

ОСНОВНИ ПОСТУЛАТИ ДИСКРЕТНЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

ОД

Др. БРАНИСЛАВА ПЕТРОНИЈЕВИЋА

Дискретна Геометрија, чије сам принципе изнео у моме недавно публикованоме метафизичко-математичком делу¹, полази од ових пет основних постулата:

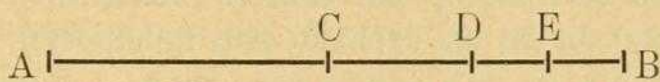
1. Простор се састоји из тачака.
2. Број тачака у простору је крајан.
3. Величина просторне тачке равна је 1.
4. Постоје две врсте просторних тачака: реалне средишне и иреалне средње тачке.
5. Иреалне тачке престављају екстензију простора, а реалне оно што је у простору дато.

Од ових пет постулата прва три имају своје корелате у континуираној Геометрији, док су друга два специјални постулати дискретне Геометрије, којима у континуираној Геометрији нема директних корелата.

Први основни постулат дискретне Геометрије противречи директ одговарајућем постулату континуиране Геометрије. Док континуирана Геометрија претпоставља да је простор непрекидан, континуиран, да он није састављен из делова који би били одвојени један од другог, дотле дискретна Геометрија тврди, да је простор састављен из недељивих делова, простих тачака, да дакле није континуиран већ дискретан. Да би разлика између ова два супротна тврђења обе Геометрије била јасна, ја ћу је илустровати на најпростијем простору, на правој

¹ Principien der Metaphysik. Erster Band, erste Abtheilung. Allgemeine Ontologie und die formalen Kategorien. Mit einem Anhang: Elemente der neuen Geometrie und III Tafeln mit 56 geom. Figuren. Heidelberg 1904.

линији. По тврђењу данашње континуиране Геометрије линија АВ садржи истина у себи линије АС и СВ (resp. CD, DE и EB) али није из тих линија као стварно одвојених делова састављена. Тачка С, која линију АВ дели у линије АС и СВ (на слици



Сл. 1.

ове последње су половине оне прве) није тачка која би у ствари одвајала линију АС од линије СВ, већ она то чини само у нашим мислима, т. ј. линија АВ остаје као таква неподељена тачком С, тачка С само фиктивно дели линију АВ на делове АС и СВ, у ствари линија АВ остаје непрекидна, континуирана т. ј. она није подељена, она није састављена из делова. Кад би линија АВ била тачком С у ствари растављена на делове АС и СВ, онда би и линија СВ била тачком D растављена у делове CD и DB, тако исто линија DB била би тачком E растављена у делове DE и EB и т. д. и то би дељење ишло све дотле док се не би дошло до делова који се више не би дали делити, дошло би се дакле до простих недељивих тачака, из којих би линија АВ била у последњој инстанцији састављена. Али баш зато што изгледа да је немогуће саставити линију из простих недељивих тачака, које више нису просторне, баш зато континуирана Геометрија и тврди да простор није дискретан, испрекидан, састављен из недељивих делова, већ да је континуиран, непрекидан.

Као што се види, нерв аргументације данашње континуиране Геометрије да је простор континуиран, састоји се у тврђењу, да је немогуће саставити простор из простих недељивих тачака, пошто су ове непросторне и по величини равне 0. Основни постулат континуиране Геометрије, по коме је простор континуиран, противречи дакле директно основном постулату дискретне Геометрије, по коме је простор дискретан т. ј. састављен из простих недељивих делова, тачака. Ако дискретна Геометрија хоће да постоји, она мора очевидно доказати могућност састављености простора из простих недељивих тачака, она мора показати да и ако су просте тачке непросторне, да се ипак простор може из њих склопити. Састављеност простора из простих непросторних тачака (оне су непросторне зато што су недељиве, јер што је просторно то је и дељиво) била би само онда немогућа, ако би величина тачке била равна 0, као што то тврди континуирана Геометрија. Међу тим ово тврђење континуиране

Геометрије само је онда тачно, ако се простор схвати као засебно биће поред материје, ако се простор схвати као празно биће у коме се материјални делићи налазе. У том случају празан би се простор дао доиста замислити само као континуум, јер ако би се он схватио као дискретум, онда би просте тачке, из којих би био састављен, биле без величине, јер би биле без икаквог реалног садржаја, пошто реални садржај сачињава материју. Међу тим ако се не претпостави да постоји празан простор поред материје, већ ако се узме да материја и простор падају уједно, да простор није ништа друго до просто истовремена датост материјалних реалних делића, онда нема више никакве тешкоће претпоставити, да је простор дискретан.

У том случају на име величина простих недељивих тачака, из којих је простор састављен, није и не може више бити равна 0, већ мора бити равна 1. Јер кад би величина реалне материјалне тачке била равна 0, онда би то значило ни више ни мање, до да она нема икаквог реалног садржаја, да дакле није материјална тачка. Проста материјална тачка чини реални керелатум апстрактне аритметичке јединице, која је последњи елеменат чистих аритметичких количина, целих бројева. Па као што је из простих недељивих јединица могуће саставити сложену аритметичку количину ма каквог целог броја, исто је тако могуће из простих непросторних реалних тачака саставити сложену просторну количину. Линија АВ не може се све дотле саставити из простих непросторних тачака, док је год величина тих тачака равна 0; чим се пак величина простих непросторних тачака стави да је равна 1, нема више никакве тешкоће схватити њену састављеност из простих тачака. Јер у том случају просторност линије АВ не састоји се ни у чему другоме до просто у томе што она представља множину простих тачака, док се непросторност ових последњих просто састоји у томе што је свака од њих једна. По континуираној Геометрији простор је пре својих делова, делови простора могући су само у једноме целоме простору, по дискретној Геометрији пак простор је нешто што је после својих делова, простор по тој Геометрији није ништа друго до симултана датост множине простих недељивих делова, који су као такви непросторни. Чим се допусти трећи основни постулат дискретне Геометрије, на име да је величина просте тачке равна 1, одмах ишчежавају све те-

шкоће које чине немогућим први основни постулат њен и дискретна Геометрија постаје у принципу могућа.

Као што се из ових излагања јасно види, ми би могли први и трећи постулат спојити у један, који би гласио:

Простор је састављен из простих недељивих тачака чија је величина равна јединици.

Спајање оба ова постулата уједно изражава тесну везу која између њих постоји, пошто је, као што се из наших извођења види, само тако могуће саставити простор из недељивих тачака, ако се величина тих тачака стави да је равна јединици.

Други постулат дискретне Геометрије противречи, као и први, директно одговарајућем постулату континуиране Геометрије. Док континуирана Геометрија тврди да је (континуирани) простор дељив до у бесконачност, дотле дискретна Геометрија тврди да је (дискретни) простор састављен из крајњег броја тачака, као последњих недељивих делова његових. Тврђење континуиране Геометрије да је простор дељив до у бесконачност логичка је последица првог постулата њеног, на име континуираног простора. Ако је линија АВ доиста непрекидна, ако она не садржи никаквих стварних делова у себи, ако су делови њени само фиктивни, онда делење њено у мислима мора ићи до у бесконачност, не може имати нигде краја. Тачком С ми смо линију АВ поделили на два дела, тачком D поделили смо једну од тих половина, на име СВ, на два дела, тачком D поделили смо даље једну од ових (DV) на два дела, па пошто линија АВ при свима тим делењима на двоје није фактички већ само фиктивно подељена на делове, то је јасно да ово делење неће нигде у самој линији АВ наићи на границе, пошто би ове границе у том случају могле значити само просте недељиве делове, а оно што садржи просте недељиве делове не би више било континуирано већ дискретно. Континуирани простор мора према томе нужним начином бити дељив до у бесконачност.

Ова нужност отпада међу тим код дискретног простора. Пре свега дискретан простор, баш зато што се састоји из недељивих делова, не може у ономе смислу бити дељив у бесконачност у коме је то континуирани простор; док је овај последњи дељив у апсолутном смислу до у бесконачност, т. ј. тако да се при томе делењу не може никада доћи до последњих недељивих делова, па ма колико бесконачно велики био број делова у који

смо континуум у мислима поделили, дотле дискретни простор може само у релативном смислу бити дељив до у бесконачност, т. ј. он може садржавати бесконачно велики број простих недељивих делова, само та бесконачност не би била апсолутна. Ми се овде не можемо дубље упуштати у излагање ове разлике између апсолутне и релативне бесконачности¹, она у осталом у крајњем резултату и нема никакве принципијелне вредности, пошто се да показати, да релативна бесконачност нужним начином повлачи за собом апсолутну бесконачност и да према томе бесконачности дискретног простора не може ни бити, да простор, чим је дискретан, мора бити и крајан. Доказ за ово изнет је у главном у једном ранијем чланку овога часописа², где је показано како две основне противречности бескрајнога — противречност бескрајног броја и противречност изненадног скока крајњег у бескрајно — потпуно уништавају бескрајност простора. Тамо су ти аргументи употребљени независно од тога да ли је простор састављен из недељивих тачака или не; међу тим они у првом реду важе за дискретан простор, т. ј. они непосредно утврђују да дискретан простор може бити састављен само из крајњег броја недељивих тачака.

Четврти и пети постулат престављају, као што смо поменули, специјалне постулате дискретне Геометрије, којима не одговарају директно никакви постулати у континуираној Геометрији. Ти се постулати односе на геометријску природу простих делова дискретног простора, који у дискретној Геометрији играју очевидно улогу конститутивних елемената простора и облика у њему. У континуираној Геометрији примарну улогу игра сама непрекидна екстензија континуираног простора, док тачка игра секундарну улогу фиктивног одвајања појединих делова те екстензије једног од другог. У дискретној Геометрији тачка није више фиктивне вредности, она је последњи стварни елеменат из кога постаје како сам простор, тако и сви поједини облици у њему. Отуда очевидно мора дискретна Геометрија нарочито испитати природу тих својих последњих елемената, и то она и чини у ова два последња постулата своја.

Први од ова два постулата тврди, да постоје две врсте та-

¹ Види о томе моје наведено дело „Principien d. Metaphysik etc...” стр. 226—28.

² „О бескрајности света“ у „Делу“ за јануар 1904.

чака у дискретном простору, тачке реалне и тачке иреалне. Тврђењем да поред реалних тачака постоје и иреалне тачке у простору овај постулат уноси у дискретну Геометрију нешто што, по пређашњим нашим извођењима, није обухваћено у првом и трећем постулату њеном. Говорећи о трећем постулату ми смо видели, да је дискретни простор могућан само под претпоставком, да су последњи елементи његови реалне природе, јер је само у том случају величина њихова равна 1 и према томе композиција простора из њих могућа. Овај нови постулат наш међу тим тврди, да поред реалних тачака постоје у дискретном простору и иреалне тачке, тј. тачке које нису испуњене никаквим реалним садржајем, овај постулат изгледа дакле да негира донекле пређашњи постулат. У ствари он га нимало не негира, већ га само допуњује. Јер иреалне тачке, које овај постулат претпоставља, такве су природе, да је њихова егзистенција немогућа без реалних тачака. Иреална тачка на име могућа је само као тачка која раздваја две реалне тачке, иреална тачка на име могућа је само између две реалне тачке. Али и обратно реалне тачке нису могуће без иреалних тачака које их раздвајају: претпоставка реалних тачака повлачи за собом нужним начином претпоставку иреалних тачака, две реалне тачке немогуће су без иреалне тачке која се налази на средини између њих (отуда ја и називам иреалне тачке средњим а реалне средишним тачкама, пошто су ове последње носиоци оних првих) и која их раздваја. Као год што фиктивна тачка C континуиране Геометрије раставља линију AB у фиктивне половине AC и CB (сл. 1), исто тако мора између две реалне тачке A и B (сл. 2) постојати иреална тачка C , која их раставља: ово тврђење је нешто што непосредно излази из самог посматрања две дискретне тачке које се додирују, то је тврђење дакле једна непосредна интуитивна чињеница.

$$\begin{array}{c} C \\ \downarrow \\ A \cdot B \end{array}$$
 сл. 2.

Сам факат иреалних тачака у дискретном простору не може се одрицати, али оно о чему може бити дискусије то је, да ли је величина иреалних тачака равна величини реалних тачака тј. равна 1 или је њихова величина, за разлику од ових последњих, равна 0. На први поглед изгледа да је само ово последње могуће. Јер иреална тачка, према самој дефиницији њеној, јесте тачка без икакве реалне садржине, па како смо ми величину реалне тачке баш зато метнули да је равна 1, што је та тачка испуњена реалном садржином, то би из тога непо-

средно следовало, да је величина иреалне тачке равна 0. Међу тим то тако изгледа да је само на први поглед. У ствари чим смо ми величину реалне тачке ставили $= 1$ ми морамо одмах и величину иреалне тачке ставити $= 1$ просто зато, што су и једна и друга, с чисто квантитативног гледишта, у истом смислу тачке. Из квалитативне испуњености реалне тачке ми смо само закључили да њена квантитативна вредност као тачке не може бити равна 0 већ мора бити равна 1, из ове квантитативне вредности њене пак ми смо у праву одмах закључити да је и квантитативна вредност иреалне тачке равна јединици јер је иреална тачка у истом оном смислу тачка у коме је то реална тачка, она је наиме исто тако прост и недељив квантитативни елеменат као што је то и реална тачка. И ако дакле постоји између реалне и иреалне тачке квалитативна разлика у томе што је ова прва испуњена реалним садржајем а ова друга не, ипак су обе у квантитативном погледу идентичне, тј. обојима је величина равна 1.

То је први разлог, који се да навести за тврђење да је величина иреалне тачке равна 1. Други је разлог овај. Иреална тачка као тачка која непосредно раздваја две реалне тачке представља у исто доба и њихово растојање. У континуираном простору растојање између две (фиктивне) тачке увек је једна екстензивна линија, која их раставља, сама тачка пак, која фиктивно раставља два дела једне линије један од другог, н. пр. тачка С у сл. 1. делове АС и СВ линије АВ, равна је по својој величини 0 и то просто зато што она у ствари и не раставља једно другом окренуте крајеве одговарајућих линијских делова један од другог. У дискретном простору ствар стоји сасвим другачије. Ту иреална тачка раставља доиста реалне тачке једну од друге, и за то величина њена мора бити равна 1 а не 0, пошто би величина 0 у овом случају значила уништење сваког стварног растојања међу њима, значила би дакле уништење стварне одвојености једне реалне тачке од друге, чиме би сама дискретност простора била уништена. Баш зато што је величина фиктивне тачке континуираног простора равна нули, мора величина иреалне тачке дискретног простора бити равна јединици.

Трећи разлог који се да навести за тврђење, да је величина иреалне тачке равна 1, стоји у тесној вези са пређашњим. Докле пређашњи разлог полази од појма иреалне тачке као непосредног растојања двеју реалних тачака, дотле овај раз-

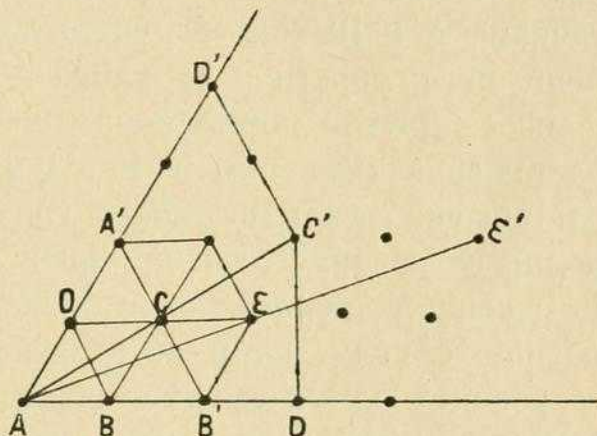
лог полази од појма иреалне тачке као непосредног додира двеју реалних тачака. Иреална тачка на име и ако раставља две реалне тачке једну од друге ипак је то раздвајање непосредно, реалне тачке не могу се једна другој тако приближити да између њих нема више иреалне тачке — пошто би у у овом случају оне пале уједно и не би биле више две — иреална тачка преставља у исто доба и непосредни додир реалних тачака. Пошто смо ово утврдили, да се лако увидети, да величина иреалне тачке не може бити равна 0, већ да мора бити равна 1. Кад би величина иреалне тачке C , која раставља реалну тачку A од реалне тачке B (сл. 2), била равна 0, онда би ове две тачке морале пасти уједно, неби могле бити две. Јер ако би тачке A и B у овоме случају требале да остану раздвојене, да не падну уједно, онда би се морало претпоставити, да се тачка A додирује са тачком B само једним својим крајем и то оним који је окренут тачки B , а исто би то важило и за тачку B у односу на тачку A . На први поглед ово изгледа и могуће, међу тим чим се узме у обзир природа просте тачке, одмах се увиђа да је то немогуће. Тачка A као и тачка B проста је и недељива, т. ј. она нема никаквих делова у себи а претпоставити да се једна тачка може са другом тачком додиривати само једном страном својом, значи претпоставити да се она може додиривати само једним делом својим са другом тачком, значи дакле претпоставити да тачка има делова, а то је немогуће. Пошто тачка нема делова то је очевидно, да ако је величина иреалне тачке C равна 0, тачка A мора се цела додиривати са тачком B и обратно, у ком би случају очевидно обе тачке морале пасти уједно. Иреална тачка не може дакле по својој величини бити равна 0 већ мора бити равна 1 (као тачка она не може имати величину већу од 1).

Ова три разлога потпуно су довољна да утврде став, да је величина иреалне тачке равна 1, чиме је трећи постулат, који је раније изведен само за реалне тачке, проширен и на иреалне тачке, учињен дакле општим.

Пети постулат дискретне Геометрије са чисто геометријског становишта најважнији је од свих постулата њених, јер од тога постулата зависи сама могућност дискретне Геометрије као математичке дисциплине. По томе постулату екстензија дискретног простора лежи само у иреалним тачкама његовим, т. ј. величина линије у дискретном простору има да се цени само

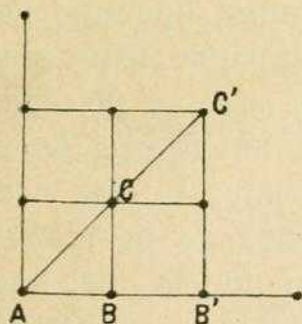
по броју преалних тачака које су у њој дате, реалне тачке не смеју се при томе никако узети у обзир, оне се имају при томе сматрати просто као нуле. Овим својим постулатом дискретна Геометрија изгледа да непосредно негира саму полазну тачку своју. Ми смо раније видели како само онда нема никакве тешкоће у схватању да је простор састављен из тачака, ако се претпостави да су те тачке реалне, јер је само у том случају њихова величина равна 1. Сада пак ми тврдимо да се прѣва екстензија простора и не састоји у реалним тачкама већ само у преалним. Међу тим ово наше садашње тврђење само привидно противречи нашем пређашњем тврђењу; ово садашње тврђење само би онда противречило пређашњем кад би величина преалне тачке била равна 0 а не 1. Чим је пак утврђено, да је величина преалне тачке равна 1, одмах је тиме већ казано да у екстензији простора морају и преалне тачке играти улогу. Али — и у толико наше садашње тврђење доиста одступа од пређашњег — оне не само да морају играти улогу у екстензији простора, него оне су и једине које ту екстензију сачињавају. У почетку је изгледало да само реалне тачке, баш зато што им је несумњиво величина равна 1, једино могу сачињавати простирање простора, сада пак, пошто је утврђена егзистенција преалних тачака, излази да су ове последње једине које то простирање чине. Из тога излази само једно, на име да унутрашња геометријска структура дискретног простора није тако проста ствар као што то на први поглед изгледа. У дискретном простору морамо на име разликовати два сасвим различна конститутивна фактора: оно што простор ставља и оно што простор чини. Реалне тачке на име несумњиво су оно што простор ставља, без чега простора не би било, јер су преалне тачке могуће само између реалних тачака, оне претпостављају егзистенцију ових. Али реалне тачке нису оно што чини сам простор, само простирање, екстензију. Јер преалне тачке, баш зато што растављају реалне тачке, што их стављају једну ван друге, што представљају непосредно растојање између њих, очевидно су оно што чини специфичну просторност у дискретном простору. Једна реална тачка за себе не чини никакав простор, две реалне тачке већ чине простор — и ако најпростији простор који се да замислити — а пошто су две реалне тачке две само помоћу преалне тачке, која их раставља, то је очевидно да је у овом случају преална тачка оно што чини простор, што чини екстензију простора.

Место сваког даљег чисто логичког доказивања петог основног постулата дискретне Геометрије ми ћемо чисто математички доказати, да је само под његовом претпоставком дискретна Геометрија као егзактна математичка дисциплина могућа. Овај математички доказ полази од једне чињенице у дискретном простору, којој у континуираном простору опет ништа директ не одговара, на име од чињенице имагинарног додира и имагинарних правих линија. Сл. 3 и 4. престављају нам две основне равни дискретне Геометрије — које су у исто доба и типичне форме дискретног простора — и то сл. 3 троугласту а сл. 4 квадратну раван. Прва је састављена из све самих простих троуглова а друга из простих квадрата (одн. четвороуглова). Две тачке, које се непосредно додирују, престављају најпростији могући простор, они чине најпростију праву линију или просто просту праву линију. Три тачке које се непосредно додирују једна с другом чине најпростију дискретну раван, оне чине најпростији могући троугао и то је тај троугао, као што се лако да увидети,



Сл. 3.

равностран а стране су му просте праве. Како се око једне тачке може у (дискретној) равни метнути шест таквих простих троуглова (одн. шест тачака) то је јасно да се из простих троуглова да склопити без празнина дискретна раван, и така раван назива се троугластом. Раван пак која је састављена из простих квадрата т. ј. квадрата чије су стране просте праве — око једне тачке могу се у (дискретној) равни метнути четири таква проста квадрата (одн. осам тачака) — назива се квадратном.



Сл. 4.

Само један поглед на троугласту раван сл. 3. уверава нас да не само за тачке А, В, В', D, од којих се свака непосредно додирује са оном што јој предходи, морамо тврдити да чине праву линију AD, него исто тако морамо и за тачке А, С и С' тврдити да чине праву

линију AC' и за тачке A , E и E' да чине праву линију AE' и т. д. Осим правих линија дакле, између чијих реалних тачака постоје иреалне тачке, у дискретном се простору налазе још и такве праве, чије реалне тачке нису више растављене иреалним тачкама, већ чије се реалне тачке, које непосредно слеђују једна за другом, налазе у растојању које је веће од растојања 1 иреалне тачке. Док се тачка B додирује с тачком A непосредно, т. ј. док је њихово растојање равно растојању које преставља иреална тачка, дотле је тачка C удаљена од тачке A за растојање које је веће од 1. Како ми за тачке A и B само зато тврдимо да се додирују непосредно, што између њих нема никакве реалне тачке (као што је случај са реалним тачкама A и B' које су растављене реалном тачком B), тако ћемо исто морати и за тачке A и C тврдити да се додирују једна са другом пошто нема никакве реалне тачке која би их растављала (као што је то случај са тачкама A и C' које су растављене реалном тачком C), само што ћемо овај последњи додир за разлику од оног првог назвати посредним. Како је посредни додир, као што се лако да увидети, само у преносном смислу додир, то је боље назвати га имагинарним за разлику од непосредног који је, као додир у правом смислу, реалан. Према томе и праве линије чије се реалне тачке имагинарно додирују назваћемо имагинарним правима (такве су AC' , AE' и т. д.) за разлику од реалних правих, чије се реалне тачке реално додирују једна са другом.

Пошто смо тако утврдили чињеницу имагинарног додира и имагинарних правих у дискретном простору, показаћемо да имагинарне праве само тако могу у дискретном простору постојати, ако се просторна величина реалних правих цени само по броју иреалних тачака, које оне садрже, а не и по броју реалних тачака, т. ј. ако се реалне и иреалне тачке при оцени величине реалне праве не сумирају једна са другом. Ово ћемо доказати најпре индиректним путем т. ј. показаћемо да постају противречности у одредби величине једне имагинарне праве ако се при оцени величине реалних правих сумирају реалне тачке са иреалним. Ми ћемо ова израчунавања имагинарних правих извршити прво у троугластој па онда у квадратној равни и то ћемо у оба случаја израчунавати величину просте имагинарне праве AC , управо растојање имагинарног додира између тачака A и C , које ћемо за разлику од просте имагинарне праве AC —

која обухвата осим имагинарног растојања између тачака А и С још и ове последње — означити са iAC .

Ако сада израчунамо — по Питагорином правилу — у сл. 3 имагинарно растојање iAC најпре непосредно из правоуглог троугла $AA'C$ а затим посредно из имагинарне праве AC' , чију величину израчунавамо из правоуглог троугла $AC'D'$, имаћемо:

1) $iAC = AC - 2$ (пошто је $AC = iAC + 2$, где 2 означава суму простих тачака А и С), $AC = \sqrt{AA'^2 - A'C^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16}$ (пошто је $AA' = A + O + A' + 2 = 3 + 2$, где 3 означава суму простих реалних тачака А, О и А' а 2 суму иреалних тачака које се између њих налазе, а $A'C = 2 + 1$ где 2 означава суму реалних тачака А' и С а 1 иреалну тачку која се између њих налази), дакле

$$iAC = 4 - 2 = 2.$$

2) $iAC = \frac{AC' - 3}{2}$ (пошто је $AC' = A + iAC + C + iCC' + C' = 2iAC + 3$), $AC' = \sqrt{AD'^2 - D'C'^2} = \sqrt{9^2 - 5^2} = \sqrt{56}$ (пошто је $AD' = 9$, $D'C' = 5$) дакле

$$iAC = \frac{\sqrt{56} - 3}{2}.$$

Како је у првом случају $iAC = 2$ а у другом $= \frac{\sqrt{56} - 3}{2}$

то би требало да је $2 = \frac{\sqrt{56} - 3}{2}$ што није случај, јер кад се изврше рачунске операције у овом изразу до краја излази да је $49 = 56$, а то је немогуће.

На основу аналогог израчунавања у квадратној равни сл. 4 имамо:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

$$AC' = \sqrt{AB'^2 + B'C'^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$$

$$iAC = \sqrt{18} - 2, \quad iAC' = \frac{\sqrt{50} - 3}{2} \quad \text{дакле}$$

$$\sqrt{18} - 2 = \frac{\sqrt{50} - 3}{2}, \quad \text{дакле } 4\sqrt{18} = 23, \quad \text{што је немогуће.}$$

Као што се из овог израчунавања види, ако величину реалне праве ставимо у суму иреалних и реалних тачака њених, онда величина једног истог растојања у дискретном простору добија различне вредности, оно дакле постаје у својој величини неодређено, што је очевидно немогуће и показује само да је сама претпоставка, од које смо при одредби његове величине пошли, погрешна и немогућа.

Ова неодређеност у одредби величине једног истог имагинарног растојања у дискретном простору ишчезава потпуно ако се величина реалне праве цени само по броју иреалних тачака које она садржи.

За троугласту раван сл. 3. имамо у овом случају:

1) $iAC = AC$ (пошто у овом случају реалне тачке не играју никакву улогу при одредби величине реалне праве, оне то не могу чинити очевидно ни код имагинарних правих, тако да се овде не може више правити разлика између имагинарног растојања iAC и просте имагинарне праве AC), $AC = \sqrt{AA'^2 - A'C^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ (пошто је у овом случају $AA' = 2$ где 2 означава суму иреалних тачака које се налазе између реалних тачака A , O и A' , а $A'C = 1$ где 1 означава иреалну тачку која се налази између тачака A' и C) дакле

$$iAC = \sqrt{3}$$

2) $iAC = \frac{AC'}{2}$ (пошто је $AC' = iAC + iCC' = 2iAC = 2AC$),

$$AC' = \sqrt{AD'^2 - D'C'^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ дакле}$$

$$iAC = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Као што се види величина имагинарног растојања iAC , одн. просте имагинарне праве AC , у оба је случаја иста, претпоставка од које се пошло мора дакле бити тачна, пошто је то осим оне прве, која је немогућа, још једина могућа претпоставка.

То исто показује и аналого израчунавање у квадратној равни сл. 4, где имамо:

$$iAC = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ и}$$

$$iAC = AC = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{AB'^2 + B'C'^2}}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2},$$

дакле за оба случаја за iAC исти резултат.

Као што смо се досадашњим израчунавањима уверили, да се величина реалних правих може само ценити по броју преалних тачака, које оне садрже — чиме је пети постулат дискретне Геометрије дефинитивно доказан — и аналого томе величина имагинарних правих само према броју и величини имагинарних растојања која леже између реалних тачака њихових, тако исто можемо се аналогним рачуном уверити, да се величина преалне тачке може само ставити да је равна 1, никако не да је равна 0. Ми ћемо опет, претпоставивши ово последње, израчунати величину имагинарног растојања iAC најпре за троугласту па онда за квадратну раван, и то на исти начин као што смо то и раније чинили.

За троугласту раван сл. 3. тада ћемо имати:

1) $iAC = AC - 2$ [пошто је и у овом случају као и у првом случају под 1) $AC = iAC + 2$], $AC = \sqrt{AA'^2 - A'C^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ (пошто је у овом случају $AA' = A + O + A' = 3$, где 3 означава суму реалних тачака A , O и A' , а $A'C = 2$, где 2 означава суму реалних тачака A' и C) дакле

$$iAC = \sqrt{5} - 2$$

2) $iAC = \frac{AC' - 3}{2}$ [пошто је и у овом случају као и у првом случају под 1) $AC' = 2iAC + 3$], $AC' = \sqrt{AD'^2 - D'C'^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$ (пошто је у овом случају, као што се лако из слике види, $AD' = 5$ а $D'C' = 3$), дакле

$$iAC = \frac{4 - 3}{2} = \frac{1}{2}$$

Како је у првом случају $iAC = \sqrt{5} - 2$ а у другом $iAC = \frac{1}{2}$ то би морало бити $\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{2}$, што није случај, јер кад се изврше рачунске операције у овом изразу до краја излази да је $20 = 25$, што је немогуће.

За квадратну раван сл. 4 имамо сличним начином:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$AC' = \sqrt{AB'^2 + B'C'^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

$$iAC = \sqrt{8} - 2, iAC' = \frac{\sqrt{18} - 3}{2} \text{ дакле}$$

$$\sqrt{18} - 2 = \frac{\sqrt{18} - 3}{2}, \text{ дакле } \sqrt{8} = 15, \text{ што је очевидно немогуће.}$$

Као што показује горње рачунање, под претпоставком да је величина иреалне тачке равна 0 — у ком се случају величина реалне праве мора очевидно ценити само по броју реалних тачака које она садржи — излазе различни резултати за величину једног и истог (имагинарног) растојања у дискретном простору, што је противречно и немогуће, из чега излази да је и сама та претпоставка немогућа, а из тога опет излази да једино претпоставка, да је величина иреалне тачке равна 1, може бити тачна.

Ми смо свих пет основних постулата дискретне Геометрије аналисали и доказали, а тиме смо у исто доба доказали и могућност дискретне Геометрије. Досада се држало да је дискретна Геометрија немогућа, што је долазило само од недовољне анализе основних постулата њених. Која ће пак од две једино могуће Геометрије, да ли континуирана Геометрија која данас важи, или дискретна, чији су тек први основи постављени, однети дефинитивну победу, то ће решити будућност.

² Питање о величини иреалне тачке у вези са још неким принципијелним питањима (о којима је и овде било помена) дискретне Геометрије ја сам опширно расправљао у своме чланку „Ueber die Grösse der unmittelbaren Berührung zweier Punkte. Beitrag zur Begründung der discreten Geometrie“, који је изашао у Ostwald's „Annalen der Naturphilosophie“ 1905.