

Лобачевски и Бољај.

Прилог Вишој Психологији.

Примљено у сједници филозофичко-јуридичкога разреда Југославенске академије знаности и умјетности дне 5. јула 1914.

Написао др. Бранислав Петронијевић.

Познато је, да се не ретко једна велика идеја јави у исто доба у две или више генијалних личности. Врло би интересно било упоредити изближе, у којој мери и у ком се облику таква једна идеја јавља у разним личностима, јер да морају постојати разлике у том погледу, очевидно је, пошто иначе не би било независности у њиховим проналасцима, кад се узме у обзир разлика, која од природе постоји у духовној конституцији њиховој.

Ја сам, упоређујући неколико класичних примера ове врсте — проналазак периодног система хемијских елемената код Менделјејева и Мајера, теорију природне селекције код Дарвина и Волса, проналазак неевклидове Геометрије код Лобачевског и Бољаја и др. — дошао до резултата, да се увек један од истовремених проналазача, било плодношћу коју идеја код њега има, било природнијим и логичнијим извођењем њеним, толико истиче над другим проналазачем или другим проналазачима (ако их више има), да се он има сматрати за главног проналазача. И тачност овог мог резултата хоћу овде да покажем на примеру Лобачевски-Бољај, што наравно може бити учињено само у кратким потезима, имајући у виду намену овог нашег колективног списка¹.

Да је идеја неевклидове Геометрије нашла плодније земљиште у духу Лобачевскога него у Бољајевом, то се има сматрати да стоји

¹ Ова радња била је нампјењена свечаној књизи за седамдесету годишницу непресекаљенога предсједника Југославенске академије Таде Смичикласа. Али како је његово преминуће претекло почетак тискања те књиге, одустала је Академија од тога наума, па је објелодањује овдје. — Југослав. Академија.

ван дискусије. Бољај је посветио само један једини спис новој Геометрији — познати Appendix¹, док јој је Лобачевски посветио неколико списа, од којих су најважнији „Нова начела геометрије са потпуном теоријом паралелних” и „Геометријска испитивања из теорије паралелних линија”².

Да су пак и докази као и сам ред ставова код Лобачевског природнији и логичнији него код Бољаја, ја ћу то овде показати упоређењем њихових списа у том погледу, при чему ћу се у главном ограничити на упоређење двају наведених списа Лобачевскога са списом Бољајевим. То ће упоређење бити изведено у следећих шест одељака.

I.

Теорија паралелних.

Теорија паралелних Лобачевскога стоји над Бољајевом како по основној замисли, тако и по извођењу у појединостима. Лобачевски негира директно исти постулат Евклидов у оном облику, у коме га је поставио сам Евклид (упор. N. A. § 93 и G. U. § 16, стр. 8), док Бољај полази од негације тзв. „аксиома паралелности”³. Стога Лобачевски одмах у свој потпуности излаже разлику између разних линија, које полазе из једне тачке ван једне праве (N. A. § 93 и G. U. § 16, стр. 10), док Бољај истина познаје разлику између правих, које се секу и не секу (то се види из доказа Ap. § 3), али је не образлажува изблике. Од две дефиниције паралелних линија, које се налазе код Лобачевског, Бољај познаје само једну, и то баш стога,

¹ Ја ћу у следећем цитирати Appendix према латинском издању мађарске академије наука од год. 1902. У познатом француском Hotel-овом преводу („La science absolue de l'espace”, најновије издање од 1912) понеке су фигуре јасније, што ће, где буде потребно, нарочито бити напоменуто. Ја ћу цитирати Appendix скраћено као „Ap.”.

² Први рад изашао је заједно са првом расправом Лобачевскога „Начела Геометрије”, која му осигурава приоритет проналаска, у немачком преводу са опширним коментаром Fr. Engel-а под насловом „Neue Anfangsgründe der Geometrie etc.” у N. I. Lobatschewskij „Zwei geometrische Abhandlungen etc.” 1898, други као немачки оригинал под насловом „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“ 2-te Aufl. 1887. Ја ћу први цитирати скраћено као „N. A.” а други „G. U.”, а остале радове Лобачевскога цитираћу, где то буде потребно, под пуним насловом. Напомињем да ће „G. U.” ускоро изаћи и у српском преводу са мојим опширним коментаром.

³ Питање о надмоћности Лобачевскога у овој тачци ја ћу опширно расправити на другом месту.

што му није изближе била позната разлика између линија, које се секу и не секу.¹

Докази за поједине ставове о паралелним као и сам ред тих ставова код Лобачевског је и природнији и логичнији. Истина, ни код Лобачевског није тај ред у оба списка подједнако логичан и природан, али кад се оба списка посматрају заједно, они се у овом погледу као и у погледу природности доказа срећно допуњују. Тако доказ о одржању ознаке паралелизма једне праве у односу на другу код Лобачевског је и простији и природнији (N. A. § 95 и G. U. § 17 стр. 11) од доказа код Бољаја (Ap. § 20). Доказ о узајмности паралелизма двеју паралелних код Лобачевског је тако исто природнији од оног код Бољаја, јер док се овај доказ код Лобачевског заснива у главном на доказу ранијег става и дефиницији паралелних (N. A. § 96 и G. U. § 18²), док је Бољај доказује тек на основу трију нарочито за тај циљ изведених ставова (§§ 3, 4 и 5 Ap.), од којих је истина први потребан за потпун доказ става, што је у доказу Лобачевскога превиђено, али остала два престављају извештачен, заобилазан пут³.

¹ Те две дефиниције Лобачевскога гласе :

1. Права линија која је гранична линија, које се са датом правом секу и не секу, паралелна је са том правом.

2. Једна права линија паралелна је са другом датом правом, ако свака друга права, која полази из исте тачке, при најмањем угаоном одступању на страни дате праве сече ову праву.

Од ове две дефиниције прва је ужа, јер важи само за паралелне у неевклидовој равни, пошто је у Евклидовој равни паралелна једина права, која дату праву не сече. Друга дефиниција општија је, она обухвата и Евклидов случај. Обе дефиниције налазе се код Лобачевског у N. A. § 93 и G. U. § 16 стр. 7 и 10. Док Бољај познаје само другу дефиницију (Ap. § 1).

² Доказ у N. A. толико је природнији и логичнији од онога у G. U., колико се у овом последњем узима у помоћ кретање фигура, а то у чистој геометрији није допуштено.

³ Да овде Лобачевски у своме доказивању иде простијим путем од Бољаја, то признаје индиректно и сам Бољај у својим „Примедбама на геометријска испитивања и т. д. Лобачевскога“ (упор. немачки извод тих „Приметаба“ у најновијем делу P. Stäckel-a „Wolfgang und Johann Bolayis, geometrische Untersuchungen“ 1-er Theil 1913, стр. 142) тиме, што у планираној новој обради неевклидове геометрије хоће да измени ред параграфа у Appendix-у, који се односи на паралелне линије, и да за доказ узајмности паралелизма употреби доказ Лобачевскога.

Докази става о паралелизму двеју правих, које су паралелне са трећом, у главном су идентични код Лобачевског и Бољаја (G. U. § 25¹, Ар. § 7) у случају, кад све три праве леже у једној равни, само што су Бољајеви докази непотпунији (стога се и виде простији). Доказ за случај, кад праве не леже у истој равни, код Лобачевског је (G. U. § 25) несумњиво простији и логичнији од Бољајева (Ар. § 7). Интересантно је напоменути како Болај сматра, да би обрнуто доказивање првог случаја на основу другог било елегантније и простије (упор. његову примедбу уз Ар. § 7), из чега се види да је основна тенденција Бољајева духа управљена више на то, да се брзо дође до истинитих ставова, него да се они природним путем изведу, пошто је неприродно ставове у равни доказивати ставовима у простору².

Став о збиру углова у троуглу и његова веза са петим постулатом Евклидовим код Лобачевског је (који се овде поводио за Лежандром) изведен директније (N. A. § 90, 91 и 101, G. U. §§ 19—22), док је Бољајево извођење потпуно индиректно, јер по њему став о суми углова у троуглу неевклидове равни следује из тригонометријских формула за троугле (упор. позивање на § 31 у § 41 Ар.).

II.

Г р а н и ч н а л и н и ј а и п о в р ш и н а.

У овоме одељку постоји релативно највеће слагање и у извођењима и у резултатима између Лобачевског и Бољаја. У N. A. говори Лобачевски о граничној линији и површини у §§ 112—122, док §§ 100 и 102 чине њихову подлогу, у G. U. у §§ 29—34, док §§ 26—28 чине њихову подлогу. Болај се бави граничном линијом и површином у §§ 11, 12, 16—24 свога Appendix-а, док §§ 8, 9 и 10 чине подлогу њихову.

У целини узев, и овде је пут Лобачевског природнији и логичнији од Бољајева — нарочито то важи за извођење у N. A. —, али и у томе погледу Болај мало изостаје иза њега, шта више, премаша га у појединим тачкама. Да је гранична линија граница, којој тежи круг у неевклидској равни, тај је став непознат Бољају, док

¹ Доказ у N. A. § 99 за случај, кад су праве дате у истој равни, компликованији је.

² Доста у својој немачкој обради Appendix-а (која је публикована у поменутом делу P. Stackel-a, 2-ter Teil, 1913, стр. 188), Болај је извео ово обрнуто доказивање.

он непосредно следује из саме дефиниције граничне линије код Лобачевског (N. A. § 114 у вези са § 112, G. U. § 32 у вези са § 31) — дефиниција, коју даје и Бољај (Ар. § 11).¹ Да пак на граничној површини важи Евклидова геометрија, кад се граничне линије сматрају за праве, то Лобачевски изводи на основу става о збиру равних углова које склапају три равни, чији су пресеци паралелни (N. A. § 100, G. U. § 28), док Бољај доказује најпре важење петог постулата Евклидова (и то у облику у коме га је Евклид формулисао) на граничној површини (Ар. § 21), па из тога изводи непосредно закључак о важењу евклидове геометрије на њој. И ако је доказ петог постулата на граничној површини (на основу става у § 9 Ар.) релативно компликован, ипак је он простији од одговарајућег доказа код Лобачевског, тако да овде имамо посла са једним од оних ретких случајева, у коме морамо признати, да је Бољај поступао простије од Лобачевског, и ако је метод и једног и другог поједнако геометријски и подједнако природан.

III.

Тригонометрија.

Нигде разлика у извођењу несвклидске геометрије није већа између Бољаја и Лобачевског као у области Тригонометрије. Та је разлика у исто доба типска за психолошку структуру обају математика. Пут Бољајев наима овде је и дужи и неприроднији од пута Лобачевскога, у тим дедукцијама показује Бољај мајсторство на пољу формално-техничког математичког доказивања, док Лобачевски показује у њима своје мајсторство у логички консеквентном извођењу геометријски зависних ставова по угледу на класичну синтетичко-геометријску методу Евклидових „Елемената“. Да би ово показао, ја ћу се нешто дуже задржати на њиховој тригонометрији.

У Appendix-у §§ 25—31 излажу тригонометрију, и то се Бољај ограничава на извођење основних једначина за правоугле право-

¹ У својим „Примедбама на геометријска испитивања и. т. д. Лобачевскога“ Бољај (н. н. м. стр. 146) вели: „Die Bemerkung, F' (гранична површина) sei eine Kugel und L ein „Kreis von unendlichem Radius, ist in dem Sinne, dass Kugel und Kreis einen Mittelpunkt haben, falsch“. Али Лобачевски нигде и не тврди, да је гранична површина идентична са свију страна затвореном куглом бесконачног полупречника, пити да је гранични круг идентичан са затвореном кружном линијом бесконачно великог полупречника. Али далеко би нас одвело, кад бисмо хтели овде изближе улазити у сам појам бесконачности.

линијске троугле. §§ 21—24 у вези са § 18 чине подлогу његове тригонометрије.

Цела Бољајева тригонометрија заснива се на ставу доказаном у § 18, по коме периферија круга у граничној површини пада у једно са периферијом круга у неевклидској равни, чији је пресек са граничном површином овај први круг (као што периферија круга на површини кугле пада у једно са периферијом круга у евклидовој равни, која сече куглу). Пошто је затим у § 24 (на основу §§ 22 и 23)

да је однос Y двају граничних лукова, чије је остојање $y = X^{\frac{y}{x}}$ кад се са X означи тај однос за два лука, чије је остојање јединица дужине x , Бољај у § 25 доказује, на основу поменутог става из § 18, став, да се у правоугаљном троуглу периферије кругова, чији су полупречници равни странама, односе као синуси супротних углова. Тај доказ он изводи узимајући у помоћ гранични троугао и узимајући у обзир важеће евклидове геометрије на граничној површини (§ 21). У § 26 он затим врло просто и мајсторски изводи доказ за тврђење, да је сферна тригонометрија независна о V-ом постулату.

У § 27 доказује Бољај на основу става у § 25 и узимања у обзир линије једнаког остојања (која се овде први пут јавља) став, да је однос између једне праве и њене линије једнаког остојања константан и $= 1 : \sin z$, ако се са z означи угао паралелизма, који одговара остојању тих двеју линија. У § 28 изводи Бољај опет на основу става у § 25, да је однос X двају граничних лукова за раздајину равну јединици дужине x раван $\sin u : \sin v$, ако су u и v углови које склапа дијагонала са осовинама у четвороуглу, чије су стране гранични углови и одсечци осовина одговарајућих граничних линија.

На основу овог последњег става и ранијих ставова о граничним линијама изводи Бољај у § 29-ом основну формулу неевклидске тригонометрије, однос између угла паралелизма и одговарајуће дистанције. Он ту формулу међутим изводи у овом §-у у још непотпуној форми, наиме у форми :

$$Y = \cotg \frac{1}{2} u,$$

где Y означава однос двају граничних лукова, чија је раздајина u равна дужини праве, која одговара углу паралелизма u . Тек у § 30

Бољај довршује фундамент своје тригонометрије тиме што доказује став, да је у формули § 24 :

$$Y = I^{\frac{y}{i}}$$

$I = e$ (т. ј. бази Неперових логаритама), када је $i = \frac{r}{\operatorname{tg} z}$, где r означава полупречник граничног круга чија је тетива $2y$, а z комплементни угао углу паралелизма за y (доказ је у главном изведен на основу става доказана у § 27). Доказом овог последњег става с једне стране је доказано, да је Y пређашњег §-а $= e^{\frac{y}{i}}$, чиме је основна формула неевклидске тригонометрије :

$$\cotg \frac{1}{2} u = e^{\frac{y}{i}}$$

изведена у потпуној форми, а с друге стране — што је главни циљ § 30 — изведена је формула за величину периферије круга у неевклидској равни. Из $r = itgz$ и $Oy = 2r\pi$ следује наиме :

$$Oy = \pi i \left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}} \right).$$

Из ове последне формуле и става доказана у § 25 изводи Бољај напоследку у § 31 три основне тригонометријске једначине за правоугли праволинијски троугао, из којих се све остале дају извести. Његове тригонометријске формуле имају то преимућство, што су у њима изражени непосредно сами односи између страна и углова у правоуглим троуглима¹.

Лобачевски посвећује неевклидској Тригонометрији у N. A. §§ 133—146 у G. U. §§ 35—37. Ми ћемо ток његових извођења изложити овде по G. U., а N. A. узећемо у обзир само колико оступају од G. U.

У § 35 ових последњих полази Лобачевски од посматрања једне фигуре, у којој правоугли троугао неевклидове равни, сферни троугао на кугли тродимензионалног неевклидова простора и гранични троугао имају улогу. Он утврђује кореспонденцију, која

¹ Упореди и примедбе Poiné-ове уз § 31 Ap. у његовом преводу, где су у горње формуле уведене хиперболичне функције страна.

постоји између датог правоуглог и сферног троугла, а затим тврди, да осим датог истом сферном троуглу одговара још један правоугли троугао¹. На основу важења евклидове геометрије на граничној површини преноси Лобачевски тригонометријске функције, које постоје између страна и углова граничног правоуглог троугла, на раван правоугли троугао. То он међутим чини развијајући поменуту тродимензионалну фигуру у дводимензионалну, при чему узима у обзир односе, који постоје међу граничним луцима и сегментима њихових осовина. На тај начин он чисто геометријски долази, релативно брзо и лако, до пет основних тригонометријских формула за правоугли троугао. На основу кореспонденције, која постоји између сферног и правоуглог троугла, Лобачевски из ових формула одмах изводи и пет одговарајућих формула за сферни правоугли троугао у неевклидовом троуглу, које се показују идентичне са одговарајућим формулама у Евклидовом простору, чим је утврђена независност сферне тригонометрије о V-ом постулату.

У § 36, чији је главни задатак извођење основне формуле неевклидске тригонометрије, Лобачевски најпре поставља две једначине за углове паралелизма код правоуглог троугла (и то између углова паралелизма, који одговарају странама његовим, и углова паралелизма, који су идентични са оштрим угловима правоуглог троугла), па затим из њих и једне од њих пет тригонометријских формула утврђених у прошлом §-у изводи чисто аналитичким путем да је :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x},$$

где је $\Pi(x)$ угао паралелизма за дужину x , а e база Неперових логаритама (по вољи узета).

У § 37 показује Лобачевски најпре, како се, ако су познате неке од пет формула у § 35, дају друге из њих извести (у N. A. § 141 стр. 222 Лобачевски примећује, да се свих десет једначина за правоугле троугле могу, непосредно и посредно, извести из једначина за углове паралелизма код правоуглог троугла — N. A. § 136 стр. 211 — и основне тригонометријске формуле за однос између угла

¹ Ближи доказ за ово тврђење Лобачевски је извео у својој Пангеометрији. Упор. „Pangeometrie“ übers. v. H. Liebmann у Ostwalds „Klassiker der exakten Wissenschaften“ 2—4 Aufl. 1912, стр. 13 и д. Упор. и N. A. § 136.

паралелизма и одговарајуће дужи). Растављањем оштроуглог троугла на два правоугла и применом основне тригонометријске формуле доспева Лобачевски даље чисто аналитичким путем до четири основне тригонометријске формуле за оштроугли праволинијски троугао, које одговарају четирма основним случајевима за те троугле у неевклидовој равни. Напошетку у § 37 примећује Лобачевски још, да ове четири једначине за праволинијске троугле неевклидове геометрије прелазе у једначине за троугле евклидове геометрије, кад се претпостави, да су стране троуглове врло мале (управо бескрајно мале). Тако исто примећује Лобачевски и да те четири једначине прелазе у одговарајуће једначине за сферни оштроугли троугао, кад се стране троуглове у њима помноже са $\sqrt{-1}$.

Ако сада упоредимо тригонометрију Лобачевскога са Бољајевом, одмах нам удара у очи, да је основна замисао њихова-посве различна: док Бољај поставља релацију између п е р и ф е р и ј е к р у г о в а описаних странама и синуса супротних углова у правоуглом троуглу, докле кореспонденција с ф е р н о г п р а в о у г л о г т р о у г л а с а праволинијским чини основ тригонометрије Лобачевскога. И један и други служе се граничним троуглом за извођење даљих ставова преносећи тригонометријске функције са граничног на праволинијски троугао¹, али сам резултат тога преношења код обају је битно различан (наравно по форми својој). На основу кореспонденције сферног и праволинијског троугла Лобачевски, узимајући у обзир особине граничних лукова, непосредно и без икакве тешкоће долази до основних једначина за правоугли праволинијски троугао. Бољај напротив тек заобилазним путем, узимајући у помоћ основну тригонометријску формулу и изводећи формулу за периферију круга, долази до тих истих једначина. Истина, формуле Бољајеве дају нам релације између страна и углова троуглових, док нам формуле Лобачевскога дају непосредно само релације међу угловима (угловима паралелизма, који одговарају странама троугловим, и угловима троугловим), али оне се лако дају свести на први облик². Изводити тригонометријске формуле на основу периферије

¹ Ово се види из сличности фигуре у § 25 Ар. и фиг. 28 у G. U. Треба напоменути, да Бољај већ при извођењу свог основног става употребљава гранични троугао (упор. нарочито фиг. § 25 у Појел-овом преводу Appendix-а, фигуру која је идентична са фиг. 28 у G. U.), док то Лобачевски не чини.

² То ће бити, ако уведемо хиперболичне функције и тригонометријске функције углова паралелизма помоћу основне тригонометријске формуле сведемо на њих.

ѣрије кругова описаних странама троугловим као полупречницима несумњиво је оригинална мисао, али то извођење није нимало природно, пошто су тригонометријске функције у геометрији односи између страна и углова (и ако су то оне у неевклидовој геометрији само као гранични односи); треба их дакле и изводити само узимајући у обзир стране и углове троуглове, што Лобачевски и чини доводећи у везу сферне, првобитнијске и граничне троугле. У овој тачци дакле Лобачевски стоји несумњиво над Бољајем, и ако се Бољају мора признати техничка виртуозност на вештачком путу, који је себи изабрао¹.

IV.

Константа и опште становиште.

У основној формули неевклидове тригонометрије јавља се код Бољаја једна константа, које код Лобачевског нема. Ако у Бољајевој формули угао паралелизма означимо знаком Лобачевскога, онда та формула по Бољају гласи :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi (p) = e^{-\frac{p}{k}},$$

¹ Надмоћност тригонометрије Лобачевскога над Бољајевом види се и из велике поште, с којом Бољај говори о њој. У својим поменутих „Примедбама и т. д.“ (н. н. м. стр. 147) Бољај овако почиње свој коментар § 35 G. U. : „Wie im Appendix der § 29 gewiss einer der wesentlichsten Punkte ist, so beginnt hier Lobatschefskijs bedeutendste Originalität und seine wichtigste Abweichung vom Appendix. Und man muss zugeben, dass sein Werk, besonders von hier an, ein schöpferisches Genie verrät, und dass der Weg, den er befolgt, besonders von hier an, und das Ergebnis, zu dem er geführt wird, ihn ohne Zweifel leicht auf einmal zu den Mathematikern ersten Ranges erhebt. Seine Hauptidee ist klassisch. Mit feinem Takte sucht und findet er am richtigen Ort, in einem wohlversteckten Winkel die Wahrheit, und wenn er auch an manchen Stellen langwierig-verwickelt sich abmüht und tatsächlich ziemlich weit zurückbleibt hinter der Vollkommenheit, die erwünscht ist und die ich auch erreicht habe(? !), so muss man seine Arbeit doch als ein Meistermerk anerkennen.“

Надмоћност тригонометрије Лобачевскога види се и из тога, што је Н. Liebmann, најоригиналнији данашњи представник неевклидове геометрије, за основ својих тригонометријских извођења узео, с извесним модификацијама, полазну тачку геометрије Лобачевскога (упор. његову „Nichteuklidische Geometrie“ 2-te Aufl. 1912 стр. 37—41).

док је она по Лобачевском :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi (p) = e^{-p}.$$

По Бољају (Ар. § 30) k означава осим тога (види пређашњи одељак) и величину оног остојања двају граничних лукова, за које је њихов однос $= e$. Друкчије речено, e у формули за однос двају граничних лукова s' и s (чија је раздаљина x за јединицу дужине k) :

$$\frac{s'}{s} = e^{-\frac{x}{k}}$$

идентично је са e у основној тригонометријској формули. У G. U. Лобачевски не доказује овај идентитет, али он зна за њега, што се види из његових „Начела Геометрије“ и његове „Пангеометрије“, али у оба случаја e је код њега само по вољи идентифицирано са базом Неперових логаритама, док код Бољаја константа k значи баш ону дужину, за коју је e равно бази Неперових логаритама¹.

Константа k , која се јавља у основној тригонометријској формули и осталим тригонометријским једначинама код Бољаја (као и у формули за однос двају граничних лукова), омогућује Бољаја, да направи разлику између разних система неевклидске геометрије (система S), разлику која је Лобачевском остала непозната. Осим тога та константа омогућује још један прелаз од једначина неевклидске тригонометрије једначинама евклидове тригонометрије поред оног, који је једино наведен код Лобачевског (G. U. § 37): кад се (Ар. § 32 крај) у тим једначинама стави $k = \infty$, т. ј. кад се, да се изразимо модерним језиком, претпостави, да је полупречник кривине неевклидске равни бесконачно велики.

Али и ако је Бољају позната разлика између разних система неевклидских, ипак се нигде код њега не налази тврђење, да се ти системи налазе на површинама разне кривине, — с другим речима: ни код Бољаја ни код Лобачевског нема ни трага идеји, да је раван њихове геометрије једна крива површина². Код Лобачевског

¹ Доказ за идентичност количине e у оба поменуто случаја налази се код Лобачевског у § 22 у „Anfangsgründe der Geometrie“ стр. 33 и „Pangeometrie“, стр. 37 (упор. и поменуто дело P. Stäckel-a, I. Teil, стр. 151 f.).

² У својим „Примедбама и т. д.“ (н. н. м. стр. 157) Бољај, говорећи о тврђењу Лобачевскога при крају § 37 G. U., да једначине за праволинијске троугле

та се идеја није јавила поглавито стога, што он верује у *реалну могућност* неевклидског простора, па пошто је реалан простор *један*, то он узима и да је неевклидски простор *један*; према томе за њега не постоји више неевклидских простора, а то би било потребно па да се одмах изведе њихова кривина. За Бољаја је опет неевклидски простор у првом реду једна математичка концепција, чију *формалну* могућност он испитује тврдећи, да се питање о *реалној* могућности његовој не може решити (Ар. § 33). Али и ако Лобачевски нигде не тврди, да је његова равна крива површина, оно исто тако нигде не тврди ни да је она равна у апсолутном смислу; питање о кривини неевклидског простора изгледа да Бољај и Лобачевски уопште нису себи поставили. Њима је било у првом реду стало до извођења неевклидског система као позитивне математичке доктрине, док су их питања од принципијелне важности слабо интересовала. И ако Бољај, у колико познаје разлику разних неевклидских система, стоји несумњиво над Лобачевским, Лобачевски стоји опет над Бољајем, колико не само поставља питање о *реалној* могућности неевклидског простора, него покушава и да га реши¹.

V.

Линија и површина једнаког остојања.

Док Лобачевски у својим списима спомиње линију једнаког остојања само на једном месту (упор. „Anfangsgründe der Geometrie“ § 24, стр. 34), дотле се она код Бољаја јавља често и чини битни

неевклидске геометрије прелазе у једначине за сферне троугле, кад се стране помноже са $\frac{1}{R} = 1$, примећује, како би се неевклидска равна могла сматрати и за хиперсферу (површину једнаког остојања — види следећи одељак) са имагинарним праволинијским радијусом. Он међутим из овога само закључује, да на хиперсферама важи неевклидска геометрија, а не каже, да би се и равна могла сматрати за криву површину, ма да је ово логичка конвенција из свега тога (упор. и примедбе Бољаје уз § 32 (i. U. о радијусу униформних површина — граничне површине и хиперсфере — н. н. м. стр. 146).

¹ У „Anfangsgründe der Geometrie“ § 15 стр. 22 и д. покушава да реши питање о *реалитету* неевклидског простора израчунавајући, колика би могла бити разлика збира углова у троуглу од $2R$ за троугле астрономских димензија, па налази, да је она мања од стотинског дела секунде (упор. и G. U. § 37 стр. 60). У својим „Примедбама и т. д.“ (н. н. м. стр. 155) Бољај говори о мерењу те разлике у троуглу земаљских димензија па налази, да искуствена посматрања не могу у том погледу ништа одлучити. Метода паралаксе некретница Лобачевскога призната је за једину, која се може употребити за решење овога питања, док је она Бољају остала непозната.

део понеких доказа у Appendix-у (упор. §§ 27, 32, 39, 40, 41). Тако он доказује у Ар. § 39, да је у троуглу, чија је једна страна линија једнаког остојања а друге две праве, збир углова $= 2R$ и др. Површина једнаког остојања спомиње се у § 32 Ар., где Бољај изводи формулу за њену површину¹. У овој тачци дакле Бољај стоји не-сумњиво над Лобачевским; с друге стране опет не треба изгубити из вида, да Бољај, употребљавајући линију једнаког остојања у својим доказима, тиме већином избегава природни начин аргумен-тације (то важи нарочито за доказ у § 27). Ова би тачка за опште становиште била од пресудне вредности, да је Бољај на основу кривине линије једнаког остојања у неевклидској равни закључио на кривину те површине, што он међутим није учинио.

VI.

Конструкција је и остало.

Познато је, да у геометрији, као науци, конструкције имају чисто теоријски значај, да им је циљ да докажу е г з и с т е н ц и ј у извесне фигуре у простору. Како се Лобачевски и Бољај односе наспрам конструкција, то је потпуно коректно изразио Енгел у своме кратком Упоредињу обају математика (у биографији Лобачевскога и. н. м. стр. 392—4); с тога ћемо ми овде просто навести његово мишљење о томе. „In seinem Appendix geht L. Bolay insbesondere auch auf die der nichteuklidischen Geometrie eigenthümlichen Konstruktionsaufgaben ein. Zum Beispiel giebt er sehr elegante Lösungen für die beiden Aufgaben: durch einen gegebenen Punkt die Parallelen zu einer gegebenen Geraden zu ziehen und die Gerade zu zeichnen, die auf dem einen Schenkel eines spitzen Winkels senkrecht steht und zu dem anderen Schenkel parallel ist; auch zeigt er, dass im Falle der nicht-euklidischen Geometrie eine geometrische Quadratur des Kreises möglich ist. In den ‚Neuen Anfangsgründen‘ Lobatschefskijs und in dessen übrigen Arbeiten werden Fragen dieser Art nirgends berührt, nur in der ersten Abhandlung ‚Ueber die Anfangsgründe‘ giebt es Spuren, aus denen mit grosser Wahrscheinlichkeit hervorgeht, dass auch er im Besitze von Konstruktionen war, die zur Lösung der beiden zuerst erwähnten Aufgaben dienen können“

¹ Да на површинама једнаког остојања (хиперсферама) важи неевклидова геометрија, Бољају је такође познато. О томе види цитат из „Приметаба и т. д.“ у примедби 16.

(стр. 394). У овој тачци дакле Бољај стоји несумњиво над Лобачевским, али је она у упоређењу са осталима од спореднијег значаја

Што се тиче аналитичке обраде неевклидове геометрије, и у том погледу дао је Енгел у главном тачну карактеристику обају математика. „Hinwiederum darf man nicht übersehen, dass bei Lobatschefskij die neue Geometrie gleich in einer für Anwendungen unmittelbar brauchbaren Form erscheint: die zur Berechnung geometrischer Figuren nöthigen Formeln sind systematisch entwickelt, und eine grosse Anzahl dahin gehöriger Aufgaben ist vollständig gelöst. I. Bolyai giebt in dieser Beziehung nur das allernothdürftigste: man sieht zwar, dass er den Gegenstand vollständig beherrscht(?), aber man würde doch noch eine beträchtliche geistige Arbeit aufwenden müssen, wollte man auf Grund der Andeutungen des Appendix selbständig derartige Aufgaben in Angriff nehmen“ (стр. 393). У овој тачци стоји дакле Лобачевски несумњиво над Бољајем.

Тако исто он је над Бољајем и у погледу избегавања употребе континуитета при доказивању, што показује његову синтетичко-геометријску надмоћност у извођењу ставова. И овде се можемо позвати на Енгела. „Das zeigt sich“ вели он „besonders darin, dass er (Лобачевски), bewusst oder unbewusst, in den ‚Neuen Anfangsgründen‘ von der Stetigkeit nur sehr sparsamen Gebrauch macht und dass die Zahl der Stellen, wo er die Stetigkeit benutzt, während sie doch vermieden werden kann, äusserst gering ist. Dagegen hat I. Bolyai zwar auch angefangen, eine grosse und zusammenhängende Darstellung der Geometrie auszuarbeiten Was davon zur Veröffentlichung geeignet ist, wird Stäckel in einiger Zeit der Allgemeinheit zugänglich machen, und es wird sich dann wohl zeigen, dass I. Bolyai bei seiner Darstellung nach ähnlichen Grundsätzen zu Werke gehen wollte, wie sie Lobatschefskij thatsächlich befolgt hat. In dem Appendix freilich hat I. Bolyai unter dem Zwange des Strebens nach äusserster Kürze und Knappheit einen nur allzu ausgiebigen Gebrauch von der Stetigkeit gemacht“ (стр. 393). Стäckел-ова скорашња публикација Бољајеве „Raumlehre“ (у другом делу у примедби 6 поменутог дела) потврдила је претпоставку Енгелову и у исто доба показала, да Бољај није у овом погледу могао достигнути Лобачевскога, што се обоје види из следећих речи Штекелових: „Wenn Engel vermutet, dass I. Bolyai bei seiner Darstellung nach ähnlichen Grundsätzen gehen wollte, wie sie Lobatschefskij

thatsächlich befolgt hat', so wird die im XVIII Kapitel zu besprechende Raumlehre zeigen, dass Johann bei der Durchführung seiner Grundgedanken, die allerdings mande Uebereinstimmung mit Lobatschefskij zeigen, zwar Stetigkeitsbetrachtungen zu vermeiden versucht hat, aber dabei auf Hindernisse gestossen ist, die er nicht überwinden konnte“ (н. н. м. I. Teil, стр. 159f). Као што се види, у овој фундаменталној тачци стоји Лобачевски не-сумњиво над Бољајем, чиме се у исто доба потврђује и тачност основне карактеристике обају математика, коју смо ми дали у уводу и у почетку III. одељка ове расправе.
