Одељење за механику Математичког института САНУ
Семинар Математичке методе механике у примени

Matematičke metode mehanike u primeni (MMMP)

Mathematical Methods of Mechanics and Applications (3MA)

Projekat OI 174001 Dinamika hibridnih sistema složenih struktura (2011-2014)

Serija predavanja za istraživače pripravnike i doktorante iz oblasti Kinetike, Elastodinamike, Analitičke mehanike, Primene tenzorskog računa u mehanici, Teorije oscilacija i Nelinearne dinamike

30-ti blok predavanja

(od 10h do 11,30h) i (od 15 h do 17,30 h)

Osnovi tenzorskog računa sa primenama u mehanici

Transformacije, ortogonalna, afina i opšta transformacija; invarijante; kovarijantni i kontravarijantni vektori i tenzori; kriterijumi za određivanje tenzorske prirode sistema; kovarijantne, kontravarijantne i fizičke koordinate vektora i tenzora; Christoffel-ovi simboli; kovarijantno diferenciranje tenzora; diferencijalni operatori; bazni vektori tangentnog prostora vektora položaja materijalne tačke i ugaone brzine njihove rotacije; Primene tenzprskog računa u analitičkoj mehanici mehaničkih sistema; primena tenzorskog računa u teoriji elastičnosti;

(Prvi deo)

Predavač
Prof. dr Katica (Stevanović) Hedrih,,
rukovodilac projekta OI 174001

Sreda, 18 januar 2012 u 10 časova

* * * * * *

Predavanja se održavaju svake srede od 11 do 17 časova u Biblioteci Matematičkog instiuta SANU, ul. Knez Muhalova 36, treći sprat

Prijava potencijalnog slušaoca se dostavlja Upravniku Odeljenja za mehaniku na adrsu khedrih@eunet.rs *sa naznakom oblasti interesovanja.*

Dr Srđan Jović
Sekretar Odeljenja za mehaniku

Prof. dr Katica (Stevanović) Hedrih
Upravnik Odeljenja za mehaniku

ЛИТЕРАТУРА

* Татомир П. Анђелић, *Тензорски рачун*, Београд, 1952,

* Данило П. Рашковић, *Основи тензорског рачун*а, Крагујевац1972 и додатак у универзитетском уџбенику Теорија еластичности, Научна књига 1985.

Prof. dr Ing. Dipl. Math. Данило П. Рашковић

ДОДАТАК

D.1. ОСНОВИ ТЕНЗОРСКОГ РАЧУНА*

D.1.1. Системи величина. – Тачки у тродимензионом еуклидском простору (E_3) у коме се раздаљина између двеју тачака одређује према Еуклидовом ставу, одговарају три броја (x, y, z) који су њене *координате* у односу на триједар референције $Oxyz$. Ове се координате могу обележити и само *једним словом* са индексом, x_i, $i=1, 2, 3$. Да би се јасније истакла различита природа координата за два система могу се индекси „i" писати и горе (x^i) и доле (x_i). Као што је познато из векторског рачуна може се један вектор ($\vec{r}=\mathbf{r}$) *једнозначно разложити* у три компоненте у правцима оса косоуглог триједра са *основним векторима* $\mathbf{e}_i$ у облику**:

$$\mathbf{r}=x^1\,\mathbf{e}_1+x^2\,\mathbf{e}_2+x^3\,\mathbf{e}_3=\sum_{i=1}^{3}x^i\,\mathbf{e}_1=x^i\,\mathbf{e}_i;\;\mathbf{r}=x_1\,\mathbf{e}^1+x_2\,\mathbf{e}^2+x_3\,\mathbf{e}^3=x_i\,\mathbf{e}^i, \tag{1.1}$$

где су $\mathbf{e}^i$ *основни* (*базни*) *вектори реципрочног триједра*, везани са првим релацијама

$$\mathbf{e}^i=[\mathbf{e}_j\,\mathbf{e}_k]/\Delta;\;\; \mathbf{e}_i=[\mathbf{e}^j\,\mathbf{e}^k]/\Delta^*;\;\; \Delta=(\mathbf{e}_1\,[\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3]);\;\; \Delta^*=(\mathbf{e}^1\,[\mathbf{e}^2\,\mathbf{e}^3])=\Delta^{-1};\quad i,j,k=1,2,3 \tag{1.2}$$

Ове две врсте координата се називају *контраврijантне* (x^i) и *коваријантне* (x_i). Оне се одређују као скаларни производи $x^i=(\mathbf{r}\,\mathbf{e}^i)$ односно $x_i=(\mathbf{r}\,\mathbf{e}_i)$, па следи да су основни вектори $\mathbf{e}_i=\partial\,\mathbf{r}/\partial\,x^i$ и $\mathbf{e}^i=\partial\,\mathbf{r}/\partial\,x_i$. С обзиром на ово, горњи индекси се називају *контраваријантни*, а доњи *коваријантни* без обзира на геометријску интрепретацију. Код ортогоналног триједра су основни вектори ортови (јединични вектори) $\mathbf{i}_i$, *па нема разлике између ових двеју врста координата*, што значи да је триједар сам себи реципрочан.

Множина неких величина (на пример x^i) чини њихов *скуп* $S\{x^i\}$, а величине (x^i) су елементи скупа и припадају му, $x^i\in S$. Аналогно скупу координата x^i може се скуп материјалних тачака, скуп коефицијената линеарне форме $\mathfrak{L}=\sum a_i\,x_i=a_i\,x^i=a^i\,x_i$ обележити само саједним индексом Овакав се скуп назива *систем првог реда*, *вектор* или *тензор првог реда*. Поједини чланови су *елементи* или *координате система*. Овакав се систем

* Детаљније видети Д. Рашковић, Основи тензорског рачуна, (скрипта), Крагујевац, 1974.

** Статика, X. издање, Додатак.

може увек претпоставити *матрицом врстом* (x_i) односно матрицом колоном $\{x_i\}$ елемента уређених по редном броју индекса, $i=1, 2, \ldots, N$.

Билинеарна и квадратна форма могу се написати у облицима

$$\mathfrak{B}=(x)\,\mathsf{A}\,\{y\}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,x_i\,y_k=a_{ik}\,x^i\,y^k;\ \mathfrak{Q}=(x)\,\mathbf{A}\,(x)=a_{ik}\,x^i\,x^k. \tag{1.3}$$

Елементи ових система су са два индекса (a_{ik}), па је *систем другог реда*. Њему одговара *квадратна матрица*. Када је $a_{ik}=a_{ki}$ тада је систем *симетричан*, $a_{(ik)}$, и одговара му *симетрична квадратна матрица*; ако је, пак, $a_{ki}=-a_{ik}$ за $i\neq k$ систем је *кососиметричан (антисиметричан)*, $a_{[ik]}$. Њему одговара *кососиметрнчна матрица* код које су елементи $a_{ii}=0$. Елементи система другог реда могу се обележити на три начина a^{ik}, a_{ik} и $a^i{}_k$. Овакав систем другог реда назива се *тензор другог реда*.

Скаларна величина (скалар) је одређена само једним податком, без индекса (a), па је *систем нултог реда*. Ова величина не зависи од система референције, па је *скаларна инваријанта* или кратко речено *скалар*. Аналогно системима нултог (скалар), првог (вектор) и другог реда (тензор другог реда) дефинишу се и системи вишег реда односно *тензори вишег реда*. Тако су елементи система трећег реда: a_{ijk}, a^{ijk}, $a^i{}_{jk}$, $a_k{}^{ij}$. Овом систему одговара *просторна матрица* која има *врсте*, *колоне* и *слојеве*. Систем p-ог реда је $a_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ или $a^{i_1 i_2 \ldots i_p}$, док је $p+q$-ог реда $a^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$.

D.1.2. Einstein-ова конвенција о сабирању. – Из изложеног се уочава предност увођења различитих индекса, па је симболика овог рачуна тако постављена да би оператика била што рационалнија. Због тога се користи Einstein-ова конвенција о сабирању: „*У сваком изразу где се исти индекс појављује два пута (једном као горњи а једном као доњи) подразумева се сабирање по томе индексу.*“ Ови се индекси зову неми (*привидни, анонимни, dummy*); они други су *слободни*. Пошто неми индекси не мењају смисао обрасца, могу се *произвољно мењати*. Тако су $\sum a_i\,x_i=a_i\,x^i=a^i\,x_i=a_j\,x^j=\cdots=a_r\,x^r$; $\sum\sum a_{ik}\,x^i\,x^k=a_{ik}\,x^i\,x^k=a_{rs}\,x^r\,x^s$; $\sum a_{ij}\,b^j=a_{ij}\,b^j=a_{ir}\,b^r=a_{is}\,b^s$. Симбол $\sum_s a_s$ значи „*не сабира се по s*“, док је симбол a_{MM}, a^{MM}, $a_M{}^M$ одређени члан тог израза, те *не претставља сабирање*. У сложнијим изразима треба неми индекс употребити само једанпут, на пример $a^i{}_{jk}\,a_i^{jp}\,a_r{}^{nk}\,b_{np}=c_r$.

1.3. Алгебарске операције са системима. – Елементи a_{ik} и a^{ik} јесу елементи система другог реда, али су различитог типа, са доњим и горњим индексима. Тип, дакле, зависи од броја, распореда и положаја индекса. При извођењу алгебарских операција тип игра важну улогу. Ови су системи *једнаки*. $a^i=b^i$; $a^{ik}=b^{ik}$; $a_k^{ij}=b_k^{ij}$; $a_3^{12}=b_3^{12}$; а ови нису $a_k^{ij}\neq b_{ij}^k$.

Сабрати (одузети) могу се само системи истог реда и типа и са истим размаком вредности целих бројева које узимају индекси; $c^i=a_i{}^i+b^i$, $i=1, 2, 3$; $c^i=a^i-b^i$; $a^i{}_{jk}+b^i{}_{jk}=c^i{}_{jk}$; $a^i{}_k+b_{ih}\neq$. Два се система произвољног реда и типа *множе* тако што се сваки елемент првог система множи по одређеном правилу (поретку) са сваким елементом другог система, па се од тих производа образује нови систем, например, $a^i\,b^k=c^{ik}$, $a_i\,b_k=c_{ik}$; $a^i\,b_k=c^i{}_k$.

a) *Контракција* (*Verjüngung*, *Faltung*, *contraction*) примењује се на системе који имају бар један пар индекса супротне варијантности, тј. на тензоре мешовитог типа. Она представља операцију *сажимања индекса*. Изабере се један горњи и један доњи индекс и означе се истим словом, те постају неми индеси, па се даље изврши сабирање по том индексу, и добије се систем за 2 степена *нижег реда* од полазног система. Например, када у систему a_k^{ij} трећег реда изједначимо индексе $j=k$ добићемо систем $a_j^{ij}=\alpha^i$ првог реда, јер за $i, j=1, 2, 3$ биће $a_1^{i_1}+a_a^{i_2}+a_3^{i_3}=\alpha^i$. Међутим, контракцијом индекса. $i=k$ добија се такође систем првог реда али различит од првог, $a_k^{\;ij}=a_i^{\;ij}=\beta_i^{\,j}\,\alpha^i\pm\alpha^i$. Од система шестог реда a_{rst}^{ijk} контракцијом индекса $j=r$ добија се систем четвртог реда $a_{jst}^{ijk}=a_{st}^{jk}$. Даље ће бити $a_{st}^{ik}=a_{kt}^{ik}=a_i^{\;t}=a_i^{\;i}=\alpha=S$.

b) *Композиција или унутрашње множење система* (Übershiebung) се састоји у томе да се изврши множење система, а затим се изврши контракција по једном индексу једног система и једном индексу супротне варијантности другог система. Например, $a^i\,b_j=c_j^{\;i}=c_i^{\;i}=c=a^1\,b_1+a^2\,b_2+a^3\,b_3$. Или,

$$a_j^{\;i}\,b^k=c_j^{\;ik}=a_j^{\;i}\,b^j=p^i;\; a_j^{\;i}\,b_r^{\;k}=c_{jr}^{ik}=a_j^{\;i}\,b_r^{\;j}=a^i\,b_r=c^{\;i},\; a_j^{\;i}\,b_i^{\;k}=a_j\,b^k=e_j^{\;k}.$$

1.4. Kronecker-ов делта симбол и Levi-Civita симболи. — Скаларни производи јединичних вектора ортогоналног триједра $Ox^1x^2x^3$ односно базних вектора (1.2) износе

$$(\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_1)=\delta_{11}=1;\; (\mathbf{i}^1\,\mathbf{i}^1)=\delta^{11}=1;\; (\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_2)=\delta_{12}=0;\; (\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}^i)=\delta_i^{\;i}=1,\; (\mathbf{e}_j\,\mathbf{e}^2)=\delta_1^{\;2}=0;$$

$$(\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}^k)=\delta_i^{\;k} \tag{1.4}$$

те се даду означити једним симболом δ_{ik}; δ^{ik}; $\delta_i^{\;k}$ који се зове Kronecker-ов *делта симбол* и који има вредност 1 када је $i=k$ и вредност 0 када је $i\neq k$. Када су $i, k=1, 2, 3$ онда симболу δ_k^i одговара јединична матрица трећег реда, $\mathbf{I}_3$. Док се симбол $\delta_M^M=1$, то је $\delta_i^{\;i}=3$ или N, за $i=1, 2, 3$, односно $1=1, 2, \ldots, N$. Услов $\delta_{ik}=(\mathbf{i}_i\,\mathbf{i}_k)=0$ или 1, јесте *услов ортонормираности јединичних вектора* Декартовог правоуглог триједра.

Овај се симбол назива и *супституциони оператор*, јер се композицијом система са овим симболом добија исти систем али са контрахованим индексом замењеним слободним индексом делта симбола. Например,

$$\delta^i{}_k\,a_i=a_k;\; \delta_i{}^j\,u_s^{jr}=u_s^{ir};\; \delta_j^r\,V_r^{mn}=V_j^{mn}. \tag{1.5}$$

Јединични вектори $\mathbf{i}_i$ образују правоугли паралепипед запремине $V=(\mathbf{i}_i\,[\mathbf{i}_2,\,\mathbf{i}_3])=1$. Стога је Levi Civita увео тзв. *e-симболе трећег реда* који се дефинишу на овај начин:

$$\begin{aligned} e_{ijk}&=(\mathbf{i}_i\,[\mathbf{i}_j\,\mathbf{i}_k]) \\ e^{ijk}&=(\mathbf{i}^i\,[\mathbf{i}^j\,\mathbf{i}^k]) \end{aligned} = \begin{cases} 1 \text{ ако је } ijk \textit{ парна пермутација} \text{ индекса } 1, 2, 3; \\ -1 \text{ ако је } ijk \textit{ непарна пермутација} \text{ од } 1, 2, 3; \\ 0 \text{ ако су два индекса једнака } (i=j;\; i=k;\; j=k). \end{cases} \tag{1.6.5}$$

Они су дефинисани само за индексе $i, j, k=1, 2, 3$, па има их *шест* различитих од нуле, $e_{123}=e_{231}=e_{312}=1$; $e_{213}=e_{321}=e_{132}=-1$. Због тога се овај симбол назива и *пермутациони симбол*.

Пошто је векторски производ ортова $[\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3] = \mathbf{i}_1$, $[\mathbf{i}_3\, \mathbf{i}_1] = \mathbf{i}_2$, $[\mathbf{i}_1\, \mathbf{i}_2] = \mathbf{i}_3$, то је $[\mathbf{i}_j\, \mathbf{i}_k] = e_{ijk}\, \mathbf{i}^i$, па је векторски производ два вектора у V_3:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{ab}] = a^j b^k [\mathbf{i}_j\, \mathbf{i}_k] = e_{ijk}\, a^j b^k\, \mathbf{i}^i = V_i\, \mathbf{i}^i;\; V_i = e_{ijk}\, a^j b^k;\; V_1 = a^2 b^3 - a^3 b^2, \ldots \quad (1.7.a)$$

$$\mathbf{V} = a_j\, b_k\, [\mathbf{i}^j\, \mathbf{i}^k] = e^{ijk}\, a_j\, b_k\, \mathbf{i}_i = V^i\, \mathbf{i}_i;\; V^i = e^{ijk}\, a_j\, b_k;$$

$$V^1 = a_2\, b_3 - a_3\, b_2;\; V^2 = a_3\, b_1 - a_1\, b_3;\; V^3 = a_1\, b_2 - a_2\, b_1. \quad (1.7.b)$$

Пошто је e^{ijk} косиметрични систем, а $a_j\, b_k = V_{jk}$ је тензор, то следе

$$V^i = e^{ijk}\, a_j\, b_k = \frac{1}{2}\, e^{ijk} (a_j\, b_k - a_k\, b_j) = \frac{1}{2}\, e^{ijk} \begin{vmatrix} a_j & a_k \\ b_j & b_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\, e^{ijk} [a_j\, b_k];$$

$$V^i = e^{ijk}\, a_j\, b_k = e^{ijk}\, V_{jk}, \quad (1.8)$$

где је $a_j\, b_k$ *спољашњи (алтернирајући) производ* два вектора исте коваријантности који се назива *бивектор*. Други образац показује да се тензору може *придружити (асоцирати)* одговарајући вектор. Да би се боље истакла ова повезаност обе су величине обележене истим словом (тензор v_{jk} и вектор v^i).

Три сучељна вектора образују косоугли паралепипед запремине

$$V = (\mathbf{a}\,[\mathbf{bc}]) = a_i\, b_j\, c_k\, (\mathbf{i}^i\, [\mathbf{i}^j\, \mathbf{i}^k]) = e^{ijk} a_i\, b_j\, c_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3!}\, e^{ijk} [a_i\, b_j\, c_k], \quad (1.9)$$

где је производ $[a_i\, b_j\, c_k]$ тзв. тривектор.

Када су вектори a и c укрштене силе $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, а $\mathbf{b} = \mathbf{r}$ вектор положаја нападне тачке друге силе у односу на прву, онда је тривектор $(\mathbf{F}_1\, [\mathbf{r}\, \mathbf{F}_2]) = 6\, V$ *комомент* укрштених сила и једнак је шестострукој запремини тетраедра конструисаног над укрштеним силама.

D.1.5. Афини простор. — Систем вредности a^i, $i = 1, 2, \ldots, N$ неких N променљивих x^i назива се „*тачка*" по аналогији са тачком у простору (E_3). Скуп свих тачака за све могуће реалне вредности x^i чини *реални пунктални простор или простор од N димензија* (хиперпростор, многострукост). Вредности a^i су *координате* у том простору (V_N). Под *вектором* у V_N подразумевају се две уређене тачке: *почетак* $A(a^i)$ и *крај* $B(b^i)$ вектора померања $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, са координатама $u^i = b^i - a^i$. Вектор $\mathbf{u}$ је одређен када му се знају координате u^i и почетак $A(a^i)$. Вектор $\mathbf{u}$ одређен само са u^i је *слободан вектор*, јер се може *паралелно померити* у сваку тачку простора V_N. Положај сваке тачке P и V_N може се одредити вектором $OP = p$, тзв. *вектором положаја*; пол $O\,(x^i = 0)$ зове се *координатни почетак*.

Координатни системи су такви геометријски објекти према којима се одређује положај тачке у простору, па се називају *системи референције*. Положај тачке у простору одређује се *картезијанским координатама* (правоуглим $y^i = x^i$ и косоуглим x^i) односно параметрима q^i који се зову *опште — генералисане — координате*. Код картерзијанских система координатне линије су *праве*, а координатне површи су *равни*; код криволинијских система су *криве линије*, односно површи. Тангентни вектори $\mathbf{e}_i$, односно g_i, дуж тангената на координатне линије, јесу *основни (базни) координатни вектори* простора V_N. Уопште узев они нису јединични вектори, а могу се мерити и различитим јединицама и различитих су дужина.

Рачунске операције са векторима у хиперпростору V_N дефинишу се као и у тродимензионом простору (V_3) те важе операције: $1°\ \mathbf{u}=\mathbf{v}$; $2°\ \mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $3°\ \mathbf{w}=\mathbf{u}-\mathbf{v}$ и $4°\ \mathbf{v}=\lambda\,\mathbf{u}$, где је $\lambda\neq 0$. Ако је дат скуп вектора $\mathbf{v}_k$, где је $k<1, 2, \ldots, M<N$, а постоји λ_k таквих бројева, онда могу бити два случаја: $1°$ да је $\sum \lambda_k v_k = \lambda^k v_k = 0$ иако сви $\lambda_k \neq 0$, и $2°$ да је $\lambda^k \mathbf{v}_k = 0$ само када су сви $\lambda_k \equiv 0$. У првом случају су вектори *линеарно зависни*, у другом су *линеарно независни*. У простору V_N може бити највише N линеарно независних вектора, а сви се остали могу изразити њиховим линеарним комбинацијама.

Резултанта $\mathbf{F}_r$ сила $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ је у њиховој равни (V_2) па је линеарно зависна са компонентама, јер је $\lambda_1 \mathbf{F}_1 + \lambda_2 \mathbf{F}_2 + \lambda_r \mathbf{F}_r = 0$.

Скуп свих вектора одређеног реда (N) са којима се могу вршити предње четири операције образује *линеарни систем вектора* или *линеарни простор или векторски простор* односно *афини простор*. Независни основни вектори $\mathbf{e}_i$ доведени на заједнички почетак (O) образују основни N-тоедар или *векторску базу* (*основу*) простора V_N. Стога се вектор положаја тачке $(\mathbf{OP}=\mathbf{r})$ може једнозначно разложити у компоненте у правцима тих вектора, те ће бити:

$$\mathbf{r} = x_i^{\,1}\,\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 + \cdots + x^N\,\mathbf{e}_N = x^i\,\mathbf{e}_i,\quad i=1, 2, \ldots, N. \tag{1.10}$$

Координате x^i зову се афине координате;

У афином простору могу се дефинисати $s_i = x^i$ $1°$ *паралелни* (*или колинеарни*) *вектори* $\mathbf{v}=\lambda\,\mathbf{u}$; $2°$ *права линија* $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\,\mathbf{b}$, $3°$ *раван* $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\,\mathbf{b}+\mu\,\mathbf{c}$ и $4°$ *хиперраван* $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda^s\,\mathbf{b}_s$. Ако се мења само једна координата (x^M) а све остале $(N-1)$ су константе, онда је $x^M=\lambda^M$, па из $2°$ следи да је $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\,\mathbf{b}=\mathbf{a}+x^M\mathbf{e}_M$ те све тачке леже на правој паралелној основном вектору $\mathbf{e}_M$, а ово показује да је афини координатни систем праволинијски, $[\mathbf{r}-\mathbf{a},\ \mathbf{e}_M]=0$. Обратно, ако је $x^M=\mathrm{const}$, а остале $(N-1)$ променљиве тачке леже у хиперавни.

У афином простору се могу упоређивати само дужине паралелних вектора, $\mathbf{v}=\lambda\,\mathbf{u}$, јер је $v^i=\lambda\,u^i$, па је $\lambda=v^i/u^i$ однос њихових дужина. Ово показује да се непаралелни вектори не могу упоређивати, нити мерити, а ништа се не зна ни о углу између таква два вектора, јер су основни вектори $\mathbf{e}_i$ непаралелни.

Опажајни простор од три димензије (E_3) је еуклидски матрички простор, јер је растојање двеју тачака $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ одређује Питагорином и косинусном теоремом по обрасцу $d=\overline{AB}=[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}$, где се испред квадратног корена подразумева позитивни предзнак. Да би се у афином простору могло из сваке тачке и свим правцима мерити *истом јединицом*, аналогно са простором E_3 уводи се *афини метрички простор* E_N ако се дефинише *скаларни производ два вектора*. Ако су то вектори померања двеју тачака, онда је $(\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_2)=\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2=|\mathbf{r}_1|\cdot|\mathbf{r}_2|\cos\varphi$, где су $|\mathbf{r}_i|$ дужине вектора, а φ угао између њих када су пренети у исту тачку (O). За $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}$ добија се $(\mathbf{r}\,\mathbf{r})=(\mathbf{r})^2$, тј. квадрат растојања између двеју тачака (P и O). С обзиром на (1.2) биће:

$$(\mathbf{a}\,\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab\cos\varphi=a^i\,b^j\,(\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j)=g_{ij}\,a^i\,b^j;\quad r^2=g_{ij}\,x^i\,x^j, \tag{1.11}$$

где је $g_{ij}=g_{ji}=(\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j)=(\mathbf{e}_j\,\mathbf{e}_i)$ *основни метрички тензор*, пошто он одређује *метрику простора*.

Када су базни вектори $\mathbf{e}_i$ јединични ортогонални вектори $\mathbf{i}_i$ онда је систем *Декартов правоугли систем*. Ако су $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ вектори положаја тачака $A(a^i)$ и $B(b^i)$, $i=1,2,\ldots,N$, тада су растојање и скаларни производ:

$$d=\overline{AB}=[(b^1-a^1)^2+(b^2-a^2)^2+\cdots+(b^N-a^N)^2]^{1/2};$$

$$(\mathbf{ab})=a^i\,b^j\,(\mathbf{i}_i\,\mathbf{i}_j)=\delta_{ij}\,a^i\,b^j=a^i\,b^i;\;\; r^2=(x^i)^2=(y^i)^2. \tag{1.12}$$

Вектори $\mathrm{d}\mathbf{s}_i=\mathrm{d}\,\mathbf{r}$ одређен двема блиским тачкама $A(x^i)$ и $B(x^i+\mathrm{d}x^i)$, тј. координатама $\mathrm{d}x^i$, назива се *инфинитезимални вектор померања*. Квадрат његове дужине је *метричка форма*, па ће бити:

$$\mathrm{d}\,\mathbf{s}^2=(\mathrm{d}\,\mathbf{r}\,\mathrm{d}\,\mathbf{r})=(\mathrm{d}\,\mathbf{r})^2=g_{ij}\,\mathrm{d}\,x^i\,\mathrm{d}\,x^j;\;\; \mathrm{d}\,s^2=\delta_{ij}\,\mathrm{d}\,x^i\,\mathrm{d}\,x^j=\mathrm{d}\,x^i\,\mathrm{d}\,x^j;\;\; x^i=y^i \tag{1.13}$$

где се други израз односи на Декартов правоугли систем.

D. 1.6. Трансформације. — Физичке величине представљају се на разне начине: *скаларом* (маса, густина, рад, енергија, температура), *вектором* (брзина, убрзање, сила, момент силе, спрег сила, количина кретања, замах, електрично поље) и *тензором* (напон, деформација, квадратна форма). Скалар је независан од избора координатног система. У опажајном простору (E_3) могли смо са векторима вршити разне операције , па их и *геометријски представити*. Међутим, уопштавањем појма простора (хиперпростор) геометријска интерпретација је даље немогућа, али се у замену за то прелази на аналитичко представљање координате вектора (v^i) у простору V_N, и на аналитичке операције са њима. Дакле, геометријске интерпретације се замењују *методама алгебре* аналитичка (геометрија) и *методом анализе* (диференцијална геометрија). Да би при овим трансформацијама вектор задржао своје физичко значење морају трансформације његових координата бити *независне* од *избора координатног система*.

Сложеније физичке величине представљају се тензором, кога дефинишимо на *основу понашања његових компоненти при трансформацији координатних система*. Да би тензор задржао и даље своје физичко значење морају му компоненте бити *независне* у односу на те трансформације. Стога, *тензорски рачун представља апарат аналитичке и диференцијалне геометрије при проучавању разних објеката које се класифицирају према понашању у односу на трансформације координата*.

D. 1.6.1. Ортогонална трансформација. — Када се Декартов правоугли триједар $Ox^1\,x^2\,x^3$, са основним векторима $\mathbf{i}_i$, заокрене око почетка O и пређе у положај $O\,\xi^1\,\xi^2\,\xi^3=O\bar{x}^1\,\bar{x}^2\,\bar{x}^3$, са основним векторима $\mathbf{i}_i{}'=\bar{\mathbf{i}}$, онда између једних и других координата постоје односи:

$$\begin{array}{c|ccc|c|l}
 & \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 & & \\
 & x^1 & x^2 & x^3 & & \\
\hline
\xi^1=\bar{x}^1 & \alpha_1{}^1 & \alpha^1{}_2 & \alpha^1{}_3 & \bar{\mathbf{i}}_1 & \bar{x}^1=\alpha_1{}^1x+\alpha_2{}^1x^2+\alpha_3{}^1x^3=\alpha_k{}^1x_h{}^k;\; \bar{x}^i=\sum\alpha_k{}^i\,x^k=\alpha_k{}^i\,x^k; \\
\xi^2=\bar{x}^2 & \alpha^2{}_1 & \alpha_2{}^2 & \alpha_3{}^2 & \bar{\mathbf{i}}_2 & \bar{x}^2=\alpha_1{}^2\,x^1+\alpha_2{}^2\,x^2+\alpha_3{}^2\,x^3=\alpha_k{}^2\,x^k;\; \{\bar{x}\}=\mathfrak{A}\{x\}; \\
\xi^3=\bar{x}^3 & \alpha_1{}^3 & \alpha_2{}^3 & \alpha_3{}^3 & \bar{\mathbf{i}}_3 & \bar{x}^3=\alpha_1{}^3\,x^1+\alpha_2{}^3\,x^2+\alpha_3{}^3\,x^3=\alpha_k{}^3\,x^k;\; \{x\}=\mathfrak{A}^{-1}\{\bar{x}\},
\end{array} \tag{1.14}$$

где је $\mathfrak{A}$ *матрица трансформације*. Она је ортогонална матрица, јер је

$$|\mathfrak{A}|=\pm 1;\;\; |\mathfrak{A}|^2=1;\;\; \mathfrak{A}^{-1}=\mathfrak{A}^T=\mathfrak{A}';\;\; \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^{-1}=\mathfrak{A}\mathfrak{A}'=\mathbf{I} \tag{1.15}$$

а њени елементи представљају косинусе смера јединичних вектора $\mathbf{i}_1$ нових оса *мерених у старом систему* (α_k^i). Када је $\det \mathfrak{A} = |\mathfrak{A}| = 1$ трансформација је *директна* и представља *ротацију*; у противном, при $|\mathfrak{A}| = -1$ трансформација је *супротна* и представља *ротацију са огледањем*. Пошто је триједар остао и даље ортогонални то се ова трансформација и назива *ортогоналном*. Код ње се не мења дужина вектора нити угао између два вектора, јер је:

$$\{\bar{\mathbf{u}}\} = \mathfrak{A}\{\mathbf{u}\};\ (\bar{\mathbf{u}})\{\bar{\mathbf{u}}\} = |\bar{\mathbf{u}}|^2 = (\mathbf{u})\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{A}\{\mathbf{u}\} = (\mathbf{u})\,\mathbf{I}\{\mathbf{u}\} = |\mathbf{u}|^2;\ |\bar{\mathbf{u}}| = |\mathbf{u}|;$$

$$\cos\theta = (\bar{\mathbf{u}})\{\bar{\mathbf{v}}\}/|\bar{\mathbf{u}}|\,|\bar{\mathbf{v}}| = (\mathbf{u})\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{A}\{\mathbf{v}\}/|\mathfrak{A}|\,|\mathbf{u}|\,|\mathfrak{A}|\,|\mathbf{v}| = (\mathbf{u})\,\mathbf{I}\{\mathbf{v}\}/|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| = \cos\varphi;\ \theta = \varphi. \tag{1.16}$$

D. 1.6.2. Афина трансформација. — Линеарна трансформација старих променљивих x^i у нове $\bar{x}^i$, тј. $(\bar{x}^i \leftarrow x^i)$, облика

$$\bar{x}^i = a_k{}^i\, x^k:\ \{\bar{x}\} = \mathbf{A}\{x\};\ \mathbf{A} = (a_k{}^i);\ a_k{}^i = \text{const.} \tag{1.17}$$

назива се *хомогена линеарна трансформација*. Матрица $\mathbf{A}$ $(a_k{}^i)$ је *матрица трансформације*. Када је $\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = |a_k{}^i| \neq 0$ трансформација је *регуларна (несингуларна)*; при $|\mathbf{A}| = 0$ она је *сингуларна*. Код прве је ранг матрице $r = N$, а код друге је $r < N$. Прва се трансформација може *окренути (инверзна трансформација)* и биће:

$$\{\bar{x}\} = \mathbf{A}\{x\};\ \{x\} = \mathbf{A}^{-1}\{\bar{x}\} = \mathbf{R}\{\bar{x}\};\ \bar{x}^i = a_k{}^i\, x^k = r_i{}^k\, \bar{x}^i, \tag{1.18}$$

где је $\mathbf{R} = \mathbf{A}^{-1}$ инверзна матрица коефицијента $r_i{}^k = K_i{}^k/|\mathbf{A}|$ једнаким кофакторима елемента $a^i{}_k$ од $\mathbf{A}$ подељеним детерминантом матрице $\mathbf{A}$, јер се, по Cramer-овом правилу, за $N = 3$, из (1.14) када се коефицијенти $\alpha_k{}^i$ замене са $a_k{}^i$ добија:

$$\bar{x}^1 = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} \bar{x}^1 & a_2{}^1 & a_3{}^1 \\ \bar{x}^2 & a_2{}^2 & a_3{}^2 \\ \bar{x}^3 & a_2{}^2 & a_3{}^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}(K_1{}^1\,\bar{x}^1 + K_2{}^1\,\bar{x}^2 + K^1{}_3\,\bar{x}^3) = r_1{}^1\,\bar{x}^1 + r^1{}_2\,\bar{x}^2 + r^1{}_3\,\bar{x}^3 = r_i{}^1\,\bar{x}^i;$$

$$x^2 = r_i{}^2\,\bar{x}^i;\ x^3 = r_i{}^3\,\bar{x}^i;\ r_i{}^1 = K_i{}^1/|\mathbf{A}|;\ r_i{}^2 = K_i^2/|\mathbf{A}|;\ r_i{}^3 = K_i^3/|\mathbf{A}| \tag{1.19}$$

Из (1.18) заменом немих индекса i са k добијају се релације:

$$\bar{x}^i = a_k{}^i\, x^k;\ x^i = r_k{}^i\,\bar{x}^k;\ r^i{}_k = \frac{K^i{}_k}{|\mathbf{A}|};\ a_k{}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k};\ r_k{}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k};\ \bar{x}^k\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k};\ x^i = \bar{x}^k\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}, \tag{1.20}$$

па се види како се *„премешта црта изнад координата“* при трансформацији, и да се *индекс* k испод разломачке црте, при парцијалном диференцирању- сматра, због конвенције о сабирању, *доњим (коваријантним) индексом*.

Афина трансформација се може схватити на два начина: 1° као несингуларно афино пресликавање *(афинитет)* простора одређеног тачкама x^i у простор одређен тачкама $\bar{x}^i$ у односу на исти координатни систем, и 2° као трансформација координата x^i једног N-тоедра у координате $\bar{x}^i$ другог N-тоедра са заједничким почетком (O).

Линеарна хомогена трансформација је специјалан случај *опште линеарне трансформације*

$$\bar{x}^i = a_k{}^i\, x^k + b^i;\ \{\bar{x}\} = \mathbf{A}\{x\} + \{b\};\ \bar{x}^i = x^i + b^i;\ \{\bar{x}\} = \{x\} + \{\mathbf{b}\};\ \mathbf{A} = \mathbf{I}, \tag{1.21}$$

где је у другом случају матрица $\mathbf{A}$ јединична матрица $\mathbf{I}$. Вектор $\{\mathbf{b}\}$ је *константа*.

Поред трансформације променљивих (x^k) могу се трансформисати и $0''$ основни (базни) вектори. Вектор $\mathbf{r}$ се може изразити у оба система као

$$\mathbf{r} = \bar{x}^i \,\bar{\mathbf{e}}_i = x^k \,\mathbf{e}_k = \mathbf{r}_i{}^k \,\bar{x}^i \,\mathbf{e}_k = \bar{x}^i \,(r_i{}^k \,\mathbf{e}_k); \;\; \bar{\mathbf{e}}_i = r_i{}^k \,\mathbf{e}_k; \;\; \bar{x}^i = a^i{}_k \,x^k, \qquad (1.22)$$

па се види да се координате x^i трансформишу *супротно* („contra“) од начина трансформисања базних вектора $\mathbf{e}_i$ те се стога и називају *контраваријантним (обичним) координатама.*

Ова трансформација има особине: 1° да се права пресликава у праву, $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{b}$; $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\,(\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{b}) = \bar{\mathbf{a}} + \lambda\,\bar{\mathbf{b}}$; 2° да се раван пресликава у раван, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}\,(\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{b} + \mu\,\mathbf{c}) = \bar{\mathbf{a}} + \lambda\,\bar{\mathbf{b}} + \mu\,\bar{\mathbf{c}}$; 3° да се паралелни вектори пресликавају у паралелне векторе, $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\,\mathbf{v} = \mathbf{A}\,(\lambda\,\mathbf{u}) = \lambda\,\bar{\mathbf{u}}$, очуваних односа дужина, $\lambda = \bar{v}^i/\bar{u}^i = v^i/u^i$; 4° дужине и углови између вектора се мењају, па се геометријски облици *деформишу* у истом односу, једнаком $f = |\mathbf{A}|$. Када је $f = |\mathbf{A}| > 0$ деформација је *позитивна (издужење — екстензија)*; при $f = |\mathbf{A}| < 0$ она је *негативна (скраћење — компресија)*.

D. 1.6.3. Општа функциона (генералисана) трансформација. — Трансформација променљивих q^i у променљиве $\bar{q}^i\,(q^k)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, није уопште узев линеарна. Функције $q^i = q^i\,(q^{-k})$ представљају инверзну трансформацију. Да би она постојала, тј. да би скупу q^i одговарао скуп величина q^{-i}, потребно је и довољно: 1° да су функције $\bar{q}^i\,(q^k)$ једнозначне, континуалне и да имају непрекидне изводе до потребног реда, и 2° да је функционална детерминанта (јакобијан) $J = |\,\partial\,\bar{q}^i/\partial\,q^k\,| = |\,\partial\,(\bar{q}^1, \ldots, \bar{q}^N)/\partial\,(q^1, \ldots, q^N)\,| \neq 0$. Код афине трансформације, према (1.20), јакобијан је $J = |\,\partial\,\bar{x}^i/\partial\,x^k\,| = |\,a_k{}^i\,| = |\,\mathbf{A}\,| \neq 0$, па је генералисана трансформација општија од афине.

Из (1.20), а аналогно и на горње зависности $\bar{q}^i\,(q^k)$ и $q^i\,(q^{-k})$, следи да су тотални диференцијали

$$\mathrm{d}\,\bar{x}^i = (\partial\,\bar{x}^i/\partial\,x^k)\,dx^k; \;\; \mathrm{d}\,x^i = (\partial\,x^i/\partial\,\bar{x}^k)\,\mathrm{d}\,\bar{x}^k; \;\; \mathrm{d}\,\bar{q}^i = (\partial\,\bar{q}^i/\partial\,q^k)\,\mathrm{d}\,q^k;$$

$$\mathrm{d}\,\bar{q}^i = (\partial\,q^i/\partial\,\bar{q}^k)\,\mathrm{d}\,\bar{q}^k, \qquad (1.23)$$

па се види да се у оба случаја *тотални диференцијали* трансформишу линеарно и хомогено, само се у првом случају коефицијенти трансформације константе, а у другом су функције криволинијских координата.

D. 1.7. Инваријанте — Величина која је дата само једним бројем или функцијом (q^i) чија се вредност при трансформацији $q^i \to \bar{q}^1$ *не мења*, $\varphi\,(q^i) = \bar{\varphi}\,(\bar{q}^i) = S$ назива се *скаларна инваријанта*, или краће *инваријанта* односно *скалар*. Функције φ и $\bar{\varphi}$ су различитог облика, али та промена не утиче на вредност функције која је инваријантна у односу на координатне трансформације (например, елемент лука, кинетичка енергија, итд). Постоје инваријанта код које се при трансформацији не мења ни аналитичка форма, па се таква инваријанта назива *апсолутном*.

Ако свакој тачки неког простора одговара одређен скалар онда се каже да скалари образују *скаларно поље*. Скалар, дакле, зависи од *положаја* (места) одговарајуће тачке простора. Међутим, он може да зависи и од *других физичких параметра* (например, времена) који одређују његова *локална својства*. Стога скалари као инваријанте играју важну улогу, јер претстављају унутрашње (природне) особине те величине (например, инваријанте момента инерције, напонска инваријанта).

D.1.8. Контраваријантни и коваријантни вектори. — Контраваријантне и коваријантне координате (компоненте) вектора увели смо из геометријског разматрања у простору E_3. Међутим, та се квалификација може извршити и према понашању координата тих вектора при трансформацији, тј. аналитичком методом. Нека тачке $A(x_a^i)$ и $B(x_b^i)$ одређују у афином простору (E_N) вектор коначног померања $\mathbf{u} = \mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ са координатама $u^i = x_b^i - x_a^i$. Афином трансформацијом координата $(\bar{x}^i \leftarrow x^i)$ добија се

$$\bar{u}^i = a_k{}^i u^k = a_k{}^i (x_b{}^k - x_a{}^k); \quad \bar{u}^i = a_k{}^i u^k = u^k \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}; \quad u^i = \bar{u}^k \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}.$$

Међутим из (1.23) види се да се диференцијал $\mathrm{d}\, q^i$ трансформише у односу на генералисану трансформацију на исти начин као и вектор коначног померања у односу на афину. Овакви системи првог реда $|u^i|$ који се, дакле, трансформишу у односу на афину трансформацију као координате вектора коначног померања односно као тотални диференцијали у односу на генералисану трансформацију, то јест по обрасцима

$$\bar{x}^i = a_k{}^i x^k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} x^k; \quad \bar{u}^i = u^k \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}; \quad u^i = \bar{u}^k \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}; \quad \bar{u}^i = u^k \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k}; \quad u^i = \bar{u}^k \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^k}, \tag{1.24}$$

одређују *контраваријантни вектор* или *контраваријантни тензор првог реда*. Видимо, дакле, да је *прототип оваквих величина вектор коначног померања односно тотални диференцијал*

Из (1.22) скаларним множењем вектором $\mathbf{v}$ добија се $(\mathbf{v}\, \bar{\mathbf{e}}_i) = r_i{}^k (\mathbf{v}\, \mathbf{e}_k)$ или $\bar{v}_i = r_i{}^k v_k = v_k (\partial x^k / \partial \bar{x}^i)$, па се коваријантне координате вектора $\mathbf{v}$ трансформишу на исти начин као и базни вектори. Извод скаларне функције $\varphi(q^i)$ која је инваријантна, по координати q^i, представља систем првог реда $v_i = \partial \varphi / \partial q^i$. При генералисаној трансформацији добија се $\bar{v}_i = \partial \bar{\varphi} / \partial \bar{q}^i = (\partial \varphi / \partial q^k) . (\partial q^k / \partial \bar{q}^i) = v_k (\partial q^k / \partial \bar{q}^i)$, јер је због инваријантности $\bar{\varphi}(\bar{q}^i) = \varphi(q^i)$. Види се да је ова трансформација друкчија од (1.24). Величине v_i које се трансформишу у односу на афину трансформацију као базни вектори, а у односу на генералисану као парцијални изводи скаларне инваријанте, тј. по обрасцима:

$$\bar{v}_i = r_i{}^k v_k \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}; \quad v_i = \bar{v}_k \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}; \quad \bar{v}_i = v_k \frac{\partial q^k}{\partial \bar{q}^i}; \quad v_i = \bar{v}_k \frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^i} \tag{1.25}$$

одређују *коваријантни вектор* или *коваријантни тензор првог реда*. Пошто се трансформише *сагласно основним векторима* то се назива коваријантни (код латинске речи „co“); међутим контраваријантни се трансформише *супротно*, па се назива контраваријантним (по речи „contra“).

Линеарна хомогена форма одређује коваријантни вектор, јер је према (1.18),

$$\mathfrak{L} = a_k x^k = S; \ \mathfrak{L} = a_k x^k = a_k r_i{}^k \bar{x}^i = \bar{\mathfrak{L}} = \bar{a}_i \bar{x}^i = S; \ \bar{a}_i = r_i{}^k a_k.$$

Вектор $\mathbf{v}$ чије су координате парцијални изводи скаларне функције $\partial \varphi / \partial q^i$ градијент је те скаларне фуикције, $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$, па се *коваријантни вектор* (v_i) *трансформише као градијент скаларне функције*.

D.1.9. Тензори. — С обзиром на број и варијантност индекса системи са два или више индекса иазивају се тензори. Под тај појам подвукли смо и скаларе и векторе: први су тензори нултог реда, а други првог реда. У техничкој пракси највише се употребљавају тензори другог реда.

а) *Тензори другог реда.* — Систем другог реда од N^2 компонената образован помоћу *тензорског (дијадског) производа вектора* назива се тензор *другог реда*, облика

$$\{\mathbf{u}\}(\mathbf{v})=\{\mathbf{uv}\}=\mathbf{uv};\ w^{ik}=\{u^i\}(v^k)=u^i v^k;\ w_{ik}=u_i v_k;\ w_k{}^i=u^i v_k \tag{1.26}$$

ако се при трансформацији координата x^i (или q^i) трансформишу аналогно трансформацијама вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ (обр. 1.24 и 1.25) по следећим обрасцима:

$$\text{a)}\ \bar{w}^{ik}=a_m{}^i a_n{}^k w^{mn};\ \bar{w}^{ik}=w^{mn}\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^m}\frac{\partial\bar{q}^k}{\partial q^n};\ w^{mn}=u^m v^n; \tag{1.27.a}$$

$$\text{b)}\ \bar{w}_{ik}=r_i{}^m r_k{}^n w_{mn};\ \bar{w}_{ik}=w_{mn}\frac{\partial q^m}{\partial\bar{q}^i}\frac{\partial q^n}{\partial\bar{q}^k};\ w_{mn}=u_m v_n; \tag{1.27.b}$$

$$\text{c)}\ \bar{w}_k{}^i=a_m{}^i r_k{}^n w_n{}^m;\ \bar{w}_k{}^i=w_n{}^m\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^m}\frac{\partial q^n}{\partial\bar{q}^k};\ w_u{}^m=u^m v_u. \tag{1.27.c}$$

Први тензор (w^{ik}) је *двапут контраваријантан;* други (w_{ik}) *двапут коваријантан*, а трећи ($w_k{}^i$) је *мешовит*, једанпут контра- и једанпут ко-варијантан. Тензор другог реда може се добити и помоћу билинеарне форме $\mathfrak{B}=a_{ik}u^i v^k=S$, јер се коефицијенти a_{ik} трасформишу као коваријантни тензори другог реда, $\bar{S}=\bar{a}_{ik}\bar{u}^i\bar{v}^k=S;\ \bar{a}_{ik}=a_{mu}(\partial q^m\,\partial\bar{q}^i)(\partial q^n/\partial\bar{q}^k)$.
Симетрични тензор $w^{(ik)}=w^{ik}=w^{ki}$ и кососиметрични тензор другог реда $w^{(ik)}=w^{ik}=-w^{ki}$ задржавају особину симетрије и при трансформацији. Мешовити тензор $w_k{}^i$ задржава симетрију при афиној трансформацији али не и при генералисаној. Тензори који се не мењају при пермутацији индекса називају се *изомери* $w^{ik}=w^{ki};\ w_{ik}=w_{ki}$.

Тензор другог реда може се разложити на два сабирка: симетрични и кососиметрични део, те је $u^{ik}=u^{(ik)}+u^{[ik]}$, $v_{ik}=v_{(ik)}+v_{[ik]}$, па су

$$u^{(ik)}=\frac{1}{2}(u^{ik}+u^{ki});\qquad v_{(ik)}=\frac{1}{2}(v_{ik}+v_{ki});$$
$$u^{[ik]}=\frac{1}{2}(u^{ik}-u^{ki});\qquad v_{[ik]}=\frac{1}{2}(v_{ik}=v_{ki}). \tag{1.28}$$

Изводи вектора u^i по коодинатама чине мешовити систем другог реда па је

$$\bar{t}_i{}^k=\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial\bar{x}^k}=\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^k}=\frac{\partial}{\partial x^p}(a_j{}^i x^j)\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^k}=a_j{}^i r_k{}^p\frac{\partial u^j}{\partial x^p}=a_j{}^i r_k{}^p t_p{}^j; \tag{1.29.a}$$

$$\bar{t}_k{}^i=\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial\bar{q}^k}=\frac{\partial}{\partial\bar{q}^k}\left(u^j\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^j}\right)=\frac{\partial u^j}{\partial q^p}\frac{\partial q^p}{\partial q^k}\frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^j}+u^j\frac{\partial^2\bar{q}^i}{\partial q^j\,\partial q^p}\frac{\partial q^p}{\partial\bar{q}^k}=(t_k{}^i)'+(t_k{}^i)'', \tag{1.29.b}$$

па у првом случају представља тензор, а у другом не, јер постоји допунски члан $(\bar{t}_k{}^i)''$.

Kroonecker-ов *делта симбол* $\delta_k^{\,i}$ је мешовити тензор другог реда, јер се при трансформацији понаша као тензор

$$\bar{\delta}_k{}^i = a_m{}^i\, r_k{}^n\, \delta_n{}^m = a_n{}^i\, r_k{}^n = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n}\cdot\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^k} = \delta_k{}^i;\; \delta_k{}^i = \bar{\delta}_n{}^m\cdot\frac{\delta \bar{q}^i}{\partial q^m}\,\frac{\partial q^n}{\partial \bar{q}^k} = \frac{\partial \bar{q}^i}{\delta q^n}\,\frac{\partial q^n}{\partial \bar{q}^k} = \delta^{ki}. \tag{1.30}$$

Он је *јединични тензор*, јер се при композицији понаша као јединица при множењу, па је заиста супституциони оператор. Он је метрички тензор за правоугле координате (1.13).

Тензор $p_k^{\,j} = \lambda\delta_k^{\,i}$ зове се *сферни* или *изотропни тензор*, јер му компоненте задржавају вредности у свим координатним системима, пошто је $\bar{p}_k{}^i = \lambda\delta_k{}^i = p_k{}^i$.

b) *Тензори вишег реда.* — Свака величина одређена у V_N простору са N^{m+n} компонената атрансформише се по обрасцу

$$\bar{u}^{i_1\ldots i_m}_{k_1\ldots k_n} = u^{r_1\ldots r_m}_{s_1\ldots s_n}\left(\frac{\partial \bar{q}^{i_1}}{\partial q^{r_1}}\cdots\frac{\partial \bar{q}^{i_m}}{\partial q^{r_m}}\right)\left(\frac{\partial q^{s_1}}{\partial \bar{q}^{k_1}}\cdots\frac{\partial q^{s_n}_s}{\partial \bar{q}^{k_n}}\right) \tag{1.31}$$

тензор је $m+n$-ов реда, m-пута контраваријантан и n-пута коваријантан.

Например, тензори трећег и четвртог реда су:

$$\bar{u}^{ijk} = u^{rst} a_r{}^i a_s{}^j a_t{}^k;\; u^{ijk} = u^{rst}\,\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q_s}\,\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^s}\,\frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^t};\quad \bar{u}_k{}^{ij} = u_p{}^{mn}\, a_m{}^i\, a_n{}^j\, r_k{}^p;$$

$$\bar{u}_{ijkl} = u_{mnps}\, r_i{}^m r_j{}^n r_k{}^p r_l{}^s;\; \bar{u}^{ijkl} = u^{mnps}\,\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^m}\,\frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^n}\,\frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^p}\,\frac{\partial \bar{q}^l}{\partial q^s}.$$

c) *Афинори и ортогонални тензори.* — Систем који се јавља као тензор у односу на генералисану трансформацију биће такав и у односу на афину и ортогоналну трансформацију, пошто су ове специјални случајеви прве трансформације. Међутим, обратно не стоји као што је показано за извод вектора (1.29). Системи који се тензорски понашају само у односу на афине трансформације зову се *афини тензори* или *афинори*, а они који се тензорски понашају само у односу на ортогоналне трансформације јесу *картезијански* или *ортогонални тензори*.

Са афинорима и ортогоналним тензорима оперише се као са матрицама. Тако су:

$$\{\bar{x}\} = \mathbf{A}\,\{x\};\; \bar{x}^i = a_k{}^i\, x^k;\; \{\bar{u}\} = \mathbf{A}\,\{u\};\; \{u\} = \mathbf{A}^{-1}\,\{\bar{u}\} = \mathbf{R}\,\{\bar{u}\};\; u^i = r_k{}^i\,\bar{u}^i; \tag{1.32}$$

$$\{\bar{x}\} = \mathfrak{A}\,\{x\};\; \bar{x}^i = \alpha_k{}^i\, x^k;\; \mathfrak{A} = (\alpha_k{}^i);\; \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}'\,(\alpha_i{}^k);\; \{\bar{u}\} = \mathfrak{A}\,\{u\};\; \{u\} = \mathfrak{A}'\{\bar{u}\}.$$

Када се ради са афинорима другог реда могу се користити *дијаде*. Координатна дијада је $\mathfrak{D}_{ik} = \{i_i\}\,(i_k) = \mathbf{i}_i\,\mathbf{i}_k$, па је јединични афинор $\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{I} = \mathfrak{D}_{ii}$ једнак збиру трију координатних дијада. Стога се афинор може претставити као збир *девет* дијада, $\hat{\mathbf{T}} = \{u\}\,(v) = u_i\, v_k\, \{\mathbf{i}_i\}\,(\mathbf{i}_k) = u_i v_k\, \mathfrak{D}_{ik} = t_{ik}\, \mathfrak{D}_{ik}$.

Скаларни производ афинора са вектором је вектор; производ „*здесна*" је вектор колона, а „*слева*" вектор врста. Производ дијаде векторски је опет дијада, а производ тензора векторски вектором је тензор. Композиција (скаларни производ) два афинора није комутативна. Наведене релације изгледају овако:

$$\mathbf{T}\{w\}=\{u\}(v)\{w\}=t_{ik}w^k\,\mathbf{i}_i=a^i\,\mathbf{i}_i=\{a\};\ (w)\,\mathbf{T}=(b);$$
$$[\mathfrak{D}_{ab}\times\mathbf{c}]=\{a\}(b)\times(c)=\{a\}[\mathbf{bc}];\ \{c\}\times\{a\}(b)=\{[\mathbf{ca}]\}(b);\tag{1.33}$$
$$\mathbf{P}=\mathbf{T}\times\mathbf{w}=\{\mathbf{u}\}(\mathbf{v})\times(\mathbf{w})=\{u\}([\mathbf{v}\,\mathbf{w}])=e^{rjk}t_{ij}w_k\mathfrak{D}_{ir};\ p_{ir}=e^{rjk}t_{ij}w_k;$$
$$\mathbf{Q}=\mathbf{w}\times\mathbf{T}=\{\mathbf{w}\}\times\{\mathbf{u}\}(\mathbf{v})=\{[\mathbf{w}\,\mathbf{u}]\}(\mathbf{v})=e^{rki}t_{ij}w_k\mathfrak{D}_{rj};\ g_{rj}=e^{rkj}t_{ij}w_k;$$
$$\mathbf{A}(a_k{}^i);\ \mathbf{B}(b_k{}^i);\ \mathbf{P}=\mathbf{AB}=(a_j{}^i b_k{}^j)\neq\mathbf{Q}=\mathbf{BA}=(b_j{}^i a_k{}^j).$$

D.1.10. Критеријум за одређивање тензорске природе система. — Утврђивање тензорске природе најбоље се врши *помоћу трансформација*. Нека се композицијом два система првог реда u^i и v_i добије скаларна инваријанта $S=u^i v_i$ и нека се зна да је $u_k{}^i$ контраваријантни вектор, онда следи $S=u^k v_k=\bar{S}=\bar{u}^i\bar{v}_i=u^k(\partial\bar{q}^i/\partial q^k)\bar{v}_i$, па је $v_k=\bar{v}_i(\partial\bar{q}^i/\partial q^k)$, те се вектор $\mathbf{v}$ трансформише као коваријантни вектор. Ако је u^{ij} контраваријантни тензор другог реда, а w_{ijk} систем трећег реда па се композицијом добија коваријантни вектор $\mathbf{v}$, $(w_{ijk}u^{ij}=v_k)$, онда систем w_{ijk} мора бити трипут коваријантни тензор, јер се трансформацијом добија:

$$\bar{w}_{ijk}\bar{u}^{ij}=\bar{v}_k;\ w_{mnr}u^{mn}(\partial q^m/\partial\bar{q}^i)(\partial q^n/\partial\bar{q}^j)(\partial q^r/\partial\bar{q}^k)(\partial\bar{q}^i/\partial q^m)(\partial\bar{q}^j/\partial q^n)=$$
$$=v_r(\partial q^r/\partial\bar{q}^k);\ w_{mnr}u^{mn}=v_r\,.$$

Тензорска природа може се оценити и помоћу „*правила количника*" („quotient rule"). Ако се композицијом може да оствари скаларна инваријанта (например, производ двају вектора супротне варијантности) онда су елементи те композиције тензори, у противном нису. На пример, када се композицијом система трећег реда t_{ijk} са векторима $u^i v_j w^k$ добије скаларна инваријанта $t_{ijk}u^i v_j w^k=\varphi=S$, онда је $t_{ijk}r_j{}^{ik}=S$, па је систем $t_{ik}{}^j$ мешовити тензор трећег реда, двапут коваријантан и једанпут контраваријантан.

D.1.11. Релативни тензори. — Општији системи од тензора јесу *релативни тензори* који се трансформишу по закону

$$\bar{t}^{\,i_1\ldots i_r}_{k_1\ldots k_s}=J^T\left(\frac{\partial\bar{q}^{i_1}}{\partial q^{m_1}}\cdots\frac{\partial\bar{q}^{i_r}}{\partial q^{m_s}}\right)\left(\frac{\partial q^{k_1}}{\partial\bar{q}^{n_1}}\cdots\frac{\partial q^{k_s}}{\partial\bar{q}^{n_s}}\right)t^{m_1\ldots m_r}_{n_1\ldots n_s};\ J=\left|\frac{\partial q^s}{\partial\bar{q}^n}\right|.\tag{1.34}$$

где је J јакобијан трансформације старих координата у нове $(q^s\to\bar{q}^n)$, а његов експонент T је *тежина*. — Овакви се тензори називају и *pseudo-тензори*. Када је $T=0$, тј. $J^\circ=|\partial q^s/\partial\bar{q}^n|^\circ=1$, тензор је *апсолутни*. Тензори тежине $T=1$ зову се *тензорске густине*, а када је $T=-1$ онда су *тензорски капацитети*. *Релативни вектор* (*псеудовектор*) је ралативни тензор првог реда, а *псеудоскалар* је релативни тензор нултог реда. Символи e^{ijk} и e_{ijk} су релативни тензори, и то први тензорска густина $(T=1)$, а други тензорски капацитет). Помоћу ових тензора може се у V_3 дефинисати *векторски* (*спољашњи*) *производ двају вектора* исте варијантности као трећи вектор супротне варијантности, те је

$$\mathbf{w}=w^i\,\mathbf{i}_i=u_j v_k[\mathbf{i}^j\mathbf{i}^k]=e^{ijk}u_j v_k\,\mathbf{i}_i;\ w^i=e^{ijk}u_j v_k;\ w_i=e_{ijk}u^j v^k.\tag{1.35}$$

Пошто су e-системи релативни тензори то су ови вектори (w^i и w_i) релативии вектори и зову се *аксијални вектори*. Напротив, вектор померања је *поларни вектор* и он је апсолутни.

Делта-симбол је напротив апсолутни тензор. *Генералисани делта*-симбол се дефинише изразом, $e^{ijk}\, e_{rst} = \delta^{ijk}$. Пошто су e-симболи тежина 1 и -1, то је, $J^T J^{T'} = J\, J^{-1} = J^{(1-1)} = J^{\circ} = 1$, па је δ симбол заиста апсолутни тензор што се може утврдити и трансформацијом. Пошто је $\delta_t{}^k\, e^{ijk} \cdot e_{rst} = \delta_t{}^k\, \delta^{ijk}_{rst} = \delta^{ij}_{rs}$ који се такође трансформише као тензор. Даљом композицијом индекса j и s добија се обични делта-симбол $\delta_r{}^i$, па је и он апсолутни тензор.

D. 1.12. Основни метрички тензор. — Обрасцем (1.13) дефинисана је метричка форма као хомогена квадратна форма у односу на Декартове правоугле и афине координате. Овај се појам проширује. Увођењем генералисаних координата (q^i) биће Декартове $x^i = x^i(q^k)$ и обратно $q^i = q^i(x^k)$, па је вектор положаја тачке $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^i) = \mathbf{r}(q^i)$, те је

$$\mathrm{d}x^j = (\partial x^j/\partial q^i)\,\mathrm{d}q^i;\ \mathrm{d}\mathbf{r} = (\partial \mathbf{r}/\partial q^i)\,\mathrm{d}q^i;\ \mathbf{g}_i = \partial \mathbf{r}/\partial q^i;\ g_i = (\partial x_i^j/\partial q^i), \qquad (1.36)$$

где је $\mathbf{g}_i$ *основни (координатни) вектор* система генералисаних координата који није јединични вектор али пада у правац тангенте на координатну линију генералисаног система у тој тачки, $\mathbf{g}_i = (\partial \mathbf{r}/\partial q^i)\,\mathbf{t}_i$; вектор $\mathbf{t}_i$ је *јединични вектор тангенте* те координатне линије. Ови вектори, пошто су функције положаја тачке $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_i(M)$, образују *векторско поље*.

Метричка форма биће

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_j (\partial x^j/\partial q^i)(\partial x^j/\partial q^k)\,\mathrm{d}q^i\,\mathrm{d}q^k = (\mathrm{d}\mathbf{r}, \mathrm{d}\mathbf{r}) = (\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_k)\,\mathrm{d}q^i\,\mathrm{d}q^k = g_{ik}\,\mathrm{d}q^i\,\mathrm{d}q^k, \quad (1.37)$$

где су g_{ik} *коефицијенти метричке форме*

$$g_{ik} = g_{ki} = (\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_k) = (\mathbf{g}_k\,\mathbf{g}_i) = \sum_j (\partial x^j/\partial q^i)(\partial x^j/\partial q^k);\ j = 1, 2, \ldots, N. \qquad (1.37)$$

Пошто је метричка форма ($\mathrm{d}s^2$) инваријантна у свим координатним системима то су g_{ik} компоненте двоструког симетричног коваријантног тензора другог реда који се назива *основни (фундаментални) метрички тензор* или кратко *метрички тензор*. Овом тензору одговара симетрична квадратна матрица $\mathbf{G}$ и симетрична детерминанта $|\mathbf{G}| = \det \mathbf{G} = |g_{ik}| = g$. У простору V_3 биће

$$\begin{array}{c|ccc} (\cdot) & \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \\ \hline \mathbf{g}_1 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ \mathbf{g}_2 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ \mathbf{g}_3 & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{array} \quad |\mathbf{G}| = g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = |g_{ik}| = \left|\frac{\partial x^i}{\partial q^k}\right|^2 = J^2 = g_{ik}\,K^{ik} \qquad T = 2. \quad (1.38)$$

$$J = \sqrt{|g_{ik}|} = \sqrt{g}$$

Пошто су $\mathbf{g}_i(M)$ и $\mathbf{g}_k(M)$ функције положаја то је и $g_{ik} = (\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_k) = g_{ik}(M)$, па метрички тензор g_{ik} образује *тензорско поље*.

Нови симетрични тензор $g^{ik} = (\mathbf{g}^i\,\mathbf{g}^k)$ формиран на овај начин

$$g^{ik} = g^{ki} = K^{ik}/|\mathbf{G}|;\ K^{ik} = g\,g^{ik};\ (g^{ik}) = \mathbf{G}^* = \mathbf{G}^{-1};\ |g^{ik}| = 1/|\mathbf{G}| =$$
$$= |\partial q^i/\partial x^k| = J^{-2} \qquad (1.39)$$

назива се *основни контраваријантни тензор*. Он је симетричан тензор другог реда, чија је матрица $\mathbf{G}^*$ реципрочна матрица метричког тензора g_{ik}.

Ови се тензори трансформишу на овај начин:

$$\bar{g}_{ik}=g_{mn}(\partial q^m/\partial \bar{q}^i)(\partial q^n/\partial \bar{q}^k);\ \bar{g}^{ik}=g^{mn}(\partial \bar{q}^i/\partial q^m)(\partial \bar{q}^k/\partial q^n);$$
$$\bar{g}_k{}^i=g_n{}^m(\partial \bar{q}^i/\partial q^m)(\partial q^n/\partial \bar{q}^k)=\delta_k{}^i, \tag{1.40}$$

па је мешовити метрички тензор $g_k{}^i=(\mathbf{g}^i\,\mathbf{g}_k)$ генерализација δ-симбола.

D. 1.13. Здруживање тензора. — За разлику од афиног простора у метричком простору могу се тензори различитог типа сводити једини на друге помоћу композиције са основним метричким тензорима g_{ik} и g^{ik}. Овакви се тензори називају *здружени*, јер су један из другог постали композицијом са основним тензорима. Уствари, ово здруживање представља „*правило о подизању и спуштању индекса*“.

Код *вектора* ово се врши на овај начин:

$$g_{ik}\,u^k=u_i;\ g^{ik}\,v_k=v^i;$$

$$\bar{u}_i=u_m\frac{\partial q^m}{\partial \bar{q}^i}=\bar{g}_{ik}\,\bar{u}^k=g_{mn}\,u^j\frac{\partial q^m}{\partial \bar{q}^i}\frac{\partial q^n}{\partial \bar{q}^k}\frac{\partial \bar{q}^k}{\partial q^j}=g_{mn}\,u^j\frac{\partial q^m}{\partial \bar{q}^i}\delta_j{}^n=g_{mn}\,u^n\frac{\partial g^m}{\partial \bar{q}^i}, \tag{1.41}$$

па се помоћу коваријантног тензора g_{ik} „*индекс спушта*“, а помоћу контраваријантног тензора g^{ik} „*индекс се подиже*“. Вектор u_i здружен је вектору u^k помоћу тензора g_{ik}, и обратно, вектор v^i је здружен вектору v_k помоћу g^{ik}. Здружени вектори су реципрочни, јер се множењем u_i са g^{ji} добија $g^{ji}\,u_i=g^{ji}\,g_{ik}\,u^k=g_k{}^j\,u^k=\delta_k{}^j\,u^k=u^j$.

Скаларни производ два вектора и квадрат интензитета вектора су

$$(\mathbf{u}\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=|\,\mathbf{u}\,|\,\mathbf{v}\,|\cos\varphi=u^i\,v^k\,(\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_k)=g_{ik}\,u^i\,v^k=u^i\,v_i;\ \ |\,u\,|^2=u^i\,u_i=g_{ik}\,u^i\,u_k{}^k. \tag{1.42}$$

Код *тензора* са g_{ik} односно g^{ik} спушта се односно подиже *један* индекс; за подизање два индекса мора се множити са два основна тензора. Место индекса који се подиже или спушта обележава се *тачком*. Тако ће бити:

$$g^{ik}\,u_{kj}=u^i{}_{.j};\ g^{ik}\,u_{jk}=u_{j.}{}^i;\ u^i{}_{.j}\neq u_{j.}{}^i;\ g^{ij}\,g_{jk}=g_k{}^i=\delta_k{}^i;\ g_{ir}\,t_{jk}{}^i=t_{rjk};$$
$$g^{rk}\,t_{jk}{}^i=t_{j.}{}^{ir};\ g^{im}\,g^{jn}\,u_{mn}\,u^{ij};\ g_{ik}\,g_{jn}\,u^{mn}=u_{ij};\ g_{ir}\,g_{js}\,g_{kt}\,u^{rst}=u_{ijk}. \tag{1.43}$$

D. 1.14. Алтенатори. — Из (1.38) следи да је Јакобијан $J=|\,\partial x^i/\partial q^k\,|=\sqrt{|\,\mathbf{G}\,|}=\sqrt{|\,g_{ik}\,|}=\sqrt{g}$, па се дефинишу Ricci-јеви *тензори* или *алтернатори* као апсолутни тензори облика:

$$\varepsilon_{ijk}=J\,e_{ijk}=e_{ijk}\sqrt{g};\ \varepsilon^{ijk}=J^*\,e^{ijk}=e^{ijk}/\sqrt{g};\ g=|\,\mathbf{G}\,|=|\,g_{ik}\,|=J^2. \tag{1.44}$$

Помоћу алтернатора дефинише се спољашњи (векторски) производ два вектора:

$$\mathbf{c}=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}];\ c_i\,\mathbf{g}^i=a^j\,b^k\,[\mathbf{g}_j\,\mathbf{g}_k]=\varepsilon_{ijk}\,a^j\,b^k\,\mathbf{g}^i;\ c_i=\varepsilon_{ijk}\,a^j\,b^k;\ c^i=\varepsilon^{ijk}\,a_j\,b_k, \tag{1.45}$$

па су

$$[\mathbf{g}_j\,\mathbf{g}_k]=\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{g}^i=e_{ijk}\sqrt{g}\,e_{ijk}\,\mathbf{g}^i;\ [\mathbf{g}^j\,\mathbf{g}^k]=\varepsilon^{ijk}\,\mathbf{g}_i=e^{ijk}\,\mathbf{g}_i/\sqrt{g}; \tag{1.46}$$

D.1.15. Физичке координате тензора. — Контраваријантне и коваријантне координате неког вектора јесу скаларни производи тог вектора са основним (базним) векторима. Ове координате не морају, уопште узев, имати исту физичку димензију (јединицу) као вектор. А да би се задржала и даље природна величина вектора уводи се и трећа врста координата, тзв. *физичка или природна координата*. Она је уствари ортогонална пројекција тог вектора ($\mathbf{v}$) на правац основног вектора, тј. *она је скаларни производ вектора и јединичног вектора правца дотичног основног вектора*. Према томе су координате вектора:

$$v^i = (\mathbf{v}\,\mathbf{g}^i);\ v_k = (\mathbf{v}\,\mathbf{g}_k) = g_{ik}\,v^i;\ v_{(p)} = (\mathbf{v}\,\mathbf{t}_{(p)}) = (\mathbf{v}\,\mathbf{g}_{(p)})/|\mathbf{g}_{(p)}| = \mathbf{v}_p/\sqrt{g_{(p\,p)}} = g_{ik}\,\mathbf{v}^k\,t_{(p)}^{\ i} \quad (1.47)$$

Овде је $\mathbf{g}_{(p)}$ основни вектор правца (p), а $\sqrt{g_{(pp)}}$ је његов интензитет.

Аналогно предњем, физичка компонента тензора на *два управна правца* биће

$$w_{(p)(r)} = g_{im}\,u^m\,t_{(r)}^{\ i}\,g_{kn}\,v^n\,t_{(s)}^{\ k} = u_i\,v_{(r)}^{\ i}\,t_{(r)}^{\ i}\,t_{(s)}^{\ k} = w_{ik}/\sqrt{g_{(rr)}}\sqrt{g_{(ss)}}. \quad (1.48)$$

D. 1.16. Christoffel-ови симболи. — Извод основног вектора је $\partial \mathbf{g}_i/\partial q^k = \partial[\partial \mathbf{r}/\partial q^i]/\partial q^k = \partial[\partial \mathbf{r}/\partial q^k]/\partial q^i = \partial \mathbf{g}_k/\partial q^i$, где се индекс испод разломачке црте при диференцирању сматра „*доњим*“ (коваријантним). С обзиром на предње биће извод $\partial(\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k)/\partial q^i = \partial \mathbf{g}_{jk}/\partial q^i = (\partial \mathbf{g}_j/\partial q^i,\ \mathbf{g}_k) + (\mathbf{g}_j,\ \partial \mathbf{g}_k/\partial q^i)$, $\partial(\mathbf{g}_k\,\mathbf{g}_i)/\partial q^j = \partial q_{ki}/\partial q^j = (\partial \mathbf{g}_k/\partial q^j,\ \mathbf{g}_i) + (\mathbf{g}_k,\ \partial \mathbf{g}_i/\partial q^j)$; $\partial(\mathbf{g}_i\,\mathbf{g}_j)/\partial q^k = (\partial \mathbf{g}_i/\partial q^k, \mathbf{g}_j) + (\mathbf{g}_i,\ \partial \mathbf{g}_j/\partial q^k) = \partial \mathbf{g}_{ij}/\partial q^k$. Релација $(\partial \mathbf{g}_{jk}/\partial q^i) + (\partial g_{ki}/\partial q^j) - (\partial g_{ij}/\partial q^k)$ због горе наведене пермутационе особине, може да се напише у облику:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q^j}\,\mathbf{g}_k\right) = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^i\,\partial q^j},\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right] = [i\,j,\,k] = \Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k} \quad (1.49)$$

који се зове Chistoffel-ов *симбол прве врсте* („*средња* Chistoffel-ова *заграда*“). Овај је симбол симетричан у односу на леве индексе.

Chrtstoffelov-ов симбол друге врсте („велика Christoffel-ова заграда“) дефинише се на овај начин

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^i\,\partial q^j} = \left\{\begin{matrix} k \\ ij \end{matrix}\right\}\mathbf{g}_k = \Gamma_{ij}^k\,\mathbf{g}_k;$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q^j}\,\mathbf{g}_l\right) = \Gamma_{ij,l} = \Gamma_{ij}^k(\mathbf{g}_k\,\mathbf{g}_l) = g_{kl}\,\Gamma_{ij}^k$$

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k = g^{kl}\,\Gamma_{ij,l}, \quad (1.50)$$

јер је $g^{kl}\,g_{kl} = 1$.

Нека су $M_0(q^i)$ и $M_1(q^i + \mathrm{d}q^i)$ две оближње тачке на кривој $q^i = q^i(t)$, где је $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Нека је вектор $\mathbf{u}$ променљив али да не зависи експлицитно од параметра t, $u^i = u^i[x^i(t)]$, оида је услов његовог *паралелног померања* из тачке M_0 у тачку M_1 те криве.

$$\mathrm{d}\mathbf{u} = \mathrm{d}(u^i\,\mathbf{g}_i) = \mathrm{d}\,u^i\,\mathbf{g}_i + u^i(\partial \mathbf{g}_i/\partial q^j)\,\mathrm{d}\,q^2 = (\mathrm{d}\,u^k + u^i\,\Gamma_{ij}^{\ \ k}\,\mathrm{d}\,q^j)\,\mathbf{g}_k = 0;$$

$$\mathrm{d}\,u^k = -\Gamma_{ij}^{\ \ k}\,u^i\,\mathrm{d}\,q^j, \quad (1.51)$$

пошто су основни вектори $\mathbf{g}_k$ независни. Коефицијенти Γ^k_{ij} повезују паралелне векторе у тачкама криве па се називају и *коефицијенти повезаности*. Пошто се у афином простору вектори могу паралелно преносити из једне тачке у другу то су коефицијенти повезаности једнаки нули.

D. 1.17. Коваријантно диференцирање тензора — Нека је дат контраваријантни *вектор* $\mathbf{u}=u^i\,\mathbf{g}_i$ онда је његов извод по координати q^k:

$$\frac{\partial\,(u^i\,\mathbf{g}_i)}{\partial q^k}=\frac{\partial u^i}{\partial q^k}\,\mathbf{g}_i+u^i\,\frac{\partial\,\mathbf{g}_i}{\partial q^k}=\left(\frac{\partial u^i}{\partial q^k}+u^j\,\Gamma^i_{jk}\right)\mathbf{g}_i=u^i|_k\,\mathbf{g}_i;$$

$$u^i|_k=\nabla_k\,u^i=u^i_{jk}=\frac{\partial u^i}{\partial q^k}+u^j\,\Gamma^i_{jk}. \tag{1.52}$$

Израз $u^i|_k$ назива се се *коваријантни извод контраваријантног вектора* u^i по координати q^k у односу на основни тензор g_{ik}.

За *коваријантни* вектор $\mathbf{v}=v_i\,\mathbf{g}^i$ биће:

$$\frac{\partial\,(v_i\,\mathbf{g}^i)}{\partial q^k}=\frac{\partial v_i}{\partial q^k}\,\mathbf{g}^i+v_i\,\frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial q^k}=\frac{\partial v_i}{\partial q^k}\,\mathbf{g}^i-v_i\,\Gamma^i_{jk}\,\mathbf{g}^j=\left(\frac{\partial v_i}{\partial q^k}-v_j\,\Gamma^j_{ik}\right)\mathbf{g}^i=v_{i\,|\,k}\,\mathbf{g}^i;$$

$$v_{i\,|\,k}=\nabla_k\,v_i=\frac{\partial v_i}{\partial q^k}-v_j\,\Gamma^j_{ik}, \tag{1.53}$$

јер је

$$\frac{\partial}{\partial q^k}\,(\mathbf{g}^j\,\mathbf{g}_i)=\frac{\partial}{\partial q^k}\,\delta^j{}_i=0;\ \left(\frac{\partial\,\mathbf{g}^j}{\partial q^k}\,\mathbf{g}_i\right)=-\left(\mathbf{g}^j\,\frac{\partial\,\mathbf{g}_i}{\partial q^k}\right)=-(\mathbf{g}^j\,\mathbf{g}_m)\,\Gamma^m_{ik}=-\delta^j{}_m\,\Gamma^j_{ik};$$

$$\frac{\partial\,\mathbf{g}^j}{\partial q^k}=-\Gamma^j_{ik}\,\mathbf{g}^i.$$

где је $v_{i|k}$ коваријантни извод коваријантног вектора v_i по координати q^k.

Оба извода су тензори другог реда, па се коваријантним диференцирањем повишава ред тензора за један. Извод $u^i|_k$ је мешовити тензор другог реда, а док је $v_{i|k}$ коваријантни тензор другог реда. *Коваријантно диференцирање може се изводити само у метричком простору.*

За коваријантно диференцирање важе правила као и за обична диференцирања. Нека је контраваријантни тензор $w^{ij}=u^i\,v^j$ онда је извод

$$w^{ij}|_k=v^j\,(u^i|_k)+u^i\,(v^j|_k)=v^j\,[(\partial\,u^i/\partial\,q^k)+u^m\,\Gamma^i_{mk}]+u^i\,[(\partial\,v^j/\partial\,q^k]+v^m\,\Gamma^j_{mk}].$$

Први и трећи члан дају извод $\partial\,u^i\,v^j\,\partial\,q^k$. На овај начин добијају следећи изводи:

$$u^{ij}|_k=\nabla_k\,u^{ij}=(\partial\,u^{ij}/\partial\,q^k)+u^{mj}\,\Gamma^i_{mk}+u^{im}\,\Gamma^j_{mk}, \tag{1.54.a}$$

$$v_{ij|k}=\nabla_k\,v_{ij}=(\partial\,v_{ij}/\partial\,q^k)-v_{mj}\,\Gamma^m_{ik}-v_{im}\,\Gamma^m_{jk}; \tag{1.54.b}$$

$$w_{j|k}=\nabla_k\,w_i^j=(\partial\,w_j/\partial\,q^k)+w^m{}_j\,\Gamma^i_{mk}-w^i{}_m\,\Gamma^m_{jk}\cdot \quad \text{и} \tag{1.54.c}$$

Коваријантни извод компоненте метричког тензора једнак је нули (тзв. *Ricci-јева шеорема*)

$$g^{ij}{}_{|k}=0;\ g_{ij|k}=0;\ g^{i}{}_{j|k}=0. \tag{1.55}$$

Изводи вишег реда добијају се поновним коваријантним диференцирањем па важе релације:

$$u_{i|jk}=\nabla_j \nabla_k u_i=\frac{\partial u_{i|j}}{\partial q^k}-u_{m|j}\,\Gamma^m_{ik}-u_{i|m}\,\Gamma^m_{jk}=\frac{\partial^2 u_i}{\partial q^j\,\partial q^k}-\frac{\partial u_m}{\partial q^j}\,\Gamma^m_{ik}-\frac{\partial u_m}{\partial q^k}\,\Gamma^m_{ij}-$$

$$-\frac{\partial u_i}{\partial q^m}\,\Gamma^m_{jk}-u_m\,\frac{\partial}{\partial q^k}\Gamma^m_{ij}+u_n\left[\Gamma^m_{ik}\,\Gamma^n_{mj}+\Gamma^m_{jk}\,\Gamma^n_{im}\right]; \tag{1.56.a}$$

$$u_{ij|\Gamma s}=\nabla_s \nabla_\Gamma u_{ij}=\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial q^\Gamma\,\partial q^s}-u_{mj}\,\Gamma^m_{irs}-u_{im}\,\Gamma^m_{jrs}-\frac{\partial u_{mj}}{\partial q^\Gamma}\,\Gamma^m_{is}-\frac{\partial u_{im}}{\partial q^\Gamma}\Gamma^m_{is}$$

$$-\frac{\partial u_{mj}}{\partial q^s}\,\Gamma^m_{ir}-\frac{\partial u_{im}}{\partial q^s}\,\Gamma^m_{jr}-\frac{\partial u_{ij}}{\partial q^m}\,\Gamma^m_{rs}+g_{mn}\left(\Gamma^m_{ir}\,\Gamma^n_{js}+\Gamma^m_{is}\,\Gamma^n_{jr}\right); \tag{1.56.b}$$

$$\Gamma^m_{irs}=\left[\frac{\partial}{\partial q^s}\,\Gamma^m_{lr}-\Gamma^m_{nr}\,\Gamma^n_{ls}-\Gamma^m_{ir}\,\Gamma^n_{rs}\right]. \tag{1.56.c}$$

D. 1.18. Bianchi-јев апсолутни извод. — Нека је $q^i(t)$ крива где је t параметар. Ако је $\mathbf{u}=u^i\,\mathbf{g}_i$ контраваријантни вектор онда је његов диференцијал $\mathrm{d}\mathbf{u}=(u^i|_k\,\mathrm{d}q^k)\,\mathbf{g}_i$. Деобом са $\mathrm{d}t$ добија се извод вектора по параметру и он се назива Bianchi-јев *айсолушни извод вектора* u^i *йо йараметру* t. Аналогно томе добија се апсолутни извод коваријантног вектора, па су:

$$\frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{D}t}=(\nabla_k u^i)\,\frac{\mathrm{d}q^k}{\partial t}=\left(\frac{\partial u^i}{\partial q^k}+u^j\Gamma^i_{jk}\right)\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}t};\ \frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t}=\left(\frac{\partial v_i}{\partial q^k}-v_j\,\Gamma^j_{ik}\right)\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}t}. \tag{1.57.a}$$

Из извода непосредно следе апсолутни диференцијали

$$\mathrm{D}u^i=(u^i|_k)\,\mathrm{d}q^k;\ \mathrm{D}v_i=(v_i|_k)\,\mathrm{d}q^k;\ \mathrm{D}g_{ij}=(g_{ij|k})\,\mathrm{d}q^k=0;\ \mathrm{D}g^{ij}=0. \tag{1.57.b}$$

Ако је коваријантни извод вектора $u^i{}_{|k}=0$, онда је његов диференцијал $\mathrm{d}\mathbf{u}=0$, па је то *услов йаралелної йомерања векшора* (*„шелейаралелизам“*)
Када је параметар (t) лук криве (s), тада извод $\mathrm{D}u^i/\mathrm{D}s$ представља извод вектора $\mathbf{u}$ у правцу криве дуж које се помера.

Појам апсолутног извода проширује се и на тензоре, па је

$$\mathrm{D}u^{ij}/\mathrm{D}t=(\mathrm{d}u^{ij}/\mathrm{d}t)+[u^{mj}\,\Gamma^i_{mk}+u^{im}\,\Gamma^j_{mk}]\,(\mathrm{d}q^k/\mathrm{d}t). \tag{1.57.c}$$

D. 1.19. Диференцијални оператори. — Као и у векторској анализи оператори ∇ (набла) и Δ (лапласијан) разматрају се и у тензорској нотацији.

D. 1.19.1. Градијент. — Нека је $\varphi=\varphi(q^i)$ скаларна функција, онда је $\mathrm{d}\varphi=(\partial\varphi/\partial q^i)\,\mathrm{d}q^i$. Пошто је $\mathrm{d}\varphi$ скаларна инваријанта, а $\mathrm{d}q^i$ контраваријантни вектор морају изводи $\partial\varphi/\partial q^i$ бити компоненте коваријантног вектора. Он се назива *ірадијенш скаларне функције* $\varphi(q^i)$ у односу на систем координата q^i

$$\mathbf{u}=u_i\,\mathbf{g}^i=\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi;\ u_i=\partial\varphi/\partial q^i;\ \nabla=(\partial/\partial q^i)\,\mathbf{g}^i=\mathbf{g}^i\,(\partial/\partial q^i). \tag{1.58.a}$$

Он је *коваријантни вектор*, али могу му се одредити и друге компоненте, те су:

$$u_i = \partial\varphi/\partial q^i = \varphi/_i = \partial_i; \; u^i = g^{ik}(\partial\varphi/\partial q^k) = \varphi^{|k}; \; u_{(p)} = (\partial\varphi/\partial q^i)\, t_{(p)}{}^i. \qquad (1.58.\text{b})$$

Аналогно појму градијента скаларне функције примењује се ова операција и на векторе и на тензоре. Компоненте градијента једнаке су коваријантном изводу. Градијент скалара је вектор, па ће градијент вектора бити тензор. При овој се операцији *повећава ред тензора за један коваријантни индекс*. Тако ће бити:

$$\text{grad}\, u^i = u^i{}_{|k} = \nabla_k u^i = (\partial u^i/\partial q^k) + u^j \Gamma^i_{jk}; \; \text{grad}\, u_i = u_{i|k}; \; \text{grad}\, u^{ij}_k = u^{ij}{}_{k|r}. \quad (1.59)$$

D. 1.19.2. Дивергенција. — Дивергенција се односи на *контраваријантне векторе*, па је скаларни производ оператора ∇ и тог вектора. Дакле биће:
$$\text{div}\, u^i = \text{div}\,(u^i \mathbf{g}_i) = (\mathbf{g}^i \nabla_i u^k \mathbf{g}_k) = g^i{}_k \nabla_i u^k = \nabla_i u^i = u^i{}_{|i} = (\partial u^i/\partial q^i) + u^j \Gamma^i_{ji} = S. \quad (160.\text{a})$$
Она је скаларна инваријанта. Може се применити и на коваријантне векторе ако му се придружи контраваријантни вектор помоћу метричког тензора:

$$\text{div}\, v_i = \text{div}\,(g^{ik} v_i) = (g^{ik} v_i)/k = g^{ik} v_{k|k} = v^k{}_{|k} = v^i{}_{|i}; \; g^{ik}{}_{|k} = 0. \qquad (1.60.\text{b})$$

Ова се операција може применити и на тензоре. Треба прво одредити коваријантни извод, а затим извршити контракцију по индексу диференцирања. Стога може бити више различитих дивергенција, што се назначује Тако су

$$\text{div}_{(i)} u^{ij} = u^{ij}{}_{|i} \neq \text{div}_{(j)} u^{ij} = u^{ij}{}_{|j}\, \text{div}\, u^{(ij)} = u^{(ij)}_{(i)}{}_{|i} = u^{(ij)}_{(j)}{}_{|j}; \text{div}\, u^i_{jk} = u^i_{jk|r} = u^r_{jk\,|\,r} = u^i_{jk\,|\,i} \quad (1.61)$$

Дивергенцијом се *смањује* ред тензора за један (од вектора постаје скалар, од тензора другог реда вектор, итд).

D. 1.19.3 Ротор. — Под ротором коваријантног вектора подразумева се у V_3 апсолутни контраваријантни вектор

$$\text{rot}\, v_i = R^i \mathbf{g}_i = [\mathbf{g}^j \nabla_j, v_k \mathbf{g}^k] = \varepsilon^{ijk} \nabla_j v_k \mathbf{g}_i; \; R^i = \varepsilon^{ijk} v_{k|j} = \frac{e^{ijk}}{\sqrt{g}} v_{k|j}; \; g = |\, g_{ik}\,| \quad (1.62.\text{a})$$

односно

$$R^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial v_3}{\partial q^2} - \frac{\partial v_2}{\partial q^3}\right); \; R^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial v_1}{\partial q^3} - \frac{\partial v_3}{\partial q^1}\right); \; R^3 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial v_2}{\partial q^1} - \frac{\partial v_1}{\partial q^2}\right). \quad (1.62.\text{b})$$

D. 1.19.4. Лапласијан. — Ако је φ скаларна функција онда је $\text{div}\,\text{grad}\,\varphi = \text{div}\,\mathbf{u}$, где су $u_i = \partial\varphi/\partial q^i = \varphi|_i$ координате градијента. Да би се извела операција дивергенције мора се одредити компонента $u^j = g^{ij} u_i = g^{ij}(\partial\varphi/\partial q^i) = g^{ij}\varphi_{|i}$ те се добија

$$\Delta\varphi = \nabla\nabla\varphi = \text{div}\,\text{grad}\,\varphi = u^j|_j = (g^{ij}\varphi_{|i})|_j = g^{ij}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^i \partial q^j} - \frac{\partial\varphi}{q^m}\Gamma^m_{ij}\right). \quad (1.63.\text{a})$$

Градијент вектора u_i је тензор $u_{i|j}$, па се мора узети коваријантни извод коваријантне координате, те ће бити лапласијан вектора

$$\Delta u_i = \operatorname{div} \operatorname{grad} u_i = g^{jk} u_{i|jk}; \; \Delta u^i = g_{jk} u^{i|jk}, \tag{1.63.b}$$

а аналогно се добија и тензор другог реда

$$\Delta u_{ij} = g^{kl} u_{ij|kl}; \; \Delta u^{ij} = g_{kl} u^{ij|kl}; \; \Delta u_j{}^i = g_k{}^l u_j{}^i|_l{}^k. \tag{1.63.c}$$

D. 1.20. Интегрални обрасци. — Нека је L просто затворена крива, а S површ. чија је контура та крива, $\mathrm{d}\mathbf{r}$, управљени линијски елемент, а $\mathrm{d}S$ и и $\mathrm{d}V$ површински н запремински елемент, онда Stokess-ов и Gauss-ов образац имају облик:

$$\oint\limits_{(L)} v_i \, \mathrm{d} q^i = \iint\limits_{(S)} \sqrt{g}\, R^i \,\mathrm{d} S_i; \quad \oiint\limits_{(S)} v^i \,\mathrm{d} S_i = \iiint\limits_{(V)} v^i|_i \,\mathrm{d} V. \tag{1.64}$$

D. 1.21. Ортогонални криволинијски систем. — Код овог су система основни вектори ортогонални, па ће бити:

$$g_{ii} = A_i{}^2; \; \mathbf{g}_i = A_i \mathbf{t}_i; \; A_i{}^2 = (\partial x^1/\partial q^i)^2 + (\partial x^2/\partial q^i)^2 + (\partial x^3/\partial q^i)^2; \; \mathrm{d} s_{(i)} = A_i \,\mathrm{d} q^{(i)};$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r}^2 = g_{ii}\,\mathrm{d} q^i \,\mathrm{d} q^i = (A_i \,\mathrm{d} q^i)^2; \; g^{ii} = 1/A_i{}^2; \; g = |\mathbf{G}| = (A_1 A_2 A_3)^2 = |g_{ii}|; \; |g^{ii}| = 1/g;$$

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i = v_i \mathbf{g}^i = v_{(i)} \mathbf{t}_{(i)} = v_{(M)} \mathbf{t}_{(M)}; \; v^i = (\mathbf{v}\mathbf{g}); \; v_i = g_{ik} v^k = g_{ii} v^i = A_i{}^2 v^i;$$

$$v_{(i)} = (\mathbf{v}\mathbf{t}_{(i)}) = \frac{1}{A_i} (\mathbf{v}\,\mathbf{g}_i) = \frac{v_i}{A_i} = \frac{g_{ii} v^i}{A_i} = A_i v^i; \; v_i = A_i v_{(i)}; \; v^i = v_{(i)}/A_i;$$

$$\Gamma^i_{jk} = 0; \; \Gamma^i_{jj} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(A_i)^2} \frac{\partial (A_j)^2}{\partial q_i}; \; \Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2} \frac{1}{(A_i)^2} \frac{\partial (A_i)^2}{\partial q^k}; \; \Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2} \frac{1}{(A_i)^2} \frac{\partial (A_i)^2}{\partial q^i}; \tag{1.65}$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \mathbf{u} = u_i \mathbf{g}^i; \; u_i = A_i{}^{-1} (\partial \varphi/\partial q^i);$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1} [A_2 A_3 v_{(1)}] + \frac{\partial}{\partial q^2} [A_3 A_1 v_{(2)}] + \frac{\partial}{\partial q^3} [A_1 A_2 v_{(3)}]; \right. \; \sqrt{g} = A_1 A_2 A_3;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = R^i \mathbf{g}_i = R_{(i)} \mathbf{t}_{(i)}; \; R_{(i)} = A_i R^i;$$

$$R_{(1)} = \frac{1}{A_2 A_3} \left\{ \frac{\partial [A_3 v_{(3)}]}{\partial q^2} - \frac{\partial [A_2 v_{(2)}]}{\partial q^3} \right\}; \; R_{(2)} = \frac{1}{A_3 A_1} \left\{ \frac{\partial [A_1 v_{(1)}]}{\partial q^3} - \frac{\partial [A_3 v_{(3)}]}{\partial q^1} \right\};$$

$$R_{(3)} = \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial [A_2 v_{(2)}]}{\partial q^1} - \frac{\partial [A_1 v_{(1)}]}{\partial q^2} \right\}$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1} \left[\frac{A_2 A_3}{A_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} \right] + \frac{\partial}{\partial q^2} \left[\frac{A_3 A_1}{A_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} \right] + \frac{\partial}{\partial q^3} \left[\frac{A_1 A_2}{A_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q^3} \right] \right.$$

. Стога с таблице:

Таблица

a) Поларно-цилиндрички систем b) Сферни систем

	a)			b)		
q^i	r	φ	z	ρ	φ	ψ
$ds_{(i)}$	dr	$r\,d\varphi$	dz	$d\rho$	$(\rho\cos\psi)\,d\varphi$	$\rho\,d\psi$
A_i	1	r	1	1	$\rho\cos\psi$	ρ
g_{ii}	1	r^2	1	1	$(\rho\cos\psi)^2$	ρ^2
g^{ii}	1	$1/r^2$	1	1	$(\rho\cos\psi)^{-2}$	ρ^{-2}
g	$r^2;\quad g^{-1}=1/r^2$			$\rho^4\cos^2\psi;\quad g^{-1}=(\rho^4\cos^2\psi)^{-1}$		
ds^2	$dr^2+(r\,d\varphi)^2+d\,z^2$			$d\,\rho^2+(\rho\cos\psi\,d\varphi)^2+(\rho\,d\psi)^2$		
$\mathbf{t}_i$	$\mathbf{r}_0$	$\mathbf{c}_0$	$\mathbf{k}$	$\vec{\rho}_0$	$\mathbf{c}_0$	$\vec{\nu}_0$
$\mathbf{g}_i$	$\mathbf{r}_0$	$r\,\mathbf{c}_0$	$\mathbf{k}$	$\vec{\rho}_0$	$(\rho\cos\psi)\,\vec{\mathbf{c}}_0$	$(\rho\,\psi)\,\vec{\nu}_0$
$\Gamma_{ij,k}$	$\Gamma_{12,2}=\Gamma_{21,2}=-\Gamma_{22,1}=r$			$\Gamma_{12,2}=-\Gamma_{22,1}=\rho\cos^2\psi;\ \Gamma_{13,3}=-\Gamma_{33,1}=-\rho;\ \Gamma_{22,3}=\rho\sin\psi\cos\psi;$		
$\Gamma_{jk}{}^{i}$	$\Gamma^2{}_{12}=\Gamma^2{}_{21}=\frac{1}{r};\ \Gamma^1{}_{22}=-r$			$\Gamma^1{}_{22}=-\rho\cos^2\psi;\ \Gamma^1{}_{33}=-\rho;\ \Gamma^2{}_{12}=\Gamma^3{}_{13}=\rho^{-1};\ \Gamma^2{}_{23}=-\mathrm{tg}\,\psi;\ \Gamma^3{}_{22}=\sin\psi\cos\psi$		
$\Delta\Phi$	$\left(\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{r}_0+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{c}_0+\frac{\partial}{\partial Z}\right)\Phi$			$\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\vec{\rho}_0+\frac{1}{\rho\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{\mathbf{c}}_0+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\psi}\vec{\nu}_0\right)\Phi$		
$\mathbf{v}$	$V_{(r)}\mathbf{r}_0+V_{(c)}\mathbf{c}_0+V_{(z)}\mathbf{k}$			$V_{(\rho)}\vec{\rho}_0+V_{(c)}\vec{\mathbf{c}}_0+V_{(\nu)}\vec{\nu}_0$		
div $\mathbf{v}$	$\frac{V_{(r)}}{r}+\frac{\partial V_{(r)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_{(c)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial V_{(z)}}{\partial z}$			$2\frac{V_{(\rho)}}{\rho}+\frac{\partial V_{(\rho)}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\cos\psi}\frac{\partial V_{(z)}}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_{(\nu)}}{\partial\psi}-\frac{V_{(\nu)}}{\rho}\mathrm{tg}\,\psi$		
rot $\mathbf{v}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial V_{(z)}}{\partial\varphi}-\frac{\partial V_{(c)}}{\partial z};\ \frac{\partial V_{(r)}}{\partial z}-\frac{\partial V_{(z)}}{\partial r};\ \frac{V_{(c)}}{r}+\frac{\partial V_{(c)}}{\partial r_{(c)}}-\frac{1}{r}\frac{\partial V_{(r)}}{\partial\varphi}$			$\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_{(c)}}{\rho}-\frac{v_{(c)}}{\rho}\mathrm{tg}\,\psi-\frac{1}{\rho\cos\psi}\frac{\partial V_{(\nu)}}{\partial\varphi};\ \frac{1}{\rho\cos\psi}\frac{\partial V_{(\rho)}}{\partial\varphi}-\frac{V_{(c)}}{\rho}-\frac{\partial V_{(c)}}{\partial\rho};\ \frac{V_{(\nu)}}{\rho}+\frac{\partial V_{(\nu)}}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_{(\rho)}}{\partial\psi}$		
$\Delta\Phi$	$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Phi$			$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2\cos^2\psi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\mathrm{tg}\,\psi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\Phi.$		