

abl

Band 10. 1911

https://zs.thulb.uni-jena.de/receive/jportal_jpvolume_00178879

Lizenz:



<https://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/legalcode>



Über die Unmöglichkeit unendlich großer Geraden mit einem Endpunkt im Unendlichen.

Von

Dr. Branislav Petronievics.

Die logische Möglichkeit unendlich großer Geraden mit einem Endpunkt im Unendlichen wird gewöhnlich als unmittelbare Folge der logischen Möglichkeit von transfiniten Zahlen betrachtet. In der folgenden Abhandlung stelle ich mir zur Aufgabe, die Unrichtigkeit dieser Schlußfolgerung mit voller Evidenz nachzuweisen, indem ich dabei die Frage der logischen Möglichkeit von transfiniten Zahlen ganz bei Seite lasse.¹ Die Beweisführung wird zunächst auf Grund der transfiniten Zahlenlehre Cantors geführt und dann wird ein allgemeiner Beweis geliefert, der gegen jede andersartige transfinite Zahlenlehre gilt.

In seiner transfiniten Zahlenlehre unterscheidet Cantor bekanntlich Ordinalzahlen und Kardinalzahlen voneinander. Da diese letzteren für unsere Betrachtungen keine Bedeutung besitzen, lassen wir sie hier ganz außer Betracht und beschränken uns nur auf Ordinalzahlen. Diese werden von Cantor als Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen definiert.² Unter Ordnungstypus einer (einfach) geordneten Menge M versteht Cantor „den Allgemeinbegriff, welcher sich aus M ergibt, wenn wir nur von der Beschaffenheit der Elemente m abstrahieren, die Rangordnung aber beibehalten“, d. h. der Ordnungstypus ist „selbst eine (einfach) geordnete Menge, deren Elemente lauter Einsen sind.“³ Wohl-

¹ Die ausführliche Behandlung dieser Frage findet sich in meiner Schrift: „Die typischen Geometrien und das Unendliche“, 1907, S. 55–68, und in meinem metaphysisch-mathematischen Werke: „Prinzipien der Metaphysik u. s. w., I. Bd., 1. Abteilung. Mit einem Anhang: Elemente der neuen Geometrie“. Heidelberg 1904, S. 192–225.

² G. Cantor, „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“. Mathematische Annalen, Bd. 49, S. 207.

³ G. Cantor, Mathematische Annalen, Bd. 46, S. 496f.

Ann. Nphil. X.

geordnet ist eine (einfach) geordnete Menge, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

1. Ein erstes Element besitzt,
2. jedes Element in ihr, falls es nicht das letzte ist, ein ihm unmittelbar nachfolgendes Element hat,
3. jede Menge von Elementen in ihr ein allen diesen unmittelbar nachfolgendes Element hat (ausgenommen den Fall, daß es ein Element dieser letzteren Art überhaupt nicht gibt.)⁴

Da der Ordnungstypus einer wohlgeordneten Menge selbst eine wohlgeordnete Menge ist, die aus lauter Einsen besteht, so ist derselbe offenbar identisch mit der Ordinalzahl, so wie diese in der sogenannten natürlichen Zahlenreihe, d. h. in der Reihe ganzer positiver Zahlen

$$1, 2, 3, 4, \dots, \nu, \dots$$

in der jede nachfolgende Zahl aus der vorhergehenden durch die Hinzufügung von Eins entsteht, auftritt.⁵ Da wir uns nun diese letztere Reihe ins Unendliche fortgesetzt denken können — denn eine größte endliche Zahl ist undenkbar — und dieselbe offenbar selbst eine wohlgeordnete Menge ist, so muß ihr eine Ordinalzahl entsprechen und da diese nicht endlich sein kann, so muß sie unendlich sein. Auf diese Weise gelangt Cantor zu seiner ersten oder kleinsten transfiniten Ordinalzahl, die er mit ω bezeichnet. Weiter läßt er aus der wohlgeordneten Menge

$$1, 2, 3, 4, \dots, \nu, \dots, \omega$$

die zweite transfinite Ordinalzahl $\omega + 1$ entstehen und durch Fortsetzung desselben Verfahrens⁶ gelangt er schließlich zu der wohl-

⁴ Vergl. G. Cantor, Mathematische Annalen, Bd. XXI, S. 548f. Die drei oben erwähnten Bedingungen der wohlgeordneten Menge können auch durch die eine Eigenschaft derselben ersetzt werden, daß jede Teilmenge einer solchen Menge ein erstes Element hat.

⁵ Vergl. G. Cantor, Mathematische Annalen, Bd. 49, S. 216.

⁶ In der älteren Darstellung seiner transfiniten Zahlenlehre deduziert Cantor seine transfiniten Zahlen auf Grund besonderer Erzeugungsprinzipie (vergl. Mathematische Annalen, Bd. XXI, S. 576ff.). Das erste Erzeugungsprinzip (das zugleich das einzige Erzeugungsprinzip endlicher Zahlen ist) besteht in der Hinzufügung von Eins zu einer schon gebildeten Zahl; das zweite in der Setzung einer transfiniten Zahl als der Grenze aller eine unendliche Reihe vom Typus ω bildenden Zahlen. Auf Grund dieser beiden Erzeugungsprinzipie gelangt man aber, wie dies A. Schoenflies zuerst klar formuliert hat (vergl. „Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten“ im „Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung“, Bd. VIII, 2. H., S. 48f.) nur zu den Zahlen der ersten

geordneten Menge aller denkbaren Ordinalzahlen überhaupt, der sogenannten Menge W :

$1, 2, 3, 4, \dots, \nu, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \nu, \dots, \omega \cdot 2,$
 $\omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot \nu, \dots, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^\nu, \dots, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots$
 $\alpha, \dots, \Omega, \Omega + 1, \dots, \gamma \dots$

die nach ihm keinen Ordnungstypus mehr haben soll.⁷

Ob sich nun diese so gewonnenen transfiniten Ordinalzahlen widerspruchslös auf die Gerade anwenden lassen, ob, mit anderen Worten, die endliche einen Anfangspunkt habende Gerade sich ebenso in der einen Richtung ins Unendliche fortsetzen lasse (selbstverständlich müßte sie in diesem Falle auch in der anderen Richtung ins Unendliche fortsetzbar sein, wovon wir hier aber der Einfachheit halber absehen), wie die natürliche Zahlenreihe eine solche Fortsetzung ins Unendliche nach dem eben Ausgeführten zuläßt?

Auf den ersten Blick scheint nun eine solche Fortsetzung der Geraden ins Unendliche ohne weiteres möglich zu sein. Denn wenn wir auf einer Geraden mit dem Anfangspunkte 0 dem Anfangssegment 0—1 (vergl. Fig. 1) als Segmentseinheit gleiche Segmente 1—2, 2—3 u. s. w. hinzufügen, so werden dadurch von dem Anfangspunkt aus genommen immer größere Geradensegmente 0—1, 0—2, 0—3 u. s. w. ... entstehen, die



Fig. 1.

den Zahlen der natürlichen Zahlenreihe

$1, 2, 3, 4, \dots, \nu, \dots$

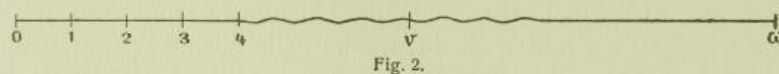
entsprechen. Da nun diese letztere kein letztes Glied hat, so können wir uns auch in der ersteren kein letztes endliches Segment 0— ν denken, d. h. die in Fig. 1 gegebene Gerade müsse ebenso in der einen Richtung ins Unendliche fortsetzbar sein, wie

und der zweiten Zahlklasse, die erste Zahl der dritten Zahlklasse (die erste Zahl dieser Klasse bezeichnet Cantor mit Ω) könnte nur auf Grund eines neuen dritten Erzeugungsprinzips entstehen. Über die Frage höherer Zahlklassen vergl. man auch G. Hessenberg, „Grundbegriffe der Mengenlehre“ in „Abhandlungen der Friesschen Schule“, Bd. I, S. 645ff.

⁷ Über den Widerspruch der entsteht, wenn der Menge W ein Ordnungstypus zugeschrieben wird, man vergl. z. B. F. Bernstein, „Über die Reihe der transfiniten Ordinalzahlen“ in „Mathematische Annalen“, Bd. 60, S. 187f.

dies für die in Rede stehende Zahlreihe gilt. Eine solche unendliche Gerade hätte aber noch keinen Endpunkt im Unendlichen.

Dieser letztere scheint aber mit Notwendigkeit zu folgen, wenn wir mit Cantor die kleinste transfinite Zahl ω als den Inbegriff aller endlichen Zahlen (resp. den Ordnungstypus ihrer Menge), auffassen. Dann scheint außerhalb all der endlichen Segmente $0-1, 0-2, 0-3, \dots, 0-\nu$ der Geraden in der Fig. 1 resp. ihrer Endpunkte $1, 2, 3, \dots, \nu, \dots$ ein Punkt vorhanden zu sein, der der transfiniten Zahl ω entspricht, so wie dies die Fig. 2 veranschaulicht, in der die Strecke

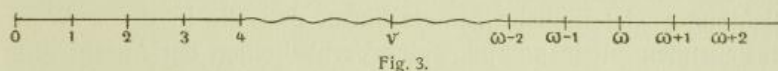


ebenso wie in der Fig. 1, die Fortsetzbarkeit der Reihe endlicher Segmente $0-1, 0-2, 0-3, \dots, 0-\nu, \dots$ ins Unendliche und die Strecke — den begrifflichen Zusammenhang dieser Reihe mit der Zahl ω oder, anders ausgedrückt, das aktuelle Gegebenensein aller endlichen Segmente in der unendlichen Geraden $0-\omega$ bedeutet.

Ist aber einmal ein Endpunkt der unendlichen Geraden im Unendlichen zugegeben und entspricht dieser Endpunkt (der der erste Punkt im Unendlichen sein sollte) der transfiniten Zahl ω Cantors, dann muß es auf der unendlichen Geraden auch Punkte geben, die allen übrigen transfiniten Ordinalzahlen Cantors entsprechen, die Gerade muß dann also in der einen Richtung ins absolut unbestimmte Unendliche fortsetzbar sein.

Die Anwendung der transfiniten Zahlenlehre Cantors auf die Gerade resp. eine unendliche große Gerade mit einem Endpunkt im Unendlichen (oder, allgemeiner gesprochen, mit Punkten, die vom Anfangspunkte unendlich weit liegen) scheint somit ganz widerspruchslos zu sein. Das ist aber nur ein Schein, den wir in folgendem zerstören werden. Zu diesem Ende müssen wir sofort auf einen wichtigen Unterschied hinweisen, der zwischen den Segmenten der unendlich groß gedachten Geraden (selbstverständlich ist hier von denjenigen Segmenten die Rede, die den Anfangspunkt der Geraden zu ihrem Anfangspunkt haben) und der Reihe der transfiniten Ordinalzahlen Cantors besteht. Während nämlich in dieser letzteren Zahlen von der Form $\omega-1, \omega-2, \dots, \omega-\nu, \dots$ (resp. $\omega \cdot \nu-1, \omega^{\omega}-1$, u. s. w.) nicht vorkommen und, auf

Grund der Cantorschen Erzeugungsprinzipie transfiniter Zahlen, darin auch nicht vorkommen können, sind auf der unendlich großen Geraden mit Punkten im Unendlichen offenbar auch Segmente vorhanden (vergl. Fig. 3), die diesen nach Cantor unmöglichen transfiniten Ordinalzahlen entsprechen. Denn während in der Reihe der transfiniten Ordinalzahlen der Zahl ω keine Zahl unmittelbar vorausgeht (so wie der Zahl $\omega + 1$ die Zahl ω unmittelbar vorausgeht), geht dem ω -Segment in der unendlichen Geraden unmittelbar ein Segment voraus, das begrifflich der nach Cantor



unmöglichen Zahl $\omega - 1$ entspricht (vergl. Fig. 3).

Man könnte nun versuchen, diese Zahl mit den Prinzipien der transfiniten Zahlenlehre Cantors doch in Einklang zu bringen. Ob dieser Versuch gelingen kann oder nicht, in die Untersuchung dieser Frage werden wir uns hier nicht einlassen, wir werden vielmehr hier die Unmöglichkeit der den transfiniten Ordinalzahlen Cantors entsprechenden Punkten auf einer unendlichen Geraden ganz unabhängig von dieser Frage der begrifflichen Möglichkeit der Zahl $\omega - 1$ nachweisen.⁸

Zu diesem Zweck denken wir uns die Gerade der Fig. 1 in einer Ebene gelegen und fügen zu jeder einzelnen Segmenteinheit $0-1$, $1-2$, $2-3$ u. s. w. dieser Geraden auf der einen Seite der Ebene (Ebene des Papiers) je ein Quadrat, dessen Seite also gleich der Segmenteinheit ist (Fig. 4.) Auf diese Weise haben

⁸ Die Bedingungen, unter denen die begriffliche Möglichkeit dieser Zahl mit der transfiniten Zahlenlehre Cantors in Übereinstimmung gebracht werden könnte, habe ich in meiner Schrift: „Die typischen Geometrien und das Unendliche“, Heidelberg 1907, S. 40–45, ausführlich erörtert. Weiter habe ich dann gezeigt, daß selbst die Einführung dieser Zahlen die transfinite Zahlenlehre Cantors nicht befähigt, auf die unendlich große Gerade widerspruchlos angewandt zu werden (S. 45–47 und 67–69). W. Killing hat in dessen „Grundlagen der Geometrie“ (Bd. II, § 11, S. 53f.) die transfiniten Ordinalreihen Cantors auf die Geraden angewendet und dabei Zahlen von der Form $\omega - v$ vorausgesetzt, ohne ihre begriffliche Möglichkeit untersucht zu haben (er bemerkt nur S. 58 und in einer gegen Veronese gerichteten Anmerkung S. 356, daß er sich in bezug auf transfinite Zahlen in voller Übereinstimmung mit Cantor befindet). Im folgenden zeige ich, daß dieselben räumlich unmöglich sind, ganz abgesehen davon, ob sie begrifflich möglich oder unmöglich seien.

wir statt der geradlinigen Segmente $1, 2, 3, 4, \dots, \nu$ der Fig. 1 in der Fig. 4 Horizontalreihen, die den Summen $1, 2, 3, 4, \dots, \nu \dots$ von Einheitsquadraten entsprechen. Wir fügen weiter jedem Einzel-

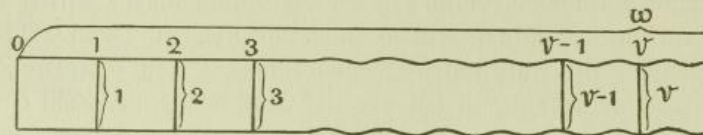


Fig. 4.

quadrat der Fig. 4 auf derselben Seite der Ebene in vertikaler Richtung soviel Einheitsquadrate hinzu, daß die in dieser Weise entstehenden aufeinanderfolgenden Vertikalreihen der Anzahl ihrer Quadrate nach mit der Anzahl von solchen in den entsprechenden

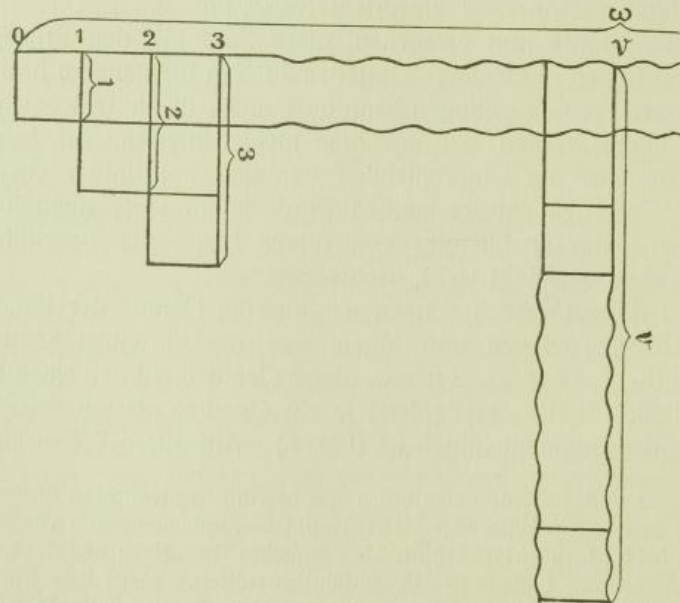


Fig. 5.

Horizontalreihen übereinstimmen, wodurch die Fig. 5 entsteht (in dieser bezeichnen der Einfachheit halber die segmentalen Ordinalzahlen auf der Horizontalgeraden zugleich die Ordinalzahlen, die den Horizontalreihen der Quadratensummen entsprechen). Die Figuren 4 und 5 dienen nun als Grundlage zu dem in folgendem mitzuteilenden Beweise.

Was entspricht nun, wenn wir von diesen beiden Figuren ausgehen, geometrisch der ersten transfiniten Ordinalzahl Cantors, der Zahl ω ? Auf diese Frage gibt uns die Fig. 5 eine unmittelbare und völlig klare Antwort, denn diese Figur ist das vollkommene geometrische Analogon dieser Zahl. Die Zahl ω ist ihrer Definition gemäß der Ordnungstypus der wohlgeordneten Menge aller endlichen Ordinalzahlen. In unserer Fig. 5 stellt jede vertikale Quadratenreihe eine endliche Ordinalzahl dar und diese vertikalen Reihen folgen darin ganz so aufeinander, wie dies die endlichen Ordinalzahlen in der wohlgeordneten Menge aller dieser Zahlen tun. Folglich wird die endlose Horizontalreihe von Quadraten in dieser Figur dem Ordnungstypus dieser letzteren wohlgeordneten Menge, der Zahl ω also, entsprechen, da jeder vertikalen Reihe ein Quadrat in der horizontalen entspricht, der Ordnungstypus einer wohlgeordneten Menge sich aber ergibt, wenn jedes ihrer Elemente, mit Beibehaltung der unter diesen bestehenden Ordnung, als eine Eins aufgefaßt wird.⁹ Entspricht aber der Ordinalzahl ω die endlose Horizontalreihe von Quadraten in der Fig. 5 (und demnach auch in Fig. 4), dann ist es klar, daß dieser Zahl geometrisch eine unendlich große Gerade entspricht, die einen Anfang aber kein Ende hat und auf der es, vom Anfang ausgehend, unter Zugrundelegung einer endlichen Segmenteinheit, nur endliche Segmente gibt.¹⁰

Ist dies letztere aber der Fall, dann läßt sich leicht beweisen, daß ein unendlich weit vom Anfangspunkte auf einer unendlich großen Geraden liegender Punkt keiner transfiniten Ordinalzahl

⁹ Vergl. G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Mathematische Annalen, Bd. 46, S. 497 und Bd. 49, S. 216.

¹⁰ G. Cantor, der in seinen zahlreichen Schriften die Frage der Anwendung seiner transfiniten Zahlen auf die Gerade meines Wesens nur an einer einzigen Stelle kurz berührt, behauptet ausdrücklich, daß der Ordinalzahl ω eine unendlich große Gerade entspricht, die keinen festen Anfangs- aber einen festen Endpunkt (ω -Punkt) im Unendlichen besitzt (vergl. dessen „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten“ in „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik“, Bd. 91, S. 103). Daß dies unrichtig ist, daß die der Ordinalzahl ω entsprechende unendlich große Gerade, der Definition dieser Zahl gemäß, nicht nur keinen festen sondern überhaupt keinen unendlich weit vom Anfangspunkte entfernten Punkt (Endpunkt) haben kann, dürfte nach dem Obigen außer Frage stehen. Die Willkürlichkeit des Anfangspunktes infolge der Gleichung $1 + \omega = \omega$ spielt dabei offenbar keine Rolle, denn trotz dieser Gleichung ist ein Anfangspunkt, obgleich kein fester, einer solchen Geraden vorhanden.

Cantors entsprechen kann, da die Voraussetzung eines solchen zu einem inneren Widerspruch führt.

Wollen wir nämlich auf der unendlich großen Horizontalgeraden der Fig. 5 einen keiner endlichen Ordinalzahl mehr entsprechenden Punkt haben, so müssen wir offenbar auf alle die endlichen Vertikalreihen dieser Figur in der Richtung nach rechts eine Vertikalreihe folgen lassen, die der ersten transfiniten Ordinalzahl ω entspricht. Diese letztere ist aber nach dem eben Ausgeführten mit der endlosen Horizontalreihe von Quadraten in der Fig. 5 identisch und wir gelangen so zur Fig. 6.

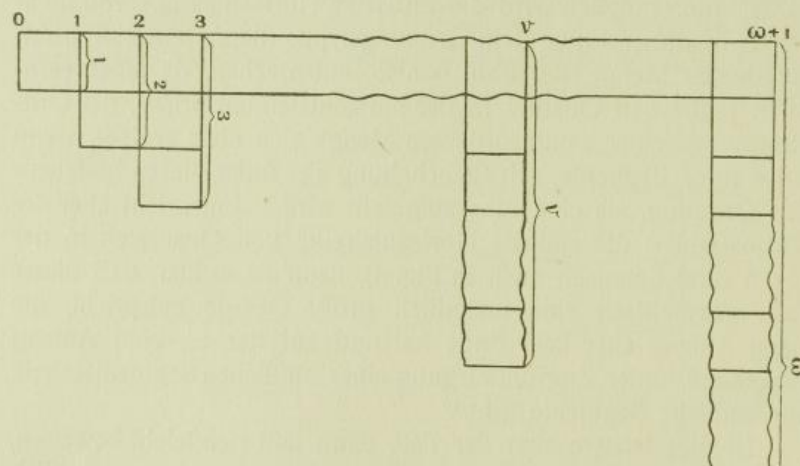


Fig. 6.

In dieser Figur entspricht nun jeder endlichen Ordinalzahl einer Vertikalreihe von Quadraten in der Horizontalgeraden ein Punkt von derselben Ordinalzahl in bezug auf die Summe der zwischen ihm und dem Anfangspunkte 0 liegenden Segmenteinheiten. Diese eindeutige Korrespondenz besteht aber nicht mehr zwischen der unendlichen Vertikalreihe ω und dem entsprechenden Punkte in der Horizontalgeraden, in bezug auf die Summe der zwischen ihm und dem Anfangspunkte liegenden Segmenteinheiten muß nämlich dieser letztere Punkt der Ordinalzahl $\omega + 1$ entsprechen, und zwar einfach deshalb, weil $\omega + 1$ den Ordnungstypus der wohlgeordneten Menge

$$1, 2, 3, 4, \dots, v, \dots, \omega$$

darstellt. Wenn also von der transfiniten Zahlenlehre Cantors ausgegangen wird, so ist der begrifflich erste unendlich weit

vom Anfangspunkte auf einer unendlich großen Geraden liegende Punkt nicht der Punkt ω , wie dies auf den ersten Blick der Fall zu sein schien, sondern der Punkt $\omega + 1$.

Auf Grund dieses Satzes und im Zusammenhang mit dem ihm zugrunde liegenden Satze von der endlosen Horizontalreihe der Fig. 5 als dem geometrischen Analogon der Zahl ω , läßt sich nun der Beweis für unseren Satz, daß es auf einer unendlich großen Geraden keinen einer transfiniten Ordinalzahl Cantors entsprechenden Punkt geben kann, leicht durchführen.

Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Erstens muß bewiesen werden, daß auf einer unendlich großen Geraden weder der dem $\omega + 1$ -Punkte unmittelbar vorausgehende ω -Punkt, noch der ihm unmittelbar nachfolgende $\omega + 2$ -Punkt möglich und demnach der $\omega + 1$ -Punkt selbst unmöglich ist, und dann wird zweitens auf Grund des in dem ersten Teil Bewiesenen der Satz selbst, daß es auf einer unendlich großen Geraden keinen einer transfiniten Ordinalzahl Cantors entsprechenden Punkt geben kann, bewiesen.

Der erste Teil des Beweises ist an der Fig. 7 zu führen, die aus der Fig. 6 entsteht, wenn man auf die Vertikalreihe ω in dieser Figur eine Vertikalreihe $\omega + 1$ unmittelbar folgen läßt:

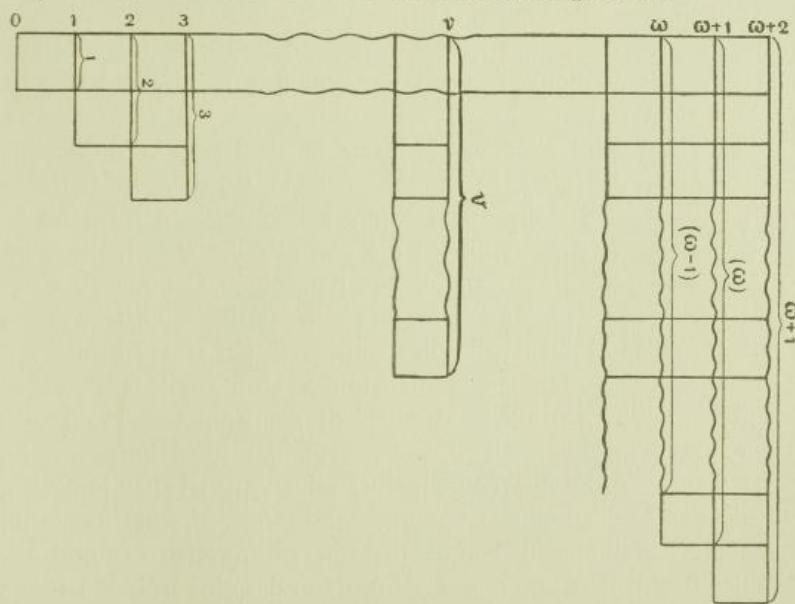


Fig. 7.

dann wird der entsprechende Punkt auf der Horizontalgeraden der transfiniten Ordinalzahl $\omega + 2$ entsprechen, da diese den Ordnungstypus der wohlgeordneten Menge

$$1, 2, 3, 4, \dots \nu \dots \omega, \omega + 1$$

darstellt. Ein Blick auf die Fig. 7 genügt nun, um das Widerspruchsvolle dieses Fortschritts vom Punkte $\omega + 1$ zum $\omega + 2$ -Punkte einzusehen. Denn derselbe bedeutet nicht mehr und nicht weniger als die Aufhebung der Vertikalreihe ω : sobald man nämlich auf diese letztere eine Vertikalreihe $\omega + 1$ folgen läßt, hört sie auf eine ω -Reihe zu sein, sie verwandelt sich auch selbst in eine $\omega + 1$ -Reihe. Dem letzten Quadrat der Vertikalreihe $\omega + 1$ muß nämlich in dieser Vertikalreihe ein Quadrat unmittelbar vorausgehen (sowie dem $\omega + 1$ -Punkte in der Horizontalgeraden ein ω -Punkt vorausgeht) und an dieses letztere schließt sich in der Ebene, wie die Fig. 7 zeigt, unmittelbar ein anderes Quadrat an, das in der Richtung der Vertikalreihe ω liegt, diese somit abschließt und zu einer $\omega + 1$ -Reihe macht. Die Vertikalreihe $\omega + 1$ ist somit unmöglich, unmöglich also auch der ihm entsprechende $\omega + 2$ -Punkt in der Horizontalgeraden. Da aber dieser letztere notwendigerweise bestehen müßte, wenn der $\omega + 1$ -Punkt auf der unendlich großen Geraden gegeben wäre (da sich die Gerade dann über diesen Punkt hinaus fortsetzen ließe), so folgt daraus auch die Unmöglichkeit des $\omega + 1$ -Punktes resp. der Vertikalreihe ω selbst.

Dasselbe folgt auch, wenn wir den dem $\omega + 1$ -Punkte unmittelbar auf der Geraden vorausgehenden ω -Punkt in Betracht ziehen (und das Dasein dieses Punktes könnte doch niemand in Zweifel ziehen). Erstens müßte die Vertikalreihe $\omega - 1$, die dem ω -Punkte begrifflich entspricht, aus demselben Grunde zu einer $\omega + 1$ -Reihe werden, aus dem dies die Vertikalreihe ω werden muß (selbstverständlich gilt dies nur, weil ein $\omega + 2$ -Punkt auf der Geraden angenommen werden muß). Und zweitens ist, selbst wenn man die begriffliche Möglichkeit der Zahl $\omega - 1$ zulassen wollte (was wir hier, wie früher gesagt, gar nicht untersuchen), diese Zahl, wie die Fig. 7 unmittelbar zeigt, räumlich unmöglich, da die der Vertikalreihe ω vorausgehende Vertikalreihe wiederum nur eine ω -Reihe sein könnte (bei diesem zweiten Grunde abstrahieren wir ganz von dem ersten), denn das eine in $\omega - 1$ -Reihe als Subtrahend auftretende Quadrat könnte nur das dem ω -Punkte

entsprechende Quadrat der Horizontalgeraden sein, was jedoch offenbar unmöglich ist.

Auf Grund des ersten Teils des Beweises läßt sich nun auch der Satz selbst leicht beweisen. Jede transfinite Ordinalzahl Cantors ist bekanntlich entweder eine Limeszahl (L)¹¹ oder eine aus einer Limes- und einer endlichen Ordinalzahl bestehende Zahl ($L + v$). Dieser letzteren kann nun ein Punkt auf einer unendlich großen Geraden deshalb nicht entsprechen, weil diesem Punkte die Vertikalreihe $L + v - 1$ entsprechen würde, dieser aber die Vertikalreihe $L + v - 2$, $L + v - 3$ u. s. w. vorausgehen müßte, bis man schließlich auf die Vertikalreihe $L + 1$ und L kommen müßte, die aber offenbar aus demselben Grunde nicht unmittelbar aufeinander folgen könnten, aus dem dies die Reihen $\omega + 1$ und ω in der Fig. 7 nicht tun können. Der Limeszahl L kann ein Punkt auf der unendlich großen Geraden einerseits deshalb nicht entsprechen, weil die diesem Punkte entsprechende Vertikalreihe der transfiniten Zahl $L - 1$ entsprechen müßte, eine solche Vertikalreihe aber räumlich ebenso unmöglich ist wie die Vertikalreihe $\omega - 1$ und andererseits deshalb nicht, weil die Vertikalreihe $L - 1$ aus demselben Grunde sich in die Reihe $L + 1$ umwandeln müßte, aus dem dies die ihr unmittelbar nachfolgende Reihe L tun muß. Bezeichnen wir also den auf einer unendlich großen Geraden unendlich weit von ihrem Anfangspunkte liegenden Punkt (resp. die unendliche Zahl der zwischen dem letzteren und dem Anfangspunkte liegenden endlichen Segmenteinheiten, vergl. Fig. 1) mit ∞ , so kann also ∞ durch keine transfinite Ordinalzahl Cantors ausgedrückt werden.

Damit ist aber unser allgemeiner Satz noch nicht bewiesen, es ist damit nur bewiesen, daß die transfiniten Ordinalzahlen Cantors nicht imstande sind, uns zu den unendlich weit vom Anfangspunkte auf einer unendlich großen Geraden liegenden Punkten zu führen. Daß es aber keine transfiniten Zahlen dieser Art gibt resp. keine unendlich weit vom Anfangspunkte liegenden

¹¹ Es ist hierbei ganz gleichgültig, ob man nur Limeszahlen vom Typus ω resp. nur Zahlen der zweiten Zahlklasse oder auch Limeszahlen anderer Typen, die in höheren Zahlklassen erscheinen (unter den ersten Zahlen dieser letzteren gibt es aber auch solche vom ω -Typus), die Hauptsache ist es, daß die wohlgeordnete Menge aller einer Limeszahl vorausgehenden Ordinalzahlen (möge diese Limeszahl einer noch so hohen Zahlklasse angehören), deren Ordnungstypus diese Limeszahl darstellt, kein letztes Element enthält.

Punkte auf einer unendlich großen Geraden, den Beweis für diesen Satz wollen wir nunmehr liefern.

Dem Beweis dieses Satzes legen wir den folgenden leicht zu beweisenden Satz zugrunde:

„Eine aus konsekutiven Elementen bestehende Menge, die ein erstes und ein letztes Element hat, ist endlich.“

Daß die Umkehrung dieses Satzes, der Satz also, daß jede endliche (d. h. aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehende) Menge eine aus lauter konsekutiven Gliedern bestehende ein erstes und letztes Element besitzende Menge ist, ein unmittelbar einleuchtender Satz ist, braucht nicht besonders bewiesen zu werden, denn dieser Satz ist nichts anderes als die Definition der endlichen Menge selbst. Gilt aber dieser Satz, dann muß auch der obige Satz als dessen Umkehrung gelten, wie sich das folgendermaßen beweisen läßt. Eine aus konsekutiven Elementen bestehende Menge, die ein erstes und ein letztes Element hat, müßte offenbar, da sie eine wohlgeordnete Menge ist, wenn sie unendlich wäre, in sich zwei unmittelbar aufeinander folgende Elemente enthalten, von denen das eine das letzte Element eines endlichen und das andere das letzte Element eines unendlichen Abschnitts einer solchen Menge wäre (unter Abschnitt einer wohlgeordneten Menge versteht man die Menge aller Elemente derselben, die vor einem vom Anfangselement verschiedenen Elemente liegen.)¹² Da aber die Hinzufügung eines Elementes zu dem letzten Elemente einer endlichen Menge wiederum nur eine endliche Menge liefern kann (ein Satz, der unmittelbar aus der Definition der endlichen Menge folgt), so würden zwei solche Elemente in unserer unendlichen Menge einen Widerspruch involvieren, diese letztere könnte also nicht unendlich, sie müßte endlich sein und damit ist unser obiger Satz bewiesen.¹³

¹² Vergl. G. Cantor, Mathematische Annalen, Bd. 49, S. 210. Der Cantorsche Definition des Abschnitts einer wohlgeordneten Menge gemäß würde das zweite der in Rede stehenden Elemente unserer Menge das den letzten resp. größten endlichen Abschnitt dieser Menge bestimmende Element sein.

¹³ Da jede Teilmenge einer aus konsekutiven Elementen bestehenden Menge, die ein erstes und letztes Element hat, auch selbst ein erstes und letztes Element haben muß, so kann unser obiger Satz auch durch den folgenden ersetzt werden:

„Wenn jede Teilmenge einer geordneten Menge sowohl ein erstes wie ein letztes Element besetzt, so ist die Menge endlich.“

Dieser Satz findet sich auf Grund der Eigenschaften des Ordnungstypus ω bewiesen bei G. Hessenberg, a. a. O. § 69, S. 584.

Steht aber einmal die Wahrheit dieses Satzes fest, dann läßt sich leicht beweisen, daß es auf einer unendlich großen Geraden keinen unendlich weit vom Anfangspunkte entfernten Punkt geben kann, da eine solche unendliche Gerade eine aus lauter konsekutiven Elementen bestehende Menge, die ein erstes und letztes Element hat, darstellt und demnach dem in Rede stehenden Satze gemäß endlich sein muß.

Daß die beiderseits begrenzte unendlich große Gerade wirklich eine solche konsekutive Menge darstellt, dies ist unmittelbar

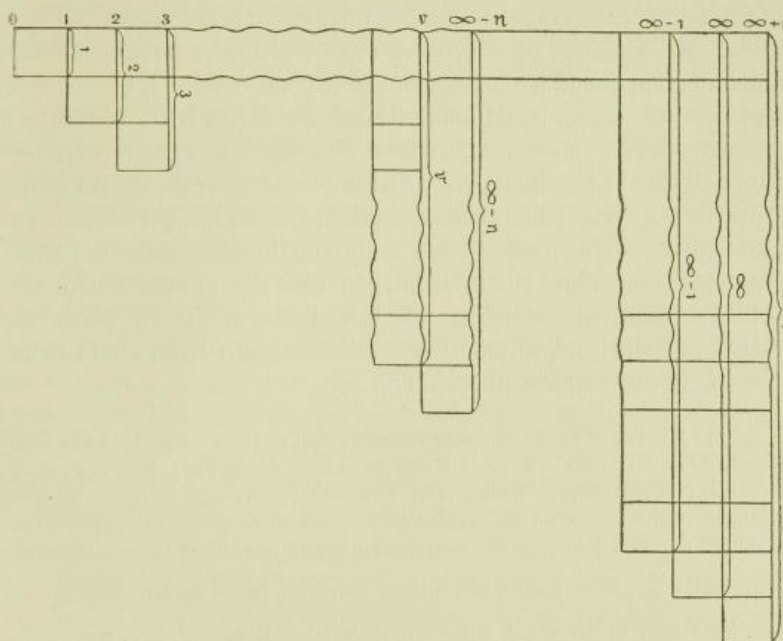


Fig. 8.

aus der Fig. 8 ersichtlich. Denn in der Horizontalgeraden dieser Figur liegen offenbar zwischen dem Anfangspunkte 0 und dem im Unendlichen liegenden Endpunkt ∞ unendlich viele Segmenteinheiten, die mit der ersten Segmenteinheit 0 — 1 gleich sind, resp. unendlich viele Quadrate, die diesen Segmenteinheiten in der Ebene entsprechen, und diese Segmenteinheiten und Quadrate folgen konsekutiv aufeinander. Da wir für die dem Endpunkte ∞ entsprechende unendliche Zahl erster Ordnung nicht mehr voraussetzen brauchen, daß sie mit Cantors ω identisch ist, so wird die diesem Punkte entsprechende Vertikalreihe von Qua-

draten vollkommen identisch mit der Horizontalreihe $1 - \infty$ sein können (wie dies in der Figur angenommen ist), die Vertikalreihe ∞ wird also ein letztes Quadrat enthalten und es wird somit sowohl die ihr unmittelbar vorausgehende Vertikalreihe $\infty - 1$ wie die Vertikalreihe $\infty + 1$ räumlich möglich sein.

Auf Grund der eben gemachten Voraussetzungen ist es nun leicht einzusehen, daß die Reihe der endlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, \dots, \nu, \dots$ resp. der ihnen entsprechenden wachsenden endlichen Segmente $0 - 1, 0 - 2, 0 - 3, \dots, 0 - \nu, \dots$ einerseits und die entgegengesetzte Reihe der unendlichen Zahlen $\infty, \infty - 1, \infty - 2, \infty - 3, \dots, \infty - n, \dots$ resp. der ihnen entsprechenden abnehmenden unendlichen Segmente $0 - \infty, 0 - \infty - 1, 0 - \infty - 2, \dots, 0 - \infty - n, \dots$, da beide Reihen auf einer und derselben Geraden liegen, notwendigerweise einander begegnen werden¹⁴ resp. daß diese unendlich große Gerade der Fig. 8, da sie aus lauter konsekutiven Segmenteinheiten besteht, notwendigerweise zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Segmenteinheiten enthalten muß, von denen die eine einem endlichen und die andere einem unendlichen Segment derselben als Endglied angehören wird, was widersprechend und unmöglich ist.¹⁵ Demnach kann eine beiderseits begrenzte Gerade nur endlich sein.

¹⁴ In der Fig. 8 haben wir vorausgesetzt, daß das $\infty - n$ -te Glied der Reihe $\infty - 1, \infty - 2, \dots, \infty - n, \dots$ auf das ν -te Glied der Reihe $1, 2, 3, \dots, \nu, \dots$ unmittelbar folgen wird. Wollte man aber behaupten, daß es zwischen dem Anfangspunkte 0 und dem Endpunkte ∞ der unendlich großen Geraden (erster Ordnung) der Fig. 8 infolge der unendlichen Größe derselben notwendigerweise einen Punkt $\frac{\infty}{2}$ geben müsse, der gleich weit von jenen beiden Punkten sei, dann hätte man in der Fig. 8 außer der Reihe $\infty - 1, \infty - 2, \dots, \infty - n, \dots$ auch die Reihe $\frac{\infty}{2}, \frac{\infty}{3}, \dots, \frac{\infty}{n}, \dots$ (die Figur ist in diesem Sinne leicht zu ergänzen), dann müßte aber offenbar das $\frac{\infty}{n}$ -te Glied dieser letzteren Reihe auf das ν -te Glied der Reihe $1, 2, 3, \dots, \nu, \dots$ unmittelbar folgen, womit der obige Widerspruch abermals gegeben wäre.

Die vorausgesetzten transfiniten Zahlen, denen die Eigenschaften der transfiniten Zahlen Cantors nicht mehr zukommen, sind im wesentlichen mit den transfiniten Zahlen Veroneses identisch. Über die weiteren speziellen Voraussetzungen, die Veronese seinen Zahlen zugrunde legt, vergl. man meine Schrift: „Die typischen Geometrien und das Unendliche“ 1907, S. 48–55.

¹⁵ Derselbe Beweis findet sich, in etwas anderer Fassung, bereits in meinen „Prinzipien der Metaphysik“, Bd. I, 1. Abt. 1904, S. 215f., nur daß er dort gegen den Begriff der unendlichen Zahl überhaupt verwendet worden ist.

Der eben gegebene Beweis für die Endlichkeit einer beiderseits begrenzten unendlich großen Geraden ist offenbar ein allgemeiner, d. h. er gilt nicht nur gegen die transfinite Zahlenlehre Veroneses, sondern auch gegen diejenige Cantors und gegen jede andere, die man erdenken könnte. Denn derselbe nimmt Rücksicht nur auf das konsekutive Aufeinanderfolgen der Segmenteinheiten einer solchen Geraden und diese Eigenschaft derselben muß jede transfinite Zahlenlehre bei ihrer Anwendung auf die Gerade berücksichtigen. Auch braucht der Beweis gar keine Rücksicht auf die den Segmenteinheiten entsprechenden Quadrate der Ebene zu nehmen, wie dies bei dem speziellen Beweise in bezug auf die transfiniten Zahlen Cantors geschehen mußte und wir haben in der Fig. 8 die Quadrate der Ebene nur berücksichtigt, um das Unterscheidende des allgemeinen Beweises von diesem speziellen besser hervortreten zu lassen.¹⁶

Die Bedeutung der vorstehenden Ausführungen für die Mathematik und die Philosophie dürfte keine geringe sein. Mit dem Nachweis der Unmöglichkeit beiderseits begrenzter unendlich großer Geraden ist zwar die Unmöglichkeit unendlich großer Geraden ohne einen Endpunkt im Unendlichen nicht bewiesen, demnach das Unendliche aus dem Gebiete der Mathematik noch nicht definitiv ausgeschieden, aber sein Geltungsbereich wird dadurch wesentlich eingeschränkt, denn fortan muß alles Gerede über den Schnittpunkt der Parallelen im Unendlichen, über Kreise und Kugeln mit unendlich großem Radius, über unendlich kleine (infinitesimale) Strecken (also über die gesamte sogenannte nicht-archimedische Geometrie)¹⁷ und dergleichen aufhören. In philosophischer Hinsicht liegt die Bedeutung dieses Nachweises erstens darin, daß dadurch eine Form des Unendlichen aus dem Gebiete

¹⁶ Auch lassen die vertikalen Quadratreihen in dieser Figur das Konsekutive der Segmente der Horizontalgeraden klarer hervortreten.

¹⁷ Daß eine unendlich kleine Strecke undenkbar ist, wenn die beiderseits begrenzte unendlich große Gerade unmöglich ist, folgt einfach daraus, daß die endliche Strecke, wenn sie aus einer unendlichen Anzahl von unendlich kleinen Strecken bestünde, in bezug auf die letzteren als Segmenteinheiten eine beiderseits begrenzte unendlich große Gerade darstellen würde. Da das archimedische Axiom mit der Behauptung von der Endlichkeit jeder beiderseits begrenzten Strecke identisch ist, so ist demnach die nichtarchimedische Geometrie, deren Begründer G. Veronese (vergl. dessen „Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen“, deutsch von A. Schepp, 1894) und D. Hilbert (vergl. dessen „Grundlagen der Geometrie“, 3. Aufl. 1909) sind, logisch unmöglich.

des Raumes, der Zeit und der Materie definitiv entfällt und zweitens darin, daß dadurch die Frage nach der logischen Berechtigung der anderen Form des Unendlichen und dem Gebiete ihrer Geltung aktuell wird.¹⁸

¹⁸ Es ist wohl nicht nötig, besonders hervorzuheben, daß diese andere Form des Unendlichen arithmetisch mit der transfiniten Ordinalzahl ω Cantors übereinstimmt. Einige Bemerkungen darüber finden sich in meiner erwähnten Schrift: „Die typischen Geometrien und das Unendliche“ 1907, S. 61 ff. Daß auch diese andere Form des Unendlichen logisch unmöglich ist, allgemeine Beweise dafür wird man in meinem erwähnten Werke: „Prinzipien der Metaphysik u. s. w.“, Kap. II des zweiten Abschnittes finden, dessen Anhang eine auf finitistischer Grundlage aufgebaute Geometrie enthält.