ⊣

TVRĐENJE 3.10. *Skup $S = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} \subseteq V$ je linearno zavisan akko je $u_1 = \vec{0}$ ili je za neko $2 \leq i \leq n$, $\vec{u}_i \in [\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}\}]$.*

DOKAZ. ($\Rightarrow$) Indukcijom po $n \geq 1$.

(**baza indukcije**) Ako je $n = 1$, onda je $\vec{u}_1 \in [\{\vec{u}_1\} - \{\vec{u}_1\}] = [\emptyset] = \{\vec{0}\}$, pa je $\vec{u}_1 = \vec{0}$.

(**induktivni korak**) Ako je $n > 1$ i ako je $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}\}$ linearno nezavisan, onda je po lemi 3.8 (2) $\vec{u}_n \in [\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}\}]$. Ako je $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}\}$ linearno zavisan, onda po induktivnoj hipotezi važi da je $\vec{u}_1 = \vec{0}$ ili je za neko $2 \leq i \leq n-1$, $\vec{u}_i \in [\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}\}]$.

($\Leftarrow$) Trivijalno. ⊣

TVRĐENJE 3.11. *Svaki podskup linearno nezavisnog skupa je linearno nezavisan. Svaki nadskup linearno zavisnog skupa je linearno zavisan.*

DOKAZ. Dovoljno je pokazati drugo tvrđenje jer iz njega prvo sledi kontrapozicijom. Pretpostavimo da je S linearno zavisan i da je $S \subseteq T \subseteq V$. Po definiciji linearne zavisnosti postoji $\vec{v} \in S$ takav da je $\vec{v} \in [S - \{\vec{v}\}]$. Pošto je $\vec{v} \in S$ i $S \subseteq T$, to je $\vec{v} \in T$.

Po tvrđenju 3.4 (2) imamo $[S - \{\vec{v}\}] \subseteq [T - \{\vec{v}\}]$, pa je $\vec{v} \in [T - \{\vec{v}\}]$. Dakle, T je linearno zavisan. $\dashv$

U dokazu sledećeg tvrđenja koristimo Cornovu lemu koja je u ZF teoriji skupova ekvivalentna aksiomi izbora (videti lemu 17.4).

Tvrđenje 3.12. *Za svaki linearno nezavisan $X \subseteq V$ postoji linearno nezavisan skup M takav da je $X \subseteq M$ i $[M] = V$.*

dokaz. Neka je $\mathcal{A}$ skup svih linearno nezavisnih nadskupova od X. On je neprazan jer je $X \in \mathcal{A}$ i parcijalno je uređen inkluzijom $\subseteq$. Neka je $\mathcal{B}$ lanac u $\mathcal{A}$. Važi da je $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$ zato što je $X \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ i $\bigcup \mathcal{B}$ je linearno nezavisan jer se svaki njegov konačan podskup nalazi u nekom elementu iz $\mathcal{B}$—linearna zavisnost skupa $\bigcup \mathcal{B}$ bi značila linearnu zavisnost nekog elementa od $\mathcal{B}$. Za svako $B \in \mathcal{B}$ važi $B \subseteq \bigcup \mathcal{B}$, pa je $\bigcup \mathcal{B}$ gornja granica lanca $\mathcal{B}$.

Po Cornovoj lemi, $\mathcal{A}$ sadrži maksimalan element M. Iz $M \in \mathcal{A}$ sledi da je M linearno nezavisan i da je $X \subseteq M$. Još treba pokazati da je $[M] = V$. Pretpostavimo da je $\vec{u} \in V - [M]$. Po lemi 3.8 (2) skup $M \cup \{\vec{u}\}$ je linearno nezavisan što je suprotno tome da je M maksimalan linearno nezavisan nadskup od X. $\dashv$

§4. Odeljak 4.

§4.1. Baza vektorskog prostora

U daljem tekstu sa $|X|$ označavamo broj elemenata konačnog skupa X. Za niz vektora $\mathcal{B} = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \rangle$ nekog vektorskog prostora, sa $\underline{\mathcal{B}}$ označavamo skup članova tog niza. Ukoliko je $\mathcal{B}$ konačan niz, onda je broj članova tog niza njegova *dužina*.

Definicija. Skup $S \subseteq V$ je *neuređena baza* za V kada je S linearno nezavisan i $[S] = V$. U slučaju kada je S konačan, njegovo proizvoljno uređenje u niz je *uređena baza* ili samo *baza* za V.

Posledica tvrđenja 3.12. *Svaki vektorski prostor ima neuređenu bazu.*

dokaz. Neka je $X = \emptyset$ polazni linearno nezavisan skup u tvrđenju 3.12. $\dashv$

Primer. $\mathcal{E}_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ je baza za $\mathbf{R}^2$. To važi zato što je $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ linearno nezavisan ($c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$) i $[\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}] = \mathbf{R}^2$ (za svako $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ je $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$).

Primer. Na isti način se može pokazati da je $\mathcal{B} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ takođe baza za $\mathbf{R}^2$.

Definicija. $\mathcal{E}_n = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ je *standardna* (*kanonska*) baza za $\mathbf{R}^n$. Vektore u njoj označavamo redom sa $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Primer 3. Neka je $V = \{u \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid u(\theta) = a\cos\theta + b\sin\theta,\ a, b \in \mathbf{R}\}$ potprostor od $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (videti sedmi primer iz sekcije 2.2). Pokažimo da je $\mathcal{B} = \langle u_1, u_2 \rangle$, gde je $u_1(\theta) = \cos\theta$, a $u_2(\theta) = \sin\theta$ baza za V. Iz $c_1u_1 + c_2u_2 = 0$ (ovo sa desne strane jednakosti je konstantna funkcija koja svako $\theta \in \mathbf{R}$ slika u 0), kad levu i desnu stranu primenimo na $\theta = 0$ dobijamo da je $c_1 = 0$, a kad levu i desnu stranu primenimo na $\theta = \frac{\pi}{2}$ dobijamo da je $c_2 = 0$, pa je $\{u_1, u_2\}$ linearno nezavisan. Po definiciji prostora V jasno je da je $[\{u_1, u_2\}] = V$, pa je $\langle u_1, u_2 \rangle$ baza za V.

Primer. Vektorski prostor $\mathcal{P}_3$ ima između ostalih i sledeće baze: $\mathcal{B}_1 = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$, $\mathcal{B}_2 = \langle x^3, x^2, x, 1 \rangle$, $\mathcal{B}_3 = \langle 1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3 \rangle$.

Primer. Trivijalan prostor $\{\vec{0}\}$ ima samo jednu bazu i to je prazan niz vektora.

Primer 6. Prostor $\mathbf{R}[x]$ svih polinoma po promenljivoj x, s realnim koeficijentima ima beskonačnu neuređenu bazu $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ i lako je pokazati da nema konačnu bazu jer bi u njoj postojao polinom najvećeg stepena pa se nijedan polinom stepena većeg od tog ne bi mogao dobiti kao linearna kombinacija polinoma iz baze.

Primer. Sistem $\begin{array}{ccccc} x & +y & & -w & =0 \\ & & z & +w & =0 \end{array}$ ima opšte rešenje oblika

$$\{y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, w \in \mathbf{R}\}$$

i to je potprostor od $\mathbf{R}^4$ čija je baza $\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Lema 4.0. *Za konačan niz vektora $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ važi da su svi vektori u tom nizu međusobno različiti i da je $\underline{\mathcal{B}}$ linearno nezavisan akko za svako $\vec{c} \in \mathbf{R}^n$:*

$$c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \ldots = c_n = 0.$$

dokaz. ($\Rightarrow$) Direktno iz tvrđenja 3.6.

($\Leftarrow$) Ako bi bilo $\vec{\beta}_i = \vec{\beta}_j$ za $i \neq j$, onda bismo imali $c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n = \vec{0}$ za $c_i = 1$ i $c_j = -1$, što je suprotno pretpostavci. Ostalo sledi iz tvrđenja 3.6. $\dashv$

Teorema 4.1. *Konačan niz $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ je baza vektorskog prostora V akko za svako $\vec{v} \in V$ postoji jedinstveno $\vec{c} \in \mathbf{R}^n$ tako da je $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$.*

dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $\vec{v} \in V$. Pošto je $[\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n\}] = V$ to postoji $\vec{c} \in \mathbf{R}^n$ takav da je $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$. Ako bi postojao još jedan vektor $\vec{d} \in \mathbf{R}^n$ takav da je $\vec{v} = d_1\vec{\beta}_1 + \ldots + d_n\vec{\beta}_n$, onda bi važilo

$$(c_1 - d_1)\vec{\beta}_1 + \ldots + (c_n - d_n)\vec{\beta}_n = \vec{0},$$

pa je $c_1 = d_1, \ldots, c_n = d_n$, zbog linearne nezavisnosti skupa $\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n\}$, to jest $\vec{c} = \vec{d}$.

($\Leftarrow$) Očigledno je $[\underline{\mathcal{B}}] = V$. Pretpostavimo da je $c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n = \vec{0}$. S obzirom da je $0\vec{\beta}_1 + \ldots + 0\vec{\beta}_n = \vec{0}$, uz pretpostavku o jedinstvenosti imamo $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Dakle, po lemi 4.0 sledi da su $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n$ međusobno različiti i da je $\underline{\mathcal{B}}$ linearno nezavisan. $\dashv$

Definicija. Neka je $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ baza vektorskog prostora V. Neka je $\vec{v} \in V$ i $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$ (po teoremi 4.1, takav $\vec{c} \in \mathbf{R}^n$ je jedinstven). Kažemo da je

$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ *reprezentacija* vektora $\vec{v}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ i pišemo

$$Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Primer. Neka je $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$, tj. $Rep_{\mathcal{E}_2}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_2}$. Neka je $\mathcal{B} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ baza za $\mathbf{R}^2$ (ovo se lako proverava). Da bismo odredili $Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v})$ dovoljno je odrediti skalare c_1 i c_2 takve da je

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Rešavajući odgovarajući sistem jednačina dobijamo $c_1 = 3$ i $c_2 = -\frac{1}{2}$, pa je $Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Primer. Neka su $\mathcal{B}_1 = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ i $\mathcal{B}_2 = \langle 1+x, 1-x, x+x^2, x+x^3 \rangle$ dve baze za $\mathcal{P}_3$ (u slučaju $\mathcal{B}_2$ ovo treba proveriti). Neka je $\vec{v} = x + x^2 \in \mathcal{P}_3$. Tada je

$$Rep_{\mathcal{B}_1}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}, \quad Rep_{\mathcal{B}_2}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$

§4.2. Dimenzija vektorskog prostora

Definicija. Vektorski prostor je *konačnodimenzionalan* kada ima konačnu neuređenu bazu.

Primer. Prostor $\mathbf{R}^n$ je konačnodimenzionalan jer ima bazu $\mathcal{E}_n$ dužine n.

Primer. Prostor svih polinoma s realnim koeficijentima nije konačnodimenzionalan (videti šesti primer u sekciji 4.1).

Napomena. *Nadalje posmatramo samo konačnodimenzionalne prostore.*

Mala lema o zameni. *Neka je $[T \cup S] = V$ i neka je $\vec{p} \in V$ takav da $\vec{p} \notin S$ i $S \cup \{\vec{p}\}$ je linearno nezavisan. Tada postoji $\vec{t} \in T$ takav da je*

$$[(T - \{\vec{t}\}) \cup \{\vec{p}\} \cup S] = V.$$

DOKAZ. Iz $\vec{p} \in [T \cup S]$, $\vec{p} \notin S$ i $S \cup \{\vec{p}\}$ je linearno nezavisan sledi da postoji skup vektora $\{\vec{t}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \subseteq T \cup S$, $k \geq 0$, takvih da je $\vec{t} \in T$, $\vec{p} = c\vec{t} + c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_k\vec{v}_k$ i $c \neq 0$. Znači $\vec{t} = \frac{1}{c}\,\vec{p} - \frac{c_1}{c}\,\vec{v}_1 - \ldots - \frac{c_k}{c}\,\vec{v}_k$, pa je $\vec{t} \in [(T - \{\vec{t}\}) \cup \{\vec{p}\} \cup S]$. Dalje,

$$\begin{aligned}[(T - \{\vec{t}\}) \cup \{\vec{p}\} \cup S] &= [(T - \{\vec{t}\}) \cup \{\vec{p}\} \cup S \cup \{\vec{t}\}], \text{ po lemi 3.8 (1)}\\ &= [T \cup \{\vec{p}\} \cup S]\\ &= [T \cup S], \text{ po lemi 3.8 (1)}.\end{aligned}$$

⊣

VELIKA LEMA O ZAMENI. *Ako su T, S i P podskupovi vektorskog prostora V takvi da je P konačan, $P \cap S = \emptyset$, $[T \cup S] = V$ i $S \cup P$ je linearno nezavisan, onda postoji $T' \subseteq T$ takav da je $|T'| = |P|$ i $[(T - T') \cup P \cup S] = V$.*

DOKAZ. Indukcijom po broju $n = |P| \geq 0$.

(**baza indukcije**) Neka je $n = 0$ što znači da je $P = \emptyset$. Tada za $T' = P = \emptyset$ važi $[(T - T') \cup P \cup S] = [T \cup S] = V$.

(**induktivni korak**) Neka je $n > 0$ i neka je $\vec{p} \in P$. Pošto $\vec{p} \notin S$ i $S \cup \{\vec{p}\}$ je linearno nezavisan, to je po Maloj lemi o zameni $V = [(T - \{\vec{t}\}) \cup \{\vec{p}\} \cup S]$ za neko $\vec{t} \in T$. Pošto je $|P - \{\vec{p}\}| = n - 1$, možemo primeniti induktivnu hipotezu na $T_1 = T - \{\vec{t}\}$, $P_1 = P - \{\vec{p}\}$ i $S_1 = \{\vec{p}\} \cup S$ i dobijamo da za neko $T_1' \subseteq T_1$, takvo da je $|T_1'| = |P_1| = n - 1$, važi

$$\begin{aligned}V &= [(T_1 - T_1') \cup P_1 \cup S_1] = [((T - \{\vec{t}\}) - T_1') \cup (P - \{\vec{p}\}) \cup (\{\vec{p}\} \cup S)]\\ &= [(T - (T_1' \cup \{\vec{t}\})) \cup P \cup S]\\ &= [(T - T') \cup P \cup S], \text{ za } T' = T_1' \cup \{\vec{t}\} \text{ i } |T'| = n - 1 + 1 = n.\end{aligned}$$

⊣

LEMA 4.2. *Ako je T konačan podskup od V takav da je $[T] = V$ i ako je $P \subseteq V$ linearno nezavisan, onda je P konačan i nema više elemenata od T.*

DOKAZ. Po Velikoj lemi o zameni primenjenoj na T, $S = \emptyset$ i proizvoljan konačan $P' \subseteq P$, postoji $T' \subseteq T$ takav da je $|T'| = |P'|$ što znači da je $|P'| \leq |T|$. Dakle, svaki konačan podskup od P nema više elemenata od T, pa je P konačan i nema više elemenata od T. ⊣

TEOREMA 4.3. *U svakom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru sve baze su jednake dužine.*

DOKAZ. Neka je $\mathcal{B}$ konačna neuređena baza za V (takva postoji po pretpostavci da je V konačnodimenzionalan). Neka je $\mathcal{B}'$ neka druga neuređena baza za V. Pokazaćemo da je $|\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}|$. Pošto je $[\mathcal{B}] = V$ i skup $\mathcal{B}'$ je linearno nezavisan, po lemi 4.2, je

$\mathcal{B}'$ konačan i $|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$. S druge strane imamo da je $[\mathcal{B}'] = V$ i skup $\mathcal{B}$ je linearno nezavisan, pa je po istoj lemi $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$. $\dashv$

DEFINICIJA. *Dimenzija* konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V, u oznaci $dim(V)$, je dužina njegove proizvoljne baze.

LEMA 4.4. *Linearno nezavisan skup vektora iz n-dimenzionalnog vektorskog prostora ne može imati više od n elemenata.*

DOKAZ. Direktno iz leme 4.2. $\dashv$

TVRĐENJE 4.5. *Za svaki podskup T konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V za koji važi da je $[T] = V$, postoji $T' \subseteq T$ koji je neuređena baza za V.*

DOKAZ. Po lemi 4.4, ako je $dim(V) = n$, onda svaki linearno nezavisan podskup od T ima najviše n elemenata. Neka je P linearno nezavisan podskup od T za koji ne postoji linearno nezavisan podskup od T sa više elemenata. Znači za svako $\vec{t} \in (T - P)$ važi da je $P \cup \{\vec{t}\}$ linearno zavisan. Po lemi 3.8 (2) sledi da je $\vec{t} \in [P]$, pa zaključujemo da je $T \subseteq [P]$, odakle po tvrđenju 3.4 (2) i (3) dobijamo $V = [T] \subseteq [[P]] = [P]$. Iz $P \subseteq T$, po tvrđenju 3.4 (2) dobijamo $[P] \subseteq [T] = V$. Dakle, $[P] = V$, te je P neuređena baza za V. $\dashv$

LEMA 4.6. *Ako je $dim(V) = n$ i $P \subseteq V$ linearno nezavisan takav da je $|P| = n$, onda je $[P] = V$.*

DOKAZ. Za proizvoljnu bazu $\mathcal{B}$ od V važi $|\underline{\mathcal{B}}| = n$ i $[\underline{\mathcal{B}}] = V$. Po Velikoj lemi o zameni primenjenoj na $T = \underline{\mathcal{B}}$, $S = \emptyset$ i P, dobijamo $[P] = V$. $\dashv$

LEMA 4.7. *Ako je $dim(V) = n$ i $P \subseteq V$ takav da je $[P] = V$ i $|P| \leq n$, onda je P neuređena baza za V.*

DOKAZ. Po tvrđenju 4.5 postoji $P' \subseteq P$ koji je neuređena baza za V. Po teoremi 4.3 je $|P'| = n$ a pošto je $|P| \leq n$, to znači da je $P' = P$. $\dashv$

TVRĐENJE 4.8. *Svaki linearno nezavisan skup vektora konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V može se dopuniti do neuređene baze za V vektorima iz neke neuređene baze za V.*

DOKAZ. Neka je P linearno nezavisan skup vektora iz V i neka je T neuređena baza za V. Po Velikoj lemi o zameni primenjenoj na T, $S = \emptyset$ i P, postoji $T' \subseteq T$ takav da je $|T'| = |P|$ i $[(T - T') \cup P] = V$. Pošto je $|(T - T') \cup P| \leq |T| = dim(V)$ to, po lemi 4.7, sledi da je $(T - T') \cup P$ neuređena baza za V. $\dashv$

TVRĐENJE 4.9. *U n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V, skup $P \subseteq V$, takav da je $|P| = n$, je linearno nezavisan akko $[P] = V$.*

DOKAZ. ($\Rightarrow$) Direktno iz leme 4.6.
($\Leftarrow$) Iz leme 4.7 dobijamo da je P neuređena baza za V, pa je linearno nezavisan. $\dashv$

TVRĐENJE 4.10. *Ako je U potprostor konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V, onda je $dim(U) \leq dim(V)$. Ako je $dim(U) = dim(V)$, onda je $U = V$.*

DOKAZ. Po lemi 4.4 sledi da je $dim(U) \leq dim(V)$. Neka je $dim(U) = dim(V) = n$ i neka je P neuređena baza za U. Znači da je $[P] = U$, P je linearno nezavisan i $|P| = n$. Po tvrđenju 4.9, $[P] = V$, pa je $U = V$. $\dashv$

§5. Odeljak 5.

§5.1. Vektorski prostori i linearni sistemi

Podsetiti se napomene 2.5 kao i tvrđenja 2.6 i 3.7.

Definicija. *Prostor vrsta* neke matrice je linearni omotač skupa svih vektor vrsta te matrice. Oznaka je $RS(A)$. *Vrsta-rang* matrice A je dimenzija prostora $RS(A)$.

Primer.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$RS(A) = [\{(2 \quad 3), (4 \quad 6)\}] = [\{(2 \quad 3)\}]$, jer je $(4 \quad 6) = 2(2 \quad 3)$.

Lema 5.1. *Ako su dve matrice vrsta-ekvivalentne onda su im prostori vrsta jednaki pa su im samim tim i vrsta-rangovi jednaki.*

dokaz. Pretpostavimo $A \rightsquigarrow B$ (to jest A se vrsta-redukuje na B). Po tvrđenju 2.6 imamo da je svaka vrsta matrice B linearna kombinacija vrsta matrice A, pa je $RS(B) \subseteq RS(A)$ (ovde se koristi tvrđenje 3.4 (2) i (3)). Na isti način, pošto je relacija $\rightsquigarrow$ simetrična (tvrđenje 2.2), dobijamo $RS(A) \subseteq RS(B)$, pa je $RS(A) = RS(B)$. $\dashv$

Na osnovu leme 5.1 i tvrđenja 3.7 zaključujemo da Gausov postupak eliminiše zavisnost među vrstama ostavljajući linearni omotač nepromenjen. Na taj način se formira baza prostora vrsta neke matrice.

Primer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2\rho_1+\rho_3]{-\rho_1+\rho_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{6\rho_2+\rho_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Znači $\langle (1 \quad 3 \quad 1), (0 \quad 1 \quad 0), (0 \quad 0 \quad 3) \rangle$ je baza za $RS(A)$.

Definicija. *Prostor kolona* neke matrice je linearni omotač skupa svih vektor kolona te matrice. Oznaka je $CS(A)$. *Kolona-rang* matrice A je dimenzija prostora $CS(A)$.

Definicija. Neka je $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. *Transponovana matrica* matrice A je matrica $A^T \in \mathcal{M}_{n\times m}$ takva da se u preseku i-te vrste i j-te kolone matrice A^T nalazi element koji se nalazi u preseku i-te kolone i j-te vrste matrice A. Prostije, prva vrsta matrice A postaje prva kolona matrice A^T itd.

Primer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

PRIMER. Za matricu A iz prethodnog primera odrediti bazu za $CS(A)$. Prvo odredimo bazu za $RS(A^T)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-7\rho_1+\rho_3]{-3\rho_1+\rho_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -12 \\ 0 & -6 & 2 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2\rho_2+\rho_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dakle, baza za $RS(A^T)$ je $\langle (1 \quad 2 \quad 0 \quad 4), (0 \, -3 \quad 1 \, -12) \rangle$, pa je baza za $CS(A)$:

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix} \rangle$$

Primetimo da Gausove operacije mogu da promene prostor kolona matrice. Na primer, za

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2\rho_1+\rho_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

važi

$$[\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \}] \neq [\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}]$$

ali ćemo pokazati da važi sledeće.

LEMA 5.2. *Ako su dve matrice vrsta-ekvivalentne onda su im kolona-rangovi jednaki.*

DOKAZ. Pretpostavimo $A \rightsquigarrow B$. Po teoremi 1.3, sistemi

$$\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \qquad & b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n = 0 \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 & b_{m1}x_1 + \ldots + b_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

imaju isto opšte rešenje, što znači:

$$c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

akko

$$c_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

pa je skup nekih kolona matrice A linearno nezavisan akko je skup odgovarajućih kolona matrice B linearno nezavisan, odakle sledi da su kolona-rangovi matrica A i B jednaki. $\dashv$

Primer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 16 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrica A je svedena na redukovanu stepenastu formu. Za bazu od $RS(A)$ možemo uzeti $\langle (1 \quad 3 \quad 0 \quad 2), (0 \quad 0 \quad 1 \quad 4) \rangle$.

Što se tiče prostora kolona neke matrice u redukovanoj stepenastoj formi, one kolone koje sadrže pivote su članovi standardne baze za $\mathbf{R}^3$. U redukovanoj matrici iz gornjeg primera, to su $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ (prva i treća kolona). One čine linearno nezavisan skup a sve ostale kolone su u linearnom omotaču tog skupa jer imaju nule u trećoj vrsti (svim vrstama različitim od prve i druge). Ovaj primer nas uvodi u sledeću teoremu.

Teorema 5.3. *Svaka matrica ima isti vrsta i kolona rang.*

dokaz. Po lemama 5.1 i 5.2, svođenje matrice na redukovanu stepenastu formu ne menja ni jedan od ovih rangova. Vrsta-rang dobijene matrice jednak je broju pivota u njoj a to je ujedno i broj kolona oblika $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots$ koje daju bazu za prostor kolona te matrice iz istog razloga kao u gornjem primeru. ⊣

Definicija. *Rang* matrice je njen vrsta odnosno kolona-rang, pošto su oni jednaki. Oznaka je $r(A)$.

Teorema 5.4. *Za homogen sistem sa n promenljivih i sa matricom koeficijenata A sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) $r(A) = r$*;*

(2) prostor rešenja ima dimenziju $n - r$*.*

dokaz.

$$\begin{aligned} r(A) = r \ &\text{akko sistem se svodi na stepenastu formu sa } r \text{ ne-nula vrsta,} \\ &\text{akko svedeni sistem ima } r \text{ pivota,} \\ &\text{akko svedeni sistem ima } n-r \text{ slobodnih promenljivih,} \\ &\text{akko prostor rešenja ima dimenziju } n-r. \end{aligned}$$

⊣

Kako pokazati poslednju ekvivalenciju će biti jasno iz sledećeg primera.

Primer. Posmatrajmo sledeći sistem u redukovanoj stepenastoj formi:

$$\begin{array}{rrrrl} x & -\frac{1}{2}y & & +2u & = 0 \\ & & z & +u & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opšte rešenje čitamo direktno iz redukovane stepenaste forme.

$$S = \{y \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, u \in \mathbf{R}\}.$$

Vektori $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ su linearno nezavisni jer prvi u drugoj vrsti ima jedinicu a drugi nulu (to je mesto koje odgovara promenljivoj y) i isto tako drugi u četvrtoj vrsti ima jedinicu a prvi nulu (to je mesto koje odgovara promenljivoj u) tako da je nemoguće napraviti njihovu netrivijalnu linearnu kombinaciju jednaku $\vec{0}$. Isto se dešava i u opštem slučaju.

§5.2. Neke operacije s potprostorima

U ovoj sekciji će biti reči o preseku, sumi i direktnoj sumi potprostora nekog vektorskog prostora.

Lema 5.5. *Ako su U i W potprostori nekog vektorskog prostora, onda je i $U \cap W$ takođe potprostor tog vektorskog prostora.*

dokaz. Po tvrđenju 3.1 dovoljno je proveriti da je $U \cap W$ neprazan i da je $U \cap W$ zatvoren za linearne kombinacije parova vektora. Iz $\vec{0} \in U$ i $\vec{0} \in W$ sledi $\vec{0} \in U \cap W$ pa je on neprazan.

Neka su $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in U \cap W$ i $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Pošto je onda $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in U$ i U je potprostor, zaključujemo $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \in U$. Na isti način zaključujemo $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \in W$, pa je $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \in U \cap W$. ⊣

Definicija. Za U i W potprostore nekog vektorskog prostora definišemo njihovu *sumu*:

$$U + W =_{df} [U \cup W].$$

Primer. $U, W \subseteq \mathbf{R}^3$, $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R}\}$, $W = \{\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbf{R}\}$. Pošto je $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$, onda važi:

$$\mathbf{R}^3 = [\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}] \subseteq [U \cup W] \subseteq \mathbf{R}^3$$

pa je $U + W = \mathbf{R}^3$.

Lema 5.6. *Ako je* $[S] = U$ *i* $[T] = W$ *onda je* $[S \cup T] = U + W$.

dokaz. Iz $S \cup T \subseteq U \cup W$, po tvrđenju 3.4 (2) imamo $[S \cup T] \subseteq [U \cup W]$. Iz $S, T \subseteq S \cup T$, dvostrukom primenom tvrđenja 3.4 (2) imamo $U, W \subseteq [S \cup T]$ pa je i $U \cup W \subseteq [S \cup T]$. Odavde, po tvrđenju 3.4 (2) i (3), dobijamo $[U \cup W] \subseteq [S \cup T]$. Dakle, $[S \cup T] = [U \cup W] = U + W$. ⊣

Teorema 5.7 (Grasmanova formula). *Za potprostore* U *i* W *konačnodimenzionalnog vektorskog prostora važi:*

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W).$$

dokaz. Neka je $\langle \vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_r \rangle$ baza za $U \cap W$. Po tvrđenju 4.8 ta baza se može dopuniti do baze za U i do baze za W. Dakle, neka je $\mathcal{B} = \langle \vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_r, \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k \rangle$ baza za U i neka je $\mathcal{C} = \langle \vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_r, \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_l \rangle$ baza za W. Dovoljno je da pokažemo da je $\mathcal{D} = \langle \vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_r, \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k, \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_l \rangle$ baza za $U + W$.

U $\mathcal{D}$ nema ponavljanja, inače bi moralo biti $\vec{\beta}_i = \vec{\gamma}_j$ za neke i i j. Taj vektor bi onda pripadao $U \cap W$ pa ni $\mathcal{B}$ ni $\mathcal{C}$ ne bi bili linearno nezavisni.

Kao posledicu leme 5.6 imamo $[\underline{\mathcal{D}}] = [\underline{\mathcal{B}} \cup \underline{\mathcal{C}}] = U + W$. Još treba pokazati da je $\underline{\mathcal{D}}$ linearno nezavisan. Pretpostavimo:

$$d_1\vec{\delta}_1 + \ldots + d_r\vec{\delta}_r + b_1\vec{\beta}_1 + \ldots + b_k\vec{\beta}_k + c_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + c_l\vec{\gamma}_l = \vec{0}.$$

Neka je $\vec{v} = d_1\vec{\delta}_1 + \ldots + d_r\vec{\delta}_r + b_1\vec{\beta}_1 + \ldots + b_k\vec{\beta}_k \in U$. Iz gornje jednakosti dobijamo da je $\vec{v} = -(c_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + c_l\vec{\gamma}_l) \in W$. Dakle, $\vec{v} \in U \cap W$ pa je $\vec{v} \in [\{\vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_r\}]$. Po teoremi 4.1, zbog jedinstvenosti $Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v})$ dobijamo $b_1 = \ldots = b_k = 0$. Uz to, gornja jednakost postaje $d_1\vec{\delta}_1 + \ldots + d_r\vec{\delta}_r + c_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + c_l\vec{\gamma}_l = \vec{0}$, što zbog linearne nezavisnosti od $\underline{\mathcal{C}}$ daje $d_1 = \ldots = d_r = c_1 = \ldots = c_l = 0$. ⊣

Definicija. *Konkatenacija* (*nadovezivanje*) nizova vektora:

$$\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k \rangle \frown \langle \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_l \rangle =_{df} \langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k, \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_l \rangle.$$

Lema 5.8. *Neka je* $V = U + W$ *i neka su* $\mathcal{B}$ *i* $\mathcal{C}$ *redom baze za* U *i* W. *Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(1) svaki $\vec{v} \in V$ *se može na jedinstven način predstaviti kao* $\vec{u} + \vec{w}$, *pri čemu je* $\vec{u} \in U$, *a* $\vec{w} \in W$;

(2) $\mathcal{B} \frown \mathcal{C}$ *je baza za* V;

(3) proizvoljni ne-nula vektori $\vec{u} \in U$ *i* $\vec{w} \in W$ *su različiti i skup* $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ *je linearno*

nezavisan;

(4) $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

DOKAZ. ((1) $\Rightarrow$ (2))

$\mathcal{B} \frown \mathcal{C}$ je niz bez ponavljanja jer bi inače postojao ne-nula vektor $\vec{v} \in \underline{\mathcal{B}} \cap \underline{\mathcal{C}}$ koga bismo mogli predstaviti kao $\vec{v} + \vec{0}$ i kao $\vec{0} + \vec{v}$, što je suprotno pretpostavci (1).

Kao posledicu leme 5.6 imamo da je $[\underline{\mathcal{B} \frown \mathcal{C}}] = [\underline{\mathcal{B}} \cup \underline{\mathcal{C}}] = U + W = V$. Još treba pokazati da je $\underline{\mathcal{B}} \cup \underline{\mathcal{C}}$ linearno nezavisan. Neka je $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k \rangle$ i $\mathcal{C} = \langle \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_l \rangle$. Pretpostavimo:

$$b_1\vec{\beta}_1 + \ldots + b_k\vec{\beta}_k + c_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + c_l\vec{\gamma}_l = \vec{0} = \vec{0} + \vec{0}.$$

Po (1) imamo da je $b_1\vec{\beta}_1 + \ldots + b_k\vec{\beta}_k = \vec{0}$ i $c_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + c_l\vec{\gamma}_l = \vec{0}$, odakle po linearnoj nezavisnosti skupova $\underline{\mathcal{B}}$ i $\underline{\mathcal{C}}$ sledi $b_1 = \ldots = b_k = c_1 = \ldots = c_l = 0$.

((2) $\Rightarrow$ (3)) Neka su $\vec{u} \in U$ i $\vec{w} \in W$ dva ne-nula vektora i neka je $\vec{u} = b_1\vec{\beta}_1 + \ldots + b_k\vec{\beta}_k$ a $\vec{w} = c_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + c_l\vec{\gamma}_l$. Zbog linearne nezavisnosti niza $\mathcal{B} \frown \mathcal{C}$, ako bi bilo $\vec{u} = \vec{w}$ onda bi to bili nula vektori što je suprotno pretpostavci. Pretpostavimo da je $r\vec{u} + s\vec{w} = \vec{0}$. Znači:

$$rb_1\vec{\beta}_1 + \ldots + rb_k\vec{\beta}_k + sc_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + sc_l\vec{\gamma}_l = \vec{0},$$

pa zbog linearne nezavisnosti niza $\mathcal{B} \frown \mathcal{C}$ dobijamo $rb_1 = \ldots = rb_k = sc_1 = \ldots = sc_l = 0$. Iz $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$ sledi da je bar jedno b_i i bar jedno c_j različito od 0 pa je onda $r = s = 0$.

((3) $\Rightarrow$ (4)) Direktno.

((4) $\Rightarrow$ (1)) Pretpostavimo da za $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ i $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ važi $\vec{u}_1 + \vec{w}_1 = \vec{u}_2 + \vec{w}_2$. Onda važi $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \vec{w}_1 \in U \cap W$ pa po (4) važi $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \vec{w}_1 = \vec{0}$, tj. $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ i $\vec{w}_1 = \vec{w}_2$. $\dashv$

DEFINICIJA. Za potprostore U i W nekog vektorskog prostora V kažemo da su *nezavisni* (*komplementarni*) kada se svaki $\vec{v} \in U + W$ može na jedinstven način predstaviti kao $\vec{u} + \vec{w}$ pri čemu je $\vec{u} \in U$ a $\vec{w} \in W$.

DEFINICIJA. Vektorski prostor V je (*unutrašnja*) *direktna suma* svojih potprostora U i W kada su oni nezavisni i $V = U + W$. Oznaka je $V = U \oplus W$.

TVRĐENJE 5.9. *Za vektorski prostor V i njegove potprostore U i W važi:*

$$V = U \oplus W \quad \text{akko} \quad U \cap W = \{\vec{0}\} \text{ i } dim(V) = dim(U) + dim(W).$$

DOKAZ. ($\Rightarrow$) Po lemi 5.8 sledi da je $U \cap W = \{\vec{0}\}$, pa je po teoremi 5.7, $dim(V) = dim(U + W) = dim(U) + dim(W) + 0$.

($\Leftarrow$) Po lemi 5.8, U i V su nezavisni. Po teoremi 5.7 imamo da je $dim(V) = dim(U) + dim(W) = dim(U + W)$ pa je po tvrđenju 4.10, $V = U + W$. $\dashv$

Primer. Neka je $M = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y - 2z = 0\}$, $N_1 = \{k\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{R}\}$ i $N_2 = \{k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{R}\}$. Možemo pokazati da je $M \oplus N_1 = \mathbf{R}^3 = M \oplus N_2$. Prevedimo M u oblik $\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbf{R}\}$. Dakle, $\mathcal{M} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $\mathcal{N}_1 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ i $\mathcal{N}_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$ su redom baze za M, N_1 i N_2. Pošto su $\mathcal{M} \frown \mathcal{N}_1$ i $\mathcal{M} \frown \mathcal{N}_2$ baze za $\mathbf{R}^3$, to su, po lemi 5.8, direktne sume $M \oplus N_1$ i $M \oplus N_2$ jednake prostoru $\mathbf{R}^3$.

U prvom primeru iz sekcije 3.1 je rečeno kako skup rešenja homogenog sistema sa n promenljivih predstavlja jedan potprostor od $\mathbf{R}^n$. Obrnuto, svakom potprostoru od $\mathbf{R}^n$ možemo pridružiti homogen sistem sa n promeljivih čiji je skup rešenja taj potprostor. Ovo pridruživanje ilustrujemo sledećim primerom.

Primer. Neka je U potprostor od $\mathbf{R}^3$ čija je baza $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pripada potprostoru U ako i samo ako je skup $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}$ linearno zavisan, odnosno ako i samo ako se matrica $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ Gausovim operacijama svodi na matricu u stepenastoj formi sa poslednjom nula vrstom.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{(-x)\rho_1 + \rho_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & y - 2x & z - x \end{pmatrix} \xrightarrow{(2x - y)\rho_2 + \rho_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x - y + z \end{pmatrix}$$

Dakle, U je skup rešenja homogene jednačine $x - y + z = 0$.

§6. Odeljak 6.

§6.1. Linearna preslikavanja, izomorfizmi

Prostor geometrijskih vektora (videti početak sekcije 12.1) je na neki način izjednačen sa prostorom $\mathbf{R}^3$. Takođe skoro da ne razlikujemo prostor $\mathbf{R}^n$ i prostor $\mathbf{R}^n_v = \{(x_1 \ldots x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}$. U primerima smo videli da na sličan način „poistovećujemo” prostore $\mathbf{R}^4$ i $\mathcal{P}_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in R\}$. U ovoj sekciji ćemo se baviti pojmom izomorfizma vektorskih prostora koji stoji iza ovih izjednačavanja.

Definicija. *Linearno preslikavanje (homomorfizam)* između vektorskih prostora V i W je preslikavanje $f\colon V \to W$ takvo da za svako $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ i $r \in \mathbf{R}$ važi:

$$f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) \quad \text{i} \quad f(r\vec{v}_1) = rf(\vec{v}_1),$$

to jest f čuva strukturu vektorskog prostora.

Tvrđenje 6.1. *Preslikavanje $f : V \to W$ je linearno ako za svako $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ i $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ važi $f(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) = c_1f(\vec{v}_1) + c_2f(\vec{v}_2)$.*

dokaz. Za $c_1 = c_2 = 1$ dobijamo prvo svojstvo a za $c_1 = r$ i $c_2 = 0$ dobijamo drugo svojstvo. ⊣

Definicija. Linearno preslikavanje je *izomorfizam* kada je ono bijekcija (postoji preslikavanje koje mu je istovremeno i levi i desni inverz). Ako postoji izomorfizam između V i W onda kažemo da su oni *izomorfni* i pišemo $V \cong W$.

Primer 1. Neka je $\mathcal{B} = \langle\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n\rangle$ baza vektorskog prostora V. U odeljku 4.1 smo videli da reprezentacija $Rep_{\mathcal{B}}$ dodeljuje svakom vektoru iz V tačno jedan vektor iz $\mathbf{R}^n$. Pokažimo da je $Rep_{\mathcal{B}}$ izomorfizam. Neka je $\vec{u} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$ i $\vec{v} = d_1\vec{\beta}_1 + \ldots + d_n\vec{\beta}_n$. Tada je $a\vec{u} + b\vec{v} = (ac_1 + bd_1)\vec{\beta}_1 + \ldots + (ac_n + bd_n)\vec{\beta}_n$, pa je

$$Rep_{\mathcal{B}}(a\vec{u} + b\vec{v}) = \begin{pmatrix} ac_1 + bd_1 \\ \vdots \\ ac_n + bd_n \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = a\,Rep_{\mathcal{B}}(\vec{u}) + b\,Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}),$$

što znači da je $Rep_{\mathcal{B}}$ homomorfizam. Lako se pokazuje da je preslikavanje iz $\mathbf{R}^n$ u V zadato sa

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$$

njegov inverz.

PRIMER. Neka je $V = \{u\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid u(\theta) = a\cos\theta + b\sin\theta,\ a, b \in \mathbf{R}\}$. U trećem primeru iz sekcije 4.1 smo pokazali da je za $u_1(\theta) = \cos\theta$ i $u_2(\theta) = \sin\theta$, niz $\mathcal{B} = \langle u_1, u_2\rangle$ baza za V. Definišimo $f\colon V \to \mathbf{R}^2$ sa

$$f(c_1u_1 + c_2u_2) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

to jest $f = Rep_{\mathcal{B}}$. Po prethodnom primeru f je izomorfizam između V i $\mathbf{R}^2$.

DEFINICIJA. *Automorfizam* je izomorfizam vektorskog prostora sa samim sobom.

PRIMER. Neka je $f\colon \mathcal{P}_5 \to \mathcal{P}_5$ zadato sa $f(p(x)) = p(x-1)$. Prvo ćemo pokazati da je f linearno preslikavanje. Neka je $p(x) = a_0 + \ldots + a_5x^5$, a $q(x) = b_0 + \ldots + b_5x^5$.

$$\begin{aligned} f(p(x) + q(x)) &= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)(x-1) + \ldots + (a_5 + b_5)(x-1)^5 \\ &= a_0 + a_1(x-1) + \ldots + a_5(x-1)^5 + b_0 + b_1(x-1) + \ldots + b_5(x-1)^5 \\ &= f(p(x)) + f(q(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(rp(x)) &= ra_0 + ra_1(x-1) + \ldots + ra_5(x-1)^5 \\ &= r(a_0 + a_1(x-1) + \ldots + a_5(x-1)^5) \\ &= rf(p(x)). \end{aligned}$$

Ako $f^{-1}: \mathcal{P}_5 \to \mathcal{P}_5$ zadamo sa $f^{-1}(p(x)) = p(x+1)$, onda se lako proveri da je $f^{-1} \circ f(p(x)) = p(x) = f \circ f^{-1}(p(x))$, pa je f bijekcija. Dakle, f je automorfizam.

LEMA 6.2. *Linearno preslikavanje preslikava nula vektor u nula vektor.*

DOKAZ. $f(\vec{0}) = f(0\vec{v}) = 0f(\vec{v}) = \vec{0}$.

LEMA 6.3. *Inverz izomorfizma je izomorfizam.*

DOKAZ. Po tvrđenju 6.1, dovoljno je pokazati da $f^{-1}\colon W \to V$ zadovoljava $f^{-1}(c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2) = c_1f^{-1}(\vec{w}_1) + c_2f^{-1}(\vec{w}_2)$. Pošto je f bijekcija, ovo je ekvivalentno sa $f(f^{-1}(c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2)) = f(c_1f^{-1}(\vec{w}_1) + c_2f^{-1}(\vec{w}_2))$, što je tačno jer se i leva i desna strana svode na $c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2$ (za desnu stranu koristimo tvrđenje 6.1). ⊣

NAPOMENA. *Linearno preslikavanje $f\colon V \to W$ je izomorfizam akko postoji linearno preslikavanje $g\colon W \to V$ takvo da je $g \circ f = \mathbf{1}_V$ i $f \circ g = \mathbf{1}_W$.*

LEMA 6.4. *Kompozicija linearnih preslikavanja je linearno preslikavanje.*

DOKAZ. Neka su $h\colon V \to U$ i $g\colon U \to W$ linearna preslikavanja. Tada važi:

$$\begin{aligned} g\circ h(c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2) &= g(h(c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2)) = g(c_1h(\vec{v}_1)+c_2h(\vec{v}_2)) \\ &= c_1g(h(\vec{v}_1))+c_2g(h(\vec{v}_2)) \\ &= c_1\,g\circ h(\vec{v}_1)+c_2\,g\circ h(\vec{v}_2). \end{aligned} \qquad \dashv$$

Teorema 6.5. *Relacija $\cong$ je relacija ekvivalencije.*

dokaz. Identično preslikavanje na vektorskom prostoru je izomorfizam pa je $\cong$ refleksivna. Koristeći lemu 6.3 pokazujemo da je relacija $\cong$ simetrična. Pošto je kompozicija bijekcija bijekcija i kompozicija linearnih preslikavanja je linearno preslikavanje, to je relacija $\cong$ i tranzitivna. $\dashv$

Teorema 6.6. *Vektorski prostori su izomorfni akko imaju istu dimenziju.*

dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $\mathcal{B}=\langle\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_n\rangle$ baza za V. Neka je $f\colon V\to W$ izomorfizam. Pokazaćemo da je $f\mathcal{B}=\langle f(\vec{\beta}_1),\ldots,f(\vec{\beta}_n)\rangle$ baza za W. Pošto u $\mathcal{B}$ nema ponavljanja i f je **1-1** to ni u $f\mathcal{B}$ nema ponavljanja.

Pokažimo da je $[\underline{f\mathcal{B}}]=W$. Neka je $\vec{w}\in W$. Pošto je f **na** to postoji $\vec{v}\in V$ takav da $\vec{w}=f(\vec{v})$. Neka je $\vec{v}=c_1\vec{\beta}_1+\ldots+c_n\vec{\beta}_n$. Pošto je f linearno preslikavanje, imamo da je $\vec{w}=c_1f(\vec{\beta}_1)+\ldots+c_nf(\vec{\beta}_n)$.

Još treba da pokažemo da je $\underline{f\mathcal{B}}$ linearno nezavisan.

$$\begin{aligned} c_1f(\vec{\beta}_1)+\ldots+c_nf(\vec{\beta}_n)=\vec{0} &\text{ akko } f(c_1\vec{\beta}_1+\ldots+c_n\vec{\beta}_n)=f(\vec{0}),\ f \text{ linearno},\\ &\text{ akko } c_1\vec{\beta}_1+\ldots+c_n\vec{\beta}_n=\vec{0},\ f \text{ je } \mathbf{1\text{-}1},\\ &\text{ akko } c_1=\ldots=c_n=0,\ \underline{\mathcal{B}} \text{ je lin. nez.} \end{aligned}$$

Pošto je $f\mathcal{B}$ baza za W dužine n, to je $dim(W)=n=dim(V)$.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da su prostori V i W dimenzije n. Po prvom primeru oba su izomorfna sa $\mathbf{R}^n$ pa su po teoremi 6.5 i međusobno izomorfni. $\dashv$

Napomena 6.7. *Svaki n-dimenzionalni vektorski prostor je izomorfan sa $\mathbf{R}^n$. Ako je $\mathcal{B}=\langle\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_n\rangle$ baza za V onda je $Rep_{\mathcal{B}}$ izomorfizam između V i $\mathbf{R}^n$.*

Tvrđenje 6.8. *Za linearno preslikavanje $h\colon V\to W$ koje je **1-1** važi da je $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\}$ linearno nezavisan u V akko je $\{h(\vec{v}_1),\ldots,h(\vec{v}_k)\}$ linearno nezavisan u W.*

dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $c_1h(\vec{v}_1)+\ldots+c_kh(\vec{v}_k)=\vec{0}_W$. Zbog linearnosti preslikavanja h to znači da je $h(c_1h(\vec{v}_1)+\ldots+c_kh(\vec{v}_k))=h(\vec{0}_V)$, pa pošto je h još **1-1** imamo da je $c_1h(\vec{v}_1)+\ldots+c_kh(\vec{v}_k)=\vec{0}_V$. Zbog linearne nezavisnosti skupa $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\}$ imamo da je $c_1=\ldots=c_k=0$, što znači da je i $\{h(\vec{v}_1),\ldots,h(\vec{v}_k)\}$ linearno nezavisan.

($\Leftarrow$) Neka je $c_1\vec{v}_1+\ldots+c_k\vec{v}_k=\vec{0}_V$. Primenimo h na obe strane, iskoristimo njegovu linearnost i linearnu nezavisnost skupa $\{h(\vec{v}_1),\ldots,h(\vec{v}_k)\}$ da bismo zaključili da je $c_1=\ldots=c_k=0$, što znači da je i $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\}$ linearno nezavisan. $\dashv$

Posledica 6.9. *Linearna nezavisnost skupa vektora se može proveriti kroz linearnu nezavisnost skupa njihovih reprezentacija u odnosu na proizvoljnu bazu.*

Primer. Neka je $U = [\{x^2 + x^4, 2x^2 + 3x^4, -x^2 - 3x^4\}]$ potprostor od $\mathcal{P}_4$. Odrediti bazu za U.

Ako sa $\mathcal{B}$ označimo „standardnu" bazu $\langle 1, x, x^2, x^3, x^4\rangle$ za $\mathcal{P}_4$, onda je

$$Rep_{\mathcal{B}}(x^2 + x^4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, Rep_{\mathcal{B}}(2x^2 + 3x^4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, Rep_{\mathcal{B}}(-x^2 - 3x^4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Zatim primenimo tehniku iz sekcije 5.1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\rho_1 + \rho_3]{-2\rho_1 + \rho_2} \xrightarrow{2\rho_2 + \rho_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i dobijemo da je $\langle x^2 + x^4, x^4\rangle$ baza za U.

§6.2. Linearna preslikavanja (homomorfizmi)

Teorema 6.10. *Linearno preslikavanje je određeno svojim dejstvom na bazi: ako je $\langle\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n\rangle$ baza za V i $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ ne nužno različiti vektori iz W, onda postoji jedinstveno linearno preslikavanje $f\colon V \to W$ takvo da je $f(\vec{\beta}_i) = \vec{w}_i$.*

dokaz. Za $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$, definišimo $f(\vec{v}) =_{df} c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_n\vec{w}_n$. Preslikavanje $f : V \to W$ je dobro definisano po teoremi 4.1 (svaki $\vec{v} \in V$ se na jedinstven način zapisuje kao linearna kombinacija vektora baze).

Pokažimo da je f linearno preslikavanje i za to koristimo tvrđenje 6.1. Neka je $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$ i $\vec{u} = d_1\vec{\beta}_1 + \ldots + d_n\vec{\beta}_n$.

$$\begin{aligned} f(a\vec{v} + b\vec{u}) &= f(a(c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n) + b(d_1\vec{\beta}_1 + \ldots + d_n\vec{\beta}_n)) \\ &= f((ac_1 + bd_1)\vec{\beta}_1 + \ldots + (ac_n + bd_n)\vec{\beta}_n) \\ &=_{df} (ac_1 + bd_1)\vec{w}_1 + \ldots + (ac_n + bd_n)\vec{w}_n \\ &= a(c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_n\vec{w}_n) + b(d_1\vec{w}_1 + \ldots + d_n\vec{w}_n) \\ &= af(\vec{v}) + bf(\vec{u}). \end{aligned}$$

Još treba dokazati jedinstvenost. Ako je $g\colon V \to W$ linearno preslikavanje takvo da je $g(\vec{\beta}_i) = \vec{w}_i$, onda je

$$\begin{aligned}g(\vec{v}) &= g(c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n)\\ &= c_1 g(\vec{\beta}_1) + \ldots + c_n g(\vec{\beta}_n)\\ &= c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_n\vec{w}_n\\ &= f(\vec{v}).\ \text{Dakle, } f = g.\end{aligned}$$ ⊣

Primer. Neka je $h\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ zadato sa $h(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $h(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$. Onda je

$$h(\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}) = h(3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) = 3\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}.$$

Najčešće ovakvo h zapisujemo kao $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \overset{h}{\mapsto} \begin{pmatrix}-x-4y\\x+4y\end{pmatrix}$.

Homomorfizmi se mogu linearno kombinovati. Na primer, neka su homomorfizmi $f, g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ zadati sa

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix}2x\\3x-2y\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \overset{g}{\mapsto} \begin{pmatrix}0\\5x\end{pmatrix}.$$

Tada je linearna kombinacija $5f - 2g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ zadata sa

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}10x\\5x-10y\end{pmatrix}.$$

Definicija. Neka je $\mathcal{L}(V, W) =_{df} \{f \mid f\colon V \to W \text{ je linearno preslikavanje}\}$.

Definicija. Za $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ definišemo $f + g : V \to W$ i $rf : V \to W$ kao $(f+g)(\vec{v}) =_{df} f(\vec{v}) + g(\vec{v})$ odnosno $(rf)(\vec{v}) =_{df} rf(\vec{v})$ (videti sedmi primer u sekciji 2.2).

Lema 6.11. *Ako su f i g u $\mathcal{L}(V, W)$, onda su $f + g$ i rf takođe u $\mathcal{L}(V, W)$.*

dokaz. Koristeći tvrđenje 6.1 pokazaćemo da su $f + g$ i rf linearna preslikavanja.

$$\begin{aligned}(f+g)(a\vec{v} + b\vec{u}) &= f(a\vec{v} + b\vec{u}) + g(a\vec{v} + b\vec{u})\\ &= af(\vec{v}) + bf(\vec{u}) + ag(\vec{v}) + bg(\vec{u})\\ &= a(f+g)(\vec{v}) + b(f+g)(\vec{u}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(rf)(a\vec{v} + b\vec{u}) &= rf(a\vec{v} + b\vec{u})\\ &= raf(\vec{v}) + rbf(\vec{u})\\ &= a(rf)(\vec{v}) + b(rf)(\vec{u}).\end{aligned}$$ ⊣

Tvrđenje 6.12. *$\mathcal{L}(V, W)$ je vektorski prostor; to je potprostor od W^V (prostora svih funkcija iz V u W; videti sedmi primer u sekciji 2.2).*

dokaz. Konstantna funkcija koja slika sve vektore iz V u $\vec{0}_W$ je homomorfizam pa je $\mathcal{L}(V, W)$ neprazan. Dakle, tvrđenje sledi po tvrđenju 3.1, uz pomoć leme 6.11. $\dashv$

§6.3. Slika i jezgro linearnog preslikavanja

Lema 6.13. *Neka je $h\colon V \to W$ linearno preslikavanje i neka je U potprostor od V. Tada je $h[U] = \{h(\vec{u}) \mid \vec{u} \in U\}$ potprostor od W. Specijalno $h[V]$ je potprostor od W.*

dokaz. U je neprazan pa je $h[U]$ takođe neprazan. Neka su $h(\vec{u}_1)$ i $h(\vec{u}_2)$ iz $h[U]$. Tada je

$$a_1 h(\vec{u}_1) + a_2 h(\vec{u}_2) = h(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2) \in h[U],$$

pa je $h[U]$, po tvrđenju 3.1, potprostor od W. $\dashv$

Definicija. *Slika* homomorfizma $h\colon V \to W$ u oznaci $Im(h)$ (oznaka u [3] je $\mathcal{R}(h)$) je potprostor $h[V] = \{h(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\}$ od W. Dimenzija od $Im(h)$ je *rang* od h u oznaci $r(h)$.

Primer. Neka je $h = \frac{d}{dx}\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ zadato sa $h(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$. Lako se proveri da je h linearno preslikavanje i da je $Im(h) = \{r + sx + tx^2 \mid r, s, t \in \mathbf{R}\} = \mathcal{P}_2$ (trivijalno, $Im(h) \subseteq \{r + sx + tx^2 \mid r, s, t \in \mathbf{R}\}$ a obrnuta inkluzija važi zato što je $h(a_0 + rx + \frac{s}{2}x^2 + \frac{t}{3}x^3) = r + sx + tx^2$). Pošto je dimenzija od $\mathcal{P}_2$ jednaka 3 to je $r(h) = 3$.

Primer. Neka je $h\colon \mathcal{M}_2 \to \mathcal{P}_3$ zadato sa

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{h}{\mapsto} (a + b + 2d) + cx^2 + cx^3.$$

Lako se proveri da je h linearno preslikavanje i da je $Im(h) = \{r + sx^2 + sx^3 \mid r, s \in \mathbf{R}\} \cong \mathbf{R}^2$ (trivijalno je da $Im(h) \subseteq \{r + sx^2 + sx^3 \mid r, s \in \mathbf{R}\}$ a obrnuta inkluzija važi zato što je npr.

$$\begin{pmatrix} \frac{r}{4} & \frac{r}{4} \\ s & \frac{r}{4} \end{pmatrix} \overset{h}{\mapsto} r + sx^2 + sx^3).$$

Pošto je $\langle 1, x^2 + x^3 \rangle$ baza za $Im(h)$, to je $r(h) = 2$.

Lema 6.14. *Neka je $h\colon V \to W$ linearno preslikavanje i neka je U potprostor od W, onda je $h^{-1}[U] = \{\vec{v} \in V \mid h(\vec{v}) \in U\}$ potprostor od V.*

DOKAZ. Pošto je $h(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \in U$, to je $\vec{0}_V \in h^{-1}[U]$ pa je $h^{-1}[U]$ neprazan. Neka su $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ iz $h^{-1}[U]$. Tada je

$$h(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) = a_1h(\vec{v}_1) + a_2h(\vec{v}_2) \in U,$$

pa je i $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \in h^{-1}[U]$ te je $h^{-1}[U]$, po tvrđenju 3.1, potprostor od V. ⊣

DEFINICIJA. *Kernel* (*jezgro*) homomorfizma $h\colon V \to W$, u oznaci $Ker(h)$ (oznaka u [3] je $\mathcal{N}(h)$) je potprostor $h^{-1}[\{\vec{0}_W\}] = \{\vec{v} \in V \mid h(\vec{v}) = \vec{0}\}$. Dimenzija od $Ker(h)$ je *defekt* homomorfizma h.

PRIMER. U prethodnom primeru za $h\colon \mathcal{M}_2 \to \mathcal{P}_3$ imamo da je

$$\begin{aligned} Ker(h) &= \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+2d = 0, c = 0\} = \{\begin{pmatrix} -b-2d & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid b, d \in \mathbf{R}\} \\ &= \{b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b, d \in \mathbf{R}\}, \end{aligned}$$

pa je defekt od h jednak 2.

TEOREMA 6.15. *Za linearno preslikavanje $h\colon V \to W$ važi da je*

$$dim(V) = dim(Im(h)) + dim(Ker(h)).$$

DOKAZ. Neka je $\mathcal{B} = \langle\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k\rangle$ baza za $Ker(h)$. Po tvrđenju 4.8, $\mathcal{B}$ se može proširiti do baze $\langle\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k, \vec{\beta}_{k+1}, \ldots, \vec{\beta}_n\rangle$ za V. Tvrđenje će važiti ako pokažemo da je $\mathcal{D} = \langle h(\vec{\beta}_{k+1}), \ldots, h(\vec{\beta}_n)\rangle$ baza za $Im(h)$. Po lemi 5.8 imamo da je

$$(*) \qquad V = Ker(h) \oplus [\{\vec{\beta}_{k+1}, \ldots, \vec{\beta}_n\}].$$

Pokažimo prvo, uz lemu 4.0, da u $\mathcal{D}$ nema ponavljanja i da je $\underline{\mathcal{D}}$ linearno nezavisan. Ako je

$$c_{k+1}h(\vec{\beta}_{k+1}) + \ldots + c_nh(\vec{\beta}_n) = \vec{0},$$

onda je $c_{k+1}\vec{\beta}_{k+1} + \ldots + c_n\vec{\beta}_n \in Ker(h)$. Po uslovu $(*)$ zaključujemo da je $c_{k+1}\vec{\beta}_{k+1} + \ldots + c_n\vec{\beta}_n = \vec{0}$, pa je zbog linearne nezavisnosti skupa $\{\vec{\beta}_{k+1}, \ldots, \vec{\beta}_n\}$, $c_{k+1} = \ldots = c_n = 0$.

Još treba pokazati da je $Im(h) \subseteq [\{h(\vec{\beta}_{k+1}), \ldots, h(\vec{\beta}_n)\}]$ (obrnuta inkluzija je trivijalna). Neka je $\vec{w} \in Im(h)$, što znači postoji $\vec{v} \in V$ takav da je $h(\vec{v}) = \vec{w}$. Neka je $\vec{v} = \vec{u} + c_{k+1}\vec{\beta}_{k+1} + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$, gde je $\vec{u} \in Ker(h)$. Tada važi

$$\vec{w} = h(\vec{v}) = \vec{0} + c_{k+1}h(\vec{\beta}_{k+1}) + \ldots + c_nh(\vec{\beta}_n) \in [\{h(\vec{\beta}_{k+1}), \ldots, h(\vec{\beta}_n)\}].$$

⊣

PRIMER. Neka je $h\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ zadato sa $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{h}{\mapsto} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$Im(h) = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R}\} = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R}\},$$

$$Ker(h) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbf{R}\} = \{z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbf{R}\}.$$

POSLEDICA 6.16. *Rang linearnog preslikavanja je manji ili jednak od dimenzije domena. Jednakost važi u slučaju kad je defekt nula, to jest kad je jezgro trivijalno.*

TEOREMA 6.17. *Neka je $h\colon V \to W$ linearno preslikavanje. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

*(1) h je **1-1**;*

(2) $Ker(h) = \{\vec{0}\}$, to jest defekt je jednak nuli;

(3) $r(h) = dim(V)$;

(4) ako je $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ baza za V, onda je $\langle h(\vec{\beta}_1), \ldots, h(\vec{\beta}_n) \rangle$ baza za $Im(h)$.

DOKAZ. (1) $\Rightarrow$ (2) Ako je $h(\vec{v}) = \vec{0} = h(\vec{0})$, onda pošto h jeste **1-1**, sledi da je $\vec{v} = \vec{0}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) $h(\vec{v}_1) = h(\vec{v}_2) \Rightarrow h(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Teorema 6.15.

(2) $\Rightarrow$ (4) Kao u dokazu teoreme 6.15.

(4) $\Rightarrow$ (2) Neka je $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ baza za V i neka je $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n \in Ker(h)$. Znači $\vec{0} = h(\vec{v}) = c_1 h(\vec{\beta}_1) + \ldots + c_n h(\vec{\beta}_n)$, pa pošto je $\{h(\vec{\beta}_1), \ldots, h(\vec{\beta}_n)\}$ linearno nezavisan jer je $\langle h(\vec{\beta}_1), \ldots, h(\vec{\beta}_n) \rangle$ baza za $Im(h)$, dobijamo $c_1 = \ldots = c_n = 0$, što znači da je $\vec{v} = \vec{0}$. $\dashv$

§7. Odeljak 7.

§7.1. Reprezentacija linearnih preslikavanja

Po teoremi 6.10 znamo da je svako linearno preslikavanje određeno svojim dejstvom na izabranoj bazi domena.

Primer. Neka je $h\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ zadato dejstvom na standardnoj bazi sa $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \stackrel{h}{\mapsto} \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \stackrel{h}{\mapsto} \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$. Tada je za $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$, $h(\vec{v})$ jednako

$$h(-1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = -1h(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) + 5h(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = -1\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\9\\-3\end{pmatrix}$$

Primetimo da kada od vektor kolona $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ formiramo matricu $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\\3&0\end{pmatrix}$ i „pomnožimo" je sa $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ na sledeći način

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot(-1)+1\cdot 5\\1\cdot(-1)+2\cdot 5\\3\cdot(-1)+0\cdot 5\end{pmatrix}$$

dobijamo $h(\vec{v})$.

Definicija. Neka je $h\colon V \to W$ linearno preslikavanje i neka su $\mathcal{B} = \langle\vec{\beta}_1,\dots,\vec{\beta}_n\rangle$ i $\mathcal{D} = \langle\vec{\delta}_1,\dots,\vec{\delta}_m\rangle$ redom baze za V i W. Neka je:

$$Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{\beta}_1)) = \begin{pmatrix}h_{11}\\\vdots\\h_{m1}\end{pmatrix}_{\mathcal{D}},\dots,Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{\beta}_n)) = \begin{pmatrix}h_{1n}\\\vdots\\h_{mn}\end{pmatrix}_{\mathcal{D}}.$$

Tada matricu

$$\begin{pmatrix}h_{11}&\dots&h_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots\\h_{m1}&\dots&h_{mn}\end{pmatrix}$$

označavamo sa $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)$ i zovemo *matričnom reprezentacijom* za h u odnosu na baze $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$. Dakle, $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$ je funkcija koja preslikava prostor $\mathcal{L}(V,W)$ u prostor $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Napomena. *Broj kolona u matrici $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)$ je dimenzija domena dok je broj vrsta dimenzija kodomena.*

DEFINICIJA. Matricu tipa $m \times n$ množimo vektor kolonom $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ na sledeći način:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + & \dots & +a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + & \dots & +a_{2n}c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + & \dots & +a_{mn}c_n \end{pmatrix}$$

TEOREMA 7.1. *Neka su h, V, W, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$ kao u definiciji matrične reprezentacije za h i neka je $\vec{v} \in V$. Tada važi:*

$$Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{v})) = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)\, Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}).$$

DOKAZ. Neka je

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h) = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Dakle imamo $h(\vec{\beta}_1) = h_{11}\vec{\delta}_1 + \ldots + h_{m1}\vec{\delta}_m, \ldots, h(\vec{\beta}_n) = h_{1n}\vec{\delta}_1 + \ldots + h_{mn}\vec{\delta}_m$ i $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$. Izračunajmo $h(\vec{v})$ koristeći linearnost od h.

$$\begin{aligned} h(\vec{v}) &= c_1 h(\vec{\beta}_1) + \ldots + c_n h(\vec{\beta}_n) \\ &= c_1(h_{11}\vec{\delta}_1 + \ldots + h_{m1}\vec{\delta}_m) + \ldots + c_n(h_{1n}\vec{\delta}_1 + \ldots + h_{mn}\vec{\delta}_m) \\ &= (c_1 h_{11} + \ldots + c_n h_{1n})\vec{\delta}_1 + \ldots + (c_1 h_{m1} + \ldots + c_n h_{mn})\vec{\delta}_m. \end{aligned}$$

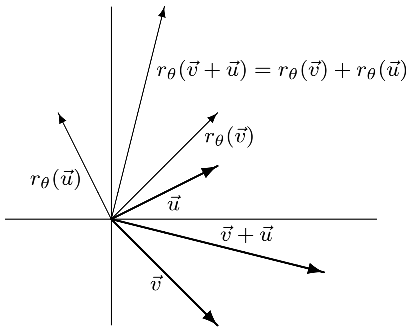
Znači imamo:

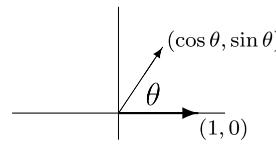
$$Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{v})) = \begin{pmatrix} h_{11}c_1 + & \dots & +h_{1n}c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{m1}c_1 + & \dots & +h_{mn}c_n \end{pmatrix} = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)\, Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}).$$

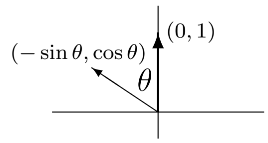
⊣

PRIMER 2. Neka je $r_\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ rotacija oko koordinatnog početka za orijentisan ugao θ. Ovde $\mathbf{R}^2$ posmatramo kao prostor vektora u euklidskoj ravni. Da bismo pokazali da je r_θ linearno preslikavanje iskoristićemo to što je rotacija izometrija pa preslikava paralelogram u paralelogram i duž u podudarnu duž (videti donji levi ctrež na kome je θ pozitivno orijentisan prav ugao). Donji desni crteži nam daju:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{r_\theta}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{r_\theta}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$







Znači, $Rep_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Tako npr. možemo da izračunamo $r_{30^\circ}(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix})$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 \\ \frac{3}{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Primer. Neka su $\mathcal{B} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$ i $\mathcal{D} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, redom baze za $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{R}^3$. Neka je $h\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ zadato sa

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{h}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{h}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da bismo odredili $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)$ moramo odrediti $Rep_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ i $Rep_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$.

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 + c_3 \\ -2c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = -\frac{1}{2} \\ c_3 = 1 \end{array}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 + c_3 \\ -2c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 0 \end{array}$$

Dakle, $Rep_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{D}}$ i $Rep_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{D}}$ pa je

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neka je $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$. Odredimo $Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{v}))$. Prvo ćemo odrediti $Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v})$.

$$c_1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2c_1+c_2\\4c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l}c_1=1\\c_2=1\end{array}$$

Dakle, $Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v})=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, pa je

$$Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{v}))=Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)\ Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v})=\begin{pmatrix}0&1\\-\frac{1}{2}&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{D}}$$

Primer. Neka je $l\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ linearno preslikavanje zadato sa

$$l(\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}x-2y+3t\\-3x+6y+2z-11t\\2x-4y+z+5t\end{pmatrix}$$

Hoćemo da odredimo matricu L koja reprezentuje l u odnosu na par standardnih (kanonskih) baza za $\mathbf{R}^4$ i $\mathbf{R}^3$. Imamo:

$$l(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix},\quad l(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}-2\\6\\-4\end{pmatrix},\quad l(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\quad l(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}3\\-11\\5\end{pmatrix}.$$

Dakle, $L=\begin{pmatrix}1&-2&0&3\\-3&6&2&-11\\2&-4&1&5\end{pmatrix}$. Primetite kako se L lako čita iz gornje definicije za l.

§7.2. Svaka matrica reprezentuje linearno preslikavanje

Neka je data matrica

$$H=\begin{pmatrix}h_{11}&\dots&h_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots\\h_{m1}&\dots&h_{mn}\end{pmatrix}$$

i neka je $\mathcal{B}=\langle\vec{\beta}_1,\dots,\vec{\beta}_n\rangle$ baza za n-dimenzionalni prostor V a $\mathcal{D}=\langle\vec{\delta}_1,\dots,\vec{\delta}_m\rangle$ baza za m-dimenzionalni prostor W. Po teoremi 6.10 postoji jedinstven homomorfizam $h\colon V\to W$ takav da za svako $1\le i\le n$ važi

$$\vec{\beta}_i \stackrel{h}{\mapsto} h_{1i}\vec{\delta}_1+\ldots+h_{mi}\vec{\delta}_m.$$

Po definiciji matrične reprezentacije imamo da je $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h) = H$. Znači H reprezentuje linearno preslikavanje h. Pošto je izbor baza $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$ proizvoljan ova korespondencija između linearnih preslikavanja i matrica nije jednoznačna.

Primer. Neka je $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $V = W = \mathbf{R}^2$. Neka su $\mathcal{B}_1 = \mathcal{D}_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ jednake standardne baze za $\mathbf{R}^2$ a neka su $\mathcal{B}_2 = \mathcal{D}_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ jednake ali nestandardne (u smislu redosleda) baze za $\mathbf{R}^2$.

Linearno preslikavanje $h_1 \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ je reprezentovano sa H u odnosu na $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{D}_1$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \stackrel{h_1}{\mapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{D}_1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Linearno preslikavanje $h_2 \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ je reprezentovano sa H u odnosu na $\mathcal{B}_2$ i $\mathcal{D}_2$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} \stackrel{h_2}{\mapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{D}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Intuitivno, h_1 odgovara prvoj a h_2 drugoj projekciji a zadaje ih ista matrica (u odnosu na različite parove baza).

Teorema 7.2. *Rang matrice jednak je rangu svakog preslikavanja koje ona reprezentuje.*

dokaz. Neka je $h \colon V \to W$ reprezentovano matricom

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix}$$

Tada je po definiciji rang od h jednak $dim(Im(h))$ što je po posledici 6.9 jednako broju linearno nezavisnih vektora u skupu

$$\{ \begin{pmatrix} h_{11} \\ \vdots \\ h_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} h_{1n} \\ \vdots \\ h_{mn} \end{pmatrix} \}$$

a to je dimenzija prostora kolona od H, što je po definiciji rang od H. $\dashv$

Tvrđenje 7.3. *Neka je $h \colon V \to W$ linearno preslikavanje reprezentovano matricom $H \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Tada je h **na** akko je $r(H) = m$ i h je **1-1** akko je $r(H) = n$.*

dokaz. (**na**) Imamo da je $dim(W) = m$. Po teoremi 7.2 je $dim(Im(h)) = r(h) = r(H)$. Dakle,

h je **na** akko $Im(h) = W$ akko (tvrđenje 4.10) $dim(Im(h)) = dim(W)$ akko $r(H) = m$.

(**1-1**) Imamo da je $dim(V) = n$. Po teoremi 7.2 je $r(h) = r(H)$. Dakle,

h je **1-1** akko (teorema 6.17) $r(h) = dim(V)$ akko $r(H) = n$. $\dashv$

POSLEDICA 7.4. *Neka je $h\colon V \to W$ linearno preslikavanje reprezentovano matricom $H \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Tada važi da je h izomorfizam akko je $r(H) = n = m$.*

DEFINICIJA. Matrica $H \in \mathcal{M}_n$ je *nesingularna* kada je $r(H) = n$.

DEFINICIJA. *Glavnu dijagonalu* matrice iz $\mathcal{M}_n$ čine redom njeni elementi a_{11}, $a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

NAPOMENA 7.5. *Matrica je nesingularna akko je njena redukovana stepenasta forma oblika*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

to jest na glavnoj dijagonali su sve jedinice a svi ostali elementi su nule (videti definiciju jedinične matrice u 8.1).

LEMA 7.6. *Matrica reprezentuje izomorfizam akko je ona nesingularna.*

DOKAZ. Neka je H matrica koja reprezentuje h u odnosu na neki par baza. Imamo:

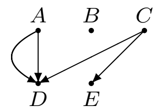
H je nesingularna akko za neko n je $H \in \mathcal{M}_n$ i $r(H) = n$,

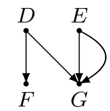
akko h je izomorfizam, posledica 7.4. $\dashv$

PRIMER. Svako linearno preslikavanje reprezentovano matricom $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ je nesingularno zato što je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ redukovana stepenasta forma te matrice, dok je svako linearno preslikavanje reprezentovano matricom $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ singularno zato što je $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ redukovana stepenasta forma te druge matrice.

§7.3. Množenje matrica

PRIMER. Posmatrajmo sledeće usmerene grafove za koje možemo zamisliti da predstavljaju jednosmerne (direktne) puteve između mesta A, B, C i mesta D, E, odnosno između mesta D, E i mesta F, G.

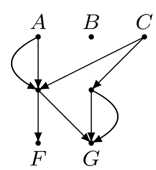


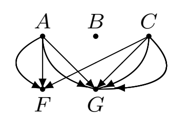


Ove grafove možemo iskodirati redom sledećim matricama:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2 u prvoj koloni leve matrice čitamo kao ,,postoje dva puta od A do D u levom grafu", dok 0 u prvoj koloni te matrice čitamo kao ,,ne postoji put između A i E u levom grafu", itd.). Ako sada posmatramo operaciju ,,nadovezivanja" grafova, to jest stavimo prvi graf iznad drugog i onda posmatramo sve usmerene puteve između mesta A, B, C i mesta F, G (slika levo), onda dobijamo sledeći rezultat (slika desno).





Koja operacija na skupu matrica odgovara operaciji nadovezivanja grafova? Prebrojavanje usmerenih puteva u nadovezanim grafovima nam ukazuje da je to sledeća operacija na matricama (obratiti pažnju na redosled).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrica koju smo dobili kodira gornji desni graf. Ovu operaciju na matricama ćemo zvati *množenje* matrica.

Definicija. *Proizvod* matrica AB, gde je $A = (a_{ij})_{m\times r}$ i $B = (b_{ij})_{r\times n}$, je matrica $C = (c_{ij})_{m\times n}$ takva da je $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{ir}b_{rj}$.

Napomena 7.7. *Neka je $A \in \mathcal{M}_{m\times r}$ i $B = (\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n) \in \mathcal{M}_{r\times n}$, gde je $\vec{v}_i \in \mathbf{R}^r$. Tada važi $AB = (A\vec{v}_1 \ldots A\vec{v}_n)$, gde je $A\vec{v}_i$ proizvod matrice i vektor kolone definisan u 7.1.*

Primer. Neka je $H = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(h) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$, $G = Rep_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i neka je $\vec{v}$ takvo da je $Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Tada važi:

$$
\begin{aligned}
Rep_{\mathcal{D}}(g \circ h(\vec{v})) &= Rep_{\mathcal{D}}(g(h(\vec{v})) = Rep_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) Rep_{\mathcal{C}}(h(\vec{v})), \text{ teorema 7.1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 \end{pmatrix}, \text{ teorema 7.1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot (4x_1 + 6x_2 + 8x_3) + 1 \cdot (5x_1 + 7x_2 + 9x_3) \\ 0 \cdot (4x_1 + 6x_2 + 8x_3) + 1 \cdot (5x_1 + 7x_2 + 9x_3) \\ 1 \cdot (4x_1 + 6x_2 + 8x_3) + 0 \cdot (5x_1 + 7x_2 + 9x_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1 \cdot 4 + 1 \cdot 5)x_1 + (1 \cdot 6 + 1 \cdot 7)x_2 + (1 \cdot 8 + 1 \cdot 9)x_3 \\ (0 \cdot 4 + 1 \cdot 5)x_1 + (0 \cdot 6 + 1 \cdot 7)x_2 + (0 \cdot 8 + 1 \cdot 9)x_3 \\ (1 \cdot 4 + 0 \cdot 5)x_1 + (1 \cdot 6 + 0 \cdot 7)x_2 + (1 \cdot 8 + 0 \cdot 9)x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 & 1 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 1 \cdot 8 + 1 \cdot 9 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 0 \cdot 8 + 1 \cdot 9 \\ 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot 6 + 0 \cdot 7 & 1 \cdot 8 + 0 \cdot 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= (GH)\, Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}).
\end{aligned}
$$

TVRĐENJE 7.8. *Kompozicija linearnih preslikavanja je reprezentovana proizvodom reprezentacija tih preslikavanja.*

DOKAZ. Neka su $h : V \to U$ i $g : U \to W$ linearna preslikavanja i neka su $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$, $\mathcal{C} = \langle \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_r \rangle$ i $\mathcal{D} = \langle \vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_m \rangle$ redom baze za V, U i W. Neka je $H = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(h)$ i $G = Rep_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)$. Tada za svako $1 \leq i \leq n$ važi:

$$
\begin{aligned}
Rep_{\mathcal{D}}(g \circ h(\vec{\beta}_i)) = Rep_{\mathcal{D}}(g(h(\vec{\beta}_i))) &= Rep_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) Rep_{\mathcal{C}}(h(\vec{\beta}_i)) \\
&= G \begin{pmatrix} h_{1i} \\ \vdots \\ h_{ri} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Prema tome, po definiciji je $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ h) = (G \begin{pmatrix} h_{11} \\ \vdots \\ h_{r1} \end{pmatrix} \ldots G \begin{pmatrix} h_{1n} \\ \vdots \\ h_{rn} \end{pmatrix})$, što je po napomeni 7.7 jednako GH. $\dashv$

TVRĐENJE 7.9. *Zbir linearnih preslikavanja je reprezentovan zbirom reprezentacija tih preslikavanja.*

DOKAZ. Neka su $h, g \in \mathcal{L}(V, W)$ (videti definiciju u sekciji 6.2) i neka su redom $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ i $\mathcal{D} = \langle \vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_m \rangle$ baze za V i W. Neka je $H = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)$ i $G = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g)$. Tada za svako $1 \leq i \leq n$ važi:

$$
Rep_{\mathcal{D}}((h+g)(\vec{\beta}_i)) = Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{\beta}_i) + g(\vec{\beta}_i)) = Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{\beta}_i)) + Rep_{\mathcal{D}}(g(\vec{\beta}_i))
$$

$$= \begin{pmatrix} h_{1i} \\ \vdots \\ h_{mi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{1i} \\ \vdots \\ g_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{1i} + g_{1i} \\ \vdots \\ h_{mi} + g_{mi} \end{pmatrix}$$

pa je onda po definiciji $Rep_{B,D}(h+g) = H + G$. ⊣

Tvrđenje 7.10. *Množenje matrica je asocijativno i distribuira se nad sabiranjem.*

dokaz. (**asocijativnost**) Neka su F, G i H matrice za koje je definisan proizvod $(HG)F$. Hoćemo da pokažemo da je $(HG)F = H(GF)$. Neka su $f : V \to U_1$, $g : U_1 \to U_2$ i $h : U_2 \to W$ linearna preslikavanja čije su reprezentacije u odnosu na neke fiksirane baze prostora V, U_1, U_2 i W redom matrice F, G i H. Po tvrđenju 7.8 $(HG)F$ reprezentuje linearno preslikavanje $(h \circ g) \circ f$ koje je zbog asocijativnosti kompozicije jednako $h \circ (g \circ f)$ koje je reprezentovano sa $H(GF)$ u odnosu na iste izabrane baze. Dakle, $(HG)F = H(GF)$.

(**distributivnost**) Neka su sada F, G i H matrice za koje je definisano $F(G+H)$. Hoćemo da pokažemo da je $F(G+H) = FG+FH$. Neka su $f : U \to W$ i $g, h : V \to U$ linearna preslikavanja čije su reprezentacije u odnosu na neke fiksirane baze prostora V, U i W redom matrice F, G i H. Po tvrđenjima 7.8-9 imamo da $F(G+H)$ reprezentuje $f \circ (g + h)$, dok $FG + FH$ reprezentuje $f \circ g + f \circ h$. Još treba pokazati da je $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.

$$\begin{aligned} (f \circ (g+h))(\vec{v}) &= f((g+h)(\vec{v})) = f(g(\vec{v}) + h(\vec{v})) \\ &= f(g(\vec{v})) + f(h(\vec{v})) = f \circ g(\vec{v}) + f \circ h(\vec{v}). \end{aligned}$$

Na isti način bismo pokazali i desnu distributivnost, to jest $(G+H)F = GF+HF$ (što nije samo posledica leve distributivnosti zbog nekomutativnosti množenja). ⊣

Napomena. *Množenje matrica nije komutativno.*

Tvrđenje 7.11. *Množenje matrica zadovoljava:*

(1) $(AB)^T = B^T A^T$;

(2) za $\vec{w} \in \mathbf{R}^m$, *proizvod matrica* $\vec{w}^T \vec{w}$ *jednak je nuli akko je* $\vec{w} = \vec{0}$.

(3) defekti linearnih preslikavanja reprezentovanih matricama $A^T A$ *i* A *su jednaki;*

(4) $r(A^T A) = r(A)$.

dokaz. (1) Direktno iz definicije zbog komutativnosti množenja u $\mathbf{R}$.

(2) Neka je $\vec{w}^T = (x_1, \ldots, x_m)$. Tada iz $\vec{w}^T \vec{w} = x_1^2 + \ldots + x_m^2 = 0$ sledi da je $x_1 = \ldots = x_m = 0$, pa je $\vec{w} = \vec{0}$. Obrat je trivijalan.

(3) Neka je $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ i neka su $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ i $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ linearna preslikavanja takva da je $A = Rep_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m}(g)$ i $A^T A = Rep_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n}(h)$. Pokazaćemo da za proizvoljno $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ važi: $A^T A \vec{v} = \vec{0}$ akko $A\vec{v} = \vec{0}$ što znači da g i h imaju isto jezgro. Implikacija

zdesna ulevo je trivijalna. Ako je $A^TA\vec{v}=\vec{0}$, onda je po (1), $(A\vec{v})^T(A\vec{v})=\vec{v}^TA^TA\vec{v}=0$, pa po (2) važi da je $A\vec{v}=\vec{0}$.

(4) Direktno iz (3) pomoću teorema 6.15 i 7.2. $\dashv$

Tvrđenje 7.12. *Proizvod skalara i linearnog preslikavanja je reprezentovan proizvodom tog istog skalara i reprezentacije tog preslikavanja.*

dokaz. Neka je $h\colon V\to W$ linearno preslikavanje, $H=Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)$ i neka je $c\in\mathbf{R}$. Za svako $\vec{\beta}_i\in\mathcal{B}$ je $Rep_{\mathcal{D}}(ch(\vec{\beta}_i))=cRep_{\mathcal{D}}(h(\vec{\beta}_i))$ pa je po definiciji $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(ch)=cH$. $\dashv$

Tvrđenje 7.13. *Množenje matrica zadovoljava $(cH)G=H(cG)=c(HG)$.*

dokaz. Dovoljno je pokazati da linearna preslikavanja $g:V\to U$ i $h:U\to W$ zadovoljavaju $(ch)\circ g=h\circ(cg)=c(h\circ g)$ što je trivijalno. $\dashv$

Tvrđenje 7.14. *Neka je $\mathcal{B}=\langle\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_n\rangle$ baza za V, a $\mathcal{D}=\langle\vec{\delta}_1,\ldots,\vec{\delta}_m\rangle$ baza za W. Tada je $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}\colon\mathcal{L}(V,W)\to\mathcal{M}_{m\times n}$ izomorfizam.*

dokaz. Po tvrđenjima 7.9 i 7.12, $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$ je linearno preslikavanje. Posmatrajmo preslikavanje iz $\mathcal{M}_{m\times n}$ u $\mathcal{L}(V,W)$ koje slika proizvoljnu matricu $A\in\mathcal{M}_{m\times n}$ u linearno peslikavanje $h\in\mathcal{L}(V,W)$ takvo da je

$$h(\vec{\beta}_i)=a_{1i}\vec{\delta}_1+\ldots+a_{mi}\vec{\delta}_m.$$

Lako se vidi da je to obostrani inverz za $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$. $\dashv$

§8. Odeljak 8.

§8.1. Elementarne redukcijske matrice

Definicija. *Jedinična* matrica E_n (ili I_n) je matrica iz $\mathcal{M}_n$ koja ima jedinice na glavnoj dijagonali a svi ostali elementi su joj nule.

Komentar. *Jedinična matrica je neutral za množenje.*

Primer.
$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -2\\ 1 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -2\\ 1 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 1 & 3 & 8\\ -7 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 1 & 3 & 8\\ -7 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Definicija. *Dijagonalna* matrica je kvadratna matrica koja ima sve nule van glavne dijagonale.

Primer.
$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & -1\\ -1 & 3 & 4 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 2 & 8 & -2\\ 1 & -3 & -4 & -4\end{pmatrix}$ (množenje sleva dijagonalnom matricom ,,rasteže" vrste te matrice),
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\ 6 & 4 & -4\end{pmatrix}$ (množenje zdesna dijagonalnom matricom ,,rasteže" kolone te matrice).

Definicija. *Permutacijska* matrica je kvadratna matrica koja u svakoj vrsti i u svakoj koloni ima tačno jednu jedinicu dok su joj svi ostali elementi nule.

Primer. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ je permutacijska matrica. Množenje sleva tom matricom ciklično permutuje vrste date matrice:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 8 & 9\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

Primetimo da za proizvoljnu matricu $A \in \mathcal{M}_{3\times l}$ važi:

$$E_3 \xrightarrow{\rho_2 \leftrightarrow \rho_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A \xrightarrow{\rho_2 \leftrightarrow \rho_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} A$$

$$E_3 \xrightarrow{3\rho_2} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A \xrightarrow{3\rho_2} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix} A$$

$$E_3 \xrightarrow{2\rho_1+\rho_2} \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A \xrightarrow{2\rho_1+\rho_2} \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} A$$

Znači, ako hoćemo da primenimo neku Gausovu operaciju na $A \in \mathcal{M}_{n\times l}$, dovoljno je primeniti tu operaciju na E_n i dobijenom matricom pomnožiti sleva matricu A.

Definicija. *Elementarne redukcijske* matrice nastaju od jedinične matrice primenom jedne Gausove operacije.

$$E_n \xrightarrow{\rho_i \leftrightarrow \rho_j} P_{i,j} \qquad (i \neq j)$$

$$E_n \xrightarrow{k\rho_i} M_i(k) \qquad (k \neq 0)$$

$$E_n \xrightarrow{k\rho_i+\rho_j} C_{i,j}(k) \qquad (i \neq j)$$

Lema 8.1. *Za matricu $H \in \mathcal{M}_{n\times l}$ važi:*

(1) $H \xrightarrow{\rho_i \leftrightarrow \rho_j} P_{i,j}H$,

(2) $H \xrightarrow{k\rho_i} M_i(k)H$,

(3) $H \xrightarrow{k\rho_i+\rho_j} C_{i,j}(k)H$.

dokaz. Direktno sledi iz definicije množenja matrica. ⊣

Posledica 8.2. *Za svaku matricu H postoje elementarne redukcijske matrice $R_1, \ldots, R_m$ takve da je $R_m R_{m-1} \ldots R_1 H$ u redukovanoj stepenastoj formi.*

Napomena 8.3. *Za elementarne redukcijske matrice važi:*

$$P_{i,j}P_{i,j} = E_n,\ M_i(k)M_i(\tfrac{1}{k}) = E_n \ \text{i}\ C_{i,j}(k)C_{i,j}(-k) = E_n.$$

§8.2. Inverzne matrice

Definicija. Matrica G je *obostrani inverz* kvadratne matrice $H \in \mathcal{M}_n$ kada važi $GH = E_n = HG$. Matricu G označavamo sa H^{-1} a za matricu H kažemo da je *invertibilna*.

Teorema 8.4. *Matrica je invertibilna akko reprezentuje izomorfizam.*

DOKAZ. Neka je H matrica i neka je $h\colon V \to W$ linearno preslikavanje takvo da je $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h) = H$.

Ako je H invertibilna, onda postoji matrica G takva da je $GH = E_n = HG$. Neka je $g\colon W \to V$ takvo da je $Rep_{\mathcal{D},\mathcal{B}}(g) = G$. Tada važi

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g \circ h) = GH = E_n = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathbf{1}_V),$$

pa pošto je $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ izomorfizam, dobijamo $g \circ h = \mathbf{1}_V$. Na isti način pokazujemo da je g desni inverz od h, pa je h izomorfizam.

Ako je h izomorfizam, onda postoji njegov obostrani inverz $g\colon W \to V$. Neka je $G = Rep_{\mathcal{D},\mathcal{B}}(g)$. Tada važi

$$GH = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g \circ h) = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathbf{1}_V) = E_n.$$

Na isti način pokazujemo da je G desni inverz za H, što znači da je H invertibilna. ⊣

POSLEDICA 8.5. *Matrica je invertibilna akko je nesingularna.*

DOKAZ. Direktno iz teoreme 8.4 i leme 7.6. ⊣

LEMA 8.6. *Proizvod invertibilnih matrica je invertibilna matrica.*

DOKAZ. Ako su H^{-1} i G^{-1} obostrani inverzi za H i G istog tipa, onda je $G^{-1}H^{-1}$ (obratiti pažnju na redosled) obostrani inverz za HG. Na isti način sledi da je proizvod proizvoljnog broja invertibilnih matrica invertibilna matrica. ⊣

LEMA 8.7. *Matrica je invertibilna akko je jednaka proizvodu elementarnih redukcijskih matrica.*

DOKAZ. ($\Rightarrow$) Neka je $H \in \mathcal{M}_n$ invertibilna matrica. Po posledici 8.5, H je nesingularna. Po napomeni 7.5, njena redukovana stepenasta forma je E_n. Po posledici 8.2, postoje elementarne redukcijske matrice $R_1, \dots, R_m$ takve da je $R_m R_{m-1} \dots R_1 H = E_n$. Po napomeni 8.3, $R_1, \dots, R_m$ su invertibilne i njihovi inverzi su elementarne redukcijske matrice pa važi $H = R_1^{-1} \dots R_m^{-1}$.

($\Leftarrow$) Neka je $H = R_1 \dots R_m$. Po napomeni 8.3, matrice $R_1, \dots, R_m$ su invertibilne pa je po lemi 8.6 i njihov proizvod invertibilan. ⊣

Prema prvom delu dokaza prethodne leme i lemi 8.1, obostrani inverz invertibilne matrice možemo odrediti sledećim postupkom: datu matricu svodimo na redukovanu stepenastu formu i paralelno iste operacije primenjujemo polazeći od jedinične matrice. Na kraju smo polaznu matricu sveli na jediničnu a jediničnu na inverznu polazne.

PRIMER.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\rho_1 \leftrightarrow \rho_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\rho_1+\rho_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&3&-1&1&0&0\\0&-1&-1&0&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\rho_2\leftrightarrow\rho_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&-1&-1&0&-1&1\\0&3&-1&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-1\rho_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&1&-1\\0&3&-1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{-3\rho_2+\rho_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&1&-1\\0&0&-4&1&-3&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}\rho_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&1&-1\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{3}{4}\end{array}\right)\xrightarrow[-1\rho_3+\rho_1]{-1\rho_3+\rho_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\0&1&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{3}{4}\end{array}\right)$$

§8.3. Promena baze

Neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$ dve baze vektorskog prostora V. Cilj nam je da formiramo matricu koja kad pomnoži reprezentaciju proizvoljnog vektora u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ daje reprezentaciju tog istog vektora u odnosu na bazu $\mathcal{D}$.

Kao posledicu teoreme 7.1, za $\vec{v}\in V$ imamo

$$Rep_{\mathcal{D}}(\vec{v})=Rep_{\mathcal{D}}(\mathbf{1}_V(\vec{v}))=Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(\mathbf{1}_V)\,Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}).$$

Definicija. *Matrica promene baze* iz baze $\mathcal{B}$ u bazu $\mathcal{D}$ vektorskog prostora V je reprezentacija identičnog preslikavanja $\mathbf{1}_V\colon V\to V$ u odnosu na te baze

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(\mathbf{1}_V)=(Rep_{\mathcal{D}}(\vec{\beta}_1)\cdots Rep_{\mathcal{D}}(\vec{\beta}_n))$$

Primer. Neka su $\mathcal{B}=\langle\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rangle$ i $\mathcal{D}=\langle\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle$ baze za $\mathbf{R}^2$. Tada je $Rep_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}_{\mathcal{D}}$ i $Rep_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}_{\mathcal{D}}$.

Znači $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(\mathbf{1}_{\mathbf{R}^2})=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, pa za vektor $\vec{v}\in\mathbf{R}^2$ takav da je $Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v})=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, važi

$$Rep_{\mathcal{D}}(\vec{v})=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+1\\\frac{3}{2}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}_{\mathcal{D}}.$$

Lema 8.8. *Matrica je matrica promene baze akko je nesingularna.*

dokaz. ($\Rightarrow$) Pošto je identično preslikavanje izomorfizam to matrica promene baze reprezentuje izomorfizam pa je po lemi 7.6 ona nesingularna.

($\Leftarrow$) Neka je $A \in \mathcal{M}_n$ nesingularna. Pokazaćemo da je to matrica promene baze iz $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ u standardnu bazu $\mathcal{E}_n$, gde su $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n$ kolone matrice A. Pošto je $r(A) = n$, imamo da je $\underline{\mathcal{B}}$ linearno nezavisan pa je po tvrđenju 4.9, $[\underline{\mathcal{B}}] = \mathbf{R}^n$, te je $\mathcal{B}$ baza za $\mathbf{R}^n$. Pošto je

$$A = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{E}_n}(\mathbf{1}_{\mathbf{R}^n}),$$

to je po definiciji A matrica promene baze iz $\mathcal{B}$ u $\mathcal{E}_n$. $\dashv$

§8.4. Promena reprezentacije preslikavanja

Promena baze menja i reprezentaciju datog linearnog preslikavanja. Neka je $h\colon V \to W$ linearno preslikavanje i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dve baze za n-dimenzionalni prostor V a $\mathcal{D}$ i $\mathcal{D}'$ dve baze za W. Neka je $H = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)$ a $H' = Rep_{\mathcal{B}',\mathcal{D}'}(h)$. Zbog osnovnih svojstava identičnog preslikavanja važi $h \circ \mathbf{1}_V = \mathbf{1}_W \circ h$, pa je i reprezentacija leve i desne strane ove jednakosti, u odnosu na baze $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}'$, jednaka. To izražavamo kroz sledeći dijagram koji komutira

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "h", "H"'] \arrow[d, "\mathbf{1}_V", "Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathbf{1}_V)"'] & W_{\mathcal{D}} \arrow[d, "\mathbf{1}_W", "Rep_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}(\mathbf{1}_W)"'] \\
V_{\mathcal{B}'} \arrow[r, "h", "H'"'] & W_{\mathcal{D}'}
\end{tikzcd}$$

odnosno kao matričnu jednakost $H' Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathbf{1}_V) = Rep_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}(\mathbf{1}_W) H$. Pošto je $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathbf{1}_V) Rep_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathbf{1}_V) = Rep_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\mathbf{1}_V) = E_n$, možemo H' predstaviti kao:

$$H' = Rep_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}(\mathbf{1}_W) H Rep_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathbf{1}_V),$$

i to je način na koji dolazimo do matrice koja reprezentuje dato linearno preslikavanje u odnosu na novi par baza.

Primer. Neka je $t\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ zadano sa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{t}{\mapsto} \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}. \quad \text{Dakle,} \quad Rep_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neka je $\mathcal{B} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ nova baza za $\mathbf{R}^3$. Treba odrediti $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t)$.

Lako određujemo $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3}(\mathbf{1}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ i kao inverz te matrice dobijamo $Rep_{\mathcal{E}_3,\mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Znači,

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Direktno do $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t)$ dolazimo na sledeći način:

$$t(\vec{\beta}_1) = t(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_3} = -\vec{\beta}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$t(\vec{\beta}_2) = t(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_3} = -\vec{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$t(\vec{\beta}_3) = t(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_3} = 2\vec{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Odavde vidimo da će reprezentacija linearnog preslikavanja t biti dijagonalna u odnosu na bazu $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ kada za svako $\vec{\beta}_i$ važi $t(\vec{\beta}_i) = r_i \vec{\beta}_i$ za neko $r_i \in \mathbf{R}$.

Definicija. Matrice H i H' iz $\mathcal{M}_{m\times n}$ su *matrično ekvivalentne* kada postoje nesingularne matrice P i Q takve da je $H' = PHQ$.

Tvrđenje 8.9. *Matrično ekvivalentne matrice reprezentuju isto linearno preslikavanje u odnosu na odgovarajuće baze.*

dokaz. Ovo je posledica leme 8.8. ⊣

Tvrđenje 8.10. *Matrična ekvivalencija matrica je relacija ekvivalencije na $\mathcal{M}_{m\times n}$.*

dokaz. Za $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ važi $A = E_m A E_n$, pa je relacija refleksivna. Ako je $A = PBQ$, onda je $B = P^{-1}AQ^{-1}$, pa je relacija simetrična. Ako je $A = PBQ$ i $B = RCS$, onda je $A = (PR)C(SQ)$ i PR i SQ su nesingularne po lemi 8.6, pa je relacija tranzitivna. ⊣

Primetimo da je matrično ekvivalentna nula matrici samo ona sama jer je uvek

$$P0_{m\times n}Q = 0_{m\times n}.$$

Tvrđenje 8.11. *Vrsta ekvivalentne matrice su matrično ekvivalentne.*

dokaz. Ovo je posledica lema 8.1 i 8.7. ⊣

Teorema 8.12. *Svaka $m \times n$ matrica ranga k je matrično ekvivalentna $m \times n$ matrici oblika*

$$\begin{pmatrix} E_k & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(n-k)} \end{pmatrix}.$$

dokaz. Neka je $H \in \mathcal{M}_{m\times n}$ matrica ranga k. Neka je P proizvod elementarnih redukcijskih matrica koje množenjem sleva svode H (glumeći vrsta transformacije) na redukovanu stepenastu formu koja ima k pivota. Neka je Q proizvod elementarnih redukcijskih matrica koje množenjem zdesna svode PH (glumeći kolona transformacije) na matricu H' u traženoj formi. Matrice P i Q su nesingularne po lemi 8.7 i posledici 8.5. ⊣

Posledica 8.13. *Dve matrice istog tipa su matrično ekvivalentne akko imaju isti rang.*

Kao posledicu tvrđenja 8.9 i teoreme 8.12 imamo da se svako linearno preslikavanje u odnosu na pogodno izabrane baze može posmatrati kao svojevrsna projekcija:

$$c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_k\vec{\beta}_k + \ldots + c_n\vec{\beta}_n \mapsto c_1\vec{\delta}_1 + \ldots + c_k\vec{\delta}_k + \vec{0}.$$

Reprezentaciju u odnosu na takve baze ćemo zvati *idealnom*.

Primer. Neka linearno preslikavanje $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ ima reprezentaciju u odnosu na par kanonskih baza $\mathcal{E}_3$ i $\mathcal{E}_2$ datu matricom

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Odrediti baze $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\beta}_3 \rangle$ od $\mathbf{R}^3$ i $\mathcal{D} = \langle \vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2 \rangle$ od $\mathbf{R}^2$ tako da h u odnosu na njih ima idealnu reprezentaciju.

Kao prvo ćemo odrediti matrice P i Q takve da proizvod $H' = PHQ$ bude u redukovanoj stepenastoj formi i u odnosu na vrste i u odnosu na kolone. Matricu P određujemo sledećim postupkom:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-\rho_1+\rho_2} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricu Q određujemo sledećim postupkom:

$$\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 1&0&2\\0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{-2\gamma_1+\gamma_3}\left(\begin{array}{ccc}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 1&0&0\\0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{-\gamma_2+\gamma_3}\left(\begin{array}{ccc}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&1\\\hline 1&0&0\\0&1&0\end{array}\right),$$

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Po dijagramu s početka odeljka imamo da je

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)=Rep_{\mathcal{E}_2,\mathcal{D}}(\mathbf{1}_{R^2})\,Rep_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_2}(h)\,Rep_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3}(\mathbf{1}_{R^3}),$$

pa je

$$\begin{aligned}Q=Rep_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3}(\mathbf{1}_{R^3})&=(Rep_{\mathcal{E}_3}(\mathbf{1}_{R^3}(\vec{\beta}_1))\;Rep_{\mathcal{E}_3}(\mathbf{1}_{R^3}(\vec{\beta}_2))\;Rep_{\mathcal{E}_3}(\mathbf{1}_{R^3}(\vec{\beta}_3)))\\&=(Rep_{\mathcal{E}_3}(\vec{\beta}_1)\;Rep_{\mathcal{E}_3}(\vec{\beta}_2)\;Rep_{\mathcal{E}_3}(\vec{\beta}_3))\\&=(\vec{\beta}_1\;\vec{\beta}_2\;\vec{\beta}_3).\end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da je

$$\vec{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\vec{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\vec{\beta}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Slično, $P^{-1}=Rep_{\mathcal{D},\mathcal{E}_2}(\mathbf{1}_{R^2})=(\vec{\delta}_1\;\vec{\delta}_2)$, pa kad izračunamo da je

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},$$

dobijamo da je

$$\vec{\delta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad\vec{\delta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

§9. Odeljak 9.

§9.1. Determinante, definicija i osnovna svojstva

U ovoj sekciji ćemo definisati funkciju koja preslikava skup svih kvadratnih matrica u skup $\mathbf{R}$.

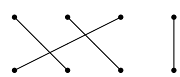
Bijekciju $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ nazivamo *permutacijom* skupa $\{1, \ldots, n\}$. Permutaciju π možemo zadati matricom tipa $2 \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

iz koje možemo slobodno izostaviti prvu vrstu (koja se uvek može rekonstruisati) i prosto permutaciju π zadati vektor vrstom

$$\begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Na primer, $\pi = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ je pemutacija skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ takva da je $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 1$ i $\pi(4) = 4$. Nju je najbolje ilustrovati dijagramom

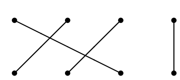


Skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ označavamo sa Π_n. Taj skup ima $n!$ elemenata.

Uređeni par $(\pi(i), \pi(j))$ čini *inverziju* u permutaciji π kada je $i < j$, a $\pi(i) > \pi(j)$. Na primer, u slučaju permutacije $\pi = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, imamo ukupno dve inverzije $(2, 1)$ i $(3, 1)$. Na gornjem dijagramu to se ogleda u postojanju dva ,,ukrštanja”. Za permutaciju kažemo da je *parna* kada ima paran broj inverzija i kažemo da je *neparna* kada ima neparan broj inverzija. Definišimo funkciju *sgn* na skupu permutacija kao

$$sgn(\pi) =_{df} \begin{cases} 1, & \text{ako je } \pi \text{ parna;} \\ -1, & \text{ako je } \pi \text{ neparna.} \end{cases}$$

Inverzna permutacija permutacije π iz gornjeg primera je $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ i tu imamo dve iverzije $(3, 1)$ i $(3, 2)$. Dijagram koji odgovara π^{-1} je



Napomena 9.1. $sgn(\pi^{-1}) = sgn(\pi)$.

dokaz. Pošto je dijagram koji odgovara permutaciji π^{-1} osnosimetričan dijagramu koji odgovara permutaciji π u odnosu na horizontalnu osu, to je broj ukrštanja u ovim dijagramima jednak. $\dashv$

Napomena 9.2. *Ako permutacija π' nastaje od permutacije π zamenom mesta dva elementa onda je $sgn(\pi') = -sgn(\pi)$.*

Definicija. Neka je $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}_n$. *Determinantu* matrice A u oznaci $det(A)$ ili samo $|A|$, definišemo kao realan broj

$$\sum_{\pi\in\Pi_n} sgn(\pi)\, a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\dots a_{n\pi(n)}.$$

Primer. Za $n = 2$ i $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ imamo da je $\Pi_2 = \{\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\}$, pri čemu prva permutacija nema inverzija pa je parna a druga ima jednu inverziju pa je neparna. Dakle imamo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Tvrđenje 9.3. *$det(A^T) = det(A)$.*

dokaz. Pošto je $a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\dots a_{n\pi(n)} = a_{\pi^{-1}(1)1}a_{\pi^{-1}(2)2}\dots a_{\pi^{-1}(n)n}$ i po napomeni 9.1 je $sgn(\pi^{-1}) = sgn(\pi)$, onda se može zaključiti da je $det(A^T) = det(A)$. ⊣

Tvrđenje 9.4. *Determinanta menja znak kad dve vrste matrice zamene mesta, to jest*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ & & \dots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dokaz. Ovo je posledica napomene 9.2. ⊣

Tvrđenje 9.5.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \dots & a_{in}+a'_{in} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dokaz. Ovo sledi direktno iz definicije kao posledica distributivnosti množenja prema sabiranju pošto svaki sabirak u sumi koja definiše determinantu s leve strane jednakosti sadrži tačno jedan faktor oblika $a_{ij} + a'_{ij}$. ⊣

Tvrđenje 9.6.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dokaz. Ovo opet sledi direktno iz definicije kao posledica distributivnosti množenja prema sabiranju (koja se sada koristi u obrnutom smeru) pošto svaki sabirak u sumi koja definiše determinantu s leve strane jednakosti ima zajednički faktor k. $\dashv$

Definicija. Matrica $A \in \mathcal{M}_n$ je *donje-trougaona* kad su joj svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki 0. Ona je *gornje-trougaona* kad su joj svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki 0. *Trougaona* matrica je matrica koja je donje-trougaona ili gornje-trougaona.

Tvrđenje 9.7. *Ako je $A \in \mathcal{M}_n$ trougaona, onda je $det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.*

dokaz. Svi ostali sabirci iz definicije determinante imaju bar jedan faktor 0. $\dashv$

Posledica 9.8. *Ako je $A \in \mathcal{M}_n$ dijagonalna, onda je $det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.*

Tvrđenje 9.9. *Za kvadratnu matricu A važi:*

(1) ako A ima dve jednake vrste onda je $det(A) = 0$;

(2) ako A ima nula-vrstu onda je $det(A) = 0$.

dokaz. (1) Ako zamenimo mesta jednakim vrstama po tvrđenu 9.4 dobijamo $det(A) = -det(A)$, što daje $det(A) = 0$.

(2) Direktno iz tvrđenja 9.6. $\dashv$

Tvrđenje 9.10. *Za kvadratnu matricu A važi:*

(1) ako $A \xrightarrow{\rho_i \leftrightarrow \rho_j} B$ $(i \neq j)$, onda $det(B) = -det(A) = det(P_{i,j})\, det(A)$;

(2) ako $A \xrightarrow{k\rho_i} B$, onda $det(B) = k\, det(A) = det(M_i(k))\, det(A)$;

(3) ako $A \xrightarrow{k\rho_i + \rho_j} B$ $(i \neq j)$, onda $det(B) = det(A) = det(C_{i,j}(k))\, det(A)$.

dokaz. (1) Tvrđenje 9.4. (2) Tvrđenje 9.6. (3) Po tvrđenjima 9.5 i 9.6 dobijamo da je $det(B) = k\, det(A') + det(A)$, gde matrica A' ima dve iste vrste, pa je $det(A') = 0$, po tvrđenju 9.9 (1). $\dashv$

Napomena 9.11. *Po tvrđenju 9.3, sve ovo važi i kada umesto ,,vrste” stavimo ,,kolone”.*

TVRĐENJE 9.12. *Neka je $R \in \mathcal{M}_n$ elementarna redukcijska matrica i neka je $A \in \mathcal{M}_n$. Tada važi $det(RA) = det(R)\, det(A)$.*

DOKAZ. Ovo je posledica leme 8.1 i tvrđenja 9.10. $\dashv$

TVRĐENJE 9.13. *Determinanta elementarne redukcijske matrice je različita od nule.*

DOKAZ. $det(P_{i,j}) = -1$, $det(M_i(k)) = k$ i $det(C_{i,j}(k)) = 1$. $\dashv$

TVRĐENJE 9.14. *Neka je $A \in \mathcal{M}_n$ i neka je B rezultat primene Gausovih operacija na A. Tada važi: $det(A) = 0$ akko $det(B) = 0$.*

DOKAZ. Iz tvrđenja 9.10 i 9.13. $\dashv$

TEOREMA 9.15. *Kvadratna matrica je invertibilna akko je njena determinanta različita od nule.*

DOKAZ. Neka je B redukovana stepenasta forma matrice A. Ako je A invertibilna, onda je B jedinična matrica, pa je $det(B) = 1$, što po prethodno tvrđenju daje $det(A) \neq 0$. Ako A nije invertibilna, onda je B gornje-trougaona sa nekim nulama na dijagonali, što znači da je $det(B) = 0$, pa je po prethodnom tvrđenju i $det(A) = 0$. $\dashv$

TEOREMA 9.16 (BINE-KOŠI). *$det(AB) = det(A)\, det(B)$.*

DOKAZ. Neka su $A, B \in \mathcal{M}_n$. Ako A nije invertibilna onda je $r(A) < n$ pa ni AB nije invertibilna jer je $r(AB) \leq r(A)$ $(Im(g \circ h) \subseteq Im(g))$. Po teoremi 9.15, obe strane gornje jednakosti su 0.

Ako je A invertibilna, onda je ona jednaka proizvodu elementarnih redukcijskih matrica i dovoljno je primeniti tvrđenje 9.12. $\dashv$

§9.2. Minori i kofaktori

U ovoj sekciji pretpostavljamo da je $n \geq 2$ i to nećemo dalje naglašavati.

DEFINICIJA. Za matricu $A \in \mathcal{M}_n$, definišemo matricu $M_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}$ kao matricu koja nastaje kada u A obrišemo i-tu vrstu i j-tu kolonu.

DEFINICIJA. *Minor* elementa a_{ij} matrice $A \in \mathcal{M}_n$ je broj $det(M_{ij})$.

DEFINICIJA. *Kofaktor* elementa a_{ij} matrice $A \in \mathcal{M}_n$, u oznaci A_{ij}, je $(-1)^{i+j}\, det(M_{ij})$.

TEOREMA 9.17 (LAPLASOV RAZVOJ DETERMINANTE). *Neka je $A \in \mathcal{M}_n$. Tada za sve $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ važi:*

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

DOKAZ. (skica) Za datu permutaciju π skupa $\{1,\dots,n\}$ i proizvoljno $1 \leq i \leq n$, označimo sa $\pi_{\hat{i}}$ permutaciju skupa $\{1,\dots,n-1\}$ koja nastaje od π izbacivanjem para $(i,\pi(i))$ i odgovarajućim dekalažom. Na primer, ako je π permutacija $\pi = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$, onda je $\pi_{\hat{2}}$ permutacija $\pi = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ (izbrišemo drugi element, a sve veće od njega smanjimo za jedan), dok je $\pi_{\hat{3}}$ identitet $\pi = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Može se lako pokazati da ako je zbir $i+\pi(i)$ paran, onda su permutacije π i $\pi_{\hat{i}}$ iste parnosti, odnosno ako je taj zbir neparan, onda su π i $\pi_{\hat{i}}$ različite parnosti.

Fiksirajmo $i \in \{1,\dots,n\}$. Ako u sumi koja definiše $det(A)$ uočimo sabirak koji sadrži faktor $a_{i\pi(i)}$, onda ostatak tog sabirka predstavlja jedan sabirak u sumi koja definiše minor $det(M_{i\pi(i)})$ i to baš onaj koji odgovara permutaciji $\pi_{\hat{i}}$. Dakle, ako iz sume koja definiše $det(A)$ izdvojimo svih $(n-1)!$ sabiraka koji sadrže faktor $a_{i\pi(i)}$ i izvučemo taj zajednički faktor, uz njega će stajati suma koja odgovara $(-1)^{i+\pi(i)}\,det(M_{i\pi(i)})$, to jest $A_{i\pi(i)}$. Još samo treba primetiti da a_{ij} i a_{ik} za $i \neq k$ nikada ne pripadaju istom sabirku u sumi koja definiše $det(A)$, a svaki sabirak sadrži bar jedan faktor oblika $a_{i\pi(i)}$ za neku permutaciju π. ⊣

DEFINICIJA. *Adjungovana* matrica matrice $A \in \mathcal{M}_n$, u oznaci $adj(A)$ je matrica

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

TEOREMA 9.18 (LAPLAS). *Za $A \in \mathcal{M}_n$ važi:*

$$A\,adj(A) = adj(A)\,A = det(A)\,E_n.$$

DOKAZ. Po teoremi 9.17 imamo da su svi elementi na glavnoj dijagonali i prvog i drugog proizvoda jednaki $det(A)$. Svi ostali elementi van glavne dijagonale su 0 zato što predstavljaju determinante matrica s dve iste vrste odnosno dve iste kolone. Na primer, na mestu 12 u levom proizvodu se nalazi $a_{11}A_{21} + \ldots + a_{1n}A_{2n}$ a to je, po teoremi 9.17, determinanta matrice koja nastaje od A kada joj se druga vrsta zameni prvom. Pošto je to determinanta matrice koja ima istu prvu i drugu vrstu, ona je jednaka nuli. ⊣

POSLEDICA 9.19. *Za $A \in \mathcal{M}_n$ takvu da je $det(A) \neq 0$ važi:*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\,adj(A).$$

DOKAZ. Samo treba primetiti da je $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ i primeniti teoremu 9.18. $\dashv$

TVRĐENJE 9.20. *Za matricu $A \in \mathcal{M}_n$ važi: A je invertibilna akko $adj(A)$ je invertibilna.*

DOKAZ. Pomoću teorema 9.18 i 9.16 dobijamo da je $det(A)\, det(adj(A)) = (det(A))^n$. Dakle, ako je matrica A invertibilna, onda je $det(A) \neq 0$ pa je i $det(adj(A)) \neq 0$, što znači da je $adj(A)$ invertibilna.

Ako je $adj(A)$ invertibilna, onda je A matrično ekvivalentna sa $adj(A)\, A$. Ako pretpostavimo da je $det(A) = 0$, onda po teoremi 9.18 imamo da je $adj(A)\, A = det(A)\, E_n = 0_{n\times n}$. Pošto je matrično ekvivalentna nula matrici samo nula matrica, dobijamo da je A nula matrica. Odatle sledi da je i $adj(A)$ nula matrica, što je suprotno pretpostavci da je $adj(A)$ invertibilna. Dakle, A je invertibilna. $\dashv$

POSLEDICA 9.21. *Za matricu $A \in \mathcal{M}_n$ važi: $det(adj(A)) = (det(A))^{n-1}$.*

DOKAZ. Ako je $det(A) = 0$ onda je po tvrđenju 9.20 i $det(adj(A)) = 0$ pa jednakost važi. Ako je $det(A) \neq 0$, onda je dovoljno podeliti $det(A)\, det(adj(A)) = (det(A))^n$ sa $det(A)$. $\dashv$

§9.3. Kramerova teorema

Neka je dat sistem n linearnih jednačina sa n promenljivih:

$$\begin{array}{lccl} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ & \vdots & & \\ a_{n1}x_1+ & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{array}$$

Matrično, ovaj sistem možemo zapisati kao:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

odnosno

$$AX = B.$$

Neka je $\Delta = det(A)$, a Δ_i neka je determinanta matrice nastale zamenom i-te kolone matrice A kolonom B, to jest

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1\; a_{12} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ b_n\; a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}\; b_1 \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}\; b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n-1}\; b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nn-1}\; b_n \end{vmatrix}.$$

TEOREMA 9.22 (KRAMER). (1) *Gorenavedeni sistem ima jedinstveno rešenje akko je* $\Delta \neq 0$*; u tom slučaju je:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

(2) *Ako je* $\Delta = 0$ *i sistem ima rešenja, onda za svako* $1 \leq i \leq n$ *je* $\Delta_i = 0$.

DOKAZ. (1) Pretpostavimo da je $\Delta \neq 0$, pa je $adj(A)$ invertibilna. Tada je

$$AX = B \Leftrightarrow adj(A)\, AX = adj(A)\, B \Leftrightarrow \Delta X = adj(A)\, B,$$

a pošto je $adj(A)\, B = \begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2} \\ \ldots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$, dobijamo jedinstveno rešenje koje je navedeno.

Ako je je $\Delta = 0$, onda je matrica A singularna i $r(A) = r < n$. Po teoremi 5.4, dimenzija prostora rešenja odgovarajućeg homogenog sistema je $n - r$, pa po tvrđenju 1.6 ako polazni sistem ima partikularno rešenje, ono ne može biti jedinstveno.

(2) Pretpostavimo da je $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ rešenje sistema, to jest važi $A\vec{v} = B$. Odavde sledi da važi $adj(A)\, A\vec{v} = adj(A)\, B$, pa je $\Delta\vec{v} = adj(A)\, B$. Pošto je $\Delta = 0$, dobijamo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$$

što je i trebalo pokazati. ⊣

U slučaju kada je $\Delta = \Delta_1 = \ldots = \Delta_n = 0$, Kramerova teorema nam daje samo da ukoliko sistem ima rešenja, ima ih beskonačno mnogo. Ovo se posebno odnosi na homogen sistem n jednačina sa n promenljivih koji uvek ima trivijalno rešenje te onda znamo da $\Delta = 0$ povlači postojanje beskonačno mnogo rešenja.

§10. Odeljak 10.

§10.1. Linearni operatori i sličnost matrica

Ovaj i sledeći odeljak su posvećeni linearnim preslikavanjima koja preslikavaju vektorski prostor u samog sebe. Takva linearna preslikavanja nazivamo *endomorfizmima* ili *linearnim operatorima*. Označimo sa $\mathcal{L}(V)$ skup svih linearnih operatora na vektorskom prostoru V (prema notaciji iz 6.2 bilo bi $\mathcal{L}(V,V)$). Po tvrđenju 6.12, $\mathcal{L}(V)$ je vektorski prostor (potprostor od V^V). Prostor $\mathcal{L}(V)$ je još zatvoren za kompoziciju preslikavanja koja je asocijativna. Dalje, na osnovu dokaza tvrđenja 7.10 imamo da u $\mathcal{L}(V)$ važi

$$(h+g)\circ f=(h\circ f)+(g\circ f),\quad h\circ(g+f)=(h\circ g)+(h\circ f),$$

pa je $(\mathcal{L}(V),+,\circ,-,0,\mathbf{1}_V)$ prsten sa jedinicom. U toj strukturi, na osnovu dokaza tvrđenja 7.13, važi još i

$$(ch)\circ g=h\circ(cg)=c(h\circ g).$$

Ovo znači da $\mathcal{L}(V)$ ima strukturu $\mathbf{R}$-*algebre*. Isto tako je i $(\mathcal{M}_n,+,\cdot,-,0_{n\times n},E_n)$ jedna $\mathbf{R}$-algebra.

Neka je $p(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ polinom sa realnim koeficijentima. Za $h\in\mathcal{L}(V)$ definišemo $p(h)$, to jest $a_nh^n+\ldots+a_1h+a_0\in\mathcal{L}(V)$ kao

$$a_n\underbrace{h\circ\ldots\circ h}_{n}+\ldots+a_1h+a_0\mathbf{1}_V.$$

Analogno, za $H\in\mathcal{M}_n$ definišemo $p(H)$, to jest $a_nH^n+\ldots+a_1H+a_0\in\mathcal{M}_n$ kao

$$a_n\underbrace{H\ldots H}_{n}+\ldots+a_1H+a_0E_n.$$

Iz gorenavedenih jednakosti i komutativnosti množenja polinoma dobijamo:

TVRĐENJE 10.0. *Ako je $p(x)=q(x)\cdot r(x)$, onda je*

$$p(h)=q(h)\circ r(h)=r(h)\circ q(h)\quad i\quad p(H)=q(H)r(H)=r(H)q(H).$$

U sekciji 8.4 smo definisali kada su dve matrice matrično ekvivalentne. Sad ćemo definisati relaciju na $\mathcal{M}_n$ koja predstavlja profinjenje relacije matrične ekvivalencije.

DEFINICIJA. Matrice H i H' iz $\mathcal{M}_n$ su *slične* kada postoji nesingularna matrica P takva da je $H'=P^{-1}HP$. Matrica P je *matrica prelaza* za H i H'.

TVRĐENJE 10.1. *Sličnost matrica je relacija ekvivalencije na $\mathcal{M}_n$.*

DOKAZ. (refleksivnost) $H = E_nHE_n$; (simetričnost) ako je $H' = P^{-1}HP$, onda je $H = PH'P^{-1}$; (tranzitivnost) ako je $H' = P^{-1}HP$ i $H'' = Q^{-1}H'Q$, onda je $H'' = (PQ)^{-1}HPQ$. ⊣

PRIMER. Nula matrici je slična samo ona sama jer je $P^{-1}0_{n\times n}P = 0_{n\times n}$. Takođe, jediničnoj matrici je slična samo ona sama jer je $P^{-1}E_nP = E_n$. Ako su dve matrice slične onda su one i matrično ekvivalentne. Obrat ne važi.

TVRĐENJE 10.2. *Ako su matrice $H, G \in \mathcal{M}_n$ slične, onda:*

(1) $det(H) = det(G)$,

(2) *za proizvoljan polinom $p(x)$, matrice $p(H)$ i $p(G)$ su takođe slične sa istom matricom prelaza kao i matrice H i G.*

DOKAZ. Neka je $H = P^{-1}GP$. Tada je uz pomoć teoreme 9.16

$$\begin{aligned} det(H) &= det(P^{-1})\cdot det(G)\cdot det(P) = det(P^{-1})\cdot det(P)\cdot det(G) = det(E_n)\cdot det(G) \\ &= det(G) \end{aligned}$$

i još je zbog distributivnosti i zato što je $H^k = (P^{-1}GP)^k = P^{-1}G^kP$,

$$P^{-1}(a_mG^m + \ldots + a_1G + a_0E_n)P = a_mH^m + \ldots + a_1H + a_0E_n.$$ ⊣

§10.2. Dijagonalizabilnost

U primeru iz sekcije 8.4 smo videli da je reprezentacija $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t)$, linearnog operatora $t\colon V \to V$ dijagonalna kada za svako $\vec{\beta}_i \in \mathcal{B}$ postoji $\lambda_i \in \mathbf{R}$, tako da važi $t(\vec{\beta}_i) = \lambda_i\vec{\beta}_i$.

DEFINICIJA. Linearni operator $t\colon V \to V$ je *dijagonalizabilan* kada postoji baza $\mathcal{B}$ za V takva da je $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t)$ dijagonalna matrica. Matrica je *dijagonalizabilna* kada postoji dijagonalna matrica koja joj je slična.

PRIMER. Može se pokazati da postoje matrice koje nisu dijagonalizabilne. Na primer, matrica $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nije dijagonalizabilna jer bi dijagonalna matrica D slična matrici A bila ne-nula matrica po gornjem primeru. Po tvrđenju 10.2, matrice $A^2 = 0_{2\times 2}$ i D^2 bi bile slične što je nemoguće jer D^2 ne bi bila nula matrica.

TVRĐENJE 10.3. *Linearni operator $t\colon V \to V$ je dijagonalizabilan akko postoji baza $\mathcal{B} = \langle\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n\rangle$ za V i skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tako da za svako $1 \leq i \leq n$ važi $t(\vec{\beta}_i) = \lambda_i\vec{\beta}_i$.*

DOKAZ. Direktno po definiciji reprezentacije linearnog preslikavanja imamo da je $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ akko za svako $1 \leq i \leq n$ važi $t(\vec{\beta}_i) = \lambda_i\vec{\beta}_i$. ⊣

Primer 2. Ako hoćemo da dijagonalizujemo matricu $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ poći ćemo od toga da je $T = Rep_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2}(t)$ za linearno preslikavanje $t\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Treba da odredimo bazu $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2 \rangle$ za $\mathbf{R}^2$ i skalare λ_1 i λ_2 takve da je $t(\vec{\beta}_1) = \lambda_1\vec{\beta}_1$ i $t(\vec{\beta}_2) = \lambda_2\vec{\beta}_2$, to jest

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\beta}_1 = \lambda_1\vec{\beta}_1, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\beta}_2 = \lambda_2\vec{\beta}_2.$$

Posmatrajmo jednačinu po nepoznatim x, b_1 i b_2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

za koju treba odrediti dva rešenja takva da $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ iz prvog rešenja i $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ iz drugog rešenja budu linearno nezavisni. Gornja jednačina nam daje nelinearan sistem

$$\begin{aligned} (3-x)b_1 + \quad 2b_2 &= 0 \\ (1-x)b_2 &= 0 \end{aligned}$$

koji možemo posmatrati kao linearni sistem s parametrom x po b_1 i b_2. Po Kramerovoj teoremi on ima netrivijalno rešenje akko je $\begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = 0$, što je ekvivalentno sa $x = 3$ ili $x = 1$. Za $x = 3$ imamo da je skup rešenja gornjeg sistema oblika

$$\{\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid b_1 \in \mathbf{R}\} = \{b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid b_1 \in \mathbf{R}\},$$

dok je za $x = 1$ skup rešenja gornjeg sistema oblika

$$\{\begin{pmatrix} -b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \mid b_2 \in \mathbf{R}\} = \{b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid b_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Pošto su vektori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linearno nezavisni imamo da je $\mathcal{B} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ baza za $\mathbf{R}^2$ i

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§10.3. Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori

Definicija. Ako za linearni operator $t\colon V \to V$, ne-nula vektor $\vec{v} \in V$ i skalar λ važi da je $t(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, onda kažemo da je $\vec{v}$ *sopstveni vektor* koji odgovara *sopstvenoj vrednosti* λ operatora t.

Definicija. Ako za matricu $T \in \mathcal{M}_n$, ne-nula vektor $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ i skalar λ važi da je $T\vec{v} = \lambda\vec{v}$, onda kažemo da je $\vec{v}$ *sopstveni vektor* koji odgovara *sopstvenoj vrednosti* λ matrice T.

NAPOMENA 10.4. *Ako je λ sopstvena vrednost za linearni operator, onda je λ sopstvena vrednost za bilo koju reprezentaciju, u odnosu na par istih baza, tog operatora. Znači slične matrice imaju iste sopstvene vrednosti. Međutim, to ne znači da slične matrice imaju iste sopstvene vektore.*

DEFINICIJA. *Karakteristični polinom* matrice $T \in \mathcal{M}_n$ je $det(T - xE_n)$ posmatrana kao polinom po promenljivoj x. *Karakteristična jednačina* te matrice je

$$det(T - xE_n) = 0.$$

Karakteristični polinom linearnog operatora je karakteristični polinom bilo koje njegove reprezentacije, u odnosu na par istih baza. Korektnost ove definicije sledi iz donjeg tvrđenja 10.6.

NAPOMENA 10.5. *Skalar λ je sopstvena vrednost matrice akko je λ nula karakterističnog polinoma te matrice.*

DOKAZ. Ovo važi zbog toga što je λ nula karakterističnog polinoma matrice T akko jednačina $T\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ima netrivijalno rešenje po $\vec{v}$. $\dashv$

TVRĐENJE 10.6. *Slične matrice imaju iste karakteristične polinome.*

DOKAZ. U osnovi, ovo se može pokazati pomoću tvrđenja 10.2. Za direktan dokaz pretpostavimo da je $T = P^{-1}T'P$. Tada važi:

$$\begin{aligned}
det(T - xE_n) &= det(P^{-1}T'P - xE_n) = det(P^{-1}T'P - xP^{-1}E_nP)\\
&= det(P^{-1}T'P - P^{-1}(xE_n)P) = det(P^{-1}(T' - xE_n)P)\\
&= det(P^{-1})\, det(T' - xE_n)\, det(P)\\
&= det(E_n)\, det(T' - xE_n) = det(T' - xE_n).
\end{aligned}$$ $\dashv$

DEFINICIJA. *Sopstveni prostor* linearnog operatora $t : V \to V$ koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ je skup $V_\lambda = \{\vec{v} \in V \mid t(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\} = Ker(t - \lambda\mathbf{1}_V)$. Na isti način definišemo *sopstveni prostor* matrice $T \in \mathcal{M}_n$ kao podskup od $\mathbf{R}^n$.

Iz definicije sopstvenog prostora dobijamo sledeće tvrđenje.

TVRĐENJE 10.7. *Sopstveni prostor V_λ je potprostor od V.*

PRIMER. U drugom primeru iz sekcije 10.2, sopstveni prostor koji odgovara sopstvenoj vrednosti 3 je sledeći potprostor od $\mathbf{R}^2$

$$\{\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid b_1 \in \mathbf{R}\} = \{b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid b_1 \in \mathbf{R}\},$$

dok je sopstveni prostor koji odgovara sopstvenoj vrednosti 1 sledeći potprostor od $\mathbf{R}^2$

$$\{\begin{pmatrix} -b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \mid b_2 \in \mathbf{R}\} = \{b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid b_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Definicija. Dimenzija prostora V_λ je *geometrijska višestrukost* sopstvene vrednosti λ dok je njena *algebarska višestrukost*, višestrukost korena λ karakterističnog polinoma.

Definicija. *Trag* matrice $A \in \mathcal{M}_n$ je suma njenih elemenata na glavnoj dijagonali $tr(A) =_{df} a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

Napomena 10.8. *Karakteristični polinom matrice $A \in \mathcal{M}_2$ je uvek oblika $x^2 - tr(A)x + det(A)$.*

dokaz. Proverom direktno iz definicije karakterističnog polinoma. ⊣

Dosta lako se pokazuje da je koeficijent uz x^{n-1} karakterističnog polinoma matrice $A \in \mathcal{M}_n$ uvek $(-1)^{n-1}tr(A)$, što po tvrđenju 10.6 znači da slične matrice imaju isti trag.

Teorema 10.9. *Ako su $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ sopstveni vektori koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ linearnog operatora t, onda je $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ linearno nezavisan skup.*

dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po k. Za $k = 1$, pošto je $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, to je $\{\vec{v}_1\}$ linearno nezavisan.

Pretpostavimo da je $k \geq 2$ i da je $c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_{k-1}\vec{v}_{k-1} + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$. S jedne strane pomnožimo tu jednakost sa λ_k a s druge strane primenimo t na ovu jednakost i dobijamo

$$c_1\lambda_k\vec{v}_1 + \ldots + c_{k-1}\lambda_k\vec{v}_{k-1} + c_k\lambda_k\vec{v}_k = \vec{0},$$

$$c_1\lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + c_{k-1}\lambda_{k-1}\vec{v}_{k-1} + c_k\lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}.$$

Kad od prve jednakosti oduzmemo drugu dobijamo

$$c_1(\lambda_k - \lambda_1)\vec{v}_1 + \ldots + c_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})\vec{v}_{k-1} = \vec{0},$$

odakle, po induktivnoj hipotezi, dobijamo da je

$$c_1(\lambda_k - \lambda_1) = \ldots = c_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 0.$$

Pošto je $\lambda_k \neq \lambda_i$ za $1 \leq i \leq k-1$, sledi da je $c_1 = \ldots = c_{k-1} = 0$. Iz polazne jednakosti dobijamo $c_k\vec{v}_k = \vec{0}$, pa pošto je $\vec{v}_k \neq \vec{0}$, to je i $c_k = 0$. ⊣

Posledica 10.10. *Ako matrica iz $\mathcal{M}_n$ ima n različitih sopstvenih vrednosti onda je ona dijagonalizabilna.*

dokaz. Direktno iz teoreme 10.9 i tvrđenja 10.3. ⊣

§11. Odeljak 11.

§11.1. Minimalni polinom

Ako je $\mathcal{B}$ baza za n-dimenzionalni prostor V, $t \in \mathcal{L}(V)$, $T = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t)$ matrica i $p(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ neki polinom, onda je po tvrđenjima 7.8-9 i 7.12

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p(t)) = p(T) = a_m T^m + \ldots + a_1 T + a_0 E_n.$$

Pošto je dimenzija prostora $\mathcal{M}_n$ jednaka n^2 sledi da je $\{E_n, T, T^2, \ldots, T^{n^2}\}$ linearno zavisan skup pa postoji netrivijalan polinom $p(x) \in \mathcal{P}_{n^2}$ takav da je $p(T) = 0_{n\times n}$. Odavde zaključujemo da je $p(t)$ *nula preslikavanje* (svaki vektor iz V slika u $\vec{0}$).

Definicija. *Minimalni* polinom linearnog operatora $t: V \to V$ je polinom $m(x)$ najmanjeg stepena, čiji je vodeći koeficijent 1, takav da je $m(t)$ nula preslikavanje. *Minimalni* polinom matrice $T \in \mathcal{M}_n$ je polinom $m(x)$ najmanjeg stepena, čiji je vodeći koeficijent 1, takav da je $m(T)$ nula matrica.

Tvrđenje 11.1. *Svaka matrica iz $\mathcal{M}_n$ ima jedinstven minimalni polinom. Slične matrice imaju isti minimalni polinom.*

dokaz. Po gornjim komentarima, za svaku matricu $T \in \mathcal{M}_n$ postoji netrivijalan polinom $p(x) \in \mathcal{P}_{n^2}$ takav da je $p(T)$ nula matrica. Neka je $p(x)$ netrivijalan polinom najmanjeg stepena takav da je $p(T)$ nula matrica. Ako $p(x)$ pomnožimo recipročnom vrednošću vodećeg koeficijenta dobićemo polinom čiji je vodeći koeficijent jednak 1 i on je po definiciji minimalni polinom matrice T.

Ako bi postojala dva minimalna polinoma $m_1(x)$ i $m_2(x)$ stepena k, onda je njihova razlika $r(x) = m_1(x) - m_2(x)$ polinom u $\mathcal{P}_{k-1}$ takav da je $r(T)$ nula matrica pa $r(x)$ mora biti trivijalan polinom, što znači da je $m_1(x) = m_2(x)$.

Po tvrđenju 10.2 i primeru neposredno iznad njega, za slične matrice H i H' i proizvoljan polinom $p(x)$ važi

$$p(H) = 0_{n\times n} \Leftrightarrow p(H') = 0_{n\times n},$$

pa one imaju isti minimalni polinom. ⊣

Posledica 11.2. *Svaki linearan operator ima jedinstven minimalni polinom.*

Primer. Neka je $t\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ rotacija ravni za ugao $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ (videti drugi primer u sekciji 7.1). Tada je t reprezentovano u odnosu na par standardnih baza matricom

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Kako je $T^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, lako vidimo da je $T^2 - \sqrt{3}T + E_2$ nula matrica, pa je $m(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 1$ minimalni polinom za T, pošto je $\{T, E_2\}$ linearno nezavisan.

Tvrđenje 11.3. *Ako se polinom $p(x)$ faktoriše kao $c(x-\lambda_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_k)^{q_k}$, onda za linearni operator $t\colon V \to V$ važi da je*

$$p(t) = c(t-\lambda_1)^{q_1} \circ \ldots \circ (t-\lambda_k)^{q_k}.$$

dokaz. Direktno iz tvrđenja 10.0. ⊣

Kao posledicu možemo zaključiti da ako se minimalni polinom $m(x)$ linearnog operatora $t\colon V \to V$, za netrivijalan prostor V, faktoriše kao

$$m(x) = (x-\lambda_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_k)^{q_k},$$

onda se, pošto $m(t)$ slika svaki vektor iz V u $\vec{0}$, bar jedan ne-nula vektor iz V slika sa nekim $t-\lambda_i$ u $\vec{0}$, što znači da je bar jedno λ_i sopstvena vrednost preslikavanja t. Cilj nam je da pokažemo da će sve sopstvene vrednosti za t biti koreni minimalnog polinoma za t i da će minimalni polinom za t deliti karakteristični polinom za t.

Teorema 11.4 (Kejli-Hamilton). *Ako se karakteristični polinom linearnog operatora t faktoriše kao*

$$c(x-\lambda_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_k)^{p_k},$$

onda se minimalni polinom za t faktoriše kao

$$(x-\lambda_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_k)^{q_k},$$

gde je $1 \le q_i \le p_i$ za svako $1 \le i \le k$.

Da bismo dokazali ovu teoremu primetimo sledeće. Ako imamo neku matricu tipa $n \times n$, čiji su elementi polinomi iz $\mathcal{P}_m$, onda je možemo izraziti kao polinom iz $\mathcal{P}_m$ čiji su koeficijenti iz $\mathcal{M}_n$ (matrice tipa $n \times n$ nad $\mathbf{R}$). Na primer,

$$\begin{pmatrix} x^2+2x-3 & 2x^2-1 \\ 3x+2 & x^2-3 \end{pmatrix} = x^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dokaz teoreme 11.4 ćemo izvesti pomoću sledeće tri leme.

Lema 11.5. *Ako je $p(x)$ karakteristični polinom kvadratne matrice T, onda je $p(T)$ nula matrica.*

DOKAZ. Neka je $p(x) = p_n x^n + \ldots + p_1 x + p_0$ i neka je A matrica $T - xE_n$, čija je determinanta jednaka $p(x)$.

$$A = \begin{pmatrix} t_{11} - x & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} - x & \ldots & t_{2n} \\ & & \ldots & \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} - x \end{pmatrix}.$$

Primetimo da je svaki kofaktor A_{ij} polinom iz $\mathcal{P}_{n-1}$, pa je po gornjem komentaru matricu $adj(A)$ moguće zapisati kao $x^{n-1}C_{n-1} + \ldots + xC_1 + C_0$, gde su sve matrice C_i iz $\mathcal{M}_n$. Dakle imamo:

$$p(x)E_n = det(A)E_n = adj(A)\,A = (x^{n-1}C_{n-1} + \ldots + xC_1 + C_0)(T - xE_n),$$

odnosno

$$\begin{aligned} p(x)E_n &= x^{n-1}C_{n-1}T - x^n C_{n-1} + \ldots + xC_1T - x^2C_1 + C_0T - xC_0 \\ &= -x^n C_{n-1} + x^{n-1}(C_{n-1}T - C_{n-2}) + \ldots + x(C_1T - C_0) + C_0T. \end{aligned}$$

Kad levu i desnu stranu izjednačimo po stepenima promenljive x dobijamo:

$$\begin{aligned} p_n E_n &= -C_{n-1} \\ p_{n-1}E_n &= C_{n-1}T - C_{n-2} \\ &\ldots \\ p_1 E_n &= C_1 T - C_0 \\ p_0 E_n &= C_0 T. \end{aligned}$$

Pomnožimo prvu jednakost zdesna sa T^n, drugu zdesna sa T^{n-1} i tako dalje, do pretposlednje koju množimo zdesna sa T. Kada saberemo leve strane dobijamo $p(T)$ a desne strane se ponište i daju nula matricu. $\dashv$

LEMA 11.6. *Ako je $m(x)$ minimalni polinom kvadratne matrice T i $p(x)$ polinom takav da je $p(T)$ nula matrica, onda $m(x)$ deli $p(x)$.*

DOKAZ. Po algoritmu deljenja polinoma postoje polinomi $q(x)$ i $r(x)$ takvi da je $p(x) = q(x)m(x)+r(x)$ i još je stepen polinoma $r(x)$ striktno manji od stepena polinoma $m(x)$. Kad x zamenimo sa T dobijamo $0 = p(T) = q(T)m(T) + r(T) = 0 + r(T) = r(T)$. Pošto je $m(x)$ minimalni polinom matrice T a $r(x)$ je manjeg stepena od $m(x)$, to je $r(x) = 0$. Dakle, $p(x) = q(x)m(x)$. $\dashv$

LEMMA 11.7. *Ako je λ sopstvena vrednost kvadratne matrice T i $p(x)$ polinom takav da je $p(T)$ nula matrica, onda je $p(\lambda) = 0$.*

DOKAZ. Neka je $\vec{v}$ sopstveni vektor matrice T koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Onda je $\vec{v}$ sopstveni vektor matrice T^2 koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ^2 zato što je

$$T^2\vec{v} = T(T\vec{v}) = T\lambda\vec{v} = \lambda T\vec{v} = \lambda^2\vec{v}.$$

Indukcijom možemo zaključiti za svako $k \in \mathbf{N}$ da je $\vec{v}$ sopstveni vektor matrice T^k koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ^k. Dakle, imamo:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= p(T)\vec{v} = (p_m T^m + p_{m-1}T^{m-1} + \ldots + p_0)\vec{v}\\ &= p_m T^m\vec{v} + p_{m-1}T^{m-1}\vec{v} + \ldots + p_0\vec{v}\\ &= p_m\lambda^m\vec{v} + p_{m-1}\lambda^{m-1}\vec{v} + \ldots + p_0\vec{v} = p(\lambda)\vec{v},\end{aligned}$$

gde je $p(x) = p_m x^m + p_{m-1}x^{m-1} + \ldots + p_0$. Odavde sledi da je $p(\lambda) = 0$, pošto je $\vec{v}$ ne-nula vektor. ⊣

Teorema 11.4 je posledica lema 11.5-7. Po lemama 11.5-6 dobijamo da je karakteristični polinom deljiv minimalnim polinomom matrice, pa odatle imamo $q_i \leq p_i$ za svako $1 \leq i \leq k$ u formulaciji teoreme. Iz leme 11.7 sledi da je svaka sopstvena vrednost λ neke matrice koren minimalnog polinoma $m(x)$ te matrice, pa je po maloj Bezuovoj teoremi, $m(x)$ deljiv sa $x-\lambda$. Odatle dobijamo ono $1 \leq q_i$ za svako $1 \leq i \leq k$ u formulaciji teoreme.

Primer. Odrediti minimalni polinom matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

Karakteristični polinom matrice A je $det(A - xE_3) = (2-x)(3-x)^2$ pa je ili $(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$ ili $(x-2)(x-3)^2 = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$ minimalni polinom matrice A. Pošto je $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -5\\ 5 & 14 & 5\\ -5 & -5 & 4\end{pmatrix}$, lako vidimo da je $A^2 - 5A + 6E_3$ nula matrica, pa je $x^2 - 5x + 6$ minimalni polinom za A.

§11.2. Nilpotentnost

Ograničenje (*restrikcija*) preslikavanja t na podskup S od V označavamo sa $t\restriction_S$. Lako se vidi da je ograničenje linearnog preslikavanja na potprostor domena takođe linearno preslikavanje.

Definicija. Linearni operator $t\colon V \to V$ je *nilpotentan* kada postoji $k \geq 1$ takvo da je t^k nula preslikavanje. Matrica A je *nilpotentna* kada postoji $k \geq 1$ takvo da je A^k nula matrica. U oba slučaja, najmanje takvo k se zove *indeks nilpotencije*.

Definicija. Neka je $t : V \to V$ linearan operator i $\vec{v} \in V$ takav da su svi vektori $\vec{v}$, $t(\vec{v}), \ldots, t^{k-1}(\vec{v})$ različiti od $\vec{0}$, dok je $t^k(\vec{v}) = \vec{0}$. Kažemo da je $\langle \vec{v}, t(\vec{v}), \ldots, t^{k-1}(\vec{v})\rangle$ jedan *t-niz* generisan vektorom $\vec{v}$. Za bazu od V kažemo da je *baza t-nizova* kada je ona nastala nadovezivanjem t-nizova.

Tvrđenje 11.8. *Neka je $t\colon V \to V$ nilpotentan i neka je $\mathcal{B}$ baza t-nizova za V. Tada je dužina najdužeg t-niza u $\mathcal{B}$ jednaka indeksu nilpotencije od t.*

DOKAZ. Neka je k indeks nilpotencije od t. Jasno je da nijedan od t-nizova koji čine bazu ne može biti duži od k. Pretpostavimo da su svi kraći od k. Pošto je indeks nilpotencije jednak k to postoji $\vec{v} \in V$ takav da je $t^{k-1}(\vec{v}) \neq \vec{0}$. Kad razvijemo $\vec{v}$ po bazi $\mathcal{B}$ i primenimo t^{k-1}, dobićemo da je ne-nula vektor jednak nula vektoru, što je nemoguće. ⊣

NAPOMENA 11.9. *Ako V ima bazu t-nizova, gde je $t : V \to V$ linearan operator, onda je u odnosu na tu bazu, t reprezentovan matricom koja ima sve nule osim što ima negde jedinice odmah ispod glavne dijagonale. Ukoliko bismo unutar t-nizova obrnuli redosled, dobili bismo reprezentaciju od t koja bi imala sve nule osim nekih jedinica odmah* iznad *glavne dijagonale. U literaturi se to češće uzima za normalnu formu a mi smo zadržali onu datu u* [3].

PRIMER. Neka je $\mathcal{B} = \langle \vec{v}, t(\vec{v}), t^2(\vec{v}), \vec{w}, t(\vec{w})\rangle$ baza za V. Tada je

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

TEOREMA 11.10. *Za svaki nilpotentan $t\colon V \to V$ postoji baza t-nizova za V.*

DOKAZ. Dokaz izvodimo indukcijom po indeksu nilpotencije k preslikavanja t.

(**baza indukcije**) Ako je $k = 1$, onda je t jedno nula preslikavanje i svaka baza je jedna baza t-nizova (svi su jednočlani).

(**induktivni korak**) Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za svaki operator čiji je indeks nilpotencije manji od k. Posmatrajmo ograničenje $t\restriction_{Im(t)} : Im(t) \to Im(t)$ čiji je indeks nilpotencije jednak $k - 1$. Po induktivnoj hipotezi $Im(t)$ ima bazu t-nizova i neka je ona sledećeg oblika (uzimamo konkretan primer da se ne bismo mučili s indeksima)

$$\mathcal{B} = \langle \vec{v}, t(\vec{v}), t^2(\vec{v}),\ \vec{w}, t(\vec{w})\rangle.$$

Vidimo da poslednji članovi t-nizova $t^2(\vec{v})$ i $t(\vec{w})$ pripadaju $Ker(t)$. Možemo pokazati da je $\langle t^2(\vec{v}), t(\vec{w})\rangle$ jedna baza za $Im(t) \cap Ker(t)$. Ako je $\vec{u} \in Im(t) \cap Ker(t)$, onda je

$$\vec{u} = a\vec{v} + a_1 t(\vec{v}) + a_2 t^2(\vec{v}) + b\vec{w} + b_1 t(\vec{w})$$

pa kad primenimo t dobijamo $\vec{0} = at(\vec{v}) + a_1 t^2(\vec{v}) + \vec{0} + bt(\vec{w}) + \vec{0}$. Odavde, zbog linearne nezavisnosti vektora baze $\mathcal{B}$, dobijamo da je $a = a_1 = b = 0$ pa se $\vec{u}$ nalazi u linearnom omotaču skupa $\{t^2(\vec{v}), t(\vec{w})\}$ koji je linearno nezavisan pa je neuređena baza za $Im(t) \cap Ker(t)$.

Po tvrđenju 4.8, postoje $\vec{\nu}_1, \ldots, \vec{\nu}_l$ takvi da je $\langle t^2(\vec{v}), t(\vec{w}), \vec{\nu}_1, \ldots, \vec{\nu}_l\rangle$ baza za $Ker(t)$. Pošto su $\vec{v}$ i $\vec{w}$ u $Im(t)$, to postoje $\vec{v}_0$ i $\vec{w}_0$ takvi da je $\vec{v} = t(\vec{v}_0)$ i $\vec{w} = t(\vec{w}_0)$. Pokazaćemo da je skup

$$S = \{\vec{v}_0, t(\vec{v}_0), t^2(\vec{v}_0), t^3(\vec{v}_0),\ \vec{w}_0, t(\vec{w}_0), t^2(\vec{w}_0),\ \vec{\nu}_1, \ldots, \vec{\nu}_l\}$$

linearno nezavisan.

Pretpostavimo da je

$$a_0\vec{v}_0 + a_1t(\vec{v}_0) + a_2t^2(\vec{v}_0) + a_3t^3(\vec{v}_0) + b_0\vec{w}_0 + b_1t(\vec{w}_0) + b_2t^2(\vec{w}_0) + c_1\vec{\nu}_1 + \ldots + c_l\vec{\nu}_l = \vec{0}$$

i primenimo t na levu i desnu stranu. Dobijamo da je

$$a_0t(\vec{v}_0) + a_1t^2(\vec{v}_0) + a_2t^3(\vec{v}_0) + b_0t(\vec{w}_0) + b_1t^2(\vec{w}_0) = \vec{0},$$

pa je zbog linearne nezavisnosti vektora baze $\mathcal{B}$, $a_0 = a_1 = a_2 = b_0 = b_1 = 0$. Uz to, iz gornje jednakosti, zbog linearne nezavisnosti vektora u bazi za $Ker(t)$, dobijamo $a_3 = b_2 = c_1 = \ldots = c_l = 0$, pa je S linearno nezavisan.

Po teoremi 6.15 imamo

$$dim(V) = dim(Im(t)) + dim(Ker(t)) = 5 + 2 + l$$

koliko elemenata ima i skup S, pa po tvrđenju 4.9 on razapinje V. Znači

$$\langle\vec{v}_0, t(\vec{v}_0), t^2(\vec{v}_0), t^3(\vec{v}_0),\ \vec{w}_0, t(\vec{w}_0), t^2(\vec{w}_0),\ \vec{\nu}_1, \ldots, \vec{\nu}_l\rangle$$

je baza za V i ona je nastala nadovezivanjem $2 + l$, t-nizova. ⊣

Posledica 11.11. *Svaka nilpotentna matrica je slična matrici koja ima sve nule osim nekih jedinica odmah ispod glavne dijagonale.*

Nadalje ćemo prećutno iz polja **R** preći u njegovo proširenje, polje kompleksnih brojeva **C** iz razloga *algebarske zatvorenosti*. Naime, u polju **C** svaki polinom stepena većeg od 0 ima koren, što znači da se može predstaviti u obliku proizvoda polinoma stepena 1.

Tvrđenje 11.12. *Linearan operator $t\colon V \to V$, za netrivijalan vektorski prostor V, je nilpotentan akko je 0 jedina njegova sopstvena vrednost.*

dokaz. ($\Rightarrow$) To što se nalazimo u polju **C** i što je V netrivijalan nam garantuje da postoji sopstvena vrednost za t. Iz toga što postoji $k \geq 1$ takvo da je t^k nula preslikavanje, to jest t je „koren” polinoma $p(x) = x^k$, po lemi 11.7 sledi da je svaka sopstvena vrednost preslikavanja t koren polinoma x^k a to mora biti 0.

($\Leftarrow$) Ako je $0 \in$ **C** jedina sopstvena vrednost za t, onda se, po napomeni 10.5, karakteristični polinom za t faktoriše kao $(-1)^nx^n$ gde je $n \geq 1$ dimenzija prostora V. Po lemi 11.5, imamo da je t^n nula preslikavanje, pa je po definiciji, t nilpotentan. ⊣

Posledica 11.13. *Linearan operator $t-\lambda\colon V \to V$, za netrivijalan vektorski prostor V, je nilpotentan akko je λ jedina sopstvena vrednost za t.*

dokaz. Nula je jedina sopstvena vrednost za $t-\lambda$ akko λ je jedina sopstvena vrednost za t, zato što $(t-\lambda)(\vec{v}) = c\vec{v} \Leftrightarrow t(\vec{v}) = (\lambda + c)\vec{v}$. ⊣

Napomena 11.14. *Ako su matrice $T-\lambda E_n$ i S slične, onda su i matrice T i $S+\lambda E_n$ slične uz istu matricu prelaza.*

dokaz. Direktno iz 10.2(2) uz polinom $p(x) = x + \lambda$. ⊣

Tvrđenje 11.15. *Ako je $\lambda \in \mathbf{C}$ jedina sopstvena vrednost matrice $T \in \mathcal{M}_n$, onda je ona slična matrici koja na glavnoj dijagonali ima λ i sve ostale nule osim nekih jedinica odmah ispod glavne dijagonale.*

dokaz. Po posledici 11.13, matrica $T-\lambda E_n$ je nilpotentna pa je po posledici 11.11 ona slična matrici koja ima sve nule osim nekih jedinica odmah ispod glavne dijagonale. Po napomeni 11.14, matrica T je slična zbiru takve matrice i dijagonalne matrice λE_n. ⊣

§11.3. Žordanova normalna forma

Napomena 11.16. *Neka je $t\colon V \to V$ linearan operator. Primetimo da je $Im(t^{k+1}) = Im(t\restriction_{Im(t^k)})$ i podsetimo se da je $Ker(t^k) = \{\vec{v} \in V \mid t^k(\vec{v}) = \vec{0}\}$.*

Tvrđenje 11.17. *Za linearan operator $t\colon V \to V$ važi:*

$$\begin{array}{ccccccc} V & \supseteq & Im(t) & \supseteq & Im(t^2) & \supseteq \dots \\ \{\vec{0}\} & \subseteq & Ker(t) & \subseteq & Ker(t^2) & \subseteq \dots \end{array}$$

dokaz. Ako je $\vec{w} \in Im(t^{k+1})$, onda postoji $\vec{v} \in V$ takav da je $\vec{w} = t^{k+1}(\vec{v}) = t^k(t(\vec{v}))$. Pošto je $\vec{u} = t(\vec{v}) \in V$ i $\vec{w} = t^k(\vec{u})$, to je $\vec{w} \in Im(t^k)$. Znači $Im(t^k) \supseteq Im(t^{k+1})$.

Ako je $\vec{v} \in Ker(t^k)$, onda je $t^{k+1}(\vec{v}) = t(t^k(\vec{v})) = t(\vec{0}) = \vec{0}$, pa je $\vec{v} \in Ker(t^{k+1})$. Znači $Ker(t^k) \subseteq Ker(t^{k+1})$. ⊣

Lema 11.18. *Ako je $Im(t^k) = Im(t^{k+1})$, onda je $Im(t^{k+1}) = Im(t^{k+2})$.*

dokaz. Po napomeni 11.16 imamo $Im(t^{k+2}) = Im(t\restriction_{Im(t^{k+1})}) = Im(t\restriction_{Im(t^k)}) = Im(t^{k+1})$. ⊣

Lema 11.19. *Ako je $Ker(t^k) = Ker(t^{k+1})$, onda je $Ker(t^{k+1}) = Ker(t^{k+2})$.*

dokaz. Po tvrđenju 11.17, dovoljno je pokazati $Ker(t^{k+2}) \subseteq Ker(t^{k+1})$. Neka je $\vec{v} \in Ker(t^{k+2})$, što znači da je $t^{k+2}(\vec{v}) = \vec{0}$. Za vektor $\vec{u} = t(\vec{v})$ važi da je u $Ker(t^{k+1})$

pa je zbog pretpostavke leme on i u $Ker(t^k)$. Znači da je $t^k(\vec{u}) = \vec{0}$, pa je onda i $t^{k+1}(\vec{v}) = \vec{0}$. Dakle, $\vec{v} \in Ker(t^{k+1})$. $\dashv$

Nadalje fiksiramo n kao dimenziju vektorskog prostora V nad poljem $\mathbf{C}$. Kao posledicu tvrđenja 11.17 i lema 11.18-19, pošto je dimenzija pravog potprostora strogo manja od dimenzije prostora, imamo sledeće tvrđenje.

TVRĐENJE 11.20. *Za linearan operator $t\colon V \to V$ važi:*

$$\begin{array}{rclclc} Im(t^n) & = & Im(t^{n+1}) & = & Im(t^{n+2}) & = \ldots \\ Ker(t^n) & = & Ker(t^{n+1}) & = & Ker(t^{n+2}) & = \ldots \end{array}$$

TVRĐENJE 11.21. *Linearan operator $t\restriction_{Ker(t^n)}\colon Ker(t^n) \to Ker(t^n)$ je nilpotentan, a $t\restriction_{Im(t^n)}\colon Im(t^n) \to Im(t^n)$ je **1-1**.*

DOKAZ. Prvi deo sledi direktno po definiciji nilpotentnosti. Za drugi deo, po napomeni 11.16 i tvrđenju 11.20 je $Im(t\restriction_{Im(t^n)}) = Im(t^{n+1}) = Im(t^n)$. Dakle, $r(t\restriction_{Im(t^n)}) = dim(Im(t\restriction_{Im(t^n)})) = dim(Im(t^n))$. Po teoremi 6.17, preslikavanje $t\restriction_{Im(t^n)}$ je **1-1**. $\dashv$

TVRĐENJE 11.22. *Za linearan operator $t\colon V \to V$ važi:*

$$(1)\ dim(V) = dim(Ker(t^n)) + dim(Im(t^n)),$$

$$(2)\ Ker(t^n) \cap Im(t^n) = \{\vec{0}\},$$

to jest po tvrđenju 5.9, $V = Ker(t^n) \oplus Im(t^n)$.

DOKAZ. Deo (1) je teorema 6.15 za preslikavanje $t^n : V \to V$. Za dokaz dela (2) pretpostavimo da je $\vec{v} \neq \vec{0}$ u $Im(t^n)$. Iz tvrđenja 11.21 zaključujemo da je $t(\vec{v}) \neq \vec{0}$ i dalje za svako k imamo $t^k(\vec{v}) \neq \vec{0}$. Znači da $\vec{v}$ nije u $Ker(t^n)$. $\dashv$

U sekciji 5.2 smo definisali kada je vektorski prostor direktna suma dva svoja potprostora. Sada ćemo definisati uopštenje tog pojma sa 2 na k ($k \geq 1$) potprostora.

DEFINICIJA. Vektorski prostor V je *direktna suma* svojih potprostora $W_1, \ldots,$ W_k ($k \geq 1$) kada za svako $\vec{v} \in V$ postoji jedinstvena k-torka $\langle \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k \rangle$, pri čemu je $\vec{w}_i \in W_i$, takva da je $\vec{v} = \vec{w}_1 + \ldots + \vec{w}_k$. Oznaka je $W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$.

Sledeće tvrđenje sledi iz definicija.

LEMA 11.23. *Vektorski prostor V je direktna suma svojih potprostora $W_1, \ldots, W_k$ za $k > 1$ akko je V direktna suma (u smislu definicije iz sekcije 5.2) svojih potprostora W_1 i $W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$.*

Sledećih nekoliko tvrđenja će nas dovesti do glavnog rezultata ove sekcije a to je normalna forma kvadratne matrice nad $\mathbf{C}$.

Definicija. Neka je $t\colon V\to V$ linearan operator i W potprostor od V takav da za svako $\vec{w}\in W$ važi $t(\vec{w})\in W$. Za takav potprostor kažemo da je *t-invarijantan*.

Napomena 11.24. *Za linearan operator $t\colon V\to V$ i proizvoljno $k\geq 0$, potprostori $Im(t^k)$ i $Ker(t^k)$ od V su t-invarijantni.*

Tvrđenje 11.25. *Ako je potprostor t-invarijantan, onda je on i $p(t)$-invarijantan za proizvoljan polinom $p(x)$.*

dokaz. Neka je W neki t-invarijantan potprostor od V i $\vec{w}\in W$. Tada je $p_0\vec{w}, p_1t(\vec{w}), \ldots, p_mt^m(\vec{w})\in W$, pa je i $p(t)\vec{w}\in W$. ⊣

Po napomeni 11.24 i tvrđenju 11.25, za linearan operator $t\colon V\to V$ i svako λ, λ' i m, prostori $Ker(t-\lambda)^n$ i $Im(t-\lambda)^n$ su $(t-\lambda')^m$-invarijantni što ćemo nadalje koristiti bez posebnog napominjanja. Sledeće tvrđenje je posledica definicija t-invarijantnih potprostora i matrične reprezentacije linearnih preslikavanja.

Tvrđenje 11.26. *Neka je $V=U\oplus W$ i neka je $\mathcal{B}$ baza za V dobijena nadovezivanjem baza $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ za U odnosno W. Neka je $t\colon V\to V$ linearan operator takav da su U i W, t-invarijantni. Tada je $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t)$ matrica*

$$\begin{pmatrix} Rep_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(t\restriction_U) & 0 \\ 0 & Rep_{\mathcal{D},\mathcal{D}}(t\restriction_W) \end{pmatrix}$$

Lema 11.27. *Ako je T matrica oblika $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$, gde su S i R kvadratne matrice, onda je $det(T)=det(S)\,det(R)$.*

dokaz. Ako su matrice S i R reda k odnosno m, onda je

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

Primenimo teoremu 9.16 i pomoću teoreme 9.17 vidimo da je

$$det\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix} = det(S) \quad \text{i} \quad det\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = det(R).$$

⊣

Lema 11.28. *Ako je λ sopstvena vrednost za t, onda je λ jedina sopstvena vrednost za $t\restriction_{Ker(t-\lambda)^n}$.*

dokaz. Pošto je λ sopstvena vrednost za t, prostor $Ker(t-\lambda)^n$ je netrivijalan. Preslikavanje $(t-\lambda)\restriction_{Ker(t-\lambda)^n}$ je po tvrđenju 11.21 nilpotentno, pa je po posledici 11.13, λ jedina sopstvena vrednost za $t\restriction_{Ker(t-\lambda)^n}$. ⊣

Lema 11.29. *Ako je λ sopstvena vrednost za t i $\lambda' \neq \lambda$, onda je $(t-\lambda')\restriction_{Ker(t-\lambda)^n}$ jedno **1-1** preslikavanje.*

dokaz. Po lemi 11.28, λ' nije sopstvena vrednost za $t\restriction_{Ker(t-\lambda)^n}$, pa za svaki ne-nula vektor $\vec{v}$ iz $Ker(t-\lambda)^n$ važi $(t-\lambda')(\vec{v}) \neq \vec{0}$. ⊣

Lema 11.30. *Ako je λ sopstvena vrednost za $t\colon V \to V$ i $\lambda' \neq \lambda$, onda je*

$$Ker(t\restriction_{Im(t-\lambda)^n} - \lambda')^n = Ker(t-\lambda')^n.$$

dokaz. Imamo da $\vec{v} \in Ker(t\restriction_{Im(t-\lambda)^n} - \lambda')^n$ akko $\vec{v} \in Im(t-\lambda)^n$ i $\vec{v} \in Ker(t-\lambda')^n$, pa je dovoljno pokazati da $\vec{v} \in Ker(t-\lambda')^n$ povlači $\vec{v} \in Im(t-\lambda)^n$. Po tvrđenju 11.22, prostor V je jednak $Ker(t-\lambda)^n \oplus Im(t-\lambda)^n$, pa za $\vec{v} \in Ker(t-\lambda')^n$ postoje $\vec{w}_1 \in Ker(t-\lambda)^n$ i $\vec{w}_2 \in Im(t-\lambda)^n$ takvi da je $\vec{v} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$.

Kad primenimo $(t-\lambda')^n$ na levu i desnu stranu ove jednakosti dobijamo $\vec{0} = \vec{w}_1' + \vec{w}_2'$, pri čemu je $\vec{w}_1' = (t-\lambda')^n(\vec{w}_1) \in Ker(t-\lambda)^n$ i $\vec{w}_2' = (t-\lambda')^n(\vec{w}_2) \in Im(t-\lambda)^n$ jer su ti prostori $(t-\lambda')^n$-invarijantni. Zbog nezavisnosti ovih prostora sledi da je $\vec{w}_1' = \vec{w}_2' = \vec{0}$.

Po lemi 11.29, preslikavanje $(t-\lambda')\restriction_{Ker(t-\lambda)^n}$ je **1-1**, pa je i $(t-\lambda')^n\restriction_{Ker(t-\lambda)^n}$, kao kompozicija **1-1** preslikavanja, takođe **1-1**. Odavde zaključujemo da je $\vec{w}_1 = \vec{0}$, pa je $\vec{v} = \vec{w}_2 \in Im(t-\lambda)^n$. ⊣

Teorema 11.31. *Ako je karakteristični polinom linearnog operatora $t\colon V \to V$ oblika $c(x-\lambda_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_k)^{p_k}$, gde je $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$, onda je*

$$V = Ker(t-\lambda_1)^n \oplus \ldots \oplus Ker(t-\lambda_k)^n,$$

pri čemu je $dim(Ker(t-\lambda_i)^n) = p_i$.

dokaz. Indukcijom po k ($k \geq 1$).

(**baza indukcije**) Ako je $k=1$, onda je $p_1 = n = dim(V)$ i po posledici 11.13, preslikavanje $t-\lambda_1$ je nilpotentno pa je $V = Ker(t-\lambda_1)^n$.

(**induktivni korak**) Ako je $k>1$, onda je po tvrđenju 11.22,

$$V = Ker(t-\lambda_1)^n \oplus Im(t-\lambda_1)^n.$$

Po tvrđenju 11.26, t se može reprezentovati matricom T oblika $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$, gde su S i R reprezentacije ograničenja $t\restriction_{Ker(t-\lambda_1)^n}$ i $t\restriction_{Im(t-\lambda_1)^n}$. Karakteristični polinom preslikavanja t jednak je karakterističnom polinomu matrice T koji je po lemi 11.27 jednak proizvodu karakterističnih polinoma matrica S i R. Pošto je $(t-\lambda_1)\restriction_{Ker(t-\lambda_1)^n}$ nilpotentno, to je po posledici 11.13, λ_1 jedina sopstvena vrednost za $t\restriction_{Ker(t-\lambda_1)^n}$, to jest za matricu S. Po tvrđenju 11.21, $(t-\lambda_1)\restriction_{Im(t-\lambda_1)^n}$ je **1-1** preslikavanje pa mu 0 ne može biti sopstvena vrednost, inače bi ono neki ne-nula vektor preslikavalo u $\vec{0}$. To znači da λ_1 ne može biti sopstvena vrednost za $t\restriction_{Im(t-\lambda_1)^n}$, to jest za matricu R.

Dakle, $(x - \lambda_1)^{p_1}$ je karakteristični polinom za S pa je $dim(Ker(t - \lambda_1)^n) = p_1$ i $(x - \lambda_2)^{p_2} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_k)^{p_k}$ je karakteristični polinom za $t\restriction_{Im(t-\lambda_1)^n}$. Po induktivnoj hipotezi, uz lemu 11.30, $Im(t - \lambda_1)^n$ je jednak

$$Ker(t - \lambda_2)^n \oplus \ldots \oplus Ker(t - \lambda_k)^n,$$

pri čemu je $dim(Ker(t - \lambda_i)^n) = p_i$. Po lemi 11.23, tvrđenje sledi. ⊣

Teorema 11.32. *Svaka kvadratna matrica nad* $\mathbf{C}$ *je slična zbiru dijagonalne matrice i matrice koja ima sve nule osim nekih jedinica odmah ispod glavne dijagonale.*

dokaz. Neka je $t : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ linearno preslikavanje reprezentovano kvadratnom matricom T u odnosu na standardnu bazu. Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sve sopstvene vrednosti preslikavanja t. Po teoremi 11.31, prostor $\mathbf{C}^n$ je jednak

$$Ker(t - \lambda_1)^n \oplus \ldots \oplus Ker(t - \lambda_k)^n.$$

U odnosu na bazu za $\mathbf{C}^n$ nastalu nadovezivanjem baza $\mathcal{B}_i$ za $Ker(t - \lambda_i)^n$, kao i u tvrđenju 11.26, preslikavanje t je reprezentovano matricom T' oblika

$$\begin{pmatrix} T'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & T'_k \end{pmatrix}$$

gde je $T'_i = Rep_{\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_i}(t\restriction_{Ker(t-\lambda_i)^n})$. Po lemi 11.28, λ_i je jedina sopstvena vrednost za T'_i pa je po tvrđenju 11.15, T'_i slična matrici u traženoj formi. Odavde zaključujemo da je T', pa samim tim i T slična matrici u traženoj formi. ⊣

Definicija. Gorenavedena forma matrice se zove *Žordanova normalna forma*. Kao što smo rekli u napomeni 11.9, u literaturi se češće nailazi na formu oblika zbira dijagonalne matrice i matrice koja ima sve nule osim nekih jedinica odmah *iznad* glavne dijagonale.

Lema 11.33. *Neka su* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{C}$ *sve sopstvene vrednosti linearnog operatora* $t \colon V \to V$*. Tada za svako* $\vec{v} \in V$ *je* $((t - \lambda_1)^{q_1} \circ \ldots \circ (t - \lambda_k)^{q_k})(\vec{v}) = \vec{0}$ *akko za svako* $1 \leq i \leq k$ *i svaki* $\vec{v}_i \in Ker(t - \lambda_i)^n$ *je* $(t - \lambda_i)^{q_i}(\vec{v}_i) = \vec{0}$.

dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $\vec{v}_i \in Ker(t - \lambda_i)^n$. Kao posledicu tvrđenja 11.3 imamo da kompozicija $(t - \lambda_1)^{q_1} \circ \ldots \circ (t - \lambda_k)^{q_k}$ komutira pa iz pretpostavke sledi da je $((t - \lambda_1)^{q_1} \circ \ldots \circ (t - \lambda_i)^{q_i})(\vec{v}_i) = \vec{0}$. Po lemi 11.29 za $i \neq j$ preslikavanja $(t - \lambda_j)^{q_j}$ su **1-1** u $Ker(t - \lambda_i)^n$, pa mora biti $(t - \lambda_i)^{q_i}(\vec{v}_i) = \vec{0}$.

($\Leftarrow$) Neka je $\vec{v} \in V$. Po teoremi 11.31, $\vec{v} = \vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_k$ za $\vec{v}_i \in Ker(t - \lambda_i)^n$. Za svako $1 \leq i \leq k$ je $((t - \lambda_1)^{q_1} \circ \ldots \circ (t - \lambda_k)^{q_k})(\vec{v}_i) = \vec{0}$, pa tvrđenje sledi. ⊣

Posledica 11.34. *Polinom* $(x-\lambda_1)^{q_1}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_k)^{q_k}$, *gde je* $\lambda_i\neq\lambda_j$ *za* $i\neq j$, *je minimalni polinom linearnog preslikavanja* $t: V\to V$ *akko je za svako* $1\leq i\leq k$, *polinom* $(x-\lambda_i)^{q_i}$ *minimalni za* $t\restriction_{Ker(t-\lambda_i)^n}$.

Teorema 11.35. *Minimalni polinom kvadratne matrice je oblika*

$$(x-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_k),$$

gde je $\lambda_i\neq\lambda_j$ *za* $i\neq j$, *akko je matrica dijagonalizabilna.*

dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $t:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ linearno preslikavanje reprezentovano datom kvadratnom matricom T u odnosu na standardnu bazu. Po posledici 11.34, za svako $1\leq i\leq k$, minimalni polinom za $t\restriction_{Ker(t-\lambda_i)^n}$ je $x-\lambda_i$, pa je $(t-\lambda_i)\restriction_{Ker(t-\lambda_i)^n}$ nula preslikavanje i $t\restriction_{Ker(t-\lambda_i)^n}$ je reprezentovano matricom $\lambda_i E_{p_i}$.

($\Leftarrow$) Neka su $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbf{C}$ sve sopstvene vrednosti za T. To su onda elementi glavne dijagonale dijagonalne matrice T' slične matrici T. Lako se proveri da je $(T'-\lambda_1 E_{p_1})\cdot\ldots\cdot(T'-\lambda_k E_{p_k})$ nula matrica (proizvod dijagonalnih matrica takvih da za svako mesto na dijagonali postoji bar jedna u prozvodu koja na tom mestu ima 0). Uz pomoć teoreme 11.4, zaključujemo da je $p(x)=(x-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_k)$ minimalni polinom za T' pa je po tvrđenju 11.1 to i minimalni polinom za T. $\dashv$

§11.4. Homogene linearne diferencne jednačine

Ovde će biti dat primer primene linearne algebre koji se uz male modifikacije više puta sreće u matematici. Krenućemo od Fibonačijevog niza $(F_n)_{n\in N}$ koji je zadat uslovima $F_0=0$, $F_1=1$ i $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Cilj je da se *eksplicitno* zada niz $(F_n)_{n\in N}$, to jest odredi term $t(x)$ takav da je $F_n=t(n)$.

Posmatrajmo skup U svih realnih nizova $(x_n)_{n\in N}$ koji zadovoljavaju uslov

$$(*)\quad x_{n+2}=x_{n+1}+x_n.$$

Svaki takav niz je potpuno određen parom (x_0,x_1), to jest za svaki par realnih brojeva postoji tačno jedan niz koji počinje tim parom i koji zadovoljava gornji uslov.

Neka je $V=\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ prostor svih realnih nizova (videti sedmi primer u sekciji 2.2). Taj prostor je beskonačnodimenzionalan. Lako se proverava da je sa

$$L(x_0,x_1,x_2,\ldots)=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$$

zadat linearan operator $L\colon V\to V$. Ako sa $\phi(x)$ označimo polinom x^2-x-1, onda

$$\phi(L)(x_0,x_1,x_2,\ldots)=(x_2-x_1-x_0,x_3-x_2-x_1,x_4-x_3-x_2,\ldots).$$

To znači da $\phi(L)$ primenjen na niz koji zadovoljava $(*)$ daje nula niz i obrnuto, svaki niz koji se slika u nula niz pomoću $\phi(L)$ zadovoljava $(*)$. Dakle, U je $Ker(\phi(L))$, pa samim tim i potprostor od V. Pokazaćemo da je U dvodimenzionalan i eksplicitno ćemo odrediti dva niza $(\beta_n^1)_{n\in N}$ i $(\beta_n^2)_{n\in N}$ od kojih se može formirati njegova baza. Pošto Fibonačijev niz $(F_n)_{n\in N}$ pripada prostoru U, za svako n će važiti da je $F_n = c_1\beta_n^1 + c_2\beta_n^2$, a skalare c_1 i c_2 ćemo odrediti iz uslova $F_0 = 0$ i $F(1) = 1$.

Svaki vektor iz U koji predstavlja niz realnih brojeva $x_0, x_1 \ldots$ je potpuno odredjen sa svoja prva dva člana x_0 i x_1, pa možemo zaključiti da je $dim(U) = 2$. Polinom $\phi(x) = x^2 - x - 1$ se faktoriše kao

$$(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}),$$

pa je

$$\phi(L) = (L - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \circ (L - \frac{1+\sqrt{5}}{2}) = (L - \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \circ (L - \frac{1-\sqrt{5}}{2}).$$

Vektori

$$\beta_n^1 = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \quad \text{i} \quad \beta_n^2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$$

se nalaze redom u jezgrima operatora $L - \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i $L - \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Zbog gornje jednakosti oni se nalaze i u potprostoru $U = Ker(\phi(L))$. Vekotri β_n^1 i β_n^2 su očigledno linearno nezavisni, pa zbog $dim(U) = 2$ zaključujemo da oni čine bazu za U.

Prema tome Fibonačijev niz F je linearna kombinacija nizova β^1 i β^2

$$F_n = c_1\beta_n^1 + c_2\beta_n^2.$$

Konstante $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ i $c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ nalazimo iz uslova

$$0 = F_0 = c_1\beta_0^1 + c_2\beta_0^2 = c_1 + c_2 \quad \text{i} \quad 1 = F_1 = c_1\beta_1^1 + c_2\beta_1^2 = c_1\frac{1-\sqrt{5}}{2} + c_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Dakle,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n).$$

Sve ovo ćemo uraditi za slučaj polinoma $\phi(x)$ čiji su svi koreni međusobno različiti. Neka je $\phi(x)$ polinom $x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1x + a_0$ za $k \geq 1$. Neka je $U = Ker(\phi(L))$ potprostor od V. Kao i u gornjem primeru, jasno je da je U skup svih realnih nizova $(x_n)_{n\in N}$ koji zadovoljavaju uslov

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0.$$

Taj uslov se zove *homogena linearna diferencna jednačina sa konstantnim koeficijentima* stepena k.

Lako se proverava da je sa

$$\iota(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots) = (x_0, \ldots, x_{k-1})$$

zadato linearno preslikavanje $\iota\colon U \to \mathbf{R}^k$ koje je **1-1** i **na** zato što je svaki niz $(x_n)_{n\in N}$ iz U potpuno određen k-torkom $(x_0, \ldots, x_{k-1})$. Dakle, $U \cong \mathbf{R}^k$, pa je $dim(U) = k$.

Ako je $k = 1$, onda naša diferencna jednačina glasi $x_{n+1} + a_0 x_n = 0$ i skup U njenih rešenja je skup *geometrijskih nizova* oblika $x_n = (-a_0)^n x_0$. Baza prostora U je tada jednočlana i data je recimo realnim nizom β takvim da je $\beta_0 = 1$ i za svako $n \geq 1$ je $\beta_n = (-a_0)^n$.

Neka se polinom $\phi(x)$, za međusobno različite $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $k \geq 2$, faktoriše kao

$$(x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_k).$$

Neka se niz x_n nalazi u $Ker(L - \lambda_i)$. Kako je $\phi(x) = (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_k) = (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_{i-1}) \cdot (x - \lambda_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_k) \cdot (x - \lambda_i)$, onda je

$$\phi(L) = (L - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (L - \lambda_{i-1}) \cdot (L - \lambda_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (L - \lambda_k) \cdot (L - \lambda_i),$$

pa je očigledno x_n u $Ker(\phi(L))$.

U svakom od prostora $Ker(L - \lambda_i)$ koji predstavlja skup rešenja diferencne jednačine $x_{n+1} - \lambda_i x_n = 0$ se nalazi niz β^i takav da je $\beta^i_0 = 1$ i za svako $n \geq 1$ je $\beta^i_n = (\lambda_i)^n$. Pokažimo da je skup $\{\beta^1, \ldots, \beta^k\}$ linearno nezavisan.

Po tvrđenju 6.8 i lemi 6.3, dovoljno je proveriti da je skup $\{\iota(\beta^1), \ldots, \iota(\beta^k)\} \subseteq \mathbf{R}^k$ linearno nezavisan. Posmatrajmo matricu $A \in \mathcal{M}_k$ čije su vrste vektori $\iota(\beta^1), \ldots, \iota(\beta^k)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{k-1} \\ & & \ldots & \\ 1 & \lambda_k & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

Po teoremi 9.15 i posledici 8.5, $det(A) \neq 0$ garantuje linearnu nezavisnost skupa $\{\iota(\beta^1), \ldots, \iota(\beta^k)\}$. Determinanta $det(A)$ je *Vandermondova* determinanta i jednaka je

$$\prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Ovo pokazujemo indukcijom po $k \geq 2$.

(**baza indukcije**) Ako je $k = 2$, onda je $det(A) = \lambda_2 - \lambda_1$.

(**induktivni korak**) Ako je $k > 2$, onda primenimo $k - 1$ kolona transformacija $-\lambda_1 \gamma_{k-1} + \gamma_k$, $-\lambda_1 \gamma_{k-2} + \gamma_{k-1}$ i tako dalje do poslednje $-\lambda_1 \gamma_1 + \gamma_2$ i tako dobijamo matricu

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \ldots & (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2^{k-2} \\ & & \ldots & \\ 1 & \lambda_k - \lambda_1 & \ldots & (\lambda_k - \lambda_1)\lambda_k^{k-2} \end{pmatrix}$$

takvu da je $det(A) = det(A')$. Kada razvijemo determinantu po prvoj vrsti i izvučemo zajedničke faktore iz vrsta dobijamo da je

$$det(A') = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - \lambda_1) \cdot det(A'')$$

gde je

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{k-2} \\ 1 & \lambda_3 & \dots & \lambda_3^{k-2} \\ & & \dots & \\ 1 & \lambda_k & \dots & \lambda_k^{k-2} \end{pmatrix}$$

Po induktivnoj hipotezi

$$det(A'') = \prod_{2 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i),$$

pa $det(A)$ ima traženu formu.

Iz toga što su svi λ_i međusobno različiti, zaključujemo da je $det(A) \neq 0$, pa je skup $\{\beta^1, \dots, \beta^k\}$ linearno nezavisan i zbog $dim(U) = k$ daje bazu za U. Prema tome, svaki niz iz U se može na jedinstven način predstaviti kao linearna kombinacija elemenata tog skupa. Skalare u toj linearnoj kombinaciji koji određuju jedno partikularno rešenje dobijamo iz datih k početnih uslova.

Primer. Primenimo ovaj postupak na sledeću diferencnu jednačinu:

$$x_{n+3} = 6x_{n+2} - 11x_{n+1} + 6x_n$$

sa početnim uslovima $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ i $x_2 = 6$.
Ovu diferencnu jednačinu možemo zapisati kao $x_{n+3} - 6x_{n+2} + 11x_{n+1} - 6x_n = 0$. Posmatramo polinom $\phi(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Njegovim faktorisanjem dobijamo polinom $\phi(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ čije su nule 1, 2 i 3, pa na osnovu prethodnih razmatranja zaključujemo da rešenje ove diferencne jednačine ima oblik $x_n = \lambda_1 1^n + \lambda_2 2^n + \lambda_3 3^n$. Ubacivanjem uslova $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ i $x_2 = 6$ dobijamo sledeći sistem linearnih jednačina:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 2$$

$$\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 6$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ i $\lambda_3 = 1$ pa je rešenje početnog problema $x_n = 1 - 2^n + 3^n$.

§12. Odeljak 12.

§12.1. Višestruka uloga $\mathbf{R}^n$

U ovom odeljku pretpostavljamo da nam je poznata euklidska geometrija ili da makar imamo intuitivnu predstavu o njoj. Takođe, pretpostavljamo da nam je data neka mera duži, to jest funkcija koja duži preslikava u pozitivne realne brojeve i koja ima određena svojstva.

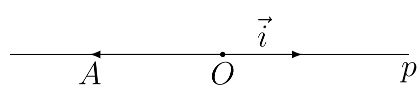
Neka je $\sim$ relacija na skupu parova tačaka koja je zadata tako da za proizvoljne tačke X i Y važi $(X, X) \sim (Y, Y)$ i još, za $A \neq B$

$$(A, B) \sim (C, D) \quad \text{akko} \quad \text{postoje } E \text{ i } F \text{ tako da su } ABFE \text{ i } CDFE \text{ paralelogrami.}$$

(Ako A, B, C i D nisu kolinearne, $(A, B) \sim (C, D)$ se svodi na to da je četvorougao $ABDC$ paralelogram.) Može se pokazati da je $\sim$ relacija ekvivalencije. *Vektori* u geometriji su klase ekvivalencije ove relacije.

Klasu ekvivalencije para (A, A) označavamo sa $\vec{0}$ (nula vektor) i smatramo da nam je poznato kako se u geometriji sabiraju vektori i množe skalarima (realnim brojevima). Na taj način dobijamo jedan primer vektorskog prostora nad $\mathbf{R}$ koji zovemo *prostor geometrijskih vektora* i koji je trodimenzionalan.

Primer. Posmatramo euklidsku pravu p na kojoj je fiksirana tačka O (koordinatni početak) i jedan jedinični vektor $\vec{i}$ (ako je $(A, B) \in \vec{i}$, onda je mera duži AB jednaka 1). Time smo fiksirali jedan koordinatni sistem prave p. Neka je A proizvoljna tačka prave p. Kažemo da je $\vec{u}^A = \overrightarrow{OA}$ *vektor položaja* tačke A.



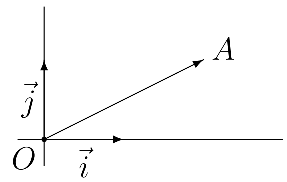
Posmatrajmo sledeća pridruživanja:

$$x \in \mathbf{R} \mapsto x\vec{i} \mapsto A \in p,$$

tako da je vektor položaja $\vec{u}^A$ tačke A jednak vektoru $x\vec{i}$. Ovo su bijekcije koje nam omogućavaju da element od $\mathbf{R}$ posmatramo na još dva načina:

1. kao geometrijski vektor na pravoj p (x je *komponenta* tog vektora u datom koordinatnom sistemu) i
2. kao tačku prave p (x je *koordinata* te tačke u datom koordinatnom sistemu).

Primer. Posmatramo euklidsku ravan α u kojoj je fiksirana tačka O (koordinatni početak) i dva jedinična, međusobno ortogonalna vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$ (ako je $(A, B) \in \vec{i}$ i $(C, D) \in \vec{j}$, onda $AB \perp CD$). Kao i malopre, kažemo da je $\vec{u}^A = \overrightarrow{OA}$ vektor položaja tačke A.



Posmatrajmo sledeća pridruživanja:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mapsto x\vec{i} + y\vec{j} \mapsto A \in p,$$

tako da je vektor položaja $\vec{u}^A$ tačke A jednak linearnoj kombinaciji $x\vec{i} + y\vec{j}$. Ovo su takođe bijekcije koje nam omogućavaju da svaki element od $\mathbf{R}^2$ posmatramo na još dva načina, kao vektor u ravni čije su komponente (x, y), odnosno tačku $A(x, y)$ te ravni.

Ovo sve važi i za $\mathbf{R}^3$ i prostor tačaka euklidske geometrije. Po analogiji, pošto je trodimenzionalnost prostora geometrijskih vektora utvrđena aksiomama i nemamo vizuelnu predstavu o tome šta bi bio prostor tačaka geometrije čiji bi odgovarajući prostor geometrijskih vektora bio dimenzije n, za $n \geq 4$, izjednačavamo $\mathbf{R}^n$ sa tim vektorskim prostorom, odnosno njegove vektore sa tačkama čiji su to vektori položaja.

§12.2. Skalarni proizvod i norma vektora u $\mathbf{R}^n$

Definicija. Za dva vektora $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ i $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ iz $\mathbf{R}^n$ definišemo njihov *standardni skalarni proizvod* $\vec{u} \cdot \vec{v}$ kao realan broj $u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$. Primetimo da je skalarni proizvod $\vec{u} \cdot \vec{v}$ jednak proizvodu matrica $\vec{u}^T\vec{v}$.

Lako se vidi da ovako definisan skalarni proizvod zadovoljava sledeća svojstva:

(1) *linearnost*, to jest $(a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{w} = a(\vec{u} \cdot \vec{w}) + b(\vec{v} \cdot \vec{w})$,

(2) *simetričnost*, to jest $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,

(3) *pozitivna definisanost*, to jest $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ i ($\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ akko $\vec{u} = \vec{0}$).

Konačnodimenzionalni vektorski prostor V nad poljem $\mathbf{R}$ sa *skalarnim proizvodom* $\circ : V \times V \to \mathbf{R}$ koji zadovoljava svojstva (1), (2) i (3) je *euklidski* vektorski prostor.

Primer 1. Neka je data operacija $\circ : \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbf{R}$ zadata sa

$$p \circ q = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(-3)q(-3),$$

gde su p i q proizvoljni polinomi sa realnim koeficijentima stepena ne većeg od 2.

(1) $(ap + bq) \circ r = \sum_{i \in \{-1,0,-3\}} (ap(i) + bq(i))r(i)$

$$= a\sum_{i\in\{-1,0,-3\}} p(i)r(i) + b\sum_{i\in\{-1,0,-3\}} q(i)r(i)$$
$$= a(p\circ r) + b(q\circ r)$$

(2) $$p\circ q = \sum_{i\in\{-1,0,-3\}} p(i)q(i) = \sum_{i\in\{-1,0,-3\}} q(i)p(i) = q\circ p$$

(3) $p\circ p = p(-1)^2 + p(0)^2 + p(-3)^2 \geq 0$ i $p\circ p = 0$ znači da p, stepena manjeg od 3, ima tri različita korena pa mora biti trivijalan.

Dakle, $\mathcal{P}_2$ sa skalarnim proizvodom $\circ$ je jedan euklidski prostor.

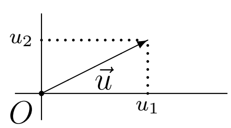
Definicija. *Norma* vektora $\vec{u}\in\mathbf{R}^n$, u oznaci $\|\vec{u}\|$, je

$$\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}.$$

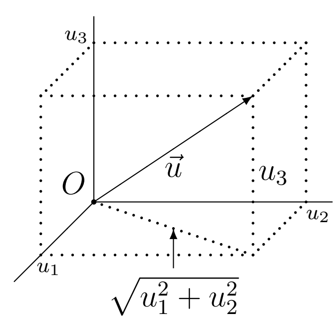
U proizvoljnom euklidskom prostoru sa skalarnim proizvodom $\circ$, *norma* vektora $\vec{u}$ je zadata kao $\sqrt{\vec{u}\circ\vec{u}}$.

Za $n\leq 3$ se lako proveri da ako $\vec{u}\in\mathbf{R}^n$ posmatramo kao geometrijski vektor, onda je njegov *intenzitet* (mera duži AB takve da par (A,B) pripada datom vektoru) jednak $\|\vec{u}\|$ (to je ujedno i rastojanje između tačke, čiji je to vektor položaja, i koordinatnog početka). Za $n=1$ ($\vec{u}=(u_1)$), to sledi zbog toga što je po definiciji intenzitet geometrijskog vektora $u_1\vec{i}$ jednak $|u_1| = \sqrt{u_1^2} = \|\vec{u}\|$.

Za $n=2$ to sledi po Pitagorinoj teoremi, zbog toga što je intenzitet geometrijskog vektora $u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$ jednak $\sqrt{u_1^2+u_2^2} = \|\vec{u}\|$.



Za $n=3$, dva puta primenjujući Pitagorinu teoremu zaključujemo isto.



Uopštavajući ovo na $\mathbf{R}^n$ definišemo *intenzitet* (dužinu) vektora $\vec{u}\in\mathbf{R}^n$ kao $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2+\ldots+u_n^2}$. *Rastojanje* između tačaka A i B je dužina vektora $\overrightarrow{AB} = \vec{u}^B - \vec{u}^A$, što je po prethodnom jednako

$$\|\vec{u}^B - \vec{u}^A\| = \sqrt{(u_1^B-u_1^A)^2+\ldots+(u_n^B-u_n^A)^2}.$$

Sva naredna tvrđenja važe u proizvoljnom euklidskom prostoru. Zbog jednostavnosti notacije i bolje intuicije mi ćemo ih formulisati za $\mathbf{R}^n$ u odnosu na standardni skalarni proizvod. Kao što ćemo kasnije videti (tvrđenje 13.6) to su i ,,jedini" euklidski prostori.

Ističemo sledeće dve osobine norme kao i one izražene kroz donje teoreme.

(i) $\|\vec{u}\| \geq 0$, ($\|\vec{u}\| = 0$ akko $\vec{u} = \vec{0}$),

(ii) $\|k\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$

Teorema 12.1 (Koši-Švarc). $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$.

dokaz. Ako je $\vec{u} = \vec{0}$ ili $\vec{v} = \vec{0}$, onda važi $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| = 0$.

Pretpostavimo $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, tada imamo:

$0 \leq (\|\vec{u}\|\vec{v} - \|\vec{v}\|\vec{u})\cdot(\|\vec{u}\|\vec{v} - \|\vec{v}\|\vec{u})$, po (3),

akko

$0 \leq \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$, po (1), (2) i def. norme,

akko

$2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\vec{u}\cdot\vec{v} \leq 2\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$,

akko

$\vec{u}\cdot\vec{v} \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$, zato što je $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\| > 0$ jer su $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$.

Analogno, polazeći od $0 \leq (\|\vec{u}\|\vec{v} + \|\vec{v}\|\vec{u})\cdot(\|\vec{u}\|\vec{v} + \|\vec{v}\|\vec{u})$, kao instance nejednakosti (3), dobijamo $-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \leq \vec{u}\cdot\vec{v}$. Dakle važi $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$. ⊣

Teorema 12.2 (Minkovski). $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

dokaz.

$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

akko

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$, kvadriranje i definicija norme,

akko

$\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$,

akko

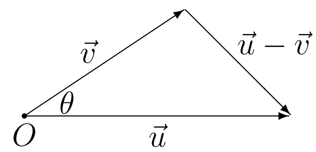
$\vec{u}\cdot\vec{v} \leq \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$, što važi po teoremi 12.1. ⊣

Tvrđenje 12.3 (Nejednakost trougla). *Za proizvoljne tačke A, B i C važi* $\|\overrightarrow{BC}\| \leq \|\overrightarrow{BA}\| + \|\overrightarrow{AC}\|$.

dokaz. Označimo $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{AC}$ redom sa $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Tada je $\overrightarrow{BC}$ jednak $\vec{u}+\vec{v}$ i samo treba primeniti teoremu 12.2. ⊣

Tvrđenje 12.4 (Ugao između vektora). *Za ugao θ između ne-nula vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$ iz $\mathbf{R}^3$, posmatranih kao geometrijski vektori, važi* $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

DOKAZ.



Po kosinusnoj teoremi imamo

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta.$

Po definiciji norme i svojstvima (1) i (2) skalarnog proizvoda, leva strana je jednaka

$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}.$

Znači $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$. ⊣

Kao uopštenje tvrđenja 12.4 na slučaj $\mathbf{R}^n$ za proizvoljno n i, uopšte, za proizvoljni euklidski prostor imamo sledeću definiciju.

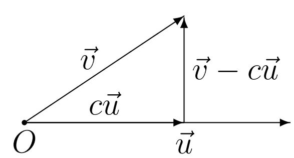
DEFINICIJA. *Kosinus ugla* između ne-nula vektora $\vec{u},\vec{v}\in\mathbf{R}^n$ jednak je $\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$. Vektori $\vec{u},\vec{v}\in\mathbf{R}^n$ su *ortogonalni* kada je $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Oznaka je $\vec{u}\perp\vec{v}$. Analogno u slučaju proizvoljnog euklidskog prostora.

TVRĐENJE 12.5. *Ako je* $\vec{u}\perp\vec{v}$, *onda je* $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$.

DOKAZ. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$.

TVRĐENJE 12.6. *Za* $\vec{u}\neq\vec{0}$, *broj* $c=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ *je jedinstven skalar sa svojstvom* $(\vec{v}-c\vec{u})\perp\vec{u}$.

DOKAZ.



$$(\vec{v}-c\vec{u})\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{u}-c\|\vec{u}\|^2=0 \Leftrightarrow c=\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}.$$ ⊣

Broj $c=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ je *Furijeov koeficijent* vektora $\vec{v}$ u odnosu na vektor $\vec{u}$.

DEFINICIJA. *Ortogonalna projekcija* vektora $\vec{v}$ na ne-nula vektor $\vec{u}$, u oznaci $proj(\vec{v},\vec{u})$, je vektor $c\vec{u}$, gde je c Furijeov koeficijent vektora $\vec{v}$ u odnosu na vektor $\vec{u}$.

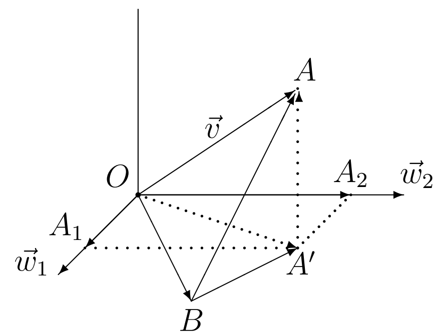
TEOREMA 12.7. *Neka su* $\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_k$ *međusobno ortogonalni, ne-nula vektori u* $\mathbf{R}^n$. *Neka je* $\vec{v}\in\mathbf{R}^n$ *i neka je* $c_i=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}_i}{\|\vec{w}_i\|^2}$, *za* $1\leq i\leq k$. *Tada za proizvoljnu* k*-torku* $\langle a_1,\ldots,a_k\rangle$ *realnih brojeva važi:*

$$\|\vec{v}-\sum_{i=1}^{k}c_i\vec{w}_i\| \leq \|\vec{v}-\sum_{i=1}^{k}a_i\vec{w}_i\|.$$

Takođe:

$$\|\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i\| \leq \|\vec{v}\|.$$

DOKAZ. Krenućemo od sledeće slike ($k = 2$).



Neka je A' projekcija tačke A na ravan $(O, \vec{w}_1, \vec{w}_2)$ i neka su A_1 i A_2 projekcije tačke A' na prave $(O, \vec{w}_1)$ i $(O, \vec{w}_2)$, redom. Po *teoremi o tri normale* imamo da je $\overrightarrow{A_1A} \perp \vec{w}_1$ i $\overrightarrow{A_2A} \perp \vec{w}_2$, pa je $\overrightarrow{OA_1} = c_1\vec{w}_1$ i $\overrightarrow{OA_2} = c_2\vec{w}_2$. Dakle,

$$\overrightarrow{OA'} = \sum_{i=1}^{2} c_i\vec{w}_i.$$

Neka je B tačka u ravni $(O, \vec{w}_1, \vec{w}_2)$ takva da je $\overrightarrow{OB} = \sum_{i=1}^{2} a_i\vec{w}_i$. Prva nejednakost kaže da je duž $A'A$ manja ili jednaka od BA, a druga kaže da je duž OA' manja ili jednaka od OA. U geometriji to sledi zato što su trouglovi ABA' i AOA' pravougli te im je hipotenuza duža od katete. Ovu geometrijsku intuiciju ćemo iskoristiti u donjem dokazu. Imamo da za svako $1 \leq j \leq k$, važi

$$(\vec{v} - \sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i) \cdot \vec{w}_j = \vec{v} \cdot \vec{w}_j - c_j\|\vec{w}_j\|^2 = 0,$$

odakle sledi da je

$$(\vec{v} - \sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i) \cdot \sum_{i=1}^{k}(c_i - a_i)\vec{w}_i = 0 \quad \text{i} \quad (\vec{v} - \sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i) \cdot \sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i = 0$$

pa je

$$(\vec{v} - \sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i) \perp \sum_{i=1}^{k}(c_i - a_i)\vec{w}_i \quad \text{i} \quad (\vec{v} - \sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i) \perp \sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i.$$

(Na slici, ovo odgovara $\overrightarrow{A'A} \perp \overrightarrow{BA'}$ i $\overrightarrow{A'A} \perp \overrightarrow{OA'}$.)

Dalje imamo

$$\begin{aligned}\|\vec{v}-\textstyle\sum_{i=1}^{k} a_i\vec{w}_i\|^2 &= \|\vec{v}-\textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i+\textstyle\sum_{i=1}^{k}(c_i-a_i)\vec{w}_i\|^2\\ &= \|\vec{v}-\textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i\|^2+\|\textstyle\sum_{i=1}^{k}(c_i-a_i)\vec{w}_i\|^2, \quad \text{po tvrđenju 12.5}\\ &\geq \|\vec{v}-\textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i\|^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\|^2 &= \|(\vec{v}-\textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i)+\textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i\|^2\\ &= \|(\vec{v}-\textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i)\|^2+\|\textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i\|^2, \quad \text{po tvrđenju 12.5}\\ &\geq \|\textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i\|^2.\end{aligned}$$

⊣

Geometrijski, teoremu 12.7 formulišemo kao:

Rastojanje između tačke i njene ortogonalne projekcije na potprostor je manje ili jednako od rastojanja između te tačke i proizvoljne tačke tog potprostora.

Dužina ortogonalne projekcije vektora na potprostor manja je ili jednaka od dužine tog vektora.

Definicija. Skup vektora $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_k\}$ je *ortonormiran* kada su svi vektori u njemu međusobno ortogonalni i svaki ima normu 1, to jest

$$\vec{u}_i\cdot\vec{u}_j=\begin{cases}0, & \text{za } i\neq j\\ 1, & \text{za } i=j\end{cases}$$

Teorema 12.8 (Besel). *Neka je $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_k\}$ ortonormiran skup vektora iz $\mathbf{R}^n$. Neka je $\vec{v}\in\mathbf{R}^n$ i neka je $c_i=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}_i}{\|\vec{u}_i\|^2}$, za $1\leq i\leq k$. Tada važi:*

$$\sum_{i=1}^{k} c_i^2\leq\|\vec{v}\|^2.$$

dokaz. Po teoremi 12.7 imamo da je $\|\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{u}_i\|^2\leq\|\vec{v}\|^2$ i još samo treba konstatovati da je $\|\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{u}_i\|^2=(\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{u}_i)\cdot(\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{u}_i)=\sum_{i=1}^{k} c_i^2$. ⊣

§12.3. Ortogonalna projekcija vektora na pravu

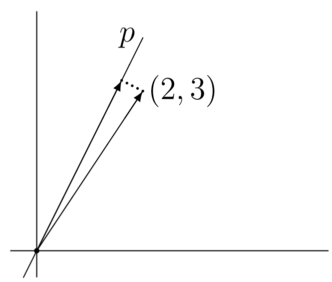
Podsetimo se da je ortogonalna projekcija vektora $\vec{v}\in\mathbf{R}^n$ na ne-nula vektor $\vec{u}\in\mathbf{R}^n$ definisana kao

$$proj(\vec{v},\vec{u})=_{df}\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$

Definicija. *Ortogonalna projekcija* vektora $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ na linearni omotač ne-nula vektora $\vec{u} \in \mathbf{R}^n$, za $n \in \{2,3\}$, u oznaci $proj_{[\{\vec{u}\}]}(\vec{v})$ je definisana kao $proj(\vec{v},\vec{u})$. Iz osobina skalarnog proizvoda i norme sledi da za svaki ne-nula vektor $\vec{u}$ i za svako $c \neq 0$, važi $proj(\vec{v},\vec{u}) = proj(\vec{v},c\vec{u})$, pa $proj_{[\{\vec{u}\}]}(\vec{v})$ zavisi od potprostora $[\{\vec{u}\}]$ a ne od izbora ne-nula vektora $\vec{u}$ u njemu. Ovo je samo poseban slučaj onoga što ćemo u sledećem odeljku raditi kao ortogonalno projektovanje vektora na potprostor.

Primer. $proj_{[\{\vec{e}_2\}]}(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \dfrac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$

Primer. Odrediti orogonalnu projekciju vektora $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ na pravu $p\colon y = 2x$.



Prava p odgovara potprostoru $[\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}]$, pa imamo:

$$proj_{[\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}]}(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 16/5 \end{pmatrix}.$$

Primer. Drugi pogled na prethodni primer: šine su na pravoj zadatoj jednačinom $y = 2x$, a vetar duva konstantnom brzinom zadatom vektorom $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Kojom brzinom će se kretati voz po tim šinama ako nema trenja?

§13. Odeljak 13.

§13.1. Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije

Napominjemo, još jednom, da sva naredna tvrđenja važe u proizvoljnom euklidskom prostoru. Zbog jednostavnosti i dalje ih formulišemo samo za $\mathbf{R}^n$ u odnosu na standardni skalarni proizvod.

Teorema 13.1. *Ako su ne-nula vektori $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k \in \mathbf{R}^n$ međusobno ortogonalni, onda je $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$ linearno nezavisan.*

dokaz.

$$\begin{aligned}
&c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_k\vec{w}_k = \vec{0} && / \cdot \vec{w}_i \\
&c_i(\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i) = 0 \\
&c_i = 0, && \text{jer } \vec{w}_i \text{ nije nula vektor pa je } \vec{w}_i \cdot \vec{w}_i > 0.
\end{aligned}$$

Posledica 13.2. *Ako je W neki k-dimenzionalni potprostor od $\mathbf{R}^n$ i ako su ne-nula vektori $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k \in W$ međusobno ortogonalni, onda je $\langle \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k \rangle$ baza za W.*

dokaz. Direktno iz teoreme 13.1 i leme 4.6.

Definicija. *Ortogonalna baza* vektorskog prostora je baza tog prostora u kojoj su svi vektori međusobno ortogonalni.

Tvrđenje 13.3. *Neka je $\mathcal{B} = \langle \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k \rangle$ ortogonalna baza za W. Ako je $Rep_{\mathcal{B}}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, onda za svako $i \in \{1, \ldots, k\}$ važi da je c_i Furijeov koeficijent vektora $\vec{w}$ u odnosu na vektor $\vec{w}_i$.*

dokaz.

$$\begin{aligned}
&\vec{w} = c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_k\vec{w}_k && / \cdot \vec{w}_i \\
&\vec{w} \cdot \vec{w}_i = c_i(\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i).
\end{aligned}$$

⊣

Primer. $\langle \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \rangle$ je ortogonalna baza za $\mathbf{R}^n$.

Primer. $\mathcal{B} = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$ je neortogonalna baza za $\mathbf{R}^2$. Možemo je prevesti na ortogonalnu bazu $\mathcal{K} = \langle \vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_2 \rangle$ na sledeći način.

Neka je $\vec{\kappa}_1$ prvi vektor baze $\mathcal{B}$, to jest $\vec{\kappa}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Neka je $\vec{\kappa}_2 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - proj(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

Lako se proveri da su ne-nula vektori $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ međusobno ortogonalni (ovo je i posledica tvrđenja 12.6) pa je $\mathcal{K}$, po posledici 13.2, ortogonalna baza za $\mathbf{R}^2$.

Primer. $\mathcal{B} = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} \rangle$ je neortogonalna baza za $\mathbf{R}^3$. Možemo je prevesti na ortogonalnu bazu $\mathcal{K} = \langle \vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_2, \vec{\kappa}_3 \rangle$ na sledeći način.

$$\vec{\kappa}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{\kappa}_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} - proj(\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-2/3\\4/3\\-2/3\end{pmatrix},$$
$$\vec{\kappa}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} - proj(\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) - proj(\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2/3\\4/3\\-2/3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Teorema 13.4 (Gram-Šmitova ortogonalizacija). *Ako je $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k \rangle$, za $k \geq 1$, baza potprostora od $\mathbf{R}^n$, onda vektori $\vec{\kappa}_1 = \vec{\beta}_1$, $\vec{\kappa}_2 = \vec{\beta}_2 - proj(\vec{\beta}_2, \vec{\kappa}_1), \ldots$, $\vec{\kappa}_k = \vec{\beta}_k - proj(\vec{\beta}_k, \vec{\kappa}_1) - \ldots - proj(\vec{\beta}_k, \vec{\kappa}_{k-1})$ daju ortogonalnu bazu tog potprostora.*

dokaz. Indukcijom po $k \geq 1$ ćemo pokazati da su $\vec{\kappa}_1, \ldots, \vec{\kappa}_k$ međusobno ortogonalni, ne-nula vektori iz $[\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k\}]$. Ovo je dovoljno da po posledici 13.2 zaključimo da je $\langle \vec{\kappa}_1, \ldots, \vec{\kappa}_k \rangle$ ortogonalna baza za $[\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k\}]$.

(**baza indukcije**) Neka je $k = 1$. Imamo da je $\vec{\kappa}_1 = \vec{\beta}_1$ pa sve očigledno važi.

(**induktivni korak**) Neka je $k > 1$. Po induktivnoj hipotezi imamo da su $\vec{\kappa}_1, \ldots, \vec{\kappa}_{k-1}$ međusobno ortogonalni, ne-nula vektori iz $[\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_{k-1}\}]$.

Ako je $\vec{\kappa}_k = \vec{0}$ onda je $\vec{\beta}_k \in [\{\vec{\kappa}_1, \ldots, \vec{\kappa}_{k-1}\}] \subseteq [\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_{k-1}\}]$, što je suprotno pretpostavci da je $\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k\}$ linearno nezavisan.

Iz $\vec{\kappa}_k = \vec{\beta}_k - c_1\vec{\kappa}_1 - \ldots - c_k\vec{\kappa}_{k-1}$ i $\vec{\kappa}_1, \ldots, \vec{\kappa}_{k-1} \in [\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_{k-1}\}]$ sledi da je $\vec{\kappa}_k \in [\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k\}]$.

Još treba proveriti da za svako $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ važi $\vec{\kappa}_k \perp \vec{\kappa}_i$.

$$\begin{aligned} \vec{\kappa}_k \cdot \vec{\kappa}_i &= \vec{\beta}_k \cdot \vec{\kappa}_i - c_i(\vec{\kappa}_i \cdot \vec{\kappa}_i) \\ &= \vec{\beta}_k \cdot \vec{\kappa}_i - \frac{\vec{\beta}_k \cdot \vec{\kappa}_i}{\vec{\kappa}_i \cdot \vec{\kappa}_i}(\vec{\kappa}_i \cdot \vec{\kappa}_i) = 0. \end{aligned}$$ ⊣

Definicija. Baza $\mathcal{B}$ je *ortonormirana* kada je $\underline{\mathcal{B}}$ ortonormiran skup vektora.

Tvrđenje 13.5. *Ako je $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k \rangle$ ortonormirana baza i $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_k\vec{\beta}_k$, onda je $\|\vec{v}\| = \sqrt{c_1^2 + \ldots + c_k^2}$.*

dokaz. $\|\vec{v}\| = \sqrt{(c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_k\vec{\beta}_k) \cdot (c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_k\vec{\beta}_k)} = \sqrt{c_1^2 + \ldots + c_k^2}$. ⊣

Svaku ortogonalnu bazu prevodimo u ortonormiranu množeći svaki njen vektor recipročnom vrednošću norme tog vektora.

Primer. U prethodnom primeru dobili smo da je

$$\mathcal{K} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

ortogonalna baza za $\mathbf{R}^3$. Po gornjem uputstvu dobijamo da je

$$\mathcal{C} = \langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \rangle$$

ortonormirana baza za $\mathbf{R}^3$.

Definicija. Euklidski prostori $(V, \circ)$ i $(W, *)$ su *izomorfni* kada postoji izomorfizam vektorskih prostora $h\colon V \to W$ takav da za proizvoljne $u, v \in V$ važi

$$u \circ v = h(u) * h(v).$$

Tvrđenje 13.6. *Dva euklidska prostora su izomorfna akko su iste dimenzije.*

dokaz. Sleva udesno sledi iz teoreme 6.6. Za drugi smer pretpostavimo da su $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$ i $\langle \delta_1, \ldots, \delta_n \rangle$ ortonormirane baze redom za V i W. Posmatrajmo linearno preslikavanje $h\colon V \to W$ takvo da je za svako $1 \leq i \leq n$, $h(\beta_i) = \delta_i$. Lako se pokazuje da je linearno preslikavanje $g\colon W \to V$ takvo da je $g(\delta_i) = \beta_i$ njegov inverz, pa je h izomorfizam vektorskih prostora V i W. Neka je $\vec{u} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$, a $\vec{v} = d_1\vec{\beta}_1 + \ldots + d_n\vec{\beta}_n$. Tada važi

$$u \circ v = c_1 d_1 + \ldots + c_n d_n = h(u) * h(v). \qquad \dashv$$

§13.2. Ortogonalna projekcija vektora na potprostor

Definicija. Neka je U potprostor od $\mathbf{R}^n$. Definišemo njegov *ortogonalni komplement* $U^\perp$ kao

$$U^\perp =_{df} \{\vec{v} \in \mathbf{R}^n \mid \vec{v} \text{ je ortogonalan sa svakim vektorom iz } U\}.$$

Lema 13.7. *Ako je vektor ortogonalan sa svakim vektorom nekog skupa, onda je taj vektor ortogonalan i sa svakim vektorom iz linearnog omotača tog skupa. Obrat važi trivijalno.*

dokaz. Ako je $\vec{v} \cdot \vec{u}_1 = 0, \ldots, \vec{v} \cdot \vec{u}_k = 0$, onda je i $\vec{v} \cdot (c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_k\vec{u}_k) = c_1(\vec{v} \cdot \vec{u}_1) + \ldots + c_k(\vec{v} \cdot \vec{u}_k) = 0$. $\dashv$

Posledica 13.8. *Ako je svaki vektor skupa S ortogonalan sa svakim vektorom skupa T, onda je i svaki vektor iz $[S]$ ortogonalan sa svakim vektorom iz $[T]$.*

dokaz. Po lemi 13.7 dobijamo da je svaki vektor skupa S ortogonalan sa svakim vektorom iz $[T]$. Pošto je relacija ortogonalnosti simetrična, opet po lemi 13.7 zaključujemo da je svaki vektor iz $[T]$ ortogonalan sa svakim vektorom iz $[S]$. Još jednom iskoristiti simetričnost ortogonalnosti. ⊣

Primer. Odrediti ortogonalni komplement ravni

$$P = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 3x + 2y - z = 0\} = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R}\}.$$

Po lemi 13.7, $P^\perp = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3 \mid \vec{v} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad \vec{v} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\}$. Dakle,

$$\begin{aligned} P^\perp &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 3z = 0 \quad \wedge \quad y + 2z = 0\} \\ &= \{ \begin{pmatrix} -3z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbf{R}\} = [\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \}]. \end{aligned}$$

Tvrđenje 13.9. *Za potprostor U od $\mathbf{R}^n$ važi da je $U^\perp$ takođe potprostor od $\mathbf{R}^n$ i još važi $\mathbf{R}^n = U \oplus U^\perp$.*

dokaz. Prvo ćemo pokazati da je $U^\perp$ potprostor od $\mathbf{R}^n$. Pošto je $\vec{0}$ ortogonalan sa svakim vektorom iz U, to je $\vec{0} \in U^\perp$, pa je $U^\perp$ neprazan. Neka su $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in U^\perp$ i neka je $\vec{u}$ proizvoljan vektor iz U. Po lemi 13.7 imamo da je $\vec{u} \perp (c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2)$ pa zaključujemo da je $c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2 \in U^\perp$. Po tvrđenju 3.1 sledi da je $U^\perp$ potprostor od $\mathbf{R}^n$.

Još treba pokazati da je $\mathbf{R}^n = U \oplus U^\perp$. Lako zaključujemo da je $U \cap U^\perp = \{\vec{0}\}$ zato što za svaki $\vec{v} \in U \cap U^\perp$ važi $\vec{v} \perp \vec{v}$, to jest $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$, pa je $\vec{v} = \vec{0}$. Neka je $dim(U) = k$. Iz $dim(U \oplus U^\perp) \leq n$, zaključujemo da je $dim(U^\perp) \leq n - k$.

Neka je $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k \rangle$ baza za U. Proširimo je do baze $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k, \vec{\beta}_{k+1}, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ za $\mathbf{R}^n$, po tvrđenju 4.8. Primenimo Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije i neka je

$$\langle \vec{\kappa}_1, \ldots, \vec{\kappa}_k, \vec{\kappa}_{k+1}, \ldots, \vec{\kappa}_n \rangle$$

dobijena ortogonalna baza za $\mathbf{R}^n$, pri čemu je $\langle \vec{\kappa}_1, \ldots, \vec{\kappa}_k \rangle$ ortogonalna baza za U.

Po lemi 13.7 imamo da su vektori $\vec{\kappa}_{k+1}, \ldots, \vec{\kappa}_n$ ortogonalni sa svim vektorima iz U, pa važi $\{\vec{\kappa}_{k+1}, \ldots, \vec{\kappa}_n\} \subseteq U^\perp$. Pošto je to linearno nezavisan skup od $n - k$ vektora, a $dim(U^\perp) \leq n - k$, zaključujemo da on daje bazu za $U^\perp$. Dakle, $\mathbf{R}^n = U \oplus U^\perp$. ⊣

PRIMER 1. Neka je $\circ$ skalarni proizvod u $\mathcal{P}_2$ definisan kao u primeru 1 iz sekcije 12.2. Odredićemo jednu ortonormiranu bazu (u odnosu na taj skalarni proizvod) potprostora

$$U = \{p \in \mathcal{P}_2 \mid p(2) - p(1) = p'(1)\}$$

od $\mathcal{P}_2$ kao i dimenziju potprostora $U^\perp$.

Neka je $p(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$. Tada je $p'(x) = 2p_2x + p_1$ i

$$p(2) - p(1) = p'(1) \quad \Leftrightarrow \quad p_2 = 0,$$

pa je $U = \mathcal{P}_1$ i jedna njegova baza je $\langle 1, x\rangle$. Lako izračunamo da je $\|1\| = \sqrt{1 \circ 1} = \sqrt{3}$ i za prvi vektor ortonormirane baze za U uzimamo polinom nultog stepena $\kappa_1 = 1/\sqrt{3}$. Po Gram-Šmitovom postupku određujemo vektor

$$x - \frac{x \circ 1}{1 \circ 1}1 = x - \frac{-1+0-3}{3} = x + \frac{4}{3},$$

čija je norma jednaka $\sqrt{42}/3$ i za drugi vektor ortonormirane baze za U uzimamo polinom prvog stepena $\kappa_2 = \dfrac{3}{\sqrt{42}}x + \dfrac{4}{\sqrt{42}}$. Po tvređenju 13.9, pošto je prostor $\mathcal{P}_2$ trodimenzionalan a U dvodimenzionalan, to je $U^\perp$ jednodimenzionalan.

Neka je U potprostor od $\mathbf{R}^n$. Po tvrđenju 13.9 i lemi 5.8 imamo da za svako $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ postoje jedinstveni $\vec{u} \in U$ i $\vec{w} \in U^\perp$ takvi da je $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$.

DEFINICIJA. *Ortogonalna projekcija* vektora $\vec{v}$ na U, u oznaci $proj_U(\vec{v})$, je jedinstveni vektor $\vec{u} \in U$ takav da je $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ za neko $\vec{w} \in U^\perp$. Vektor $\vec{w} = \vec{v} - proj_U(\vec{v})$ je *ortogonalna dopuna* vektora $\vec{v}$ u odnosu na U. *Ugao između vektora i potprostora* je ugao između tog vektora i njegove ortogonalne projekcije na taj potprostor.

Postupak određivanja ortogonalne projekcije i ortogonalne dopune vektora $\vec{v}$ na potprostor U.

1. Odrediti ortogonalnu bazu $\langle \vec{\kappa}_1, \ldots, \vec{\kappa}_k\rangle$ za U.
2. Odrediti Furijeove koeficijente $c_i = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{\kappa}_i}{\vec{\kappa}_i \cdot \vec{\kappa}_i}$.
3. $proj_U(\vec{v}) = c_1\vec{\kappa}_1 + \ldots + c_k\vec{\kappa}_k$.
4. Ortogonalna dopuna vektora $\vec{v}$ u odnosu na U je vektor $\vec{v} - proj_U(\vec{v})$.

PRIMER 2. Neka je $\circ$ skalarni proizvod u $\mathcal{P}_2$ definisan kao u primeru 1 iz sekcije 12.2 i neka je U potprostor od $\mathcal{P}_2$ definisan kao u primeru 1 iz ove sekcije. Odredićemo projekciju vektora $r(x) = 7x^2+19x+2$ na U, ugao između r i U, kao i bazu prostora $U^\perp$.

Furijeovi koeficijenti su $c_1 = \dfrac{r \circ \kappa_1}{\kappa_1 \circ \kappa_1} = 0$ i $c_2 = \dfrac{r \circ \kappa_2}{\kappa_2 \circ \kappa_2} = -\sqrt{42}$, pa dobijamo da je

$$t = proj_U(r) = -\sqrt{42}\,\kappa_2 = -3x - 4.$$

Imamo da je $\cos\angle(r,t) = \dfrac{r \circ t}{\|r\|\,\|t\|} = 1/2$, pa je $\pi/3$ ugao između r i U. Ortogonalna dopuna polinoma r u odnosu na U je polinom $q(x) = r(x) - t(x) = 7x^2 + 22x + 6$. Pošto je prostor $U^\perp$ jednodimenzionalan, možemo uzeti $\langle q(x)\rangle$ za njegovu bazu.

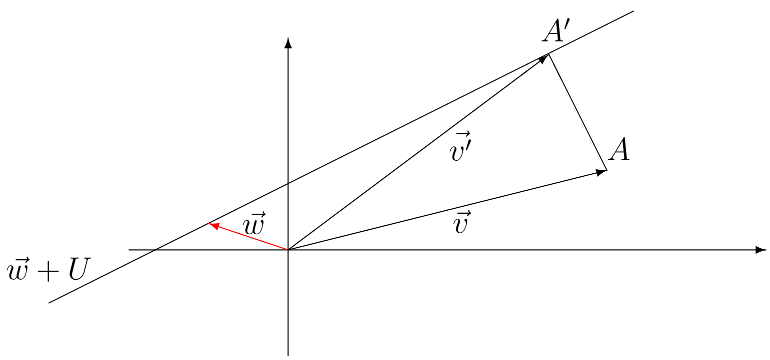
Definicija. Neka je U potprostor od $\mathbf{R}^n$ i neka je $\vec{w} \in \mathbf{R}^n$ proizvoljan vektor. Skup vektora

$$\vec{w} + U = \{\vec{w} + \vec{u} \mid \vec{u} \in U\}$$

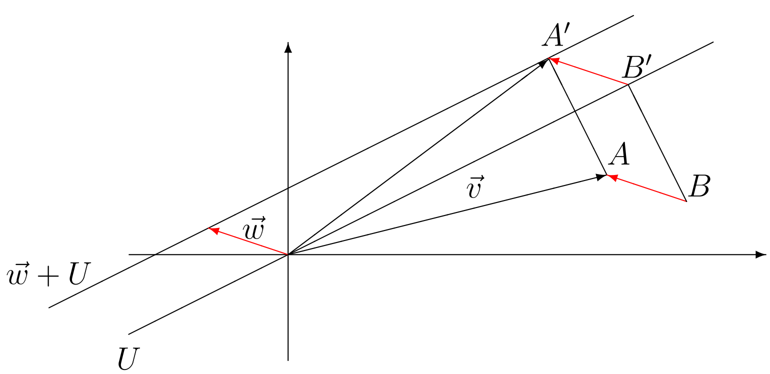
je *afini potprostor* od $\mathbf{R}^n$. *Ortogonalna projekcija* proizvoljnog vektora $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ na afini potprostor $\vec{w} + U$, u oznaci $proj_{\vec{w}+U}(\vec{v})$, je vektor

$$\vec{w} + proj_U(\vec{v} - \vec{w}).$$

Da bismo opravdali ovu definiciju, krenimo od sledece ilustracije. Tačka A je data svojim vektorom položaja $\vec{v}$ i hoćemo da odredimo njenu projekciju A', zadatu vektorom položaja $\vec{v'}$, na afini potprostor $\vec{w} + U$.



Translirajmo sve ove tačke za vektor $-\vec{w}$.



Četvorougao $ABB'A'$ je paralelogram, pa je onda BB' normalno na U. Dakle, vektor $\vec{v} - \vec{w}$ treba projektovati na potprostor U, a zatim dobijenu projekciju sabrati s vektorom $\vec{w}$ da bi se dobio vektor položaja tačke A'.

§14. Odeljak 14.

§14.1. Ortogonalne matrice

TVRĐENJE 14.1. *Neka je P matrica promene baze iz $\mathcal{B}$ u ortonormiranu bazu $\mathcal{D}$ od $\mathbf{R}^n$. Tada je $\mathcal{B}$ ortonormirana akko je $P^TP = E_n$.*

DOKAZ. Neka je $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$, $\mathcal{D} = \langle \vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_n \rangle$ i neka je

$$P^T = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \ldots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \ldots & p_{n2} \\ & & \ldots & \\ p_{1n} & p_{2n} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ & & \ldots & \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

to jest $\vec{\beta}_i = p_{1i}\vec{\delta}_1 + p_{2i}\vec{\delta}_2 + \ldots + p_{ni}\vec{\delta}_n$. U preseku i-te vrste i j-te kolone matrice P^TP se nalazi

$$p_{1i}p_{1j} + p_{2i}p_{2j} + \ldots + p_{ni}p_{nj},$$

što je jednako $\vec{\beta}_i \cdot \vec{\beta}_j$ zbog pretpostavke da je $\mathcal{D}$ ortonormirana. Dakle važi:

$$\mathcal{B} \text{ ortonormirana} \Leftrightarrow \vec{\beta}_i \cdot \vec{\beta}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow P^TP = E_n. \qquad \dashv$$

Matrica $P \in \mathcal{M}_n$ je *ortogonalna* kada važi $P^TP = E_n$. Po teoremi 9.16, važi da je $(det(P))^2 = 1$, pa je $det(P) = 1$ ili $det(P) = -1$. Dalje, po teoremi 9.15, matrica P je invertibilna pa važi

$$P^T = P^TPP^{-1} = P^{-1}.$$

Takođe, kolone matrice P daju ortonormiranu bazu za $\mathbf{R}^n$. Videti primer 2 u sekciji 7.1, u kome su rotacije ravni predstavljene ortogonalnim matricama oblika $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

NAPOMENA 14.2. *Ako je $U \in \mathcal{M}_{n\times r}$ takva da joj kolone obrazuju ortonormirani skup vektora iz $\mathbf{R}^n$, onda je $U^TU = E_r$. Posebno, ako je $n = r$, onda je U ortogonalna. Ortogonalna matrica ne menja normu vektora, to jest ako je $U \in \mathcal{M}_n$ ortogonalna, onda za svaki $v \in \mathbf{R}^n$ važi $\|U\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$.*

DOKAZ. Prvi deo je trivijalan a za drugi deo imamo:

$$\begin{aligned} \|U\vec{v}\|^2 &= (U\vec{v}) \cdot (U\vec{v}) = (U\vec{v})^T(U\vec{v}) = \vec{v}^TU^TU\vec{v} = \vec{v}^T\vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{v}\|^2. \end{aligned} \qquad \dashv$$

NAPOMENA 14.3. *Proizvod ortogonalnih matrica je ortogonalna matrica.*

§14.2. Hermitski prostor $\mathbf{C}^n$

U ovoj sekciji ćemo vektorskom prostoru $\mathbf{C}^n$ nad poljem $\mathbf{C}$ dati hermitsku strukturu.

DEFINICIJA. Za dva vektora $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ i $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ iz $\mathbf{C}^n$ definišemo njihov *skalarni proizvod* $\vec{u} \cdot \vec{v}$ kao kompleksan broj $\overline{u}_1 v_1 + \ldots + \overline{u}_n v_n$, gde je sa $\overline{z}$ označeno konjugovanje u $\mathbf{C}$.

Lako se vidi da ovako definisan skalarni proizvod zadovoljava sledeća svojstva:

($\overline{1}$) *konjugovana linearnost*, to jest $(a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{w} = \overline{a}(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \overline{b}(\vec{v} \cdot \vec{w})$,

($\overline{2}$) *konjugovana simetričnost*, to jest $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{\vec{v} \cdot \vec{u}}$,

(3) *pozitivna definisanost*, to jest $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ i ($\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ akko $\vec{u} = \vec{0}$).

Konačnodimenzionalni vektorski prostor V nad poljem $\mathbf{C}$ sa *skalarnim proizvodom* $\circ : V \times V \to \mathbf{C}$ koji zadovoljava svojstva ($\overline{1}$), ($\overline{2}$) i (3) je *hermitski* vektorski prostor. *Normu* vektora $\vec{v} \in \mathbf{C}^n$ definišemo kao

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2}.$$

Za kvadratnu matricu A nad poljem $\mathbf{C}$, definišimo A^* kao $(\overline{A})^T$, gde je $\overline{A}$ dobijena konjugovanjem svih elemenata matrice A. Primetimo da je skalarni proizvod $\vec{u} \cdot \vec{v}$ u $\mathbf{C}$ jednak proizvodu matrica $\vec{u}^* \vec{v}$. Odavde sledi da je $\vec{v}^* \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$. U slučaju kvadratnih matrica nad poljem $\mathbf{C}$, pojam analogan pojmu ortogonalne matrice je pojam *unitarne* matrice, to jest matrice U za koju važi $U^* = U^{-1}$.

LEMA 14.4. *Za matrice A i B nad poljem $\mathbf{C}$ i $\lambda \in \mathbf{C}$, važi da je $(AB)^* = B^* A^*$ i $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.*

DOKAZ. Iskoristiti svojstvo da konjugovanje prolazi kroz zbir i proizvod u $\mathbf{C}$ i da je $(AB)^T = B^T A^T$. $\dashv$

§14.3. Simetrične matrice

Matrica $A \in \mathcal{M}_n$ je *simetrična* kada važi $A^T = A$, to jest ona je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu. U slučaju kvadratnih matrica nad poljem $\mathbf{C}$, analogan je pojam *hermitske* matrice, to jest matrice A za koju važi $A^* = A$. U narednim tvrđenjima, iskoristićemo utapanje polja $\mathbf{R}$ u polje $\mathbf{C}$ koje se prenosi na utapanje euklidskog prostora $\mathbf{R}^n$ u hermitski prostor $\mathbf{C}^n$. Da ne bi došlo do zabune, uvek ćemo navoditi kada datu realnu matricu posmatramo kao matricu nad $\mathbf{R}$ ili nad $\mathbf{C}$, kada tražimo samo realne sopstvene vrednosti a kada kompleksne i analogno za sopstvene vektore. Kad kažemo „svi koreni nekog polinoma”, mislimo na sve korene iz polja $\mathbf{C}$.

Tvrđenje 14.5. *Svi koreni karakterističnog polinoma simetrične matrice su realni i sopstveni vektori iz* $\mathbf{R}^n$ *koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima su međusobno ortogonalni.*

dokaz. Neka je A simetrična matrica koju posmatramo kao matricu nad poljem $\mathbf{C}$. Neka je $\lambda \in \mathbf{C}$ proizvoljan koren njenog karakterističnog polinoma. Po napomeni 10.5, λ je sopstvena vrednost za A pa postoji ne-nula vektor $\vec{v} \in \mathbf{C}^n$ takav da je $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Primenom operacije $*$ na obe strane ove jednakosti, uz lemu 14.4 i pretpostavku da je A simetrična, to jest $A^* = A^T = A$, dobijamo $\vec{v}^* A = \overline{\lambda}\vec{v}^*$. Množenjem zdesna obe strane ove jednakosti vektorom $\vec{v}$, dobijamo $\vec{v}^* A\vec{v} = \overline{\lambda}\vec{v}^*\vec{v}$. Pošto je $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, sledi da je $\lambda\vec{v}^*\vec{v} = \overline{\lambda}\vec{v}^*\vec{v}$, to jest $\lambda\|\vec{v}\|^2 = \overline{\lambda}\|\vec{v}\|^2$. Iz $\vec{v} \neq \vec{0}$ sledi da je $\|\vec{v}\|^2 > 0$, pa je $\lambda = \overline{\lambda}$, što je jedino moguće kada je $\lambda \in \mathbf{R}$.

Neka su $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbf{R}^n$ sopstveni vektori koji odgovaraju redom sopstvenim vrednostima λ_1 i λ_2 i neka je $\lambda_1 \neq \lambda_2$. To znači da je $A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$ i $A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$. Množenjem prve jednakosti sleva vektor-vrstom $(\vec{v}_2)^T$, uz $(\vec{v}_2)^T A = (A\vec{v}_2)^T = \lambda_2(\vec{v}_2)^T$ i $(\vec{v}_2)^T\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$, dobijamo $\lambda_2(\vec{v}_2)^T\vec{v}_1 = \lambda_1(\vec{v}_2)^T\vec{v}_1$, to jest $(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = 0$. Odavde, pošto je $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, sledi da je $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = 0$, to jest $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_1$. ⊣

Teorema 14.6 (Šurova trijangulacija). *Neka je* $A \in \mathcal{M}_n$ *takva da su joj svi koreni karakterističnog polinoma realni. Tada postoji ortogonalna matrica* P *takva da je matrica* $P^T AP$ *gornje-trougaona.*

dokaz. Indukcijom po $n \geq 1$.

(**baza indukcije**) Ako je $n = 1$, onda je A već gornje-trougaona.

(**induktivni korak**) Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n - 1$. Neka je $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ sopstvena vrednost za A i neka je $\vec{v}_1 \in \mathbf{R}^n$ odgovarajući jedinični sopstveni vektor. Neka je $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$ baza za $\mathbf{R}^n$ koja uključuje sopstveni vektor $\vec{v}_1$ i koju, zbog Gram-Šmitovog postupka možemo smatrati ortonormiranom.

Neka je P_0 matrica $(\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n)$. Ona je po napomeni 14.2, ortogonalna. Primetimo da je $P_0^T\vec{v}_1 = \vec{e}_1$, pa je onda $P_0^T A\vec{v}_1 = \lambda_1 P_0^T\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{e}_1$. Odavde zaključujemo da je

$$P_0^T AP_0 = P_0^T(A\vec{v}_1 \ldots A\vec{v}_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

gde je $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}$ i $B \in \mathcal{M}_{1\times(n-1)}$. Pošto je dobijena matrica slična matrici A, one imaju isti karakteristični polinom koji je jednak proizvodu monoma $(\lambda_1 - x)$ i karakterističnog polinoma matrice A_1. Dakle, svi koreni karakterističnog polinoma matrice A_1 su realni i na nju možemo primeniti induktivnu hipotezu po kojoj postoji ortogonalna matrica P_1 takva da je $P_1^T A_1 P_1$ jednaka gornjetrougaonoj matrici T_1.

Neka je P_2 matrica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$ koja je ortogonalna po napomeni 14.2. Proizvod matrica P_0P_2 označimo sa P. Matrica P je ortogonalna po napomeni 14.3. Posmatrajmo proizvod $P^T AP$. Na osnovu sledećeg računa, on je jednak gornjetrougaonoj matrici.

$$P^TAP = P_2^T(P_0^TAP_0)P_2 = P_2^T\begin{pmatrix}\lambda_1 & B\\ 0 & A_1\end{pmatrix}P_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & B\\ 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda_1 & BP_1\\ 0 & P_1^TA_1P_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & BP_1\\ 0 & T_1\end{pmatrix} \qquad \dashv$$

Teorema 14.7 (Spektralna teorema). *Ako je matrica A simetrična, onda postoji ortogonalna matrica P takva da je matrica P^TAP dijagonalna.*

dokaz. Po tvrđenju 14.5 i teoremi 14.6, postoji ortogonalna matrica P takva da je P^TAP gornje-trougaona. Kada matricu P^TAP transponujemo, dobijamo donje-trougaonu matricu $P^TA^TP = P^TAP$. Dakle, matrica P^TAP je dijagonalna pošto je istovremeno i gornje i donje trougaona. $\dashv$

Posledica 14.8. *Ako je matrica A simetrična, onda postoji ortonormirana baza za $\mathbf{R}^n$ koja se sastoji od sopstvenih vektora matrice A.*

dokaz. Neka je P matrica iz teoreme 14.7. Njene kolone $\vec{\pi}_1, \ldots, \vec{\pi}_n$ daju ortonormiranu bazu za $\mathbf{R}^n$. Još važi

$$P^TAP = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \ldots & 0\\ & \ddots & \\ 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix} \Leftrightarrow AP = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & \ldots & 0\\ & \ddots & \\ 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix} \Leftrightarrow (A\vec{\pi}_1 \ldots A\vec{\pi}_n) = (\lambda_1\vec{\pi}_1 \ldots \lambda_n\vec{\pi}_n),$$

pa su $\vec{\pi}_1, \ldots, \vec{\pi}_n$ sopstveni vektori matrice A. $\dashv$

Postupak dijagonalizacije simetrične matrice $A \in \mathcal{M}_n$ pomoću ortogonalne matrice.

1. Za svaku sopstvenu vrednost λ matrice A odrediti bazu odgovarajućeg sopstvenog prostora $V_\lambda = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^n \mid A\vec{v} = \lambda\vec{v}\} = Ker(A - \lambda E_n)$.
2. Primenom Gram-Šmitovog postupka ortonormirati svaku od dobijenih baza.
3. Nadovezivanjem ortonormiranih baza sopstvenih potprostora dobijamo ortonormiranu bazu $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\rangle$ za $\mathbf{R}^n$.
4. Neka je P matrica $(\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n)$. Tada je matrica P^TAP tražena dijagonalna matrica.

Primer 1. Odrediti bar jednu ortogonalnu matricu P takvu da je za datu simetričnu matricu $A = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$, matrica P^TAP dijagonalna.

Karakteristični polinom matrice A se faktoriše kao $(3+x)^2(3-x)$, pa su -3 i 3 sve njene sopstvene vrednosti. Komponente x, y i z sopstvenih vektora koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti -3 zadovoljavaju sistem jednačina

$$\begin{array}{rrrl} -x & +2y & +2z & = -3x\\ 2x & -y & +2z & = -3y\\ 2x & +2y & -z & = -3z \end{array}, \quad \text{to jest} \quad \begin{array}{rrrl} 2x & +2y & +2z & = 0\\ 2x & +2y & +2z & = 0\\ 2x & +2y & +2z & = 0 \end{array},$$

pa je sopstveni prostor $V_{-3} = \{y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbf{R}\}$. Gram-Šmitovim postupkom dobijamo da je

$$\langle \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \rangle$$

jedna njegova ortonormirana baza.

Komponente x, y i z sopstvenih vektora koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti 3 zadovoljavaju sistem jednačina

$$\begin{array}{rrrl} -x & +2y & +2z & = 3x \\ 2x & -y & +2z & = 3y \\ 2x & +2y & -z & = 3z \end{array}, \quad \text{to jest} \quad \begin{array}{rrrl} -2x & +y & +z & = 0 \\ & -3y & +3z & = 0 \\ & 3y & -3z & = 0 \end{array},$$

pa je sopstveni prostor $V_3 = \{z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbf{R}\}$. Njegova ortonormirana baza je $\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \rangle$, pa je $\langle \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \rangle$ jedna ortonormirana baza prostora $\mathbf{R}^3$. Dakle, tražene matrice su

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad P^T AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

§15. Odeljak 15.

§15.1. Linearne forme, dualni prostor

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbf{R}$. Linearno preslikavanje iz V u $\mathbf{R}$, gde se polje $\mathbf{R}$ posmatra kao jednodimenzionalni vektorski prostor $\mathbf{R}^1$ nad $\mathbf{R}$, je *linearna forma* ili *funkcional*. Na isti način definišemo linearne forme u slučaju vektorskog prostora nad proizvoljnim poljem.

Ako fiksiramo prostor V, sve linearne forme iz V u $\mathbf{R}$ čine vektorski prostor $\mathcal{L}(V, \mathbf{R})$ koji se skraćeno označava sa V^*. Taj prostor se zove *dualni* prostor prostora V.

TVRĐENJE 15.1. *Ako je prostor V, n-dimenzionalan, onda je i V^*, n-dimenzionalan i prema tome izomorfan sa V.*

DOKAZ. Na osnovu tvrđenja 7.14 imamo da je V^* izomorfan prostoru $\mathcal{M}_{1\times n}$ koji je n-dimenzionalan, pa je po teoremi 6.6 i prostor V^* takođe n-dimenzionalan, a samim tim, po istoj teoremi, izomorfan sa V. ⊣

Neka je β_i^* za $1 \leq i \leq n$ linearna forma iz V^* čije je dejstvo na bazi $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ prostora V zadato sa

$$\beta_i^*(\vec{\beta}_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

TVRĐENJE 15.2. *$\langle \beta_1^*, \ldots, \beta_n^* \rangle$ je baza za V^*.*

DOKAZ. Pošto je prostor V^*, n-dimenzionalan, dovoljno je proveriti da je $[\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*] = V^*$. Neka je h proizvoljna linearna forma iz V^* i neka je za $1 \leq i \leq n$, $h(\vec{\beta}_i) = c_i$. Tada je $h = c_1\beta_1^* + \ldots + c_n\beta_n^*$. ⊣

POSLEDICA 15.3. *Za proizvoljnu bazu $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ prostora V, linearno preslikavanje zadato sa $\vec{\beta}_i \mapsto \beta_i^*$ je izomorfizam između V i V^*. To preslikavanje zavisi od izbora baze za V.*

NAPOMENA 15.4. *Izomorfizam između V i V^* ne mora da važi kada V nije konačno-dimenzionalan.*

Neka je $(V, \circ)$ euklidski prostor. Za proizvoljan vektor $\vec{v} \in V$ definišimo preslikavanje $H(\vec{v})\colon V \to \mathbf{R}$ sa

$$H(\vec{v})(\vec{w}) =_{df} \vec{w} \circ \vec{v}.$$

Na osnovu svojstva linearnosti skalarnog proizvoda, $H(\vec{v})$ je linearna forma. Dakle, $H\colon V \to V^*$.

TVRĐENJE 15.5. *H je izomorfizam.*

DOKAZ. Na osnovu svojstava linearnosti i simetričnosti skalarnog proizvoda imamo da je

$$H(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2)(\vec{w}) = \vec{w} \circ (c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) = (c_1H(\vec{v}_1) + c_2H(\vec{v}_2))(\vec{w}),$$

pa je H linearno preslikavanje.

(H je **1-1**) Ako je $H(\vec{v}_1) = H(\vec{v}_2)$, onda je za svaki vektor $\vec{w} \in V$, $\vec{w} \circ \vec{v}_1 = \vec{w} \circ \vec{v}_2$, to jest $\vec{w} \circ (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = 0$. Posebno, za $\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, po svojstvu pozitivne definisanosti zaključujemo da je $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{0}$, odnosno $\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

(H je **na**) Neka je $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ ortonormirana baza za V. Neka je $h \in V^*$ proizvoljna linearna forma. Ako je za $1 \leq i \leq n$, $h(\vec{\beta}_i) = c_i$ i $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$, onda je $h = H(\vec{v})$. $\dashv$

NAPOMENA 15.6. *Koristeći teoremu 6.15, pošto je $dim(V) = dim(V^*)$, u prethodnom dokazu je bilo dovoljno pokazati za H da je **1-1** ili da je **na**.*

Preslikavanje H ne zavisi od izbora baze za V.

§15.2. Simetrični operatori

Neka je $(V, \circ)$ euklidski prostor i neka je $h : V \to V$ linearni operator. Tada važi sledeće tvrđenje.

TVRĐENJE 15.7. *Postoji jedinstven linearni operator $h^T : V \to V$ takav da je za svako $\vec{u}, \vec{v} \in V$*

$$h(\vec{u}) \circ \vec{v} = \vec{u} \circ h^T(\vec{v}).$$

Ukoliko je $\mathcal{B}$ neka ortonormirana baza za V i $A = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(h)$, onda je $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(h^T)$ jednaka A^T.

DOKAZ. Primetimo da je za fiksirano $\vec{v} \in V$ definisana jedna linearna forma $f : V \to \mathbf{R}$ kao

$$f(\vec{u}) = h(\vec{u}) \circ \vec{v}.$$

Neka je $H : V \to V^*$ izomorfizam iz tvrđenja 15.5. Definišimo $h^T(\vec{v})$ kao vektor $H^{-1}(f) \in V$. Dakle, važi

$$h(\vec{u}) \circ \vec{v} = f(\vec{u}) = H(H^{-1}(f))(\vec{u}) = H(h^T(\vec{v}))(\vec{u}) = \vec{u} \circ h^T(\vec{v}).$$

Da bismo pokazali da je h^T linearno preslikavanje, to jest da za proizvoljne $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ i $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ važi $h^T(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) = c_1h^T(\vec{v}_1) + c_2h^T(\vec{v}_2)$, po tvrđenju 15.5, dovoljno je pokazati da je za svaki vektor $\vec{u} \in V$

$$\vec{u} \circ h^T(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) = \vec{u} \circ (c_1h^T(\vec{v}_1) + c_2h^T(\vec{v}_2)).$$

$$\begin{aligned}\vec{u}\circ h^T(c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2) &= h(\vec{u})\circ(c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2) = c_1h(\vec{u})\circ\vec{v}_1+c_2h(\vec{u})\circ\vec{v}_2\\ &= c_1\vec{u}\circ h^T(\vec{v}_1)+c_2\vec{u}\circ h^T(\vec{v}_2) = \vec{u}\circ(c_1h^T(\vec{v}_1)+c_2h^T(\vec{v}_2))\end{aligned}$$

Za prvi deo tvrđenja treba još pokazati da je svaki drugi operator koji zadovoljava gornji uslov jednak h^T. Neka je $h'\colon V\to V$ linearan operator koji za svako $\vec{u},\vec{v}\in V$ zadovoljava

$$h(\vec{u})\circ\vec{v}=\vec{u}\circ h'(\vec{v}).$$

Neka je $\vec{v}\in V$ proizvoljan. Pošto za svako $\vec{u}\in V$ važi

$$\vec{u}\circ h'(\vec{v})=h(\vec{u})\circ\vec{v}=\vec{u}\circ h^T(\vec{v}),$$

po tvrđenju 15.5, sledi da je $h'(\vec{v})=h^T(\vec{v})$. S obzirom da ovo važi za svako $\vec{v}\in V$, po ekstenzionalnosti zaključujemo da su preslikavanja h' i h^T jednaka.

Neka je $\mathcal{B}=\langle\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_n\rangle$. Matrica A je takva da je njena j-ta kolona $Rep_{\mathcal{B}}(h(\vec{\beta}_j))$. Dakle, $h(\vec{\beta}_j)=a_{1j}\vec{\beta}_1+\ldots+a_{nj}\vec{\beta}_n$, pa je $h(\vec{\beta}_j)\circ\vec{\beta}_i=a_{ij}$, zbog ortonormiranosti baze.

Neka je $B=Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(h^T)$. Analogno prethodnom zaključujemo da je $h^T(\vec{\beta}_j)\circ\vec{\beta}_i=b_{ij}$. Zbog simetričnosti skalarnog proizvoda imamo

$$b_{ij}=\vec{\beta}_i\circ h^T(\vec{\beta}_j)=h(\vec{\beta}_i)\circ\vec{\beta}_j=a_{ji},$$

pa je $B=A^T$. ⊣

Operator h^T nazivamo *transponatom* operatora h. Linearan operator $h\colon V\to V$ na euklidskom prostoru V je *simetričan* kada je on jednak svom transponatu h^T, to jest kada za svako $\vec{u},\vec{v}\in V$ važi

$$h(\vec{u})\circ\vec{v}=\vec{u}\circ h(\vec{v}).$$

§15.3. Dvostruki dualni prostor

Ukoliko nastavimo proceduru pravljenja dualnog prostora i primenimo je na prostor V^*, dobijamo prostor $\mathcal{L}(V^*,\mathbf{R})$ koji označavamo sa V^{**} i nazivamo *dvostrukim dualom* ili *bidualom* vektorskog prostora V. Za proizvoljan vektor $\vec{v}\in V$ definišimo preslikavanje $H(\vec{v})\colon V^*\to\mathbf{R}$ sa

$$H(\vec{v})(h)=_{df}h(\vec{v}).$$

Pošto je

$$H(\vec{v})(c_1h_1+c_2h_2)=c_1h_1(\vec{v})+c_2h_2(\vec{v})=c_1H(\vec{v})(h_1)+c_2H(\vec{v})(h_2),$$

zaključujemo da je $H(\vec{v})\in V^{**}$. Dakle, $H\colon V\to V^{**}$.

Tvrđenje 15.7. *H je linearno preslikavanje koje je* ***1-1****.*

DOKAZ. H je linearno zato što je

$$H(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2)(h) = h(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) = (c_1 H(\vec{v}_1) + c_2 H(\vec{v}_2))(h).$$

(H je **1-1**) Pokazaćemo da je jezgro od H trivijalno. Neka je $\vec{w} \neq \vec{0}$. Po tvrđenju 3.12 postoji neuređena baza za V u kojoj se nalazi $\vec{w}$. Neka je $h\colon V \to \mathbf{R}$ zadato sa $h(\vec{w}) = 1$, a za sve ostale $\vec{v}$ iz te baze je $h(\vec{v}) = 0$.

Pošto je

$$H(\vec{w})(h) = h(\vec{w}) = 1,$$

zaključujemo da $H(\vec{w})$ nije nula preslikavanje iz V^* u V, to jest nije nula vektor iz V^{**}. ⊣

POSLEDICA 15.8. *Ako je V konačnodimenzionalan, onda je H izomorfizam.*

DOKAZ. Iskoristiti tvrđenje 15.7, teoremu 6.15, i činjenicu da je $dim(V) = dim(V^*) = dim(V^{**})$. ⊣

Preslikavanje H ne zavisi od izbora baze za V. U slučaju kada je V konačnodimenzionalan, za H kažemo da je *prirodni izomorfizam* između prostora V i njegovog dvostrukog duala.

§15.4. Bilinearna preslikavanja

Neka su V, W i U vektorski prostori nad $\mathbf{R}$. Preslikavanje $f\colon V \times W \to U$ je *bilinearno* kada za sve $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, $\vec{w}, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ i $c \in \mathbf{R}$ važi

$$f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}) = f(\vec{v}_1, \vec{w}) + f(\vec{v}_2, \vec{w}),$$

$$f(\vec{v}, \vec{w}_1 + \vec{w}_2) = f(\vec{v}, \vec{w}_1) + f(\vec{v}, \vec{w}_2),$$

$$f(c\vec{v}, \vec{w}) = cf(\vec{v}, \vec{w}) = f(\vec{v}, c\vec{w}).$$

Posebno, kada je $U = \mathbf{R}$, onda je to *bilinearna forma*. Bilinearno preslikavanje $f\colon V \times V \to U$ je *simetrično* kada za sve $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ važi da je $f(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = f(\vec{v}_2, \vec{v}_1)$.

PRIMER. Skalarni proizvod $\circ\colon V \times V \to \mathbf{R}$ u euklidskom prostoru $(V, \circ)$ je simetrična bilinearna forma.

PRIMER. Preslikavanje $f\colon \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ zadato sa $f(X, Y) = det\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}$ je nesimetrična bilinearna forma.

PRIMER. Bilinearna forma je i preslikavanje $H\colon V \times V^* \to \mathbf{R}$ zadato sa

$$H(\vec{v}, h) = h(\vec{v}).$$

Neka su V i W konačnodimenzionalni prostori nad $\mathbf{R}$. Neka je $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ baza za V, a $\mathcal{D} = \langle \vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_m \rangle$ baza za W. Označimo sa $V \otimes W$ vektorski prostor nad $\mathbf{R}$ dimenzije nm i jednu njegovu bazu $\mathcal{C}$ preimenujmo u

$$\langle (\vec{\beta}_1, \vec{\delta}_1), \ldots, (\vec{\beta}_1, \vec{\delta}_m), \ldots, (\vec{\beta}_n, \vec{\delta}_1), \ldots, (\vec{\beta}_n, \vec{\delta}_m) \rangle.$$

Definišimo preslikavanje $i \colon V \times W \to V \otimes W$ sa

$$(\sum_{j=1}^{n} c_j \vec{\beta}_j, \sum_{k=1}^{m} d_k \vec{\delta}_k) \overset{i}{\mapsto} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_j d_k (\vec{\beta}_j, \vec{\delta}_k).$$

Uz malo računa, lako se proveri da je ovo preslikavanje bilinearno. Ono poseduje sledeće univerzalno svojstvo: za proizvoljno bilinearno preslikavanje $f : V \times W \to U$, postoji jedinstveno linearno preslikavanje $\overline{f} \colon V \otimes W \to U$ takvo da je $f = \overline{f} \circ i$.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "f"] & \\ V \otimes W \arrow[r, dotted, "\overline{f}"'] & U \end{tikzcd}$$

Prostor $V \otimes W$ je *tenzorski proizvod* prostora V i W. Neka su dati još i prostori V' i W' dimenzija n' i m', čije su baze $\mathcal{B}'$ i $\mathcal{D}'$ i neka je prostor $V' \otimes W'$ sa bazom $\mathcal{C}'$ formiran na isti način kao i $V \otimes W$ sa bazom $\mathcal{C}$. Ako su linearna preslikavanja $g : V \to V'$ i $h : W \to W'$ takva da je $\mathit{Rep}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g) = G$ i $\mathit{Rep}_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}(h) = H$, onda je $g \otimes h \colon V \otimes W \to V' \otimes W'$ linearno preslikavanje takvo da je

$$\mathit{Rep}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(g \otimes h) = G \otimes H = \begin{pmatrix} g_{11}H & \ldots & g_{1n}H \\ g_{21}H & \ldots & g_{2n}H \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n'1}H & \ldots & g_{n'n}H \end{pmatrix}.$$

Matrica $G \otimes H$ je *Kronekerov proizvod* matrica G i H.

Pošto je svako linearno preslikavanje određeno svojim dejstvom na bazi (videti teoremu 6.10), iz univerzalnog svojstva tenzorskog proizvoda dobijamo da je svako bilinearno preslikavanje $f : V \times W \to U$ zadato svojim dejstvom na Dekartovom proizvodu baza prostora V i W. Posebno, u slučaju kad se radi o bilinearnoj formi, ukoliko sa a_{ij} označimo $f(\vec{\beta}_i, \vec{\delta}_j)$, onda je $A = (a_{ij})_{n \times m}$ matrica koja reprezentuje bilinearnu formu f u odnosu na par izabranih baza $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$ prostora V i W. Ovo se ogleda u tome što za proizvoljne vektore $\vec{v} \in V$, $\vec{w} \in W$ i njihove reprezentacije $X = \mathit{Rep}_{\mathcal{B}}(\vec{v})$ i $Y = \mathit{Rep}_{\mathcal{D}}(\vec{w})$, važi

$$f(\vec{v}, \vec{w}) = X^T A Y.$$

Ukoliko je bilinearna forma $f \colon V \times V \to \mathbf{R}$ simetrična, onda je njena reprezentacija, u odnosu na par istih baza prostora V, simetrična matrica.

§16. Odeljak 16.

§16.1. Realne kvadratne forme

Pod *kvadratnom formom* ovde ćemo podrazumevati homogen realan polinom stepena 2. Na primer $3x^2 + 6xy + y^2$ je kvadratna forma po promenljivim x i y. Primetimo da ovu kvadratnu formu možemo matrično zapisati kao

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{odnosno} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

U opštem slučaju, kvadratnu formu q po promenljivim $x_1, \ldots, x_n$ možemo zapisati kao

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

gde su a_{ij} realni brojevi. Ukoliko sa A označimo matricu $(a_{ij})_{n \times n}$, onda se ova kvadratna forma matrično zapisuje kao

$$X^T A X.$$

Matrica A je *matrica kvadratne forme* q. Pošto je polinom $X^T A X$ jednak polinomu $X^T A^T X$, to jest $\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} x_j) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji} x_j)$, imamo da važi

$$2q = X^T A X + X^T A^T X = X^T (A + A^T) X, \text{ to jest } q = X^T \left(\frac{1}{2}(A + A^T) \right) X.$$

Na taj način vidimo da matricu A možemo uvek zameniti simetričnom matricom $\frac{1}{2}(A + A^T)$ i nadalje ćemo smatrati da su matrice kvadratnih formi simetrične. U slučaju kvadratne forme $3x^2 + 6xy + y^2$ dobijamo matricu

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

S druge strane, kvadratnu formu q po promenljivim $x_1, \ldots, x_n$ možemo posmatrati kao preslikavanje $q \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ zadato polinomom q. To preslikavanje zadovoljava:

(1) za svako $c \in \mathbf{R}$ i svako $X \in \mathbf{R}^n$, $q(cX) = c^2 q(X)$,

(2) ako definišemo $f \colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sa

$$f(X, Y) =_{df} \frac{1}{2} \left(q(X + Y) - q(X) - q(Y) \right),$$

onda je f simetrična bilinearna forma za koju važi $f(X, X) = q(X)$.

(Za dokaz dela (2) kvadratnu formu $q(X)$ možemo posmatrati kao $X^T A\, X$.)

Uopšteno, pod kvadratnom formom podrazumevamo preslikavanje $q\colon V \to \mathbf{R}$ koje zadovoljava gornje uslove (1) i (2).

TEOREMA 16.1. *Za proizvoljnu kvadratnu formu q po promenljivim $x_1, \ldots, x_n$ postoji ortogonalna matrica P takva da je $q = \lambda_1 {x'_1}^2 + \ldots + \lambda_n {x'_n}^2$, pri čemu je*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

dok su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti matrice kvadratne forme q.

DOKAZ. Neka je q matrično zapisana kao $X^T A\, X$. Pošto je A simetrična, po teoremi 14.7 postoji ortogonalna matrica P takva da je $P^T A P = D$, gde je D dijagonalna matrica sa sopstvenim vrednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ na glavnoj dijagonali. Odavde zaključujemo da je $A = P\, D\, P^T$, pa je

$$q = X^T P\, D\, P^T X = (P^T X)^T D (P^T X) = (X')^T D X' = \lambda_1 {x'_1}^2 + \ldots + \lambda_n {x'_n}^2. \qquad \dashv$$

Izraz $\lambda_1 {x'_1}^2 + \ldots + \lambda_n {x'_n}^2$ je *kanonski oblik* kvadratne forme q, a kolone matrice P predstavljaju ortonormiranu bazu prostora $\mathbf{R}^n$ u odnosu na koju kvadratna forma q ima kanonski oblik.

PRIMER. Neka je data kvadratna forma Φ kao polinom

$$3x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy + 2xz - 4yz, \quad \vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

Matrično, Φ se zapisuje kao

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

i karakteristični polinom njene matrice se faktoriše kao $(2-x)^2(8-x)$. Kao u primeru 1 iz sekcije 14.3 odredimo sopstvene prostore

$$V_2 = \{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbf{R} \} \quad \text{i} \quad V_8 = \{ z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbf{R} \}$$

koji odgovaraju redom sopstvenim vrednostima 2 i 8. Gram-Šmitovim postupkom dobijamo da je

$$\langle \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \rangle$$

jedna ortonormirana baza za V_2, pa je

$$\langle \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \rangle$$

ortonormirana baza za V u odnosu na koju Φ ima kanonsku formu. Kvadratna forma Φ izražena preko koordinata u novoj bazi je $2x'^{\,2} + 2y'^{\,2} + 8z'^{\,2}$.

Ako sa P označimo matricu

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

onda *formule transformacije koordinata* dobijamo kao

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

odnosno,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z \\ \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z \\ \frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z \end{pmatrix}.$$

§16.2. Kanonske jednačine konika

Pretpostavimo da je matrica

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$$

ortogonalna, to jest $P^T P = E_2$. Odavde dobijamo sledeće tri jednačine

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1 \quad \text{i} \quad ab + cd = 0.$$

Prva i druga jednačina kažu da postoje realni brojevi $0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi$ takvi da je

$$a = \cos\theta, \quad c = \sin\theta, \quad b = \cos\phi \quad \text{i} \quad c = \sin\phi.$$

Na osnovu treće jednačine zaključujemo da je $\cos(\theta - \phi) = 0$, to jest $\theta - \phi$ pripada skupu $\{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$. Ukoliko je $\theta - \phi = \frac{\pi}{2}$, onda je

$$b = \cos\phi = \sin\theta = c \quad \text{i} \quad d = \sin\phi = -\cos\theta = -a,$$

a ukoliko je $\theta - \phi = \frac{3\pi}{2}$, onda je

$$b = \cos\phi = -\sin\theta = -c \quad \text{i} \quad d = \sin\phi = \cos\theta = a.$$

Ostali slučajevi se ponavljaju pa su jedine moguće ortogonalne matrice iz $\mathcal{M}_2$ one oblika

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

za $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ove matrice imaju sledeću geometrijsku interpretaciju. Desna nam je poznata iz primera 2 iz sekcije 7.1 i ona reprezentuje rotaciju za pozitivan ugao θ oko koordinatnog početka. Leva matrica reprezentuje osnu refleksiju čija je osa prava koja prolazi kroz koordinatni početak takva da je orijentisani ugao između x ose i nje jednak $\theta/2$.

Konika ili *konusni presek* ili *kriva drugog reda* je kriva zadata u ravni jednačinom opšteg oblika

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Cilj je da se uz transformaciju koordinata ova jednačina svede na oblik iz koga se kriva može prepoznati, to jest odrediti da li se radi o *elipsi*, *hiperboli*, *paraboli* ili nekom degenerisanom obliku.

Matrično zapisana, gornja jednačina ima formu

$$X^T A\, X + \begin{pmatrix} d & e\end{pmatrix} X + f = 0,$$

gde je

$$X = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}, \quad \text{dok je} \quad A = \begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}.$$

Po teoremi 16.1 postoji ortogonalna matrica P takva da je $P^T AP$ dijagonalna, to jest uz transformacije koordinata $X' = P^T X$ dobijamo da kriva ima jednačinu

$$X'^{\,T} \begin{pmatrix} a' & 0\\ 0 & c'\end{pmatrix} X' + \begin{pmatrix} d & e\end{pmatrix} PX' + f = 0,$$

odnosno

$$a'x'^{\,2} + c'y'^{\,2} + d'x' + e'y' + f = 0.$$

Dopunjavanjem do punih kvadrata prvog i trećeg, odnosno drugog i četvrtog sabirka dobićemo kanonsku formu jednačine krive.

Primer. Neka je konika zadana jednačinom

$$5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 + (8 + 4\sqrt{3})x + (4 - 8\sqrt{3})y + 11 = 0.$$

Simetrična matrica $A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 7\end{pmatrix}$ ima sopstvene vrednosti 4 i 8 i prostor $\mathbf{R}^2$ ima ortonormiranu bazu

$$\langle \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \rangle$$

dobijenu nadovezivanjem ortonormiranih baza sopstvenih prostora V_4 i V_8.

Ako sa P označimo ortogonalnu matricu čije su kolone vektori dobijene ortonormirane baze za $\mathbf{R}^2$, onda iz

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{pmatrix}$$

dobijamo u koordinatnom sistemu $Ox'y'$ jednačinu oblika

$$4x'^{\,2} + 8y'^{\,2} + 8x' - 16y' + 11 = 0.$$

Svođenjem na pune kvadrate dobijamo

$$4(x'+1)^2 + 8(y'-1)^2 - 1 = 0,$$

odnosno, uz smenu $x'' = x' + 1$, $y'' = y' - 1$,

$$\frac{x''^{\,2}}{a^2} + \frac{y''^{\,2}}{b^2} = 1,$$

gde je $a = 1/2$, a $b = 1/(2\sqrt{2})$. Ova smena se postiže translacijom koordinatnog sistema $Ox'y'$ (*translacija nije linearno preslikavanje*) za vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ da bi se dobio sistem $O'x''y''$.

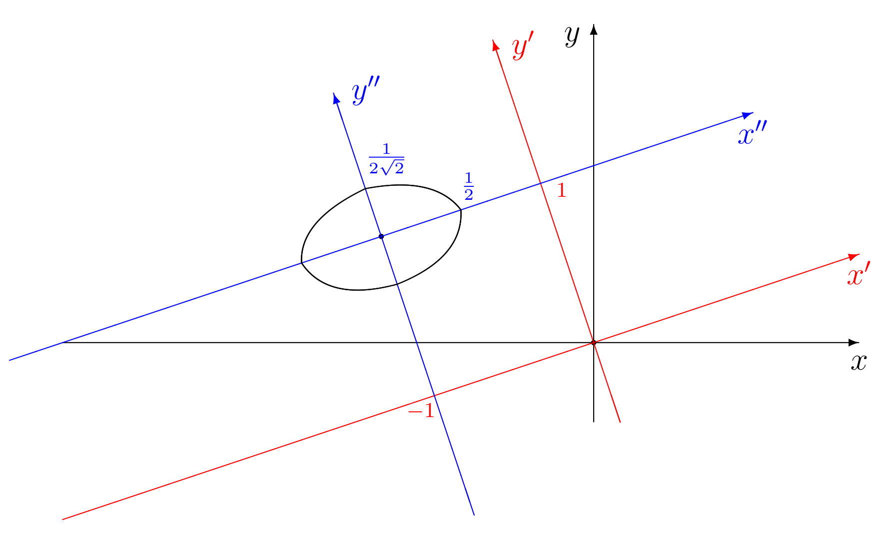
Prvi korak u ovom svođenju, odnosno transformacije koordinata

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix},$$

odgovara rotaciji koordinatnog sistema Oxy za ugao $\pi/6$. Tom prilikom sa standardne baze za $\mathbf{R}^2$ smo prešli na gorenavedenu ortonormiranu bazu tog prostora

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

U drugom koraku premeštamo centar koordinatnog sistema u tačku čije su koordinate u sistemu $Ox'y'$ date sa $x' = -1$ i $y' = 1$, dok ose ostaju paralelne osama Ox' i Oy'.



§16.3. Kanonske jednačine kvadrika

Kvadrika ili *površ drugog reda* je površ zadata u trodimenzionalnom prostoru jednačinom opšteg oblika

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + gx + hy + iz + j = 0.$$

Matrično zapisana, ova jednačina ima formu

$$X^T A\, X + \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix} X + j = 0,$$

gde je

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{dok je} \quad A = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}.$$

Po teoremi 16.1 postoji ortogonalna matrica P takva da je $P^T AP$ dijagonalna, to jest uz transformacije koordinata $X' = P^T X$ dobijamo da površ ima jednačinu

$$X'^{\,T} \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix} X' + \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix} PX' + j = 0,$$

odnosno

$$a'x'^{\,2} + b'y'^{\,2} + c'z'^{\,2} + g'x' + h'y' + i'z' + j = 0.$$

Dopunjavanjem do punih kvadrata prvog i četvrtog, drugog i petog, odnosno trećeg i šestog sabirka, uz transformacije koordinata koje odgovaraju translaciji, dobićemo kanonsku formu jednačine površi. Na taj način ćemo moći prepoznati da li se radi o *elipsoidu*, *hiperboloidu*, *paraboloidu*, *konusu*, *cilindru* ili nekoj degenerisanoj formi površi.

§16.4. Definitne kvadratne forme

Za kvadratnu formu $q = X^T AX$ po n promenljivih kažemo da je *pozitivno definitna* kada za svaki $\vec{v} \neq \vec{0}$ iz $\mathbf{R}^n$ važi $\vec{v}^T A\vec{v} > 0$. Ona je *negativno definitna* kada za svaki $\vec{v} \neq \vec{0}$ iz $\mathbf{R}^n$ važi $\vec{v}^T A\vec{v} < 0$. Za simetričnu matricu A kažemo da je pozitivno (negativno) definitna kada je kvadratna forma $q = X^T AX$ pozitivno (negativno) definitna.

PRIMER. U slučaju kvadratne forme u kojoj nema mešovitih članova, odnosno u slučaju dijagonalne matrice, lako je videti da li se radi o pozitivno ili negativno definitnoj kvadratnoj formi ili matrici. Za kvadratnu formu $3x^2 + 7y^2$ po promenljivim x i y znamo da je reč o pozitivno definitnoj, dok za formu $-2x^2 - y^2$ po promenljivim x i y, znamo da je negativno definitna. Kvadratna forma $3x^2 - 2y^2$ nije ni pozitivno ni negativno definitna.

NAPOMENA 16.2. *Dijagonalna matrica je pozitivno (negativno) definitna akko su joj sve vrednosti na glavnoj dijagonali pozitivne (negativne).*

NAPOMENA 16.3. *Kvadratna forma q, odnosno simetrična matrica A, je negativno definitna akko je $-q$, odnosno $-A$, pozitivno definitna.*

LEMA 16.4. *Neka je A simetrična matrica i U invertibilna matrica istog tipa. Tada važi:*

A je pozitivno definitna akko $U^T AU$ je pozitivno definitna.

Isto važi i kada se ,,pozitivno definitna" zameni sa ,,negativno definitna".

DOKAZ. Pretpstavimo da je A pozitivno definitna. Neka je $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ proizvoljan vektor iz $\mathbf{R}^n$. Pošto je U invertibilna to je i $\vec{v} = U\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, pa je onda

$$(\vec{v}_1)^T(U^T AU)\vec{v}_1 = (U\vec{v}_1)^T A(U\vec{v}_1) = \vec{v}^T A\vec{v} > 0.$$

Dakle, $U^T AU$ je pozitivno definitna. Sve ostale implikacije se pokazuju analogno. ⊣

TEOREMA 16.5. *Neka je A simetrična matrica. Tada važi:*

(a) *A je pozitivno definitna akko su sve njene sopstvene vrednosti pozitivne;*

(b) *A je negativno definitna akko su sve njene sopstvene vrednosti negativne.*

DOKAZ. Po teoremi 16.1 postoji ortogonalna matrica P takva da je $P^T AP$ dijagonalna sa sopstvenim vrednostima matrice A na glavnoj dijagonali.

(a) Pošto je P invertibilna matrica (P^T joj je inverz), po lemi 16.4 važi da je A pozitivno definitna *akko* je $P^T AP$ pozitivno definitna. Po napomeni 16.2 važi da je $P^T AP$ pozitivno definitna *akko* su joj sve vrednosti na glavnoj dijagonali, to jest sve sopstvene vrednosti matrice A, pozitivne.

Dokaz za (b) je analogan. ⊣

U formulaciji sledećeg tvrđenja, za $1 \leq k \leq n$ i matricu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

pojavljuju se determinante

$$D_k^A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Teorema 16.6. *Simetrična matrica* $A \in \mathcal{M}_n$ *je pozitivno definitna akko je* $D_k^A > 0$ *za svako* $1 \leq k \leq n$. *Takođe,* A *je negativno definitna akko za svako* $1 \leq k \leq n$, *determinanta* D_k^A *ima znak* $(-1)^k$.

dokaz. $(\Rightarrow)$ prvo tvrđenje. Neka je A_k, $k \geq 1$, matrica sastavljena od prvih k vrsta i kolona matrice A. Ona je simetrična i pozitivno definitna jer je za svaki $\vec{v} \in \mathbf{R}^k - \{\vec{0}\}$

$$\vec{v}^T \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k\,1} & \dots & a_{k\,k} \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{v}^T & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} > 0.$$

Po teoremi 16.5 sve sopstvene vrednosti matrice A_k su pozitivne, pa je i $D_k^A = \det(A_k) > 0$, kao proizvod svih tih sopstvenih vrednosti.

$(\Leftarrow)$ prvo tvrđenje. Ovu implikaciju ćemo pokazati na primeru simetrične matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

odakle će biti jasno kako bismo postupili u opštem slučaju. Pošto je $D_1^A = a > 0$, dvostrukom primenom treće Gausove operacije matricu A svodimo na

$$A' = \begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & \frac{ba-d^2}{a} & \frac{fa-de}{a} \\ 0 & \frac{fa-de}{a} & \frac{ca-e^2}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b' & f' \\ 0 & f' & c' \end{pmatrix}.$$

Primetimo da, pošto je korišćena samo treća Gausova operacija (skalarom smo množili prvu vrstu i dodavali je ostalim), po tvrđenju 9.10 (3) dobijamo da je za sve $1 \leq k \leq 3$ važi $D_k^A = D_k^{A'}$. Matrica

$$B = \begin{pmatrix} b' & f' \\ f' & c' \end{pmatrix}$$

je simetrična i važi $D_1^B = b' > 0$ i $D_2^B = \begin{vmatrix} b' & f' \\ f' & c' \end{vmatrix} > 0$ zato što razvijajući determinante $D_2^{A'}$ i $D_3^{A'}$ po prvoj koloni dobijamo da je $D_2^A = D_2^{A'} = aD_1^B$ i $D_3^A = D_3^{A'} = aD_2^B$. Dakle, matrica B je u istom položaju kao i polazna matrica A samo što ima jednu vrstu i jednu kolonu manje.

Nastavljajući primenu treće Gausove operacije na matricu A' (skalarom množimo drugu vrstu i dodajemo je trećoj) dobijamo matricu

$$A'' = \begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b' & f' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.$$

čije su determinante $D_1^{A''} = a$, $D_2^{A''} = ab'$ i $D_3^{A''} = ab'c''$ i dalje jednake redom determinantama D_1^A, D_2^A i D_3^A. Odavde zaključujemo da je

$$a = D_1^A > 0, \quad b' = \frac{D_2^A}{D_1^A} > 0 \quad \text{i} \quad c'' = \frac{D_3^A}{D_2^A} > 0$$

Primenjujući istim redosledom iste Gausove operacije samo na kolonama umesto na vrstama dobijamo dijagonalnu matricu

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.$$

Ukoliko elementarne redukcijske matrice koje stoje iza ovih Gausovih operacija na kolonama pomnožimo, dobijamo gornje trougaonu matricu U koja na glavnoj dijagonali ima sve jedinice. To je zato što smo prvo množili prvu kolonu i onda je dodavali ostalim, pa onda drugu i tako dalje.

Nakon svega imamo da je

$$U^T AU = D,$$

gde je U invertibilna matrica a D dijagonalna matrica sa svim elementima na glavnoj dijagonali većim od nule. Po napomeni 16.2, matrica D je pozitivno definitna pa je po lemi 16.4 i matrica A pozitivno definitna. Ovime je završen dokaz prvog tvrđenja.

Za drugo tvrđenje, po napomeni 16.3 i gorepokazanom imamo

$$\begin{aligned} A \text{ je negativno definitna } &\textit{akko } -A \text{ je pozitivno definitna} \\ &\textit{akko} \text{ za svako } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ je } D_k^{-A} > 0 \\ &\textit{akko } D_k^A < 0 \text{ za } k \text{ neparno i } D_k^A > 0 \text{ za } k \text{ parno,} \end{aligned}$$

jer za proizvoljnu matricu $C \in \mathcal{M}_k$ važi $det(-C) = (-1)^k det(C)$. ⊣

§17. Dodatak

§17.1. Skupovi

O skupovima ovde govorimo neformalno, koristeći običan jezik. Zainteresovanim za aksiomatsku teoriju skupova sugerišemo da pogledaju [9] i [10]. Naš pogled na skupove je kao i u standardnim aksiomatskim teorijama skupova *jednosortan*. To znači da izbegavamo izgrađen *dvosortni* pogled u kome se razdvaja sorta elemenata od sorte skupova. Elementi skupova su takođe skupovi.

Da je (skup) x u skupu X (x je *element* od X) označavamo sa $x \in X$. Skraćenica za „nije $x \in X$" je $x \notin X$. Skraćenica za „$x_1 \in X$ i $x_2 \in X$" je $x_1, x_2 \in X$. Kažemo da je X *podskup* od Y (u oznaci $X \subseteq Y$) kada je svaki element skupa X ujedno i element skupa Y. Skupovi X i Y su jednaki (u oznaci $X = Y$) kada je $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq X$, to jest kada imaju iste elemente. Ovo nazivamo principom *ekstenzionalnosti*. Skup svih elemenata (nekog skupa) koji imaju svojstvo φ označavamo sa $\{x \mid \varphi(x)\}$.

Za skupove i pripadnost, između ostalog, još pretpostavljamo:

postojanje *praznog skupa* $\emptyset$ koji nema elemenata;

za svako x i y postojanje skupa koji ih sadrži;

postojanje *unije* proizvoljna dva skupa $X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ ili } x \in Y\}$ i uopšteno, za proizvoljan skup (familiju) skupova $\mathcal{F}$ postojanje $\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid x \in X \text{ za neko } X \in \mathcal{F}\}$;

postojanje *partitivnog skupa* proizvoljnog skupa, to jest skupa svih njegovih podskupova $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$.

Za proizvoljna dva skupa definišemo njihov *presek*

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ i } x \in Y\},$$

razliku (česta je oznaka \)

$$X - Y = \{x \mid x \in X \text{ i } x \notin Y\}$$

i *simetričnu razliku*

$$X \triangle Y = (X - Y) \cup (Y - X).$$

Uopšteno, $\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid x \in X \text{ za svako } X \in \mathcal{F}\}$. Ukoliko smatramo da se nalazimo u *univerzumu* U, odnosno ako govorimo o skupovima koji pripadaju $\mathcal{P}(U)$, onda za takav skup X definišemo njegov *komplement* kao $X^c = U - X$.

Dva skupa su *disjunktna* kada im je presek prazan. *Uređeni par* elemenata a i b, u oznaci (a, b), je skup $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Osnovno što sledi iz ove definicije je da

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{akko} \quad a = c \text{ i b = d}.$$

Dekartov proizvod skupova X i Y, u oznaci $X \times Y$, je skup $\{(x, y) \mid x \in X \text{ i } y \in Y\}$.

PRIMERI: 1. $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

2. $\{1, 2, 1\} = \{1, 2\}$.
3. $\bigcup\{\{1, 2, a\}, \{2, 3\}, \{a, b\}\} = \{1, 2, 3, a, b\}$.
4. $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
5. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
6. $\{1, 2\} \times \{1, m, n\} = \{(1, 1), (1, m), (1, n), (2, 1), (2, m), (2, n)\}$.
7. $\{1, 2\} \times \emptyset = \emptyset$.

§17.2. Relacije

Binarna relacija između elemenata skupa X i skupa Y je trojka (ρ, X, Y), gde je ρ podskup Dekartovog proizvoda $X \times Y$. Najčešće ovu trojku izjednačavamo sa prvom komponentom ρ uz napomenu da kad nam je dat skup ρ, sami skupovi X i Y nisu dati ako nisu eksplicitno navedeni. Par (X, Y) zovemo *tipom* relacije. Ukoliko je $Y = X$, onda je reč o binarnoj relaciji na skupu X. Za proizvoljno $n \in \mathbf{N}$ analogno se definiše pojam n-arne relacije. Ovde ćemo se baviti samo binarnim relacijama, te ćemo nadalje pod relacijom podrazumevati binarnu relaciju.

Sve skupovne operacije se mogu primeniti na relacije istog tipa i kao rezultat daju relaciju tog tipa. U slučaju komplementa, uzima se univerzum $X \times Y$, ukoliko je reč o relaciji tipa (X, Y). Na primer, ukoliko su $\rho = \{(1, a), (1, b), (3, b)\}$ i $\sigma = \{(1, b), (2, b)\}$ dve relacije između $\{1, 2, 3\}$ i $\{a, b\}$, onda je

$$\rho \cap \sigma = \{(1, b)\}, \quad \rho^c = \{(2, a), (2, b), (3, a)\}.$$

Pored toga, za proizvoljnu relaciju ρ tipa (X, Y) definišemo njen *konverz* (suprotnu relaciju) ρ^{-1} tipa (Y, X) kao

$$\{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\}.$$

Za proizvoljan skup X relaciju $\mathbf{1}_X$ (*identitet* na X, odnosno *jednakost* na X) zadajemo skupom parova

$$\{(x, x) \mid x \in X\}$$

što u slučaju $X = \emptyset$ daje $\mathbf{1}_\emptyset = \emptyset$. Za relaciju ρ tipa (X, Z) i relaciju σ tipa (Z, Y) definišemo njihovu *kompoziciju* $\sigma \circ \rho$ (pišemo zdesna ulevo) tipa (X, Y) kao

$$\{(x, y) \mid \text{postoji } z \in Z \text{ tako da je } (x, z) \in \rho \text{ i } (z, y) \in \sigma\}$$

Kompozicija relacija je asocijativna i identitet odgovarajućeg tipa je neutral za kompoziciju (videti sekciju 17.6).

Kompoziciju relacija je najlakše predstaviti crtežima na sledeći način. Relaciju $\rho = \{(1, a), (3, a), (3, b)\}$ između $\{1, 2, 3\}$ i $\{a, b\}$ i relaciju $\sigma = \{(a, 4), (a, 5), (b, 5)\}$

između $\{a, b\}$ i $\{4, 5\}$ predstavimo crtežima i nadovežemo kao na levoj strani donje slike. Kompoziciju $\sigma \circ \rho = \{(1, 4), (1, 5), (3, 4), (3, 5)\}$ dobijamo nadovezivanjem usmerenih puteva (ne računajući višestrukost) kao na desnoj strani slike.

§17.3. Funkcije

Relacija f tipa (X, Y) je *funkcija* iz X u Y kada za svako $x \in X$ postoji jedinstveno $y \in Y$ takvo da je $(x, y) \in f$. To da je funkcija f tipa (X, Y) označavamo sa $f \colon X \to Y$. Skup X je *domen* a skup Y je *kodomen* funkcije f. Standardno, umesto $(x, y) \in f$ pišemo $y = f(x)$. Skup svih funkcija iz X u Y označavamo sa Y^X.

Identiteti i kompozicija su kao kod relacija, s time što ovde važi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

pa se asocijativnost kompozicije trivijalno pokazuje.

Funkcija $f \colon X \to Y$ je **1-1** (*injekcija*) kada za svako $x_1, x_2 \in X$ važi

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Funkcija $f \colon X \to Y$ je **na** (*surjekcija*) kada za svako $y \in Y$ postoji $x \in X$ takvo da je $y = f(x)$. Funkcija koja je **1-1** i **na** je *bijekcija* (**1-1** *korespondencija*). Bijekcija $f \colon X \to X$ je *permutacija* skupa X.

Funkcija $g : Y \to X$ je *levi inverz* (*retrakcija*) funkcije $f : X \to Y$ kada važi $g \circ f = \mathbf{1}_X$, dok je ona *desni inverz* (*sekcija*) za f kada važi $f \circ g = \mathbf{1}_Y$. U slučaju kada je g i levi i desni inverz za f kažemo da je g *obostrani inverz* za f.

Obostrani inverz funkcije f označavamo sa f^{-1} i on se poklapa sa konverzom od f definisanim u prethodnoj sekciji. Napomenimo samo da konverz relacije uvek postoji dok to nije slučaj s obostranim inverzom o čemu govori sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 17.1. *Funkcija je bijekcija akko ima obostrani inverz.*

Dokaz ovog tvrđenja zdesna ulevo je sasvim lak zato što za funkciju f sa levim inverzom važi

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

pa je ona **1-1**, dok svojstvo **na** sledi iz postojanja desnog inverza, to jest $y = f(f^{-1}(y))$.

Smer ovog tvrđenja sleva udesno daju sledeće četiri leme.

Lema 17.2. *Funkcija $f \colon \emptyset \to Y$ koja je* ***na*** *ima obostrani inverz.*

DOKAZ. Iz pretpostavke da je f **na**, sledi da je $Y = \emptyset$, pa je prazna funkcija obostrani inverz od f koja je i sama prazna. $\dashv$

LEMA 17.3. *Ako funkcija $f\colon X \to Y$ jeste **1-1** i $X \neq \emptyset$, onda f ima levi inverz.*

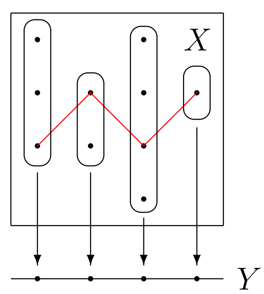
DOKAZ. Označimo sa $*$ proizvoljan element iz X. Definišimo $g\colon Y \to X$ kao

$$g(y) = \begin{cases} x, & y = f(x), \\ *, & \text{ako ne postoji takvo } x \text{ da je } y = f(x). \end{cases}$$

Ova definicija je dobra zbog pretpostavke da f jeste **1-1** i lako se vidi da je g levi inverz funkcije f. $\dashv$

LEMA 17.4. *Ako je funkcija **na**, onda ona ima desni inverz.*

DOKAZ. Ova lema je jedna moguća formulacija *aksiome izbora* (videti Cornovu lemu). Intuitivno je prihvatljiva jer funkciju $g : Y \to X$ koja predstavlja desni inverz za f koja je **na**, pravimo tako što za svako $y \in Y$ *biramo* jedan element iz nepraznog skupa $\{x \in X \mid y = f(x)\}$. $\dashv$



LEMA 17.4. *Ako funkcija ima i levi i desni inverz, onda su oni jednaki.*

DOKAZ. Neka su $l, d\colon Y \to X$ levi, odnosno desni inverz za f. Tada važi

$$l = l \circ \mathbf{1}_Y = l \circ (f \circ d) = (l \circ f) \circ d = \mathbf{1}_X \circ d = d. \qquad \dashv$$

Proizvoljna funkcija $f : X \to Y$ indukuje sledeće dve funkcije–jednu iz $\mathcal{P}(X)$ u $\mathcal{P}(Y)$, a drugu iz $\mathcal{P}(Y)$ u $\mathcal{P}(X)$. Prvu označavamo isto sa f a drugu sa f^{-1}. Da ne bi došlo do zabune, argumente ovih novih funkcija pišemo u uglastim zagradama. Za $A \subseteq X$ definišemo $f[A]$ kao

$$\{y \mid \text{postoji } x \in A \text{ tako da je } y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Za $B \subseteq Y$ definišemo $f^{-1}[B]$ kao

$$\{x \mid f(x) \in B\}.$$

TVRĐENJE 17.6. *Za proizvoljno* $f\colon X \to Y$, $A, A_1, A_2 \subseteq X$ *i* $B, B_1, B_2 \subseteq Y$ *važi:*

(1) $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$,

(2) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$,

(3) $f[A_1] - f[A_2] \subseteq f[A_1 - A_2]$,

(4) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$,

(5) $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$,

(6) $f^{-1}[B^c] = (f^{-1}[B])^c$,

(7) $f^{-1}[B_1 - B_2] = f^{-1}[B_1] - f^{-1}[B_2]$,

(8) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$,

(9) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$.

DOKAZ. (1) Pretpostavimo da je $y \in f[A_1 \cap A_2]$. To znači da postoji neko $x \in A_1 \cap A_2$ takvo da je $y = f(x)$. Iz $x \in A_1 \cap A_2$ sledi $x \in A_1$, pa uz $y = f(x)$ zaključujemo da je $y \in f[A_1]$. Analogno zaključujemo da je $y \in f[A_2]$, pa je $y \in f[A_1] \cap f[A_2]$. Obrnuta inkluzija ne važi u opštem slučaju jer ako uzmemo, na primer, funkciju $f\colon \{1, 2\} \to \{0\}$, onda je $f[\{1\} \cap \{2\}] = f[\emptyset] = \emptyset$, dok je $f[\{1\}] \cap f[\{2\}] = \{0\} \cap \{0\} = \{0\}$.

Preostalo se pokazuje analogno. ⊣

TVRĐENJE 17.7. *Ako f jeste* ***1-1****, onda važi još:*

(10) $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$,

(11) $f[A^c] \subseteq (f[A])^c$,

(12) $f[A_1 - A_2] = f[A_1] - f[A_2]$,

(13) $A = f^{-1}[f[A]]$.

DOKAZ. (10) Zbog (1) dovoljno je pokazati $f[A_1] \cap f[A_2] \subseteq f[A_1 \cap A_2]$. Pretpostavimo da je $y \in f[A_1] \cap f[A_2]$. To znači da je $y \in f[A_1]$ i $y \in f[A_2]$, pa postoje $x_1 \in A_1$ i $x_2 \in A_2$ takvi da je $f(x_1) = y = f(x_2)$. Pošto f jeste **1-1**, sledi da je $x_1 = x_2 = x$ i $x \in A_1 \cap A_2$ i $y = f(x)$. Odavde zaključujemo da je $y \in f[A_1 \cap A_2]$.

Preostalo se pokazuje analogno. ⊣

TVRĐENJE 17.8. *Ako je f,* ***na****, onda važi još:*

(14) $(f[A])^c \subseteq f[A^c]$,

(15) $f[f^{-1}[B]] = B$.

DOKAZ. (14) Pretpostavimo da je $y \in (f[A])^c$. To znači da je $y \in Y$ i ne postoji $x \in A$ takvo da je $y = f(x)$. Pošto je f, **na**, postoji $x \in X$ takvo da je $y = f(x)$. To x se mora naći u A^c, pa je $y \in f[A^c]$.

Preostalo se pokazuje analogno. ⊣

§17.4. Posebne relacije

Relacija ρ na skupu X je *refleksivna* kada za svako $x \in X$ važi $(x, x) \in \rho$. Drugim rečima, ρ je refleksivna kada važi $\mathbf{1}_X \subseteq \rho$. Ona je *irefleksivna* kada za svako $x \in X$ važi $(x, x) \notin \rho$.

Relacija ρ na skupu X je *simetrična* kada za sve $x, y \in X$ važi

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho.$$

Ona je *antisimetrična* kada za sve $x, y \in X$ važi

$$((x, y) \in \rho \text{ i } (y, x) \in \rho) \Rightarrow x = y.$$

Relacija ρ na skupu X je *tranzitivna* kada za sve $x, y, z \in X$ važi

$$((x, y) \in \rho \text{ i } (y, z) \in \rho) \Rightarrow (x, z) \in \rho.$$

Relacija koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna je *relacija ekvivalencije*. Ako je ρ relacija ekvivalencije na skupu X, onda ona deli taj skup na *klase ekvivalencije*. Klasa ekvivalencije elementa x u oznaci $[x]_\rho$ ili C_x ili x/ρ se definiše kao

$$\{y \mid (x, y) \in \rho\}.$$

TVRĐENJE 17.9. *Za sve $x, y \in X$ važi:*

(1) $[x]_\rho \neq \emptyset$,

(2) $[x]_\rho \cap [y]_\rho \neq \emptyset \Rightarrow [x]_\rho = [y]_\rho$.

DOKAZ. Prvo svojstvo je posledica refleksivnosti, a drugo simetričnosti i tranzitivnosti relacije ρ. ⊣

Kao posledicu ovog tvrđenja imamo da su sve klase neprazne i da su različite klase međusobno disjunktne. Podela nekog skupa na disjunktne neprazne delove se zove *particija*. Dakle, svaka relacija ekvivalencije određuje jednu particiju skupa na kome je zadata. Lako se vidi da važi i obrnuto–svaka particija nekog skupa zadaje jednu relaciju ekvivalencije na njemu. Skup svih klasa ekvivalencije po relaciji ρ na skupu X je *količnički skup* od X po relaciji ρ i označava se sa X/ρ.

PRIMER. Relacija paralelnosti pravih je relacija ekvivalencije na skupu pravih u prostoru. Odgovor na pitanje šta je značenje klase ekvivalencije neke prave u odnosu na ovu relaciju je da je to apstraktan pojam *pravca* te prave. Na taj način se u matematici, apstrahovanjem, prelazi sa konkretnijih pojmova (kao što su prave) na apstraktnije pojmove (kao što su pravci).

Relacija koja je refleksivna i tranzitivna je *preduređenje*. Relacija koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna je *parcijalno uređenje*. Osnovni primer parcijalnog uređenja je relacija $\leq$ na nekom od skupova brojeva pa ćemo nadalje tu oznaku koristiti za proizvoljno parcijalno uređenje, osim ukoliko napomenemo drugačije.

Ako je $\leq$ parcijalno uređenje na skupu X, onda kažemo da je par $(X, \leq)$ *parcijalno uređen skup*. Parcijalno uređenje na skupu X je *linearno* kada su svaka dva elementa iz X *uporediva*, to jest za sve $x, y \in X$ važi

$$x \leq y \quad \text{ili} \quad y \leq x.$$

Nije svako parcijalno uređenje linearno. Na primer, relacija $\subseteq$ na partitivnom skupu nekog skupa sa bar dva elementa je parcijalno uređenje koje nije linearno. Ako je $X = \{1, 2, 3\}$, onda je $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ parcijalno uređen skup u kome su, između ostalih, $\{1, 2\}$ i $\{2, 3\}$ neuporedivi elementi.

Skup $A \subseteq X$ je *lanac* u parcijalno uređenom skupu $(X, \leq)$ kada je relacija $(\leq \cap A^2)$ linearno uređenje na A. U prethodnom primeru parcijalno uređenog skupa $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, skup $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2, 3\}\}$ je jedan lanac.

Element $a \in X$ u parcijalno uređenom skupu $(X, \leq)$ je *maksimalan* kada za svako $x \in X$ važi

$$a \leq x \Rightarrow a = x.$$

Analogno definišemo *minimalan* element u parcijalno uređenom skupu.

Element $a \in X$ u parcijalno uređenom skupu $(X, \leq)$ je *gornja granica* skupa $A \subseteq X$ kada za svako $x \in A$ važi $x \leq a$. Analogno definišemo *donju granicu* nekog skupa u parcijalno uređenom skupu.

Sledeća lema je u ZF teoriji skupova ekvivalentna aksiomi izbora (videti lemu 17.4).

Cornova lema. *Ako je $(X, \leq)$ neprazan parcijalno uređen skup takav da svaki lanac u X ima gornju granicu, onda X sadrži maksimalan element.*

Element $a \in X$ u parcijalno uređenom skupu $(X, \leq)$ je *najveći* kada za svako $x \in X$ važi $x \leq a$. Analogno definišemo *najmanji* element u parcijalno uređenom skupu. *Supremum* nekog podskupa od X je njegova najmanja gornja granica, ukoliko postoji. Analogno definišemo *infimum* nekog podskupa od X.

Parcijalno uređenje na X je *dobro zasnovano* kada proizvoljan neprazan podskup od X ima bar jedan minimalan element. Linearno uređenje na X je *dobro* kada proizvoljan neprazan podskup od X ima najmanji element. Tada kažemo da je X *dobro uređen*. Na primer, skup prirodnih brojeva $\mathbf{N}$ je dobro uređen relacijom $\leq$. Ako njemu dodamo još jedan element i proglasimo ga najvećim, i taj skup će biti dobro uređen. Proveriti.

Konačno *drvo* je binarna relacija δ na konačnom skupu X za koju postoji element $r \in X$ takav da za svako $x \in X$ postoji *jedinstven* konačan niz $a_1, \ldots, a_n$, $n \geq 1$, elemenata iz X takav da je $a_1 = r$, $a_n = x$ i za sve a_i, a_{i+1} iz tog niza važi da je $(a_i, a_{i+1}) \in \delta$. Lako se pokazuje da je ovakav $r \in X$ jedinstven i to je *koren* drveta.

Elemente skupa X nazivamo *čvorovima*. *List* u drvetu je onaj čvor x za koji ne postoji čvor y tako da je $(x, y) \in \delta$. Ovde ćemo se baviti samo konačnim drvetima, te ćemo nadalje pod drvetom podrazumevati konačno drvo.

Ako je $(x, y) \in \delta$, onda kažemo da je y *naslednik* od x, dok je x *prethodnik* od y u drvetu δ. Označimo sa $S(x)$ skup svih naslednika elementa x, to jest

$$S(x) = \{y \mid (x, y) \in \delta\}.$$

Drvo na skupu X je *planarno* kada je još za svako $x \in X$ zadato jedno linearno uređenje na skupu $S(x)$. To linearno uređenje možemo shvatiti kao raspoređivanje naslednika datog čvora sleva nadesno tako da sva linearna uređenja zajedno zadaju jedno crtanje drveta u ravni.

§17.5. Kardinali

Skupovi X i Y su *izomorfni* (*ekvipotentni*) kada postoji bijekcija $f : X \to Y$. Lako se proverava da je relacija izomorfizma relacija ekvivalencije na skupu skupova datog univerzuma. Klasu ekvivalencije skupa X zovemo *kardinalnost* ili *kardinalni broj* skupa X i označavamo je sa $|X|$.

Skup ima 0 elemenata ukoliko je prazan, odnosno ima n, $n \geq 1$, elemenata ukoliko je izomorfan skupu $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Takve skupove zovemo *konačnim.* Svi ostali skupovi su *beskonačni.*

Za svaki skup izomorfan skupu prirodnih brojeva $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ se kaže da je *prebrojiv* i njegovu klasu označavamo sa $\aleph_0$. Za svaki skup izomorfan skupu realnih brojeva $\mathbf{R}$ se kaže da ima moć *kontinuuma* i njegovu klasu označavamo sa $\mathbf{c}$.

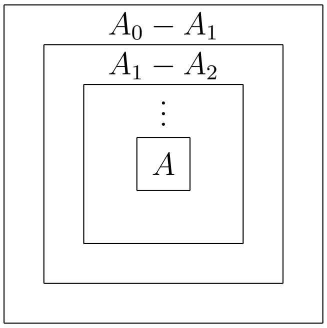
Kardinalni broj $|X|$ je manji ili jednak od kardinalnog broja $|Y|$, u oznaci $|X| \leq |Y|$, kada je skup X izomorfan nekom podskupu skupa Y. Ukoliko je $|X| \leq |Y|$ i $|X| \neq |Y|$, onda kažemo da kardinalni broj $|X|$ (strogo) manji od kardinalnog broja $|Y|$, u oznaci $|X| < |Y|$.

TEOREMA 17.10 (KANTOR-BERNŠTAJN). *Ako je $|X| \leq |Y|$ i $|Y| \leq |X|$, onda je $|X| = |Y|$.*

Ovde ćemo dokazati sledeću lemu čija je posledica teorema 17.10.

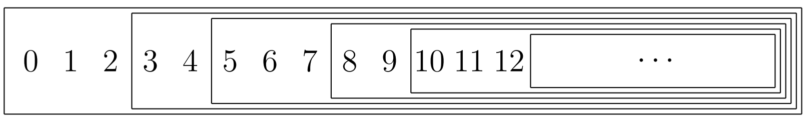
LEMA 17.11. *Ako je $Y \subseteq X$ i postoji **1-1** funkcija $f : X \to Y$, onda je $|X| = |Y|$.*

DOKAZ. Neka je $A_0 = X$, $A_1 = Y$, za $n \geq 0$, $A_{n+2} = f[A_n]$ i $A = \bigcap\{A_i \mid i \in \mathbf{N}\}$.



Skupovi $A, A_0 - A_1, A_1 - A_2, \ldots$ su međusobno disjunktni i $X = (\bigcup\{A_i - A_{i+1} \mid i \in \mathbf{N}\}) \cup A$, dok je $Y = (\bigcup\{A_{i+1} - A_{i+2} \mid i \in \mathbf{N}\}) \cup A$. Po tvrđenju 17.7 je $f[A_i - A_{i+1}] = A_{i+2} - A_{i+3}$. Za parno $i \in \mathbf{N}$ definišimo funkciju $g_i \colon A_i - A_{i+1} \to A_{i+2} - A_{i+3}$ kao ograničenje funkcije f na $A_i - A_{i+1}$, a za neparno $i \in \mathbf{N}$ neka je $g_i = \mathbf{1}_{A_i - A_{i+1}}$ i još neka je $g = \mathbf{1}_A$. Sve ove funkcije su bijekcije i njihova unija je bijekcija $h \colon X \to Y$. $\dashv$

Primer. Neka je $X = \mathbf{N}$, $Y = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 3\}$, a $f \colon X \to Y$ zadato sa $f(n) = n + 5$. Uslovi prethodne leme su zadovoljeni i uz napomenu da je $A = \emptyset$ imamo sledeću sliku:



Po uputstvu iz leme dobijamo da je bijekcija $h : X \to Y$ zadata sa $h(0) = 5$, $h(1) = 6$, $h(2) = 7$, $h(3) = 3$, $h(4) = 4$, $h(5) = 10$, $h(6) = 11$, $h(7) = 12$, $h(8) = 8, \ldots$

Teorema 17.12 (Kantor). *Ne postoji funkcija $f \colon X \to \mathcal{P}(X)$ koja je* ***na****.*

dokaz. Pretpostavimo da je $f \colon X \to \mathcal{P}(X)$, **na**. Neka je $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ i neka je $a \in X$ takvo da je $f(a) = A$. Tada važi:

$$a \in A \Leftrightarrow a \notin f(a) \Leftrightarrow a \notin A,$$

što je kontradikcija. $\dashv$

Kao posledicu ove teoreme imamo da je $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ zato što je X izomorfno sa $\{\{x\} \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$, pa je $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ ali po ovoj teoremi oni ne mogu biti jednaki. Dakle, nisu svi beskonačni skupovi iste kardinalnosti.

§17.6. Operacije

Za $n \geq 1$, n-ti stepen skupa X, u oznaci X^n, je Dekartov proizvod

$$\underbrace{X \times \ldots \times X}_{n}.$$

Za $n = 0$, nulti stepen X^0 je *singlton* $\{*\}$ (skup koji ima samo jedan element).

Za $n \in \mathbf{N}$, n-arna *operacija* na skupu X je preslikavanje iz X^n u X. Kada je $n = 0$, to je preslikavanje iz $\{*\}$ u X i ono se može identifikovati sa slikom od $*$, a to je jedna *konstanta* u X. Dakle, nularne operacije na X su konstante iz X. Najčešće ćemo imati posla s *binarnim* operacijama na nekom skupu. To su preslikavanja iz X^2 u X. Na primer, binarna operacija sabiranja na $\mathbf{N}$, paru prirodnih brojeva dodeljuje njihov zbir.

Za binarne operacije standardno koristimo *infiksnu* notaciju tako da umesto $+(2,3)$ pišemo $2+3$.

Nešto opštije, binarna operacija na paru skupova X, Y sa rezultatom u skupu Z je preslikavanje iz $X \times Y$ u Z.

Binarna operacija $\cdot$ na skupu X je *asocijativna* kada za sve $x, y, z \in X$ važi

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Ona je *komutativna* kada za sve $x, y \in X$ važi

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Konstanta $e \in X$ je *neutral* za $\cdot$ kada za svako $x \in X$ važi

$$x \cdot e = x = e \cdot x.$$

Element $y \in X$ je *obostrani inverz* za element $x \in X$ u odnosu na operaciju $\cdot$ i njen neutral e kada važi

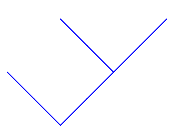
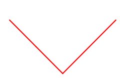
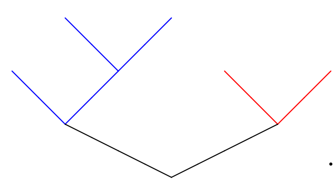
$$x \cdot y = e = y \cdot x.$$

§17.7. Operacijske strukture

Operacijska (*algebarska*) struktura je standardno zadata kao n-torka koja se sastoji od nekog skupa i nekih operacija raznih arnosti na njemu. Posebna svojstva tih operacija određuju tip date strukture.

Algebarska struktura od koje polazimo se sastoji od skupa i jedne binarne operacije na njemu od koje ne zahtevamo ništa posebno. Takva struktura se kod nas često zove *grupoid*. Da ne bi došlo do zabune jer se taj naziv koristi u matematici za još jedan različit pojam, za ovakvu strukturu se koristi još i ime *magma*.

Kanonski primer za magmu bi mogao da bude skup planarnih drveta sa operacijom koja paru drveta

 ,  dodeljuje drvo  .

Semigrupa je struktura $(X, \cdot)$ pri čemu je $\cdot$ asocijativna. Za kanonski primer možemo uzeti skup nepraznih reči na nekom alfabetu sa operacijom *konkatenacije* (*nadovezivanja*) reči. Još jedan važan primer je struktura $(\mathbf{N}^+, +)$, gde je $\mathbf{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ skup pozitivnih prirodnih brojeva. U ovoj strukturi je operacija još i komutativna što se ne zahteva od semigrupe, pa je to *komutativna* semigrupa.

Monoid je struktura $(X, \cdot, e)$, gde je $(X, \cdot)$ semigrupa, dok je e neutral za $\cdot$. Za kanonski primer možemo uzeti skup reči na nekom alfabetu sa operacijom nadovezivanja reči i konstantom koju predstavlja prazna reč. Isto tako možemo posmatrati monoid koga čine sve relacije na nekom skupu A, kompozicija relacija i identitet $\mathbf{1}_A$. Naravno i $(\mathbf{N}, +, 0)$ je monoid koji je komutativan za razliku od prethodnih.

Grupa je struktura $(X, \cdot, {}^{-1}, e)$, gde je $(X, \cdot, e)$ monoid, dok je ${}^{-1}$ unarna operacija na X koja svakom elementu iz X pridružuje njegov obostrani inverz. Za kanonski primer možemo uzeti skup svih permutacija nekog skupa A, operaciju kompozicije permutacija, operaciju traženja inverza date permutacije i konstantu $\mathbf{1}_A$ kao istaknutu permutaciju.

U grupi $(X, \cdot, {}^{-1}, e)$ za sve $x, y, z \in X$ važi

$$x = y \Leftrightarrow x \cdot z = y \cdot z \Leftrightarrow z \cdot x = z \cdot y,$$

što je osnova za rešavanje jednačina. Svaka jednačina oblika $a \cdot x = b$ ima jedinstveno rešenje $x = a^{-1} \cdot b$.

Grupa $(X, \cdot, {}^{-1}, e)$ je *komutativna* (*Abelova*) kada je operacija $\cdot$ komutativna. Kanonski primer komutativne grupe je struktura $(\mathbf{Z}, +, -, 0)$, gde je $\mathbf{Z}$ skup celih brojeva, dok je $-$ unarna operacija promene znaka.

Prsten je struktura $(X, +, \cdot, -, 0)$, gde je $(X, +, -, 0)$ komutativna grupa, $(X, \cdot)$ je semigrupa i još važi leva i desna *distributivnost* operacije $\cdot$ nad operacijom $+$, to jest za sve $x, y, z \in X$ važi

$$z \cdot (x + y) = (z \cdot x) + (z \cdot y) \quad \text{i} \quad (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z).$$

Kanonski primer prstena je prsten celih brojeva $(\mathbf{Z}, +, \cdot, -, 0)$ koji sadrži još i neutral 1 za množenje i množenje je komutativno.

Polje je struktura $(X, +, \cdot, -, 1/\,, 0, 1)$, gde je $(X, +, \cdot, -, 0)$ prsten, dok je struktura $(X - \{0\}, \cdot, 1/\,, 1)$ komutativna grupa. Za kanonski primer polja možemo uzeti polje realnih brojeva $(\mathbf{R}, +, \cdot, -, 1/\,, 0, 1)$ koje skraćeno označavamo samo sa $\mathbf{R}$.

Literatura

[1] G. Birkhoff and S. Mac Lane, ***A Survey of Modern Algebra***, (4th edition) Macmillan Publishing Co., Inc., 1977

[2] F.R. Gantmacher, ***The Theory of Matrices***, Chelsea Publishing Company, 1959

[3] J. Hefferon, ***Linear Algebra***, http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra

[4] ———, ***Answers to Exercises***, http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra

[5] G. Kalajdžić, ***Linearna algebra i geometrija***, Zavod za udžbenike, 2011

[6] ———, ***Linearna algebra***, Zavod za udžbenike, 2011

[7] A. Lipkovski, ***Linearna algebra i analitička geometrija***, Zavod za udžbenike, 2007

[8] S. Lipschutz, ***Schaum's Outline of Theory and Problems of Linear Algebra***, (2nd edition) McGraw-Hill, 1991

[9] A. Perović, B. Veličković i A. Jovanović, ***Teorija skupova***, Matematički fakultet, Beograd, 2007

[10] Z. Petrović i Ž. Mijajlović, ***Matematička logika-elementi teorije skupova***, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012

[11] D.J.S. Robinson, ***A Course in Linear Algebra with Applications***, (2nd edition) World Scientific, 2006

[12] G. Strang, ***Linear Algebra and its Applications***, (3rd edition) Thomson Learning Inc., 1988

[13] P. Tanović, ***Linearna Algebra i Analitička Geometrija***, http://alas.matf.bg.ac.rs/~mi10103/predavanja/laag/skripta2.pdf, 2011

Indeks