Über die Größe der unmittelbaren Berührung zweier Punkte.

Beitrag zur Begründung der diskreten Geometrie.

Von

Dr. Branislav Petronievics.

Auf dem Boden der geltenden Geometrie hat die hier zu behandelnde Frage keine prinzipielle Bedeutung. Für die neue Geometrie aber, die den Raum als endliches, aus einfachen Punkten bestehendes Diskretum auffaßt, ist sie geradezu die Lebensfrage. In meinem jüngst erschienenen metaphysisch-mathematischen Werke[1] habe ich diese Frage eingehend behandelt, doch erfordern einige Hauptpunkte darin eine nähere Erörterung, um den etwaigen Mißverständnissen, denen ja jede neue Auffassung der als längst erledigt geltenden Sachen ausgesetzt ist, vorzubeugen. Außerdem will ich hier einen neuen streng mathematischen Beweis meiner grundlegenden Bestimmung der Größe der unmittelbaren Berührung zweier Punkte geben, wodurch die von mir in dem oben erwähnten Werke begründete neue diskrete Geometrie eine wesentliche Stütze erlangt.

Die diskrete Geometrie betrachtet, wie gesagt, den Raum als endliches, aus einfachen Punkten bestehendes Diskretum. Die grundlegende Voraussetzung nun, von der sie ausgeht und von der ihre Möglichkeit abhängt, ist die Unterscheidung zweier Punktenarten, aus denen der diskrete Raum besteht. Nur dann könnten alle den diskreten Raum zusammensetzenden Punkte von einer Art sein, wenn der Raum als leeres, neben den Dingen bestehendes Wesen aufgefaßt wird: in diesem Falle muß er sich

[1] Prinzipien der Metaphysik. Erster Band. Erste Abteilung. Allgemeine Ontologie und die formalen Kategorien. Mit einem Anhang: Elemente der neuen Geometrie und III Tafeln mit 56 geom. Figuren. Heidelberg 1904.

aber, wie ich eingehend dargelegt habe, in das absolute Kontinuum verwandeln.[1] Soll also der Raum ein Diskretum sein, so kann er erstens kein leerer, muß vielmehr reeller, d. h. aus reellem Seinsmaterial bestehender Raum sein — in welchem Falle also kein Unterschied zwischen Raum und Materie besteht — und zweitens, was unmittelbar aus dieser seiner Realität folgt, sind die ihn zusammensetzenden einfachen Punkte nicht mehr von einer und derselben Art. Denn in diesem Falle bestehen neben den reellen einfachen Punkten, aus denen der diskrete Raum in erster Reihe besteht, irreelle einfache Punkte, und zwar zwischen je zweien jener ersten Punkte, die sich unmittelbar miteinander berühren, besteht ein solcher irrealer Punkt. Den realen Punkt nenne ich Mittelpunkt und den irrealen Punkt Zwischenpunkt, Ausdrücke, die ihren Unterschied, wie mir scheint, klar angeben.

Es ist nun ohne weiteres klar, daß die Größe des einfachen realen Mittelpunktes im diskreten Raume gleich *1* sein muß, d. h. daß derselbe das reale Korrelatum der arithmetischen einfachen Einheit darstellen muß. Man kann darüber streiten, ob ein solcher realer Punkt möglich ist oder nicht; wenn man aber einmal seine Möglichkeit zuläßt, dann muß seine Größe gleich *1* gesetzt werden, denn die Größe Null würde ja in diesem Falle die Abwesenheit des realen Seinsinhalts bedeuten, was jedoch unmöglich und widersprechend ist.[2] Ganz anders steht es aber mit der Frage nach der Größe des irrealen Zwischenpunktes. Denn, wie es einleuchtend ist, daß die Größe des reellen Mittelpunktes gleich *1* sein muß, ebenso einleuchtend scheint es zu sein, daß die Größe des irreellen Zwischenpunktes im diskreten Raume gleich *0* sein muß, gerade so wie in dem kontinuierlichen Raume der einfache Punkt größenlos ist, d. h. seine Größe gleich *0* gesetzt wird.

Was ich nun behaupte und wovon die Möglichkeit der diskreten Geometrie als wirklicher mathematischer Disziplin abhängt, besteht darin, daß die Größe des irreellen Zwischenpunktes im diskreten Raume ebenso gleich *1* zu setzen ist, wie die Größe des reellen Mittelpunktes *1* beträgt.

Für diese Behauptung habe ich in meinem Werke drei Gründe angeführt. Die zwei ersten Gründe gehen von dem Begriffe des irreellen Zwischenpunktes aus, während der dritte von der inneren

---

[1] Vergl. „Prinzipien der Metaphysik etc." S. 229—230 im Zusammenhang mit S. 202—206 und S. 222—225.

[2] a. a. O. S. 249—250 im Zusammenhang mit S. 138—139.

mathematischen Struktur des diskreten Raumes ausgeht, speziell von dem Begriffe der imaginären Berührung.

Wir wollen hier die drei Gründe, jeden für sich, etwas eingehender betrachten als es an dem angeführten Orte schon geschehen ist, und besonders den dort knapp behandelten dritten Grund hier nach seinen mathematischen Konsequenzen betrachten, worin der von mir erwähnte neue mathematische Beweis der diskreten Geometrie eingeschlossen ist, und zuletzt werde ich noch einen vierten, in jenem Werke fast gar nicht berücksichtigten Grund hinzufügen, der die logische Grundlage zu jenem rein mathematischen Beweise liefert und zugleich die letzte logische Grundlage der beiden ersten Gründe bildet. Auch wird der Begriff der imaginären Berührung und der Berührung überhaupt im folgenden eine ausführliche und definitive Formulierung erhalten.

Der erste Grund, der für unsere Behauptung anzuführen ist, geht unmittelbar von dem Begriffe des irreellen Zwischenpunktes aus, und zwar insofern derselbe eben ein Punkt ist. Und tatsächlich muß die Größe des irreellen Zwischenpunktes schon deshalb gleich *1* gesetzt werden, weil er als Punkt ganz ebenso etwas einfaches und unteilbares ist wie der reelle Mittelpunkt. Der Begriff des Punktes muß nämlich auf dem Standpunkte der diskreten Geometrie anders aufgefaßt werden als auf dem Standpunkte der kontinuierlichen Geometrie. Denn auf dem Standpunkte der kontinuierlichen Geometrie ist jede extensive Größe ins Unendliche teilbar, so daß der Punkt als etwas einfaches und unteilbares selbstverständlich keine Größe haben kann, seiner Größe nach also gleich *0* gesetzt werden muß. Auf dem Standpunkte der diskreten Geometrie dagegen besteht jede räumliche Größe aus einfachen unteilbaren Punkten, und wenn für die diskrete Geometrie der reelle Punkt seiner Unteilbarkeit und Einfachheit wegen gleich *1* gesetzt wird, dann muß dasselbe auch für den irreellen Punkt gelten, da derselbe ja als Punkt ganz ebenso einfach und unteilbar ist. In formeller Hinsicht, d. h. in Hinsicht der Größe, besteht ja kein Unterschied zwischen den beiden Punktenarten, ihr Unterschied ist ja nur ein qualitativer, der eine ist mit realem Inhalte erfüllt, während der andere keinen solchen Inhalt hat.[1] Freilich, wenn die Größe des irreellen

[1] a. a. O. S. 251.

Zwischenpunktes gleich *1* gesetzt wird, dann muß derselbe als leere, einfache, nichtseiende Lücke aufgefaßt werden, und daß in dem Begriffe einer solchen eine metaphysische Schwierigkeit liegt, ist nicht zu leugnen. Auf diese Schwierigkeit werden wir später noch zu sprechen kommen, für jetzt bemerken wir aber, daß sich der diskrete Geometer als solcher um dergleichen Schwierigkeiten nicht zu kümmern braucht, daß derselbe als reiner Mathematiker nur dahin streben muß, die Grundbegriffe der diskreten Geometrie logisch tadellos zu entwickeln.

Der zweite Grund, der für unsere Behauptung anzuführen ist, geht ebenfalls von dem Begriffe des irreellen Zwischenpunktes aus, aber insofern dieser Punkt die Entfernung zweier reellen Punkte ist und bedeutet. Auf dem Standpunkte der kontinuierlichen Geometrie ist die Entfernung zwischen zwei Punkten stets eine extensive Strecke, so daß zwei sich unmittelbar berührende Punkte überhaupt nicht bestehen. Es scheint nun, daß, wenn sich zwei reale Punkte im diskreten Raume miteinander unmittelbar berühren, ihre Entfernung nur gleich *0* gesetzt werden könne. Denn wie die Enden zweier sich miteinander berührenden Strecken im kontinuierlichen Raume in der Entfernung *0* voneinander liegen, ebenso scheint es, daß auch die Entfernung der sich berührenden realen Punkte im diskreten Raume gleich *0* gesetzt werden müsse. Dem ist aber nicht so. Wir dürfen den Entfernungsbegriff der kontinuierlichen Geometrie nicht so ohne weiteres auf den Raum der diskreten Geometrie übertragen. Die Entfernung der Enden zweier sich berührenden Strecken im kontinuierlichen Raume ist nur deshalb gleich *0* zu setzen, weil in Wahrheit die zwei Strecken nur Teile einer einzigen Strecke sind, die durch den mathematischen Punkt in rein fiktiver Weise in zwei Teile geteilt worden ist, in dem Kontinuum selbst als solchem ist dadurch reell gar keine Teilung resp. Trennung der zwei Strecken resp. ihrer einander zugekehrten Enden vorgenommen, es ist also keine wirkliche Entfernung der beiden Enden vorhanden, ihre Entfernung ist also wirklich gleich *0* zu setzen. Es ist ja nur ein anderer Ausdruck derselben Tatsache, wenn jede Entfernung im kontinuierlichen Raume eine extensive Strecke ist und wenn zwei sich unmittelbar berührende Punkte nicht vorhanden sind.

Ganz anders steht aber die Sache in dem diskreten Raume. Die ungeteilte extensive Strecke des kontinuierlichen Raumes zerfällt hier in eine Reihe von realen, sich miteinander berührenden

Punkten, und den beiden Enden der zwei durch einen mathematischen Punkt fiktiverweise getrennten Teilstrecken jener ganzen Strecke entsprechen zwei reale Punkte, während dem mathematischen Punkt der irreelle Zwischenpunkt entspricht. Während nun der mathematische Punkt im kontinuierlichen Raum nur in rein fiktiver Weise die zwei Enden voneinander trennte, trennt der irreelle Zwischenpunkt im diskreten Raum in ganz reeller Weise die zwei realen Punkte voneinander. Im kontinuierlichen Raume ist die Entfernung zwischen zwei Punkten stets eine ins Unendliche teilbare Strecke, im diskreten Raume dagegen haben wir Punkte, die sich unmittelbar miteinander berühren, deren Entfernung also keine extensive ausgedehnte Strecke darstellt. Diese unausgedehnte einfache Lücke zwischen den zwei sich unmittelbar miteinander berührenden Punkten des diskreten Raumes ohne weiteres gleich *0* zu setzen, heißt also nicht mehr und nicht weniger, als den wesentlichen Unterschied des diskreten von dem kontinuierlichen Raume verkennen. Die zwei realen, sich unmittelbar berührenden Punkte sind in dem diskreten Raume wirklich voneinander getrennt, sie sind also in wahrem Sinne des Wortes voneinander entfernt. Die Extension des diskreten Raumes besteht in dem Außereinandersein der ihn konstituierenden Punkte, sind diese Punkte nicht außereinander, sind sie nicht voneinander wirklich getrennt, dann ist der diskrete Raum nicht vorhanden. Man kann die Möglichkeit des diskreten Raumes leugnen; läßt man aber einmal die Möglichkeit der einfachen realen Punkte zu, dann muß man auch zugeben, daß nur wenn diese Punkte außereinander sind und nicht miteinander zusammenfallen, der diskrete Raum wirklich aus ihnen zusammensetzbar ist! Wenn nun zwei reale Punkte nur dadurch Raumpunkte sind, daß sie außereinander sind, daß sie durch einen leeren Zwischenpunkt voneinander getrennt sind, dann kann die Größe dieses letzteren Punktes nicht mehr gleich *0*, sie muß gleich *1* gesetzt werden. Denn die Entfernung *0* würde in diesem Falle nicht mehr und nicht weniger bedeuten, als daß die zwei realen Punkte überhaupt nicht voneinander getrennt sind, daß sie nicht außereinander sind,[1] denn die Entfernung *0* heißt Aufhebung jeder Entfernung, in diesem Falle also Aufhebung des wirklichen Getrenntseins beider Punkte. Sobald also das Wesentliche und

---

[1] a. a. O. S. 269 und 272.

Eigentümliche des diskreten Raumes in seinem Unterschiede von dem kontinuierlichen eingesehen wird, muß auch die Notwendigkeit, die Größe der unmittelbaren Berührung zweier Punkte gleich *1* zu setzen, eingesehen werden.

Der dritte und im rein geometrischen Sinne entscheidende Grund aber, der für unsere Behauptung anzuführen ist, folgt aus dem Begriffe der mittelbaren oder imaginären Berührung. In der dreieckigen Ebene der Fig. 1 muß man nämlich für die zwei Punkte A und C erstens behaupten, daß sie sich miteinander berühren, und zweitens, daß diese ihre Berührung nicht mit der unmittelbaren Berührung der Punkte A und B identisch ist. Die Punkte A, C und C' liegen offenbar ebenso in der Geraden AC' wie die Punkte A, B und B' in der Geraden AB' liegen (resp. diese Gerade konstituieren), und wenn man für A und B' sagt, daß sie sich deshalb nicht berühren, weil sie von dem dazwischenliegenden Punkte B voneinander getrennt sind, während die Punkte A und B (resp. B und B') sich gerade deshalb miteinander berühren, weil sie von keinem dazwischenliegenden Punkte mehr getrennt sind, so muß man ganz ebenso für die durch den dazwischenliegenden Punkt C voneinander getrennten Punkte A, C' behaupten, daß sie sich miteinander nicht berühren und also für die Punkte A und C (resp. C und C'), daß sie sich miteinander berühren, weil sie eben von keinem dazwischenliegenden Punkte voneinander getrennt sind. Zugleich leuchtet aber auch ein, daß die Berührung zwischen den Punkten A und C mit derjenigen zwischen den Punkten A und B nicht identisch ist, denn jene erste Berührung stellt offenbar eine größere Entfernung dar als diese zweite Berührung. Ich habe nun ausführlich nachgewiesen, daß sich jene erste Berührung von der zweiten dadurch unterscheidet, daß sie ein reines Entfernungsverhältnis darstellt und nichts weiter, während die zweite außerdem noch eine leere unausgedehnte nichtseiende Lücke darstellt: jene erste Berührung nenne ich infolgedessen imaginär, während ich die zweite reell nenne, da sie, um bestehen zu können, mit einer besonderen Realität erfüllt werden müsse.[1] Man kann aber diese Ausdrücke in dem rein geometrischen Sinne aus später anzuführenden Gründen durch die Ausdrücke der primären und der sekundären Berührung ersetzen, in welchem Falle dann die entsprechenden Geraden als primäre und sekundäre zu bezeichnen wären.

[1] a. a. O. S. 267—269.

Auf Grund der Tatsache der imaginären Berührung nun ist es leicht einzusehen, daß die Größe der reellen unmittelbaren Berührung gleich *1* gesetzt werden müsse. Denn wenn die Größe der reellen Berührung gleich *0* gesetzt wird, dann muß auch diejenige der imaginären gleich *0* gesetzt werden, da beide als Berührungen leer sind, nichts Dazwischenliegendes haben, unmittelbare Entfernungsverhältnisse der entsprechenden realen Punkte darstellen, und wenn die eine dieser ihrer Leerheit wegen gleich *0* gesetzt wird, dies auch mit der zweiten geschehen muß.[1] Die Richtigkeit dieses Grundes läßt sich vollständig erst dann einsehen, wenn man in Betracht zieht, daß man die Größe einer geraden Strecke im diskreten Raume nur nach der Anzahl (und Größe) der in ihr enthaltenen Berührungsentfernungen der realen Punkte schätzen kann, daß man die realen Punkte mit ihren Entfernungen nicht summieren kann, da beide völlig disparate Größen sind. Wenn nun die Größe der unmittelbaren Berührungsentfernung gleich *0* gesetzt wird, dann muß allerdings die Extension der realen Strecke gleich der Anzahl der in ihr enthaltenen realen Punkte sein; für die imaginäre Gerade dagegen bliebe jener erste Fall in voller Geltung, d. h. ihre Größe läge nur in der Summe der in ihr enthaltenen imaginären Berührungsentfernungen. Will man also den logischen Widersinn der Summierung der Entfernungen mit realen Punkten für die imaginären Geraden nicht zulassen, dann muß die Größe der imaginären Berührungsentfernung einzig und allein durch diejenige der reellen bestimmt sein, und da diese letztere der Voraussetzung nach gleich *0* ist, so müßte dies offenbar auch für die erstere gelten, was eben unrichtig und unmöglich ist.

Die Richtigkeit dieser Behauptungen und damit die Richtigkeit jenes logischen Grundes wird einleuchtend werden, wenn wir näher in die geometrische Struktur des diskreten Raumes eingehen und die Berechnung der imaginären Berührungsentfernung unter der Voraussetzung, daß die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *0* ist, ausführen. Diese Berechnung werden wir für eine und dieselbe imaginäre Berührungsentfernung, und zwar für die imaginäre Berührungsentfernung der sogenannten Hauptimaginären[2] vornehmen, und zwar sowohl für die dreieckige

[1] a. a. O. S. 272.

[2] Über den Begriff der Hauptimaginären vergl. Elemente der neuen Geometrie, a. a. O. S. 356. Über den Begriff der dreieckigen und der quadratischen Ebene, ebenda S. 343, 352 und 368ff.

wie für die quadratische Ebene. Die Berechnung wird auf Grund des Pythagoräischen Lehrsatzes vorgenommen werden, dessen Geltung, wie leicht nachgewiesen werden kann, völlig unabhängig von der Größenschätzung der diskreten Geraden ist.[1]

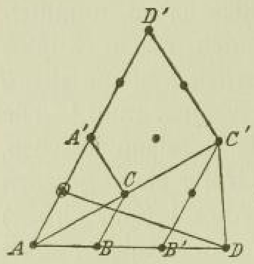

Fig. 1.

Aus der Fig. 1, welche ein Stück der dreieckigen Ebene darstellt, läßt sich die Größe der imaginären Berührungsentfernung AC aus dem rechtwinkeligen Dreieck $AA'C$ leicht berechnen.

Bezeichnen wir die einzelnen realen Punkte mit den Buchstaben A, A', B, B', C, C', D, D' und die imaginäre Berührungsentfernung, die zwischen den Punkten A und C liegt, mit iAC, so ist nach der Voraussetzung:

$$AB = A + B = 2,\ AB' = A + B + B' = 3,$$
$$AD = A + B + B' + D = 4,\ AA' = AB' = 3,\ AD' = 5,\ D'C' = 3;$$
$$AC = A + iAC + C = iAC + 2,$$
$$AC' = A + iAC + C + iAC + C' = iAC' + 3,$$
$$iAC = AC - 2\ (1),\ iAC = \frac{iAC'}{2}\ (2),\ iAC' = AC' - 3\ (3).$$

Nun ist, nach dem Pythagoräischen Lehrsatz, in dem Dreiecke $AA'C$:

$AC = \sqrt{AA'^2 - A'C^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$, also nach (1) $iAC = \sqrt{5} - 2$.

[1] Unmittelbar gilt dies nur für den pythagoräischen Flächensatz. Da sich aber das Quadrat der Fläche auf das Quadrat der Seite zurückführen resp. durch dasselbe ausdrücken läßt (wenn nämlich die Seite des entsprechenden einfachen Quadrats, ohne Rücksicht auf die Art und Weise ihrer Größenschätzung als Gerade, gleich *1* gesetzt wird), so gilt dasselbe mittelbar auch für den Seitensatz. Der aus der Ähnlichkeit der Dreiecke resp. der Proportionalität der Geraden unmittelbar folgende Seitensatz läßt sich dagegen nicht unabhängig von der Art und Weise der Größenschätzung der diskreten Geraden deduzieren, und von den fünf anzuführenden Systemen der diskreten Geometrie, die die Tatsache der imaginären Berührung anerkennen, läßt er sich unmittelbar nur in zweien deduzieren, von denen das eine gerade dasjenige ist, in dem die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *1* gesetzt und keine Summierung von Punkten und Entfernungen zugelassen wird und von denen das andere, wie wir sehen werden, in Wahrheit in bezug auf die Größenschätzung der Geraden mit ihm übereinstimmt. Da nun der Seitensatz mittelbar aus dem Flächensatz folgt, die Geltung des letzteren aber von vornherein feststeht, so muß diejenige Art und Weise der Größenschätzung der diskreten Geraden richtig sein, aus der zugleich unmittelbar der Seitensatz folgt, d. h. die eben erwähnte.

Aus dem Dreiecke $A'C'D'$ folgt ebenso:

$$AC' = \sqrt{AD' - D'C'} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4, \text{ also nach (3)}$$
$$iAC' = 4 - 3 = 1.$$

Nun ist nach (2) $\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{2}$, also $2\sqrt{5} = 5$, also $20 = 25$, was offenbar unrichtig und unmöglich ist.[1]

Aus der Fig. 2, welche ein Stück der quadratischen Ebene darstellt, folgt in analoger Weise:

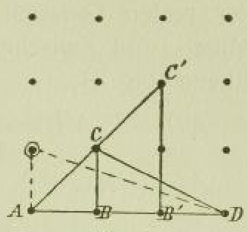

Fig. 2.

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8},$$
$$\text{also } iAC = \sqrt{8} - 2$$
$$AC' = \sqrt{AB'^2 + B'C'^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18},$$
$$\text{also } iAC' = \sqrt{18} - 3.$$

Da aber $iAC = \frac{iAC'}{2}$, so ist $\sqrt{8} - 2 = \frac{\sqrt{18} - 3}{2}$, also $2\sqrt{8} - 4 = \sqrt{18} - 3$, also $4\sqrt{8} = 15$, was offenbar unrichtig ist.

Die mathematische Berechnung zeigt also unzweideutig, daß, wenn die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *0* gesetzt wird, die Größe einer und derselben mittelbaren Berührung dabei völlig unbestimmt ist und aus den verschiedenen Geraden berechnet ganz verschieden ausfällt, was widersprechend und unmöglich ist. Daraus folgt unzweifelhaft, daß die Größe der unmittelbaren Berührung nicht gleich *0* gesetzt werden könne, da in diesem Falle die Größe der reellen Geraden nach der Anzahl der in ihr enthaltenen realen Punkte geschätzt werden müsse, also die Größe der imaginären Geraden nach der Summe der realen Punkte **und** der imaginären Berührungen. Wenn dies letztere nun unmöglich ist und zu widersprechenden Resultaten führt, dann muß erstens die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *1* gesetzt werden und zweitens die Größe der reellen

[1] Berechnet man AC' aus dem Dreieck ADC', in dem $C'D = AC = \sqrt{5}$ ist, so bekommt man $AC' = \sqrt{4^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{21}$, also einen von dem aus dem Dreieck $AC'D'$, wo $AC' = \sqrt{16}$ ist, folgenden verschiedenen Wert. Dieses Resultat, welches schon für sich einen Widerspruch darstellt, liefert noch ein widersprechendes Resultat in bezug auf iAC, wenn iAC aus dem entsprechenden Werte von iAC' berechnet wird, denn in diesem Falle ist $iAC' = \sqrt{21} - 3$ und also $\sqrt{5} - 2 = \frac{\sqrt{21} - 3}{2}$, was unrichtig und unmöglich ist.

Geraden allein in die Summe dieser reellen Berührungen gesetzt werden.

Daß dies letztere nun einzig und allein bei der vorausgesetzten Einheitsgröße des irreellen Zwischenpunktes angenommen werden muß, können wir uns wieder durch eine analoge Berechnung der imaginären Berührungsentfernung AC in den beiden Ebenen überzeugen. Denn wenn wir voraussetzen, daß die Größe der realen Geraden gleich der Summe der in ihr enthaltenen Mittel- und Zwischenpunkte ist, dann wären in der dreieckigen Ebene (Fig. 1):

$$AB = 3,\ A'B' = 5,\ AD = 7,\ AA' = 5,\ AD' = 9,\ D'C' = 5,$$

$$AC = iAC + 2,\ AC' = iAC' + 3,\ iAC = \frac{iAC'}{2}.$$

Aus dem Dreieck $AA'C$ folgt dann:

$AC = \sqrt{AA'^2 - A'C^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$; aus dem Dreieck $AC'D'$ folgt:[1]

$$AC' = \sqrt{AD'^2 - D'C'^2} = \sqrt{81-25} = \sqrt{56}.$$

Nun ist $iAC = AC - 2 = 4 - 2 = 2$, $iAC' = AC' - 3 = \sqrt{56} - 3$, da aber $iAC = \frac{iAC'}{2}$, so ist $2 = \frac{\sqrt{56}-3}{2}$, also $7 = \sqrt{56}$, also $49 = 56$, was unrichtig ist.

Analog folgt für die quadratische Ebene (Fig. 2):

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18},$$
$$AC' = \sqrt{AB' + BC'} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50},$$
$$iAC = \sqrt{18} - 2,\ iAC' = \sqrt{50} - 3, \text{ also}$$
$$\sqrt{18} - 2 = \frac{\sqrt{50}-3}{2}, \text{ also } 4\sqrt{18} = 23,$$

was unrichtig ist.

Wie die Berechnung zeigt, lassen sich die realen Mittelpunkte und die irreellen Zwischenpunkte nicht miteinander summieren, die Berechnung bestätigt also die Behauptung, daß eine solche Summierung einen logischen Widersinn darstellt. Solange die Größe des irreellen Zwischenpunktes gleich *0* gesetzt wird, bleibt

[1] Auch in diesem Falle ergibt die Berechnung von AC' aus dem Dreiecke $AC'D$ ein abweichendes Resultat, nämlich $AC' = \sqrt{7^2 + 4} = \sqrt{53}$. Und daraus folgt ebenso wie im vorigen Falle ein abweichendes Resultat (und Widerspruch) für iAC.

nichts anderes übrig, als die Größe der reellen Geraden in die Summe der realen Punkte selbst zu verlegen; wenn dagegen die Größe des Zwischenpunktes gleich *1* gesetzt wird, dann haben wir zwei verschiedene Einheitsarten der reellen Geraden, die sich nicht miteinander summieren lassen, und wenn dann gefragt wird, in welche von diesen beiden Punktenarten die Größe der reellen Geraden gesetzt werden muß, dann können dies nur die irreellen Zwischenpunkte sein, da dieselben ja die realen Punkte zu räumlichen Punkten machen, die räumliche Entfernung zwischen ihnen darstellen. Und dies wird auf das Beste von den imaginären Geraden bestätigt. Die imaginäre Gerade besteht aus den realen Punkten und den dazwischenliegenden imaginären Berührungsentfernungen: diese beiden können offenbar nicht miteinander summiert werden, da sie ganz verschiedene Größengattungen repräsentieren. Außerdem leuchtet es bei den imaginären Geraden ohne weiteres ein, daß es die Berührungsentfernungen und nicht die realen Punkte sind, die die räumliche Ausdehnung jener Geraden darstellen.

Und tatsächlich stimmt die Rechnung mit diesen logischen Erwägungen vollkommen zusammen. Wird die Größe der Geraden nur in die Summe der entsprechenden Berührungsentfernungen gesetzt, dann zeigt die den obigen analoge Berechnung der imaginären Berührungsentfernung in der dreieckigen und in der quadratischen Ebene, daß in dem ersten Falle

$$AC = \sqrt{AA'^2 - A'C^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \text{ und}$$

$$AC = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{AD'^2 - D'C'^2}}{2} = \frac{\sqrt{4^2 - 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$$

und in dem zweiten Falle

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ und}$$

$$AC = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{AB'^2 + B'C'^2}}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2},$$

es zeigt also die Berechnung, daß in diesem Falle die Größe einer und derselben mittelbaren Berührung stets eine und dieselbe Größe bleibt, möge man sie berechnen aus welchen Geraden man es wolle, die entsprechenden Voraussetzungen müssen also richtig sein.

Es kann aber anscheinend noch eine Voraussetzung über die Größenschätzung der Geraden gemacht werden. Bisher hatten wir immer vorausgesetzt, daß die Einheit der Geraden in dem Punkte als solchem liegt und wir fragten nur, ob der reelle oder der irreelle Punkt als Einheit der (reellen) Geraden anzusehen ist. Man kann aber diese grundlegende Voraussetzung bezweifeln und behaupten, daß als Einheit der Geraden nicht ein Punkt, sondern die einfachste Gerade, d. h. die zwei durch einen irreellen Zwischenpunkt getrennten realen Punkte (und nicht dieser irreelle Zwischenpunkt selbst) anzusehen sind. In diesem Falle könnte dann ganz gut die Größe des irreellen Zwischenpunktes gleich *0* gesetzt werden. Die Größe der reellen Geraden wäre auch in diesem Falle nur von der Anzahl der in ihr vorhandenen realen Punkte abhängig, obgleich nicht dieser Anzahl selbst gleich; dagegen wäre auch in diesem Falle die imaginäre Gerade gleich der Summe der in ihr enthaltenen Berührungsentfernungen und der in ihr enthaltenen realen Punkte, die in derselben Weise gezählt werden müßten, wie dies in der reellen Geraden geschieht. Und in der reellen Geraden müßte diese Zählung so vorgenommen werden, daß jeder zwischen zwei Punkten liegende Punkt einerseits mit dem vorhergehenden und andererseits mit dem nachfolgenden zusammengezählt wird. So z. B. müßte die Größe der aus drei realen Punkten bestehenden Strecke AB' gleich *2* gesetzt werden, da der mittlere Punkt B einerseits mit dem Punkte A die einfache Gerade AB und andererseits mit dem Punkte B' die einfache Gerade BB' ausmachen müßte. Denn würde man die Größenschätzung der Geraden AB' nicht in dieser Weise vornehmen, dann müßte man die Größe dieser Geraden gleich $1\frac{1}{2}$ setzen, in welchem Falle aber die aus zwei realen Punkten bestehende Gerade nicht mehr als unteilbare Linie gelten würde. Andererseits aber ist doch diese letztere Annahme nicht ganz unlogisch, verglichen mit der ersten, da diese letztere in demselben Maße unlogisch ist. Denn daß ein und derselbe Punkt zweier einfachen Geraden als Bestandteil angehört, heißt in Wahrheit nichts anderes, als daß er keinen von beiden angehört, daß in diesem Falle die reelle Gerade nach den in ihr enthaltenen irreellen Zwischenpunkten, deren Größe damit gleich *1* gesetzt wird, in ihrer Größe geschätzt wird. Wenn zwei reelle Punkte zusammen eine einfache Gerade bilden, dann können zwei einfache Geraden keine gemeinsamen reellen Punkte miteinander haben — dies ist logisch konsequent. Aber so logisch und begrifflich konsequent die Sache auch scheinen mag, sie gerät in

Konflikt mit der räumlichen Anschauung, die uns Geraden zeigt, deren Größe unter dieser Voraussetzung nur dann logisch tadellos vollzogen werden kann, wenn ein und derselbe (mittlere) Punkt als Bestandteil in zwei einfache Geraden eintritt, sonst müßte die Größe einer solchen Geraden gleich einer Einheit und einer Hälfte gesetzt werden, was noch mehr der grundlegenden Voraussetzung widerspricht.

Wie diese Ausführung zeigt, kann man also unter der Voraussetzung, daß die Einheit der reellen Geraden in die aus zwei reellen Punkten bestehende einfache Gerade verlegt wird, in zweifacher Weise die Schätzung der Größe dieser Geraden vornehmen, entweder indem man jeden mittleren Punkt als gemeinsamen Punkt zweier einfachen Geraden betrachtet oder indem man den einfachen realen Punkt gleich $\frac{1}{2}$ setzt und dann die Punkte einfach summiert. Die zwei in gleicher Weise logisch möglichen (resp. logisch widersinnigen) Größenschätzungen der reellen (und mit entsprechender Modifikation auch der imaginären) Geraden, die aus der Grundvoraussetzung folgen, zeigen nur, daß die Grundvoraussetzung selbst unmöglich und widersinnig ist, was auch durch die Rechnung bestätigt wird. Wir wollen diese Rechnung zuerst für den zweiten der obigen Fälle durchführen, da sie in ganz analoger Weise wie in früheren Fällen anzustellen ist, während dies für den ersten Fall nicht mehr gilt, und für denselben in einer anderen Weise angestellt werden muß.

Für den zweiten Fall ist nämlich in der dreieckigen Ebene der Fig. 1:

$$AB = 1,\ AB' = 1\tfrac{1}{2},\ AD = 2,\ AA' = 1\tfrac{1}{2},\ AD' = 2\tfrac{1}{2}$$

$$AC = iAC + 1,\ AC' = 2\,iAC + 1\tfrac{1}{2},\ iAC = AC - 1\ (1),$$

$$iAC = \frac{AC' - 1\tfrac{1}{2}\ (2).}{2}$$

Nun ist aus dem Dreieck $AA'C$, $AC = \sqrt{(1\tfrac{1}{2})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ und

$$iAC = \frac{\sqrt{5} - 2}{2}.$$

Aus dem Dreieck $AC'D'$ folgt $AC' = \sqrt{(\tfrac{5}{2})^2 - (\tfrac{3}{2})^2} = 2$, also

$iAC = \frac{2 - \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{4}$, es würde also $\frac{\sqrt{5} - 2}{2} = \frac{1}{4}$ sein, was unrichtig ist.

Aus der quadratischen Ebene der Fig. 2 folgt in analoger Weise:

$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \text{ also } iAC = \sqrt{2} - 1,$$

$$AC' = \sqrt{(\tfrac{3}{2})^2 + (\tfrac{3}{2})^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \text{ also } iAC = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}(\sqrt{2} - 1),$$

es müßte also $\sqrt{2} - 1 = \frac{3}{4}(\sqrt{2} - 1)$ sein, was offenbar unrichtig ist.

Für den ersten Fall würde die dem vorigen Fall entsprechende Berechnung keinen Widerspruch ergeben. Denn in diesem Falle wäre in der dreieckigen Ebene die imaginäre Berührungsentfernung iAC einerseits gleich $\sqrt{3} - 1$ und andererseits gleich $\frac{2\sqrt{3} - 2}{2}$, also wieder gleich $\sqrt{3} - 1$, und in der quadratischen Ebene iAC einerseits gleich $\sqrt{2} - 1$ und andererseits gleich $\frac{2\sqrt{2} - 2}{2}$, also wieder gleich $\sqrt{2} - 1$, es würde also gar kein Widerspruch entstehen. Der wahre Grund, der es macht, daß in diesem Falle kein solcher erscheint, liegt einfach darin, daß ja, wie oben bemerkt, in diesem Falle die Größenschätzung der reellen Geraden nur scheinbar gleich der Anzahl der aus je zwei reellen Punkten bestehenden einfachen Geraden ist, sondern in Wahrheit gleich der Anzahl der in ihr enthaltenen irreellen Zwischenpunkte, deren Größe gleich 1 ist, ist. Die Größe der imaginären Berührungen ist dann in Wahrheit aus den reellen Berührungen berechnet, und wenn ich von Größen, die in einem bestimmten Verhältnis stehen (wie oben iAC und $2\,iAC$), andere Größen (1, 2) abziehe, die in demselben Verhältnis (1 : 2) stehen, so wird dabei offenbar kein Widerspruch entstehen. Es ist aber doch ein großer Unterschied, ob ich die imaginäre Entfernung iAC gleich $\sqrt{3}$ (resp. $\sqrt{2}$) oder gleich $\sqrt{3} - 1$ (resp. $\sqrt{2} - 1$) setze, und es muß, wenn ein von diesen beiden Gleichheitsfällen unrichtig ist, dies in irgend einer Form in unrichtigen geometrischen Größenverhältnissen zum Vorschein kommen. Die folgende Betrachtung zeigt dies auch in der Tat für die Gleichsetzung von iAC mit $\sqrt{3} - 1$ resp. $\sqrt{2} - 1$.

Nach einem bekannten geometrischen Lehrsatz muß in dem Dreiecke ADO (Fig. 1) $AD > OD$ sein, weil offenbar $\angle AOD > OAD$. Nach der oben gemachten Voraussetzung ist nun $AD = 3$ und $OD = \sqrt{7}$, und die Ungleichung bleibt richtig für die ganzen Strecken. Dieselbe muß aber offenbar auch für die reinen Entfernungen zwischen den Punkten A und D einerseits und D und O andererseits gelten, da $AD-1>OD-1$. Die reine Entfernung zwischen den Punkten A und D wird nun offenbar von der einfachen Geraden BB' dargestellt; die Größe dieser einfachen Geraden ist aber nach der Grundvoraussetzung gleich 1 zu setzen, so daß, da $AD-1=BB'=1$ ist, $OD-1=\sqrt{7}-1<1$ wäre, was offenbar unrichtig und unmöglich ist. Wie man also sieht, haben wir hier eigentlich mit einem doppelten Widerspruch zu tun. Denn einerseits ist die Größe der reinen Entfernungsstrecke BB' resp. AD ihrer Größe nach, wenn sie nämlich aus der ganzen Strecke AD berechnet wird, gleich *2* und andererseits ist dieselbe Strecke, wenn sie nämlich für sich betrachtet wird, gleich *1* und dies beides nach einer und derselben Grundvoraussetzung, was offenbar ein Widerspruch ist. Außer diesem Widerspruche haben wir dann noch den Widerspruch, daß, da $BB'=1$ ist, die reine Entfernungsstrecke AD kleiner als die reine Entfernungsstrecke OD ist, was eben unmöglich ist und jenem Lehrsatze widerspricht. In der quadratischen Ebene (Fig. 2) muß in analoger Weise $AD>CD$ (nicht OD) sein und demnach auch $AD-1>CD-1$, also $1>\sqrt{5}-1$, was offenbar unrichtig und unmöglich ist.

Alle die bisherigen Berechnungen haben uns also gezeigt, daß nur in einem Falle, und zwar wenn die Größe des irreellen Zwischenpunktes gleich *1* gesetzt wird und reelle Punkte mit den Berührungsentfernungen nicht summiert werden, in dem diskreten Raume keine Widersprüche auftreten. Wäre die Größe des irreellen Zwischenpunktes gleich *0*, dann müßte, da man den logischen Widersinn von der Summierung der reellen Punkte mit den imaginären Berührungen nicht zulassen kann und infolgedessen die imaginäre Berührungsentfernung nur aus der reellen berechnet werden kann, die Größe dieser letzteren auch gleich *0* sein, womit die Richtigkeit jenes logischen Grundes bestätigt ist. Die von uns vorgenommenen Rechnungen zeigen eben zunächst, daß die imaginäre Berührungsentfernung nicht aus den reellen Punkten resp. aus der Summierung derselben mit den reellen Punkten berechnet werden kann, und sie zeigen damit indirekt, daß sie nur aus der reellen Berührung berechnet werden kann. Daraus folgt, daß, wenn diese letztere gleich *0* gesetzt wird, auch jene erstere gleich *0* wird, und daß, wenn diese letztere dies nicht ist und nicht sein kann, es auch die erstere nicht ist und nicht sein kann, jene erstere also gleich *1* ist (da sie offenbar als Punkt entweder gleich *0* oder gleich *1* sein kann). Alle die Berechnungen zusammen bilden den von uns als Stütze und Bestätigung des dritten logischen Grundes vorgebrachten mathematischen Beweis.

In den bisherigen Berechnungen lassen sich fünf verschiedene Systeme der diskreten Geometrie unterscheiden. Das erste von ihnen ging von der Voraussetzung aus, daß die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *0* sei und die Größe der realen Geraden gleich der Anzahl der in ihr enthaltenen realen Punkte; das zweite von der Voraussetzung, daß die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *1* sei und die Größe der realen Geraden gleich der Summe der in ihr enthaltenen realen und irrealen Punkte; das dritte von der Voraussetzung, daß die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *1* sei, die Größe der realen Geraden aber nur gleich der Anzahl der in ihr enthaltenen irrealen Punkte; das vierte ging von der Voraussetzung aus, die Größe der unmittelbaren Berührung sei *0* und die Größe der reellen Geraden gleich der halben Anzahl der in ihr enthaltenen realen Punkte; und schließlich das fünfte von der Voraussetzung, daß die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *0* sei, die Größe der reellen Geraden dagegen mit der Anzahl der in ihr enthaltenen irrealen Zwischenpunkte übereinstimme. Wie man also sieht, ist in dem ersten, vierten und fünften System die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *0*, in dem zweiten und dritten gleich *1* gesetzt; in bezug auf die Größenschätzung der realen Geraden stimmen das dritte und das fünfte System miteinander überein, während das erste und das vierte insofern miteinander übereinstimmen, inwiefern beide nur die realen Punkte in Betracht ziehen, und nur das zweite beide Punktearten dabei in Betracht zieht. In bezug auf die Größenschätzung der imaginären Geraden stimmen alle die übrigen Systeme außer dem dritten darin überein, daß sie bei dieser Schätzung außer den imaginären Berührungsentfernungen auch die realen Punkte in Betracht ziehen (diese Summierung beider Elemente geschieht in dem ersten und zweiten System auf die gleiche Weise, während das vierte und fünfte System, neben einer gewissen Übereinstimmung, dabei sowohl untereinander als auch verglichen mit den beiden ersten Unterschiede zeigen), während das dritte System nur die imaginären Berührungen dabei in Betracht zieht. Wenn diese Größenschätzung der imaginären Geraden mit der entsprechenden Größenschätzung der reellen Geraden verglichen wird, so nimmt man wahr, daß nur das zweite und das dritte System dabei konsequent verfahren: in dem ersten sind in beiden Fällen sowohl die realen Punkte wie die Berührungsentfernungen, in dem zweiten in beiden Fällen nur die Berührungsentfernungen maßgebend.

Im Gegensatz zu all' den angeführten fünf Systemen nun, die die Tatsache der imaginären Berührung als solche zulassen und anerkennen, ist ein sechstes System denkbar, welches einfach darin bestünde, die Tatsache der imaginären Berührung als solche zu leugnen, und damit mit einem Schlage all' der Widersprüche los wäre, die daraus für diejenigen Systeme erfolgt, bei denen die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *0* ist. Dieses System würde also mit dem ersten System insofern vollständig übereinstimmen, inwiefern dasselbe mit diesem letzteren behaupten würde, daß die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *0* sei und demnach die Größe der reellen Geraden gleich der Anzahl der in ihr enthaltenen realen Punkte, während dasselbe dagegen die Existenz der imaginären Berührungsentfernung und der imaginären Geraden leugnen würde, und damit einerseits die logische Inkonsequenz, die in der Nichtübereinstimmung der Größenschätzung der beiden Geradenarten in dem ersten System besteht, vermeiden und ebenso die widersprechenden Resultate, die damit im Zusammenhang stehen. Wenn man die imaginären Geraden leugnen würde, dann müßte man in der dreieckigen Ebene als mögliche Figuren nur das gleichseitige Dreieck, in der quadratischen nur das Quadrat zulassen, alle übrigen geometrischen Figuren wären absolut unmöglich, also auch das rechtwinkelige Dreieck zusammen mit dem Pythagoräischen Lehrsatz.

Ich erwähne dieses sechste System einerseits deshalb, weil dasselbe die wahre Grundlage der diskreten Geometrie selbst in Frage stellt und andererseits auch deshalb, weil dasselbe historisch zuerst, und nicht nur zuerst, sondern explicite einzig und allein aufgetreten ist. Die berühmte arabische Schule der Mutakallimun hat dieses System der diskreten Geometrie am konsequentesten vertreten. In dem bekannten klassischen Beispiele, welches die Gegner der diskreten Geometrie gegen diese vorgebracht und die Vertreter der letzteren befriedigend zu lösen nicht vermocht haben, kommt eben deutlich die Frage nach der Existenz der imaginären Geraden zum Vorschein. Wenn der Raum diskret ist und aus realen Punkten besteht, dann, so behaupten die Gegner der diskreten Geometrie, muß die Diagonale AC in dem Quadrat $ABCD$ (Fig. 3) gleich der Seite AB sein, da beide Strecken aus einer gleichen Anzahl von (realen) Punkten bestehen. Diese Schwierigkeit lösen die Mutakallimun einfach so, daß sie die Existenz der Diagonale leugnen, indem sie ihre Realität bestreiten. Nur die aus sich unmittelbar berührenden (realen) Punkten bestehenden Geraden (AB, BC, DC, AD) sind nach ihnen reelle, d. h. wirkliche Geraden, imaginäre Geraden erkennen sie nicht an, sie gelten ihnen für rein fiktiv.[1] Spätere Vertreter der diskreten Geometrie — Giordano Bruno,[2] Lubin, Basso — haben für die Punkte der Diagonale zwar behauptet, daß sie weiter voneinander entfernt sind als die Punkte der Quadratseiten und daß darin der Grund ihrer verschiedenen Größe liegt, sie blieben aber auf dem halben Wege und gelangten nicht zur klaren Auffassung und Anerkennung der Tatsache der imaginären Geraden, was schließlich davon herrührt, daß sie die Größe des irreellen Zwischenpunktes gleich *0* setzen.[3] Wie wir früher sahen, läßt sich die Tatsache der imaginären Geraden im diskreten Raume absolut nicht leugnen, und was uns noch übrig bleibt, um auch den letzten Rest ihrer möglichen Bezweifelung zu zerstreuen, ist die nähere Erläuterung des Begriffes der imaginären Berührung, auf dem ja in letzter Instanz die Möglichkeit der imaginären Geraden beruht.

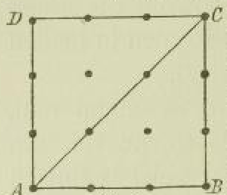

Fig. 3.

Wenn man behauptet, daß die Punkte A und C (Fig. 1) sich

---

[1] Der Ausdruck fiktiv bedeutet hier nichts anderes als „unmöglich", d. h. gar nicht gegeben, und in diesem Sinne haben die Mutakallimun die imaginären Geraden geleugnet. Vergl. K. Laßwitz, Geschichte der Atomistik, I. Bd., S. 149.

[2] Bruno, in seinem Werke „De triplici minimo" l. II, c. XIII, p. 89, 90, behauptet, daß sich die Punkte der Diagonale gar nicht unmittelbar miteinander berühren und infolgedessen weiter voneinander abstehen als diejenigen der Seite. Dasselbe behauptet Basso (s. Laßwitz I, S. 477), während Lubin (ib, S. 409) die Sache durch das Zusammenfallen der Punkte erklärt.

[3] Interessant ist es, zu erwähnen, daß Lubin (vergl. Laßwitz I, S. 406) die Notwendigkeit des stetigen Sichanreihens der einfachen Punkte leugnet, indem er die darin von Aristoteles gefundene Schwierigkeit anerkennt, die Art und Weise des Zusammenhangs einfacher Punkte dagegen zu bestimmen für den menschlichen Verstand überschreitend erklärt.

mittelbar miteinander berühren, während sich die Punkte *A* und *B* unmittelbar miteinander berühren, so ist man, wie früher ausgeführt, berechtigt, dies zu behaupten, einfach deshalb, weil zwischen den Punkten *A* und *C* ganz ebenso kein Punkt mehr vorhanden ist, wie zwischen den Punkten *A* und *B* kein solcher vorhanden ist. Dies und nichts anderes will der Ausdruck „Berührung“ in jenem ersten Falle bedeuten. Man mag darüber streiten, ob es erlaubt ist, auf Grund dieses einen gemeinsamen Merkmals (Abwesenheit des dazwischenliegenden Punktes) beider Entfernungsverhältnisse sie unter dem gemeinsamen Begriffe der Berührung zusammenzufassen, denn trotz dieser Gemeinsamkeit besteht doch, so kann man uns entgegenhalten, ein grundlegender Unterschied zwischen beiden Entfernungsverhältnissen darin, daß in dem ersten Falle die Punkte *A* und *C* wirklich in einer gewissen Entfernung voneinander liegen, während die Punkte *A* und *B* ohne jede Entfernung nebeneinander gegeben sind. Dieser Unterschied, so wird man sagen, ist so groß, daß auf jenen ersten Fall, trotz jenes einen gemeinsamen Merkmals, der Begriff der Berührung gar nicht übertragen werden darf. Denn wir können nur dann für zwei (reale) Punkte behaupten, daß sie sich miteinander berühren, wenn sie gar nicht mehr voneinander entfernt sind, wenn ihre Entfernung, so wird man behaupten können trotz all' unserer Gegengründe, gleich *0* ist, was nur für die Punkte *A* und *B* gilt, und nicht für die Punkte *A* und *C*. Unter dieser Voraussetzung, daß nämlich die Größe der (unmittelbaren) Berührung gleich *0* ist, wäre es tatsächlich ungereimt, für die Punkte *A* und *C* zu behaupten, daß sie sich miteinander berühren, die imaginäre Berührung wäre in diesem Falle tatsächlich eine contradictio in adjecto. Damit aber — und dies wird leicht übersehen — ist das Entfernungsverhältnis zwischen den Punkten *A* und *C* gar nicht aufgehoben. Das Entfernungsverhältnis der Punkte *A* und *C'*, *A* und *B'* einerseits hat im Gegensatz zu dem Entfernungsverhältnis der Punkte *A* und *C*, *A* und *B* andererseits (Fig. 1) das Gemeinsame, daß es durch einen dazwischenliegenden Punkt *C* und *B* vermittelt ist, während das Entfernungsverhältnis zwischen den Punkten *A* und *C* und *A* und *B* das Gemeinsame hat, durch keinen dazwischenliegenden Punkt vermittelt zu sein, die Entfernungsverhältnisse der beiden letzteren Punktenpaare haben das Gemeinsame, unmittelbare, d. h. durch keine dazwischenliegenden Punkte vermittelte Entfernungsverhältnisse zu sein. Ob man nun alle diese unmittelbaren Entfernungsverhältnisse Berührungen nennen will oder nicht, ändert nichts an ihrer Tatsache selbst, denn die Tatsache dieser Entfernungsverhältnisse ist etwas in dem diskreten Raume unmittelbar Gegebenes. Es wäre ein grobes Mißverständnis, aus der Schwierigkeit, den Begriff der Berührung auf alle diese Verhältnisse zu übertragen und neben den unmittelbaren (reellen) Berührungen auch mittelbare (resp. imaginäre) anzuerkennen, die Tatsache derselben als solche zu bezweifeln.

Wenn nun aber einmal die Unrichtigkeit der instinktiven Behauptung, daß die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *0* ist, eingesehen wird, dann hört der wichtigste Unterschied zwischen den imaginären und reellen unmittelbaren Entfernungsverhältnissen auf, der es verhindert, den Begriff der Berührung von den letzteren auf die ersteren auszudehnen. Denn ist die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *1*, dann hört die unmittelbare Berührung auf, die Berührung im eigentlichen Sinne, d. h. eine Berührung, bei der keine Entfernung der sich berührenden Punkte vorhanden ist, zu bedeuten, dann sind sowohl die unmittelbare wie die mittelbare Berührung in gleichem Sinne unmittelbare Entfernungsverhältnisse. Wenn die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *0* gesetzt wird, dann stellt dieselbe in Wahrheit kein Entfernungsverhältnis mehr dar, dann stellt sie nur ein unmittelbares räumliches Außereinander dar, und der Unterschied zwischen ihr und der mittelbaren Berührung besteht dann darin, daß diese letztere nicht nur ein unmittelbares räumliches Außereinander, sondern zugleich auch ein Entfernungsverhältnis darstellt. In diesem Falle bestünde also neben dem unmittelbaren Außereinandersein zweier Punkte ohne Entfernung auch ein solches mit Entfernung, also ein entfernungsloses und ein entfernungsartiges unmittelbares Außereinandersein zweier Punkte, von denen nur jenes erstere als Berührung bezeichnet werden könnte. Wenn dagegen die Größe des primären unmittelbaren Außereinanderseins (dieser Ausdruck vermeidet vollkommen den Begriff der Berührung) gleich *1* gesetzt wird, dann ist sowohl das primäre wie das sekundäre unmittelbare Außereinandersein der Punkte ein Entfernungsverhältnis, beide sind also in ganz gleichem Sinne Entfernungsverhältnisse, und dann kann man den Begriff der Berührung entweder auf beide ausdehnen oder beiden in gleichem Sinne absprechen. Faßt man den Begriff der Berührung im strengen Sinne, als ein Verhältnis zweier Punkte, die gar nicht voneinander entfernt sind, dann kann man, da zwei solche Punkte, wie wir gesehen haben, überhaupt keine räumlichen Punkte mehr sein können, für die Punkte des diskreten Raumes, mögen sie noch so nahe zueinander sein, nicht behaupten, daß sie sich miteinander berühren. Versteht man aber unter der Berührung ein solches Verhältnis zweier Punkte, daß sie durch keine dazwischenliegenden Punkte mehr voneinander getrennt sind, dann läßt sich sowohl für die Punkte, deren unmittelbares Entfernungsverhältnis primär, als für diejenigen, deren unmittelbares Entfernungsverhältnis sekundär ist, behaupten, daß sie sich miteinander berühren. Wird die Sache in dieser Weise aufgefaßt, dann ist es nur noch ein Wortstreit, ob wir in diesem Falle von Berührung sprechen wollen oder nicht, und da ich keinen besseren Ausdruck kenne, und im diskreten Raume das, was mit Berührung gemeint wird, nur in dem eben erörterten Sinne vorkommt, so sehe ich nicht ein, warum man den Ausdruck der Berührung auch bei der neuen Sachlage nicht beibehalten wollte. Wenn wir also behaupten, daß sich zwei Punkte miteinander berühren, so bedeutet dies nur, daß sie in unmittelbarem Entfernungsverhältnis in bezug aufeinander gegeben sind. Unmittelbar nennen wir dann jene Berührung, die durch keine herumliegenden Punkte vermittelt, mittelbar diejenige, die durch herumliegende Punkte vermittelt ist. Denn unmittelbare Entfernungsverhältnisse sind die beiden Berührungen nur im Sinne reines Entfernungsverhältnisses als solchen, d. h. eines durch keine dazwischenliegenden Punkte vermittelten Entfernungsverhältnisses. Zwischen beiden Berührungen besteht aber ein wesentlicher Unterschied darin, ob sie durch die herumliegenden Punkte vermittelt und gesetzt sind oder nicht. Das unmittelbare Entfernungsverhältnis der Punkte A und B ist ganz unabhängig von dem Dasein der herumliegenden Punkte, wir können uns die Punkte A und B auch ohne die herumliegenden Punkte denken und sie würden in diesem Falle ihr Entfernungsverhältnis gar nicht ändern. Das unmittelbare Entfernungsverhältnis der Punkte A und C dagegen ist von dem Dasein der herumliegenden Punkte O und B vollständig abhängig, da die Punkte A und C für sich gedacht (als Glieder des eindimensionalen Raumes) dieses bestimmte Entfernungsverhältnis nicht mehr haben könnten, sie würden vielmehr, für sich gedacht, dasselbe unmittelbare Entfernungsverhältnis (seiner Größe nach) haben, wie es zwischen den Punkten *A* und *B* besteht. Das zweite unmittelbare Entfernungsverhältnis ist also durch die herumliegenden Punkte vermittelt, und da diese dasselbe bedingenden Punkte schließlich in unmittelbaren Entfernungsverhältnissen der ersten Art stehen müssen, so folgt daraus ohne weiteres, daß dasselbe sekundär, während dieses letztere primär ist. Der Unterschied zwischen der unmittelbaren und der mittelbaren Berührung führt sich also schließlich darauf, daß die erste primär und die zweite sekundär ist, daß die Setzung der zweiten durch die Setzung der ersten bedingt ist.[1]

Und schließlich besteht noch ein wiederum aus diesem Unterschiede der Primarität folgender Unterschied, der zwar für den diskreten Geometer als reinen Mathematiker nur von sekundärer Bedeutung ist, der aber für den Metaphysiker der diskreten Geometrie von allerwichtigster Bedeutung ist. Wie wir schon einmal bemerkt haben, besteht zwischen der primären und der sekundären Berührung auch der Unterschied, daß, während die erste eine leere nichtseiende Lücke darstelltt, die zweite ein reines Verhältnis ist. An anderem Orte habe ich ausführlich gezeigt, daß und wie dieser Unterschied besteht,[2] und wie alle Versuche, denselben als nicht gegeben darzustellen, fehlschlagen müssen.[3] Wenn die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *1* ist, dann ist es ohne weiteres klar, daß dieselbe eine leere einfache nichtseiende Lücke darstellt,[4] und wir müssen, wenn wir den diskreten Raum annehmen, zugleich voraussetzen, daß es ein Etwas in der Realität geben müsse, das imstande ist, diese einfachen Lücken im diskreten Raume auszufüllen. Ich habe dann aber weiter gezeigt, daß der reale Negationsakt, welcher dieses seltsame Etwas darstellt, nicht im räumlichen Sinne die leere einfache Lücke zwischen zwei Raumpunkten auszufüllen vermag, denn in dem Falle bekäme man nur einen progressus in infinitum oder man müßte die Voraussetzung selbst, daß die unmittelbare Berührung zweier Punkte gleich *1* ist, preisgeben, in welchem Falle dann aber auch die geometrische Not-

---

[1] a. a. O. S. 268.
[2] a. a. O. S. 267.
[3] a. a. O. S. 271—273.
[4] a. a. O. S. 255.

wendigkeit des Negationsaktes fortfallen würde.[1] Ich will mich auf der Erörterung dieser metaphysischen Grundschwierigkeit der diskreten Geometrie hier nicht länger aufhalten, ich habe sie nur erwähnt, um den wichtigsten Unterschied zwischen der primären und der sekundären Berührung klarer hervortreten zu lassen. Die primäre Berührung ist nämlich reell zu nennen deshalb, weil sie erstens, rein räumlich betrachtet, eine leere, nichtseiende Lücke, also eine negative Realität darstellt, welcher aber metaphysisch resp. außerräumlich eine positive Realität, der reale Negationsakt nämlich, entspricht, während die sekundäre Berührung im Gegensatz dazu als imaginär zu bezeichnen ist, da sie räumlich keine leere, nichtseiende Lücke darstellt und ihr metaphysisch also keine Realität entspricht. Freilich, wenn die metaphysische Ergänzung der leeren einfachen Lücke der unmittelbaren Berührung in Betracht gezogen wird, dann hört sie auf, auch rein räumlich eine solche zu sein, sie unterscheidet sich dann in rein räumlichem Sinne gar nicht mehr von der mittelbaren Berührung, beide sind dann im Raume und für den Raum reine Verhältnisse und dann hat der Unterschied des Reellen und des Imaginären nur noch eine rein metaphysische Bedeutung.[2] Will man sich nun um diese metaphysische Behebung der Grundschwierigkeit der diskreten Geometrie nicht kümmern, dann tritt gleich der Unterschied des Reellen und des Imaginären jener beiden Berührungsarten auch rein mathematisch in seine Rechte ein, und er wird so der wichtigste Unterschied von allen. Dann ist, wie gesagt, die unmittelbare Berührung reell, weil sie eine leere, einfache, nichtseiende Lücke darstellt, und die mittelbare imaginär, weil sie keine solche darstellt, ein reines Verhältnis ist. Freilich ein allzu metaphysikscheuer diskreter Geometer würde sich nicht einmal um diesen rein räumlichen Unterschied zwischen den beiden Berührungsarten kümmern, denn er würde finden, daß dieser Unterschied, obgleich er etwas rein im Raume vorhandenes ausdrückt, doch die reale Seite der räumlichen Konstitution in Betracht zieht und damit schon in die Metaphysik eingeht. Ein solcher streng mathematisch denkender diskreter Geometer könnte einfach behaupten, daß, der diskrete Raum einmal gegeben, eine rein formale mathematische Betrachtung nur den Unterschied der primären und der sekundären Berührung in bezug

---

[1] a. a. O. S. 270 im Zusammenhang mit S. 255 und S. 271—273.

[2] a. a. O. S. 268.

auf diese ihre Primarität und, was unmittelbar damit im Zusammenhang steht, ihren Unterschied als unmittelbare und mittelbare Berührung zu berücksichtigen braucht, den Unterschied in bezug auf ihre Realität aber ganz ignorieren soll und in dieser Beziehung beide Berührungsarten einfach als reine Entfernungsverhältnisse zu betrachten hat. Und tatsächlich kann man sich auf diesen rein mathematischen Standpunkt auch in der diskreten Geometrie stellen, und dies um so mehr, da ja auch die geltende kontinuierliche Geometrie sich gar nicht um die metaphysische Seite ihrer Grundvoraussetzung kümmert.[1] Wenn ich trotzdem auch in der reinen Geometrie jene Ausdrücke der reellen und der imaginären Berührung vorzugsweise gebrauche, so geschieht es, weil ich als Metaphysiker die Fühlung der diskreten Geometrie mit der Metaphysik nicht verlieren möchte, und jene Ausdrücke so sehr geeignet sind, den engen Zusammenhang beider Wissensgebiete beständig in Erinnerung zu erhalten.

Denn man soll sich nicht täuschen lassen: gerade deshalb, weil die diskrete Geometrie viel einfacher als die kontinuierliche ist, ist auch ihr Zusammenhang mit der Metaphysik viel einleuchtender und naheliegender. Wenn die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *1* ist, dann muß der irreelle Zwischenpunkt eine leere, einfache, nichtseiende Lücke darstellen, und eine solche ist doch unmöglich, die metaphysische Schwierigkeit des irreellen Zwischenpunktes läßt sich also gar nicht verkennen, sobald man nur darüber reflektieren will.[2] Freilich würde diese Schwierigkeit mit einem Schlage verschwinden, wenn man die Größe des irreellen Zwischenpunktes gleich *0* setzte, in diesem Falle entstehen aber Widersprüche, die die diskrete Geometrie selbst in Frage stellen. Wie man also sieht, ist die von uns behandelte Streitfrage wirklich die fundamentale Frage der diskreten Geometrie, von der ihr Sein oder Nichtsein abhängt. Unsere Ausführungen zeigen, daß die diskrete Geometrie nur unter der Voraussetzung, daß die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *1* ist, geometrisch widerspruchslos aufgestellt werden kann, man könnte daraus aber auch den entgegengesetzten Schluß ziehen, daß nämlich, weil die Größe der unmittelbaren Berührung nur gleich *0* sein kann, die diskrete Geometrie selbst unmöglich ist. Wir müssen deshalb

[1] Über die metaphysische Grundvoraussetzung der geltenden Geometrie, s. a. a. O. S. 283—285 im Zusammenhang mit S. 282.

[2] a. a. O. S. 273.

versuchen, auch den Begriff des mit Einheit gleichgesetzten irreellen Zwischenpunktes von seinen letzten Unklarheiten zu befreien, wie wir dies mit den Begriffen der reellen und der imaginären Berührung getan haben.

Wenn die Größe des irreellen Zwischenpunktes, der zwei reelle Punkte voneinander trennt, gleich *1* gesetzt wird und also eine leere, nichtseiende, einfache Lücke darstellt, dann scheint uns nichts einleuchtender zu sein, als daß man die zwei Punkte noch näher zueinander rücken könnte, so nahe nämlich, daß der irreelle Zwischenpunkt zwischen beiden (denn eines solchen werden wir nicht los, solange die zwei reellen Punkte zwei außereinanderliegende räumliche Punkte sind und bleiben) gleich *0* wird. Erst wenn der irreelle Zwischenpunkt wirklich gleich *0* geworden, begreifen wir, daß die zwei reellen Punkte nicht näher aufeinander rücken können, ohne aufzuhören, zwei distinkte Raumpunkte zu sein, näher aneinander gerückt würden sie miteinander vollkommen zusammenfallen. Wenn der irreelle Zwischenpunkt gleich *1* ist, wenn die Entfernung sich unmittelbar berührender Punkte gleich *1* ist, dann scheint uns nichts einleuchtender zu sein, als daß zwischen die zwei realen Punkte ein dritter realer Punkt eingeschoben werden könnte, der die leere nichtseiende Lücke mit seinem Dasein gerade ausfüllen würde, so daß also die Größe der unmittelbaren Berührung zweier reellen Punkte nur gleich *0* sein könnte.

Gegen diese anscheinend so einleuchtende Beweisführung bemerke ich zunächst, daß, wenn man schon voraussetzt, daß die Größe der unmittelbaren Berührung zweier reellen Punkte gleich *1* ist, kein reeller Punkt mehr dazwischenkommen kann, wenn man an dieser Voraussetzung festhalten will. Denn der zwischen zwei reellen Punkten dazwischengekommene dritte reelle Punkt müßte nach derselben Voraussetzung von jedem der zwei ersten Punkte um eine einfache Einheit entfernt sein, durch das Dazwischenkommen dieses dritten Punktes läßt sich also die Grundvoraussetzung selbst nicht so ohne weiteres wegschaffen. Die ganze Streitfrage dreht sich und kann sich nur darum drehen, ob, wenn die Größe der unmittelbaren Berührung gleich *1* gesetzt wird, die leere einfache nichtseiende Lücke, die dadurch entsteht, wirklich durch einen reellen Punkt ausgefüllt werden kann oder nicht, eine Frage, die offenbar nur entschieden werden kann, wenn man direkt feststellen kann, daß die Größe der unmittelbaren Berührung zweier Punkte gleich *0* sein kann resp. nicht sein kann. Wir müssen also direkt beweisen, daß die Größe des irreellen Zwischenpunktes nicht gleich *0* sein kann, wenn im Falle, daß derselbe gleich *1* ist, eine Ersetzung desselben durch einen reellen Punkt nicht möglich sein soll.

Es läßt sich nun in der Tat direkt beweisen, daß die Größe des irreellen Zwischenpunktes nicht gleich *0* sein kann. Dieses Argument ist kein anderes als dasjenige, welches seit jeher gegen die Zusammensetzung des Raumes aus Punkten vorgebracht worden ist, und welches dahin lautet, daß die einfachen Punkte, da sie keine Teile enthalten, wenn sie sich miteinander berühren, dies als Ganze tun müßten, in welchem Falle dann aber dieselben notwendigerweise miteinander zusammenfallen müßten, keine distinkten Raumpunkte mehr sein könnten. Ich will nun dieses richtige Argument hier mit Rücksicht auf die reellen Punkte, auf die wir hier dasselbe anwenden, eingehender darlegen, als dies bei dem Urheber desselben, bei Aristoteles,[1] geschehen ist. Wenn der irreelle Zwischenpunkt, der zwischen den Punkten *A* und *B* (Fig. 4) liegt, seiner Größe nach gleich *0* ist, so müßten die beiden Punkte *A* und *B*, wenn sie distinkte Punkte sein und bleiben sollen, sich

Fig. 4.

nur mit den einander zugekehrten Enden berühren, der irreelle Zwischenpunkt, da dessen Größe gleich *0* ist, müßte dann nur diese beiden Enden miteinander in Beziehung resp. in Berührung bringen, das dem Punkte *C* zugekehrte Ende des Punktes *B* dürfte mit dem dem Punkte *B* zugekehrten Ende des Punktes *A* gar nicht in Beziehung resp. in Berührung stehen, ebenso wie das dem Punkte *B* abgekehrte Ende des Punktes *A* mit dem dem Punkte *A* zugekehrten Ende des Punktes *B* sich nicht berühren dürfte. Denn würde man dies voraussetzen, dann müßte das dem Punkte *A* zugekehrte Ende des Punktes *B* mit den beiden Enden des Punktes *A* und umgekehrt das dem Punkte *B* zugekehrte Ende des Punktes *A* sich mit den beiden Enden des Punktes *B* zugleich berühren, was offenbar nicht mehr und nicht weniger bedeuten würde, als daß der Punkt *B* mit dem Punkte *A* zusammenfällt. Nun läßt sich leicht einsehen, daß dies in der Tat geschehen muß, wenn die Berührungsentfernung zwischen den Punkten *A*

[1] Vergl. Aristoteles, Physik, Buch VI, c. 1 im Zusammenhang mit Buch V, c. 3. Das aristotelische Argument habe ich in meinem Werke nur in dem Vorwort, S. V, erwähnt.

und *B* gleich *0* ist. Denn in Wahrheit hat weder der Punkt *A* noch der Punkt *B* irgend welche verschiedene, nach verschiedenen Seiten gekehrte Enden. Denn ein einfacher, absolut unteilbarer Punkt hat keine Teile in sich, es können also in demselben keine verschiedenen Enden unterschieden werden, da diese verschiedenen Enden nichts anderes bedeuten würden, als die eben so vielen verschiedenen Teile des Punktes. Die Richtigkeit dieser Schlußfolgerung läßt sich zwar nie anschaulich verifizieren, da wir uns den einfachen reellen räumlichen Punkt nicht vorstellen können,[1] sie ist aber begrifflich unzweifelhaft und tadellos. Wenn ich um einen Punkt herum mehrere Punkte lege, so scheint mir nichts einleuchtender zu sein, als daß ich an dem Punkt selbst verschiedene Seiten und Enden unterscheiden kann, die in der Richtung der herumliegenden Punkte liegen. Dies ist aber nur eine Täuschung: der einfache Punkt als solcher hat keine verschiedenen Seiten und Richtungen in sich, diese entstehen erst in einem räumlichen Komplex und sind nichts anderes als die zwischen den verschiedenen einfachen Punkten bestehenden Verhältnisse und Beziehungen, der einfache Punkt als solcher tritt als Ganzes in jedes dieser Verhältnisse und Beziehungen, da er ja als solcher unteilbar ist und keine dergleichen Unterschiede, in und für sich betrachtet, enthält und enthalten kann. So ist auch der Punkt *B* nicht mit dem einen Ende dem Punkte *A* und mit dem anderen dem Punkte *C* zugekehrt, sondern er ist ganz sowohl dem Punkte *A* wie dem Punkte *C* zugekehrt; das verschiedene Richtungsverhältnis, in dem der Punkt *B* zu den Punkten *A* und *C* steht, ist etwas, was durch diese letzteren Punkte in erster Reihe gesetzt ist, und was den Punkt *B*, für sich betrachtet, nichts angeht. Wenn dem nun so ist, dann ist es unzweifelhaft, daß die Größe des irreellen Zwischenpunktes zwischen den reellen Punkten *A* und *B* nicht gleich *0* sein kann, weil ja in diesem Falle sich beide Punkte als Ganze miteinander berühren müßten, in welchem Falle sie dann aber notwendigerweise miteinander zusammenfallen müßten, nicht mehr distinkte Punkte sein könnten. Die Größe des irreellen Zwischenpunktes muß also gleich *1* sein, und derselbe kann trotzdem mit einem realen Punkte einfach deshalb nicht erfüllt werden, weil in diesem Falle die Entfernung dieses mittleren Punktes (des Punktes *B* zwischen den Punkten *A* und *C*) von jedem der beiden

[1] Über die Unwahrnehmbarkeit des einfachen realen Raumpunktes, vergl. a. a. O. S. 302—307.

ersten gleich *0* wäre, er also mit ihnen beiden zugleich zusammenfallen müßte, also auch diese letzteren selbst.[1]

Auf Grund desselben Arguments nun, auf Grund dessen die Einheitsgröße des irreellen Zwischenpunktes folgt, auf Grund desselben Arguments folgt schließlich auch die wichtige Tatsache, daß sich die reellen Mittelpunkte mit den irreellen Zwischenpunkten nicht summieren lassen, daß in bezug auf die Entfernung zweier reellen Punkte die dazwischenliegenden reellen Punkte keine Rolle spielen. Denn wenn der Punkt *A* von dem Punkte *B* durch den irreellen Zwischenpunkt getrennt ist, dessen Größe gleich *1* ist, dann ist der einfache Punkt *A* als Ganzes von dem einfachen Punkte *B* als Ganzem um die Einheit entfernt und nicht etwa nur das dem Punkte *B* zugekehrte Ende des *A* von dem dem Punkte *A* zugekehrten Ende des Punktes *B* und dasselbe gilt für den Punkt *C* in bezug auf den Punkt *B*; ist dies aber der Fall, dann ist die Entfernung der Punkte *A* und *C* voneinander gleich *2*, also gleich der Anzahl der zwischen ihnen vorhandenen irreellen Zwischenpunkte, und der mittlere reelle Punkt *B* spielt dabei keine Rolle, da er offenbar nur dann eine Rolle dabei spielen würde, wenn sich die Einheitsentfernung der Punkte *A* und *C* nicht auf den ganzen Punkt *B*, sondern auf die beiden ihnen zugekehrten Enden desselben bezöge, in welchem Falle dann diese

[1] Giordano Bruno, der die Richtigkeit des Aristotelischen Arguments zugibt (vergl. „De triplici minimo" l. I, cap. VII, p. 29 und 30), hat, um einen Unterschied des irrellen Zwischenpunktes von dem reellen zu statuieren, statt die Größe des irreellen Zwischenpunktes (des „Terminus", wie er ihn nennt) gleich *1* zu setzen, den einfachen realen Punkt (das „Minimum", wie er ihn nennt) zu einem unendlich kleinen (ausgedehnten) Raumelement gemacht, indem er das Minimum des Raumes von demjenigen der Fläche unterscheidet, und das erste als die einfache Kugel, das zweite als den einfachen Kreis definiert („De triplici minimo" I, c. XII, p. 47). Infolge der kugel- resp. der kreisförmigen Gestalt der Minima können dieselben den Raum nicht lückenlos ausfüllen und es sind zwischen ihnen leere Zwischenräume vorhanden (bei den kreisförmigen Minima der Fläche sind sie einfache Dreiecke, bei den kugelförmigen Minima des Raumes einfache Pyramiden). Wie man sieht, hat Bruno, um nur die Größe des irreellen Zwischenpunktes gleich *0* setzen zu können, die einfache absolut unräumliche Natur des reellen Punktes aufgegeben und an ihre Stelle räumliche Gebilde, obgleich von unendlich kleiner Größe, gesetzt, er hat infolgedessen weiter auch den leeren kontinuierlichen Raum neben den einfachen körperlichen Atomminima zulassen müssen, wodurch seine mathematische Atomistik im wesentlichen mit der gewöhnllchen physikalischen Atomistik identisch wird. Über den Wert der Brunoschen diskreten Geometrie vergl. auch das Vorwort zu meinem Werke, s. VI.

Enden selbst um eine einfache Einheit voneinander entfernt wären. Wie wir aber sahen, fallen diese beiden Enden des Punktes B schlechthin und absolut zusammen, es ist keine Entfernung zwischen ihnen vorhanden. Damit ist ja nicht die Einheitsgröße des reellen Punktes *B* in Frage gestellt, damit ist nur gesagt, daß in bezug auf die Entfernungsgröße, welche zwischen den Punkten *A* und *C* liegt, dieser Punkt absolut keine Rolle spielt, der reelle Punkt *B* bedeutet eben keine Entfernung und ist in bezug auf Entfernung als absolute Null zu betrachten.[1] Wenn wir uns fiktiverweise ausdrücken wollen, so können wir sagen, daß der irreelle Zwischenpunkt die Entfernung zwischen den (fiktiven) Mittelpunkten der realen Punkte darstellt, und daß demnach der fiktive Mittelpunkt des Punktes *A* von dem fiktiven Mittelpunkte des Punktes *B* und dieser von dem Punkte *C* um eine Einheit entfernt ist, die ganze Entfernung zwischen den fiktiven Mittelpunkten der Punkte *A* und *C*, also auch zwischen diesen Punkten selbst, gleich *2* ist, also so groß, daß der mittlere reale Punkt dabei keine Rolle spielt.

Die Richtigkeit dieser letzteren Behauptung läßt sich auch direkt geometrisch nachweisen. Die Größe der Diagonale in einem einfachen Quadrat (Fig. 5) ist offenbar gleich $\sqrt{2}$, die Größe der Diagonale in dem einfachen (dreidimensionalen) Würfel, welcher durch das Aufeinanderlegen zweier einfacher Quadrate entsteht, ist gleich $\sqrt{3}$ und diejenige des vierdimensionalen einfachen Würfels, welcher durch das Aufeinanderlegen zweier einfacher dreidimensionaler Würfel (in der vierten Dimension) entsteht, gleich $\sqrt{4}$, also $= 2$. Wenn nun die obige Behauptung, daß bei der Entfernung zweier Punkte die dazwischenliegenden realen Punkte keine Rolle spielen, richtig ist, so muß sich offenbar in der Diagonale des vierdimensionalen einfachen Würfels, also im Zentrum desselben, ein einfacher realer Punkt denken lassen, dessen Entfernung von jedem der 16 Eckpunkte des Würfels gleich *1* ist. Da nun der einfache vierdimensionale Würfel offenbar auch so konstruiert werden kann, daß um einen realen Punkt herum 16 Punkte gelegt werden, deren Entfernungen von ihm gleich *1* sind, so geht daraus ohne weiteres hervor, daß der reelle mittlere Punkt bei der Entfernung je zweier, die Endpunkte einer Diagonale des vierdimensionalen einfachen Würfels darstellenden realen Punkte

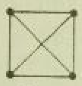

Fig. 5.

[1] Vergl. damit auch meine Ausführungen a. a. O. S. 252, 253.

keine Rolle spielt, also in bezug auf Entfernung als absolute Null zu betrachten ist.[1]

Erst nachdem wir den vierten, letzten und entscheidenden Grund für unsere grundlegende Behauptung, daß die Größe der unmittelbaren Berührung zweier Punkte gleich *1* ist, dargelegt haben, wird uns auch Inhalt und Bedeutuug der ersten drei Gründe klar. Der erste Grund sagt uns dann einfach nichts anderes aus, als daß, wenn der irreelle Zwischenpunkt als Punkt besteht, er notwendigerweise gleich *1* sein müsse, er kann aber als solcher nur auf Grund des vierten Arguments bestehen; ebenso sagt uns der zweite Grund nichts anderes aus, als daß Entfernung und Auseinander miteinander zusammenfallen, was wiederum nur auf Grund des vierten Arguments einleuchtend und unzweifelhaft ist; und schließlich löst sich auch die in dem dritten Grunde angeführte Schwierigkeit, daß die imaginäre Berührung als das unmittelbare Auseinander zweier realer Punkte nicht eine von der Null verschiedene Größe haben könnte, wenn das unmittelbare Auseinandersein der unmittelbaren Berührung gleich *0* wäre, auf Grund des vierten Arguments auf die einfachste Art und Weise, indem die Unmöglichkeit dieser letzteren Gleichsetzung unmittelbar dargelegt wird. Die widerspruchsvollen geometrischen Resultate, in die wir uns bei irgend einer anderen Annahme verwickeln, sind nur eine Folge und eine Bestätigung der Richtigkeit dieses Grundes, sind aber nicht imstande, denselben zu ersetzen oder entbehrlich zu machen. Denn erst zusammen mit diesem entscheidenden Grunde sind diese geometrischen Argumente imstande, die diskrete Geometrie zu einer möglichen und widerspruchslosen mathematischen Disziplin zu erheben, indem sie die Gleichsetzung der Größe der unmittelbaren Berührung zweier realer Punkte mit der Eins zur grundlegenden Voraussetzung derselben machen.

[1] Die fundamentale Bedeutung des einfachen vierdimensionalen Würfels für die diskrete Geometrie offenbart sich in noch einer Hinsicht, nämlich in Hinsicht der Frage nach der realen Existenz der imaginären Berührung im diskreten Raume. Vergl. darüber „Elemente der neuen Geometrie“ a. a. O. S. 431.