

LES LOIS FONDAMENTALES DE L'ADDITION ARITHMÉTIQUE ET LE PRINCIPE DE L'INDUCTION MATHÉMATIQUE

I

Dans son article bien connu « Sur la nature du raisonnement mathématique », — un des plus importants que le grand mathématicien ait écrits, — H. Poincaré s'est efforcé de montrer que l'induction mathématique, « inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique *a priori* »¹.

L'induction mathématique, c'est, d'après Poincaré, la démonstration par récurrence : « On établit d'abord un théorème pour $n=1$; on montre ensuite que s'il est vrai de $n-1$, il est vrai de n et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers ». Mais, pour une raison plus loin développée, nous devons préférer la formule suivante (démonstration par avance) : « On établit d'abord un théorème pour $n=1$; on montre ensuite que s'il est vrai de n , il est vrai de $n+1$ et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers ».

L'essence de ce raisonnement mathématique consiste, d'après Poincaré, en ceci « qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes ».

Et il précise sa pensée de la manière suivante :

« Ce sont bien entendu des syllogismes hypothétiques.

Le théorème est vrai du nombre 1.

Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2.

Donc il est vrai de 2.

Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3.

Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite.

On voit que la conclusion de chaque syllogisme sert de mineure au suivant.

De plus, les majeures de tous nos syllogismes peuvent être ramenées à une formule unique.

Si le théorème est vrai de $n-1$, il l'est de n .

On voit donc que, dans les raisonnements par récurrence, on se borne à énoncer la mineure du premier syllogisme et la formule générale qui contient comme cas particuliers toutes les majeures.

Cette suite de syllogismes qui ne finirait jamais se trouve ainsi réduite à une phrase de quelques lignes » (l. c., p. 20).

Pour illustrer, prenons un exemple. Il s'agit de démontrer le théorème : $1 + 3 + 5 + 7 + \dots +$

$(2n-1) = n^2$. Si le théorème est vrai pour n , il est vrai aussi pour $n+1$, car $1 + 3 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Le théorème est vrai pour $n=2$, car $1 + 3 = 4 = 2^2$. Or s'il est vrai pour $n=2$, il l'est pour $n=3$, etc... Il suffit donc d'énoncer, comme dit Poincaré, la formule générale : si le théorème est vrai pour n , il est vrai pour $n+1$, et la mineure du premier syllogisme : le théorème est vrai pour $n=2$.

L'induction mathématique est, d'après Poincaré, « inaccessible à la démonstration analytique », parce que, en essayant de démontrer la légitimité du raisonnement par récurrence, « on arrivera toujours à un axiome indémontrable qui ne sera au fond que la proposition à démontrer traduite dans un autre langage ». Elle « ne peut nous venir non plus de l'expérience », parce que celle-ci « ne peut atteindre la suite indéfinie des nombres, mais seulement une portion plus ou moins longue mais toujours limitée de cette suite ». Elle n'est donc que l'intuition directe que l'esprit possède de sa puissance « de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible » (l. c., p. 22-24).

Enfin, l'induction mathématique va, d'après Poincaré, dans le même sens que l'induction ordinaire, « c'est-à-dire du particulier au général » (l. c., p. 25).

II

Divers auteurs, mathématiciens et philosophes, ont objecté à Poincaré que l'induction mathématique, malgré sa ressemblance avec l'induction ordinaire, ne va pas du particulier au général, mais, tout comme la déduction syllogistique, du général au particulier¹. La même objection a été faite tout récemment aussi par M. Goblot, dans son *Traité de Logique*².

D'après M. Goblot, l'induction mathématique se compose de deux parties :

1. On *démontre* que, à supposer qu'une propriété soit vraie pour un nombre quelconque n , elle est vraie pour $n+1$;

2. On *vérifie* que la propriété (1) est vraie pour un certain nombre, donc qu'elle est vraie pour le nombre suivant et ainsi de suite indéfiniment.

1. Voir H. POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse*, ch. I, p. 9-28. Le même article, mais plus complet, se trouve dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1894, t. I, p. 371-84.

1. Voir, par exemple, G. MILHAUD, *Le Rationnel*, 1898, ch. IV, p. 126-7, et le compte rendu de M. B. RUSSEL sur le livre de Poincaré, dans *The Mind*, July 1905, p. 414.

2. V. E. GOBLOT, *Traité de Logique*, 1918, p. 270.

« De ces deux parties de la démonstration par récurrence », dit M. Goblot, « M. Poincaré envisage surtout la seconde. Comme il s'agit de comprendre le passage du singulier à l'universel, son attention a surtout été attirée par l'opération qui part du nombre singulier, 1 ou 2 ou quelque autre, et passe au nombre suivant, puis au nombre suivant encore, et ainsi de suite indéfiniment. Mais c'est la première partie du raisonnement qui est la plus importante : c'est mon droit de généraliser que j'ai démontré ».

III

Je trouve qu'en cette controverse, en tant qu'il s'agit de la forme de l'induction mathématique seule admise jusqu'à présent, Poincaré a autant le droit d'affirmer que l'induction mathématique va du particulier au général que ses adversaires celui d'affirmer qu'elle va du général au particulier. En effet, les deux côtés du raisonnement en question — la proposition générale allant de n à $n+1$ et la série indéfinie de syllogismes particuliers allant d'un nombre au nombre suivant — sont inséparablement liés l'un à l'autre et tous deux également essentiels à ce raisonnement dans sa forme usuelle.

IV

Mais on peut aller plus loin ; on peut établir l'existence d'une forme d'induction mathématique dans laquelle la proposition générale disparaît complètement, ou elle se réduit effectivement à une série indéfinie des majeures des syllogismes particuliers. Nous voulons établir l'existence de cette nouvelle forme d'induction mathématique par une considération détaillée du mode de démonstration par l'induction mathématique des lois fondamentales de l'addition arithmétique, ces lois étant les plus simples de l'Arithmétique.

On démontre les deux lois fondamentales de l'addition arithmétique, à savoir la loi de l'associativité :

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

et la loi de commutativité :

$$a + b = b + a,$$

de la manière suivante¹.

Voici d'abord la démonstration du théorème de l'associativité :

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

1. Comp. pour ces démonstrations, H. Poincaré, l'article cité dans la *Revue de Métaphysique*, p. 375-77 ; cependant j'ai donné aux démonstrations de Poincaré une forme plus explicite et plus rationnelle.

Supposons que ce théorème soit vrai pour un nombre fini déterminé n et qu'en outre, la proposition $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ soit considérée comme démontrée ou comme axiomatique. On démontrera alors que :

$$a + [b + (n + 1)] = (a + b) + (n + 1).$$

Preuve. De

$$a + (b + n) = (a + b) + n$$

il s'ensuit immédiatement que :

$$[a + (b + n)] + 1 = [(a + b) + n] + 1.$$

De

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

il s'ensuit alors d'une part que :

$$[a + (b + n)] + 1 = a + [(b + n) + 1] = a + [b + (n + 1)],$$

$$b + n \text{ pouvant être remplacé par } b,$$

et de l'autre :

$$[(a + b) + n] + 1 = (a + b) + (n + 1).$$

Il se vérifie donc que :

$$a + [b + (n + 1)] = (a + b) + (n + 1),$$

si

$$a + (b + n) + (a + b) + n,$$

comme nous l'avons supposé.

Mais comme ce dernier théorème est valable pour

$$n = 1, [a + (b + 1)] \text{ étant } = (a + b) + 1,$$

il sera valable aussi pour $n=2, 3$, etc., et en général. On aura donc :

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

ou a, b, c , désignent des nombres entiers quelconques.

Essayons maintenant d'appliquer le même mode de démonstration à la proposition (supposée axiomatique dans la preuve ci-dessus) :

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

Supposons que ce théorème soit vrai pour un nombre déterminé n et qu'en outre la proposition $a + (1 + 1) = (a + 1) + 1$ soit considérée comme axiomatique. On doit démontrer alors que

$$a + [n + (1 + 1)] = (a + n) + (1 + 1).$$

Preuve. De

$$a + (n + 1) = (a + n) + 1$$

il s'ensuit immédiatement que :

$$[a + (n + 1)] + 1 = [(a + n) + 1] + 1.$$

De

$$a + (n + 1) = (a + n) + 1 \text{ et } a + (1 + 1) = (a + 1) + 1$$

il devrait s'ensuivre alors d'une part que :

$$[a + (n + 1)] + 1 = a + [(n + 1) + 1] = a + [n + (1 + 1)],$$

et de l'autre :

$$[(a + (n + 1)) + 1] = (a + n) + (1 + 1),$$

mais comme il n'est pas possible de remplacer, dans $(a + n) + 1 = a + (n + 1)$, n par $n + 1$ (comme

il était possible, dans la démonstration précédente, de remplacer $b+n$ par b), il est impossible de conclure de :

$$[a + (n + 1)] + 1 \text{ à } a + [n + 1] + 1.$$

La proposition $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ ne peut donc pas être démontrée par l'induction mathématique¹.

La loi de commutativité :

$$a + b = b + a$$

se démontre comme suit.

On suppose comme proposition déjà démontrée :

$$a + 1 = 1 + a.$$

Supposons maintenant que le théorème soit vrai pour $b=n$, on démontrera alors que :

$$a + (n + 1) = (n + 1) + a.$$

Preuve. De

$$a + n = n + a$$

il s'ensuit immédiatement :

$$(a + n) + 1 = (n + a) + 1.$$

De

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1 \text{ et } a + 1 = 1 + a$$

1. La démonstration abrégée de la loi de l'associativité $a + (b + c) = (a + b) + c$ par l'induction mathématique qu'on donne ordinairement (voir, par exemple, O. Stolz, *Theoretische Arithmetik*, 1902, s. 13), n'est pas exacte, parce qu'on pourrait, de la même manière, démontrer aussi la proposition $a + (b + 1) = (a + b) + 1$.

En effet, si nous concluons des équations :

$$[a + (b + c)] + 1 = a + [(b + c) + 1] = a + [b + (c + 1)]$$

$$\text{et } [(a + b) + c] + 1 = (a + b) + (c + 1),$$

en passant par l'équation :

$$[a + (b + c)] + 1 = [(a + b) + c] + 1$$

à l'identité :

$$a + [b + (c + 1)] = (a + b) + (c + 1)$$

nous devrions conclure aussi des équations :

$$[a + (b + 1)] + 1 = a + [(b + 1) + 1] = a + [b + (1 + 1)]$$

$$\text{et } [(a + b) + 1] + 1 = (a + b) + (1 + 1),$$

en passant par l'équation :

$$[a + (b + 1)] + 1 = [(a + b) + 1] + 1$$

à l'identité :

$$a + [b + (1 + 1)] = (a + b) + (1 + 1).$$

Or, pour entrevoir l'inexactitude de la deuxième conclusion et la justesse de la première, il est nécessaire de donner à c , dans la proposition $a + (b + c) = (a + b) + c$, et à b , dans la proposition $a + (b + 1) = (a + b) + 1$, la valeur déterminée n , ce que nous avons fait dans le texte ci-dessus.

Il est intéressant de remarquer que la proposition $a + (1 + 1) = (a + 1) + 1$ n'est pas démontrable même par la démonstration abrégée ordinaire par laquelle $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ est faussement démontrable.

En effet, de :

$$a + (1 + 1) = (a + 1) + 1 \text{ et } 1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1$$

il devrait s'ensuivre, dans cette démonstration,

$$[a + (1 + 1)] + 1 = a + [(1 + 1) + 1] = a + [1 + (1 + 1)],$$

mais comme il n'est pas possible de remplacer, dans

$$a + (1 + 1) = (a + 1) + 1, \text{ } 1 \text{ par } 1 + 1,$$

il est impossible de conclure de

$$[a + (1 + 1)] + 1 \text{ à } a + [(1 + 1) + 1].$$

il s'ensuit d'une part :

$$(a + n) + 1 = a + (n + 1)$$

et de l'autre :

$$(n + 1) + 1 = n + (1 + 1) = n + (1 + a) = (n + 1) + a.$$

Il se vérifie donc que :

$$a + (n + 1) = (n + 1) + a$$

si

$$a + n = n + a.$$

Mais, comme ce dernier théorème est valable pour $n=1$ ($a+1$ étant, par supposition, $=1+a$), il sera valable aussi pour $n=2, 3$, etc., et en général. On aura donc $a+b=b+a$.

Or, tandis que la loi d'associativité

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

n'était pas démontrable, la loi correspondante de commutativité $a+1=1+a$ l'est parfaitement.

Voici sa démonstration.

On suppose comme propositions axiomatiques :

$$1 + 1 = 1 + 1 \text{ et } 1 + (b + 1) = (1 + b) + 1.$$

Supposons que le théorème soit vrai pour $a=n$, on démontrera alors que :

$$(n + 1) + 1 = 1 + (n + 1).$$

Preuve. De

$$n + 1 = 1 + n$$

il s'ensuit immédiatement :

$$(n + 1) + 1 = (1 + n) + 1.$$

De

$$1 + (b + 1) = (1 + b) + 1$$

on a :

$$(1 + n) + 1 = 1 + (n + 1).$$

Il se vérifie donc que :

$$(n + 1) + 1 = 1 + (n + 1)$$

si

$$n + 1 = 1 + n.$$

Mais, comme ce dernier théorème est valable pour $n=1$ ($1+1$ étant $=1+1$), il sera valable aussi pour $n=2, 3$, etc., et en général. On aura donc $a+1=1+a$.

V

Si nous nous demandons maintenant pourquoi la proposition $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ n'est pas démontrable, tandis que la proposition, en apparence plus simple, $a + 1 = 1 + a$ l'est, nous ne pouvons donner une réponse satisfaisante à cette question qu'en nous demandant préalablement : pourquoi la proposition $a + (b + c) = (a + b) + c$ est démontrable et la proposition $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ ne l'est pas.

Dans ce but, nous devons nous rendre compte de la signification exacte de la proposition $a + (b + 1) = (a + b) + 1$. Pour évaluer la somme de

deux nombres a et c , nous devons poser comme définition du nombre entier, $c=b+1$. Mais comment évaluer la somme $a+(b+1)$? En posant d'abord comme postulat (proposition non démontrée) $a+(b+1)=(a+b)+1$. La somme de $a+c$ se ramène donc à la somme $a+b$, b étant le prédécesseur du nombre c dans la série des nombres entiers. On doit appliquer le même raisonnement à la somme de $a+b$, etc., et on doit enfin arriver à poser $b=1$, c'est-à-dire à postuler la proposition $a+(1+1)=(a+1)+1$.

Or, tandis que nous voyons immédiatement que la proposition $a+(1+1)=(a+1)+1$ est un postulat indémontrable, un axiome, nous ne voyons pas encore pourquoi la proposition $a+(b+1)=(a+b)+1$ ne pourrait être déduite de la proposition $a+(1+1)=(a+1)+1$ [de la même sorte que la proposition $a+(b+c)=(a+b)+c$ est déduite de la proposition $a+(b+1)=(a+b)+1$].

Pour entrevoir la raison vraie de cette impossibilité, développons la série indéfinie des propositions particulières, dont la proposition $a+(b+1)=(a+b)+1$ représente la généralisation (la conclusion générale). Nous obtenons :

$$\begin{aligned} a+(1+1) &= (a+1)+1 \\ a+(2+1) &= (a+2)+1 \\ a+(3+1) &= (a+3)+1 \\ &\dots\dots\dots \\ a+(n+1) &= (a+n)+1 \\ &\dots\dots\dots \\ [a+(b+1) &= (a+b)+1]. \end{aligned}$$

Dans cette série, chaque terme représente une proposition particulière, qu'on ne peut pas ramener à la proposition précédente, qui en est indépendante. En effet, essayons de ramener $a+(2+1)=(a+2)+1$ à $a+(1+1)=(a+1)+1$.

Nous aurions :

$$\begin{aligned} a+(2+1) &= a+[(1+1)+1] = a+[1+(1+1)] = \\ &= (a+1)+(1+1) = [(a+1)+1]+1 = [a+(1+1)]+1 = \\ &= (a+2)+1. \end{aligned}$$

Mais cette réduction n'est pas possible, parce que de $a+[1+(1+1)]$ il ne s'ensuit pas $(a+1)+(1+1)$, 1 ne pouvant pas être remplacé par $1+1$ dans $a+(1+1)=(a+1)+1$.

Comme on le voit, la série indéfinie des propositions particulières

$a+(1+1)=(a+1)+1$, $a+(2+1)=(a+2)+1$, etc., est une série de propositions indépendantes.

Développons maintenant dans une série analogue la proposition $a+(b+c)=(a+b)+c$. Nous aurons :

$$\begin{aligned} a+(b+1) &= (a+b)+1. \\ a+(b+2) &= a+[b+(1+1)] = a+[(b+1)+1] = \\ &= [a+(b+1)]+1 = [(a+b)+1]+1 = (a+b)+(1+1) = \\ &= (a+b)+2. \\ a+(b+3) &= a+[b+(2+1)] = a+[(b+2)+1] = \\ &= [a+(b+2)]+1 = [(a+b)+2]+1 = (a+b)+ \\ &+ (2+1) = (a+b)+3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\dots\dots\dots a+(b+n) = (a+b)+n \\ &\dots\dots\dots [a+(b+c) = (a+b)+c]. \end{aligned}$$

Comme on le voit, tandis que, dans le premier cas, la proposition $a+(2+1)=(a+2)+1$ était complètement indépendante de la proposition $a+(1+1)=(a+1)+1$, dans le deuxième, la proposition $a+(b+2)=(a+b)+2$ dépend de la proposition précédente $a+(b+1)=(a+b)+1$ et en dérive analytiquement; la proposition $a+(b+3)=(a+b)+3$ de la proposition précédente $a+(b+2)=(a+b)+2$, et en général chaque proposition suivante dérive analytiquement de la proposition précédente dont elle présuppose la validité.

La raison dernière de l'impossibilité d'une démonstration, par le principe de l'induction mathématique, de la loi d'associativité $a+(b+1)=(a+b)+1$ et celle de la possibilité de cette démonstration pour la loi d'associativité $a+(b+c)=(a+b)+c$ sont maintenant claires. La deuxième loi peut être ramenée à une série indéfinie de propositions particulières dont chacune suppose la vérité de la précédente et en dérive, tandis que dans la série indéfinie de propositions particulières qui correspond à la première loi, chaque proposition est indépendante de la précédente.

VI

Mais, en développant chacune de ces deux propositions générales dans une série indéfinie de propositions particulières, nous avons, évidemment, mis à jour deux nouvelles formes de l'induction mathématique. La série indéfinie, dont la proposition $a+(b+1)=(a+b)+1$ représente la conclusion générale, est composée de propositions particulières indépendantes: nous appellerons cette forme de l'induction mathématique *l'induction directe à membres indépendants*. La série indéfinie, dont la proposition $a+(b+c)=(a+b)+c$ représente la conclusion générale, est, au contraire, composée de propositions particulières dépendantes et nous appellerons la forme correspondante de l'induction mathématique *l'induction directe à membres dépendants*. Par opposition à ces deux formes de l'induction mathématique directe, l'induction mathématique connue jusqu'à présent représente *l'induction mathématique indirecte*, parce qu'on y établit des conclusions en partant de la validité hypothétique de la proposition générale à démontrer et non en allant d'une proposition particulière à l'autre, comme dans les deux formes de l'induction mathématique directe.

VII

Appliquons maintenant le même procédé aux lois de commutativité

$$a + b = b + a \text{ et } a + 1 = 1 + a.$$

La première de ces deux lois, développée en une série indéfinie de propositions particulières, possède l'aspect suivant :

$$\begin{aligned} a + 1 &= 1 + a \\ a + 2 &= a + (1 + 1) = (a + 1) + 1 = (1 + a) + 1 = \\ &= 1 + (a + 1) = 1 + (1 + a) = (1 + 1) + a = 2 + a. \\ a + 3 &= a + (2 + 1) = (a + 2) + 1 = (2 + a) + 1 = \\ &= 2 + (a + 1) = 2 + (1 + a) = (2 + 1) + a = 3 + a. \\ &\dots\dots\dots \\ a + n &= n + a \\ &\dots\dots\dots \\ &[a + b = b + a]. \end{aligned}$$

La deuxième se résout dans la série indéfinie suivante :

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= 1 + 1 \\ 1 + 2 &= 1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1 = 2 + 1 \\ 1 + 3 &= 1 + (2 + 1) = (1 + 2) + 1 = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 \\ &\dots\dots\dots \\ 1 + n &= n + 1. \\ &\dots\dots\dots \\ &[1 + a = a + 1]. \end{aligned}$$

Comme on le voit, chacune de ces deux séries représente l'induction directe à membres dépendants, et c'est pour cette raison seulement que la proposition $a + 1 = 1 + a$ est démontrable, tandis que la proposition associative $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ ne l'est pas.

VIII

Revenons maintenant à la discussion entre Poincaré et ses adversaires. Comme nous l'avons remarqué, dans l'induction mathématique indirecte, la proposition générale allant de n à $n + 1$ et la série indéfinie de syllogismes particuliers allant d'un nombre au nombre suivant, sont inséparablement liées l'une à l'autre. Or, dans les cas démontrables de lois d'associativité et de commutativité, l'induction mathématique indirecte étant remplaçable par l'induction mathématique directe à membres dépendants, il est aisé d'entrevoir que, dans cette dernière, la proposition générale n'entre pas comme majeure dans les syllogismes particuliers (dans l'induction mathématique directe à membres indépendants, il n'y a pas évidemment de syllogismes particuliers).

Illustrons cette différence des deux formes de l'induction mathématique renfermant des syllogismes particuliers par la loi de commutativité $1 + a = a + 1$. Voici la série indéfinie des syllogismes particuliers qui correspond à l'induction mathématique indirecte :

I

Si le théorème $1 + a = a + 1$ est valable pour a , il est valable pour $a + 1$.

Le théorème $1 + a = a + 1$ est valable pour $a = 1$.

Le théorème $1 + a = a + 1$ est valable pour $a = 2$.

II

Si le théorème $1 + a = a + 1$ est valable pour a , il est valable pour $a + 1$.

Le théorème $1 + a = a + 1$ est valable pour $a = 2$.

Le théorème $1 + a = a + 1$ est valable pour $a = 3$, etc., etc...

Donc le théorème est valable en général.

Voici, d'autre part, la série indéfinie des syllogismes particuliers qui correspond à l'induction mathématique directe à membres dépendants :

I

Si $1 + 2 = 2 + 1$, $1 + 3$ est égal à $3 + 1$.

$$1 + 2 = 2 + 1$$

Donc $1 + 3 = 3 + 1$.

II

Si $1 + 3 = 3 + 1$, $1 + 4$ est égal à $4 + 1$.

$$1 + 3 = 3 + 1.$$

Donc $1 + 4 = 4 + 1$.

etc., etc...

Donc $1 + n$ est égal à $n + 1$ et, en général, $1 + a = a + 1$.

Comme on le voit, la majeure des syllogismes particuliers dans le premier cas est la même dans tous ces syllogismes : c'est la proposition générale hypothétique : si le théorème est vrai pour a , il est vrai pour $a + 1$. Dans le deuxième cas, la majeure de chaque syllogisme particulier est différente de la majeure du syllogisme précédent et représente une proposition particulière hypothétique, et la majeure générale de l'induction mathématique indirecte n'est qu'une expression sommaire de ces propositions particulières hypothétiques.

Par conséquent nous avons droit d'affirmer la disparition complète de la proposition générale

1. Comme on le voit, il y a, par rapport à l'exemple cité, une discordance entre la série des syllogismes particuliers correspondant à l'induction mathématique indirecte et la série de ces syllogismes correspondant à l'induction mathématique directe : la mineure du premier syllogisme, c'est l'identité $1 + 1 = 1 + 1$ dans le premier cas et l'identité $1 + 2 = 2 + 1$ dans le deuxième cas. La raison de cette différence se trouve dans le fait qu'en développant la série indéfinie de propositions particulières correspondant à la proposition générale $1 + a = a + 1$, on voit que la proposition $1 + 2 = 2 + 1$ ne provient pas analytiquement de la proposition $1 + 1 = 1 + 1$, qu'elle en est indépendante, la dépendance de propositions successives l'une de l'autre ne commençant qu'à partir du nombre 2.

hypothétique de l'induction mathématique indirecte dans la série indéfinie de syllogismes de l'induction mathématique directe à membres dépendants.

IX

Regardons maintenant de plus près le procédé logique de cette dernière sorte d'induction mathématique par comparaison avec l'induction ordinaire, toutes deux représentant, par opposition à la déduction syllogistique, le passage du *particulier au général* (de cas particuliers à la proposition générale).

La première différence consiste en ceci : tandis que, dans l'induction ordinaire, chaque terme particulier est *indépendant* de l'autre, c'est la *dépendance* d'un terme du terme précédent (chaque syllogisme suivant présupposant la validité du syllogisme précédent ou, pour mieux dire, la conclusion d'un syllogisme supposant la vérité de la conclusion du syllogisme précédent), qui caractérise notre induction.

L'induction mathématique directe à membres dépendants diffère ensuite de l'induction ordinaire par le nombre *illimité* des cas particuliers qu'elle embrasse, tandis que ce nombre, quoique pouvant être très grand, reste toujours limité dans l'induction ordinaire.

Enfin, l'induction mathématique directe à membres dépendants est, par opposition à l'induction ordinaire, caractérisée par la *certitude absolue* de sa conclusion générale, tandis que l'induction ordinaire n'atteint jamais, dans sa conclusion, cette certitude absolue.

D'où vient la certitude absolue de l'induction mathématique directe à membres dépendants ? Evidemment, elle est le résultat des deux caractères premiers par lesquels cette induction diffère de l'induction ordinaire, à savoir de la *dépendance* des membres successifs et de l'*illimitation* de leur nombre.

En effet, quand nous établissons la validité d'une règle mathématique se rapportant aux nombres entiers par l'induction ordinaire, nous constatons la validité de cette règle dans un nombre de cas particuliers sans établir aucun lien nécessaire entre le cas suivant et le cas précédent. Si nous affirmons, par exemple, que la somme de n premiers nombres impairs est égale à n^2 en partant de cas particuliers :

$$\begin{aligned} 1 + 3 &= 4 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2 \end{aligned}$$

nous ne sommes sûrs de la validité de cette règle que pour le nombre de cas constatés ; nous n'avons aucun droit de l'élever en règle générale, de l'affirmer pour *tous* les nombres entiers.

Mais si nous constatons la même règle en montrant la dépendance d'un cas particulier du cas précédent, c'est-à-dire si nous écrivons :

$$\begin{aligned} 1 + 3 &= 1 + (2 \cdot 2 - 1) = 2 \cdot 2 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 &= 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = (2 + 1)^2 = 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = (3 + 1)^2 = 4^2 \end{aligned}$$

nous sommes alors sûrs que la règle est générale, parce que le nombre impair étant par définition la somme du nombre pair précédent et de l'unité, nous pouvons tirer comme conclusion de la série en question la proposition :

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Dans cette proposition, n désigne un nombre fini *déterminé*. Mais que la proposition soit valable pour un nombre fini *quelconque*, c'est-à-dire qu'il s'agisse d'une proposition générale, cela s'ensuit seulement de la prolongation à l'infini de la série des nombres entiers, ou, comme dit Poincaré, de la capacité de notre esprit de réaliser, dans un seul acte de pensée, cette série indéfinie des nombres entiers¹.

Cependant, on pourrait objecter : la dépendance d'un cas particulier au cas précédent et la réalisation idéale de la série indéfinie des nombres entiers ne suffisent pas pour rendre valable la proposition générale. On dira : comment savoir que la dépendance constatée dans un *certain* nombre de cas *au commencement* de la série indéfinie des nombres entiers, dans notre exemple, se maintiendra à travers toute cette série, si l'on ne suppose pas comme démontrée préalablement la proposition générale $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$?

Pour enlever à cette objection toute sa force, nous nous rapporterons à un exemple plus simple que l'exemple ci-dessus. Prenons la loi de commutativité $a + 1 = 1 + a$. Nous connaissons la série indéfinie qui y correspond :

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= 1 + 1 \\ 1 + 2 &= 1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1 = 2 + 1 \\ 1 + 3 &= 1 + (2 + 1) = (1 + 2) + 1 = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 \\ &\dots \dots \dots \\ 1 + n &= n + 1 \end{aligned}$$

Par opposition à l'exemple ci-dessus, ce sont ici *deux* propositions générales qu'on devait dé-

1. Cet acte de pensée ne doit pas être conçu comme réalisation *effective* de la série infinie des nombres entiers, l'infini actuel de cette série n'étant pas concevable pour notre esprit que *négativement*, c'est-à-dire comme la prolongation à l'infini de cette série, mais comme une prolongation dont la *nécessité intrinsèque* est aperçue par notre esprit. Nous sentons, en effet, que dans cette série, nous pouvons nous arrêter à un membre *déterminé* n , autrement dit, que nous pouvons former une sous-série finie, déterminée des nombres entiers successifs à partir du nombre *un* ; mais nous sentons aussi qu'il n'est pas nécessaire de s'arrêter définitivement nulle part, que la série ne possède pas un membre dernier, que nous pouvons atteindre un nombre fini *quelconque* a en prolongeant la série.

Cette remarque peut servir en même temps de réponse aux remarques critiques de M. Goblot (*l. c.*, p. 271 s.), concernant « l'intuition du nombre pur » de Poincaré.

montrer (ou dont on aurait à regarder *une* comme axiomatique), à savoir la proposition $1+(b+1)=(1+b)+1$ et la proposition $1+b=b+1$. Mais la première ne peut pas, comme nous l'avons vu, être démontrée, justement parce qu'elle n'est que l'expression sommaire de la série indéfinie à membres indépendants :

$$\begin{aligned} 1+(1+1) &= (1+1)+1 \\ 1+(2+1) &= (1+2)+1 \\ 1+(3+1) &= (1+3)+1 \\ &\dots\dots\dots \\ 1+(n+1) &= (1+n)+1 \end{aligned}$$

La deuxième proposition est ici la proposition à démontrer elle-même et, la proposition $1+(b+1)=(1+b)+1$ n'étant que l'expression sommaire d'une série indéfinie de propositions particulières, elle doit l'être évidemment aussi.

Or, s'il est vrai que dans le cas de la loi de commutativité $a+1=1+a$, la proposition générale $1+(b+1)=(1+b)+1$ n'est que l'expression sommaire (ou la conclusion générale) d'une série indéfinie de propositions particulières, la proposition $n^2+2n+1=(n+1)^2$ peut, elle aussi, n'être que l'expression sommaire d'une série indéfinie de propositions particulières.

Il en est ainsi en effet. Développons l'expression $(n+1)^2=n^2+2n+1$, dans une pareille série et nous aurons :

$$\begin{aligned} (1+1)^2 &= (1+1)(1+1) = (1+1)1 + (1+1)1 \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = \\ &= 1^2 + (1+1)1 + 1^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1^2 \\ (2+1)^2 &= (2+1)(2+1) = (2+1)2 + (2+1)1 = \\ &= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2^2 + (1+1) \cdot 2 + 1^2 = 2^2 \\ &\quad + 2 \cdot 2 + 1^2 \\ (3+1)^2 &= (3+1)(3+1) = (3+1)3 + (3+1)1 = 3 \cdot 3 \\ &\quad + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3^2 + (1+1)3 + 1^2 = 3^2 \\ &\quad + 2 \cdot 3 + 1^2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Comme on le voit, les propositions particulières dont se compose cette série sont indépendantes l'une de l'autre, comme les propositions correspondantes de la proposition $1+(b+1)=(1+b)+1$. Mais, tandis que cette dernière proposition (et chaque proposition particulière qui y correspond) est une proposition axiomatique, la proposition $(n+1)^2=n^2+2n+1$ est une proposition analytiquement démontrable, comme chaque proposition particulière correspondante.

Et en général, on peut affirmer que, comme chaque proposition qu'on peut démontrer par l'induction mathématique indirecte présuppose une proposition générale dont elle provient, cette dernière proposition (proposition-raison) doit être ou démontrable elle aussi par l'induction mathématique indirecte ou analytiquement démontrable ou axiomatique. Il se peut aussi que la proposition-raison soit démontrable analytiquement, mais qu'en cette démonstration entre une autre proposi-

tion (proposition-raison de deuxième ordre) qui est démontrable par l'induction mathématique indirecte¹; et d'autres combinaisons de ce genre sont encore imaginables.

1. En voici un exemple. La proposition

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

peut être démontrée par l'induction mathématique indirecte de la manière suivante.

Supposons que le théorème soit vrai pour n , sa validité pour $n+1$ dérive de la proposition générale (proposition-raison) :

$$\begin{aligned} (1+2+3+\dots+n)^2 + (n+1)^2 &= [1+2+3+\dots+n+(n+1)]^2, \\ \text{qu'on démontre analytiquement comme suit :} \\ (1+2+3+\dots+n)^2 + (n+1)^2 &= (1+2+3+\dots+n)^2 + (n+1)^2(n+1) = \\ &= (1+2+3+\dots+n)^2 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 = (1+2+3+\dots+n)^2 + \\ &\quad + n(n+1)(n+1) + (n+1)^2 = (1+2+3+\dots+n)^2 + 2(1+2+3+\dots+n+1)(n+1) = \\ &\quad + n(n+1) + (n+1)^2 = [1+2+3+\dots+n+(n+1)]^2. \end{aligned}$$

Le théorème est valable pour $n=2$, il est donc valable en général.

Comme on le voit, dans la démonstration purement analytique de la proposition-raison

$$(1+2+3+\dots+n)^2 + (n+1)^2 = [1+2+3+\dots+n+(n+1)]^2$$

entre comme proposition-raison de deuxième ordre la proposition :

$$n(n+1) = 2(1+2+3+\dots+n).$$

Or, cette dernière proposition peut être démontrée par l'induction mathématique indirecte de la manière suivante.

Supposons que $n(n+1)$ soit $= 2(1+2+3+\dots+n)$.

Nous aurons alors :

$$(n+1)(n+2) = n(n+1) + 2(n+1) = 2[1+2+3+\dots+n+n+1]$$

et comme le théorème est valable pour $n=2$, il est valable en général.

Au contraire, la proposition-raison de troisième ordre,

$$(n+1)(n+2) = 2[1+2+3+\dots+n+(n+1)],$$

n'est pas démontrable, comme on le voit, qu'analytiquement.

La démonstration par l'induction mathématique qu'on donne ordinairement de la proposition

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

ne fait pas entrevoir cette complexité du cas. En effet, dans cette démonstration :

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \left[\frac{1}{2} n(n+1) \right]^2 + \\ + (n+1)^3 &= \left[\left(\frac{1}{2} n \right)^2 + (n+1) \right] (n+1)^2 = \frac{1}{4} (n^2 + 4n + 4)(n+1)^2 = \\ &= \frac{1}{4} (n+2)^2 (n+1)^2 = \left\{ \frac{1}{2} (n+1) \right\}^2 [(n+1)+1]^2 = \\ &= [1+2+3+\dots+n+(n+1)]^2, \end{aligned}$$

c'est la proposition-raison

$$\left[\frac{1}{2} n(n+1) \right]^2 + (n+1)^3 = \left\{ \frac{1}{2} (n+1) \right\}^2 [(n+1)+1]^2$$

seule qui entre en jeu et qui n'est démontrable qu'analytiquement.

J'ai trouvé la démonstration ci-dessus, plus compliquée mais plus rationnelle que celle-ci, en développant la proposition générale $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$ dans une série indéfinie de propositions particulières, dont la première :

$$1^3 + 2^3 = 1^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 2 = 1^2 + 2 \cdot 2 + 2^2 = (1+2)^2$$

nous montre immédiatement la raison dernière de l'identité $1^3 + 2^3 = (1+2)^2$, c'est-à-dire de la validité de la proposition générale pour $n=2$. On peut trouver également la démonstration par l'induction mathématique indirecte de la proposition $n(n+1) = 2(1+2+3+\dots+n)$ en essayant d'abord de la démontrer par l'induction mathématique directe à membres dépendants. Les trois premiers membres de la série correspondante sont :

$$1 \cdot 2 = 2 \cdot 1$$

$$2 \cdot 3 = 2(1+2)$$

$$3 \cdot 4 = 3(2+2) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 2(1+2) + 2 \cdot 3 = 2(1+2+3).$$

X

On pourrait tirer des discussions qui précèdent plusieurs conclusions générales d'une grande importance au point de vue logique. On pourrait affirmer d'abord que le concept général du nombre entier n'existe pas, que ce concept est remplaçable par la série indéfinie des définitions des nombres entiers successifs :

1 (indéfinissable)

2 = 1 + 1

3 = 2 + 1

4 = 3 + 1

.....
(n + 1) = n + 1
.....

On pourrait affirmer ensuite que, comme chaque proposition générale de l'arithmétique pure (science des nombres entiers finis positifs), qu'elle soit démontrable par l'induction mathématique indirecte ou analytiquement, ou qu'elle soit axiomatique, est remplaçable par une série indéfinie de propositions particulières (dépendantes ou indépendantes), il n'y a pas de propositions gé-

rales proprement dites (se rapportant au concept général du nombre), mais seulement des propositions *universelles* (se rapportant aux nombres individuels infiniment nombreux).

Ces conclusions générales, si importantes qu'elles soient, ne peuvent être discutées ici¹. Ce que nous avons voulu montrer dans ce travail, c'est que l'induction mathématique indirecte peut être ramenée à l'induction mathématique directe à membres dépendants, et que cette dernière représente un procédé logique qui, comme l'induction ordinaire, va du particulier au général, résultat que Poincaré avait peut-être soupçonné, mais qu'il n'avait su dégager.

B. Petronievics,

Professeur à l'Université de Belgrade

1. Dans la monographie sur l'Induction mathématique que je prépare, cette induction sera considérée en détail au point de vue logique aussi bien qu'au point de vue mathématique (et historique). En outre, cette monographie sera accompagnée d'une bibliographie presque complète sur la question de l'induction mathématique.

REVUE DE ZOOLOGIE

(POISSONS)

DEUXIÈME PARTIE : BIOLOGIE DES POISSONS¹

Les travaux d'ichthyobiologie ne sont pas en nombre aussi considérable que ceux de systématique et de morphologie pure. Toutefois ils constituent deux paragraphes importants : 1° Poissons côtiers et littoraux ; 2° Poissons migrateurs.

Le paragraphe des poissons migrateurs sera subdivisé en plusieurs parties concernant les Anguillidés, les Salmonidés (saumons et truites), les Scombridés (thons) et les Clupéidés (sardines, harengs et anchois).

I. — POISSONS COTIERS ET LITTORAUX

Nous avons montré ailleurs² combien ces poissons offrent d'intérêt pour le naturaliste. Habitant une région de la mer où les conditions de vie sont extraordinairement variées à cause du voisinage immédiat de la côte, ils ont acquis eux-mêmes une diversité extrême dans leurs formes et dans leurs mœurs.

Beaucoup de ces poissons présentent un faisceau de caractères en rapport avec leur mode d'existence : ils sont mauvais nageurs et chassent à l'affût ; parfois ils se fixent au moyen de ventouses ou à l'aide de leur queue préhensile ; leurs couleurs sont vives ou mimétiques ; souvent existent des différences extérieures entre les mâles et les femelles (dimorphisme sexuel) ; enfin les œufs, plus lourds que l'eau et fixés, sont gardés par les parents et pondus quelquefois dans un nid.

En ce qui concerne les œufs et la ponte, nous avons en vue les Syngnathidés, les Cottidés, les Gobiidés, les Gastérostéidés et quelques autres familles. Beaucoup d'autres, au contraire, ont des œufs flottant en haute mer et des larves pélagiques qui assurent la dissémination de l'espèce sur de grandes étendues.

C'est à ces œufs flottants et à ces larves pélagiques que s'est intéressé surtout Louis Fage¹,

1. Voir la première partie dans la *Revue gén. des Sc.* du 30 avril 1924, t. XXXV, p. 237 et suiv.

2. L. BERTIN : Les caractères adaptatifs des poissons littoraux. *La Nature*, 1924, p. 84-84 et 116-120.

1. L. FAGE : *Shore-Fishes. Report on the Danish oceanographical Expeditions 1908-10 to the Mediterranean a. adjacent seas*, Copenhague, vol. II, fasc. A3, 1918, 154 pages.