

XIX.

L'espace discret et la géométrie non-euclidienne.¹⁾

Von

B. Petronievics (Belgrad, Jugoslavien)

L'espace discret, c'est celui formé de points juxtaposés, c'est l'espace dans lequel la distance entre deux points se compose d'un nombre fini de points simples.

Aristote fut le premier qui nia la possibilité d'un tel espace. Voici l'argument fameux d'Aristote.

Deux points qui se touchent doivent coïncider, le point n'ayant ni de parties différentes par lesquelles il pourrait se toucher avec un autre point en restant séparé de lui, ni de côtés différents pour pouvoir se trouver dans une direction déterminée par rapport à cet autre point et former avec lui une ligne simple.

Comme vous le voyez, l'argument d'Aristote contient deux affirmations bien différentes. Première affirmation: les deux points doivent coïncider. Deuxième affirmation: les deux points ne peuvent pas former une ligne.

L'argument d'Aristote est-il juste? Je réponds par oui et par non. Les deux points doivent-ils coïncider: non. Les deux points ne peuvent-ils pas former une ligne: oui.

Que deux points qui se touchent immédiatement ne peuvent pas former une ligne simple, cette affirmation d'Aristote est très juste, puisque, en effet, un point ne possède pas de côtés

¹⁾ Conférence faite au 2ième congrès polonais de philosophie à Varsovie, le 26 septembre de cette année (1927).

différents pour qu'un autre point puisse être mis dans des directions différentes par rapport à lui.

Mais les deux points doivent-ils coïncider, ne peuvent-ils pas rester l'un en dehors de l'autre? Je crois qu'on peut très bien les laisser séparés l'un de l'autre, pourvu qu'on conçoive cette séparation comme une relation d'extériorité non-spatiale. Cette conception est à la base de ma construction de l'espace discret. Si nous ajoutons aux deux points juxtaposés (A et B, Fig. 1), se trouvant dans la relation d'extériorité non-spatiale, un troisième point, mais de telle sorte que ce troisième point (C de Fig. 1) ne touche immédiatement que l'un d'eux (B),



Fig. 1.

alors les deux de ces trois points qui ne se touchent pas (les points A et C), ne se trouveront plus dans la relation d'extériorité non-spatiale. Par conséquent, leur relation d'extériorité peut très bien être conçue comme une relation spatiale. Autrement dit, les deux points qui ne se touchent pas se trouvent dans une direction déterminée l'un par rapport à l'autre et forment ainsi une ligne simple.

Le deuxième point de notre construction (le point B), est un point extraspatial par rapport aux deux autres (aux points A et C). Pour cette raison, je l'appelle point de séparation ou point (ou acte) de négation. Ainsi, l'espace discret n'est métaphysiquement possible qu'en supposant qu'entre tous les deux points consécutifs de cet espace, il y a un point extraspatial qui les sépare en touchant immédiatement chacun d'eux.

La construction métaphysique de l'espace discret que je viens de développer devant vous a été publiée, pour la première fois, dans le premier volume de mon ouvrage philosophique principal, intitulé: „Prinzipien der Metaphysik, Erster Band, erste Abteilung — Allgemeine Ontologie und die formalen Kategorien. Mit einem Anhang: Elemente der neuen Geo-

metrie", paru en 1904. Dans le deuxième volume du même ouvrage (Erster Band, zweite Abteilung. Die realen Kategorien und die letzten Prinzipien), paru en 1912, j'ai ajouté à la construction métaphysique une construction encore plus détaillée et plus complète, à laquelle j'ai donné le nom de construction hypermétaphysique.

La construction métaphysique de l'espace discret terminée, cet espace appartient désormais à la science mathématique et à la physique. Mathématiquement, c'est un espace composé de points simples et de distances minimales. Physiquement, c'est un espace composé de points réels contigus qui peuvent s'y mouvoir.

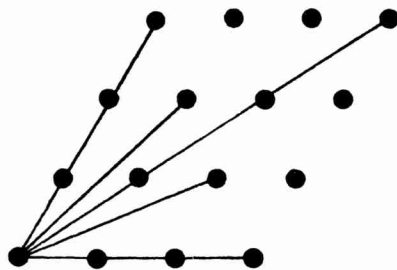


Fig. 2

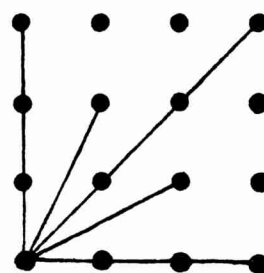


Fig. 3

Je passe maintenant à une description mathématique sommaire de l'espace discret. Je vais vous exposer les propriétés et les formes fondamentales de cet espace dans les cinq propositions suivantes.

1. Il y a deux sortes de points dans l'espace discret: points réels, dont la grandeur géométrique est égale à zéro, et points irréels, dont la grandeur géométrique est égale à l'unité.

Du point de vue des mathématiques pures, on peut définir les points réels comme points tout simplement, tandis que les points irréels représentent des distances minimales.

Cette première propriété de l'espace discret est une conséquence immédiate de la construction métaphysique de cet espace.

2. Dans l'espace discret, il y a deux sortes de lignes droites: droites réelles, composées de distances minimales, et

droites imaginaires, composées de distances élémentaires plus grandes que distances minimales.

Cette deuxième propriété de l'espace discret peut être facilement déduite quand on construit le plan triangulaire ou le plan quadrilatéral de cet espace (Fig. 2 et 3).

3. Il faut distinguer deux formes fondamentales de l'espace discret: l'espace inextensif et l'espace extensif.

L'espace discret est inextensif quand il n'y a que des distances minimales entre deux points consécutifs de cet espace; ou, autrement dit, quand tous les points de cet espace sont consécutifs l'un par rapport à l'autre. La droite réelle simple (Fig. 4), le triangle équilatéral simple (Fig. 5) et le tétraèdre simple (Fig. 6) sont les trois formes élémentaires de cet espace.

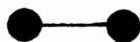


Fig. 4

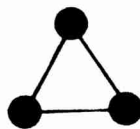


Fig. 5

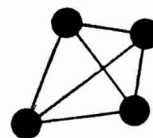


Fig. 6

L'espace discret est extensif quand il contient, à côté des distances minimales, des distances plus grandes que les distances minimales entre deux points consécutifs.

Cette distinction entre l'espace inextensif et l'espace extensif exprime une propriété essentielle de l'espace discret; dans la géométrie de l'espace continu, elle n'existe pas, l'espace continu étant, pour ainsi dire, toujours extensif.

4. Le plan triangulaire et le plan quadrilatéral sont les deux plans primaires de l'espace discret.

Le plan triangulaire se compose de triangles équilatéraux simples (Fig. 2) et le plan quadrilatéral de carrés élémentaires (Fig. 3).

5. L'espace inextensif peut posséder un nombre illimité de dimensions, tandis que l'espace extensif ne peut dépasser quatre dimensions.

Cette propriété de l'espace inextensif de posséder un nombre illimité (n) de dimensions, est une conséquence immédiate de la définition même de cet espace. En effet, aux quatre points

formant le tétraèdre simple, nous pouvons ajouter un cinquième point, de telle sorte que celui-ci soit séparé de chacun des quatre autres par une distance simple. Aux cinq points formant le pentaèdre simple (l'espace inextensif de quatre dimensions), nous pouvons ajouter de la même manière un sixième point, et ainsi de suite.

La proposition que l'espace extensif ne peut dépasser quatre dimensions, peut être démontrée rigoureusement. L'espace extensif de trois dimensions, qui correspondrait à l'espace extensif triangulaire de deux dimensions, n'est pas possible, les tétraèdres simples n'étant pas capables de former un tel espace. Au contraire l'espace extensif cubique de trois dimensions est tout à fait possible; possible est aussi un espace cubique de quatre dimensions. Mais un tel espace de cinq dimensions (et de dimensions supérieures) devient impossible.

Je passe maintenant à la deuxième partie de ma conférence qui s'occupera de deux questions.

Première question: quel est le rapport de la géométrie discrète avec la géométrie non-euclidienne?

Deuxième question: quel est le rapport de la doctrine finitiste de l'espace avec la théorie de relativité?

Je suppose que vous connaissez la géométrie non-euclidienne. À côté de la géométrie euclidienne, il y a deux géométries non-euclidiennes: la géométrie lobatchewskienne et la géométrie riemanienne. Les trois géométries peuvent être caractérisées brièvement de la manière suivante.

Dans la géométrie euclidienne, deux droites qui possèdent une perpendiculaire commune en possèdent une infinité, toutes égales entre elles. Par conséquent, les deux droites sont équidistantes et ne se coupent pas. D'un point hors d'une droite, il n'y a donc qu'une seule parallèle dans la géométrie euclidienne.

Dans la géométrie lobatchewskienne, deux droites qui possèdent une perpendiculaire commune n'en possèdent qu'une seule, et ce sont des droites divergentes. Entre les deux, il y a des lignes droites sécantes et des lignes droites non-sécantes (comp. Fig. 7). Il y a en outre de part et d'autre de la perpendiculaire commune une ligne droite asymptotique (MA et MB

dans la Fig. 7), qui est analogue à la parallèle de la géométrie euclidienne. Par conséquent, dans la géométrie lobatchewskienne, il y a, d'un point hors d'une droite, deux lignes parallèles à une droite donnée.

Dans la géométrie riemannienne, deux droites qui possèdent une perpendiculaire commune n'en possèdent qu'une seule, mais ce sont des droites convergentes qui se coupent et entre les deux, il n'y a que des lignes droites sécantes. D'un point hors d'une droite, il n'y a donc aucune parallèle à une droite donnée dans la géométrie riemannienne.

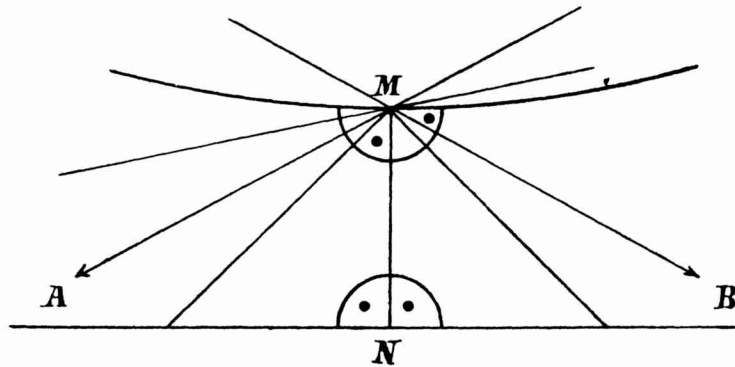


Fig. 7

La géométrie euclidienne est réalisée dans le plan euclidien. En ce qui concerne la réalisation mathématique des deux géométries non-euclidiennes, on en peut posséder deux conceptions profondément différentes.

On peut affirmer que le plan euclidien représente en même temps et le plan lobatchewskien et le plan riemanien, la ligne droite étant absolument la même dans les trois cas.

Où on peut affirmer que le plan euclidien est différent du plan lobatchewskien et du plan riemanien, en déclarant que le plan lobatchewskien représente une surface courbe absolument homogène de courbure constante négative et le plan riemanien une surface courbe absolument homogène de courbure constante positive (on distingue, comme on le sait, dans le cas riemanien, deux surfaces différentes, la surface quasi-sphérique et la surface elliptique). De telle sorte que la ligne droite lobatchewskienne

et la ligne droite riemanienne seraient des lignes courbes en comparaison avec la ligne droite euclidienne qui, seule, représenterait la ligne droite dans le sens absolu. Et tandis qu'il n'y aurait dans ce cas qu'un seul plan euclidien, il existerait une infinité de surfaces lobatchewskiennes et riemaniennes, le paramètre d'une telle surface pouvant posséder toute valeur finie réelle entre zéro (0) et infini (∞).

Cette deuxième conception de la géométrie non-euclidienne est adoptée par la grande majorité des mathématiciens. Mais un philosophe doit envisager aussi la possibilité, au moins formelle, de la première. Dans cette première conception, le cinquième postulat d'Euclide serait absolument indémontrable. Dans la deuxième conception, au contraire, ce postulat est démontré du fait des géométries non-euclidiennes, ces géométries n'étant réalisables que sur des surfaces courbes. Néanmoins, de ces deux conceptions, nous adopterons, dans ce qui suit, celle des mathématiciens.

Nous nous demandons donc quel est le rapport de notre conception de l'espace avec la géométrie non-euclidienne?

Les trois géométries, à savoir la géométrie euclidienne usuelle et les deux géométries non-euclidiennes, possèdent au fond le même concept de l'espace, le concept de l'espace continu. En effet, l'existence des géométries non-euclidiennes à côté de la géométrie euclidienne, provient uniquement de ce concept de l'espace continu. Car si l'espace est continu, c'est-à-dire si, entre deux points de la ligne droite, il y a toujours un troisième point et, par conséquent, un nombre infini de points, alors, et alors seulement, il y a aussi, à côté de la ligne droite, des lignes courbes, à côté du plan, des surfaces courbes, etc. . . . Dans l'espace discret, au contraire, la ligne droite reste seule possible, tandis que la ligne courbe s'évanouit, celle-ci renfermant par sa définition même un nombre infini de points.

Par conséquent, si notre conception de l'espace est juste, les géométries non-euclidiennes deviennent impossibles, et la géométrie euclidienne, quoique très réduite, reste seule mathématiquement admissible. A notre première question, nous répondons donc: la géométrie discrète exclut la possibilité de la géométrie non-euclidienne.

Il n'est pas aussi facile de répondre à la deuxième question; car, dans cette deuxième question, il s'agit de déterminer quelle est la nature mathématique de l'espace physique. Et il se pourrait très bien que, quoique du point de vue purement logique, la géométrie discrète soit seule admissible, néanmoins, une des géométries de l'espace continue soit seule capable de décrire mathématiquement l'espace physique.

Pour y voir clair, nous devons distinguer deux sphères de la réalité: la sphère métaphysique et la sphère physique. La sphère métaphysique, c'est la réalité en tant qu'on la considère dans ses éléments primordiaux. La sphère physique, c'est la sphère phénoménale, empirique de la réalité.

Or la matière qui remplit l'espace physique, tout en étant indubitablement composée de particules discrètes, est si riche en ces particules, qu'on doit distinguer plusieurs degrés de sa composition: les corps visibles se composent de molécules, les molécules d'atomes, les atomes d'électrons, et ces derniers, ayant des masses différentes, doivent être composés de leur part de particules encore plus simples. Il se pourrait très bien que la physique, en étudiant la structure de la matière, n'arrive jamais aux éléments primordiaux simples. Comme dans ce cas la matière peut être regardée comme divisible à l'infini, l'espace discret, quoique discret dans sa sphère métaphysique, se comporterait néanmoins, comme espace physique, en espace continu.

En se comportant comme espace continu, l'espace physique pourrait être mathématiquement décrit aussi bien comme espace euclidien que comme espace non-euclidien, comme espace absolu que comme espace relatif.

L'espace absolu, l'espace relatif, qu'est-ce que cela signifie? Dans l'espace absolu, la longueur d'un segment rectiligne est en soi fixe et immuable, tandis que dans l'espace relatif, on peut attribuer, au même segment rectiligne, des longueurs différentes. Or l'espace discret ne peut être conçu que comme espace absolu, un segment rectiligne de cet espace étant composé d'un nombre fini déterminé de segments élémentaires (un segment de la ligne droite réelle d'un nombre fini de distances minimales, la distance minimale représentant l'unité

absolue de longueur dans cet espace). L'espace continu, au contraire, peut être conçu aussi bien comme espace relatif que comme espace absolu, une unité absolue de longueur faisant défaut dans cet espace. On parle, il est vrai, dans la géométrie non-euclidienne, de longueurs absolues, mais le sens en est tout autre: à la longueur d'un segment rectiligne y correspond toujours un angle d'une grandeur déterminée, et comme l'angle complet représente l'unité absolue de l'angle, en mesurant directement, d'une manière absolue, un angle, on dit qu'on mesure indirectement, d'une manière absolue, la longueur des segments rectilignes eux-mêmes.

De ce qui précède, on peut entrevoir aisément que, si l'espace physique se comporte en espace continu, il peut être regardé aussi bien comme espace relatif que comme espace absolu. Et l'importance de la théorie de relativité comme théorie physique consiste précisément en ceci qu'elle a enfin tiré cette conséquence implicitement contenue dans le concept de l'espace continu. Nous ne voulons point examiner la question de savoir si la théorie de relativité est juste comme théorie physique ou non (il se pourrait, par exemple, qu'elle soit juste en tant que théorie de relativité spéciale et erronée en tant que théorie de relativité généralisée). Ce qui nous intéresse ici, c'est seulement d'avoir établi son droit d'existence comme théorie physique.

Arrivés à la fin de notre conférence, nous voulons brièvement formuler les deux conclusions générales qui se dégagent de ce que nous venons de dire et de ce qui a été dit sur le même sujet dans le premier volume de nos „Principes de Métaphysique“, à savoir:

1. Dans la sphère métaphysique de réalité, l'espace doit être discret, absolu et euclidien;
 2. Dans la sphère physique de réalité, l'espace pourrait être regardé comme continu, relatif et non-euclidien.
-