Одељење за механику Математичког института САНУ
Семинар Математичке методе механике у примени

Matematičke metode mehanike u primeni (MMMP)

Mathematical Methods of Mechanics and Applications (3MA)

Projekat OI 174001 Dinamika hibridnih sistema složenih struktura (2011-2014)

Serija predavanja za istraživače pripravnike i doktorante iz oblasti Kinetike, Elastodinamike, Analitičke mehanike, Primene tenzorskog računa u mehanici, Teorije oscilacija i Nelinearne dinamike

37-mi blok predavanja
(od 11h do 17h)

Kinematika i Dinamika sistema krutih tela u kvaternionskoj notaciji (Prvi deo – brzina i ubrzanje)

Predavač
Milan Cajić dipl.maš.ing.,
istraživač pripravnik na projektu OI 174001

Sreda, 11 april 2012 u 11 časova

* * * * * *

Predavanja se održavaju svake srede od 11 do 17 časova u Biblioteci Matematičkog instiuta SANU, ul. Knez Muhalova 36, treći sprat
Prijava potencijalnog slušaoca se dostavlja Upravniku Odeljenja za mehaniku na adresu khedrih@eunet.rs sa naznakom oblasti interesovanja.

Dr Srđan Jović
Sekretar Odeljenja za mehaniku

Prof. dr Katica (Stevanović) Hedrih
Upravnik Odeljenja za mehaniku

OSNOVNA LITERATURA

* Dанило П. Рашковић, Статика, Извод о **КВАТЕРНИОНИМА** из додатка ОСНОВИ ВЕКТОРСКОГ РАЧУНА, I издање **1961**, тираж 5000 примерака
* Hamilton, W.R.: On Quaternions, or a new system of imaginaries in algebra, The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. 25-36, 1844-1850.
* Čovic, V. and Lazarevic M.: *Mechanics of Robots*, Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade, Belgrade, 2009, (in Serbian).
* Arribas, M., Elipe, A. and Palacios, M.: Quaternions and the rotation of a rigid body, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Vol. 96, No. 3-4, pp. 239-251, 2006.
* Kuipers, J.B.: *Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace and Virtual Reality*, Princeton University Press, New Jersey, 1999.
* Rašković P. Danilo, *Analitička mehanika*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
* Andjelić P. Tatomir i Stojanović Rastko, *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1965, str.585.

* * * * *

* Rašković P. Danilo, *Mehanika za prvi stepen studija na mašinskim fakultetima i višim tehničkim školama. Deo 1, Statika*, Građevinska knjiga, 1975.
* Rašković P. Danilo, *Osnovi tenzorskog računa*, Mašinski fakultet Kragujevac, 1974.
* Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika I*, Beograd,1939, 1950.
* Bilimović Antoan, *Racionalna mehanika II*, Beograd,1952.
* Bilimović Antoan, *Dinamika čvrstog tela*, Beograd,1955.
* Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
* Kojić Miloš, Dinamika, *Teorija i primeri,* Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1976.
* Vujanović Božidar, *Dinamika*, Univerzitet u Novom Sadu, 1992.
* Hedrih (Stevanović), K., (1972), *Study of Methods of Nonlinear Vibrations* Theory (in Serbian)*, Poligraphy,* Faculty of Mechanical Engineering, Niš, Preprint, p.500.
* Hedrih (Stevanović) K., *Mehanika III-Dinamika***,** Predavanja na Mašinskom fakuletu u Nišu, školaska 2006-2007
* Уитекер Е.Т., *Аналитицхеская механика*, Москва,1937, стр, 500. (Превод са енглеског)
* Pars A.L. , *A treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 19669.Парс А. Л., Аналитицхеская динамика, Наука, Москва,1971, стр,636.
* Webster Gordon Arthur, *Dynamics of Particle and and Rigid, elastic and fluid bodies,* Dover Publications, 1988.
* Gantmaher Feliks Ruvimirovič, *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, 1963, str. 210. (Prevod sa ruskog Vujičić V.)
* Goroshko Oleg Aleksandrović i Hedrih (Stevanović) Katica, Analitička dinamika diskretnih naslednih sistema, Univerzitet u Nišu, 2001, str.429.

Проф. Dr Ing. Dipl. Math. Данило П. Рашковић
Статика , I издање 1961, тираж 5000 примерака

Извод о **КВАТЕРНИОНИМА** из додатка **ОСНОВИ ВЕКТОРСКОГ РАЧУНА**

У праћоуглим координатама израз $1/z$ можемо написати у облику:

$$z_1 = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Ова операција прелаза од r на $1/r$ зове се *трансформација реципрочних радија, инверзија* или *огледање на јединичном кругу.*

Помоћу ове трансформације свака тачка у кругу пресликава се у тачку комплексне равни изван јединичног круга. Тачка на кругу $(1;\varphi)$ пресликава се преко реалне осе у тачку $(1;-\varphi)$ а тачке $z=\pm 1$ остају непромењене (*стојне тачке*). Тачки $z=0$ одговара *бесконачно удаљена тачка комплексне равни.*

Пример. — За дате комплексне бројеве $z_1=3+4\,i$, $z_2=4+3\,i$ одредити: *a*) збир, разлику, производ и количник, *b*) производ њихових конјугованих бројева, *c*) производ њихових реципрочних бројева. Добивене вредности проверити графички.

Решење. — *a*) $7+7\,i$; $-1+i$; $z_1 \cdot z_2 = 25\,i$; $z_1/z_2 = {}^{24}/_{25} + {}^{7}/_{25}\,i$,

b) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = -25\,i$, *c*) $-{}^{1}/_{25}\,i$.

18. Делење вектора. Кватернион. — Резултат делења двају скалара m и n јесте опет скалар, број μ који има особину да је $m=\mu n$. Према томе и количник двају вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, који у општем случају нису колинеарни, треба да буде величина $\mathbf{Q}$ таква да задовољава једнакост $\vec{a}=\mathbf{Q}\,\vec{b}$. Из ове једнакости уочавамо да производ $\mathbf{Q}\,\vec{b}$ геометриски претставља *обртање* вектора $\vec{b}$ за известан угао $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ и *деформацију* интензитета до изједначења са a.

Да би се могло дефинисати делење двају вектора, мора се претходно дефинисати величина $\mathbf{Q}$. Њу је претставио *Хамилтон** у облику збира скалара a_0 и вектора $\vec{a}$:

$$\boxed{\mathbf{Q} = a_0 + \vec{a}} \tag{339}$$

и назвао *кватернион*, пошто је одређена са *четири броја*: скаларом a_0 и трима координатама вектора $\vec{a}\,(a_x, a_y, a_z)$, па се може у Декартовом правоуглом систему написати у облику:

$$\boxed{\mathbf{Q} = a_0 + a_x\,\vec{\mathrm{i}} + a_y\,\vec{\mathrm{j}} + a_z\,\vec{\mathrm{k}}.} \tag{339'}$$

Кватернион није ни скалар ни вектор, он је збир скалара и вектора. За $\vec{a}=0$ кватернион се своди на *скалар* a_0, а за $a_0=0$ на *вектор* $\vec{a}$, па су, према томе, скалари и вектори специјалне вредности кватерниона.

* *Hamilton — Lectures on Qauternions.* Dublin, 1853.

За два кватерниона кажемо да су једнака

$$a_0+\vec{a}=b_0+\vec{b}$$

ако су једновремено

$$a_0=b_0, \quad \vec{a}=\vec{b}.$$

Збир (разлика) двају кватерниона $\mathbf{Q}_1=a_0+\vec{a}$, $\mathbf{Q}_2=b_0+\vec{b}$ **опет је кватернион**

$$\mathbf{Q}_3=\mathbf{Q}_1 \pm \mathbf{Q}_2=(a_0+\vec{a}) \pm (b_0+\vec{b})=(a_0 \pm b_0)+(\vec{a} \pm \vec{b})=c_0+\vec{c}, \tag{340}$$

чији су скалар и вектор:

$$c_0=a_0 \pm b_0, \quad \vec{c}=\vec{a} \pm \vec{b}. \tag{340'}$$

Помножимо ли кватернионе $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ добићемо:

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2=(a_0+\vec{a})(b_0+\vec{b})=a_0 b_0+a_0 \vec{b}+\vec{a} b_0+\vec{a}\vec{b}.$$

Први члан на десној страни јесте скалар, други и трећи вектори. Четврти члан претставља тзв. *кватернионски производ** вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Он је, према Хамилтону

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}=-(\vec{a}, \vec{b})+[\vec{a}, \vec{b}],} \tag{341}$$

збир скалара и вектора. Према томе **производ двају кватерниона** опет је кватернион

$$\mathbf{Q}_3=\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2=c_0+\vec{c},$$

чији су скалар и вектор одређени вредностима:

$$c_0=a_0 b_0-(\vec{a}, \vec{b}), \quad \vec{c}=a_0 \vec{b}+b_0 \vec{a}+[\vec{a}, \vec{b}]. \tag{342}$$

Према (341) *кватернионски производ ортова оса Декартовог правоуглог система* одређен је схемом:

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	-1	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	-1	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	-1

(343)

* Обележава се и овако $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

За кватернионски производ *не важи закон комутације*, јер је

$$\vec{b}\,\vec{a} = -(\vec{b}, \vec{a}) + [\vec{b}, \vec{a}] = -(\vec{a}, \vec{b}) - [\vec{a}, \vec{b}], \tag{341'}$$

па је

$$\mathbf{Q}_1\,\mathbf{Q}_2 \neq \mathbf{Q}_2\,\mathbf{Q}_1 .$$

Из ове две једначине, (341) и (341′), сабирањем добивамо скаларни и векторски производ двају вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ изражене кватернионским производом:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{a}}{2}, \quad [\vec{a}, \vec{b}] = \frac{\vec{a}\,\vec{b} - \vec{b}\,\vec{a}}{2}. \tag{344}$$

Количник двају вектора је кватернион

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \mathbf{Q} = d_0 + \vec{d},$$

где су d_0 и $\vec{d}$ непознати скалар и вектор кватерниона $\mathbf{Q}$.

Из тога количника добивамо

$$\vec{a} = \vec{b}\,\mathbf{Q} = \vec{b}\,(d_0 + \vec{d}) = d_0\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{d} = d_0\,\vec{b} - (\vec{b}, \vec{d}) + [\vec{b}, \vec{d}] .$$

Изједначујући скаларне и векторске вредности са обе стране ове једначине добивамо

$$(\vec{b}, \vec{d}) = 0, \quad \vec{a} = d_0\,\vec{b} + [\vec{b}, \vec{d}]. \tag{345}$$

Да бисмо одредили непознати скалар d_0 помножимо другу једначину (345) скаларно вектором $\vec{b}$, онда је

$$\boxed{d_0 = \frac{1}{b^2}(\vec{a}, \vec{b}),} \tag{346}$$

пошто је $(\vec{b}, [\vec{b}, \vec{d}]) = 0$. Да бисмо одредили вектор $\vec{d}$ помножимо другу једначину (345) векторски вектором $\vec{b}$ *„сдесна“*, с обзиром на услов $\vec{d} \perp \vec{b}$, биће:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [\,[\vec{b}, \vec{d}], \vec{b}] = [\vec{b}, [\vec{d}, \vec{b}]\,] = b^2\,\vec{d} - (\vec{b}, \vec{d})\,\vec{b} = b^2\,\vec{d}$$

те је

$$\boxed{\vec{d} = \frac{1}{b^2}[\vec{a}, \vec{b}].} \tag{347}$$

Према томе количник двају вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ дат је квартенионом:

$$\boxed{\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{1}{b^2}\left\{(\vec{a}, \vec{b}) \pm [\vec{a}, \vec{b}]\right\} = \mathbf{Q},} \tag{348}$$

где се знак + односи на случај множења *„са десне“* а – са *„леве стране“*. То значи да количник двају вектора има две вредности **Q**+ и **Q**– које се разликују само знаком уз векторски производ. Такви кватернниони зову се *конјуговани*.

Нека је координатни систем $O\xi\eta$ постао обртањем система Oxy у директном смеру за угао φ око Oz осе, онда између ових система постоји овај однос:

	$\vec{i}'$	$\vec{j}'$
$\vec{i}$	φ	$\varphi + {}^1/_2\pi$
$\vec{j}$	$-{}^1/_2\pi + \varphi$	φ

па је

$$\vec{i}' = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi, \qquad \vec{i} = \vec{i}'\cos\varphi - \vec{j}'\sin\varphi,$$

$$\vec{j}' = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi, \qquad \vec{j} = \vec{i}'\sin\varphi + \vec{j}'\cos\varphi.$$

Количник ортова $\vec{i}'$ и $\vec{i}$ према (348) биће:

$$\frac{\vec{i}'}{\vec{i}} = \cos\varphi + [\vec{i}', \vec{i}] = \cos\varphi - \vec{k}\sin\varphi = \mathbf{Q}', \tag{349}$$

где је **Q'** *јединични кватернион*. Под *нормом* (**N**) кватерниона подразумева се збир квадрата скалара и квадрата интензитета вектора кватерниона

$$\mathbf{N} = a_0^2 + |\vec{a}|^2 = a_0^2 + a^2 = a_0^2 + a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \tag{350}$$

па је норма јединичног кватерниона $\mathbf{N}' = 1$. Из (349) добивамо:

$$\vec{i}' = \vec{i}\,\mathbf{Q}' = \vec{i}\cos\varphi - \vec{i}\,\vec{k}\sin\varphi = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi,$$

пошто је кватернионски производ $\vec{i}\,\vec{k} = -\vec{j}$, (обр. 343). Како је орт $\vec{i}'$ постао обртањем орта $\vec{i}$ у *директном смеру* (десним обртањем) за угао φ, то увиђамо да јединични кватернион претставља *обртање (ротацију)* око осе одређене ортом $\vec{k}$ за угао φ. На исти начин добивамо да је орт $\vec{i}$ постаје обртањем орта $\vec{i}'$ у *супротном — индиректном —*

смеру (тј. левим обртањем) око осе $-\vec{k}$ за угао φ, па је

$$\vec{i} = \mathbf{Q}' \vec{i}' = (\cos\varphi - \vec{k}\sin\varphi)\,\vec{i}' = \vec{i}'\cos\varphi - \vec{j}'\sin\varphi\,,$$

пошто је

$$\vec{k}\,\vec{i}' = -(\vec{k},\ \vec{i}') + [\vec{k},\ \vec{i}'] = \vec{j}'\sin\varphi\,.$$

Орт $\vec{j}'$ постао је десним обртањем орта $\vec{j}$ око осе Oz за угао φ па е

$$\vec{j}' = \vec{j}\,\mathbf{Q}' = \vec{j}\cos\varphi - \vec{j}\,\vec{k}\sin\varphi = \vec{j}\cos\varphi - \vec{i}\sin\varphi;$$

обрнуто биће

$$\vec{j} = \mathbf{Q}'\,\vec{j}' = \vec{j}'\cos\varphi - \vec{k}\,\vec{j}'\sin\varphi = \vec{j}'\cos\varphi + \vec{i}'\sin\varphi\,.$$

Ове се вредности потпуно слажу са онима добивеним из формула трансформација.

Ако се орт $\vec{i}$ обрне за 90^0 у директном смеру добивамо орт $\vec{j}$:

$$\vec{i}' = \vec{i}\,\mathbf{Q}' = -\vec{i}\,\vec{k} = \vec{j}\,,$$

а ако се обрне за 180^0 добивамо орт $-\vec{i}$:

$$\vec{i}' = \vec{i}\,\mathbf{Q}' = \vec{i}\cos\pi = -\vec{i}\,.$$

У првом случају је јединични кватернион $\mathbf{Q}' = \vec{k}$, а у другом је $\mathbf{Q}' = \cos\pi = -1$.

Количник вектора $\vec{a}\,(2;\ 2\sqrt{3};\ 0)$, $\vec{b}\,(3;\ 0;\ 0)$ дат је кватернионом

$$\vec{a}/\vec{b} = \mathbf{Q} = {}^1/_9\,\{6 - 6\sqrt{3}\,\vec{k}\} = {}^2/_3 - {}^2/_3\sqrt{3}\,\vec{k} = d_0 + \vec{d}\,,$$

па је вектор $\vec{a}$ постао обртањем вектора $\vec{b}$ у директном смеру:

$$\vec{a} = \vec{b}\,\mathbf{Q} = {}^2/_3\,\vec{b} - {}^2/_3\sqrt{3}\,\vec{b}\,\vec{k} = {}^2/_3\,\vec{b} + 2\sqrt{3}\,\vec{j}\,,$$

јер је кватернионски производ

$$\vec{b}\,\vec{k} = -(\vec{b},\ \vec{k}) + [\vec{b},\ \vec{k}] = -3\vec{j}\,.$$

Како је $\vec{b} = 3\,\vec{i}$ биће: $\quad \vec{a} = 2\,\vec{i} + 2\sqrt{3}\,\vec{j}\,,$

тј. $a = 4$. Ставимо да је $\vec{a} = a\,\vec{i}'$, $\vec{b} = b\,\vec{i}$, онда је

$$\vec{i}' = \vec{i}\,\mathbf{Q}' = \vec{i}\,(\cos\varphi - \vec{k}\sin\varphi) = (b/a)\,\vec{i}\,\mathbf{Q} = (b/a)\,\vec{i}\,({}^2/_3 - {}^2/_3\sqrt{3}\,\vec{k})$$

па је

$$\vec{i}\cos\varphi = {}^2/_3\,(b/a)\,\vec{i} - \vec{i}\,\vec{k}\sin\varphi = -{}^2/_3\,(b/a)\sqrt{3}\,\vec{i}\,\vec{k}$$

односно

$$\cos\varphi = {}^1/_2\,, \quad \sin\varphi = {}^1/_2\sqrt{3}\,,$$

тј. вектор $\vec{b}$ обрнуо се за угао 60^0 у директном смеру и истегао се. *Модул истезања* је $a/b = {}^4/_3$, па је $a = {}^4/_3\,b = 4$.

31) За дате комплексне бројеве $z_1=2+i$ и $z_2=1-2i$ одредити: *a*) збир, разлику, производ, количник; *b*) производ њихових конјугованих бројева, *c*) производ њихових реципрочних бројева.

Решење. *a*) $z_1+z_2=3-i,\quad z_1-z_2=2+3i,\quad z_1 z_2=4-3i,\quad z_1/z_2=i;$

b) $\overline{z}_1=3+i,\quad \overline{z}_2=1+2i,\quad \overline{z_1 z_2}=1+7i;$

c) $1/z_1\cdot 1/z_2=1/(4-3i)={}^1/_{25}\,(4+3i).$

32) Колики је кватернионски производ вектора $\vec a=2\vec i-3\vec j+4\vec k,\ \vec b=\vec i+4\vec j+2\vec k$?

Решење. $$\vec a\,\vec b=-(\vec a,\vec b)+[\vec a,\vec b]=2-22\,\vec i+11\,\vec k.$$

33) Одредити производ кватерниона $Q_1=2+(\vec i+3\vec j-\vec k),\ Q_2=3+(2\vec i-\vec j+\vec k)$ и количник њихових вектора.

Решење. — Из (342) добивамо: $c_0=8,\quad \vec c=9\vec i+4\vec j-8\vec k,\quad Q=c_0+\vec c.$

Из (348) следи: $$\vec a/\vec b={}^1/_4\left\{-2\pm(2\vec i-3\vec j-7\vec k)\right\}.$$

34) Одредити реципрочни кватернион кватерниону $1+2\vec i-2\vec j+\vec k$.

Решење. — Ако је дат кватернион $Q=a_0+\vec a$ онда је реципрочни $Q_1=b_0+\vec b$ уз услов да је

$$QQ_1=a_0\,b_0+a_0\,\vec b+b_0\,\vec a-(\vec a,\vec b)+[\vec a,\vec b]=1.$$

Изједначујући добивамо једначине

$$a_0\,b_0-(\vec a,\vec b)=1,\quad a_0\,\vec b+b_0\,\vec a+[\vec a,\vec b]=0.$$

Множењем прве једначине са a_0 а друге прво скаларно а затим векторски вектором $\vec a$ добивају се непознате величине

$$b_0=a_0/(a_0^2+a^2)=a_0/N,\qquad \vec b=-\vec a/N,$$

па је реципрочни кватернион $$Q_1=Q^{-1}=\overline{Q}/N.$$

У предњем примеру биће

$$Q^{-1}=(1-2\vec i+2\vec j-\vec k)/10.$$

35) Одредити количник кватерниона $2+\vec i+2\vec j-\vec k,\quad 1+2\vec i-2\vec j+\vec k.$

Решење — Количник је $Q_1/Q_2=Q_1\,Q_2^{-1}=Q_1\,\overline{Q}_2/N_2.$

Према томе биће $$(-1-3\vec i+9\vec j+3\vec k)/10.$$

36) Одредити реципрочни кватернион кватерниону Q из зад. **33.**

$$(8-9\vec i-4\vec j+8\vec k)/225.$$

37) За који угао треба окренути вектор $\vec{a}\,(4;\ 3)$ у директном смеру да би се поклопио са вектором $\vec{b}\,(3;\ 4)$?

($\operatorname{tg}\varphi = 7/24$).

38) Одредити производ реципрочних кватерниона од кватерниона

$$1 + 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}, \quad 1 + \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}.$$

$(-9 + 5\vec{i} - 9\vec{j} - 4\vec{k})/540.$

39) Чему је једнак кватернионски производ бектора $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$?

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (-(\vec{a},\vec{b}) + [\vec{a},\vec{b}])\,\vec{c} = -(\vec{a},\vec{b})\,\vec{c} - (\vec{c}\,[\vec{a}\,\vec{b}]) - [\vec{c},[\vec{a},\vec{b}]]\,.$$

40) Чему је једнак кватернионски производ ортова оса Декартовог правоуглог система?

$(\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k} = -1).$

Бразина и убразањематеријалне тачке и елементарне масе крутог тела које се обрћу око непокретне осе односно непокретне тачке изражене кватернионима

Катица Р. (Стевановић) Хедрих

Одељење за механику Математичког института САНУ у Београду
И Машински факултет Универзитета у Нишу
Прив. адреса: 18000- Ниш, Србија, ул. Војводе Танкосића 3/22.e-mail: khedrih@eunet.rs

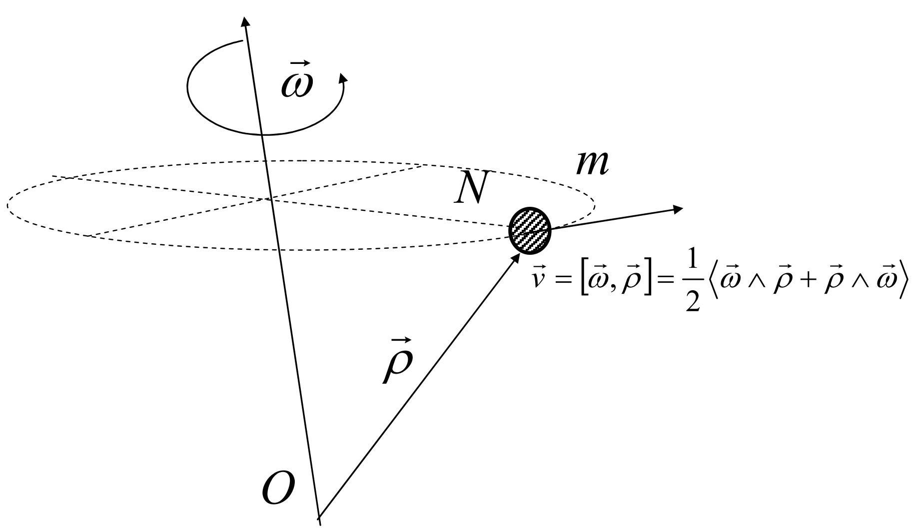
I* Скаларни и векторски производ два вектора се мое изразити помоћу кватернионских проиувода у облику:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\frac{1}{2}\left\langle \vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{b}\wedge\vec{a}\right\rangle$$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\frac{1}{2}\left\langle \vec{a}\wedge\vec{b}-\vec{b}\wedge\vec{a}\right\rangle$$

II* Материјална тачка масе m, вектора положаја $\vec{\rho}$ која ротира око осе угаоном брзином $\vec{\omega}$ има брзину која је једнака векторском проиуводу вектора угаоне брине $\vec{\omega}$ и вектора положаја $\vec{\rho}$ те тачке ли полузбиру кватернионских произвида вектора угаоне брине $\vec{\omega}$ и вектора положаја $\vec{\rho}$ те тачке са промењеним редоследом чинилаца:

$$\vec{v}=\left[\vec{\omega},\vec{\rho}\right]=\frac{1}{2}\left\langle \vec{\omega}\wedge\vec{\rho}+\vec{\rho}\wedge\vec{\omega}\right\rangle$$



Slika 1. Obrtanje materijalne tačke oko nepokretne ose

III* Ако се материјална тачка обрће око непокретне тачке онда је тренутна угаона брзина $\vec{\omega}$ изражена помоћу Еулер-ових углова прецесије, нутације и ротације ψ , $\dot{\vartheta}$ и φ у облику:

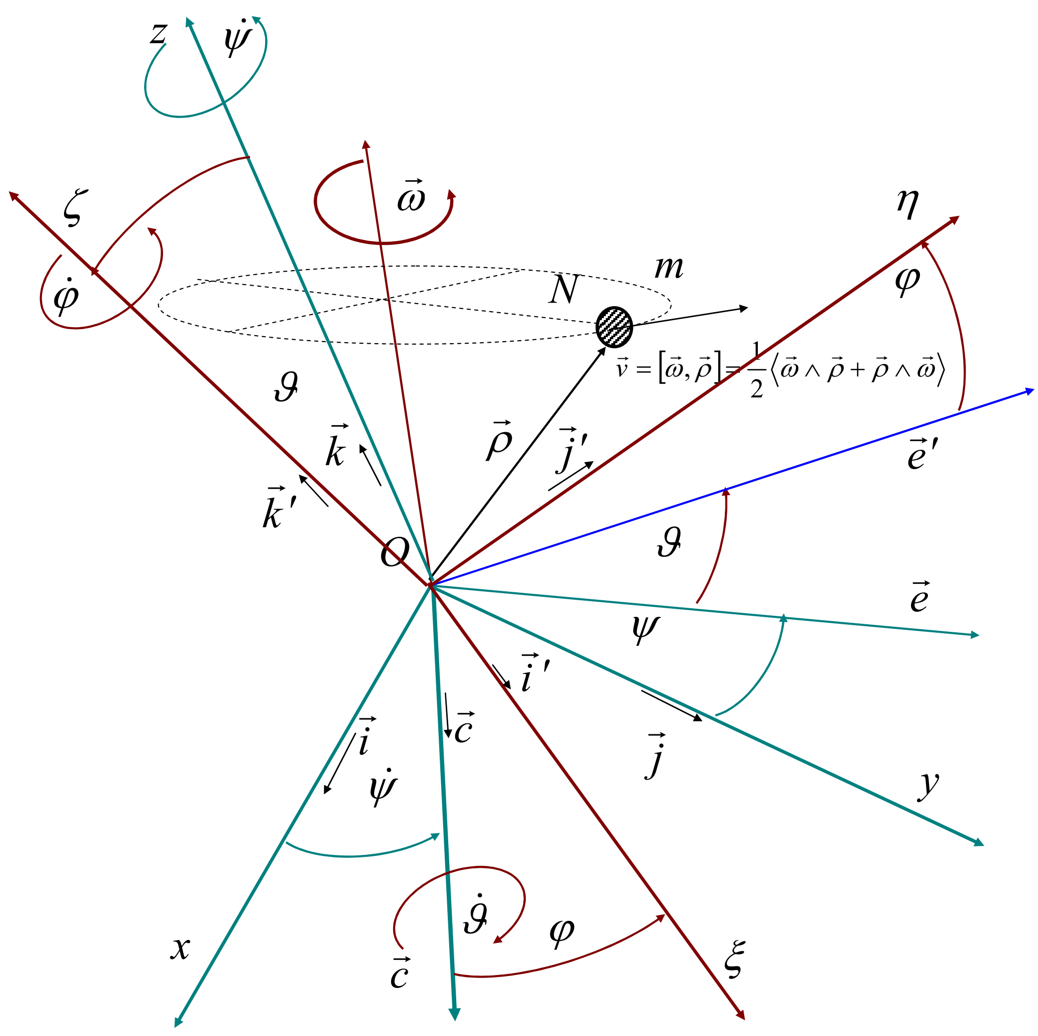
$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\vec{k} + \dot{\vartheta}\,\vec{c} + \dot{\varphi}\,\vec{k}'$$

док је брзина материјалне тачке:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{\rho}] = \frac{1}{2}\left\langle \vec{\omega} \wedge \vec{\rho} + \vec{\rho} \wedge \vec{\omega} \right\rangle == \frac{1}{2}\left\langle \dot{\psi}\,\vec{k} \wedge \vec{\rho} + \dot{\vartheta}\vec{c} \wedge \vec{\rho} + \dot{\varphi}\vec{k}' \wedge \vec{\rho} + \dot{\psi}\,\vec{\rho} \wedge \vec{k} + \dot{\vartheta}\,\vec{\rho} \wedge \vec{c} + \dot{\varphi}\,\vec{\rho} \wedge \vec{k}' \right\rangle$$

Односно у облику:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{\rho}] = \frac{1}{2}\left\langle \dot{\psi}\,\vec{k} \wedge \vec{\rho} + \dot{\psi}\,\vec{\rho} \wedge \vec{k} + \dot{\vartheta}\vec{c} \wedge \vec{\rho} + \dot{\vartheta}\,\vec{\rho} \wedge \vec{c} + + \dot{\varphi}\vec{k}' \wedge \vec{\rho} + \dot{\varphi}\,\vec{\rho} \wedge \vec{k}' \right\rangle$$



Slika 2. Obrtanje materijalne tačke oko nepokretne tačke

IV* Ако се круто тело обрће око непокретне тачке онда је тренутна угаона брзина $\vec{\omega}$ изражена помоћу Еулер-ових углова прецесије, нутације и ротације ψ, $\dot{\vartheta}$ и φ у облику:

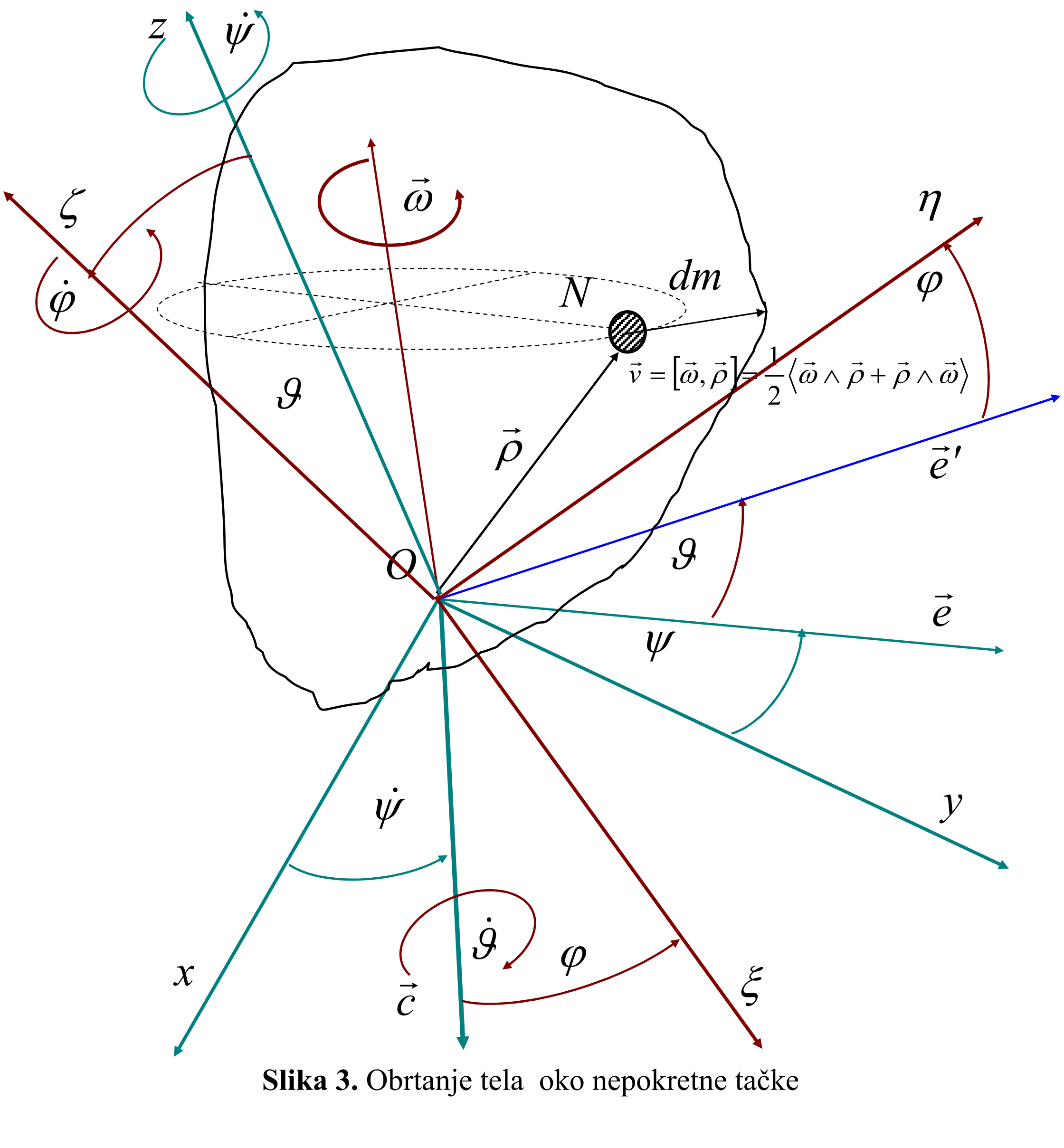
$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\vartheta}\vec{c} + \dot{\varphi}\vec{k}'$$

док је брзина елементарне масе dm крутог тела:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{\rho}] = \frac{1}{2}\langle \vec{\omega}\wedge\vec{\rho} + \vec{\rho}\wedge\vec{\omega}\rangle == \frac{1}{2}\left\langle \dot{\psi}\vec{k}\wedge\vec{\rho} + \dot{\vartheta}\vec{c}\wedge\vec{\rho} + \dot{\varphi}\vec{k}'\wedge\vec{\rho} + \dot{\psi}\vec{\rho}\wedge\vec{k} + \dot{\vartheta}\vec{\rho}\wedge\vec{c} + \dot{\varphi}\vec{\rho}\wedge\vec{k}'\right\rangle$$

односно у облику:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{\rho}] = \frac{1}{2}\left\langle \dot{\psi}\vec{k}\wedge\vec{\rho} + \dot{\psi}\vec{\rho}\wedge\vec{k} + \dot{\vartheta}\vec{c}\wedge\vec{\rho} + \dot{\vartheta}\vec{\rho}\wedge\vec{c} + +\dot{\varphi}\vec{k}'\wedge\vec{\rho} + \dot{\varphi}\vec{\rho}\wedge\vec{k}'\right\rangle$$



Slika 3. Obrtanje tela oko nepokretne tačke