



НАСТАВА И КУЛТУРА

ГЕОМЕТРИЈСКА ИСПИТИВАЊА ИЗ ТЕОРИЈЕ ПАРАЛЕЛНИХ ЛИНИЈА

од

Николе Лобачевског

БИБ. ЦАРСКО РУСКОГ ПРАВОГ САВЕТНИКА И РЕД. ПРОФ. МАТЕМАТИКЕ НА УНИВЕРСИТЕТУ У КАЗАНУ.

ПРЕВЕО И ПРИМЕДБЕ ДОДАО

Д-р. Бранислав Петронијевић

(Свршетак).

26. Троугли, који на површини кугле леже један насипрам другог, једнаки су по површини.

Под супротним троуглима овде подразумевамо троугле, које склапају пресеци куглине површине са три равни на обе стране средишта; с тога у таквим троуглима стране и углови имају супротан правац.

У супротним су троуглима ABC и $A'B'C'$ (фиг. 14), где се један од њих има да сматра да је представљен у обрнутом положају), стране

$AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA =$

$= C'A'$, тако исто једнаки су

и одговарајући углови у тач-

кама A , B , C угловима у дру-

гоме троуглу у тачкама A' , B' ,

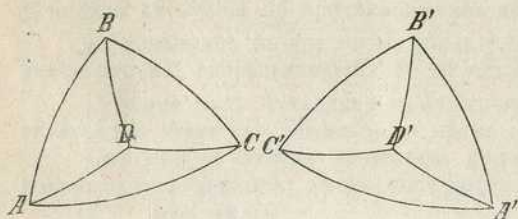
C' . Замислимо једну раван по-

ложену кроз тачке A , B , C и

управну спуштену на њу из

средишта кугле, чија ће про-

дужећа на обе стране сећи супротне троугле у тачкама D и D' куглине површине. Остојања тачке D од тачака A , B , C , мерена на сфери луцима највећих кругова, морају бити једнака (12. став) како међу собом тако и са остостањима $D'A'$, $D'B'$, $D'C'$ у другом троуглу



фиг. 14.



(6. став), према томе су равнокраки троугли око тачака D и D' у оба сферна троугла ABC и A'B'C' конгруентни.

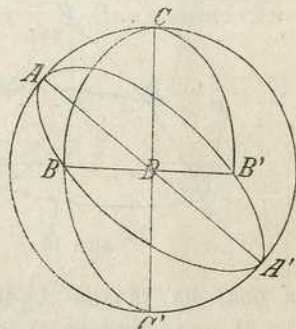
Да бисмо у опште могли судити о једнакости двеју површина, следећи став узимамо за основу тога суђења: *две су површине једнаке, ако постају спајањем или одвајањем једнаких делова*²⁶.

27. *Тространи рогаљ раван је половини суме површинских углова мање једном правом*²⁷.

У сферном троуглу ABC (фиг. 15), у коме је свака страна $< \pi$, означимо углове са A, B, C, продужимо страну AB тако да постане један цео круг ABA' B'A, који ће куглу поделити на два једнака дела. Продужимо у оној половини, у којој се налази троугао ABC, и друге две стране његове кроз њихову заједничку тачку пресека C толико, да се оне секу са кругом у A' и B'. На тај начин биће та половина кугле подељена у четири троугла ABC, ACB', B'CA', A'BC, чије величине нека су P, X, Y, Z. Јасно је да су овде²⁸

$$P + X = Y$$

$$P + Z = A$$



фиг. 15.

Величина сферног троугла Y једнака је величини супротног троугла ABC', који има заједничку страну AB са троуглом P и чији трећи

²⁶ Лобачевски прави разлику између једнакости (конгруенције) и еквиваленције површина, и за критицијум ове последње узима суму и диференцију конгруентних делова. Новија испитивања показала су, да се мора правити разлика и између једнакости величине (Inhaltsgleichheit) и еквиваленције фигура, пошто се две по величини једнаке праволинијске фигуре дају раставити у један исти број конгруентних делова само ако се при томе претпостави важност Архимедовог поступата (упор. прим. 13). За полнедре та се разлика мора учинити и кад се претпостави важност овог последњег, пошто се не може поставити као опште правило, да се два полнедра исте запремине дају раставити у један исти број конгруентних делова. О овим врло важним питањима упор. чланак U. Amaldi-a „Ueber die Lehre von der Aequivalenz (Gleichheit)* у „Fragen der Elementargeometrie“ hgb. v. F. Enriques, I-er Bd. 1911, стр. 151—202 и D. Hilbert, „Grundlagen der Geometrie“ 4-te Aufl. 1913, стр. 53—63.

²⁷ Величина телесног угла или рогаља пропорционална је површини одговарајућег многоугла на површини кугле, чије се средиште налази у темену рогаља. Ако се површина кугле, чији је полупречник јединица, означаи са 2π (а не са 4π), што то чини Лобачевски (упор. „Neue Anfangsgründe“ § 44, s. 117), онда горњи став значи, да је мерни број телесног рогаља једнак разлици између половине суме мерних бројева површинских углова (углова између равни) и мерног броја правог угла.

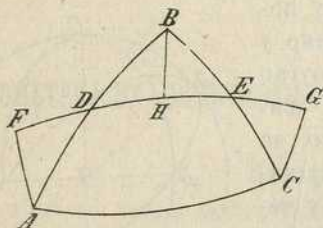
²⁸ У једначинама $P + X = Y$ и $P + Z = A$, B и A означавају двоугле BCB'AB ABA'CA у фиг. 15.

угао C' лежи на крајној тачци оног пречника кугле, који полази од C и пролази кроз средиште њено D (26-ти став). Одавде следује, да је $P + Y = C$ и, пошто је $P + X + Y + Z = \pi$, имамо такође²⁹:

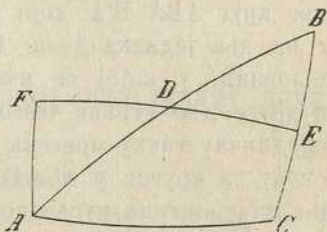
$$P = \frac{1}{2} (A + B + C - \pi).$$

До истог закључка може се доћи и другим путем, ослањајући се само на горњи став о једнакости површина (26. став).

У сферном троуглу ABC (фиг. 16) преполовимо стране AB и BC , положимо кроз средишње тачке D и E један највећикруг и спустимо

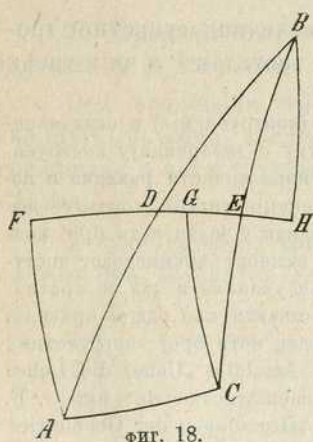


фиг. 16.



фиг. 17.

на овај из тачака A, B, C управне AF, BH и CG . Ако управна из B у H пада између D и E , онда ће троугао BDH бити раван AFD и BHE раван EGC (6. и 15. став), из чега следује да је површина ABC



фиг. 18.

равна површини четворо угла $AFGC$ (26. став). Ако се тачка H покљона са средишњом тачком E стране BC (фиг. 17), онда ће постојати само два једнака правоугла троугла AFD и BDE , чијом се изменом места доказује једнакост површина троугла ABC и четвороугла $AFEC$. Ако напослетку тачка H пада ван троугла ABC (фиг. 18) и управна CG иде кроз троугао, онда ћемо прећи од троугла ABC четвороуглу $AFGC$ ако додамо троугао $FAD = DBH$, па затим одузмемо троугао $CGE = EBH$. Ако у четвороуглу $AFGC$ замислимо кроз тачке A и G , као и кроз тачке F и C положене највеће кругове,

луци њихови између AG и FC биће једнаки (15. став), према томе

²⁹ Како је збир $P + X + Y + Z$ раван цоловини куглине површине, чија је величина 2π (в. прим. 27), то је тај збир раван π . Кад се од збира једначина

$$P + X = B$$

$$P + Z = A$$

$$P + Y = C$$

т. ј. од једначине $3P + X + Y + Z = A + B + C$ одузме једначина $P + X + Y + Z = \pi$

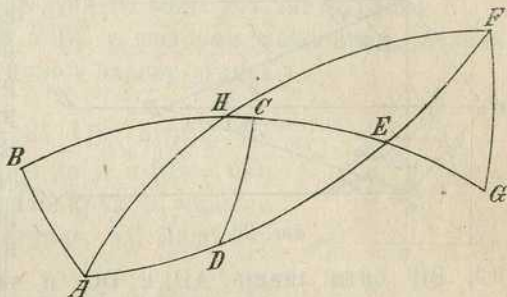
$$\text{излази } P = \frac{A + B + C}{2} - \frac{\pi}{2}.$$



биће конгруентни троугли FAC и ACG (15. став) и угао FAC раван углу ACG ³⁰.

Одавде следује, да је у свима претходним случајевима сума сва три угла у сферном троуглу једнака суми оба једнака угла у четвороуглу који нису прави. Према томе може се сваком сферном троуглу, у коме је сума његова три угла S , наћи четвороугао с истом површином, у коме се налазе два права угла и две једнаке управне стране и у коме је сваки од друга два угла раван $\frac{1}{2} S$.

Нека је сада $ABCD$ (фиг. 19) сферни четвороугао, у коме су стране $AB = DC$ управне на BC ³¹ и углови у A и D сваки $\frac{1}{2} S$. Продужимо стране AD и BC тако да се оне секу у E и продужимо их и даље од E , начинимо $DE = EF$ и спустимо на продужење линије BC управну FG . Цео лук BG преполовимо и спојимо средишњу тачку H лудима највећег круга са A и F . Троугли EFG и DCE конгруентни су (15. став), према томе је $FG = DC = AB$. Троугли ABH и HGF такође



фиг. 19.

су конгруентни, јер су правоугли и имају једнаке катете, према томе AH и HF ³² припадају једном кругу, лук AHF раван је π , $ADEF$ такође је $= \pi$, угао $HAD = HFE = \frac{1}{2} S - \angle BAH = \frac{1}{2} S - \angle HFG = \frac{1}{2} S - \angle HFE - \angle EFG = \frac{1}{2} S - \angle HAD - \pi + \frac{1}{2} S$. Према томе је: угао $HFE = \frac{1}{2} (S - \pi)$, или, што је исто: раван величини исечка $AHFDA$ ³³.

³⁰ Једнакост лукова AG и FC следује из конгруенције сферних троуглова AGF и FCG , који су по ставу 15-ом конгруентни с тога што имају једнаке две стране и захваћени угао ($FG = FG$, $AF = GC$ и угао $AFG = CGF = R$). Троугли FAC и ACG , из чије конгруенције следује једнакост углова FAC и ACG , конгруентни су (по ставу 15-ом) такође с тога што имају једнаке две стране и захваћени угао ($FC = AG$, $AF = GC$ и $\angle AFC = \angle AGC$).

³¹ У оригиналу стоји AB , што је очевидно штампарска погрешка.

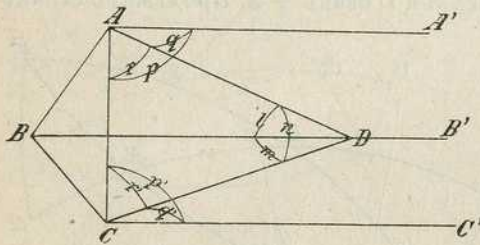
³² У оригиналу стоји погрешно AF .

³³ Луци AH и HF припадају једном кругу с тога што су углови AHB и GHF једнаки, што следује из конгруенције правоуглих троуглова ABH и GFH . Лук AHF раван је π с тога што је $AH = \frac{\pi}{2}$ и $HF = \frac{\pi}{2}$. Угао HFE раван је $\frac{1}{2} (S - \pi)$ с тога што је $HFE = \frac{1}{2} S - \angle HFE - \pi + \frac{1}{2} S$, а једначина $\frac{1}{2} S - \angle HFE - \angle EFG = \frac{1}{2} S - \angle HAD - \pi + \frac{1}{2} S$ следује отуда што је $HFE = \angle HAD$ и $EFG = \angle CDE = \pi - \frac{1}{2} S$. Како је угао HFE угао двоугла $AHFDA$, то је мерни број његове величине раван мерном броју површине овог последњег.

Величина овог равна је опет четвороуглу ABCD, што се лако види ако се од једног пређе на други додајући најпре троугао EFG и BAH а затим одузимајући троугле DCE и HFG, који су им равни. Према томе је $\frac{1}{2}(S - \pi)$ величина четвороугла ABCD и у исто доба величина и сферног троугла, у коме је сума сва три угла равна S.

28. Ако се три равни секу у паралелним линијама, сума њихова три површинска угла износи два права.

Нека су AA', BB', CC' (Фиг. 20) три паралелне линије које постају пресецањем трију равни (25. став). Узмимо на њима три произвољне тачке A, B, C и зами-



Фиг. 20.

слимо кроз њих положену једну раван, која ће према томе сећи равни паралелних у правим линијама AB, AC, BC. Даље положимо кроз линију AC и ма коју тачку D на линији BB' још једну раван, чији ће пресеци са равнима паралелних AA', BB' и CC', BB' бити линије AD и DC, и чији ћемо нагиб према трећој равни паралелних AA' и CC' означити са w. Углове између равни, у којима се налазе паралелне линије, означимо са X, Y, Z на линијама AA', BB' и CC'; напоследку нека су линсарни углови BDC = a, ADC = b, ADB = c. Замислимо око A као средишта описану једну куглину површину, на којој пресеци њени са правима AC, AD и AA' одређују сферни троугао, чије стране нека су p, q, r а површина α, а чији су углови: w наспрам стране q, x наспрам стране r и према томе $\pi + 2\alpha - w - X$ ³⁴ наспрам стране p (27. став). На исти начин секу CA, CD, CC' куглину површину око средишта C и одређују троугао величине β са странама p', q', r' и угловима: w наспрам q', z наспрам r' и према томе $\pi + 2\beta - w - Z$ ³⁵ наспрам p'. На последку пресеци куглине површине око D са линијама DA, DB, DC одређују сферни троугао, чије су стране l, m, n а супротни углови $w + Z - 2\beta$,

³⁴ У сферноме троуглу, чије су стране p, q и r, лежи наспрам стране q сферни угао, чија је величина равна величини нагибног угла између равни ACA'C' и ACD, т. ј. равна величини угла w. На исти начин одговара страни r нагибни угао између равни AA'C'C и AA'B'B, т. ј. угао X, и страни p нагибни угао између равни ADA'B' и ADC, чија је величина по ставу 27-ом равна $\pi + 2\alpha - w - X$.

³⁵ У сферноме троуглу, чије су стране p', q' и r', лежи наспрам стране q сферни угао, који је раван нагибном углу између равни ACA'C' и ACD, т. ј. углу w, наспрам стране r' сферни угао, који је раван нагибном углу између равни AA'C'C и BB'C'C т. ј. углу Z, према томе наспрам страни p' сферни угао, који је раван нагибном углу између равни CDB'C' и CDA, чија је величина по ставу 27-ом равна $\pi + 2\beta - w - Z$.



WWW.UNINIS.rs

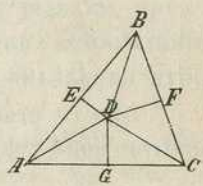
УНИВЕРЗИТЕТСКА БИБЛИОТЕКА

$w + X - 2\alpha$ и Y , чија је површина према томе $\delta = \frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi) - \alpha - \beta + w$ ³⁶. Кад w опада опадају и површине троуглова α и β тако да $\alpha + \beta - w$ може постати мање од сваког датог броја. У троуглу могу се стране l и m смањити такође до у бесконачност (21. став), према томе може се троугао δ једном од својих страна l или m положити на највећи круг кугле колико се хоће пута а да тиме половина кугле не буде испуњена, према томе δ ишчезава у исто доба са w ; из чега следује да је нужним начином $X + Y + Z = \pi$ ³⁷.

29. У праволинијском троуглу или се управне подигнуте у срединама страна не секу или се све три секу у једној тачки.

Претпоставимо да се у троуглу ABC (фиг. 21) две управне ED и DF , подигнуте на странама AB и BC у њиховим средишњим тачкама E и F , секу у тачки D , и повуцимо у оквиру углова троуглових линије DA , DB , DC .

У конгруентним је троуглима ADE и BDE (10. став) $AD = BD$, тако исто следује да је и $BD = CD$; троугао ADC је према томе равнокрак и управна спуштена из темена D на основицу AC паће у њену средишњу тачку G .



Фиг. 21.

Доказ остаје исти и кад тачка пресека управних ED и FD лежи у линији AC или кад пада ван троугла.

У случају дакле кад се претпостави, да се две од оних управних не секу, не може се ни трећа са њима сећи³⁸.

³⁶ У сферном троуглу, чије су стране l , m и n , лежи насипрам стране l сферни угао, који је раван нагибном углу између равни BDC и ADC , чији је збир са нагибним углом између равни $CDB'C'$ и CDA раван π (пошто равни BDC и $CDB'C'$ леже обе у равни $BB'CC'$). Како је овај последњи нагибни угао (види претходну примедбу) раван $\pi + 2\beta - w - z$, то је први раван $w + Z - 2\beta$. На исти начин је угао, који одговара страни m , раван $w + X - 2\alpha$. Ако се са δ означи површина тога сферног троугла, биће по ставу 27-ом $\delta = \frac{1}{2}(w + Z - 2\beta + w + X - 2\alpha + Y - \pi) = \frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi) - \alpha - \beta + w$.

³⁷ Што год будемо тачку D више удаљавали од тачке B у правцу паралелизма, нагибни угао w , луци q и q' као и луци l и m (одн. одговарајући сферни троугли) постајаће све мањи, према томе при прелазу ка граници количине w , δ , α и β постаће равне нули, па ћемо имати $\frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi) = 0$, одакле следује $X + Y + Z = \pi$.

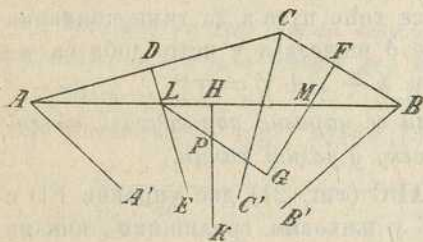
³⁸ У Евклидовој равни увек се управне на срединама страна (симетрале страна) троуглових секу у једној тачки. У Лобачевској равни то не мора да буде случај, и ту важи став:

Симетрале страна троуглових или се секу у једној тачки или дивергирају или су паралелне.

(Упор. „Neue Anfangsgründe“ § 111, s. 182 f.).

30. Управне подиђнуте у срединама страна праволинијског троугла морају све три бити паралелне, ако се претпостави паралелизам двеју од њих.

Нека су у троуглу ABC (Фиг. 22) линије DE, FG, HK управне на странама у њиховим средишним тачкама D, F, H. Ми ћемо најпре



фиг. 22.

претпоставити, да су управне DE и FG паралелне, које линију AB секу у L и M, и да се управна HK налази између њих. У оквиру угла BLE повуцимо произвољно праву линију LG, која ће морати FG сећи негде у G ма како мали био угао оступања GLE (16. став). Пошто се у троуглу LGM управна HK не може сећи са MG (29.

став)³⁹, она мора сећи LG негде у Р, одакле следује, да HK мора бити паралелна са DE (16. став) и MG (18. и 25. став)⁴⁰.

Ако се стави страна $BC = 2a$, $AC = 2b$, $AB = 2c$ и углови супротни овим странама означе са A, B, C, онда имамо у горњем случају

$$A = \Pi(b) - \Pi(c)$$

$$B = \Pi(a) - \Pi(c)$$

$$C = \Pi(a) + \Pi(b)$$

Важно је споменути, да у случају кад симетрале страна троуглових дивергирају, све три симетрале имају једну исту заједничку управну (упор. примедбу 9-у), и да су у томе случају темена троуглова подједнако удаљена од те заједничке управне, другим речима да она леже на тако званој линији једнаког остојања, која је геометријско место свих тачака, које су подједнако удаљене од једне дате праве (упор. Н. Liebmann, „Nichteuklidische Geometrie“ 2-te Aufl. 1912, стр. 44). У својим списима спомиње Лобачевски само на једном месту ту линију (упор. „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie“ § 24, s. 34 и примедбу Енгелову на стр. 265), док се Бољај њоме служи за многа своја извођења (упор. „Appendix“ § 27, § 32, § 39 и др.) Као што је на кугли линија једнаког остојања мали круг, дакле крива линија, тако је исто и линија једнаког остојања у Лобачевској равни крива линија. Линијама једнаког остојања одговарају у простору површине једнаког остојања, за које важи геометрија Лобачевскога (упор. Н. Liebmann, и. н. м. стр. 59), т. ј. у троуглу, чије су стране линије једнаког остојања, збир углова мањи је од $2R$. Напротив, као што је показао Бољај (в. „Appendix“ § 39), збир углова у троуглу у Бољај — Лобачевској равни, чија је једна страна линија једнаког остојања, износи $2R$, одакле се непосредно да закључити, да збир тих углова у троуглу те равни, чије су све три стране праве линије, мора бити мањи од $2R$ (упор. и V. Varičák, „Prvi osnivači neeuklidske geometrije“, 1907, стр. 157 и д.).

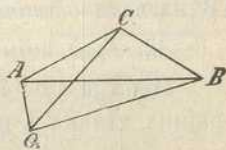
³⁹ Пошто је MG део праве FG, а FG и DE као паралелне не секу се, то се ни HK не може по ставу 29-ом сећи са њима, према томе MG и HK не секу се.

⁴⁰ HK мора бити паралелно са DE на основу друге Лобачевске дефиниције паралелних линија (в. прим. 10), а како су по претпоставци MG и DE паралелне међу собом, то је по ставу 25-ом HK паралелно и са MG.

О чему се лако уверавамо помоћу линија AA' , BB' , CC' , које су из тачака A , B , C повучене паралелно управној HK и које су према томе паралелне и са друге две управне DE и FG (23. и 25. став).

Нека су сада управне HK и FG међу собом паралелне, трећа управна DE тада их неће сећи (39. став), према томе она је или паралелна са њима или сече AA' . Последња претпоставка не значи друго до да је угао $C > \Pi(a) + \Pi(b)$.

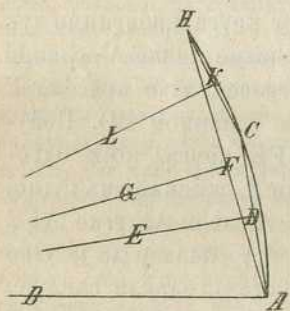
Смањи ли се овај угао тако да постане раван $\Pi(a) + \Pi(b)$, што ће бити ако се линији AC да нов положај CQ (фиг. 23), и дужина треће стране BQ означи са $2c'$, онда мора угао CBQ у тачци B , који је постао већи, према ономе што је горе доказано, бити раван $\Pi(a) - \Pi(c') > \Pi(a) - \Pi(c)$, одакле следује $c' > c$ (23. став). Али у троуглу ACQ углови у A и Q су једнаки, према томе мора у троуглу ABQ угао код Q бити већи од угла у тачци A , према томе је $AB > BQ$ (9. став); што значи да је $c > c'$ ⁴¹.



фиг. 23.

31. *Граничном линијом (орициклом) називамо ону криву линију у равнини, код које су све управне подигнуте у средишњим тачкама тетива међу собом паралелне.*

У сагласности са овом дефиницијом можемо произвођење граничне линије замислити на тај начин, што ћемо на датој правој AB из једне од њених тачака A повлачити под разним угловима $CAB = \Pi(a)$ тетиве $AC = 2a$ ⁴²; крај C једне такве тетиве лежаће на граничној линији, чије тачке можемо постепено одредити на тај начин. Управна DE на тетиви AC у њеној средини D биће паралелна са линијом AB , коју ћемо назвати *осовином граничне линије*. Исто тако биће и свака друга управна



фиг. 24.

⁴¹ Кад би управна DE секла $AA' || CC'$ онда би подножна тачка њена D лежала ближе тачци A него тачци C (јер би угао DAA' у том случају био мањи од угла паралелизма), према томе угао DCC' био би угао паралелизма за линију већу од b , одакле следује да је угао $C > \Pi(b) + \Pi(a)$. Ова претпоставка међу тим доводи до резултата, по коме је $c' > c$, који стоји у притворености са резултатом по коме је $c' < c$. Према томе не може DE сећи AA' , мора дакле бити паралелно са HK .

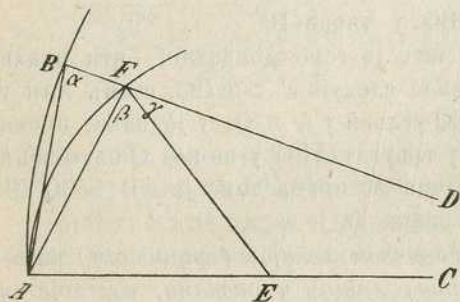
Овај доказ Лобачевског непотпун је међутим у толико у колико се може закључити, да је $c' < c$ (што следује из $2c' < 2c$) само ако се претпостави, да је $AC > BC$, као што је учињено у фиг. 22 (ову је замерку Лобачевском доказу учинио још Гаус — види примедбу Engel-ову у „Zwei geometrische Abhandlungen etc.“ на стр. 453). Ако је $AC < BC$, онда угао ACQ треба учинити равним $\Pi(a) + \Pi(b)$ и $CQ = CB$ и даље доказивати као у тексту. Ако је пак $AC = BC$, треба опет ACQ направити равним $\Pi(a) + \Pi(b)$, $CQ = AC = BC$ и доказивати даље као у тексту.

⁴² Конструкција тетиве $2a$, која склапа дати угао са правом AB , не значи ништа друго до конструкцију управне a , која одговара датоме углу као углу па-

подигнута у средишњој тачци ма које тетиве АН паралелна са АВ, према томе ова особина мора припадати и свакој другој управној КЛ у опште, која је подигнута у средишњој тачци К ма које тетиве СН, која је повучена између ма којих тачака С и Н на граничној линији (30. став)⁴³. Такве управне морају се дакле такође без разлике као и АВ назвати *осовинама граничне линије*.

32. *Круг чији полупречник расте прелази у граничну линију.*

Нека је АВ (фиг. 25) тетива граничне линије, повуцимо из њених крајних тачака А и В две осовине АС и ВD, које ће према томе скла-



фиг. 25.

пати са тетивом два једнака угла $\angle BAC = \angle ABD = \alpha$ (31. став). На једној од ових осовина АС узмемо ма где тачку Е за средиште једног круга и повуцимо лук АF од почетне тачке А осовине АС до његове тачке пресека F са другом осовином ВD. Полу-пречник FE круга, који одговара тачци F, склапаће на једној страни са тетивом АF угао AFE

$= \beta$ а на другој страни са осовином ВD угао EFD $= \gamma$. Излази да је угао између обе тетиве $\angle BAF = \alpha - \beta < \beta + \gamma - \alpha$ (22. став), одакле следује: $\alpha - \beta < \frac{1}{2} \gamma$ ⁴⁴. Пошто се пак угао γ смањује до нуле како кретањем средишта Е у правцу АС, при чему F остаје непромењено (21. став), тако и приближавањем тачке F тачци В, при чему средиште Е остаје у своме положају (22. став), то следује да таквим смањивањем угла γ

паралелизма [углу II(a)]. Како се ова конструкција може извести (као и обрнута конструкција угла паралелности II(a) за дату дужину а, односно паралелне са једном датом правом), о томе упореди Engel — Lobatschewsky, н. н. м. стр. 242 и 256, В. Bonola, н. н. м. стр. 109 и V. Varičak, н. н. м. стр. 137—138.

Кад смо конструисали тетиву $AC = 2a$, онда сама конструкција показује, да ће права повучена из С паралелно управној DE бити паралелна и са правом АВ и да ће бити $\angle BAC$ раван одговарајућем углу код С.

Горње две конструкције у Лобачевској равни не могу се практично извести, пошто је искуствени простор еуклидске природе. Њихов значај је чисто теоријски, оне показују егзистенцију паралелних у Лобачевској равни. И Еуклид у својим „Елементима“ употребљава конструкције само у теоријском смислу, као теореме којима се доказује егзистенција фигура.

⁴³ У троуглу АНС на име имамо $FG \perp AN$, $KL \perp NC$ и $DE \perp AC$, према томе је по ставу 30-ом $FG \parallel KL \parallel DE$. Како је пак $DE \parallel AB$, то су и $FG \parallel AB$ и $KL \parallel AB$.

⁴⁴ У равнокраком троуглу АFE углови код А и F су једнаки, како је пак $\angle BAC = \angle ABD = \alpha$, то је $\angle BAF = \alpha - \beta$. У правоуглином троуглу ABF збир углова је по ставу 22-ом мањи од $2R$ т. ј. $\alpha + (\alpha - \beta) + \angle AFB < 2R$; како је пак $\angle AFB + \beta + \gamma = 2R$, то је $2\alpha - \beta < \beta + \gamma$ дакле $\alpha - \beta < \frac{\gamma}{2}$.

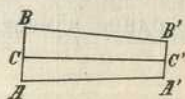


ишчезава и угао $\alpha - \beta$, односно узајмни нагиб тетива АВ и АФ, на према томе и остојање тачке В на граничној линији од тачке F на кругу⁴⁵. Према томе може се гранична линија назвати и *кругом са бесконачно великим полуиричником*.

33. Нека су $AA' = BB' = x$ (фиг. 26) две линије паралелне међу собом на страни идући од А ка А'. чије су паралелне осовине граничних лукова (лукова на двама граничним линијама) $AB = s, A'B' = s'$, тада је

$$s' = s e^{-x}$$

где је е независно од лукова s, s' и праве x, која представља остојање лука s' од s.

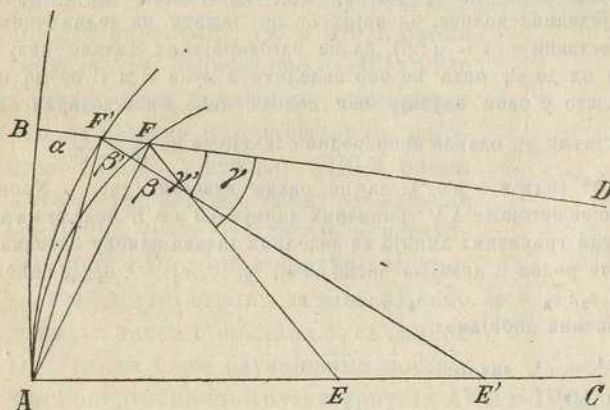


фиг. 26.

⁴⁵ У првом случају, на име кад тачка F остаје непромењена а полуиричник FE бива све већи, тачка А помера се у правцу паралелизма, али увек за све мање коначно остојање од првобитног положаја. Према томе помера се и гранична линија (при чему осовине BD и AC остају исте), којој се на овај начин све више приближује круг, што му полуиричник постаје већи, тако да ће круг, кад му полуиричник постане бесконачно велики, пасти уједно са граничном линијом, која пролази кроз тачку F. Гранична линија може се дакле сматрати за круг са бесконачно великим полуиричником, чији су полуиричници идентични са осовинама граничне линије, које су све међу собом паралелне. У Евклидовој равни, у којој паралелне свуда поједнако одстоје једна од друге, круг са бесконачно великим полуиричником пада уједно са правом линијом; у Лобачевској равни, где паралелне (по ставу 24-ом) конвергирају на страни паралелизма и могу се према томе сматрати као линије које се секу у бесконачности, круг са бесконачним полуиричником није идентичан са правом линијом, већ представља једну специјалну криву линију (граничну линију), којој у Евклидовој равни не одговара никаква специјална линија, баш као што је и

линија једнаког остојања (в. примедбу 38) једна специјална крива линија Лобачевске равни, којој не одговара никаква специјална линија у Евклидовој равни.

Да гранична линија представља границу, којој се приближује круг повећавањем његовог полуиричника, Лобачевски изводи у „Neue Anfangsgründe“ § 114, стр. 187 на један начин, при коме нема померања граничне линије, као што је то



фиг. 3'.

случај у фиг. 25. Ако на име (фиг. 3') при повећавању полуиричника FE тачка F мења свој положај, она ће бити све ближе тачки В, угао γ биће све мањи, према томе и угао $\alpha - \beta$, и кад FE постане бесконачно велико, круг AF прећи ће у граничну линију АВ.

Из саме дефиниције граничне линије излази, да је тангента њена у датој тачки управна на осовини њеној у истој тачки и да гранична линија стоји управно на свима својим осовинама.

Да бисмо ово доказали претпоставимо, да је однос лука s према луку s' раван односу два цела броја n и m . Између осовина AA' , BB' повучимо трећу осовину CC' , која ће на тај начин одсецати од лука AB део $AC = t$ и од лука $A'B'$ на истој страни део $A'C' = t'$. Нека је однос између t и s раван односу два цела броја p и q , тако да је

$$s = \frac{n}{m} s', \quad t = \frac{p}{q} s$$

Поделимо сада s осовинама у pq једнаких делова тако да ће таквих делова бити pq на s и pr на t . Како ови једнаки делови на s и t одговарају тако исто једнаким деловима на s' и t' имамо ⁴⁶

$$\frac{t'}{t} = \frac{s'}{s}$$

Ма где дакле узели луке t и t' између осовина AA' и BB' , увек ће њихов однос остати исти, докле год остојање њихово x остаје исто. Ако се с тога за $x = 1$ стави $s = es'$ онда ће за свако x морати бити $s' = se^{-x}$

Пошто је e непознат број а подлежи само услову $e > 1$ и пошто се даље јединица дужине за x може узети произвољно, то је можемо ради рачунског упрошћавања тако изабрати, да се под e разуме основа Неперових логаритама ⁴⁷.

Још се овде може приметити, да је за $x = \infty$, $s' = 0$, према томе не само што се смањује остојање између две паралелне (24. став),

⁴⁶ У „Neue Anfangsgründe“ § 117, стр. 189—190 простији је доказ става, да је однос лукова двеју граничних линија константан за исто остојање тих линија. Ако лук s поделимо у pq једнаких делова, од којих ће pr лежати на делимичном луку t (пошто је по претпоставци $s : t = q : p$), па из одговарајућих тачака повучемо осовине и продужимо их до s' , онда ће оне поделити и луке s' и t' на pq и pr једнаких делова (само што у овом случају ови делови неће бити једнаки са одговарајућим деловима на луку s), одакле непосредно следује да је $\frac{t}{t'} = \frac{s}{s'}$.

⁴⁷ Једначина $s' = se^{-x}$ (или $s = s'e^x$), да се овако извести (унор. „Neue Anfangsgründe“ н. н. м.). Ако се остојање AA' граничних линија AB и $A'B'$ подели на x једнаких делова, повуку луци граничних линија из поделних тачака између осовина AA' и BB' , и ти луци означе редом с лева на десно са $s_1, s_2, \dots, s_3, \dots, s_{x-1}$, биће:

$$s : s_1 = e, s_1 : s_2 = e, s_2 : s_3 = e, \dots, s_{x-1} : s' = e$$

Множењем ових једначина добијамо:

$$\frac{s}{s_1} \cdot \frac{s_1}{s_2} \cdot \frac{s_2}{s_3} \cdot \dots \cdot \frac{s_{x-1}}{s'} = e^x, \text{ дакле:}$$

$$s = s' \cdot e^x.$$

Да је $e > 1$ следује непосредно из претпоставке, да је $e = \frac{s}{s_1}$, а $s > s_1$. Јединица дужине за остојање x два лука (односно остојање лукова s и s_1 , s_1 и s_2 и т. д.) може се, пошто је произвољна, узети тако да e буде равно броју 2,7182818.... т. ј. бази природних логаритама. Ако се узме у обзир кривина Лобачевскове равни и подупречник кривине означи са k (види примедбу 3), онда се да показати да је, кад се јединица дужине стави $= k$, однос $\frac{s}{s_1}$ раван e , и према томе $s = s' \cdot e^{\frac{x}{k}}$. То следује по-

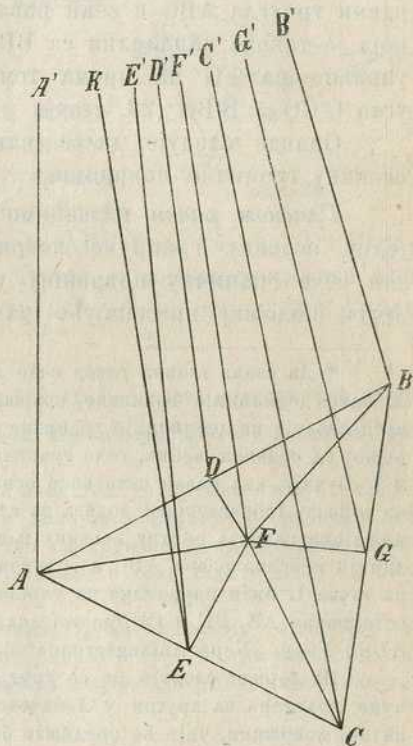


него оно на послетку сасвим ишчежава при продужењу паралелних на страни паралелизма. Паралелне линије имају дакле карактер асимтота.

34. *Гранична површина* (орисфера) *назива се она површина која постаје обртањем граничне линије око једне од њених осовина, која ће заједно са свима осталима осовинама граничне линије бити осовина и граничне површине.*

Тетива склапа једнаке углове са осовинама повученим кроз њене крајње тачке, па ма где да се узму на граничној површини ове две крајње тачке.

Нека су A, B, C (фиг. 27) три тачке на граничној површини, AA' осовина обртања, BB' и CC' две друге осовине, према томе AB и AC тетиве које са осовинама склапају једнаке углове $A'AB = B'BA, A'AC = C'CA$ (31. став); осовине BB', CC' повучене кроз крајње тачке треће тетиве BC такође су паралелне и леже у једној равни (25. став). Управна DD' подигнута у средини D тетиве AB и у равни паралелних AA', BB' мора бити паралелна са осовинама AA', BB', CC' (23. и 25. став); иста таква управна EE' на тетиви AC у равни паралелних AA', CC' биће паралелна са осовинама AA', BB', CC' и управном DD' . Угао између равни, у којој су паралелне AA' и BB' , и равни троугла ABC означимо са $\Pi(a)$, где a може бити позитивно, негативно или нула. Ако је a позитивно, повучимо $FD = a$ у троуглу ABC и равни његовој управно на тетиву AB из њене средишње тачке D ; ако је a негативан број, FD се мора повући ван троугла на другој страни тетиве AB , ако је $a = 0$, тачка F поклапа се са тачком D . У свима овим случајевима постају



фиг. 27.

два конгруетна правоугла троугла AFD и DFB , према томе је $FA = FB$. Подигнимо сада у F линију FF' управно на равнину троугла ABC .

средно из Вољајевог доказа, да је, кад је у формули $Y = J \frac{y}{i}$ (где Y означава однос два гранична лука за остојање $y > i$, а J тај однос за остојање i) $i = \frac{r}{\operatorname{tg} z}$ (где r означава полупречник граничног круга, чија је тетива $2y$, а z угао $\frac{\pi}{2} - \Pi(y)$), $J = e$ (Упор. „Appendix“ § 30 у вези за § 27 и 24).

Пошто је угао $D'DF = II(a)$, $DF = a$, то је FF' паралелно са DD' и линијом EE' , са којом лежи у једној истој равни, која је управна на равни троугла ABC . Замислимо сада да је у равни паралелних EE' , FF' спуштена на EF управна EK , та ће управна стајати управно и на равни троугла ABC (13. став) и на линији AE која лежи у тој равни (11. став), према томе мора AE , која је управна на EK и EE' , бити у исто доба управна и на FE (11. став). Троугли AEF и FEC су конгруентни, пошто су правоугли и имају једнаке катете, према томе је $AF = FC = FB$. Управна спуштена из темена F равнокраког троугла BFC на основицу BC пролази кроз њену средишњу тачку G ; раван положена кроз ову управну FG и линију FF' мора бити управна на равни троугла ABC и сећи раван паралелних BB' , CC' у линији GG' , која је такође паралелна са BB' и CC' (25. став); пошто је пак CG управно на FG на према томе у исто доба и на GG' , то је дакле угао $C'CG = B'BG$ (23. став).

Одавде следује, да се свака осовина може сматрати за обртну осовину граничне површине.

Главном равни назваћемо сваку раван која је положена кроз једну осовину граничне површине. Према томе свака главна раван сече граничну површину у граничној линији, док је за сваки други положај пресецајуће равни овај пресек круг⁴⁸. Три главне

⁴⁸ Да свака главна раван сече граничну површину у граничној линији следује из саме дефиниције граничне површине (упор. J. Bolyai, „Appendix“ § 11). Тако исто следује из дефиниције граничне површине, да свака раван, која је управна на једној од осовина њених, сече граничну површину у кругу. Да је тај пресек круг и у случају, кад раван сече косо осовину граничне површине, следује непосредно из горњег Лобачевсковог доказа за став, да се свака од осовина граничне површине може сматрати за обртну осовину њену. Јер ако узмемо једну четврту тачку L на линији пресека равни ABC и граничне површине, онда ће осовина ове последње из тачке L бити паралелна са управном FF' и према томе остојање LF биће равно остојањима AF , BF и CF (до тог закључка лако ћемо доћи ако направимо троугао ALB). Упор. „Neue Anfangsgründe“ § 119, стр. 191 f.

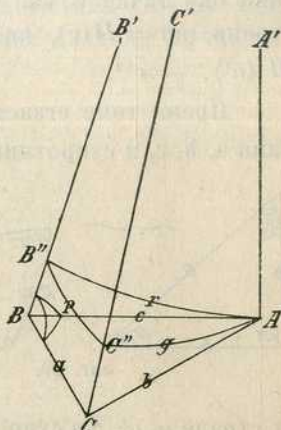
Из горњег следује, да се круг на граничној површини својим обимом потпуно подудара са кругом у Лобачевској равни (тако ће у фиг. 27 круг на граничној површини, чије ће средиште бити тачка кроз коју пролази осовина FF' , својим обимом падати уједно са кругом у равнини троугла ABC , чије је средиште F), онако исто као што круг на површини кугле пада својим обимом уједно са кругом у Евклидовој равни (са кругом равни која сече површину кугле). Као што је једна и иста линија кружна, кад се посматра као периферија круга у куглиној површини, по својој величини $= 2\pi R \sin \frac{l}{R}$ (где l означава полупречник круга на куглиној површини онд. лук одговарајућег највећег круга, а R полупречник кугле), а равна $2\pi r$ (где r означава полупречник круга у Евклидовој равни) кад се посматра као периферија круга у Евклидовој равни, тако исто једна и иста кружна линија, кад се посматра као периферија круга у Лобачевској равни, равна је по својој величини

равни⁴⁹, које се узајмно секу, склапају међу собом углове чија је сума π (28. став). Ове ћемо углове сматрати за углове граничног троугла, чије су стране дуци граничних линија, које су пресеци граничне површине са оним трима главним равнима. Код граничних троуглова постоји дакле иста зависност између углова и страна, каква се доказује у обичној геометрији за праволинијске троугле⁵⁰.

35. У следећем означаваћемо величину линије једним писменом са додатим акцентом, нпр. x' , да бисмо нагласили, да њена величина стоји у једном односу са величином друге линије, која је обележена истим знаком x без акцента, који је изражен једначином

$$\Pi(x) + \Pi(x') = \frac{1}{2} \pi$$

Нека је сада ABC (фиг. 28) један праволинијски правоугли троугао, у коме је хипотенуза $AB = c$, катете $AC = b$, $BC = a$, а супротни углови $BAC = \Pi(\alpha)$, $ABC = \Pi(\beta)$. Подигнимо у тачки A управну AA' на раван троугла ABC и из тачака B и C повуцимо BB' и CC' паралелно са AA' . Равни, у којима леже ове три паралелне, склапају међу собом углове: $\Pi(\alpha)$ на ивици AA' , прав



фиг. 28.

(за полупречник r) $\pi k \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}} \right)$, а равна $2\pi l$ (где l означава полупречник круга на граничној површини), кад се посматра као периферија круга у граничној површини.

Далеко би нас одвело кад бисмо хтели показати, да кружна линија у Лобачевској равни не пада уједно са кружном линијом у Евклидовој равни, и ако кружна линија Лобачевскоје равни пада уједно са кружном линијом граничне површине, за коју важи Евклидова геометрија (види о томе даље у тексту и 50-у примедбу).

Треба још напоменути, да су *права линија*, *гранична линија* (оридикл), *линија једнаког растојања* (еквидистанта или хиперцикл) и *круг* четири униформне линије у Лобачевској равни, док су *права линија* и *круг* две једине униформне линије у Евклидовој равни.

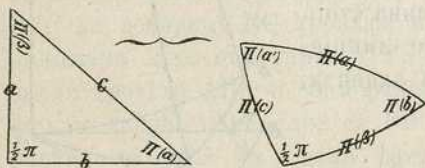
⁴⁹ У оригиналу стоји „Hauptflächen“.

⁵⁰ Пошто главне равни пролазе кроз осовине граничне површине, а све су осовине ове последње међу собом паралелне, то ће се три главне равни увек сећи у линијама које су међу собом паралелне, према томе збир нагибних углова тих равни биће по ставу 28-ом раван π . Како је пак величина углова између лукова граничних линија на граничној површини као кривој површини равна величини нагибних углова одговарајућих равни (слично величини сферних углова на површини кугле — упор. примедбу 34-у), то ће и збир углова у троуглу граничне површине, чији су стране дуци граничних линија, износити такође π . А како из става, да је збир углова у праволинијском троуглу раван $2R$, следује Евклидов V-ти постулат, то очевидно на граничној површини важи Евклидова геометрија.

угао на ивици CC' (11. и 13. став), према томе $\Pi(\alpha')$ на ивици BB' (28. став)⁵¹.

Пресеци линија BA , BC , BB' са површином кугле, која је описана око тачке B као средишта, одређују сферни троугао, у коме је страна $mn = \Pi(c)$, $kn = \Pi(\beta)$, $mk = \Pi(a)$ а супротни углови $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$ ⁵².

Према томе егзистенција једног праволинијског троугла са странама a , b , c , и супротним угловима $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$ повлачи за собом



Фиг. 29.

егзистенцију једног сферног троугла (Фиг. 29) са странама $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ и супротним угловима $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$. Али и обрнуто, егзистенција датог сферног троугла условљава егзистенцију једног новог праволинијског троугла, чије

су стране α , α' , β а супротни углови $\Pi(b')$, $\Pi(c)$, $\frac{1}{2}\pi$ ⁵³.

⁵¹ Да је нагибни угао између равни $AA'BB'$ и $AA'CC'$ раван $\Pi(\alpha)$ следује из тога што, пошто је AA' управно на равни троугла ABC , AA' стоји управно и на AB и AC , а угао је $BAC = \Pi(\alpha)$. Нагибни угао између равни $CC'AA'$ и $CC'BB'$ раван је $\frac{\pi}{2}$ с тога, што је прво $a \perp CC'AA'$ (b је пресек равни $CC'AA'$ и равни ABC , а a је $\perp b$, према томе је по ставу 13-ом $a \perp CC'AA'$), и друго с тога што је $a \perp CC'$ (пошто CC' лежи у равни $CC'AA'$). Нагибни угао између равни $BB'CC'$ и $BB'AA'$ мора бити по ставу 28-ом раван $\frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha)$ и, сходно једначини $\Pi(x) + \Pi(x') = \frac{\pi}{2}$, раван $\Pi(\alpha')$.

⁵² Ако се теме сферног троугла, које лежи на правој BB' означи са m , теме на правој BA са n , а теме на правој BC са k , онда страни mn одговара у равни $B'BA$, која пролази кроз куглино средиште B , угао $B'BA = \Pi(c)$, страни nk у равни ABC угао $ABC = \Pi(\beta)$, страни mk у равни $B'BC$ угао $B'BC = \Pi(a)$, ово последње с тога што је $a \perp CC'$ (в. претходну примедбу). Према томе је $mn = \Pi(c)$, $kn = \Pi(\beta)$, $mk = \Pi(a)$.

У самоме сферном троуглу mkn наспрам стране mn лежи сферни угао mkn , који је по величини раван нагибном углу између равни $BCB'C'$ и BCA , а овај је угао раван углу $C'CA$ у равни $C'CAA'$ (и то с тога што је $C'C \perp a$ и $b \perp a$), који је опет $= \Pi(b)$. Наспрам стране nk лежи сферни угао knp , који је раван нагибном углу између равни $B'BA$ и $B'BC$, а овај је угао, као што смо видели у претходној примедби, раван $\Pi(\alpha')$. Страни mk одговара сферни угао mkn , који је раван нагибном углу између равни $BAA'B'$ и BAC , а овај је угао раван $\frac{\pi}{2}$ и то с тога што је по претпоставци $AA' \perp BAC$.

⁵³ Да једном истом сферном троуглу одговарају два праволинијска, изводи Лобачевски у „Rangometrie“ стр. 14 овако.

Праволинијском троуглу ABC (Фиг. 28) са странама:

a , b , c



Према томе може се од a, b, c, α, β прећи на b, a, c, β, α као и на a, α', β, b', c ⁵⁴.

Замислимо да је кроз тачку A' (фиг. 28) положена гранична површина са осовином AA' , површина која друге две осовине BB', CC' сече у B'' и C'' , и чији пресеци са равнима паралелних склапају гранични

и супротним угловима:

$$\Pi(\alpha), \Pi(\beta), \frac{\pi}{2}$$

одговара сферни троугао (фиг. 29) са странама:

$$\Pi(c), \Pi(\beta), \Pi(a)$$

и супротним угловима:

$$\Pi(b), \Pi(\alpha'), \frac{\pi}{2}$$

Нацртајмо један други праволинијски троугао $A_1B_1C_1$ (фиг. 4') чије ће стране бити

$$a, \alpha', g$$

а супротни углови:

$$\Pi(\lambda), \Pi(\mu), \frac{\pi}{2}$$

Ако на исти начин као у фиг. 28 за троугао ABC будемо потражили сферни троугао, који одговара овоме праволинијском троуглу, наћићемо да му одговара сферни троугао са странама:

$$\Pi(g), \Pi(\mu), \Pi(a)$$

и угловима:

$$\Pi(\alpha'), \Pi(\lambda'), \frac{\pi}{2}$$

Ако овај сферни троугао упоредимо са оним пређашњим (из фиг. 29), видимо, да оба имају једнаку хипотенузу $\Pi(a)$ и један угао, $\Pi(\alpha')$, на њој, а пошто су то правоугли троугли они су конгруентни. Према томе $g = \beta, \mu = c, \lambda' = b$, из чега очевидно следује, да праволинијском троуглу:

$$a, b, c$$

$$\Pi(\alpha), \Pi(\beta), \frac{\pi}{2}$$

одговара праволинијски троугао:

$$a, \alpha', \beta$$

$$\Pi(b'), \Pi(c), \frac{\pi}{2}$$

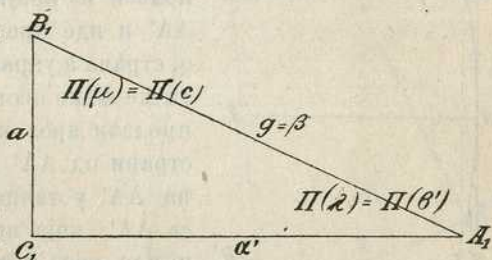
Како се до истог резултата може доћи без помоћи тродимензионалног простора, само употребом фигура у Лобачевској равни, показао је Х. Либман (упор. „Nichteuklidische Geometrie“ стр. 37—41).

⁵⁴ У праволинијском правоуглом троуглу:

$$a, b, c$$

$$\Pi(\alpha), \Pi(\beta), \frac{\pi}{2}$$

можемо на име или претворити a у b , b у a , a у β и β у a или задржавајући a претворити b у α' , c у β , a у b' и β у c .



фиг. 4'

троугао, чије су стране $B''C'' = p$, $C''A = q$, $B''A = r$ а супротни углови $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$, и где је према томе (34. став):

$$p = r \cdot \sin \Pi(\alpha) \quad , \quad q = r \cos \Pi(\alpha)^{55}$$

Ако сада спој дате три равни расклопимо дуж линије BB' (фиг. 30) и те равни развијемо тако, да оне са свима својим линијама дођу у једну раван, тада ће се очевидно луци p , q , r спојити у један једини лук једне граничне линије, која ће пролазити кроз тачку A и имати AA' за осовину. Осим тога налазиће се на једној страни од AA' : луци q и p , страна b троугла, која је у A управна на AA' , осовина CC' , која полази из крајње тачке линије b паралелно са AA' и иде кроз додирну тачку C'' линија p и q , страна a управно на CC' у тачци C и из крајње тачке њене осовина BB' паралелна са AA' , која пролази кроз крајњу тачку лука p . На другој страни од AA' налазиће се: страна c управна на AA' у тачци A , и осовина BB' паралелна са AA' , која полази из крајње тачке линије c и иде кроз крајњу тачку B'' лука q . Величина линије CC'' зависи од b , и ту ћемо зависност означити са $CC'' = f(b)$. На исти начин биће $BB'' = f(c)$. Ако се са CC' као осовином опише једна нова гранична линија из тачке C па до пресека њеног D са осовином BB' и лук CD означи са t , биће $BD = f(a)$; $BB'' = BD + DB'' = BD + CC''$ према томе:

$$f(c) = f(a) + f(b)$$

Осим тога видимо да је (32. став⁵⁶):

$$t = p e^{f(b)} = r \sin \Pi(\alpha) e^{f(b)}$$

Да је место у тачци A подигнута управна у тачци B на раван троугла ABC (фиг. 28), линије c и r остале би исте, али луци q и t

⁵⁵ Пошто по ставу 34-ом на граничној површини важи Евклидова геометрија, то се у њој могу дефинисати тригонометријске функције на исти начин као и у равни. Према томе је у правоуглом граничном троуглу $AB''C''$ са правим углом код C'' :

$$p = r \sin \Pi(\alpha); \quad q = r \cos \Pi(\alpha).$$

На основу тригонометрије на граничној површини изводи Лобачевски даље тригонометрију равни и сферну тригонометрију у простору негативне кривине.

⁵⁶ По формули $s = s' \cdot e^x$ (в. прим. 47-у) на име имаћемо:

$$t = p \cdot e^{f(b)}.$$

претворили би се у t и q , праве a и b у b' и a и угао $\Pi(\alpha)$ у $\Pi(\beta)$, према томе имали бисмо⁵⁷

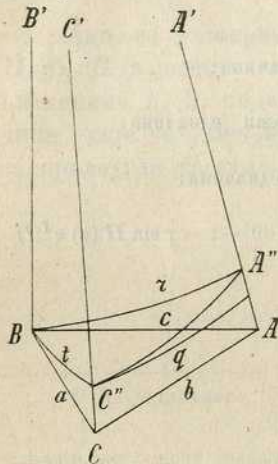
$$q = r \sin \Pi(\beta) e^{f(a)}$$

одакле следује, кад се место q стави његова вредност⁵⁸

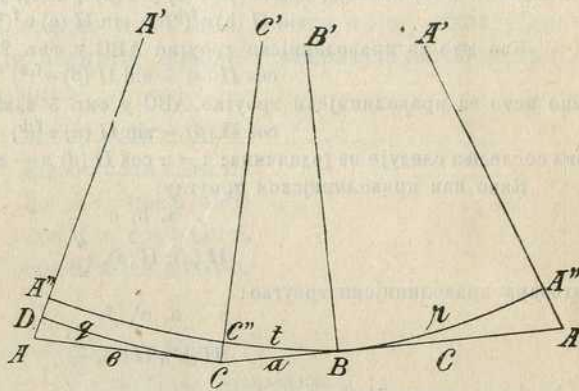
$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta) e^{f(a)}$$

а кад се место α и β ставе b' и c ⁵⁹

⁵⁷ Ако на име на равни троугла ABC подигнемо управну у тачци B (фиг. 5') и повучемо на исти начин као у фиг. 28 гранични троугао $A''BC''$, биће страна BA''



фиг. 5.



фиг. 6.

равна страни $BA'' = r$ у фиг. 28, пошто је с остало исто, $BB' \parallel AA'$ у оба случаја а прав угао код B одговара правом углу код A у фиг. 28. Осим тога угао $A''BC''$ биће сада $= \Pi(\beta)$, док је одговарајући угао у фиг. 28 био $= \Pi(\alpha)$. Ако сада расклонимо равни фиг. 5' као у ранијем случају, добићемо фиг. 6', из које је очевидно, да су s и r остали исти, као и у фиг. 28, да је се a претворило у b а b у a (пошто су равни $AA'CC'$ и $BB'CC'$ промениле места у односу на праву CC') и да је се q претворило у t а t у q (из истог разлога).

По формули $s = s' \cdot e^x$ биће и овде:

$$CD = A''C'' \cdot e^{f(a)},$$

а како је у граничном троуглу у фиг. 5', $A''C'' = r \sin \Pi(\beta)$, то ћемо имати:

$$q = r \sin \Pi(\beta) \cdot e^{f(a)}.$$

⁵⁸ Кад се вредности за q :

$$q = r \cos \Pi(\alpha) \text{ и}$$

$$q = r \sin \Pi(\beta) e^{f(a)}$$

уопреде, излази:

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta) e^{f(a)}$$

⁵⁹ Овде Лобачевски чини употребу од праволинијских троуглова, који одговарају једном и истом сферном троуглу (в. прим. 53-у и 54-у), на пошто је

$$\Pi(b) + \Pi(b') = \frac{\pi}{2},$$

то је $\cos \Pi(b') = \sin \Pi(b)$, према томе једначина

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta) e^{f(a)}$$

прелази, претварањем α у b' и β у c , у једначину:

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) e^{f(a)}.$$

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) e^{f(a)},$$

и даље множењем са $e^{f(b)}$

$$\sin \Pi(b) e^{f(b)} = \sin \Pi(c) e^{f(c)}.$$

Одавде следује да је и ⁶⁰:

$$\sin \Pi(a) e^{f(a)} = \sin \Pi(b) e^{f(b)}.$$

Пошто су пак праве а и b независне једна од друге, и осим тога $f(b) = 0$, $\Pi(b) = \frac{1}{2}\pi$ за $b = 0$, то је за сваку праву линију а ⁶

⁶⁰ Кад се једначина:

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) e^{f(a)}$$

помножи са $e^{f(b)}$ постаје, пошто је $f(c) = f(a) + f(b)$, једначина:

$$\sin \Pi(b) e^{f(b)} = \sin \Pi(c) e^{f(c)}.$$

Као што за праволинијски троугао ABC у фиг. 28 важи једначина:

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta) e^{f(a)}$$

тако исто за праволинијски троугао ABC у фиг. 5' важи једначина:

$$\cos \Pi(\beta) = \sin \Pi(\alpha) e^{f(b)}$$

(ова последња следује из једначина: $t = r \cos \Pi(\beta)$ и — фиг. 30 — $t = r \sin \Pi(\alpha) e^{f(b)}$)

Како пак праволинијском троуглу:

$$a, b, c$$

$$\Pi(\alpha), \Pi(\beta), \frac{\pi}{2}$$

одговара праволинијски троугао:

$$a, a', \beta$$

$$\Pi(b'), \Pi(c), \frac{\pi}{2}$$

то ће (упор. прим. 54-у) праволинијском троуглу:

$$b, a, c$$

$$\Pi(\beta), \Pi(\alpha), \frac{\pi}{2}$$

одговарати праволинијски троугао:

$$b, \beta', a$$

$$\Pi(a'), \Pi(c), \frac{\pi}{2}$$

Претварањем β у a' и a у c у једначини

$$\cos \Pi(\beta) = \sin \Pi(\alpha) e^{f(b)}$$

добивемо (упор. прим. 59-у) једначину:

$$\sin \Pi(a) = \sin \Pi(c) e^{f(b)}$$

и множењем обе стране са $e^{f(a)}$ једначину:

$$\sin \Pi(a) e^{f(a)} = \sin \Pi(c) e^{f(c)}.$$

Кад се напоследку ова последња једначина упореди са једначином:

$$\sin \Pi(b) e^{f(b)} = \sin \Pi(c) e^{f(c)}$$

излази једначина:

$$\sin \Pi(a) e^{f(a)} = \sin \Pi(b) e^{f(b)}.$$

(Упор. и V. Varičak, н. н. м. стр. 148 f.).

⁶¹ Из једначине:

$$\sin \Pi(a) e^{f(a)} = \sin \Pi(b) e^{f(b)}$$

следује, за $b = 0$, најпре једначина:

$$e^{f(a)} \sin \Pi(a) = 1,$$

а одавде једначина:

$$e^{-f(a)} = \sin \Pi(a).$$



$$e^{-f(a)} = \sin II(a)$$

према томе⁶²:

$$\begin{aligned}\sin II(c) &= \sin II(a) \sin II(b) \\ \sin II(\beta) &= \cos II(\alpha) \sin II(a).\end{aligned}$$

Одавде се још добија изменом писмена⁶³:

$$\begin{aligned}\sin II(\alpha) &= \cos II(\beta) \sin II(b) \\ \cos II(b) &= \cos II(c) \cos II(\alpha) \\ \cos II(a) &= \cos II(c) \cos II(\beta).\end{aligned}$$

Ако се у сферном правоуглом троуглу (Фиг. 29) стране $II(c)$, $II(\beta)$, $II(a)$ означе писменима a , b , c а супротни углови $II(b)$, $II(\alpha')$ писменима A , B , онда ће нађене једначине добити форму оних једначина, које се, као што је познато, изводе у сферној Тригонометрији за правоугле троугле, на име:

$$\begin{aligned}\sin a &= \sin c \sin A \\ \sin b &= \sin c \sin B \\ \cos A &= \cos a \sin B \\ \cos B &= \cos b \sin A \\ \cos c &= \cos a \cos b,\end{aligned}$$

⁶² Из једначине:

$$\sin II(b) = \sin II(c) e^{f(a)}$$

слеђује, на основу једначине $e^{-f(a)} = \sin II(a)$, једначина:

$$\sin II(b) = \sin II(c) \cdot \frac{1}{\sin II(a)}, \text{ а одатле:}$$

$$\sin II(c) = \sin II(a) \sin II(b)."$$

Ако се у овој последњој једначини претвори b у α' а c у β (упор. прим. 54-у) добићемо једначину:

$$\sin II(\beta) = \cos II(\alpha) \sin II(a).$$

⁶³ Ако се у једначини:

$$\sin II(a) e^{f(a)} = \sin II(b) e^{f(b)}$$

стави $a = 0$ (в. прим. 61-у) добићемо једначину:

$$e^{f(b)} = \frac{1}{\sin II(b)}$$

Кад се у једначини (в. прим. 60):

$$\cos II(\beta) = \sin II(\alpha) e^{f(b)}$$

замена ова вредност од $e^{f(b)}$ добије се једначина:

$$\sin II(\alpha) = \cos II(\beta) \sin II(b)$$

Кад се у овој последњој једначини (в. прим. 54-у) претвори α у b' , b у α' а β у c , добићемо једначину:

$$\cos II(b) = \cos II(c) \cos II(\alpha).$$

Ако се пак у овој једначини место b стави a , а место α стави β (в. прим. 54-у) добићемо једначину:

$$\cos II(a) = \cos II(c) \cos II(\beta).$$

(За ову и претходну примедбу упор. »Neue Anfangsgründe« § 137, стр. 213 и Varićak, н. н. м. стр. 149).

са којих се једначина може прећи на једначине за све сферне троугле уопште⁶⁴.

⁶⁴ Да би се разумела веза коју на овај начин поставља Лобачевски између тригонометрије равни и тригонометрије сфере, која постоји у тродимензионалном простору негативне кривине, као и идентитет сферних тригонометрија у Евклидовом и неевклидовом тродимензионалном простору, ми ћемо овде извести тригонометријске формуле за правоугле сферне троугле у Евклидовом простору.

Нека су стране a, b, c и углови A, B у правоуглом сферном троуглу ABC (фиг. 7') мањи од $\frac{\pi}{2}$. Ако из B спустимо управну BD на OC и $BE \perp OE$, и спојимо E и D , биће BD управно на раван троугла AOC (пошто је раван $OBC \perp AOC$), с тога $BD \perp DE$, $DE \perp OA$ и $\sphericalangle BED = \sphericalangle A$. Стави ли се полупречник кугле = 1, имаћемо у правоуглом троуглу BED :

$$\sin A = \frac{BD}{BE} = \frac{\sin a}{\sin c} \quad (\text{пошто је у правоуглом троуглу}$$

OBD , $BD = \sin BOD = \sin a$ и у правоуглом троуглу OBE , $BE = \sin BOE = \sin c)$ акле:

$$\sin a = \sin c \sin A.$$

На исти начин следује, ако се направи $AD' \perp OC$ и $AE' \perp OB$, из правоуглог троугла $AE'D'$:

$$\sin b = \sin c \cdot \sin B.$$

Пошто је у троуглу OED :

$$\frac{OE}{OD} = \cos b,$$

у троуглу OBE , $OE = \cos c$, а у троуглу OBD , $OD = \cos a$, то је:

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Даље је у троуглу BED :

$$\cos A = \frac{ED}{EB} = \frac{OE \operatorname{tg} b}{OE \operatorname{tg} c} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}.$$

Ако у једначини $\cos A = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$ заменимо $\operatorname{tg} b$ и $\operatorname{tg} c$ са њиховим вредностима $\frac{\sin b}{\cos b}$ и $\frac{\sin c}{\cos c}$ и $\sin b$ заменимо његовом вредношћу $\sin c \cdot \sin B$, а $\cos c$ његовом вредношћу $\cos a \cos b$ добићемо:

$$\cos A = \cos a \sin B.$$

На исти начин следује из:

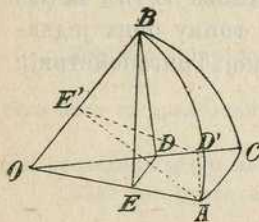
$$\cos B = \frac{E'D'}{E'A} = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$$

једначина:

$$\cos B = \cos b \sin A$$

Из ових пет формула за правоугле троугле, чије су стране $< \frac{\pi}{2}$, дају се извести све остале тригонометријске формуле за ове и за правоугле сферне троугле уопште. А како се сваки оштроугли сферни троугао да раставити на два правоугла, то се из њих дају извести и све тригонометријске формуле за оштроугле сферне троугле.

Прелазак од одговарајућих пет формула за праволинијске правоугле троугле у равни негативне кривине на формуле за правоугле сферне троугле у тродимензионалном простору негативне кривине, које су идентичне са формулама за правоугле сферне троугле у обичном Евклидовом простору, изводи Лобачевски на основу кореспонденције, која постоји између праволинијског правоуглог троугла (фиг. 29 у вези са фиг. 28):



фиг. 7'.



Према томе сферна тригонометрија не зависи од тога, да ли

a, b, c

$$\Pi(a), \Pi(\beta), \frac{\pi}{2}$$

и сферног правоуглог троугла:

$$\Pi(c), \Pi(\beta), \Pi(a)$$

$$\Pi(b), \Pi(a'), \frac{\pi}{2}$$

означајући стране овог последњег редом са a, b, c , а углове са A и B .

Формуле за правоугли сферни троугао могу се у Лобачевском простору извести и директно из фиг. 7' ако се претпостави, да је описана кугла кугла у простору негативне кривине, да су дакле правоугли праволинијски троугли $DEB, AE'D'$ и т. д. праволинијски троугли у Лобачевској равни. То је извођење међу тим немогуће без помоћи тако званих хиперболичних функција, с којима се с тога (а и из разлога њихове даље употребе) најпре морамо упознати.

Хиперболичне функције означавају се са $\sinh, \cosh, \tanh, \coth, \operatorname{sech}, \operatorname{cosech}$ и њихове аналитичке дефиниције гласе:

$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}; \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

$$\tanh u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}; \coth u = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$$

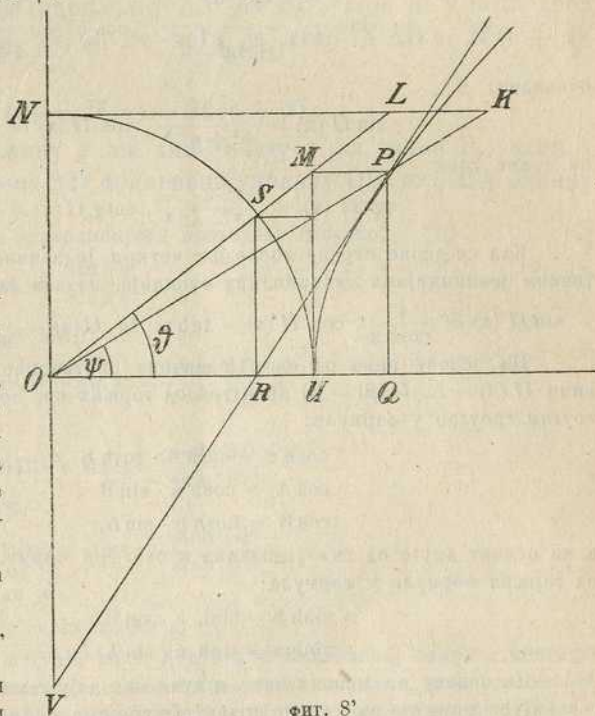
$$\operatorname{sech} u = \frac{2}{e^u + e^{-u}}; \operatorname{cosech} u = \frac{2}{e^u - e^{-u}}$$

Као што тригонометријске функције стоје у вези са кругом, тако хиперболичне стоје у вези са равностраном хиперболом, чија је једначина $x^2 - y^2 = 1$. Као што (фиг. 8') углу $\angle SOU = \vartheta$ (одн. кружном луку $SU = v$ или двострукој површини кружног сектора OSU) одговарају тригонометријске функције: $\sin \vartheta = SR, \cos \vartheta = OR, \operatorname{tg} \vartheta = UM, \operatorname{cotg} \vartheta = NL, \sec \vartheta = OM, \operatorname{cosec} \vartheta = OL$, тако углу $\angle POU = \varphi$ (односно двострукој површини хиперболичног сектора OPU , која је $= u$) одговарају (пошто је $OU = 1$) хиперболичне функције:

$$\sinh u = PQ = y, \cosh u = OQ = x, \tanh u = UT, \coth u = NK, \operatorname{sech} u = OR, \operatorname{cosech} u = VO.$$

Лако се даје показати да је (пошто је $MP \parallel OQ$ и $\operatorname{tg} \varphi = \tanh u$):

$$\sinh u = \operatorname{tg} \vartheta, \cosh u = \sec \vartheta, \tanh u = \sin \vartheta, \coth u = \operatorname{cosec} \vartheta, \operatorname{sech} u = \cos \vartheta, \operatorname{cosech} u = \cotg \vartheta, \text{ из чега излази, да свакој хиперболичној функцији}$$



фиг. 8'

је збир углова у праволинијском троуглу раван дава правима

хиперболичног сектора и одговара тригонометријска функција кружног лука v и угла ϑ .

Да бисмо тригонометријске формуле за праволинијски правоугли троугао у Лобачевској равни:

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)$$

$$\sin \Pi(\beta) = \cos \Pi(a) \sin \Pi(a)$$

$$\sin \Pi(a) = \cos \Pi(\beta) \sin \Pi(b)$$

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(a)$$

$$\cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta).$$

у којима су изражени само односи међу угловима (угловима троугловим и угловима паралелизма, који одговарају странама троугловим), претворили у формуле, у којима ће место тригонометријских функција углова паралелизма доћи хиперболичне функције самих троуглових страна, потребно је претходно изразити тригонометријске функције углова паралелизма (при чему ћемо се ограничити на прве четири) хиперболичним функцијама. На основу фундаменталне формуле у ставу 36-ом:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$$

биће, на основу тригонометријских једначина:

$$\sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} a}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} a}, \quad \cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} a}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} a},$$

очевидно:

$$\sin \Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \cos \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

па према томе:

$$\operatorname{tg} \Pi(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \quad \operatorname{cotg} \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Кад се десне стране последње четири једначине упореде са горњим аналитичким дефиницијама хиперболичних функција, излази да је:

$$\sin \Pi(x) = \frac{1}{\cosh x}, \quad \cos \Pi(x) = \operatorname{tgh} x, \quad \operatorname{tg} \Pi(x) = \frac{1}{\sinh x}, \quad \operatorname{cotg} \Pi(x) = \sinh x$$

На основу прве од ових једначина претвориће се (ако при томе још ставимо $\Pi(a) = A$, $\Pi(\beta) = B$) прве три од горњих пет формула за праволинијски правоугли троугао у формуле:

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b$$

$$\cos A = \cosh a \cdot \sin B$$

$$\cos B = \cosh b \cdot \sin A,$$

а на основу друге од тих једначина и ове три формуле претвориће се друге две од горњих формула у формуле:

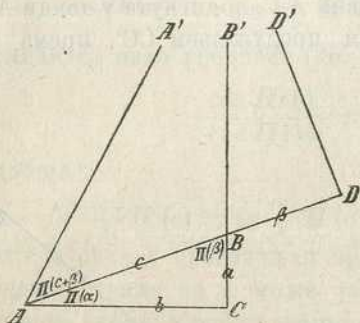
$$\sinh b = \sinh c \cdot \sin B$$

$$\sinh a = \sinh c \cdot \sin A$$

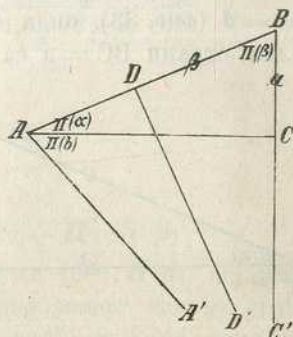
На основу последњих пет формула пак дају се из фиг. 7' директно извести одговарајуће формуле за сферне правоугле троугле у Лобачевском тродимензионалном простору, и то на следећи начин (види о томе код В. Bonola „Ueber die Parallelentheorie und über die nichteuklidischen Geometrien“ у „Fragen der Elementargeometrie“ hgb. von F. Enriques, I-er Th. 1911, § 41, стр. 338).

или не⁶⁵.

36. Сада ћемо понова посматрати правоугли праволинијски троугао ABC (фиг. 31), у коме су стране a, b, c а супротни углови $\Pi(\alpha), \Pi(\beta), \frac{1}{2}\pi$. Продужимо хипотенузу c преко тачке B и начинимо $BD = \beta$; у тачци D подигнемо управну DD' на BD , која ће према томе бити



Фиг. 31.



Фиг. 32.

паралелна са BB' , с продужењем стране a на другу страну од тачке B . Из тачке A повучимо још паралелну AA' са DD' , која је у исто доба паралелна и са CB' (25. став), са чега је угао $A'AD = \Pi(c + \beta)$, $A'AC = \Pi(b)$, дакле:

$$\Pi(b) = \Pi(\alpha) + \Pi(c + \beta).$$

Ако пренесемо дужину β на хипотенузу c из тачке B , затим у крајњој тачци њеној D (фиг. 32) подигнемо управну DD' на AB у оквиру

На основу формуле за праволинијски правоугли троугао:

$$\sin A = \frac{\sinh a}{\sinh c}$$

имаћемо у правоуглом троуглу OBD :

$$\sin BOD = \sin a = \frac{\sinh BD}{\sinh OB},$$

у правоуглом троуглу BED :

$$\sin BED = \sin A = \frac{\sinh BD}{\sinh BE}$$

и у правоуглом троуглу OBE :

$$\sin BOE = \sin c = \frac{\sinh BE}{\sinh OB},$$

одакле непосредно следује да је:

$$\sin a = \sin A \cdot \sin c,$$

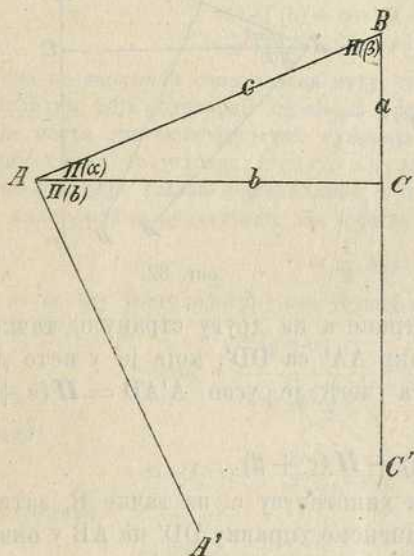
дакле иста једначина, који постоји за a, A и c и у Еуклидовој сферној тригонометрији. На сличан начин даље би се извести и остале формуле, које су такође идентичне са одговарајућим формулама у обичној сферној тригонометрији.

⁶⁵ У претходној примедби видели смо, да важе исте тригонометријске формуле за сферне троугле како на површини кугле у Еуклидовом тако и на повр-

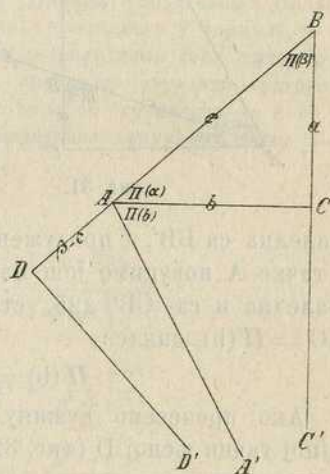
троугла, и из тачке А повучемо паралелну AA' са DD' , онда ће BC бити са својим продужењем CC' трећа паралелна; тада је: угао $CAA' = \Pi(b)$, $DAA' = \Pi(c-\beta)$, према томе

$$\Pi(c-\beta) = \Pi(\alpha) + \Pi(b).$$

Ова последња једначина важи и онда када је $c = \beta$ или $c < \beta$. Ако је $c = \beta$ (фиг. 33), онда је управна AA' подигнута у тачци А на AB паралелна страни $BC = a$ са њеним продужењем CC' , према томе је



.фиг 33.



.фиг 34.

$\Pi(\alpha) + \Pi(\beta) = \frac{1}{2} \pi$, док је такође $\Pi(c-\beta) = \frac{1}{2} \pi$ (23. став)⁶⁶. Ако је $c < \beta$, крај од β пада на другу страну тачке А у D (фиг. 34) на продужење хипотенузе AB. На AD подигнута управна DD' из A биће и овде паралелна страни $BC = a$ са њеним продужењем CC' . Овде је угао $DAA' = \Pi(\beta-c)$ према томе $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \pi - \Pi(\beta-c) = \Pi(c-\beta)$ (23. став).

шини кугле у Лобачевском простору, и ако те површине нису као такве међу собом идентичне (јер нису идентични њихови кругови — упор. прим. 48). У Римановом сферичном простору, који није ништа друго до граница кугле у четирдимензионалном Евклидовом простору (као што је површина кугле граница кугле у тродимензионалном Евклидовом простору), површина кугле идентична је као таква са површином кугле у Евклидовом простору. Према томе сферна тригонометрија не зависи ни у колико од петог Евклидовог постулата, одн. од егзистенције и неегзистенције паралелних и суме углова у троуглу. Она вреди, као што се изражава. Бољај, *апсолутно*, т. ј. вреди подједнако у сва три система геометрије.

⁶⁶ Дакле опет је: $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \Pi(c-\beta)$.



Спајањем обе нађене једначине добија се:

$$2 \Pi(b) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta)$$

$$2 \Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta)$$

одакле следује

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(\alpha)} = \frac{\cos \left[\frac{1}{2} \Pi(c - \beta) + \frac{1}{2} \Pi(c + \beta) \right]}{\cos \left[\frac{1}{2} \Pi(c - \beta) - \frac{1}{2} \Pi(c + \beta) \right]}$$

Заменили се овде вредност (35. став)

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(\alpha)} = \cos \Pi(c)$$

онда се добија⁶⁷

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c - \beta) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c + \beta)$$

Пошто је овде β произвољан број, јер се угао $\Pi(\beta)$, који се налази на једној страни од c , може узети произвољно између граница 0 и $\frac{1}{2}\pi$, према томе између граница 0 и ∞ ⁶⁸, то ћемо закључити,

⁶⁷ Из:

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \left[\frac{1}{2} \Pi(c - \beta) + \frac{1}{2} \Pi(c + \beta) \right]}{\cos \left[\frac{1}{2} \Pi(c - \beta) - \frac{1}{2} \Pi(c + \beta) \right]}$$

$$\cos \Pi(c) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c)}$$

(ова последња формула да се извести из формуле $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, а ова опет из формула: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ и $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$) и

$$\frac{\cos \left[\frac{1}{2} \Pi(c - \beta) + \frac{1}{2} \Pi(c + \beta) \right]}{\cos \left[\frac{1}{2} \Pi(c - \beta) - \frac{1}{2} \Pi(c + \beta) \right]} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c - \beta) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c + \beta)}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c - \beta) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c + \beta)}$$

(ова последња формула следује из формуле $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$, која опет следује из формуле $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$, кад се сви чланови на десној страни њеној поделе са $\cos \alpha \cos \beta$) следује:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c - \beta) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c + \beta)}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c - \beta) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c + \beta)},$$

а одакле:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c - \beta) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c + \beta)$$

⁶⁸ По 23-ем ставу на име имамо $\Pi(0) = \frac{\pi}{2}$, $\Pi(\infty) = 0$.

ако ставимо редом $\beta = c, 2c, 3c$ и т. д., да је за сваки позитиван број n ⁶⁹:

$$\operatorname{tang}^n \frac{1}{2} \Pi(c) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(nc)$$

Ако се n сматра за однос двеју линија x и c и ако се претпостави да је

$$\cot \frac{1}{2} \Pi(c) = e^c$$

онда се налази за сваку линију x уопште, па било да је она позитивна или негативна⁷⁰,

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$$

где e може бити сваки могући број већи од један, пошто је за $x = \infty, \Pi(x) = 0$.

Пошто је произвољна линија којом се мере линије, то се под e може подразумевати и основа Неперових логаритама.

37. Од горе нађених једначина (35. став) довољно је познавати следеће две

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)$$

$$\sin \Pi(a) = \sin \Pi(b) \cos \Pi(\beta)$$

ако се при томе ова последња примени на оба катета a и b , па да се њиховим спајањем изведу остале две (35. став) без двосмислености

⁶⁹ Стави ли се $\beta = c$, имаћемо:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(2c), \text{ пошто је } \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(0) \text{ одн. } \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

За $\beta = 2c$ имаћемо:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(-c) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(3c),$$

а пошто је:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(-c) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} [\pi - \Pi(c)] = \cotg \frac{1}{2} \Pi(c) = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c)}$$

биће:

$$\operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} \Pi(c) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(3c),$$

према томе биће у опште:

$$\operatorname{tg}^n \frac{1}{2} \Pi(c) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(nc)$$

(Упор. V. Varićak, н. н. м, стр. 152).

⁷⁰ Ако се стави $n = \frac{x}{c}$ и $\cotg \frac{1}{2} \Pi(c) = e^c$ одн. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c) = e^{-c}$

једначина $\operatorname{tg}^n \frac{1}{2} \Pi(c) = \operatorname{tg} \Pi(nc)$ прелази у једначину:

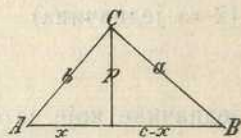
$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}.$$

алгебарских знакова, пошто су овде сви углови оштри. На сличан начин долази се до следећих двеју једначина⁷¹:

$$1., \quad \operatorname{tang} \Pi(c) = \sin \Pi(\alpha) \operatorname{tang} \Pi(\alpha)$$

$$2., \quad \cos \Pi(\alpha) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta)$$

Сад ћемо посматрати један праволинијски троугао, чије су стране a, b, c (фиг. 35) а супротни углови A, B, C . Ако су A и B оштри углови, управна p спуштена из темена угла C у троугау пада на страну c и дели је у два дела, и то у део x на страни угла A и $c-x$ на страни



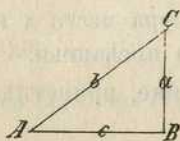
фиг. 35.

угла B . На тај начин постају два правоугла троугла, за које се при-
меном једначине 1., добија:

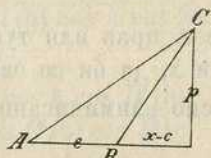
$$\operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(p)$$

$$\operatorname{tang} \Pi(b) = \sin A \operatorname{tang} \Pi(p)$$

једначине које остају непромењене и кад је један од углова, н. пр.



фиг. 36.



фиг. 37.

В прав (фиг. 36) или туп (фиг. 37). Према томе имамо у опште за сваки троугао⁷²:

⁷¹ Из једначине:

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)$$

слеђује:

$$\cos^2 \Pi(b) = 1 - \sin^2 \Pi(b) = 1 - \frac{\sin^2 \Pi(c)}{\sin^2 \Pi(a)}$$

Из једначине:

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(a) \cos \Pi(c)$$

слеђује

$$\cos^2 \Pi(b) = \cos^2 \Pi(a) \cos^2 \Pi(c).$$

Према томе је:

$$\cos^2 \Pi(a) = \frac{\sin^2 \Pi(a) - \sin^2 \Pi(c)}{\sin^2 \Pi(a) \cos^2 \Pi(c)} = \frac{\cos^2 \Pi(c) - \cos^2 \Pi(a)}{\sin^2 \Pi(a) \cos^2 \Pi(c)}$$

одакле слеђује:

$$\sin^2 \Pi(a) = 1 - \cos^2 \Pi(a) = \frac{\cos^2 \Pi(a) \sin^2 \Pi(c)}{\sin^2 \Pi(a) \cos^2 \Pi(c)} = \cotg^2 \Pi(a) \operatorname{tg}^2 \Pi(c)$$

$$\text{или: } \sin \Pi(a) = \frac{1}{\operatorname{tg} \Pi(a)} \cdot \operatorname{tg} \Pi(c) \text{ или на послетку:}$$

$$\operatorname{tg} \Pi(c) = \sin \Pi(a) \cdot \operatorname{tg} \Pi(a)$$

(Упор. „Neue Anfangsgründe“ § 141, стр. 221).

⁷² Из:

$$\operatorname{tg} \Pi(p) = \frac{\operatorname{tg} \Pi(a)}{\sin B}$$

3.,

$$\sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(b)$$

За троугао са оштрим угловима А, В (фиг. 35) имамо још и (2-га једначина)

$$\begin{aligned}\cos \Pi(x) &= \cos A \cos \Pi(b) \\ \cos \Pi(c-x) &= \cos B \cos \Pi(a)\end{aligned}$$

једначине које се односе и на троугле у којима је један од углова А или В прав или туп. На пример мора се за $B = \frac{1}{2}\pi$ (фиг. 36) узети да је $x=c$, тада прва једначина прелази у горе нађену (2-гу једначину), а друга је сама собом дата. За $B > \frac{1}{2}\pi$ (фиг. 37) прва једначина остаје непромењена, а место друге морамо писати одговарајућу:

$$\cos \Pi(x-c) = \cos(\pi-B) \cos \Pi(a)$$

али је $\cos \Pi(x-c) = -\cos \Pi(c-x)$ (23. став) а и $\cos(\pi-B) = -\cos B$.

Ако је А прав или туп угао, онда се мора место x и $c-x$ ставити $c-x$ и x , да би се овај случај свео на пређашњи.

Да бисмо елиминисали x из обе једначине, приметимо да је ⁷³ (36. став)

$$\operatorname{tg} \Pi(p) = \frac{\operatorname{tg} \Pi(b)}{\sin A}$$

слеђује:

$$\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi(b)$$

⁷³ На основу једначине (в. прим. 67-у):

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha}$$

слеђује:

$$\cos \Pi(c-x) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c-x)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c-x)}$$

На основу фундаменталне формуле става 36-ог:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$$

слеђује:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c-x)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c-x)} = \frac{1 - e^{2x-2c}}{1 + e^{2x-2c}}$$

одакле поново на основу те исте формуле слеђује:

$$\frac{1 - e^{2x-2c}}{1 + e^{2x-2c}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c) \cdot \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} \Pi(x)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c) \cdot \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} \Pi(x)}$$



$$\begin{aligned}
\cos \Pi(c-x) &= \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2} \Pi(c-x)}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} \Pi(c-x)} \\
&= \frac{1 - e^{2x-2c}}{1 + e^{2x-2c}} \\
&= \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2} \Pi(c) \cot^2 \frac{1}{2} \Pi(x)}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} \Pi(c) \cot^2 \frac{1}{2} \Pi(x)} \\
&= \frac{\cos \Pi(c) - \cos \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)}
\end{aligned}$$

Ако се овде замени израз за $\cos \Pi(x)$, $\cos \Pi(c-x)$ добија се:

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(a) \cos B + \cos \Pi(b) \cos A}{1 + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos A \cos B}$$

одакле следује⁷⁴

$$\cos \Pi(a) \cos \Pi(b) = \frac{\cos \Pi(c) - \cos A \cos \Pi(b)}{1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)}$$

Кад се на десној страни ове једначине стави:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c) = \frac{\sin \Pi(c)}{1 + \cos \Pi(c)} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Pi(x) = \frac{1 + \cos \Pi(x)}{\sin \Pi(x)}$$

(на основу формуле $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$), и место $\sin^2 \Pi(x)$ његова вредност $1 - \cos^2 \Pi(x)$, место $\sin^2 \Pi(c)$, $1 - \cos^2 \Pi(c)$ (на основу формуле $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$) добиће се на послетку:

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c) \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \Pi(x)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c) \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \Pi(x)} &= \frac{[\cos \Pi(c) - \cos \Pi(x)] [2 + 2 \cos \Pi(c) + 2 \cos \Pi(x)]}{[1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)] [2 + 2 \cos \Pi(c) + 2 \cos \Pi(x)] -} \\
&\quad \frac{-2 \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)}{-2 \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)} = \frac{\cos \Pi(c) - \cos \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)}.
\end{aligned}$$

⁷⁴ Кад се у једначини:

$$\cos \Pi(c-x) = \frac{\cos \Pi(c) - \cos \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)}$$

замени $\Pi(x)$ са $\cos A \cos \Pi(b)$, а $\cos \Pi(c-x)$ са $\cos B \cos \Pi(a)$ следује одмах једначина:

$$\cos \Pi(a) \cos B = \frac{\cos \Pi(c) - \cos A \cos \Pi(b)}{1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)}.$$

Према тексту међутим требало би из ове једначине најпре извести ону која јој у тексту претходи, па из ове последње поново ону прву.

и на послетку⁷⁵):

$$\sin^2 \Pi(c) = [1 - \cos B \cos \Pi(c) \cos \Pi(a)] \cdot [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)]$$

На сличан начин мора бити и:

$$4., \quad \sin^2 \Pi(a) = [1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)] \cdot [1 - \cos B \cos \Pi(c) \cos \Pi(a)]$$

$$\sin^2 \Pi(b) = [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)] \cdot [1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)]$$

Из ове три једначине налази се још⁷⁶:

$$\frac{\sin^2 \Pi(b) \sin^2 \Pi(c)}{\sin^2 \Pi(a)} = [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)]^2$$

Одавде следује без двосмислености знакова⁷⁷:

$$5., \quad \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1$$

Ако се овде замени вредност од $\sin \Pi(c)$ у сагласности са једначином (3)⁷⁸,

⁷⁵ Из последње једначине у претходној примедби следује:

$$\cos \Pi(c) - \cos A \cos \Pi(b) = \cos \Pi(a) \cos B - \cos \Pi(a) \cos B \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)$$

Кад се обе стране ове једначине помноже са $\cos \Pi(c)$ биће:

$$\cos^2 \Pi(c) + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos^2 \Pi(c) \cos A \cos B - \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A = 0$$

или:

$$1 - \sin^2 \Pi(c) = \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B + \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A - \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos^2 \Pi(c) \cos A \cos B$$

одакле следује даље:

$$\sin^2 \Pi(c) = 1 + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos^2 \Pi(c) \cos A \cos B - \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A =$$

$$= [1 - \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B] - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A [1 - \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B],$$

дакле на послетку:

$$\sin^2 \Pi(c) = [1 - \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B] [1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A].$$

(Упор. N. Lobatschefskij „Pangeometrie“ превод од H. Liebmann-a у Ostwald's

Klassiker der exakten Wissenschaften, стр. 28).

⁷⁶ Кад се једначине:

$$\sin^2 \Pi(c) = [1 - \cos B \cos \Pi(c) \cos \Pi(a)] [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)]$$

$$\sin^2 \Pi(b) = [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)] [1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)]$$

помноже међу собом, па се њихов продукт подели једначином:

$$\sin^2 \Pi(a) = [1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)] [1 - \cos B \cos \Pi(c) \cos \Pi(a)]$$

добиле се једначина:

$$\frac{\sin^2 \Pi(b) \sin^2 \Pi(c)}{\sin^2 \Pi(a)} = [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)]^2$$

(Упор. „Neue Anfangsgründe“ стр. 224.)

⁷⁷ Простије извођење ове једначине налази се у „Pangeometrie“, стр. 26—27.

⁷⁸ Једначини 3:

$$\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi(b)$$

одговара једначина:

$$\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin C \operatorname{tg} \Pi(c)$$

или:

$$\sin \Pi(c) = \frac{\sin A}{\sin C} \operatorname{tang} \Pi(a) \cos \Pi(c)$$

добива се

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(a) \sin C}{\sin A \sin \Pi(b) + \cos A \sin C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)}$$

или ако се овај израз за $\cos \Pi(c)$ замени у једначини (4)⁷⁹:

$$6., \quad \cot A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}$$

Елиминацијом $\sin \Pi(b)$ помоћу једначине (3) излази⁸⁰:

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} \cos C = 1 - \frac{\cos A}{\sin B} \sin C \sin \Pi(a)$$

Једначина (6) даје међутим променом писмена⁸¹

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} = \cot B \sin C \sin \Pi(a) + \cos C.$$

Из последње две једначине следује⁸²:

$$\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin C \frac{\sin \Pi(c)}{\cos \Pi(c)}$$

одакле следује:

$$\sin \Pi(c) = \frac{\sin A}{\sin C} \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(c)$$

⁷⁹ Кад се у једначини:

$$\sin^2 \Pi(b) = [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)] [1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)]$$

изврши множење на десној страни и $\sin^2 \Pi(b)$ замени са $1 - \cos^2 \Pi(b)$ па тако добијени израз подели са $\cos \Pi(b)$ добиће се (упор. примедбу 75-у):

$$\cos \Pi(b) + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A \cos C - \cos \Pi(a) \cos C - \cos \Pi(c) \cos A = 0.$$

Кад се овде замени $\cos \Pi(c)$ из горње једначине у тексту добиће се:

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)} = \cot A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C.$$

(Упор. „Rangeometrie“, стр. 30).

⁸⁰ Кад се у једначини претходне примедбе замени $\sin \Pi(b)$ његовом вредношћу

$$\sin \Pi(b) = \frac{\operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(b) \sin A}{\sin B}$$

из једначине 3., добиће се једначина:

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)} = \frac{\cos C}{1 - \frac{\cos A}{\sin B} \sin C \sin \Pi(a)}$$

а одатле:

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} \cos C = 1 - \frac{\cos A}{\sin B} \sin C \sin \Pi(a)$$

⁸¹ Ако се у једначини 6. а замени са b, b са а, а А са В добиће се горња једначина у тексту (в. „Neue Anfangsgründe“ стр. 225).

⁸² Ако се из поменутих двеју једначина у тексту елиминира $\cos \Pi(b)$, па се обе стране тако добијеног изрази, пошто се $\cos^2 C$ замени са $1 - \sin^2 C$, поделе са $\cos \Pi(a) \sin C \sin \Pi(a)$ и помноже са $\sin B$, добиће се једначина:

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}.$$

(Упор. „Neue Anfangsgründe“, стр. 225)

7.,

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}$$

Све четири једначине за зависност страна a, b, c у праволинијском троуглу биће према томе⁸³ [идентичне са (3), (5), (6), (7)]:

$$8., \quad \begin{cases} \sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(b) \\ \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1 \\ \cos A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)} \\ \cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)} \end{cases}$$

Ако су стране a, b, c троугла врло мале, можемо се задовољити приближним вредностима (36. став)⁸⁴

$$\cot \Pi(a) = a$$

$$\sin \Pi(a) = 1 - \frac{1}{2} a^2$$

$$\cos \Pi(a) = a$$

⁸³ Ако се горње четири једначине за праволинијски троугао изразе помоћу хиперболичких функција (упор. прим. 64) имаћемо:

$$\sin A \sinh b = \sin B \sinh a$$

$$\cos A \sinh b \sinh c + \cosh a = \cosh b \cosh c$$

$$\cotg A \sin C + \cos C \cosh b = \sinh b \cotgh a$$

$$\cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C \cosh a$$

Прва једначина преставља случај, када су у троуглу дате *две стране* (a, b) и *супротивни углови* (A, B). Друга представља случај кад су дате *три стране* (a, b, c) и *један угао* (A). Трећа представља случај кад су дате *две стране* (a, b), *један захаћени* (C) и *један супротивни угао* (A), а четврта случај кад су дате *сва три угла* (A, B, C) и *једна страна* (a).

У Евклидовој равни четврти случај не постоји, јер је он овде искључен егзи-
стенцијом *сличних* фигура, којих у Лобачевској равни нема. Првим трима случа-
јевима одговарају у Евклидовој тригонометрији једначине:

$$b \sin A = a \sin B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\frac{b}{a} = \cos C + \sin C \cotg A$$

По себи се разуме, да у свакоме од наведених случајева постоје по неколике једначине за одговарајуће комаде троугла. Таких једначина има за праволинијске троугле у Лобачевској равни *петнајест*, у Евклидовој равни *дванајест* (упор. „Neue Anfangsgründe“, § 138–9, стр. 218 f.).

⁸⁴ Ако се изрази (упор. примедбу 64):



и на сличан начин и за друге стране b и c . Једначине 8 прелазе за такве троугле у следеће⁸⁵:

$$\sin \Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cos \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

развију у бескрајне редове, при чему је:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

на се занемаре чланови вишег степена биће:

$$\sin \Pi(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\cos \Pi(x) = x \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \text{ или } x$$

одакле следује да је:

$$\sin \Pi(a) = 1 - \frac{a^2}{2}$$

$$\cos \Pi(a) = a$$

$$\operatorname{tg} \Pi(a) = \frac{1 - \frac{a^2}{2}}{a} \text{ или } = \frac{1}{a}$$

$$\operatorname{cotg} \Pi(a) = \frac{a}{1 - \frac{a^2}{2}} \text{ или } = a$$

⁸⁵ Кад се вредности од $\sin \Pi(a)$, $\sin \Pi(b)$ и т. д. из ових једначина замене у једначинама 8. и при томе занемаре чланови вишег степена, прећиће једначине 8. у једначине:

$$b \sin A = a \sin B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a \sin(A + C) = b \sin A$$

$$\cos A + \cos(B + C) = 0$$

Прве две међу овим једначинама идентичне су са првим двама једначинама за правоугли троугле у Еуклидовој геометрији (види претходну примедбу).

Да из других двеју у вези са првом следује претпоставка $A + B + C = \pi$, да се показати на следећи начин.

На основу формуле:

$$\sin(a + \beta) = \sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta$$

биће очевидно:

$a \sin(A + B + C) = a \sin(A + C) \cos B + a \cos(A + C) \sin B$ (по трећој једначини) $= b \sin A \cos B + a \sin B \cos(A + C)$ (по првој једначини) $= b \sin A [\cos B + \cos(A + C)]$ (по једначини $\cos B + \cos(A + C) = 0$, која одговара четвртој једначини) $= 0$.

Према томе је:

$$\sin(A + B + C) = 0, \text{ дакле}$$

$$A + B + C = \pi.$$

(Упор. Frischaut, „Absolute Geometrie“, стр. 55).

$$b \sin A = a \sin B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a \sin (A + c) = b \sin A$$

$$\cos A + \cos (B + c) = 0$$

Прве две од ових једначина претпоставља обична геометрија; из друге две следује, узимајући у помоћ прве две, закључак

$$A + B + C = \pi$$

Према томе имагинарна геометрија прелази у обичну кад се претпостави, да су стране праволинијског троугла врло мале⁸⁶.

О мерењу кривих линија, равних фигура, површина и запремине тела, као и о примени имагинарне геометрије на Анализу, објавио сам неколико испитивања⁸⁷ у „Ученим записцима универзитета казанског“.

⁸⁶ Строго узев ово је случај само кад су стране праволинијског троугла бесконачно мале. Ако у горње једначине за праволинијски троугао, пошто их изразимо у хиперболичким функцијама (упор. примедбу 83) уведемо константу k , те ће једначине добити облик:

$$\sin A \cdot \sinh \frac{b}{k} = \sin B \cdot \sinh \frac{a}{k}$$

$$\cos A \sinh \frac{b}{k} \cosh \frac{c}{k} + \cosh \frac{a}{k} = \cosh \frac{b}{k} \cosh \frac{c}{k}$$

$$\cos A \sin C + \cosh \frac{b}{k} \cos C = \cotgh \frac{a}{k} \sinh \frac{b}{k}$$

$$\cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C \cosh \frac{a}{k}$$

Из њих следују једначине предходне примедбе за троугле у Евклидовој геометрији, кад односи $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$ постану бесконачно мали, што ће бити или кад саме стране a , b , c постану бесконачно мале, или кад константа k за крајње вредности од a , b , c постане бесконачно велика. Како је ова константа идентична са полупречником кривине Лобачевске равни (в. прим. 47), то друга претпоставка води резултату, да се Евклидова геометрија има схватити као један специјалан као гранични случај Лобачевске геометрије. Из прве претпоставке пак следује да Евклидова геометрија важи за бесконачно мале регијоне Лобачевске равни (Упор. Frischauf, н. н. м. стр. 55).

Интересантно је споменути, да је Гаус обрнуто пошао од ове последње претпоставке при извођењу формула неевклидовске геометрије. Упор. В. Bonola, н. н. м. прим. на стр. 93 и Н. Liebmann, н. н. м. стр. 83.

⁸⁷ Од резултата ових Лобачевских испитивања споменућемо као најважније егзистенцију троугла *максималне* површине у његовој равни (чије су стране паралелне линије — асимптоте — а збир углова = 0), чија је површина $p = \pi$ на основу опште формуле за површину троугла:

$$p = \pi - (A + B + C),$$

у којој A , B и C означавају углове, а разлика $\pi - (A + B + C)$ тзв. *дефект* троугла (који одговара *ексцесу* $A + B + C - \pi$ сферног троугла), као и да је површина троугла у опште пропорционална овоме дефекту.

Једначине (8) пружају већ саме собом довољну подлогу, да се претпоставка имагинарне геометрије може сматрати за могућу. Према томе астрономска посматрања су једино средство, да би се могло судити о тачности прорачуна обичне геометрије. Ова се тачност протире врло далеко, као што сам то показао у једној од својих расправа, тако да н. пр. у троуглима, чије су стране још приступачне нашим мерењима, збир њихова три угла није различан од два права ни за стоти део једне секунде⁸⁸.

Површина круга равна је:

$$\pi \left(e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}} \right)^2$$

$$\text{или} = 4\pi \cotg^2 \Pi \left(\frac{r}{2} \right) = 4\pi \sinh^2 \frac{r}{2} \text{ итд.}$$

(Упор. »Ueber die Anfangsgründe« стр. 33 и д.).

⁸⁸ Питање, које Лобачевски додирује у горњим редовима, питање је о природи стварног простора, да ли је овај евклидски или неевклидски (одн. простор негативне кривине, пошто Лобачевски не познаје простор позитивне кривине — упор. прим. 3). У »Ueber die Anfangsgründe«, § 15, стр. 22 и д. Лобачевски даје на два начина одговор на то питање, мерењем јединице дужине помоћу паралаксе некретница и мерењем углова у троуглу. Ми ћемо овде говорити опширније само о првом начину.

Годишња паралакса једне звезде некретнице је угао под којим би се видео пречник земљине путање са те звезде. Ако претпоставимо да права линија, која представља остојање звезде S од земље у тачки E₁ (фиг. 9'), стоји управно на пречнику а земљине путање, а да права линија, која спаја S са тачком E₂, склала оштар угао β са тим пречником, и

ако угао $\frac{\pi}{2} - \beta$ означимо са 2p, онда ће у Евклидовом простору бити паралакса E₂SE₁ = 2p, док ће у

неевклидовом простору негативне кривине та паралакса бити < 2p (ако дефект троугла означимо са 2ω, тај ће угао бити 2p - 2ω). Како се може директно мерити само угао 2p (одн. угао β), то је, у случају да је стварни простор неевклидски, стварна паралакса увек мања од измерене. У томе случају да се из правоуглог троугла у фиг. 9' јединица дужине одн. доња граница њене величине израчунати на следећи начин.

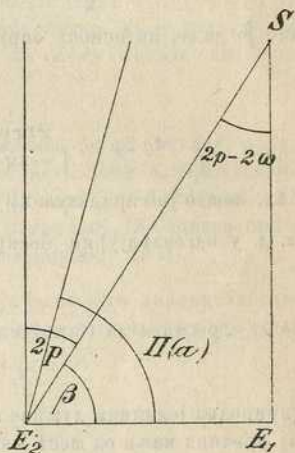
Из фиг. 9' следује непосредно да је:

$$\Pi(a) > \frac{\pi}{2} - 2p,$$

што је $\beta = \frac{\pi}{2} - 2p$. Према томе је:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(a) > \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - p \right).$$

Како је пак на основу познате формуле:



фиг. 9'.

Још је вредно истаћи, да оне четири једначине (8) равне геометрије прелазе у једначине за сферне троугле, ако се место страна а,

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tga}\operatorname{tg}\beta}$$

очевидно:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - p\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} p}{1 + \operatorname{tg} p}$$

и како је:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(a) = e^{-\frac{a}{k}}$$

то је:

$$e^{\frac{a}{k}} < \frac{1 + \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg} p}.$$

Из ове последње неједначине слеђује:

$$\frac{a}{k} < \ln \left(\frac{1 + \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg} p} \right)$$

а одатле, на основу формуле:

$$\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right),$$

слеђује неједначина:

$$\frac{a}{k} < 2 \left(\operatorname{tg} p + \frac{\operatorname{tg}^3 p}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 p}{5} + \dots \right).$$

Како је даље, на основу формуле (упор. прим. 64-у):

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a},$$

$$\operatorname{tg} 2p = \frac{2 \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg}^2 p} = 2(\operatorname{tg} p + \operatorname{tg}^3 p + \operatorname{tg}^5 p + \dots),$$

то ће, пошто је паралакса $2p$ врло мала количина, тако да се чланови $\frac{\operatorname{tg}^3 p}{3}$, $\operatorname{tg}^5 p$ и т. д. у одговарајућим бескрајним редовима могу занемарити, напоследку бити:

$$\frac{a}{k} < \operatorname{tg} 2p$$

Ако се $2p$ стави за Сиријус = $1,024$, као што чини Лобачевски, онда је:

$$\frac{a}{k} < 0,000006012$$

тј. природна јединица дужине била би већа од 167.060 пречника земљине путање (онога пречника мањи од шест милионитих делова те јединице). Ако се $2p$ стави = $0,01$, добија се, да је k веће од милиона тих пречника.

Кад би стварни простор био евклидски, k би било бескрајно велико и неверетнице би могле имати произвољно малу паралаксу. Ако је пак простор неевклидски т. ј. ако k има одређену крајњу вредност, постоји једна минимална вредност паралаксе, коју паралаксе некретница не могу прекорачити. Наравно ови закључци вреде само под претпоставком, да је стварни простор бесконачан.

Што се тиче збира углова у троуглу, на који се позива Лобачевски у тексту, он у „Ueber die Anfangsgründe“, стр. 23 (упор. и примедбу Енгелову на стр. 249—50) показује, да је, кад се дефект троугла означи као у фиг. 9' са 2ω , у равнобраком правоуглом троуглу астрономских димензија: $\operatorname{tg} \omega < \operatorname{tg}^2 p$.

Кад би се узео правоугли троугао, чије су стране равне пречнику земљине путање, и p ставило = $0,062$ (половина Сиријусове паралаксе по Лобачевском),



b, c стави: $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$, али са овом променом мора се очевидно ставити и да је:

$$\sin \Pi(a) = \frac{1}{\cos a}$$

$$\cos \Pi(a) = \sqrt{-1} \operatorname{tanga}$$

$$\operatorname{tang} \Pi(a) = \frac{1}{\sin a \sqrt{-1}}$$

и на сличан начин и за стране b и c. На нај начин прелази се од једначина 8 на следеће⁸⁹:

онда би на основу ове формуле изашло, да би дефект таког троугла био мањи од 0,000003727. Пошто је пак дефект троугла све мањи што је мања његова површина, то ће за троугле земаљских димензија тај дефект бити тако мали, да се неће дати констатовати, или, другачије речено, у области обичног искуства важиће Евклидова геометрија.

Али, додаје Лобачевски (н. н. м. стр. 24), ако се претпостави да је васиона бесконачна, није немогуће да Евклидова претпоставка не вреди више ван области нашег звезданог система (система млечне путање), и ако је опет с друге стране тешко претпоставити једну такву везу ствари у природи, која би тако различне количине, као што су углови и стране, учинила зависним једне од других. С тога је — и то је крајњи закључак Лобачевског — врло вероватно, да је стварни простор у апсолутном смислу евклидски, и ако се то по њему никада неће моћи доказати.

(Упор. и В. Bonola. н. н. м. стр. 98—100).

Питање о кривини стварног простора расправљали су на основу новијих података о паралаксама некретница у последње време астрономи К. Schwarzschild (у расправи „Ueber das zulässige Krümmungsmass des Raumes“ у „Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft“ 1900) и Р. Harzer (у расправи „Die Sterne und der Raum“ у „Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung“ 1908).

⁸⁹ Да бисмо разумели горње прелазе потребно је познавати аналитичке дефиниције тригонометријских функција. Те дефиниције (за прве четири функције) гласе:

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}; \quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}}; \quad \operatorname{ctg} x = i \cdot \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{e^{xi} - e^{-xi}}$$

где је $i = \sqrt{-1}$

На основу формула (види прим. 64):

$$\sin \Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}; \quad \cos \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\operatorname{tg} \Pi(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}; \quad \operatorname{cotg} \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

и горњих дефиниција лако је увидети да је:

$$\sin \Pi(xi) = \frac{2}{e^{xi} + e^{-xi}} = \frac{1}{\cos x}; \quad \cos \Pi(xi) = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}} = i \cdot \operatorname{tg} x$$



$$\sin A \sin b = \sin B \sin a$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\operatorname{tg} \Pi(x) = \frac{2}{e^{xi} - e^{-xi}} = \frac{2i}{e^{xi} - e^{-xi}} \cdot \frac{1}{i} = \frac{1}{i \cdot \sin x}; \operatorname{cotg} \Pi(x) = i \sin x$$

На основу ових последњих формула пак лако се изводи да једначина:

$$\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi(b),$$

кад се у њој место а стави ai и место b стави bi , прелази у једначину:

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a$$

На сличан начин прелази једначина:

$$\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1$$

у једначину:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

једначина:

$$\operatorname{cotg} A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}$$

у једначину:

$$\operatorname{cotg} A \sin C + \cos C \cos b = \sin b \operatorname{cotg} a$$

и једначина:

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}$$

у једначину:

$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C.$$

Једначине за оштроугли троугао у Лобачевској равни прелазе дакле на овај начин у једначине за сферни оштроугли троугао.

Али и обрнуто, можемо поћи од ових једначина за сферни оштроугли троугао и, замењујући у њима стране a, b, c странама ai, bi, ci , добити једначине за оштроугли троугао у Лобачевској равни. Тај обрнути прелаз да се извести овако.

Из аналитичких дефиниција тригонометријских функција слеђује да је:

$$\sin(xi) = \frac{(e^x - e^{-x})i}{2}; \cos(xi) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(xi) = \frac{(e^x - e^{-x})i}{e^x + e^{-x}}; \operatorname{cotg}(xi) = \frac{(e^{-x} + e^x)i}{e^{-x} - e^x}$$

Кад се у једначини:

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a$$

замени a са ai и b са bi биће:

$$\sin A \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2} = \sin B \cdot \frac{e^a - e^{-a}}{2}$$

одакле, на основу аналитичке дефиниције хиперболичног синуса (види прим. 64), слеђује да је:

$$\sin A \sinh b = \sin B \sinh a.$$

Кад се у једначини:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

замени a са ai , b са bi и c са ci биће:

$$\frac{e^a + e^{-a}}{2} = \frac{e^b + e^{-b}}{2} \cdot \frac{e^c + e^{-c}}{2} - \cos A \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2} \cdot \frac{e^c - e^{-c}}{2}$$

$$\cotg A \sin C + \cos C \cos b = \sin b \cotg a$$

$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C$$

или:

$$\cosh a = \cosh b \cdot \cosh c - \cos A \sinh b \cdot \sinh c$$

Кад се у једначини:

$$\cotg A \sin C + \cos C \cos b = \sin b \cotg a$$

замени b са bi и a са ai и, зарад лакшег рачунања, стави:

$$\cotg (xi) = \frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})i}$$

биће:

$$\cotg A \sin C + \cos C \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{2} = \frac{e^b - e^{-b}}{2} \cdot \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}}$$

или:

$$\cotg A \sin C + \cos C \cdot \cosh b = \sinh b \cdot \cotg a$$

Кад се на послетку у једначини:

$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C$$

замени a са ai , биће:

$$\cos A = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cdot \sin B \sin C - \cos B \cos C$$

или:

$$\cos A = \cosh a \sin B \sin C - \cos B \cos C$$

Четири добивене једначине идентичне су са једначинама за оштроугли троугао Лобачевског равни у примедби 83. Да се из њих добију једначине 8., у којима на место хиперболических функција страна стоје тригонометријске функције углова паралелизма (упор. прим. 64), требало би доказати да је:

$$\sinh x = \frac{1}{\operatorname{tg} \Pi(x)}$$

односно да је:

$$e^{-x} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x)$$

Ми тај доказ овде нећемо изводити (види о томе Н. Liebmann-а, н. н. м. стр. 80 у вези за стр. 75—78), напоменућемо само, да је Лобачевски у својој расправи „Воображаемая геометрія“ 1835, преведеној 1904 г. на немачки од Н. Liebmann-а, указао на начин којим би се, идући овим обрнутим путем, могли извести ставови његове геометрије (упор. „Imaginäre Geometrie“ стр. 9—12). Са логичког и филозофског гледишта међутим овај обрнути пут важан је у толико, што се њиме на евидентан начин утврђује непротивречност и унутрашња логичка могућност неевклидске геометрије. Ако се неевклидска тригонометрија да извести из сферне тригонометрије и ако се из неевклидске тригонометрије дају извести сви остали ставови неевклидске геометрије, онда из тога следује — и ту конзеквенцију наглашује Лобачевски на више места у својим списима — да је неевклидска геометрија исто тако непротивречна као и сферна тригонометрија, јер се изводи из Евклидове геометрије, у чију се непротивречност не сумња.

Осим тога овај обрнути пут има још један логички и опште-геометријски значај. Ако у формулама за сферни оштроугли троугао ставимо место страна a , b , c односе $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$, т. ј. ако у њих уведемо константу k оди. полупречник кривине