Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle
J. Sallantin et J.-J. Szczeciniarz eds
Nouvelle Encyclopédie Diderot, Presses Universitaires de France, Paris, 1999
pp. 87-106

LE PROGRAMME DE HILBERT

Kosta Došen

Le deuxième problème de Hilbert

Au Deuxième Congrès International des Mathématiciens, qui a eu lieu à Paris en 1900, David Hilbert a fait une conférence intitulée ‹‹ Problèmes mathématiques ››. Cette conférence contenait une liste de vingt-trois problèmes avec lesquels Hilbert voulait montrer la voie aux mathématiques du siècle qui commençait. Hilbert, âgé de trente-huit ans, avait alors atteint sa pleine maturité et une très grande réputation. Il avait choisi ses problèmes dans toutes les branches des mathématiques de ce temps-là, ce qui réclamait une culture immense, mais qu'un génie mathématique universel pouvait encore atteindre. Depuis, le territoire des mathématiques s'est tellement élargi que Hilbert est sans doute le dernier dans la lignée de ces génies.

Les problèmes de Hilbert allaient jouer pour la plupart le rôle qu'il leur assignait. Ils ont occupé les mathématiciens pendant tout ce siècle et certains ont même servi de point de départ pour de nouvelles branches des mathématiques. Cela est en particulier le cas pour le deuxième problème de Hilbert, qui se trouve à l'origine d'une des branches principales de la logique mathématique — la théorie des preuves (ou des démonstrations).

Dans la liste de Hilbert ce problème n'est pas le seul lié à la logique. Il est précédé par un problème de la théorie des ensembles, le problème de l'hypothèse du continu de Georg Cantor, dans la solution duquel se sont illustrés Kurt Gödel en 1940 et Paul Cohen en 1963. Ces deux problèmes ont été mis tout au début de la liste non seulement parce qu'ils appartiennent aux fondements des mathématiques, mais aussi parce qu'ils étaient suggérés par les plus grands résultats mathématiques du siècle qui s'était achevé. Ces résultats sont selon Hilbert l'éclaircissement des notions fondamentales liées aux nombres réels et la découverte des géométries non-euclidiennes. Les deux premiers problèmes de Hilbert, de même que son livre très important sur les fondements de la géométrie, paru en 1899, illustrent bien son intérêt grandissant pour les fondements des mathématiques et son enthousiasme pour la méthode axiomatique.

On peut mentionner qu'au moins deux autres problèmes parmi les vingt-trois problèmes de Hilbert sont étroitement liés à la logique. C'est d'abord le cas du dixième problème, sur la solvabilité des équations diophantiennes. Pour que ce problème soit définitivement résolu par Iouri Matiyassévitch en 1970 il a fallu d'abord développer la théorie de la calculabilité, c'est-à-dire la théorie des fonctions récursives — une autre grande branche de la logique mathématique. Le dix-septième problème de Hilbert, sur la représentation des formes définies positives par des sommes de carrés, a d'abord été résolu en 1927 par Emil Artin sans aide de la logique. Mais en 1955 Abraham Robinson a présenté une solution qui se sert des méthodes de la théorie des modèles. Avec cela, les quatre branches principales de la logique mathématique sont impliquées dans les problèmes de Hilbert.

Concentrons nous maintenant sur le deuxième problème, où Hilbert cherche une démonstration de la consistance (de la non-contradiction) des axiomes de l'arithmétique. Il voudrait que l'on démontre qu'en partant de ces axiomes et en se servant de la logique on ne peut déduire en même temps une formule et sa négation. Les axiomes que Hilbert envisageait au congrès se rapportent à l'arithmétique des nombres réels (ce sont les axiomes de corps, les axiomes d'ordre, l'axiome d'Archimède et un axiome assez étrange qui exige que le domaine du système ne puisse être élargi). Plus tard, et surtout à partir des années 20, le problème a été compris comme s'il s'appliquait en premier lieu à l'arithmétique des entiers naturels et aux axiomes de Peano (on appelle ainsi les axiomes qui disent que zéro n'a pas de prédécesseur et que la fonction de successeur est injective; suivent le schéma de l'induction mathématique, c'est-à-dire du raisonnement par récurrence, et les définitions récursives de l'addition et de la multiplication). Ce n'est qu'après avoir résolu le problème pour cette arithmétique-là, qu'on passerait aux nombre réels et à l'analyse. Par la suite nous appellerons l'arithmétique des entiers naturels *arithmétique* tout court.

Le problème de la consistance de l'arithmétique se pose avant tout autre car au dix-neuvième siècle on est parvenu à définir les notions fondamentales de l'analyse en termes d'entiers naturels et de certaines notions de la théorie des ensembles. Ainsi il semblait que si on démontrait la consistance de l'arithmétique on aurait franchi le pas décisif dans la démonstration de la consistance de toutes les mathématiques. Et la consistance de toutes les mathématiques revêtait pour Hilbert au début du siècle une importance toute particulière car il croyait qu'affirmer que les mathématiques sont vraies équivaut à démontrer leur consistance. De cela il s'ensuit qu'il suffit d'établir la consistance des mathématiques pour pouvoir affirmer que les objets dont elles parlent existent. Henri Poincaré professait parfois une opinion semblable.

Le problème de la consistance de l'arithmétique semblait particulièrement difficile au début du siècle car on ne voyait pas comment l'aborder. Hilbert ne veut pas d'une démonstration de consistance *relative*, obtenue par une interprétation dans une autre théorie mathématique, à la consistance de laquelle nous croyons déjà. On peut démontrer ainsi la consistance des théories qui ne sont pas fondamentales en les interprétant dans des théories plus fondamentales, comme on interprète la géométrie dans l'analyse. Mais pour l'arithmétique, qui se trouve à la base même, on doit trouver une démonstration *directe*. Ce n'est que plusieurs années après le congrès que Hilbert a expliqué quel genre de démonstration directe pourrait le satisfaire. Pour démontrer que toutes les formules parmi les théorèmes de l'arithmétique possèdent une certaine propriété il faut déterminer que les axiomes la possèdent et que les règles de déduction par lesquelles les théorèmes sont obtenus en partant des axiomes préservent cette propriété. Quand il s'agit d'une démonstration de consistance, la propriété en question peut être que la formule n'est pas de la forme 1=0. Si une contradiction était établie, toutes les formules seraient des théorèmes, et donc 1=0 aussi (la logique nous dit que *si p et non p, alors q*). Et si 1=0 était un théorème, on aurait une contradiction, car $1\neq0$, c'est-à-dire *non* 1=0, est aussi un théorème.

Pour pouvoir procéder de cette manière il faut que l'arithmétique soit *formalisée*, c'est-à-dire qu'elle soit présentée comme un *système formel*. Cela veut dire que le langage de l'arithmétique doit être un *ensemble décidable de formules*, et que les théorèmes de l'arithmétique doivent être sélectionnés parmi les formules en présentant des *ensembles décidables d'axiomes et de règles de déduction*. Cette notion de décidabilité est déterminée d'une manière tout à fait précise dans la théorie de la calculabilité. Intuitivement, un ensemble est décidable s'il existe une procédure, un algorithme, pour déterminer en un nombre fini de pas si quelque chose appartient ou non à cet ensemble. Puisque les formules, les axiomes et les règles de déduction forment des ensembles décidables, *l'ensemble des preuves* sera décidable lui aussi. Une preuve est une suite finie de formules où chaque formule est ou bien un axiome ou bien obtenue à partir de certaines formules qui la précèdent dans la suite en appliquant une règle de déduction. Par contre, *l'ensemble des théorèmes* dans un système formel quelconque n'est pas obligatoirement décidable (et, en effet, il ne sera pas décidable dans les principaux systèmes formels de l'arithmétique). Un théorème est le dernier membre d'une suite de formules qui est une preuve, c'est-à-dire une formule pour laquelle il existe une preuve.

Le système formel le plus important lié à l'arithmétique s'appelle *l'arithmétique de Peano de premier ordre*, ou *l'arithmétique de Peano* tout court. Il est obtenu en élargissant le calcul classique des prédicats de premier ordre avec les axiomes de Peano (‹‹ premier ordre ›› veut dire que nous avons des quantificateurs uniquement pour des nombres; avec des quantificateurs pour des ensembles de nombres nous passons au deuxième ordre). Cette formalisation de l'arithmétique, qui dépend de la formalisation de la logique entamée par Gottlob Frege en 1879, ne sera achevée par Hilbert avec tous les détails nécessaires qu'au cours des années 20. Entre temps ses opinions sur les fondements des mathématiques avaient subi l'assaut intuitionniste de L.E.J. Brouwer (nous verrons dans la section suivante quel est le genre des idées de Brouwer). C'est pour parer à cet assaut que Hilbert allait formuler une doctrine connue comme son *programme*. Il y inaugurait une nouvelle théorie mathématique, qu'il nomma *théorie des preuves*, ou encore *métamathématique*. Le problème de la consistance de l'arithmétique allait occuper une place centrale dans ce programme et dans la nouvelle théorie à laquelle il menait.

La place du programme de Hilbert dans la philosophie des mathématiques

Dans les articles des années 20 où Hilbert formule son programme il déclare encore parfois que la vérité en mathématiques est la même chose que la consistance, et si on cherchait à résumer la position de Hilbert en deux mots on pourrait se rabattre sur cette thèse qu'il avait adopté depuis longtemps. Toutefois, on ne peut désormais comprendre cette thèse que dans le contexte d'une doctrine beaucoup plus élaborée, et cette doctrine elle-même ne peut être bien comprise que dans le contexte d'autres doctrines de la philosophie des mathématiques.

C'est pour cela qu'avant de considérer le programme de Hilbert nous allons d'abord présenter une classification des doctrines de la philosophie des mathématiques. Nous n'allons pas nous satisfaire de la liste traditionnelle qui contient le logicisme, l'intuitionnisme et le formalisme (où le principe de classification est si peu claire qu'on se croirait presque en présence d'une classification chinoise). Nous prendrons notre principe de classification dans deux questions concernant l'interprétation du langage mathématique. Voici la première question: ‹‹ Est-ce que le langage mathématique se rapporte à une réalité extérieure à lui, est-ce qu'il décrit quelque chose ? ››

Si à cette question nous répondons par ‹‹ non ››, nous obtenons ce qu'on pourrait appeler *le formalisme pur*. Un formaliste pur voit dans les mathématiques uniquement un langage, que l'on manie d'après des règles de syntaxe. Il est assez rare qu'un mathématicien épouse tout à fait cette doctrine (pourtant Haskell Curry, l'un des fondateurs de la logique combinatoire, semble l'avoir fait). On la trouve plutôt chez des philosophes (en particulier, dans le conventionnalisme du Cercle de Vienne). Mais on trouve assez souvent chez des mathématiciens des opinions qui se rapprochent plus ou moins d'elle. Ainsi Poincaré, Bourbaki et Hilbert lui-même sont formalistes jusqu'à un certain point. Un formaliste pur sera naturellement enclin à dire qu'on ne doit pas se demander si les propositions mathématiques sont vraies, mais si elles sont *utiles* ou *belles*.

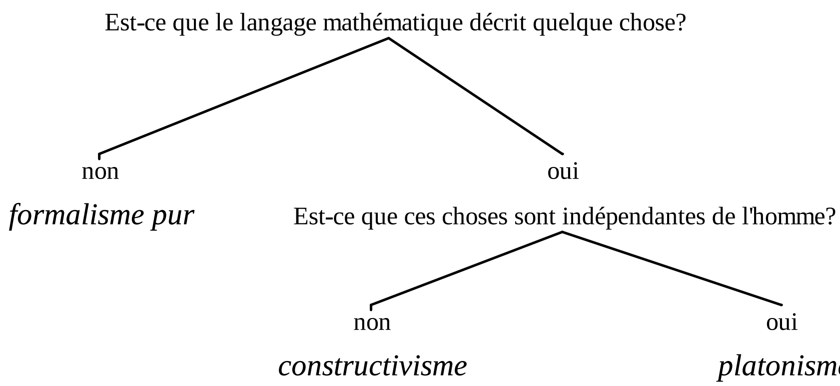
Si à notre première question sur l'interprétation du langage mathématique nous répondons par ‹‹ oui ››, nous pouvons ensuite poser la question: ‹‹ Est-ce que ces choses décrites par le langage mathématique sont indépendantes de l'homme ? ››

Nous pouvons répondre ‹‹ non ›› à cette seconde question, en affirmant que les choses décrites par le langage mathématique ont été créées par l'homme, que ce sont des constructions de l'intelligence humaine. Comme il est normal de supposer que l'homme est incapable de créer des choses infinies, l'infini mathématique ne peut être que potentiel. De cette doctrine, qu'on appelle *constructivisme*, se réclament surtout les intuitionnistes à la suite de Brouwer, mais aussi certaines autres écoles qui ont voulu limiter les moyens des mathématiques classiques. Les mathématiques dites classiques, qui se servent librement du principe logique du tiers exclu et parlent de l'infini comme s'il était actuel, et non seulement potentiel, ne sont devenues prépondérantes que vers la fin du dix-neuvième siècle, par les soins de Hilbert entre autres. Les constructivistes ont l'air moderne par rapport à cette tradition somme toute récente, mais, d'autre part, leurs opinions font écho à la réserve par laquelle des mathématiciens du siècle dernier ont accueilli l'avènement des mathématiques classiques. On trouve des positions constructivistes chez Poincaré aussi. Un constructiviste sera naturellement enclin à dire qu'on ne doit pas se demander si les propositions mathématiques sont vraies mais si elles sont *démontrables.*

Si par contre nous répondons par ‹‹ oui ›› à nos deux questions, en affirmant au sujet de la seconde que les choses décrites par le langage mathématique n'ont pas été créées par l'homme, qu'il ne s'agit pas d'une réalité que l'intelligence humaine construit, mais qu'elle essaye seulement d'appréhender, en le faisant plus ou moins bien, et si en plus nous considérons que l'infini mathématique est actuel, alors nous obtenons *le platonisme* (parfois appelé *réalisme*). Son défenseur le plus connu est Gödel. Ce n'est pas une doctrine autour de laquelle il y a une école, comme il y a une école intuitionniste dans le constructivisme. S'il y avait une telle école, l'énorme majorité des mathématiciens devrait lui appartenir, vu qu'ils acceptent les méthodes non-constructives des mathématiques classiques et en même temps considèrent qu'on doit se demander si les propositions mathématiques sont vraies ou non. La plupart des logiciens y seraient aussi, car la logique a été pendant longtemps marquée par la prépondérance de la théorie des modèles, une discipline où règne l'esprit du platonisme. Seul un platoniste s'intéresse, au sens propre du terme, à la vérité des propositions mathématiques et non à une autre propriété de ces propositions.

Si les mathématiciens sont en grande majorité des platonistes, on dirait qu'ils le sont plutôt comme Monsieur Jourdain est prosateur. Car quand il leur arrive de penser à la philosophie de leur matière, d'habitude dans une humeur oisive ou vers la fin de leur carrière, ils sont prêts à toutes sortes d'élucubrations formalistes ou constructivistes, qui démentent leur activité ordinaire.

Résumons maintenant dans une figure la classification de nos trois doctrines de la philosophie des mathématiques:



Le logicisme, la doctrine qui affirme que les mathématiques se réduisent à la logique, n'est pas compris dans cette classification. Historiquement, les logicistes Frege et Bertrand Russell étaient des platonistes. Mais on peut imaginer un logicisme formaliste (semblable au conventionnalisme viennois), qui affirmerait que la logique est de la syntaxe pure. (Une telle opinion pourrait être professée, avec pas mal de bon sens, sans vouloir réduire toutes les mathématiques à la logique. Le formalisme pur ne conviendrait-il pas mieux à la logique qu'aux mathématiques toutes entières ?)

Le formalisme de Hilbert se trouve quelque part entre le formalisme pur et le constructivisme, tout en étant d'accord avec le platonisme dans l'acceptation des méthodes des mathématiques classiques. L'attrait de cette position pourrait s'expliquer en partie par ce choix judicieux, digne d'un Salomon.

L'élimination de l'infini

Le but de Hilbert dans son programme est d'éliminer l'infini des mathématiques. Comme Karl Weierstrass a éliminé les infiniment petits et les infiniment grands de l'analyse, Hilbert veut éliminer ce qui reste de l'infini quand nous parlons, par exemple, de suites infinies, ou quand nous quantifions sur tout l'ensemble des entiers naturels. Eliminer l'infini n'est pas interdire son usage, mais seulement montrer qu'en principe on n'est pas obligé de le mentionner, qu'il est une *fiction utile*. En éliminant l'infini nous ne rejetons pas les méthodes des mathématiques classiques qui semblent le présupposer, mais nous les justifions.

Hilbert qualifie de *finitiste* la partie des mathématiques dans laquelle on ne trouve que des propositions qui ne parlent pas de l'infini. Il a expliqué cette notion seulement d'une manière intuitive. Si on cherche une codification précise, on peut essayer d'identifier les mathématiques finitistes à l'arithmétique primitivement récursive de Thoraf Skolem, ou à quelque chose de fort semblable. Dans l'arithmétique primitivement récursive nous n'avons pas de quantificateurs, et ses théorèmes sont uniquement des formules de l'arithmétique avec des variables libres ou sans variables. (A part les opérations habituelles de l'arithmétique de Peano — zéro, successeur, addition et multiplication — on introduit dans l'arithmétique primitivement récursive d'autres opérations par des définitions primitivement récursives; le schéma de l'induction mathématique est remplacé par une règle de déduction. On peut aussi introduire les quantificateurs bornés comme abréviations pour des conjonctions ou disjonctions finies.) L'arithmétique primitivement récursive est non seulement un fragment de l'arithmétique de Peano, mais un fragment de l'arithmétique formelle intuitionniste, qu'on obtient en ajoutant les axiomes de Peano à la logique intuitionniste de premier ordre, une logique plus restreinte que la logique classique.

Pour Hilbert, seulement les mathématiques finitistes décrivent quelque chose, seulement pour elles il répond ‹‹ oui ›› à notre première question. Ensuite il répond ‹‹ non ›› à notre seconde question: les mathématiques finitistes parlent de certaines constructions de l'intelligence humaine. Hilbert est d'accord sur ce point avec les constructivistes, et va même plus loin que les intuitionnistes. Le finitisme est un constructivisme très strict dans lequel nous ne trouvons que des objets mathématiques très concrets. Parfois Hilbert parle comme si ces objets n'étaient que des constructions *graphiques* finies, créées par l'homme avec de l'encre sur du papier. Les entiers naturels ne seraient que les membres de la suite

$$|,\ ||,\ |||,\ ||||,\ \ldots$$

Mais limiter toutes les mathématiques aux mathématiques finitistes serait pour Hilbert une mutilation. Alors, comme en géométrie pour raccourcir et simplifier les démonstrations on introduit des points dans l'infini, les mathématiques finitistes seront élargies par des propositions *idéales* qui parlent de l'infini. Ces propositions-là, avec lesquelles nous introduisons toutes les mathématiques classiques, ne décrivent à proprement parler rien du tout. Là Hilbert répond ‹‹ non ›› à notre première question, et c'est pourquoi il peut être qualifié de formaliste. Tout cela ressemble beaucoup aux interprétations des théories scientifiques où nous distinguons les propositions empiriques (chez Hilbert, finitistes) des propositions théoriques (chez Hilbert, idéales), les secondes n'étant que des instruments qui servent à la déduction des premières et n'ayant pas plus de réalité que ne leur confère cette fonction instrumentale.

Dans son programme Hilbert voulait justifier l'introduction des propositions idéales en deux étapes. Supposons qu'il s'agisse des propositions idéales de l'arithmétique. Dans la première étape il faut construire un système formel complet de l'arithmétique — l'arithmétique de Peano étant supposée faire l'affaire. Que ce système est complet veut dire que pour chaque preuve intuitive de l'arithmétique, preuve qui peut se référer à l'infini ou non, on doit maintenant avoir une preuve correspondante dans l'arithmétique de Peano. Cette preuve dans le système formel est un objet graphique fini, qui par conséquent peut être étudié dans les mathématiques finitistes. Parmi les formules de l'arithmétique de Peano, celles qui appartiennent au langage de l'arithmétique primitivement récursive et se rapportent aux mathématiques finitistes seront appelées finitistes. Les autres formules sont idéales.

Il se peut que dans la preuve d'une formule finitiste de l'arithmétique de Peano nous nous servions de formules idéales. Dans la deuxième étape du programme de Hilbert il faut montrer que ces preuves-là peuvent être éliminées et remplacées par des preuves des mêmes théorèmes dans l'arithmétique primitivement récursive. C'est-à-dire, il faut montrer que ces passages à travers l'idéal peuvent être évités. En termes techniques on dit qu'il faut montrer que l'arithmétique de Peano est une *extension conservative* de son fragment finitiste. Si nous y parvenons, nous saurons qu'à chaque théorème finitiste de l'arithmétique de Peano correspond une proposition finitiste correcte. L'introduction des propositions idéales est ainsi justifiée. Elle est inoffensive, et nous n'avons aucune raison de rejeter une chose inoffensive qui en plus est fort utile. En nous servant des propositions idéales nous pouvons raccourcir et simplifier nos preuves sans jamais tomber dans le faux.

Pour que la démonstration de conservativité de la deuxième étape soit tout à fait convaincante, cette démonstration, qui se déroule dans la théorie où nous prenons pour objet les systèmes formels, doit elle-même appartenir aux mathématiques finitistes. Autrement nous aurons présupposé dans la justification des propositions idéales que leur emploi est déjà justifié. Dans la théorie où nous prenons pour objet les systèmes formels — *la théorie des preuves*, ou *la métamathématique* — les méthodes finitistes sont de rigueur.

Conservativité et consistance

Soit φ une formule finitiste. Par $\vdash_F \varphi$ nous noterons que φ est un théorème du fragment finitiste de l'arithmétique de Peano, tandis que $\vdash \varphi$ signifie que φ est un théorème de l'arithmétique de Peano. La conservativité de la deuxième étape du programme de Hilbert peut alors s'exprimer de la façon suivante:

(conservativité) *Si* $\vdash \varphi$*, alors* $\vdash_F \varphi$.

Pourtant, Hilbert ne recommande pas que nous nous attaquions directement à la conservativité, mais demande que nous retournions à son vieux problème de la consistance de l'arithmétique:

$$\text{(consistance)} \quad \mathit{Non}\ (\vdash \varphi \ \ \mathit{et} \ \ \vdash \neg\varphi).$$

Comme d'habitude, $\neg$ est le connecteur de la négation. Si ψ est une formule quelconque de l'arithmétique de Peano, pas forcément finitiste, alors la consistance telle que nous venons de l'énoncer est équivalente à ‹‹ *Non* ($\vdash \psi$ *et* $\vdash \neg\psi$) ››. Dans la logique classique (et intuitionniste aussi, du reste) toutes les contradictions sont équivalentes.

Ce saut que Hilbert fait de la conservativité à la consistance n'est pas tout à fait clair dans les textes qu'il nous a laissés. Il est assez simple de se convaincre que la consistance est une condition nécessaire de la conservativité, comme nous allons le montrer dans un instant. Par contre, l'implication inverse, que Hilbert semble présupposer aussi, n'est pas évidente. Il y a des exégètes de Hilbert qui semblent ne pas remarquer qu'il y a un pas à franchir de la consistance à la conservativité. D'autres, tout en étant bien conscients de ce pas, le justifient d'une façon anachronique, en faisant intervenir un raisonnement qu'on peut faire seulement si on connaît les méthodes développées dans la théorie des preuves après 1930 — par exemple, la méthode de codage de Gödel. Ce qu'il faut faire pourtant, c'est deviner comment Hilbert lui-même s'était convaincu que la conservativité et la consistance sont équivalentes. En faisant cela nous ne sommes pas obligés de trouver un raisonnement qu'aujourd'hui nous accepterions pour correct, pourvu qu'il s'accorde avec ce qu'on savait dans les années 20.

Considérons d'abord quelques présuppositions simples que Hilbert aurait très bien pu envisager. Pour les formuler, soit φ, comme plus haut, une formule finitiste et φ' une *instance* de φ, c'est-à-dire une formule obtenue en substituant des constantes à la place des variables libres de φ (la formule φ' est la formule φ elle-même si φ n'a pas de variables). Alors nous avons les présuppositions suivantes:

(1) *Non* ($\vdash_{\mathrm{F}} \varphi$ *et* $\vdash_{\mathrm{F}} \neg\varphi$).
(2) *Si* $\vdash \varphi$, *alors* $\vdash \varphi'$.
(3) *Si* $\vdash_{\mathrm{F}} \varphi$, *alors* $\vdash \varphi$.
(4) *Si pour tout* φ' *non* $\vdash_{\mathrm{F}} \neg\varphi'$, *alors* $\vdash_{\mathrm{F}} \varphi$.

La présupposition (1) affirme que le fragment finitiste de l'arithmétique de Peano est consistant, alors que (2) est un principe logique tout à fait naturel et (3) n'est que la constatation que le fragment finitiste de l'arithmétique de Peano est inclus dans l'arithmétique de Peano. La présupposition (4) affirme que le fragment finitiste de l'arithmétique de Peano est complet d'une manière syntaxique: si on ne peut prouver de contre-exemple pour φ, alors φ peut être prouvé. Cette présupposition semble moins évidente que les autres, mais pouvait paraître tout à fait plausible avant les résultats de Gödel.

Supposons que nous avons la conservativité. Alors la consistance peut être déduite de la manière suivante:

Si $\vdash \varphi$ *et* $\vdash \neg\varphi$, *alors* $\vdash_F \varphi$ *et* $\vdash_F \neg\varphi$; par la conservativité.
Non ($\vdash \varphi$ *et* $\vdash \neg\varphi$); par (1).

Supposons maintenant que nous avons la consistance. Alors la conservativité peut être déduite de la manière suivante:

Si $\vdash \varphi$, *alors* $\vdash \varphi'$; par (2).
Si $\vdash \varphi$, *alors non* $\vdash \neg\varphi'$; par la consistance.
Si $\vdash \varphi$, *alors non* $\vdash_F \neg\varphi'$; par (3).
Si $\vdash \varphi$, *alors* $\vdash_F \varphi$; par (4).

Notons que ce raisonnement par lequel nous avons déduit la conservativité et la consistance l'une de l'autre est valable du point de vue de la logique intuitionniste autant que du point de vue de la logique classique. Notons encore que dans ce raisonnement nous ne nous servons d'aucune propriété spéciale du système formel de l'arithmétique, et que par conséquent une équivalence analogue entre la conservativité et la consistance pourrait être démontrée pour n'importe quel système qui comprend un fragment consistant et complet.

Soit qu'il ait raisonné ainsi ou d'une autre manière, Hilbert a remplacé dans la deuxième étape de son programme le problème de la conservativité par le problème de la consistance. En faisant cela, il continuait d'exiger que la démonstration de consistance soit finitiste, comme devait l'être la démonstration de conservativité. Donc, pour accomplir le programme de Hilbert il faudrait faire deux choses: donner un système formel complet des mathématiques classiques et démontrer d'une manière finitiste la consistance de ce système. Il faudrait faire cela d'abord pour l'arithmétique, et ensuite passer à ses extensions qui englobent l'analyse. Les fameux résultats que Gödel a démontrés au début des années 30 ont montré que ni pour l'arithmétique ni pour ses extensions on ne peut faire ni la première chose ni la seconde.

Les théorèmes d'incomplétude

Le premier théorème d'incomplétude de Gödel montre qu'il n'y a pas de système formel qui engloberait toutes les preuves de l'arithmétique intuitive. Il n'y a donc pas de formalisation complète de toutes les mathématiques. Plus précisément, ce théorème montre que dans tout système formel consistant qui contient l'arithmétique de Peano il existe une formule finitiste φ telle que ni φ ni $\neg\varphi'$, pour toute instance φ' de φ, ne sont des théorèmes du système. Pourtant on peut démontrer dans les mathématiques intuitives que la proposition qui correspond à φ est vraie. Cela contredit aussi la présupposition (4) avec laquelle nous avons déduit la conservativité de la consistance.

Le second théorème d'incomplétude de Gödel montre que la consistance d'un système formel consistant qui contient l'arithmétique de Peano ne peut être démontrée par des moyens qui seraient codifiés dans l'arithmétique de Peano; a fortiori, on ne peut démontrer cette consistance par des moyens finitistes qui seraient codifiés dans l'arithmétique de Peano. Cela n'exclut pas que l'on puisse démontrer cette consistance par d'autres moyens, qui doivent dépasser les forces de l'arithmétique de Peano, mais peuvent éventuellement être admis comme finitistes dans un sens plus large du terme. En tout cas, ces méthodes ne seront pas finitistes dans le sens de Hilbert.

Il est possible qu'il y ait des doctrines suffisamment semblables au programme de Hilbert pour pouvoir se réclamer de ce nom qui ne seraient pas aussi touchées par les théorèmes d'incomplétude que le programme que nous avons présenté. Il est possible aussi d'obtenir des résultats de moindre envergure, des théorèmes de consistance et de conservativité partielles, qui s'accordent avec les idées de Hilbert. Mais il n'est guère possible de nier que le programme tel qu'on le concevait vers la fin des années 20 a été contredit par les deux théorèmes de Gödel.

Le programme de Hilbert souffre plus du premier théorème d'incomplétude que du second. Le premier théorème n'exclut pas seulement une formalisation complète des mathématiques — il met aussi en cause la conservativité des mathématiques par rapport aux mathématiques finitistes. Car la vérité de la proposition finitiste qui correspond à la formule φ du premier théorème d'incomplétude peut être démontrée seulement par des méthodes qui dépassent les mathématiques finitistes codifiées dans l'arithmétique de Peano. En plus, ce théorème ne permet pas d'établir l'équivalence entre la conservativité et la consistance par le raisonnement présenté ci-dessus, qui pourrait bien avoir été celui de Hilbert.

Pendant longtemps on n'avait pas d'autres exemples pour la formule φ du premier théorème d'incomplétude que ceux suggérés par Gödel. Les propositions qui chez Gödel correspondent à cette formule parlent ou bien de leur propre indémontrabilité ou bien, comme dans le second théorème d'incomplétude, de la consistance d'un système formel. Les propositions de ce genre, grâce à leur ressemblance au paradoxe du menteur et à leurs liens avec des préoccupations philosophiques, ont inspiré pas mal de spéculations dans la périphérie des mathématiques, mais laissaient les mathématiciens plutôt froids. Ce n'est que vers la fin des années 70 qu'on a découvert des propositions d'un contenu mathématique incontestable, en particulier des théorèmes de combinatoire liés au théorème de Ramsay, qui pouvaient remplacer dans le premier théorème d'incomplétude les propositions du genre Gödel. Désormais, on ne pourrait poursuivre un programme à la Hilbert en disant que ce qui manque à l'arithmétique de Peano est sans importance pour les mathématiques et peut être ignoré.

Par contre, le second théorème d'incomplétude peut être contourné, comme nous l'avons indiqué tout à l'heure — on peut poursuivre une variante du programme de Hilbert où le finitisme de la métamathématique a été relâché. En effet, les démonstrations de consistance survécurent au choc des résultats de Gödel. Ce n'est que dans les années 30 que la théorie des preuves de Hilbert a pris son essor, d'abord avec la démonstration de la consistance de l'arithmétique de Peano par Gerhard Gentzen, suivie par des démonstrations semblables pour divers fragments de l'analyse — un travail qui se poursuit jusqu'à nos jours.

Toutefois, avec l'œuvre de Gentzen nous abordons un nouveau chapitre et nous sortons du giron des démonstrations de consistance. Les méthodes qu'il a introduites ne sont pas un simple instrument qui sert à poursuivre le but de la théorie des preuves de Hilbert. Ces méthodes sont à la base d'une branche importante de la logique, qu'on pourrait appeler *théorie des preuves de Gentzen*, pour bien la distinguer de celle de Hilbert. Il faut abandonner le programme de Hilbert et se servir des idées de Gentzen ailleurs, dans les logiques non-classiques, dans la logique combinatoire et le calcul lambda, dans la théorie des catégories, pour se rendre compte de leur importance et de leur singulière beauté.

Notice bibliographique

Le texte de la conférence ‹‹ Mathematische Probleme ›› de 1900 a été réimprimé dans le troisième volume des œuvres complètes de David Hilbert [*Gesammelte Abhandlungen*, *Dritter Band*, Springer, Berlin, 1935] et traduit en anglais dans le recueil *Mathematical Developments Arising from Hilbert's Problems* [F.E. Browder ed., American Mathematical Society, Providence, 1976]. Les principaux articles des années 20 où Hilbert expose son programme sont également réimprimés dans le troisième volume de ses œuvres complètes et traduits en anglais et commentés dans le recueil *From Frege to Gödel*: *A Source Book in Mathematical Logic*, *1879-1931* [J. van Heijenoort ed., Harvard University Press, Cambridge Mass., 1967].

Haskell B. Curry a exposé son formalisme pur dans *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics* [North-Holland, Amsterdam, 1951].

Pour l’intuitionnisme un ouvrage encyclopédique récent est *Constructivism in Mathematics*: *An Introduction* par A.S. Troelstra et D. van Dalen [2 volumes, North-Holland, Amsterdam, 1988].

Le platonisme de Kurt Gödel est exposé dans les articles ‹‹ Russell’s Mathematical Logic ›› de 1944 et ‹‹ What is Cantor’s Continuum Problem? ›› de 1947, qu’on trouvera dans le recueil *Philosophy of Mathematics* [P. Benacerraf and H. Putnam eds, Blackwell, Oxford, 1964, second edition 1983] ou dans le deuxième volume des œuvres complètes de Gödel [*Collected Works*, *Volume II*, *Publications 1938-1974*, Oxford University Press, New York, 1990].

Une introduction facile mais précise à l’arithmétique formelle, à la théorie de la calculabilité et aux théorèmes d’incomplétude se trouve dans le livre *Computability and Logic* de G. Boolos et R.C. Jeffrey [Cambridge University Press, Cambridge, plusieurs éditions depuis 1974]. Un livre très récent sur les grands résultats de Gödel est *Gödel’s Incompleteness Theorems* de R.M. Smullyan [Oxford University Press, Oxford, 1992; traduction française: *Les théorèmes d’incomplétude de Gödel*, Masson, Paris, 1993]. Une introduction aux théorèmes combinatoires non-démontrables dans l’arithmétique de Peano peut être trouvée dans les articles de C. Smoryński ‹‹ Some Rapidly Growing Functions ›› [*The Mathematical Intelligencer* 2(1980), 149-154] et ‹‹ ‘Big’ News from Archimedes to Friedmann ›› [*Notices of the American Mathematical Society* 30(1983), 251-256].

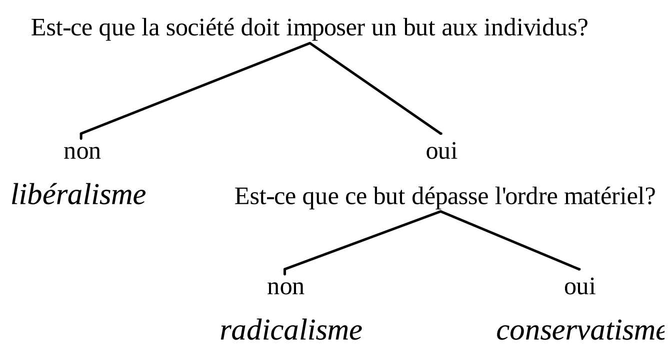
Les œuvres complètes de Gerhard Gentzen ont été publiées dans une traduction anglaise [*The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland, Amsterdam, 1969]. Il existe une traduction française de son ouvrage fondamentale de 1934 *Recherches sur la déduction logique* [Presses Universitaires de France, Paris, 1955].

Un appendice structuraliste

Le genre auquel appartient la classification des doctrines de la philosophie des mathématiques que nous avons donnée ci-dessus peut être trouvé ailleurs en philosophie. Au fond, cela est bien naturel. Cette classification est engendrée par une question à laquelle nous répondons par ‹‹ oui ›› ou par ‹‹ non ››, une nouvelle question se posant pour une de ces réponses. Une démarche si simple et si générale ne pourrait se limiter à la seule philosophie des mathématiques. Il peut tout de même paraître étonnant qu'une autre classification, en épuisant en deux questions le champ du possible, reproduise exactement la figure de notre classification de la philosophie des mathématiques.

Nous allons prendre l'exemple d'une telle classification à la philosophie politique. Les grandes doctrines de cette philosophie, telles qu'elles se sont cristallisées au dix-neuvième siècle, sont le libéralisme, le radicalisme et le conservatisme. Le libéralisme est représenté par les œuvres de Benjamin Constant, Alexis de Tocqueville et John Stuart Mill. La doctrine la plus citée du radicalisme est celle de Karl Marx, mais d'autres courants de pensée, pas forcément socialistes, s'y rattachent aussi. L'antécédent du conservatisme est dans Platon, alors que ses représentants du siècle dernier sont Joseph de Maistre et Edmund Burke.

Présentons maintenant notre classification de la philosophie politique:



Bien sûr, les doctrines classifiées ici ne se résument pas dans les seules réponses qu'elles donnent à nos deux questions, comme du reste les doctrines de la philosophie des mathématiques ne se résumaient pas dans les réponses données aux questions de la classification précédente. En plus, nous classifions ces doctrines à l'état pur, alors que ce que nous trouvons dans la vie est d'habitude un mélange. Le libéralisme est, suivant la mode, mélangé à une plus ou moins forte dose de radicalisme ou de conservatisme, et le conservatisme sert souvent de masque à des conceptions radicales.

On ne pourrait conclure du parallélisme qui existe entre ces deux classifications qu’il y ait une analogie importante entre le formalisme pur et le libéralisme, le constructivisme et le radicalisme, le platonisme et le conservatisme. Du reste, en donnant un autre tour à nos questions (en demandant, par exemple, ‹‹ Est-ce que ce but est de l’ordre matériel ? ›› au lieu de ‹‹ Est-ce que ce but dépasse l’ordre matériel ? ››) on peut facilement changer la position des doctrines dans nos figures. Il peut tout de même être amusant de voir ce que serait d’après nos deux figures le pendant du programme de Hilbert en philosophie politique.

Cela devrait être un libéralisme mélangé avec du radicalisme et du conservatisme. Il dirait que les vrais buts de la société sont d’ordre matériel et que ces buts s’imposent aux individus. Par contre, les buts d’ordre spirituel ne sont qu’une façon de parler, et là les individus peuvent exercer leur libre choix, pourvu que cela n’ait pas de conséquences fâcheuses dans l’ordre matériel. L’analogue de la conservativité du programme de Hilbert ressemble un peu à l’adage: ‹‹ Vous pouvez penser tout ce que vous voulez tant que vous ne le pensez pas sérieusement. ›› Pourtant, les effets les plus souhaitables sont obtenus en avouant avoir les mêmes buts que ceux que se donne le conservatisme (qu’il ne faut pas confondre avec la conservativité de tout à l’heure). Ces buts-là ne nuisent pas et peuvent aider.

Nous n’irons pas jusqu’à tester ces analogies fragiles en cherchant ce que seraient en politique les théorèmes d’incomplétude. Remarquons toutefois que l’esprit qui émane de ce ‹‹ no nonsense ›› libéralisme dont nous venons de faire l’esquisse c’est l’esprit somme toute assez familier d’un professionnel de la politique.[*]

[*] Je voudrais remercier le Séminaire d'Epistémologie Comparative de l'Université de Provence, et en particulier Pierre Livet, de m'avoir invité à présenter cet article à Aix-en-Provence en février 1994. En novembre 1994, l'article a fourni le sujet d'une conférence au Séminaire du Département de Mathématiques et Informatique de l'Université de Montpellier III, que je tiens à remercier également pour l'hospitalité qu'il m'a accordée durant les deux années précédentes.