Et puisque Aa et $a\omega$ coïncident, les points α, β, γ, déterminés par la rencontre de Aα avec $a\alpha$, de AC avec ac, de AB avec ab, sont en ligne droite.

4. — Des raisonnements du paragraphe 2 on déduira de suite que si trois homologies (O, D) transforment un triangle t en triangles homologiques avec un triangle donné T, t et T sont homologiques et (O, D) est l'un des couples que nous avons appris à leur associer.

Cette proposition, comme les précédentes, est relative à des figures formées de triangles dont deux quelconques sont homologiques. Peut-être pourrait-on déterminer toutes les figures jouissant de cette propriété.

DÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE DES DÉRIVÉES SUPÉRIEURES DES FONCTIONS CIRCULAIRES sin x ET cos x

PAR

J. ARNOVLJEVIC (Belgrade) et B. PETRONIEVICS (Belgrade).

Ayant réussi à déduire géométriquement les dérivées premières des fonctions circulaires [1], je me suis efforcé d'appliquer le même procédé aux dérivées supérieures de ces fonctions. Mon collègue, M. Dr Ivan Arnovljevic, professeur de Mécanique à la Faculté technique de l'Université de Belgrade, ayant trouvé avant moi une solution géométrique du problème pour la deuxième dérivée des fonctions sin x et cos x, j'ai utilisé les éléments de sa solution pour arriver à la déduction géométrique de la troisième et des dérivées supérieures de ces deux fonctions.

[1] Comp. B. PETRONIEVICS, Déduction des dérivées de fonctions circulaires par la méthode géométrique des limites. — *L'Enseignement mathématique*, XXIIe année, No 3-4, p. 195-208.

La première partie de cet article contient la part de la collaboration importante de M. Arnovljevic; dans la deuxième, je donne d'abord ma solution du problème résolu par M. Arnovljévic, puis la solution générale.

I

Nous allons donner d'abord la déduction géométrique des formules connues

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = - \sin x \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2 \cos x}{dx^2} = \cos x \ .$$

Dans le cercle de rayon $\overline{\mathrm{OA}_0} = 1$ (fig. 1), on a

$$\overline{\mathrm{OA}} = \cos x \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{AB}} = \sin x \ ,$$

$$\overline{\mathrm{BB}_1} = dx \ , \quad \overline{\mathrm{C}_1\mathrm{B}_1} = d \sin x \ , \quad \overline{\mathrm{BC}_1} = - d \cos x \ ,$$

De $\Delta \mathrm{B}_1\mathrm{BC}_1 \sim \mathrm{OBA}$, on déduit

$$\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1} : \overline{\mathrm{B}_1\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{OB}} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{BC}_1} : \overline{\mathrm{BB}_1} = \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{OB}} \ .$$

d'où:

$$d \sin x : dx = \cos x : 1 \qquad \text{et} \qquad - d \cos x : dx = \sin x : 1 \ .$$

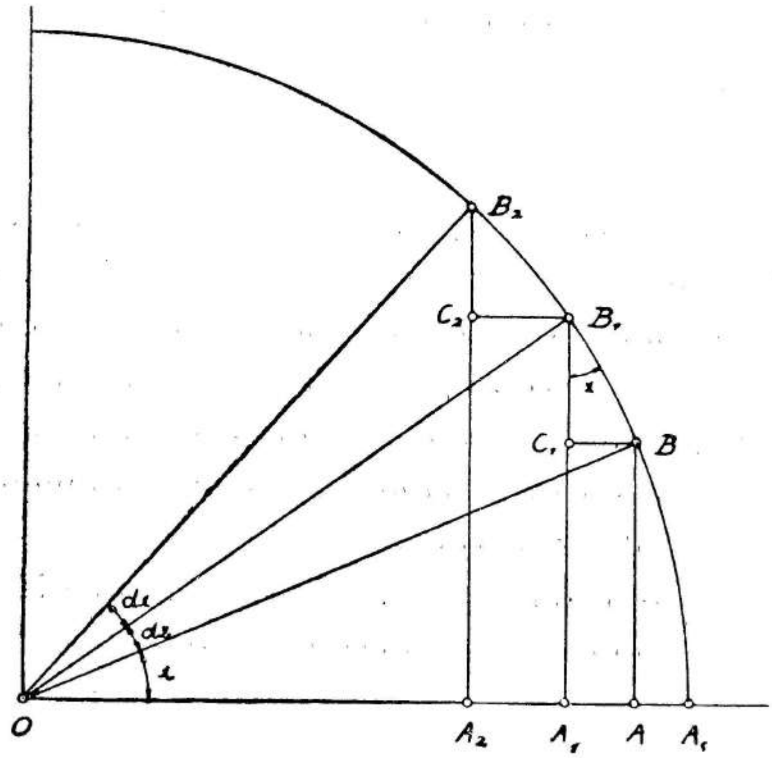

Fig. 1

C'est la déduction géométrique de

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \quad \text{et} \quad \frac{d \cos x}{dx} = - \sin x \, .$$

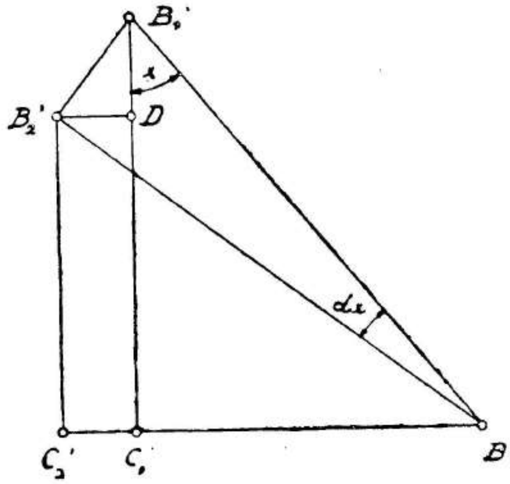

Fig. 2

Dans la fig. 2, les deux triangles BB_1C_1 et $B_1B_2C_2$ de la fig. 1 ont été agrandis et tracés de telle sorte que les deux angles B et B_1 coïncident en B' et que les côtés BC_1 (resp. $B'C_1'$) et B_1C_2 (resp. $B'C_2'$) coïncident aussi.

Alors $B'B_1'$ étant $//\ BB_1$ et $B'B_2'\ //\ B_1B_2$, on a: $\sphericalangle B_1'B'B_2' = dx$; $B_1'B_2'$ étant $//\ OB_1$ et $B_2'D \perp B_1'C_1'$, on a: $\sphericalangle B_1'B_2'D = x + dx = x$; et dans le triangle $B_2'DB_1'$ on a: $DB_2' = \overline{C_2'B'} - \overline{C_1'B'} = - d^2 \cos x$, $\overline{DB_1'} = \overline{B_2'C_2'} - \overline{B_1'C_1'} = - d^2 \sin x$ et $B_1'B_2' = \overline{B'B_1'} \, . \, dx = (dx)^2$.

De $\Delta B_2'DB_1$, de la fig. 2 (dont les côtés sont des grandeurs infiniment petites de deuxième ordre), $\sim$ OAB (dans la fig. 1), leurs côtés respectifs devenant parallèles à la limite, on a:

$$\overline{B_1'D} : \overline{B_1'B_2'} = \overline{BA} : \overline{OB} \quad \text{et} \quad \overline{B_2'D} : \overline{B_1'B_2'} = \overline{OA} : \overline{OB}$$

d'où:

$$- d^2 \sin x : dx^2 = \sin x : 1 \quad \text{et} \quad - d^2 \cos x : dx^2 = \cos x : 1 \, ,$$

ou:

$$\frac{d^2 \sin . x}{dx^2} = - \sin x \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \cos . x}{dx^2} = - \cos x \, .$$

II

1. — Dans la fig. 3, on a PZ $= x$, $\overline{\mathrm{OP}} = \Delta x$, P est le point de la tangente PT, Q le point de la tangente QT[1], PS la sécante passant par les points Q et P, PM le sinus de l'arc x (et de l'angle correspondant α, QN le sinus de l'arc $x + \Delta x$ (et de l'angle correspondant $\alpha + \Delta x$), Q'N' le sinus de l'arc $x + 2\Delta x$ (et de l'angle correspondant $\alpha + 2\Delta\alpha$).

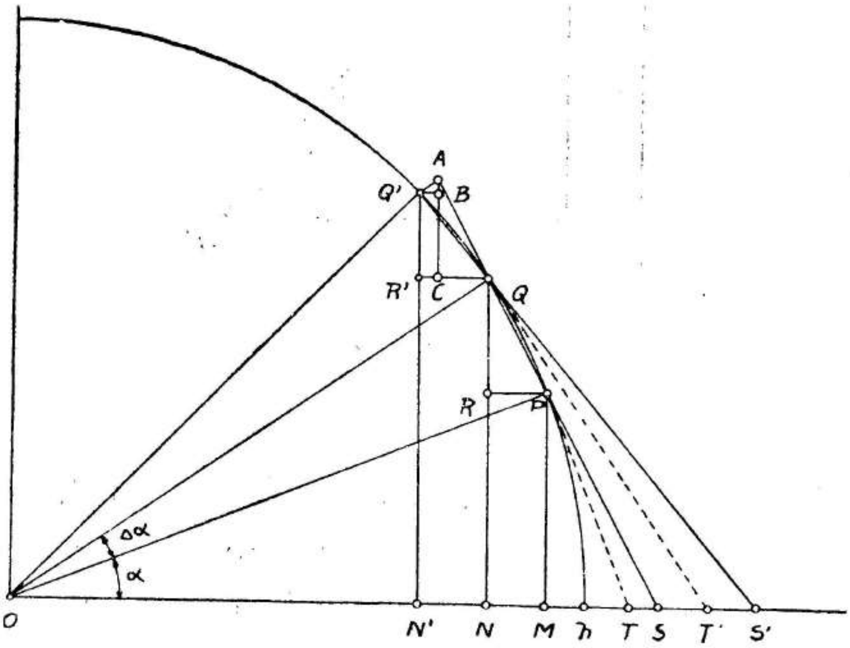

Fig 3

De même on a dans cette figure:

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \mathrm{NQ} - \mathrm{MP} = \mathrm{RQ}$$
$$\Delta \sin(x + \Delta x) = \sin(x + 2\Delta x) - \sin(x + \Delta x) = \mathrm{N'Q'} - \mathrm{NQ} = \mathrm{R'Q'}$$
$$\Delta\Delta \sin x = \Delta \sin(x + \Delta x) - \Delta \sin x = \mathrm{R'Q'} - \mathrm{RQ} = \mathrm{BC} - \mathrm{AC} = -\mathrm{AB}\ .$$

Dans le triangle Q'QA, ayant l'arc Q'A pour base, on a: $\widehat{\mathrm{Q'A}} = \mathrm{Q'Q}\,.\sphericalangle\,\mathrm{Q'QA}$, et dans le triangle Q'QO, ayant l'arc Q'Q pour base, on a de même: $\widehat{\mathrm{Q'Q}} = \mathrm{OQ}\,.\sphericalangle\,\mathrm{Q'OQ}$.

On aura donc:

$$\lim \mathrm{Q'A} = \lim \Delta x\,.\,\lim \sphericalangle\,\mathrm{SQS'} = \lim \Delta x\,.\,\lim \Delta \sphericalangle\,\mathrm{RQP}$$
$$= \lim \Delta x\,.\,\lim \Delta \alpha$$

d'où:

$$\lim \mathrm{Q'A} = dx\,.\,d\alpha = dx^2\ , \qquad (1)$$

Comme le triangle Q′BA coïncide, en passant à la limite, avec le petit triangle non tracé Q′BA′, qui est semblable au triangle ON′Q′, on aura d'autre part:

$$\lim \sphericalangle \mathrm{AQ'B} = \lim \sphericalangle (\alpha + 2\Delta\alpha) = \alpha = x \ .$$

On a aussi:

$$\lim \mathrm{AB} = -\lim \Delta\Delta \sin x = -d^2 \sin x \ . \tag{2}$$

De même, comme en passant à la limite, ΔON′Q′ coïncide avec OMP, on aura:

$$\lim \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{Q'A}} = \lim \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OP}} \ , \tag{3}$$

Des équations (1), (2) et (3), il s'ensuit enfin:

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x \ .$$

2. — En suivant la déduction précédente de la seconde dérivée de $\sin x$, on déduira facilement la seconde dérivée de $\cos x$.

Dans la fig. 3, on a:

$$\Delta \cos x = -\mathrm{RP} \ , \quad \Delta \cos (x + \Delta x) = -\mathrm{R'Q} \ , \quad \Delta\Delta \cos x = -\mathrm{R'C} \ .$$

On a de même:

$$\lim \mathrm{Q'A} = dx^2 \ , \tag{1}$$

$$\lim \sphericalangle \mathrm{AQ'B} = x \ ,$$

$$\lim \mathrm{Q'B} = d \cos^2 x \tag{2}$$

et

$$\lim \frac{\mathrm{Q'B}}{\mathrm{Q'A}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OP}} \ . \tag{3}$$

On aura donc enfin:

$$\frac{d^2 \cos x}{dx^2} = -\cos x \ .$$

3. — Les figures 4 et 4 *a* se rapportent à la troisième dérivée des fonctions $\sin x$ et $\cos x$. Dans la fig. 4 *a*, les triangles R″Q′Q″ et R′Q′A′ de la fig. 4 ont été agrandis de telle sorte que le triangle Q″Q′A′ contient, non seulement le petit triangle Q″B′A′, mais aussi le triangle encore plus petit DEA′.

Dans la fig. 4, mais en tant qu'elle diffère de la fig. 3, Q' est le point de la tangente Q′T″, Q′S″ la sécante passant par les points Q″ et Q′, Q″N″ le sinus de l'arc $x + 3\Delta x$ (et de l'angle correspondant $\alpha + 3\Delta\alpha$).

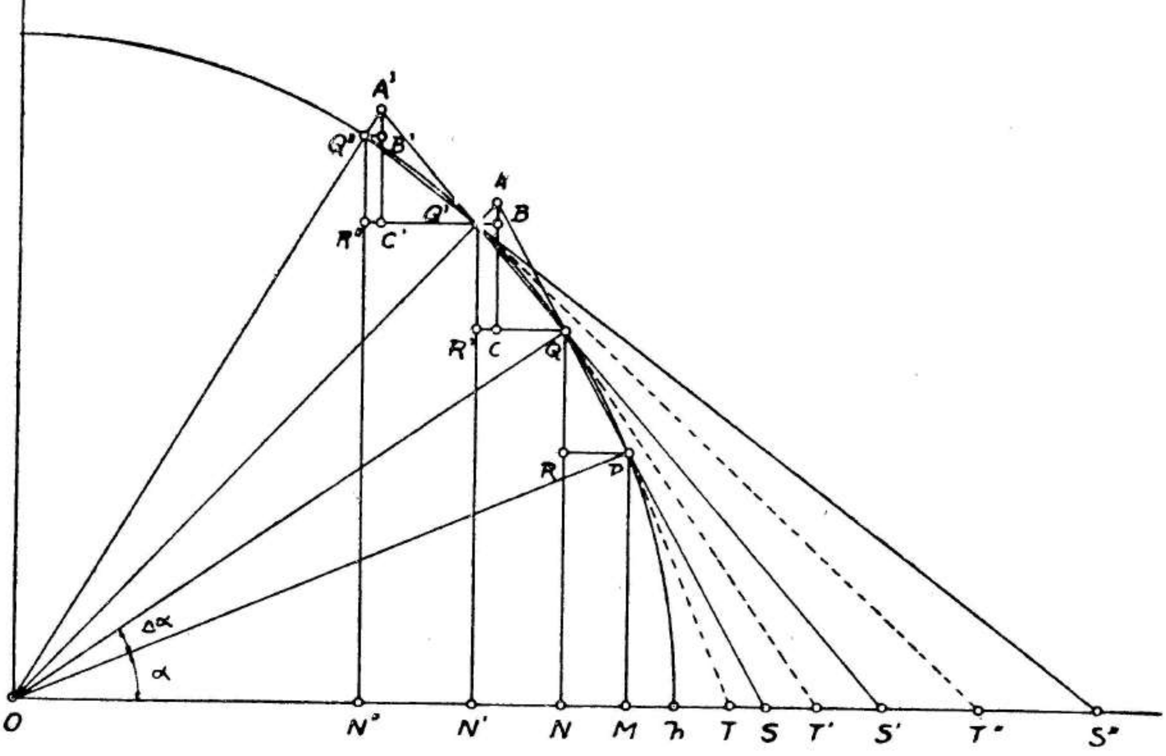

Fig. 4

De même, on a dans la figure 4:

$$\Delta\sin(x + 2\Delta x) = \sin(x + 3\Delta x) - \sin(x + 2\Delta x) = \mathrm{N''Q''} - \mathrm{N'Q'} = \mathrm{R''Q''}$$

$$\Delta\Delta\sin(x + \Delta x) = \Delta\sin(x + 2\Delta x) - \Delta\sin(x + \Delta x)$$
$$= \mathrm{R''Q''} - \mathrm{R'Q'} = -\mathrm{A'B'}$$

$$\Delta\Delta\Delta\sin x = \Delta\Delta\sin(x + \Delta x) - \Delta\Delta\sin.x = -\mathrm{A'B'} - (-\mathrm{AB})\ .$$

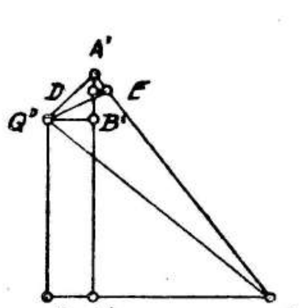

Fig 4a

Comme dans la figure 4 a:

$$\begin{array}{llll} & \mathrm{A'B'} \text{ de la figure 4, représente} & & \mathrm{A'B'} \\ \text{et} & \mathrm{AB} \quad » \quad » & » & \mathrm{DB'} , \end{array}$$

on a, dans cette figure:

$$\triangle\triangle\triangle \sin x = -\mathrm{A'B'} - (-\mathrm{DB'}) = -\mathrm{A'D} .$$

On a aussi dans la figure 4 a:

$$\lim \mathrm{A'E} = \lim \widehat{\mathrm{A'E}} = \lim \mathrm{Q''A'} . \lim \sphericalangle \mathrm{A'Q''E}$$
$$= \lim \widehat{\mathrm{Q''A'}} . \lim \triangle \sphericalangle \mathrm{A'Q''B'} ,$$

mais comme, en passant à la limite, $\widehat{\mathrm{Q''A'}}$ coïncide (dans la figure 4) avec Q'A et $\sphericalangle$ A'Q''B' avec A Q'B, on aura:

$$\lim \mathrm{A'E} = \lim \mathrm{Q'A} . \lim \triangle \sphericalangle \mathrm{AQ'B} = dx^2 . d\alpha = dx^3 , \qquad (1)$$

On aura aussi, en passant à la limite (ΔDA'E étant $\sim \Delta$C'A'Q'),

$$\lim \sphericalangle \mathrm{DA'E} = \lim \sphericalangle \mathrm{C'A'Q'} = \lim \sphericalangle \mathrm{N'Q'S'} = \lim \sphericalangle \mathrm{NQT'} = \alpha = x$$

et

$$\lim \mathrm{A'D} = -\lim \triangle\triangle\triangle \sin x = -d^3 \sin x . \qquad (2)$$

De même, en passant à la limite, Δ DA'E devient semblable à Δ MPO, et on aura:

$$\lim \frac{\mathrm{A'D}}{\mathrm{A'E}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OP}} . \qquad (3)$$

Des équations (1), (2) et (3) il s'ensuit enfin:

$$\frac{d^3 \sin x}{dx^3} = -\cos x .$$

Remarque. — En suivant la déduction de la troisième dérivée de sin x, on déduira facilement la troisième dérivée de cos x.

On aura en effet (dans la fig. 4):

$$\triangle\triangle \cos x = \mathrm{R''Q'} - \mathrm{R'Q} = -\mathrm{R''C'} ,$$

et

$$\triangle\triangle\triangle \cos x = -\mathrm{R''C'} - (-\mathrm{R'C}) = \mathrm{DE}$$

(dans la figure 4 a, où Q''B' représente R''C', tandis que le segment rectiligne correspondant à R'C' $>$ R''C n'a pas été tracée).

Comme

$$\lim \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{A'E}} = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OP}} ,$$

on aura:

$$\frac{d^3 \cos . x}{dx^3} = \sin x \ .$$

4. — En suivant la déduction des deuxième et troisième dérivées de sin x, on déduira facilement la quatrième dérivée, et ainsi de suite.

On s'apercevra aussi (comp. fig. 3 et 4) que, si cette déduction porte sur la dérivée de l'ordre pair, l'angle du petit triangle (dont les différences $\Delta^n y$ et Δx^n sont des côtés), qui correspond à l'angle α, sera orienté dans le même sens que celui-ci, tandis que, s'il s'agit de la dérivée de l'ordre impair, cet angle sera orienté dans le sens de l'angle NQS. D'où la différence dans le procédé de démonstration des deux cas.

On pourrait démontrer que, tandis que $\Delta^2 \sin x$ et $\Delta^3 \sin x$ sont négatifs, la différence $\Delta^4 \sin x$ sera positive. Mais alors, comme la valeur absolue de la deuxième dérivée et de chaque dérivée de l'ordre pair de la fonction sin x est sin x et celle de la troisième et de chaque dérivée de l'ordre impair cos x, la valeur de la quatrième dérivée sera $+ \sin x$, et les valeurs $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$ se succèderont périodiquement à partir de la cinquième dérivée. Et la même remarque s'applique aux valeurs $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, $\cos x$ par rapport à la fonction cos x.

Remarque. — Nous terminerons notre travail par une remarque. Comme on le sait, l'objection la plus sérieuse au calcul différentiel de LEIBNIZ était celle faite par le Hollandais B. NIEUWENTIJT: les dérivées supérieures d'une fonction ne peuvent pas exister, étant donné qu'elles ne possèdent pas de signification géométrique [1]. Or, dans notre travail, nous avons établi, pour la première fois d'une manière incontestable, l'existence géométrique des dérivées supérieures d'une fonction.

---

[1] L'objection se trouve dans l'ouvrage de NIEUWENTIJT, intitulé *Analysis infinitorum*, 1695, Cap. VIII, et la réponse de LEIBNIZ dans *Acta Eruditorum*, 1695 (une traduction de cette réponse se trouve dans le livre de J. M. CHILD, *The Early mathematical papers of Leibniz*, London, 1920). Comp. aussi M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. III, 2te Aufl., S. 254-56.