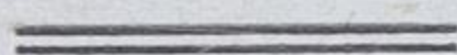


АПЕНДИКС

од

ЈАНОША БОЉАЈА



превео и примедбе додао

Д-р БРАНИСЛАВ ПЕТРОНИЈЕВИЋ



БЕОГРАД

ДРЖАВНА ШТАМПАРИЈА КРАЉЕВИНЕ СРБА, ХРВАТА И СЛОВЕНАЦА

1928.

ОБЈАШЊЕЊЕ ЗНАКОВА

$\overline{ab}$ означава *скуп свих* тачака које се са тачкама a и b налазе на једној правој.

$\overrightarrow{ab}$ означава ону половину праве $\overline{ab}$ која почиње у тачци a и садржи тачку b .

$\overline{abc}$ означава скуп *свих* тачака које се заједно са тачкама a , b , c (које не леже у истој правој) налазе у једној истој равни.

$\overrightarrow{abc}$ означава ону половину равни $\overline{abc}$ која почиње од праве $\overline{ab}$ и садржи тачку c .

abc означава онај од делова у које је раван $\overline{abc}$ подељена скупом полуправих $\overrightarrow{ba}$ и $\overrightarrow{bc}$ који је *мањи*; или *угао* чији су краци $\overrightarrow{ba}$ и $\overrightarrow{bc}$.

$abcd$ означава (ако се тачка d налази у abc а $\overrightarrow{ba}$ и $\overrightarrow{cd}$ се не секу) део угла abc који је обухваћен од $\overrightarrow{ba}$, $\overrightarrow{bc}$ и $\overrightarrow{cd}$; док $bacd$ означава део равни $\overline{abc}$ који се налази између $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$.

R означава прав угао.

$\perp$ је знак за управан положај двеју правих.

$\parallel$ је знак за паралелизам.

$\equiv$ „ „ „ конгруенцију.

$ab \simeq cd$ значи да је $\sphericalangle cab = \sphericalangle acd$.

$x \rightleftharpoons a$ „ „ x тежи ка граници a . *

$\bigcirc r$ означава круг чији је полупречник r .

$\odot r$ означава површину круга чији је полупречник r .

* Да означи тежење граници, Бољај употребљава један други знак који смо ми заменили знаком $\rightleftharpoons$ (као што је то учинио *Халсџед* у своме енглеском преводу Апендикса).

АПЕНДИКС¹⁾

§ 1

Ако праву $\overrightarrow{am}$ не сече права $\overrightarrow{bn}$ али је сече свака друга права $\overrightarrow{bp}$ којасе налази у углу abn , онда је $\overrightarrow{bn}$ *па-ралелна* са $\overrightarrow{am}$, т.ј. $bn \parallel am$ (фиг. 1).

Лако је увидети да *постоји* права $\overrightarrow{bn}$ и то *једна једина*, која пролази кроз тачку b (ван праве $\overrightarrow{am}$), и да $\widehat{bam} + \widehat{abn}$ није $> 2 R$. Јер ако се bc буде кретала око b док не постане $\widehat{bam} + \widehat{abc} = 2 R$, наступиће тренутак када $\overrightarrow{bc}$ *неће више* сећи $\overrightarrow{am}$, и тада ће бити $bc \parallel am$.

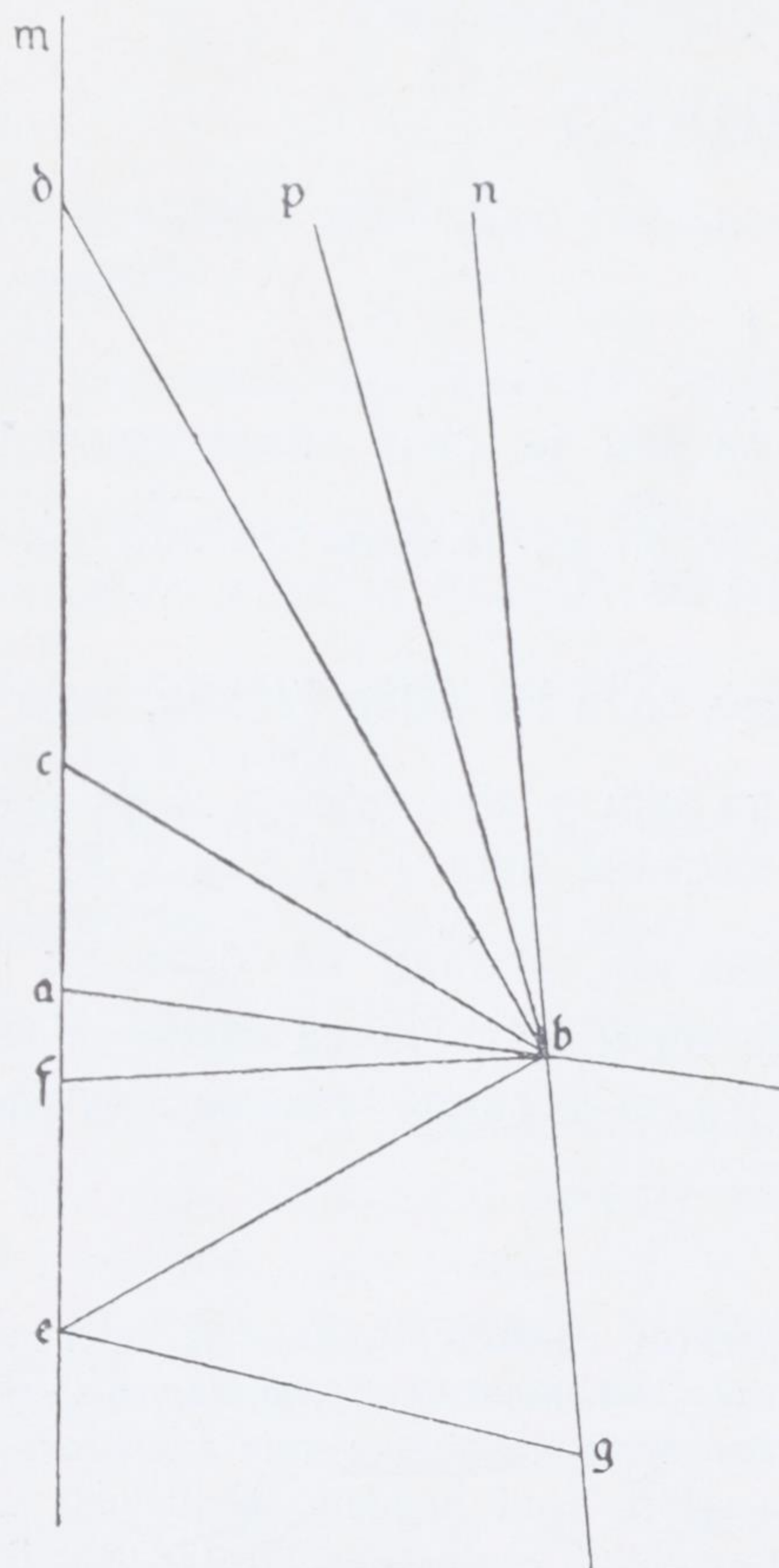
Исто се тако лако увиђа да ће бити $bn \parallel em$ па магде се тачка e налазила на $\overline{am}$ (претпостављајући да је у свима таквим случајевима $am > ae$).

¹ Спис Бољајев, који доносимо у српском преводу, изашао је први пут 1832 као додаток уз опсежни уџбеник Математике његовог оца *Волфганга Бољаја* (тзв. Tentamen) под насловом: *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica*. Овај је спис Бољајев издат поново засебно 1902 г. од стране мађарске Академије Наука поводом стогодишњице Бољајевог рођења. 1913-те године издат је Appendix и у немачкој обради, коју је оставио за собом у рукопису сам Бољај. На француски превео је Анендикс *J. Hoüel* 1867 г. под насловом „La science absolue de l'espace“ (ново издање 1912-е), а на енглески амерички математичар *G. B. Halsted* 1896 под насловом „The Science Absolute of Space“.

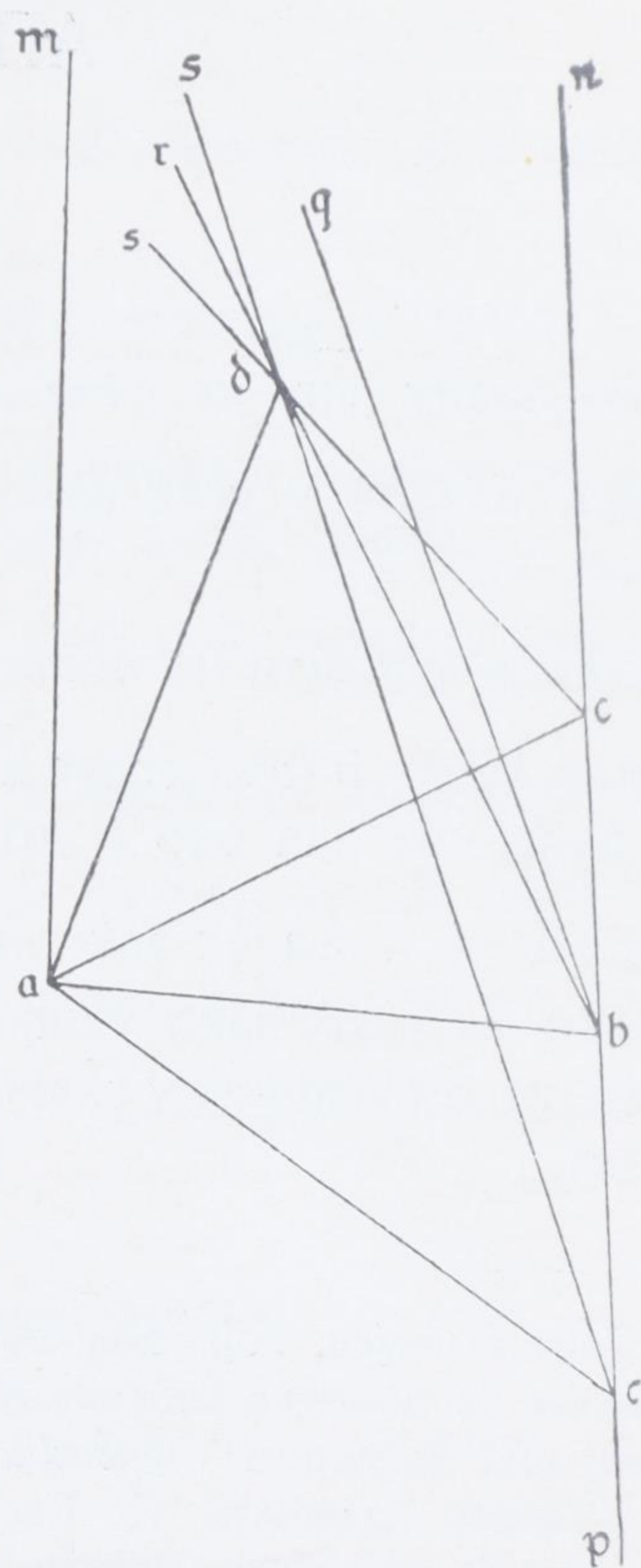
При моме преводу Апендикса употребљени су на првом месту латински оригинал и немачка обрада, али узети су у помоћ и француски и енглески превод. Број додатих примедба релативно је много мањи него што је тај број у моме преводу *Лобачевсковог* списка „Геометријска Испитивања из Теорије паралелних линија“ (изашлом у „Просветном Гласнику“ за 1914-у год.). Читаоца који хоће потпуно да разуме Бољаја упућујем на тај спис Лобачевскога и мој коментар.

Ако је, док се тачка c на правој $\overrightarrow{am}$ удаљава у бесконачност, увек $cd = cb$, биће увек и $cdb = cbd (< pbc)$. Како пак $pbc = 0$, то и $cdb = 0$.

Напомена. У овом првом параграфу даје Бољај у првом одељку дефиницију паралелне; у другоме одељку доказује став, да на једној страни паралелизма постоји само једна паралелна; а у трећем став да је положај тачке e на правој am произвољан.



Фиг. 1



Фиг. 2

§ 2

Ако је $bn \parallel am$ биће и $cn \parallel am$ (Фиг. 2).

Јер узмимо да се d налази магде у $масп$. Ако се c налази на bn , $\overrightarrow{bd}$ сећи ће $\overrightarrow{am}$ (пошто је $bn \parallel am$), а тако исто и $\overrightarrow{cd}$ сећи ће $\overrightarrow{am}$. Ако се пак c налази на bp , нека је $bq \parallel cd$. Тада ће се bq налазити у abn (§ 1) и сећи $\overrightarrow{am}$, а тако исто ће и cd сећи $\overrightarrow{am}$. Према томе ће

свака полуправа $\overrightarrow{cd}$ (у асп) сећи увек полуправу $\overrightarrow{am}$, док $\overrightarrow{cn}$ неће сећи $\overrightarrow{am}$. Стога ће бити увек $cn \parallel am$.

Напомена. У овом другом параграфу Бољај доказује став, да једна паралелна *задржава* ознаку паралелизма у свима својим тачкама.

§ 3

Ако су како br тако и $cs \parallel am$ (фиг. 2), а c се не налази на $\overrightarrow{br}$, $\overrightarrow{br}$ и $\overrightarrow{cs}$ неће се сећи.

Јер ако би $\overrightarrow{br}$ и $\overrightarrow{cs}$ имале једну заједничку тачку d , онда би (по §-у 2) како dr тако и ds биле обе паралелне са am и $\overrightarrow{dr}$ и $\overrightarrow{ds}$ пале би уједно (по §-у 1), а c би се налазило на $\overrightarrow{br}$ (противно претпоставци).

Напомена. У трећем параграфу доказује Бољај, да се две праве које су паралелне са трећом *не секу* једна са другом (што још не значи да су оне и међу собом паралелне).

§ 4

Ако је $man > mab$ (фиг. 3), свакој тачци b на $\overrightarrow{ab}$ одговараће једна тачка c на $\overrightarrow{am}$ тако да буде $bcm = nam$.

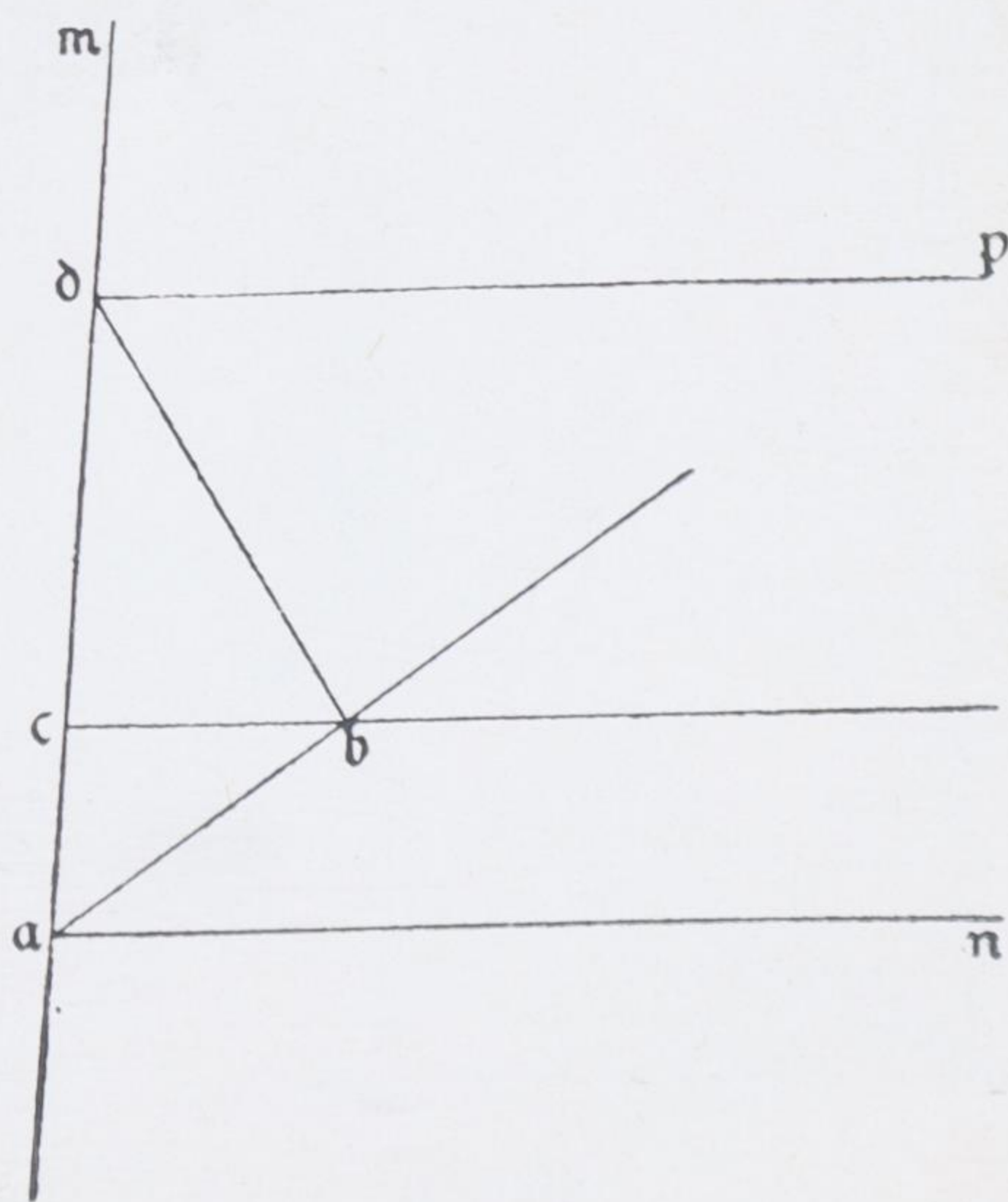
Јер ако се (према §-у 1) учини да је $bdm > nam$ и $mdr = man$, b ће се налазити у падр. Стога ако се nam буде покретало дуж am

док се $\overrightarrow{an}$ не поклопи са $\overrightarrow{dr}$, $\overrightarrow{an}$ мораће проћи кроз b и према томе ће морати постојати једно bcm које је $= nam$.

§ 5

Ако је $bn \parallel am$, постојеће на $\overrightarrow{am}$ једна таква тачка f да ће бити $fm \simeq bn$ (фиг. 1).

Јер (по § 1) постојаће $bcm > cbn$, и, ако је $ce = cb$, биће $ec \simeq bc$ и $bem < ebn$. Ако тачку p будемо кретали дуж дужи ec ³, означавајући непрестано угао bpm са u а угао pbn са v , биће u очевидно најпре мање па затим веће од одговарајућег v . Јер и



Фиг. 3

² Да би читалац лакше разумео Бољајево доказивање, треба да у фиг. 1-ој уцрта двапутта тачку p (и то једанпут између a и c ближе c , а други пут између f и e ближе e) и да је споји са тачком b .

Тада ће свака полураван $\overrightarrow{bcd}$, постављена кроз $\overrightarrow{db}$ (дату у pba), сећи $\overrightarrow{am}$, пошто (услед $bn \parallel am$) $\overrightarrow{bd}$ сече $\overrightarrow{am}$. Стога ако будемо кретали полураван $\overrightarrow{bcd}$ око bc дотле док она престане сећи $\overrightarrow{am}$, $\overrightarrow{bcd}$ пашће напоследку уједно са $\overrightarrow{bcp}$. Из истог разлога она ће се покlopити и са $\overrightarrow{bcp}$. Према томе bn налазиће се и у bcp . Осим тога ако је $br \parallel cr$, br ће се (пошто је $am \parallel cr$) налазити из истог разлога у bat , а тако исто (пошто је $br \parallel cr$) и у bcp . Према томе $\overrightarrow{br}$, будући заједничко равнима bat и bcp , биће у ствари идентично са $\overrightarrow{bn}$ и стога биће $bn \parallel cr$.

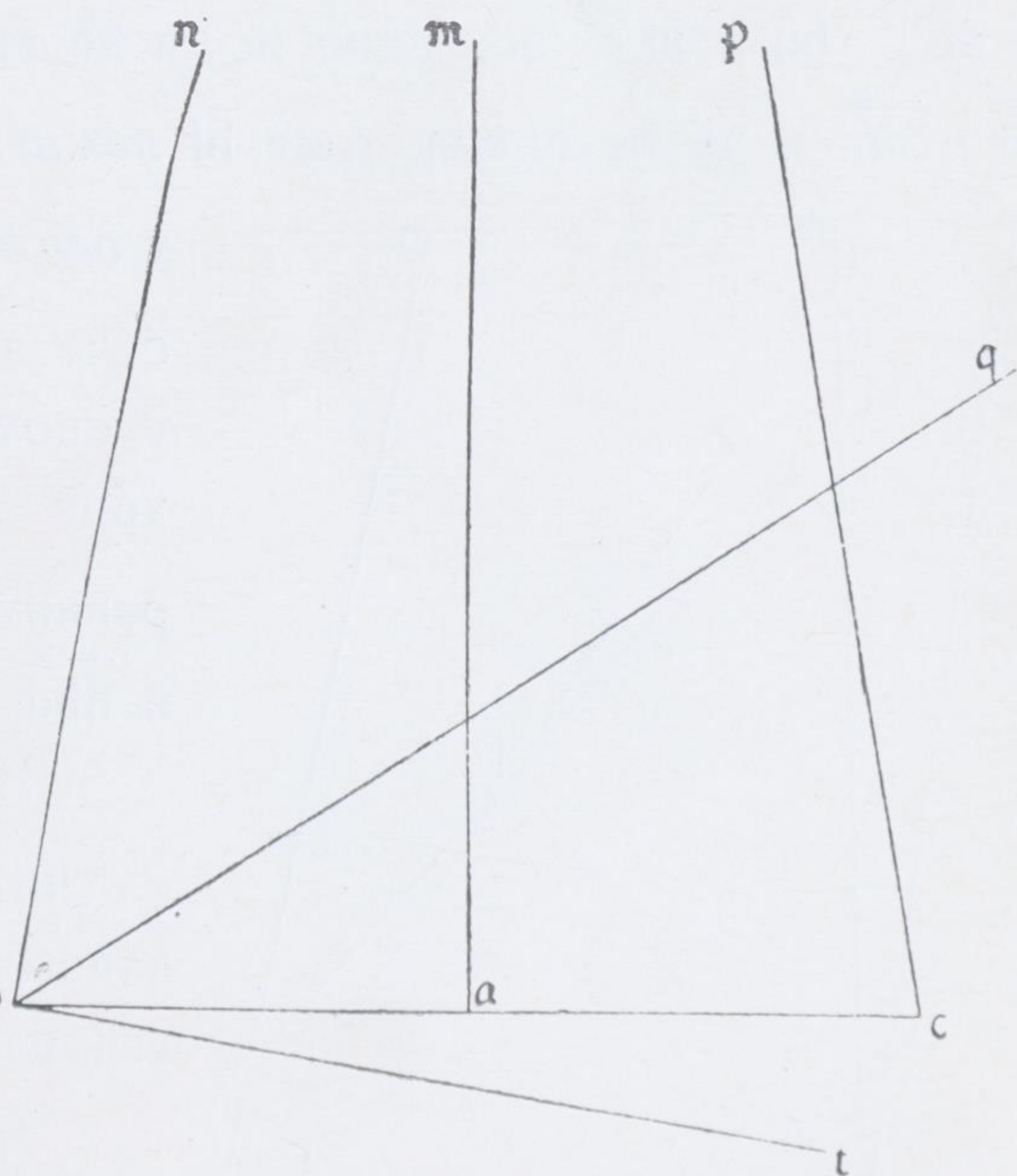
Ако је дакле $cr \parallel am$ и b ван $\overline{cam}$, пресек $\overrightarrow{bn}$ равни bat и bcp биће паралелан како са am тако и са cr .*

Напомена. У седмом параграфу Бољај доказује став о *транзитивности паралелизма*: ако су две праве паралелне трећој оне су паралелне и међу собом. Он разликује три случаја: у првом случају трећа се права налази између правих које су са њом паралелне, у другом случају праве паралелне с трећом налазе се на истој страни од ње, а у трећем случају ова трећа права лежи ван равни других двеју.

§ 8

Ако је $bn \parallel$ и $\simeq cr$ (или краће $bn \parallel \simeq cr$) и ако am (у pbc) на дужи bc *својој уједно* и *полови* је, биће $bn \parallel am$ (фиг. 5).

Јер ако би $\overrightarrow{bn}$ секла $\overrightarrow{am}$, b и cr секла би am у истој тачци (пошто је $tabn \equiv tacr$) која би била заједничка и за $\overrightarrow{bn}$ и



Фиг. 5

* Ако бисмо овај трећи случај ставили испред прва два, ови последњи дали би се доказати краће и елегантније, слично другом случају у §-у 10 (примедба пишчева).

Доиста у својој немачкој обради Апендикса (стр. 188), Бољај је извео ово обрнуто доказивање (примедба преводиочева).

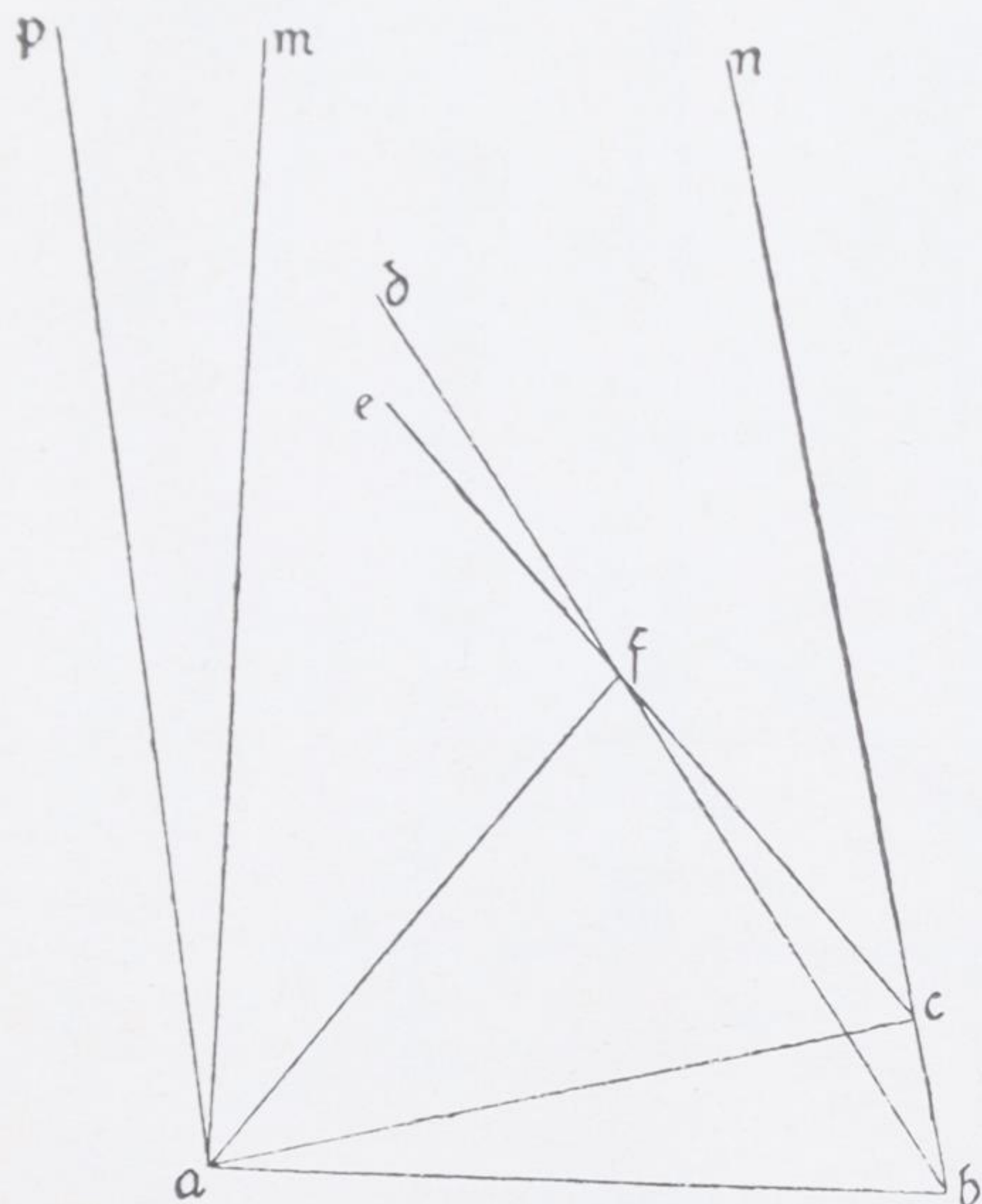
$\rightarrow$ ср, пошто је $bn \parallel \rightarrow$ ср. Али свака $\rightarrow$ bq (у cbn) сече $\rightarrow$ ср; тако исто сече $\rightarrow$ bq и $\rightarrow$ ам. Према томе је $bn \parallel \rightarrow$ ам.

Напомена. Овај параграф чини прелаз од првих седам параграфа Апендикса, у којима је изложена теорија паралелних, ка параграфима 9—24, у којима се излаже теорија тзв. граничне линије и граничне површине.

§ 9

Ако је $bn \parallel \rightarrow$ ам, $\rightarrow$ мар $\perp$ $\rightarrow$ таб (фиг. 6) и угао, кога раван pbd заклапа са равни pba (на истој страни од $\rightarrow$ таб на којој је $\rightarrow$ мар), $< R$, онда раван $\rightarrow$ мар сече раван pbd .

Јер нека је $\angle bam = R$, $ac \perp bn$ (при чему или b пада уједно са c или не пада) и $ce \perp bn$ (у pbd), тада ће (по претпоставци) бити $\angle ace < R$ и af ($\perp$ се) паће у ace . Нека је $\rightarrow$ ар пресек равни $\rightarrow$ abf и $\rightarrow$ атр (којима је тачка a заједничка), па ће бити угао $\angle bar = \angle bam = R$ (пошто је $\angle bam \perp \rightarrow$ мар). Ако се напоследку $\rightarrow$ abf кретањем стави у $\rightarrow$ abm (при чему ће тачке a и b остати непомичне), $\rightarrow$ ар ће пасти уједно са $\rightarrow$ ам; а пошто је $ac \perp bn$ и $\angle af < \angle ac$, јасно је да ће крајна тачка f од $\rightarrow$ af пасти између $\rightarrow$ bn и $\rightarrow$ ам и да ће према томе bf лежати у оквиру угла abn . Али како



Фиг. 6.

у овом положају (пошто је $bn \parallel \rightarrow$ ам) $\rightarrow$ bf сече $\rightarrow$ ар, то ће се $\rightarrow$ ар и $\rightarrow$ bf морати сећи и у своме *првобитном* положају, и њихова тачка пресека биће заједничка равнима $\rightarrow$ мар и pbd . Према томе $\rightarrow$ мар и pbd морају се сећи.

На основу реченога лако је закључити, да ће се $\rightarrow$ мар и pbd увек сећи кадагод је сума њихових нагибних углова са равни $\rightarrow$ таб $< 2R$.

Напомена. Да би разумео доказивање у овом параграфу, најбоље ће бити да читалац направи просторну фигуру која ће одговарати фиг. 6. Та

ће се фигура састојати из три равни: једне основне, једне управне и једне под оштрим углом нагнуте равни. У основној равни треба уцртати две несвклидске паралелне am и bn и $ac \perp bn$; на управној равни треба (с унутрашње стране њене) уцртати ar ; а на нагнутој равни

праве, а у §-у 9-ом став, да се две равни положене кроз две паралелне праве једне треће равни секу кад је збир њихових нагибних углова са овом трећом равни мањи од $2R$, Бољај у овом параграфу доказује став, да постоји не само транзитивност паралелизма (двеју правих са трећом) него и транзитивитет једнакости њихових углова паралелизма.

§ 11

Скуп од тачке a и од *свих* других тачака, од којих је свака тачка b таква да је, кад је $bp \parallel am$, у исто доба и $bp \simeq am$, назваћемо F ; а пресек од F са макојом равни, која у себи садржи праву ab , назваћемо L .

На свакој правој, која је $\parallel am$, F има једну и то само једну тачку. Тако исто јасно је, да ће L бити подељено правом am у два конгруентна дела. Стога ћемо am назвати *осом* од L . Даље јасно је, да постоји само једно L са осом am у свакој равни која у себи садржи праву am . Према томе свако L ове врсте назваћемо L *осе* am (наравно за раван која се посматра). Лако је увидети, да ће L обртањем око праве am описати F , које ће имати такође am за осу, и обрнуто F ће бити F *осе* am .

Напомена. У овом параграфу уводи Бољај, на основу ставова доказаних у §§ 8, 9 и 10, појмове линије L и површине F . Он доказује даље (у §-у 16) да је L у евклидовој геометрији права, а у §-у 17-ом да је у неевклидовој Геометрији L крива линија а F крива површина. Кривој линији L дао је Лобачевски назив *гранична линија* (орицикл), а кривој површини F назив *гранична површина* (орисфера).

§ 12

Ако се тачка b налази магде на L -у осе am и ако је $bp \parallel \simeq am$ (§ 11), L осе am и L осе bp падаће уједно.

Јер, ако L осе bp означимо са l , нека је тачка c магде на l и $cp \parallel \simeq bp$ (§ 11). Тада ће бити (пошто је и $bp \parallel \simeq am$) $cp \parallel \simeq am$ (§ 10), те ће према томе c пасти и на L . А ако је c магде на L , и $cp \parallel \simeq am$, тада ће бити $cp \parallel \simeq bp$ (§ 10), те ће према томе c пасти и на l . L и l мораће дакле бити идентични, и свака полуправа bp биће оса и од L и биће $\simeq$ у односу на све друге осе од L .

Напомена. У овом параграфу Бољај доказује став, да кроз дату тачку b једне полуправе bp пролази само једна гранична линија (ли-

нија L), за коју је та полуправа оса. Да би разумео доказ, читалац треба да направи фигуру двеју граничних линија L и l (облик граничне линије налази се у фиг. 9) које пролазе кроз тачку b њихове заједничке осе bn (друга оса од L нека је am , а од l нека је cp и обрнуто).

§ 13

Ако је $bu \parallel am$ и $cp \parallel dq$ а $bam + abn = 2R$, биће и $dcp + cdq = 2R$ (фиг. 8).

Јер нека је $ea = eb$ и $efm = dcp$ (§ 4), па ће бити (пошто је $bam + abn = 2R = abn + abg$) $ebg = eaf$. Тако исто, ако је $bg = af$, биће $\triangle ebg \equiv \triangle eaf$, угао $beg = aef$ и g ће се налазити на полу правој fe .[→] Даље ће бити $gfm + fgn = 2R$ (пошто је $egb = efa$). Тако исто је и $gn \parallel fm$ (§ 6). Према томе, ако је $mfrs \equiv pcdq$, биће $rs \parallel gn$ (§ 7), и r ће лежати на правој fg или између тачака f и g или ван њих (ако није $cd = fg$, у ком би случају истинитост става била очевидна).

I. У првом случају frs не може бити веће од $(2R - rfm) = fgn$, пошто је $rs \parallel fm$ ⁵; тако исто не може бити ни $frs < fgn$, пошто је $rs \parallel gn$ ⁶; према томе је $frs = fgn$ и $rfm + frs = gfm + fgn = 2R$. Дакле је $dcp + cdq = 2R$.

II. Ако се r налази изван fg , биће $ngr = mfr$. Нека је $mfgn \equiv \equiv nghl \equiv lhko$ и т. д. све док fk не постане $= fr$ или док не почне да премаша fr . У оба ова случаја биће $ko \parallel hl \parallel fm$ (§ 7). Ако k пада у r , ko ће падати уједно са rs (§ 1), и имаћемо $rfm + frs = kfm + fko = kfm + fgn = 2R$. Ако се пак r налази између h и k , биће (на основу под I реченог) $rhl + hrs = 2R = rfm + frs = dcp + cdq$.

Напомена. У овоме параграфу доказује Бољај став, да ако је збир унутрашњих углова које заклапају две паралелне праве са трансверзалом $= 2R$ у једном случају да тај збир мора бити $= 2R$ и у свима другим случајевима. Друкчије речено, ако важи Евклидов постулат паралелних (т.ј. постулат једне једине паралелне) у једном случају, он важи у свима случајевима (дотичне површине).

§ 14

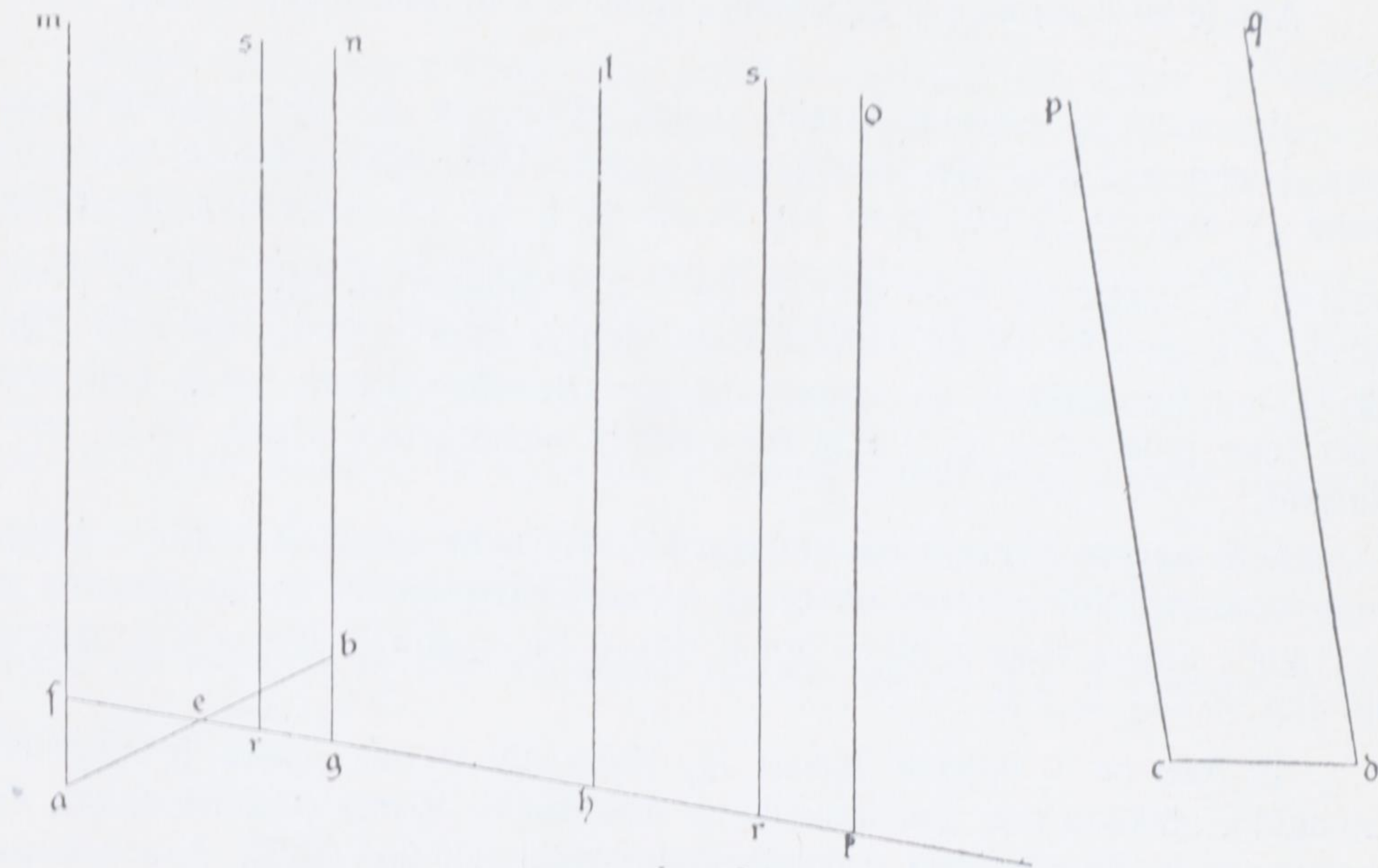
Ако је $bn \parallel am$, $cp \parallel dq$ и $bam + abn < 2R$, биће и $dcp + cdq < 2R$ (фиг. 8).

⁵ Кад би угао frs био $> fgn$, онда би (пошто је $rfm + fgn = 2R$) било $rfm + frs > 2R$, а то је немогуће (по §-у 1), пошто је $rs \parallel fm$.

⁶ Кад би било $frs < fgn$, онда би (пошто је $frs + grs = 2R$) било $fgn + grs > 2R$, а то је немогуће (по §-у 1) пошто је $rs \parallel gn$.

Ако наиме $dcp + cdq$ неби било $< 2R$, онда би оно (по §-у 1) морало бити $= 2R$. Тада би пак (по §-у 13) морало бити и $bat + abn = 2R$, а то противречи претпоставци.

Напомена. У овом параграфу доказује Бољај став, да ако је збир унутрашних углова које заклапају две паралелне праве са трансверзалом $< 2R$ у једном случају да тај збир мора бити $< 2R$ у свима



Фиг. 8

случајевима. Друкчије речено, ако важи неевклидски постулат паралелних (т.ј. постулат двеју паралелних) у једном случају, он важи у свима случајевима (дотичне површине).

§ 15

На основу посматрања изнетих у §§-има 13 и 14 *систем* геометрије заснован на претпоставци истинитости XI-е Евклидове аксиоме азначимо са Σ , а са S азначимо *систем* заснован на супротној хипотези. Сви они ставови, за које није изречно речено да важе било у *систему* Σ или у *систему* S , важе апсолутно, т.ј. за њих се шврди да су истинити па било да важи *систем* Σ било *систем* S .

Напомена. Да има ставова који су независни од постулата паралелних, то је увидео још Евклид у својим славним „Елементима“. У првој књизи свога дела Евклид чини употребу од петог постулата (одн. 11-е аксиоме) тек у 29-ом ставу, док првих 28 ставова доказује независно од овог постулата. Тиме што поред Евклидовог уводи и неевклидски систем, Бољај наглашава изречно важност геометријских

ставова који су независни од постулата једне или двеју паралелних. Стога он и у наслову Апендикса истиче као његов главни задатак излагање статова „који важе апсолутно“.

§ 16

Ако је am оса од L , у систему Σ биће L права $\perp am$ (фиг. 5).

Јер нека је bn у тачци b на L (такође) оса од L , тада ће у систему Σ бити $bam + abn = 2 bam = 2 R$, према томе биће $bam = R$.⁷ И ако је c макоја тачка праве ab и $cr \parallel am$, биће (по §-у 13) $cr \doteq am$, и c ће се према томе налазити на L (§ 11).

Али у систему S не постоје три тачке a, b, c ни у L ни у F које би лежале у правој линији.

Јер једна од три осе am, bn, cr (напр. am) мора лежати између друге две⁸, те ће (по §-у 14) како bam тако и cam морати бити $< R$.

Напомена. Из овог параграфа излази, да је L у евклидовом систему права линија управна на осу, а у неевклидовом једна крива линија (види идући параграф).

§ 17

L је и у систему S линија, а F површина.

Јер (по §-у 11) свака раван повучена управно на осу $\overrightarrow{am}$ (из тачке која припада F -у) сече F по периферији једног круга, чија раван (по §-у 14) није управна ни на једној другој оси $\overrightarrow{bn}$ ⁹. Ако будемо обртали F око bn свака тачка F -а остаће (по §-у 12) у њему, и пресек F -а са равни која није управна на $\overrightarrow{bn}$ ¹⁰ описаће површину. И макоје две тачке a, b узели на F , F ће (по §-у 12) бити тако са собом конгруентно, да ће a и b пасти уједно. Према томе F ће бити једна *униформна површина*.

Јасно је из овога да ће (према §§-има 11 и 12) L бити *униформна линија*.*

⁷ Према дефиницији линије L (упор. § 11 у вези са §-ом 8), свака тетива њена мора заклапати једнаке углове са осама у крајним тачкама тетиве. Према томе у Евклидовом систему мора, пошто је $bam = abn$ а $bam + abn = 2 R$, bam бити $= R$.

⁸ Осе се имају замислити у једној истој равни (као што и Бољај додаје у својој немачкој обради Апендикса — упор. н. н. м. с. 191). Како су bam и cam мањи од R , тетиве ab и ac (одн. тачке a, b и c) неће лежати у правој линији.

⁹ Наравно да тачка F -а, кроз коју се повлачи раван управно на осу $\overrightarrow{am}$, не може при томе бити сама тачка a (почетна тачка осе).

¹⁰ А то ће рећи пресек F -а са равни која је управна на $\overrightarrow{am}$ (а тај је пресек периферија круга). Упор. и немачку обраду Апендикса (§ 17), н. н. м. стр. 191.

* Није нужно ограничити доказ на систем S ; доказ се лако може формулисати тако да важи апсолутно (за S и Σ).

Напомена. Униформна линија и униформна површина значе линију и површину константне кривине. Права и круг су униформне линије у Евклидовој равни, а раван и површина кугле су униформне површине у Евклидовом простору. У неевклидској равни постоје четири униформне линије: права, гранична линија, линија једнаког остојања и круг (линија једнаког остојања јавља се у Апендиксу први пут у §-у 27).

§ 18

Свака раван повучена косо кроз тачку а површине F на осу $\vec{am}$ сече F у систему S по периферији једног круга (фиг. 7).

Јер нека су a , b и c три тачке овога пресека, а bn и cr осе. Тада ће равни $ambn$ и $amcr$ заклапати угао, пошто би иначе (на основу §-а 16) раван одређена тачкама a , b и c садржавала у себи am (противно претпоставци). Према томе ће се равни управне на правима ab и ac у њиховим средиштима сећи (§ 10) по извесној оси fs (F -а) и бити $fa = fb = fc$. Нека је $ah \perp fs$ и нека се fa обрће око fs ; тада ће a описати кружну периферију полупречника ha , која ће пролазити кроз тачке b и c и налазити се у *истио доба* и у површини F и у равни $\overline{abc}$. И раван $\overline{abc}$ и површина F имаће заједничку само $\bigcirc ha$ (§ 16).

Исто тако јасно је, да ће и крајна тачка a одсечка fa линије L обртањем око f у површини F описати $\bigcirc ha$.

Напомена. У овом параграфу доказао је Бољај став, да се круг на граничној површини поклапа својим обимом са кругом несвлидске равни (као што се круг на површини кугле поклапа својим обимом са кругом Евклидове равни).

§ 19

Управна bt на осу bn линије L (у равни ове линије) у систему S је *тангенција* линије L (фиг. 5).

Јер L има са bt само тачку b заједничку (§ 14). Али ако се bq налази у равни tbn , средиште кружног пресека равни која је управна на tbn у bq са F осе $\vec{bn}$ налазиће се очевидно (§ 18) такође на bq . А ако је bq пречник јасно је, да ће bq сећи линију L осе $\vec{bn}$ у тачци q .

Напомена. Да би разумео доказ овог параграфа, читалац треба најпре да замисли фиг. 5 упрошћену тако, да се она састоји само из правих bn , bq и bt . Затим треба да замисли једну раван повучену кроз bq управно на раван tbn и у тој управној равни круг описан из средишта праве bq . Напоследку треба да повуче граничну линију која ће пролазити кроз тачке b и q и имати $\vec{bn}$ за осу.

§ 20

Две тачке површине F одређују увек једну L — линију (§ 11 и 18). Како је (на основу §§ 16 и 19) линија L управна на свима својим осама, *што је сваки линеарни угао у површини F ¹¹ једнак нагибном углу равни повучених управно на површину F кроз краке линеарног угла.*

§ 21

Две L — линије $\overrightarrow{ar}$, $\overrightarrow{bd}$ у истој површини F које са шрећом L — линијом заклапају унутрашње углове чији је збир $< 2R$ (фиг. 6), секу се једна с другом. (Са $\overrightarrow{ar}$ означимо линију L површине F повучену кроз тачке a и r , а са $\overrightarrow{bd}$ ону половину ове линије која почињући у a садржи тачку r).

Јер ако су am и bn осе површине F , полуравни $\overrightarrow{amr}$ и $\overrightarrow{bnd}$ сећи ће се једна с другом (§ 9), и F ће се сећи са њиховим пресеком (по §§-има 7 и 11), Према томе мораће се и $\overrightarrow{ar}$ и $\overrightarrow{bd}$ сећи једна с другом.

На основу овога јасно је, да ће, ако се на површини F замене праве L — линијама,¹² Евклидова XI-а аксиома и све оно што се у (равној) геометрији и трепонетрији тврди важити *ајсолућно* и у F . Према томе биће на тој површини и тригонометријске функције узете у истом смислу као у систему Σ , тако исто и периферија круга, чији је L — линијски полупречник $= r$ у F , биће $= 2\pi r$, и $\odot r$ (у F) $= \pi r^2$ (подразумевајући под π половину од $\odot 1$ у F , или познати број 3,1415926....).

Напомена. 1. У овом параграфу Бољај доказује најпре став, да на површини F за линије L важи пети постулат Евклидов,¹³ па затим на основу тога става изводи закључак, да за F — површину важи Евклидова геометрија.

¹¹ Т. ј. угао кога заклапају две L — линије.

¹² Друкчије речено, ако се L — линије сматрају као праве (одн. као најкраће линије између две тачке) на F — површини.

¹³ Евклидов пети постулат (одн. XI-и аксиом), онако како га је Евклид формулисао (у почетку прве књиге „Елемената“), гласи овако:

„Ако су две праве пресечене шрећом шако, да ова заклапа са њима на истој сшрани углове чији је збир мањи од $2R$, онда ће се ше две праве довољно продужене сећи на оној сшрани на којој су углови чији је збир мањи од $2R$ “.

Овај је постулат еквивалентан са постулатом једне паралелне (т. ј. са ставом: „из једне шачке ван једне праве може се повући само једна паралелна“ само ако се не узме у обзир могућност Риманове геометрије. Пошто Бољај не познаје ову могућност, он с правом идентификује оба постулата.

§ 23

Ако су L — линије $cdf \parallel abe$ (§ 22), $ab = be$ и $\overrightarrow{am}, \overrightarrow{bn}, \overrightarrow{ep}$ осе, биће очевидно и $cd = df$.¹⁷ И ако су a, b, e три макоје тачке линије $\overline{ab}$ и $ab = n \cdot cd$, биће и $ae = n \cdot cf$. Према томе биће (очевидно и кад су ab, ae, dc несамерљиви) $ab : cd = ae : cf$, а пропорција $ab : cd$ *независна* од ab и *одређена поједино* раздаљином ac . Однос $ab : cd$ означимо великим словом (напр. X), које ће одговарати истоименом малом слову (напр. x) којим ћемо означити ac .

§ 24

Макоју дужину да имају x и y , баће увек $Y = X^{\frac{y}{x}}$ (§ 23).

Јер или ће x и y бити множине једно од другог или неће.

Ако је $y = nx$, нека је $x = ac = cg = gh$ ит.д. док не буде $ah = y$ и нека је даље $cd \parallel gk \parallel gl$;¹⁸ па ће бити

$$X = ab : cd = cd : gk = gk : hl,$$

$$\frac{ab}{hl} = \left(\frac{ab}{cd} \right)^n,$$

или

$$Y = X^n = X^{\frac{y}{x}}.$$
¹⁹

Ако су x, y множине од i , т. ј. $x = mi$ и $y = ni$, биће (према реченоме)

$$X = I^m, Y = I^n,$$

дакле

$$Y = X^{\frac{n}{m}} = X^{\frac{y}{x}}.$$
²⁰

Исти резултат да се лако проширити и на случај кад су x и y несамерљиви. Ако би било $q = y - x$, биће очевилно $Q = Y : X$.²¹

Немање је очевидно, да је у систему Σ за свако x , $X = 1$. Док је у S — систему $X > 1$, и за макоје вредности од ab и abe постоје такве линије $cdf \parallel abe$ да је $cdf = ab$, одакле следује да ће бити $ambn \equiv aтер$

¹⁷ Пошто се паралелне праве приближују једна другој на страни паралелизма, биће при томе $ab > cd$.

¹⁸ Упреди фиг. 9.

¹⁹ Пошто је $\frac{ab}{hl} = \frac{ab}{cd} \cdot \frac{cd}{gk} \cdot \frac{gk}{hl}$ и $\frac{ab}{cd} = \frac{cd}{gk} = \frac{gk}{hl}$, то ће очевидно бити $\frac{ab}{hl} = \left(\frac{ab}{cd} \right)^n$.

Како је $\frac{ab}{hl} = Y$, $\frac{ab}{cd} = X$ и $n = \frac{y}{x}$, то је $Y = X^{\frac{y}{x}}$.

²⁰ Као што је за $y = nx$, $Y = X^n$, тако ће за $x = mi$ бити $X = I^m$ (и за $y = ni$ бити $Y = I^n$), одакле следује $I = \sqrt[m]{X}$. Према томе биће $Y = \left(\sqrt[m]{X} \right)^n = X^{\frac{n}{m}}$.

²¹ За раздаљину q двеју граничних линија биће $Q = X^{\frac{q}{x}}$, одакле следује

$$Q = X^{\frac{y-x}{x}} = X^{\frac{y}{x} - 1} = \frac{X^{\frac{y}{x}}}{X} = Y : X.$$

§ 26.

У сваком сферном троуглу синуси страна односе се као синуси супротних углова (фиг. 11).

Јер нека је $abc = R$ и ced управно на полупречнику кугле oa . Тада ће бити $ced \perp aob^{27)}$ и (пошто је и $boc \perp boa$) $cd \perp ob^{28)}$ Како је у троуглима ceo , cdo (по §-у 25):

$$\begin{aligned} \odot ec : \odot oc : \odot dc &= \sin coe : 1 : \sin cod \\ &= \sin ac : 1 : \sin bc, \end{aligned}$$

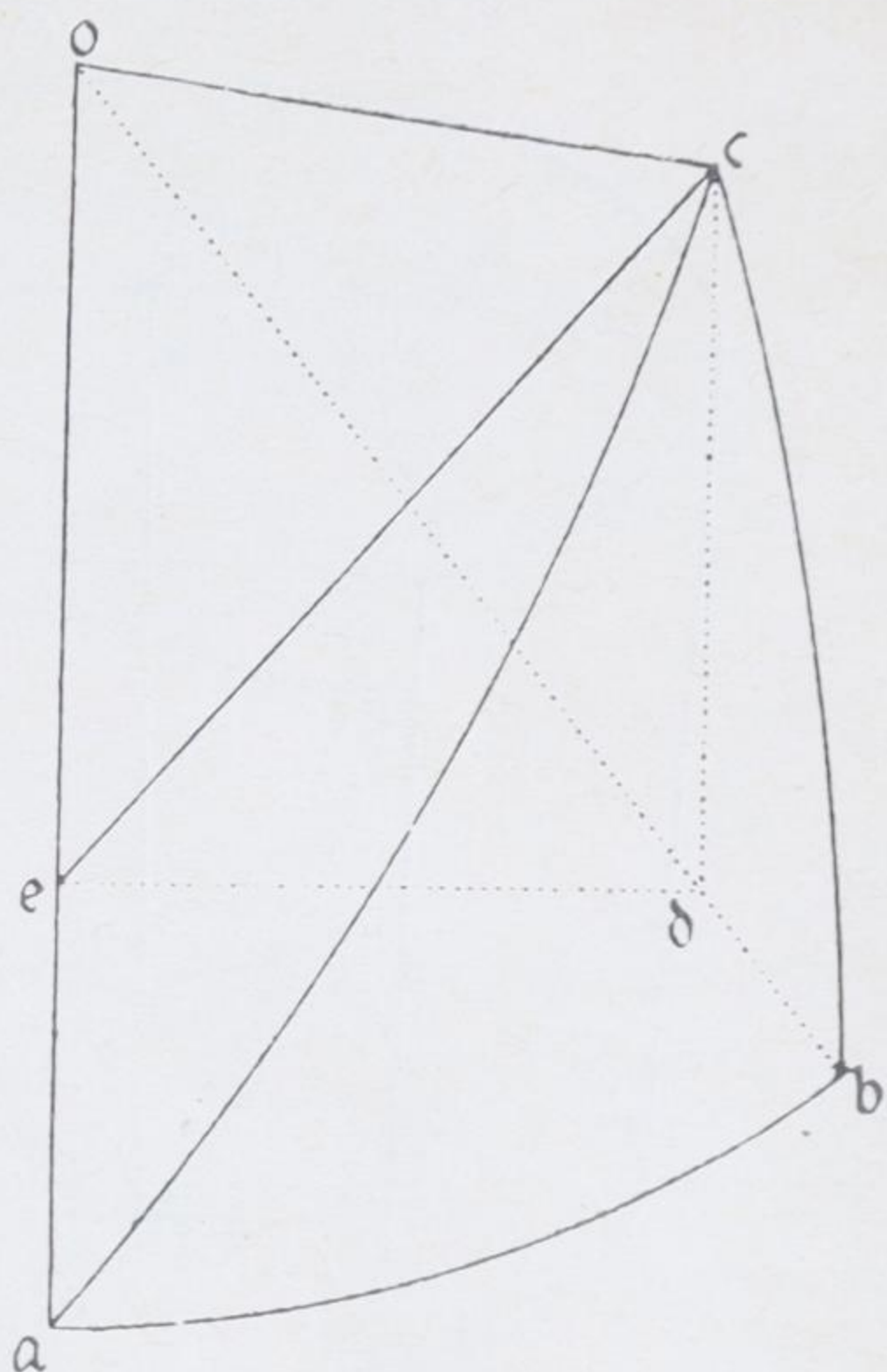
и како је (§ 25):

$$\odot ec : \odot dc = \sin cde : \sin ced,$$

то ће бити:

$$\sin ac : \sin bc = 1 : \sin a$$

Како се из овог сјава да извесити целокупна сферна тригонометрија, то је шиме ушврђена њена независност од XI-е Евклидове аксиоме.²⁹⁾



Фиг. 11

§ 27.

Ако су ac и bd управне на ab и ако се cab помера дуж $\overline{ab}$, биће (означавајући путању тачке c са cd)³⁰⁾ $cd : ab = \sin u : \sin v$ (фиг. 12).

Јер нека је $de \perp ca$; у троуглима ade , adb биће (по §-у 25):

$$\odot ed : \odot ad : \odot ab = \sin u : 1 : \sin v.$$

Ако се $bacd$ буде обртало око ac , тачка b описаће $\odot ab$, а тачка d , $\odot ed$, а површину описану од путање cd означимо са $\odot cd$.³¹⁾ Нека је даље $bfg \dots$ полигон уписан у $\odot ab$. Ако кроз стране bf , fg и т. д. овог полигона будемо поставили равни управне на $\odot ab$, у $\odot cd$ постаће полигонална фигура од истог броја страна. Тада се може доказати, као и у §-у 23, да је:

$$cd : ab = dh : bf = hk : fg = \dots^{32)}$$

и да је према томе

$$dh + hk + \dots : bf + fg + \dots = cd : ab.$$

²⁷⁾ По ставу поменутом у прим. 23.

²⁸⁾ По ставу да је, кад су две равни управне на трећој, и њихов пресек управан на овој трећој равни.

²⁹⁾ Друкчије речено, тригонометрија на куглк у неевклидском простору идентична је са тригонометријом на кугли у Евклидовом простору.

³⁰⁾ Путања cd преставља *линију једнаког остојања* у односу на праву ab .

³¹⁾ Површина описана од линије једнаког остојања cd је *површина једнаког остојања*, а $\odot cd$ је кружна површина на тој површини описана полупречником cd .

³²⁾ Лако се да показати, да ће управне које деле праву ab на n једнаких делова поделити и линију једнаког остојања cd на n једнаких делова. Према томе однос $cd : ab$ биће константан и зависан само од остојања ac . Пошто су стране полигоналне фигуре $dhk \dots$ линије једнаког остојања, то ће очевидно бити $cd : ab = dk : bf$ и т. д.

Ако се свака од ових страна смањи на нулу као граничну вредност, биће:

$$bf + fg + \dots \doteq \odot ab \text{ и } dh + hk + \dots \doteq \odot ed.$$

Биће дакле и

$$\odot ed : \odot ab = cd : ab.$$

Како је пак

$$\odot ed : \odot ab = \sin u : \sin v$$

то ће бити

$$cd : ab = \sin u : \sin v.$$

Ако се ас удаљи од bd у бесконачност, остаће $cd : ab$ па према томе и $\sin u : \sin v$ *константни*. А како $u \doteq R$ (§ 1) и како, ако је $dm \parallel bn$, $v \doteq z$, биће $cd : ab = 1 : \sin z$.³³⁾

Путању cd означимо са $cd \parallel ab$.³⁴⁾

Напомена. На основу става доказаног у §-у 25, у овом параграфу доказује Бољај став, да је однос између једне праве и њене линије једног остојања (однос $cd : ab$) раван $1 : \sin z$, т. ј. раван реципрочној вредности синуса угла паралелизма за остојање тих двеју линија.

§ 28.

Ако је $bn \parallel \rightarrow am$, ако се c налази на $\rightarrow am$ и ако је $ac = x$, биће (§ 23) $X = \sin u : \sin v$ (фиг. 13).

Јер ако су cd и ae управне на bn и $bf \perp am$, биће (као у §-у 27) $\odot bf : \odot cd = \sin u : \sin v$.³⁵⁾ Како је пак очевидно $bf = ae$,³⁶⁾ то је:

$$\odot ea : \odot dc = \sin u : \sin v.$$

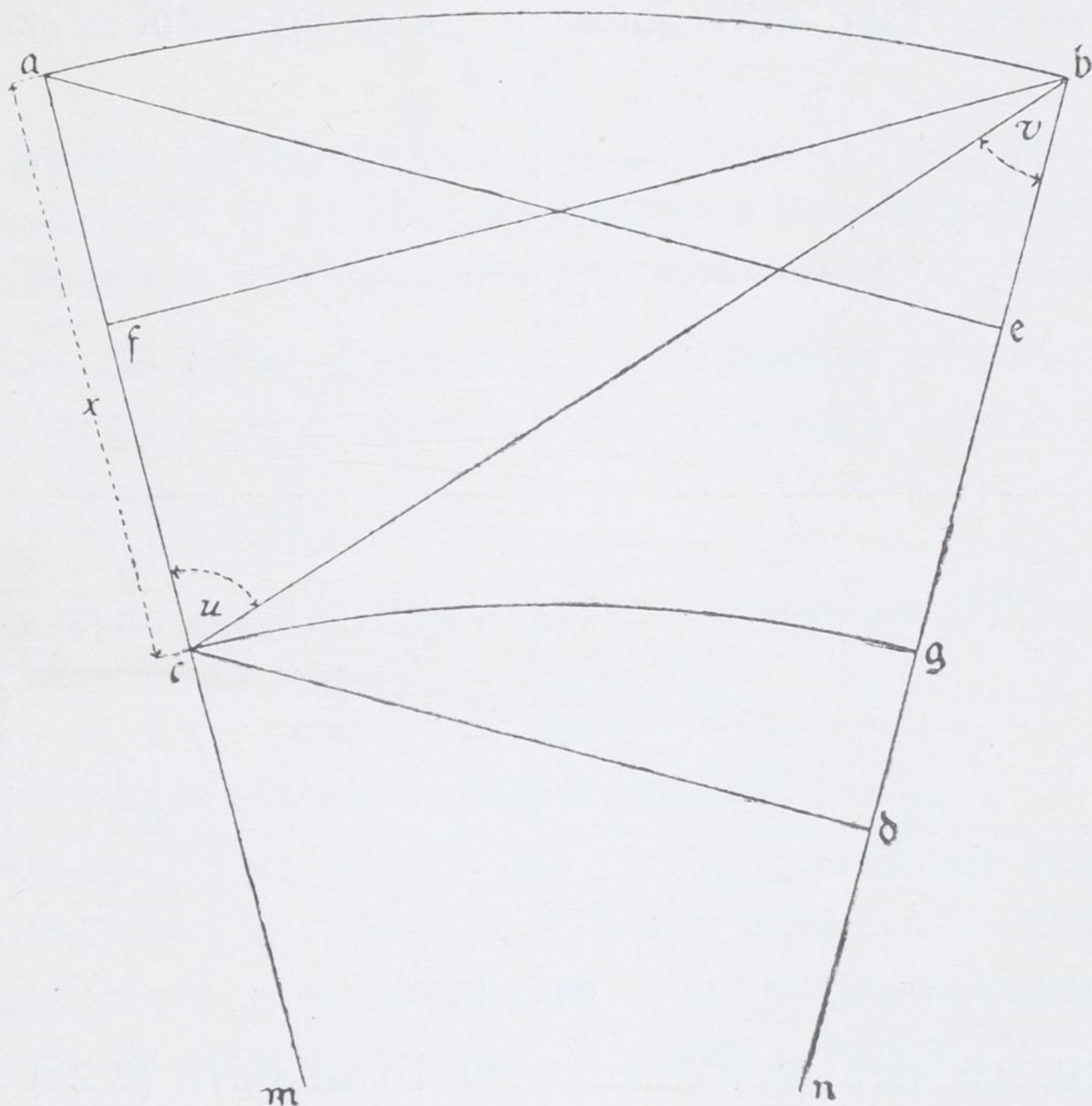
³³⁾ Што се год тачака a буде у фиг. 12 удаљавала више од тачке b , угао dab постајаће све мањи тако да ће у бесконачности бити $u = R$, да постаће $\parallel \rightarrow ba$ и v ће се претворити у угао паралелизма за остојање bd ($\rightarrow dm \parallel \rightarrow bn$ биће паралелна на другој страни паралелизма и $z = v$).

³⁴⁾ Што ће рећи да је cd свуда подједнако удаљено од ab (упор. прим. 16), одн. да је cd линија једнаког остојеља у односу на ab (упор. прим. 30).

³⁵⁾ По ставу доказаном у §-у 25 биће (у правоуглом троуглу bfc) $\odot bf : \odot bc = \sin u : 1$ и (у правоуглом троуглу bdc) $\odot cd : \odot bc = \sin v : 1$, дакле $\odot bf : \odot cd = \sin u : \sin v$.

³⁶⁾ Ако у фиг. 13 повучемо тетиву ab , биће (према дефиницији граничне линије) $\angle tab = \angle pba$, правоугли троугли abf и abe биће конгруентни и $bf = ae$.

Али пошто је (по §-у 21) у F — површинама оса am и cn (које секу $ambn$ у L — линијама ab и cg) $\odot ea : \odot dc = ab : cg = X$, то ће бити и $X = \sin u : \sin v$.



Фиг. 13

Напомена. У овом параграфу доказује Бољај став, да је однос X двају граничних лукова (ab и cg) за раздаљину x раван односу између синуса углова (u и v), које склапа дијагонала (bc) са осама (am и cn) у четвороуглу ($abcg$), чије су стране луци граничних линија и одсечци њихових оса.

§ 29.

Ако је $bam = R$, $ab = y$ и $bn \parallel am$, биће у систему S :

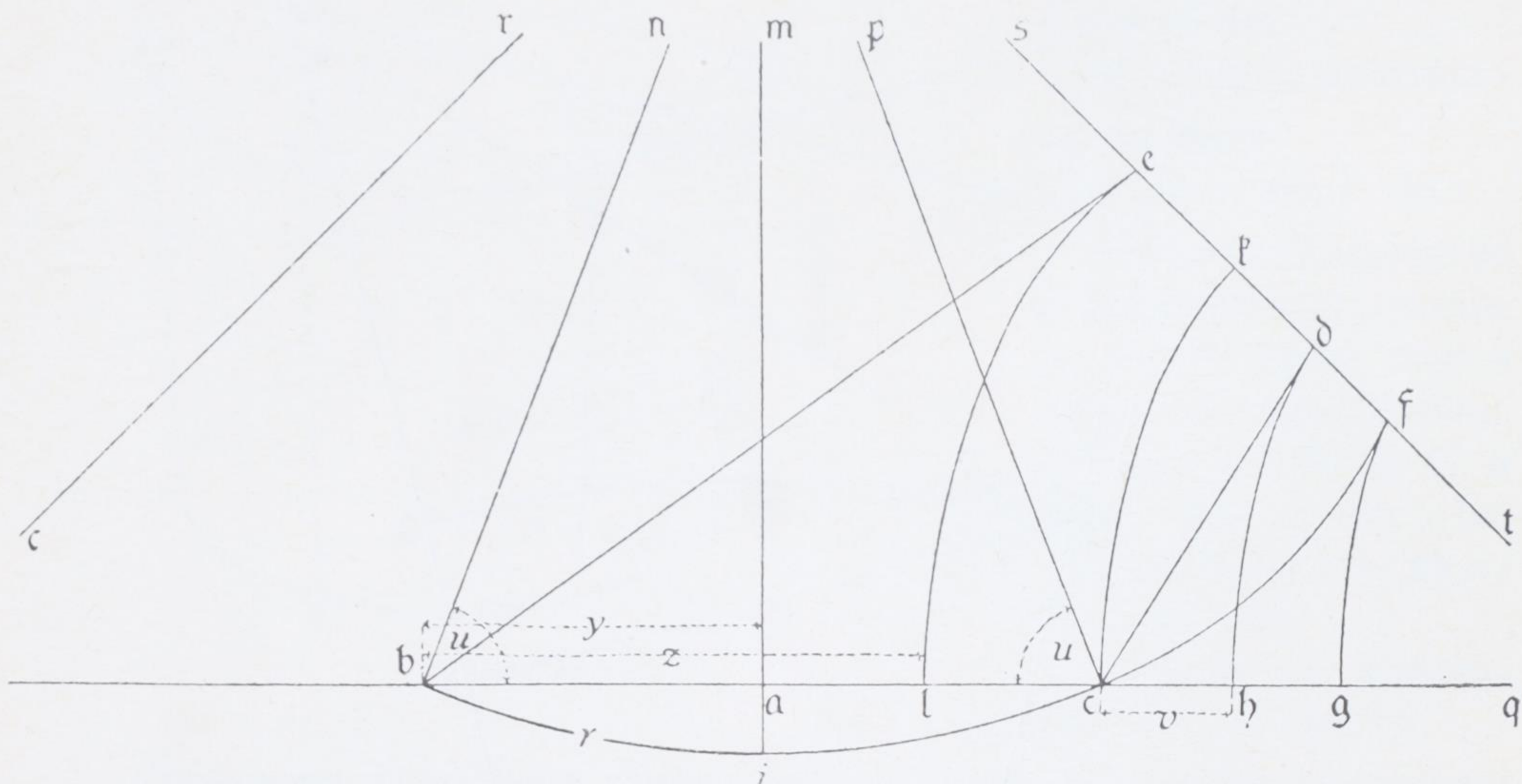
$$Y = \cotg \frac{1}{2} u \text{ (фиг. 14).}$$

Јер ако је $ab = ac$ и $cp \parallel am$ (према томе $bn \parallel \simeq cp$) и $pcd = qcd$, постојаће (§ 19) $ds \perp \overrightarrow{cd}$, тако да је $ds \parallel cp$, према томе (§ 1) и $dt \parallel cq$.³⁷⁾

³⁷⁾ Права cd , која полови угао pcq , својом дужином одређена је тако да она преставља остојање за угао паралелизма $pcd (= qcd)$. Према томе полуправа $\overrightarrow{ds}$, која је управна на cd , биће $\parallel cp$, и $\overrightarrow{dt} \parallel \overrightarrow{cq}$.

Ако је даље $be \perp ds$, биће (§ 7) $ds \parallel \overrightarrow{bn}$, према томе (§ 6) $bn \parallel es$, и (пошто је $dt \parallel cq$) $bq \parallel et$. Дакле је (§ 1) $ebn = ebq$.³⁸⁾

Нека је bcf L — линија осе bn , и нека су fg , dh , ck и el L — линије осе ft , dt , cq и et . Тада ће бити очевидно (§ 22) $hg = df = dk = hc$ ³⁹⁾ и $cg = 2ch = 2v$. Тако исто јасно је да је $bg = 2bl = 2z$. Али како је



Фиг. 14

$bc = bg - cg$, са чега је $y = z - v$,⁴⁰⁾ то ће бити (§ 24) $Y = Z : V$.⁴¹⁾ Напослетку имаћемо (§ 28):

$$Z = 1 : \sin \frac{1}{2} u^{42)} \text{ и } V = 1 : \sin \left(R - \frac{1}{2} u \right)^{43)}, \text{ дакле } Y = \cotg \frac{1}{2} u.$$

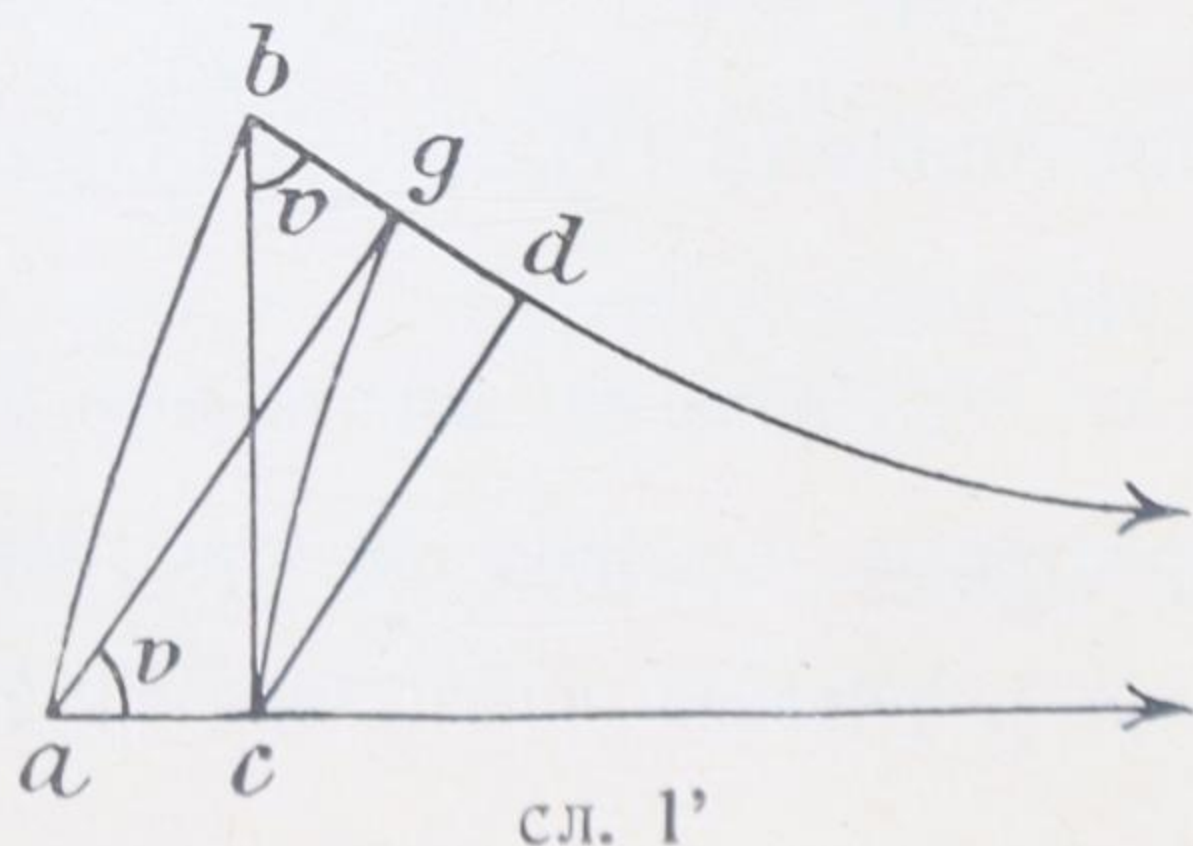
³⁸⁾ Пошто је $\overrightarrow{bn} \parallel \overrightarrow{es}$ и $bq \parallel et$ и пошто је $be \perp st$ у тачци e , то (по §-у 1) мора be половити угао nbq .

³⁹⁾ hg биће зато $= df$, што граничне линије dh и fg имају исте осе и према томе подједнако одстоје једна од друге; df је зато $= dk$, што граничне линије ck и cf леже симетрично у односу на управну cd (пошто је $\angle pcd = \angle qcd$, ck гранична линија за осу cq , а cf гранична линија за осу cp); напослетку dk је $= ch$ из истог разлога из ког је $df = hg$.

⁴⁰⁾ Ако се фиг. 14 допуни једном граничном линијом из тачке b за осу bq , та ће гранична линија сећи продужење полуправе es у тачци f' и лежати симетрично са граничном линијом bf у односу на управну be . Тада ће (упор. прим. 39) бити $ef = ef'$, $ef = lg$, $ef' = bl$, дакле $bl = lg$ и $bg = 2bl = 2z$. Како је даље $cg = 2hc = 2v$, $bc = 2y$ и $bc = bg - gc$, то је $y = z - v$.

⁴¹⁾ Упор. прим. 21.

⁴²⁾ Да би се увидела истинитост овог израза, треба Бољајево доказивање у прошлом параграфу допунити оним специјалним случајем у коме се остојање двеју граничних линија поклапа са остојањем управне из једне крајње тачке њихове на оси која полази из друге крајње тачке. Тај случај престављен је у фиг. 1'. Из фигуре



сл. 1'

Напомена. У овом параграфу, који преставља кључ неевклидске тригонометрије, изводи Бољај став, да је однос два гранична лука (Y) раван котангенти половине угла паралелизма који одговара остојању једнаком раздаљини (y) та два лука.

§ 30.

Лако се (према §-у 25) да увидети, да решење проблема *равне Тригонометрије* у систему S захтева изражавање периферије круга помоћу полупречника. А ово се може постићи ректификацијом L - линије (фиг. 15).

Нека су ab , cm и cm' управне на ac , и b макоја тачка полуправе ab . Тада ће бити (§ 25): $\sin u : \sin v = \overset{\rightarrow}{Op} : \overset{\rightarrow}{Oy}$ и $\sin u' : \sin v' = \overset{\rightarrow}{Op} : \overset{\rightarrow}{Oy'}$; дакле: $\frac{\sin u}{\sin v} \overset{\rightarrow}{Oy} = \frac{\sin u'}{\sin v'} \overset{\rightarrow}{Oy'}$.

Али како је по (§-у 27) $\sin v : \sin v' = \cos u : \cos u'$,⁴⁴⁾ то ће бити:

$$\frac{\sin u}{\cos u} \overset{\rightarrow}{Oy} = \frac{\sin u'}{\cos u'} \overset{\rightarrow}{Oy'}$$

или $\overset{\rightarrow}{Oy} : \overset{\rightarrow}{Oy'} = \tan u' : \tan u = \tan w : \tan w'$.

Нека су даље $cn \parallel ab$, $c'n' \parallel ab$ и cd , $c'd'$ L — линије управне на ab . Тада ће бити (§ 21) и $\overset{\rightarrow}{Oy} : \overset{\rightarrow}{Oy'} = r : r'$, дакле биће $r : r' = \tan w : \tan w'$.

Нека сада расте r почињући од a до y бесконачност; тада ће $w \doteq z$ и $w' \doteq z'$, са чега ће бити $r : r' = \tan z : \tan z'$.⁴⁵⁾

Означимо *константни* однос $r : \tan z$ (који је *независан* од r) са i .

Ако је $y \doteq 0$, биће: $\frac{r}{y} = \frac{i \tan z}{y} \doteq 1$,⁴⁶⁾ и према томе $\frac{y}{\tan z} \doteq i$.⁴⁷⁾

слеђује да је (по §-у 25) $\vec{O}bc : \vec{O}cd = 1 : \sin v$, дакле и (пошто је $ag = bc$) $\vec{O}ag : \vec{O}cd = 1 : \sin v$ и (по §-у 18) $ab : cg = 1 : \sin v$.

Како је z раздаљина граничних линија bf' (прим. 40) и le и како углу v у фиг. 1, одговара угао $\frac{1}{2}u$ у фиг. 14, то ће (на основу последње формуле) бити $Z = bf' : le = 1 : \sin \frac{1}{2}u$.

⁴³⁾ На основу извођења у претходној примедби лако је увидети, да ће за граничне линије sk и dh , чија је раздаљина v , бити $V = 1 : \sin \left(R - \frac{1}{2}u\right) = 1 : \cos \frac{1}{2}u$.

⁴⁴⁾ Из фиг. 12 у §-у 27 следовало је, да је $cd : ab = \sin u : \sin v = \text{const.}$ Како u (и u') у фиг. 15 одговарају углу $R - u$ у фиг. 12, то ће овде очевидно бити $\cos u : \sin v = \cos u' : \sin v'$ или $\cos u : \cos u' = \sin v : \sin v'$.

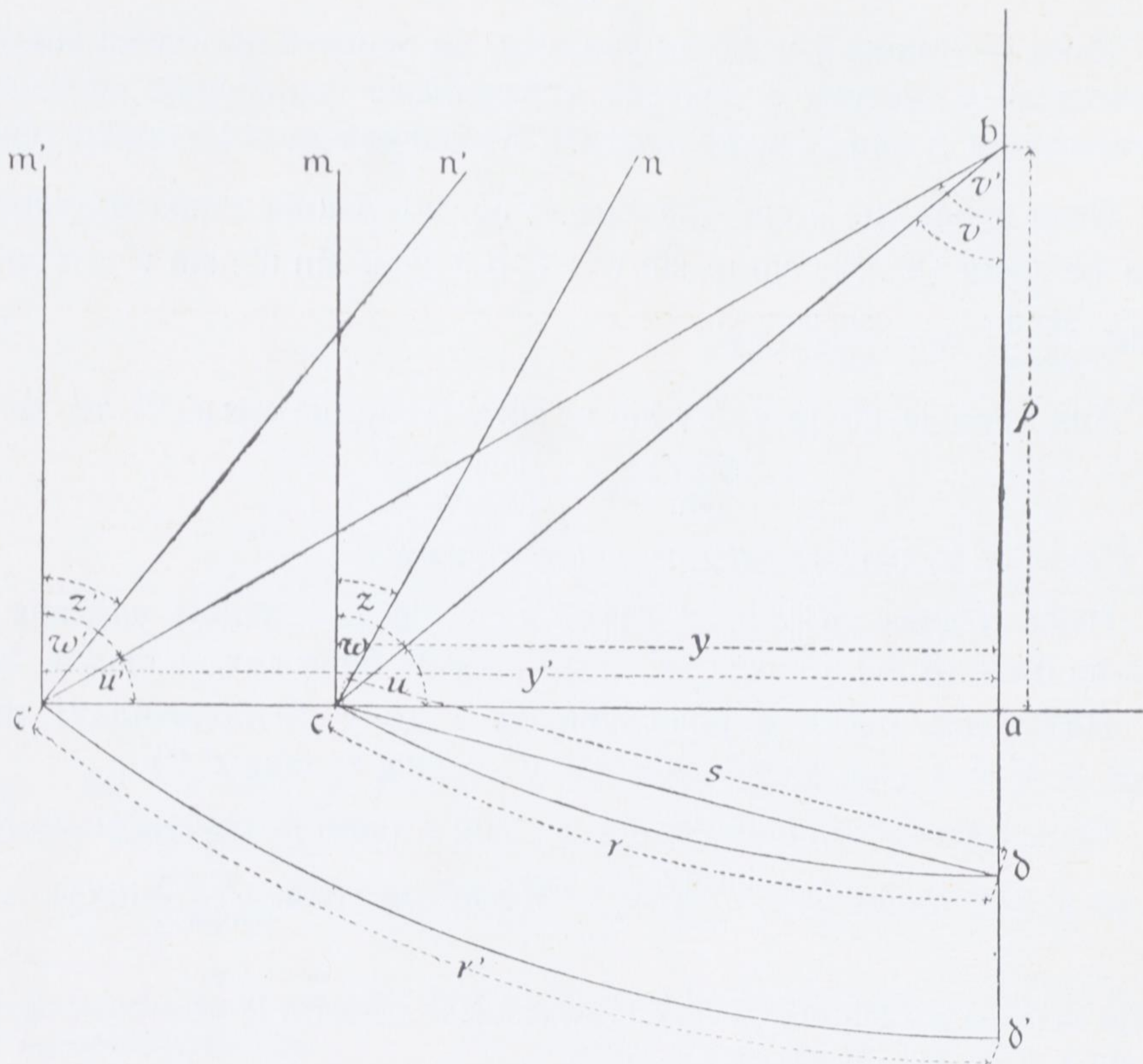
⁴⁵⁾ Кад r постане бесконачно очевидно да ће (упор. прим. 33) u прећи у угао паралелизма (за остојање y) и w у z (одн. w' у z').

⁴⁶⁾ Пошто је y половина тетиве лука граничне линије cd , то ће тетива и лук бивати све ближи по дужини што су краћи, тако да ће при прелазу ка граници пасти уједно. Стога ће за $y = 0$ бити $\lim \frac{r}{y} \left(= \lim \frac{i \tan z}{y} \right) = 1$.

⁴⁷⁾ Како је $\lim \frac{i \tan z}{y} = 1$ то је $\lim \frac{\tan z}{y} = \frac{1}{i}$ и $\lim \frac{y}{\tan z} = i$.

Из §-а 29 следује: $\operatorname{tang} z = \frac{1}{2} (Y - Y^{-1})$.⁴⁸⁾

Према томе $\frac{2y}{Y - Y^{-1}} \doteq i$,⁴⁹⁾ или $\frac{2y \cdot J \frac{y}{i}}{J \frac{2y}{i} - 1} \doteq i$.⁵⁰⁾



Фиг. 15

⁴⁸⁾ Пошто је $z = R - u$, то је $\operatorname{tang} z = \cotgu =$
 $= \frac{\cotg^2 \frac{u}{2} - 1}{2 \cotg \frac{u}{2}} = \frac{1}{2} \left(\cotg \frac{u}{2} - \frac{1}{\cotg \frac{u}{2}} \right) = \left(\text{пошто је } Y = \cotg \frac{u}{2} \right) = \frac{1}{2} (Y - Y^{-1}).$

⁴⁹⁾ Пошто је $\lim \frac{y}{\operatorname{tang} z} = i$ (прим. 47) и $\operatorname{tang} z = \frac{1}{2} (Y - Y^{-1})$, то је
 $\lim \frac{2y}{Y - Y^{-1}} = i.$

⁵⁰⁾ Како је по §-у 24 $Y = J \frac{y}{i}$ (зараздаљ. i два гранична лука), то је $\lim \frac{2y}{Y - Y^{-1}} =$
 $= \lim \frac{2y}{J \frac{y}{i} - \frac{1}{J \frac{y}{i}}} = \lim \frac{2y \cdot J \frac{y}{i}}{J \frac{2y}{i} - 1},$ па према томе и $\lim \frac{2y \cdot J \frac{y}{i}}{J \frac{2y}{i} - 1} = i.$

Познато је пак да је гранична вредност овог израза (за $y \doteq 0$) $\frac{i}{\log_{\text{nat}} J}$,⁵¹⁾ према томе је $\frac{i}{\log_{\text{nat}} J} = i$ и $J = e = 2, 7182818\dots$, познати број којисе и овде на тако необичан начин појављује. Ако дакле од сада i буде значило ону праву за коју је $J = e$, биће $r = i \operatorname{tang} z$. Како је пак (§ 21) $\bigcirc y = 2\pi r$, то ће бити: $\bigcirc y = 2\pi i \operatorname{tang} z = \pi i (Y - Y^{-1}) = \pi i \left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}} \right) = \frac{\pi y}{\log. \text{nat. } Y} (Y - Y^{-1})$ по §-у 24.⁵²⁾

Напомена 1. У овоме параграфу доказује Бољај најпре став, да је однос између полупречника (r) круга на граничној површини, чијем гранично-линијском пречнику ($2r$) одговара извесна тетива ($2y$), и тангенте угла (z), који је комплеменат угла паралелизма за половину те тетиве (за y), једна константна количина независна од величине полупречника r (ту константну количину он означава са i , тако да је $i = \operatorname{tang} z$). Затим Бољај доказује став, да је однос (J) два гранична лука, чија је раздаљина i , $= e$, т. ј. бази Неперових логаритама. И напоследку изводи формулу за величину периферије круга $\bigcirc y = \pi i \left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}} \right)$.

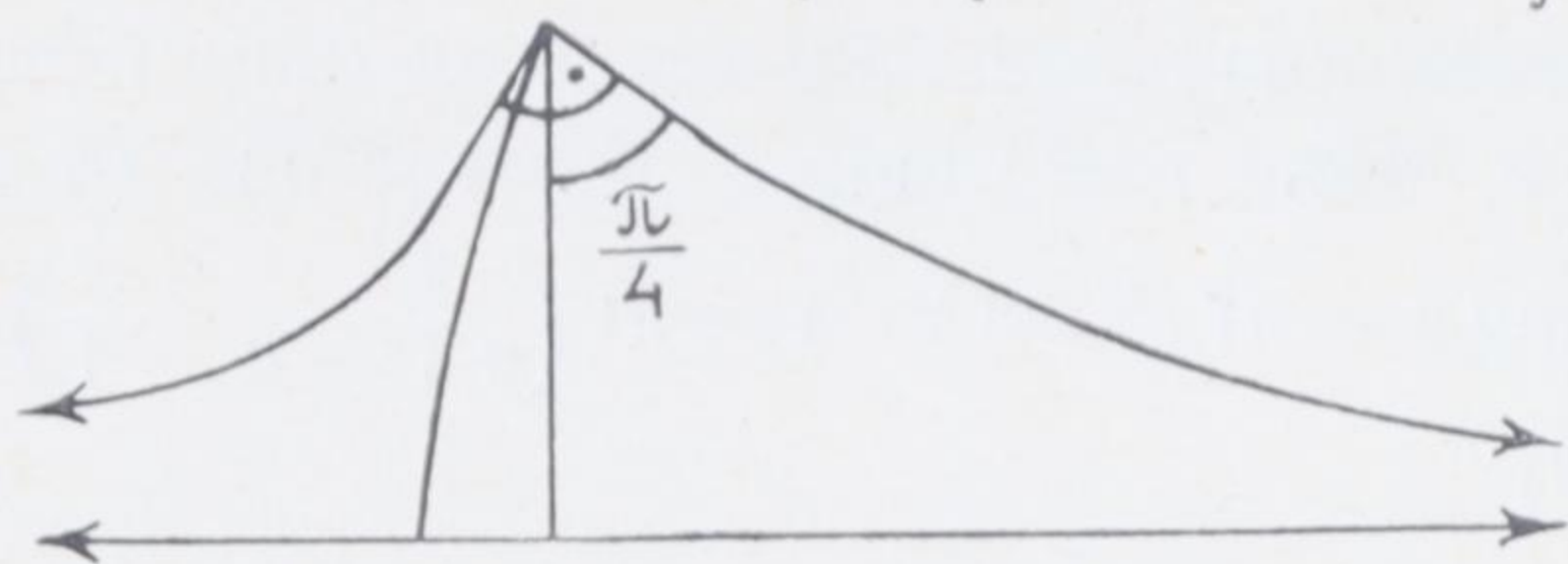
⁵¹⁾ Како израз $\frac{2y \cdot J^{\frac{y}{i}}}{J^{\frac{2y}{i}} - 1}$ за $y = 0$ постаје $= \frac{0}{0}$, то се његова гранична вредност одређује диференцијалним рачуном на следећи начин. Применом формула $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, $\frac{duv}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ и да $x = a^x \ln a \, dx$ биће: $\lim \frac{2y \cdot J^{\frac{y}{i}}}{J^{\frac{2y}{i}} - 1} = \lim \left[\frac{d 2y J^{\frac{y}{i}}}{dy} : \frac{d (J^{\frac{2y}{i}} - 1)}{dy} \right] = \lim \left[\left(2y \cdot \frac{J^{\frac{y}{i}} \ln J}{dy} + J^{\frac{y}{i}} \cdot \frac{d 2y}{dy} \right) : \frac{J^{\frac{2y}{i}} \ln J}{dy} \right] = \lim \frac{2y J^{\frac{y}{i}} \cdot \frac{\ln J}{i} + J^{\frac{y}{i}} \cdot 2}{J^{\frac{2y}{i}} \cdot \frac{\ln J}{i}}$. Како овај последњи израз за $y = 0$ постаје $= \frac{i}{\ln J}$, и како је с друге стране $\lim \frac{2y J^{\frac{y}{i}}}{J^{\frac{2y}{i}} - 1} = i$, то је $\frac{i}{\ln J} = i$, и према томе $\ln J = 1$, дакле $J = e$.

⁵²⁾ Како је (прим. 48) $\operatorname{tang} z = \operatorname{cotg} u = \frac{\operatorname{cotg}^2 \frac{u}{2} - 1}{2 \operatorname{cotg} \frac{u}{2}} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{cotg} \frac{u}{2} - \frac{1}{\operatorname{cotg} \frac{u}{2}} \right) = \frac{1}{2} (Y - Y^{-1})$, то је $2\pi i \operatorname{tang} z = \pi i (Y - Y^{-1})$.

Како је (по §-у 24) $Y = J^{\frac{y}{i}} = e^{\frac{y}{i}}$, то је $\pi i (Y - Y^{-1}) = \pi i \left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}} \right)$.

И напоследку, како из $Y = J^{\frac{y}{i}} = e^{\frac{y}{i}}$ следује да је $\ln Y = \frac{y}{i}$ и $i = \frac{y}{\ln Y}$, то је $\pi i \left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}} \right) = \frac{\pi y}{\ln Y} (Y - Y^{-1})$.

Напомена 2. Из формуле $i = \frac{r}{\tan z}$ следује за $z = \frac{\pi}{4}$ ($= 45^\circ$) да је $i = r$. Према томе лук граничне линије, код којег је тангента на оси у



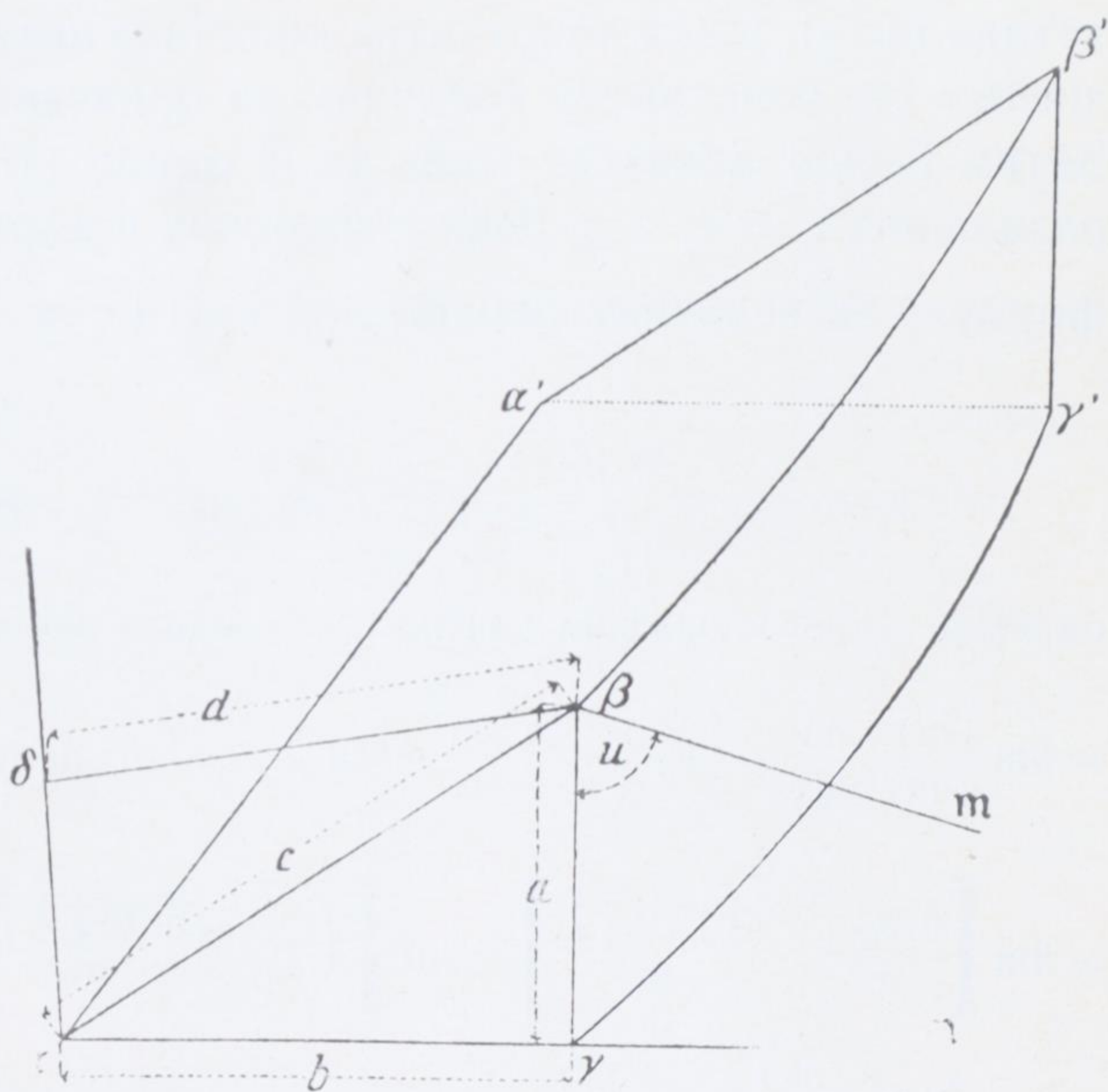
Сл. 2'

једној крајној тачци његовој паралелна продуженој оси у другој крајној тачци (в. сл. 2'), раван је по својој дужини константној количини i . (Упор. напр. *H. Liebmann, Nicht-euklidische Geometrie*, 3-te Aufl.

1923, § 18, s. 67). Како се i да конструисати, о томе види § 38.

§ 31.

За тригонометријско решавање свих правоуглих праволинијских троуглова (чиме је омогућено решавање свих троуглова) у систему S довољне су три једначине, наиме (означивши са a , b катете, са c хипотенузу, а са α и β углове наспрам катета) једна једначина која изражава однос *прво* између a , c , α , *друго* између a , α , β и *треће* између a , b , c . Из ове *остале* три следују елиминацијом⁵³) (фиг. 16).



Фиг. 16

I. Из §§-а 25 и 30 следује:

$$1 : \sin \alpha = (C - C^{-1}) : (A - A^{-1}) = \left(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}} \right) : \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}} \right), \quad (\text{једначина за } a, c, \alpha).^{54)}$$

⁵³) У немачкој обради Апендикса (н. н. м. s. 199) Бољај је на овом месту опширнији: „Из ових једначина произилазе наиме још три, које су, као што је познато, потребне зарад потпуног разрешења троуглова“.

⁵⁴) Из троугла $\alpha\beta\gamma$ следује (по §-у 25) да је $1 : \sin \alpha = \odot c : \odot a$, а како је $\odot c = \pi i (C - C^{-1})$ и $\odot a = \pi i (A - A^{-1})$, то је $1 : \sin \alpha = (C - C^{-1}) : (A - A^{-1}) = \left(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}} \right) : \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}} \right)$.

II. Из §-а 27 следује (ако је $\beta m \parallel \gamma n$)

$$\cos \alpha : \sin \beta = 1 : \sin u^{55});$$

како је пак по §-29-ом

$$1 : \sin u = \frac{1}{2} (A + A^{-1})^{56}),$$

то је $\cos \alpha : \sin \beta = \frac{1}{2} (A + A^{-1}) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}} \right)$, (једначина за α, β, a)⁵⁷⁾

III. Ако је $\alpha\alpha' \perp \beta\alpha\gamma$, и ако су $\beta\beta'$ и $\gamma\gamma' \parallel \alpha\alpha'$ ⁵⁸⁾, (§ 27), и ако је $\beta\alpha'\gamma' \perp \alpha\alpha'$ биће очевидно (као и у §-у 27)

$$\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\sin u} = \frac{1}{2} (A + A^{-1}),^{59)}$$

$$\frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2} (B + B^{-1}),$$

и

$$\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2} (C + C^{-1}).$$

Према томе је:

$$\frac{1}{2} (C + C^{-1}) = \frac{1}{2} (A + A^{-1}) \frac{1}{2} (B + B^{-1}),^{60)}$$

Ако се уведу хиперболне функције, чија аналитичка дефиниција гласи:

$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \tanh u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}, \quad \cotgh u = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}, \quad \operatorname{sech} u = \frac{2}{e^u + e^{-u}}$$

$$\operatorname{cosech} u = \frac{2}{e^u - e^{-u}}, \quad \text{претвориће се } 1 : \sin \alpha = \left(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}} \right) : \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}} \right)$$

у образац $\sin \alpha \cdot \sinh \frac{c}{i} = \sinh \frac{a}{i}$ (прва једначина).

Увођењем хиперболних функција Бољајеве трипонометријске формули за правоугли праволинијски троугао постају простије и прегледније.

⁵⁵⁾ Кад се фиг. 16 упореди са фиг. 12 види се да је (пошто α фиг. 16-е одговара углу R — у фигури 12 а угао β углу v) доиста $\cos \alpha : \sin \beta = 1 : \sin u$.

⁵⁶⁾ Како је у фиг. 16 $\cotg \frac{u}{2} = A = e^{\frac{a}{i}}$ и како је $\sin u = \frac{2 \cotg \frac{u}{2}}{\cotg^2 \frac{u}{2} + 1}$, то је

$$\sin u = \frac{2}{e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}} \text{ и } 1 : \sin u = \frac{1}{2} (A + A^{-1}).$$

⁵⁷⁾ На основу аналитичке дефиниције хипероболног косинуса (прим. 54) лако се да увидети, да је $\cos \alpha : \sin \beta = \cosh \frac{a}{i}$, дакле да је $\cos \alpha = \sin \beta \cosh \frac{a}{i}$, (друга једначина).

⁵⁸⁾ Што ће рећи, ако су $\beta\beta'$ и $\gamma\gamma'$ линије једнаког одстојања у односу на праву $\alpha\alpha'$.

⁵⁹⁾ Да је $\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\sin u}$ морало би нарочито да се докаже.

⁶⁰⁾ Пошто је $\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} \cdot \frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'}$.

или $e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}} \right) \left(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}} \right)$ (једначина за a, b, c).⁶¹⁾

Ако је $\gamma\alpha\delta = R$ и $\beta\delta = \alpha\delta$, биће $\odot c : \odot a = 1 : \sin \alpha$ и $\odot c : \odot (d = \beta\delta) = 1 : \cos \alpha$, дакле и (означавајући са $\odot x^2$, за макоју вредност од x , продукт $\odot x \cdot \odot x$) $\odot a^2 + \odot d^2 = \odot c^2$.⁶²⁾

Али како је (по §-у 27 и II)

$$\odot d = \odot b \cdot \frac{1}{2} (A + A^{-1})^{63)},$$

то је

$$\left(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}} \right)^2 \left(e^{\frac{b}{i}} - e^{-\frac{b}{i}} \right)^2 + \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}} \right)^2,$$

а ово је друга једначина за a, b, c ⁶⁴⁾ (чији се други члан може лако довести на један *симетричан* и *инвариабилан* облик).

Напоследку из

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{2} (A + A^{-1})^{65)}$$

и

$$\frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} (B + B^{-1}) \text{ следује (према III)}$$

$$\cotg \alpha \cotg \beta = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} \right) \text{ (једначина за } \alpha, \beta, c \text{).}^{66)}$$

Напомена. Са §-ом 31 завршава се излагање неевклидске Тригонометрије, које је отпочело у §-у 25-ом.

§ 32.

Још нам остаје да покажемо начин решавања *проблема* у систему S , а затим (пошто је то показано на лакшим примерима) рећи ћемо и шта је све ова теорија у стању да учини.

⁶¹⁾ Увођењем хиперболичног косинуса ова једначина добија облик $\cosh \frac{c}{i} = \cosh \frac{a}{i} \cdot \cosh \frac{b}{i}$ (трећа једначина).

⁶²⁾ Како је $\odot a^2 = \odot c^2 \sin^2 \alpha$ и $\odot d^2 = \odot c^2 \cos^2 \alpha$, то је $\odot a^2 + \odot d^2 = \odot c^2$.

⁶³⁾ На основу одељка II у овом §-у имамо да је $\cos \alpha : \sin \beta = \frac{1}{2} (A + A^{-1})$; пошто је пак $\odot d : \odot b = \cos \alpha : \sin \beta$, то је $\odot d = \odot b \cdot \frac{1}{2} (A + A^{-1})$.

⁶⁴⁾ Увођењем хиперболичких функција ова једначина добија облик $\sinh 2 \frac{c}{i} = \cosh^2 \frac{a}{i} \sinh^2 \frac{b}{i} + \sinh^2 \frac{a}{i}$.

⁶⁵⁾ Упор. примедбе 55 и 56.

⁶⁶⁾ Увођењем хиперболичног косинуса ова једначина добија облик $\cotg \alpha \cotg \beta = \cosh \frac{c}{i}$.

I. Нека је (фиг. 17) ab линија у равни и $y = f(x)$ њена једначина (у правоуглим координатама), нека је dz макакав прираштај $z - a$, и нека dx, dy, du означавају одговарајуће прираштаје $x - a, y - a$ и површине u која одговара $z - y$. Нека је даље $bh \parallel cf^{67}$), нека се $\frac{bh}{dx}$ изрази (на основу §§-а 31 и 27) у $y - y$ и нека се потражи *гранична вредност* од $\frac{dy}{dx}$ када dx тежи ка нули (што се уосталом увек подразумева када се једна таква гранична вредност одређује). Тада ће постати позната и гранична вредност од $\frac{dy}{bh}$, као и тангента угла hbg ; тако исто биће (пошто угао hbc очевидно није ни $>$ ни $<$ дакле је $= R$) *тангенџа* у тачци b на линију bg одређена у $y - y$.

II. Може се доказати да је

$$\frac{dz^2}{dy^2 + bh^2} \doteq 1.^{68)}$$

Одавде се изводи *гранична вредност* од $\frac{dz}{dx}$, а затим интеграцијом z (изражено у $x - y$.)

Кад је дата макаква *одређена* линија, њена једначина да се наћи у систему S , напр. једначина L — линије.

Јер нека је $\overrightarrow{am}$ оса од L ; тада ће свака полуправа $\overrightarrow{cb}$, која полази са $\overrightarrow{am}$, сећи L (пошто по §-у 19 свака права повучена из a поред $\overrightarrow{am}$ сече L). Али како је (ако је bn оса)

$$X = 1 : \sin cbn \text{ (§ 28),}$$

$$\text{и} \quad Y = \cotg \frac{1}{2} cbn \text{ (§ 29),}$$

$$\text{то је} \quad Y = X + \sqrt{X^2 - 1}^{69)}$$

$$\text{или} \quad e^{\frac{y}{i}} = e^{\frac{x}{i}} + \sqrt{e^{\frac{2x}{i}} - 1}$$

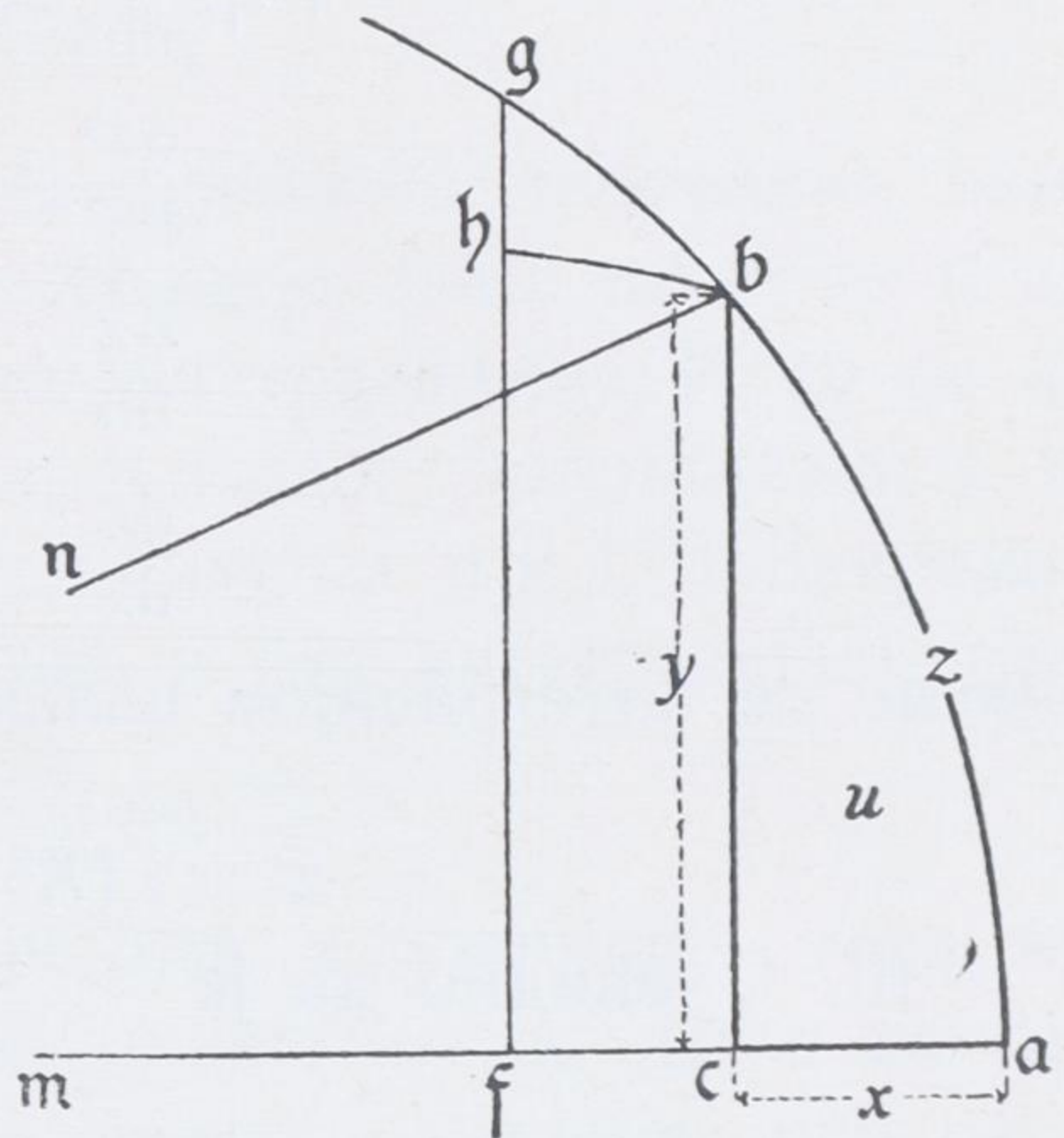
⁶⁷⁾ Т. ј. нека је bh линија једнаког остојања у односу на праву cf .

⁶⁸⁾ Друкчије написана ова формула добија облик: $dz^2 = dy^2 + bh^2$ и значи да за правоугли троугао неевклидске равни, чије су стране бескрајно мале, важи Питагорин образац Евклидове геометрије.

⁶⁹⁾ На основу формуле $\sin \alpha = \frac{2 \cotg \frac{\alpha}{2}}{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$ следује, из $X = 1 : \sin cbn$ и

$$Y = \cotg \frac{1}{2} cbn, \text{ да је } X = 1 : \frac{2 \cotg \frac{1}{2} cbn}{\cotg^2 \frac{1}{2} cbn + 1} = 1 : \frac{2Y}{Y^2 + 1} = \frac{Y^2 + 1}{2Y}. \text{ А решењем}$$

квадратне једначине $X \cdot 2Y = Y^2 + 1$, следује $Y = X + \sqrt{X^2 - 1}$.



Фиг. 17

тражена једначина.⁷⁰⁾ Одавде следује

$$\frac{dy}{dx} \doteq X \cdot (X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

и $\frac{bh}{dx} \doteq 1 : \sin cbn = X;$

према томе и $\frac{dy}{bh} \doteq (X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}},$

$$1 + \frac{dy^2}{bh^2} \doteq X^3 (X^2 - 1)^{-1},$$

$$\frac{dz^2}{bh^2} \doteq X^2 (X^2 - 1)^{-1},$$

$$\frac{dz}{bh} \doteq X (X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}},$$

и $\frac{dz}{dx} \doteq X^2 (X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}},$

одакле се интеграцијом налази (као у §-у 30)

$$z = i (X^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = i \cotg cbn.^{71)}$$

III. Очеvidно да је

$$\frac{du}{dx} \doteq \frac{hfcbh}{dx},$$

који израз (ако није зависан од у-а) има најпре да се изрази у у-у; па затим да се изведе и интеграцијом.

Ако је (фиг. 12) $ab = p$, $ac = q$, $cd = r$ и $cabdc = s$, моћи ће се (као под II.) показати да је

$$\frac{ds}{dq} \doteq r,$$

које је $= \frac{1}{2} p \left(e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}} \right),^{72)}$

одакле интеграцијом следује $s = \frac{1}{2} pi \left(e^{\frac{q}{i}} - e^{-\frac{q}{i}} \right).^{73)}$

⁷⁰⁾ Ако се у формули $X = \frac{Y^2 + 1}{2Y}$ (упор. пређашњу прим.) стави $X = e^{\frac{x}{i}}$ и $Y = e^{\frac{y}{i}}$, биће $e^{\frac{x}{i}} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{y}{i}} + e^{-\frac{y}{i}} \right)$ или (увођењем хиперболног косинуса) $\frac{x}{ei} = \cosh \frac{y}{i}$, што је краћи израз за једначину граничне линије.

⁷¹⁾ Ово је формула за дужину лука граничне линије. Увођењем хиперболног синуса формула добија облик: $z = i \sinh \frac{y}{i}$.

⁷²⁾ Ово је формула за дужину лука линије једнаког одстојања. Увођењем хиперболног косинуса формула добија облик: $r = p \cosh \frac{q}{i}$.

⁷³⁾ Ово је формула за површину чотворостране фигуре, чија је једна страна лук линије једнаког одстојања. Увођењем хиперболног синуса формула добија облик: $s = ip \sinh \frac{q}{i}$.

До овог се резултата може доћи и без интегралења.

Ако су (на показани начин) дате напр. једначина круга (по §-у 31 III), праве линије (по §-у 31. II), једног конусног пресека, моћи ће се одредити и површине ограничене овим линијама.

Лако се дâ увидети, да ће се (крива) површина t , која је (на остојању q) $\parallel$ са једном равном фигуром p , односити према овој фигури као друге потенције хомологих линија или као

$$\frac{1}{4} \left(e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}} \right)^2 : 1.^{74)}$$

Даље лако се да увидети да ће израчунавање запремине, извођено на исти начин, захтевати две интеграције (као што се и сам диференцијал овде може да одреди само интегралењем). И да се пре свега има да одреди запремина тела ограниченог површинама p и t и скупом свих управних на p , које спајају обиме од p и t .⁷⁵⁾ Запремину његову налазимо (како интегралењем тако и без интегралења) да је

$$= \frac{1}{8} \pi i \left(\frac{2q}{e^{\frac{q}{i}} - e^{-\frac{q}{i}}} \right) + \frac{1}{2} p q.^{76)}$$

Тако исто дају се у систему S одредити и површине тела, као и *кривине*, *еволуће* и *еволвенће* макаквих линија и т. д. Што се тиче кривине, она је у систему S или кривина саме L — линије, или се да одредити полупречником круга, или остојањем једне праве од криве која је $\parallel$ с овом правом. Као што се лако на основу раније реченог дâ показати, осим L — линије, кружних линија и кривих које су $\parallel$ са правом, нема у систему S никаквих других униформних линија.⁷⁷⁾

IV. За круг следује (као под III)

$$\frac{d\odot x}{dx} \doteq \odot x,$$

одакле се (по §-у 30) интегралењем добија

$$\odot x = \pi i^2 \left(e^{\frac{x}{i}} - 2 + e^{-\frac{x}{i}} \right).^{78)}$$

⁷⁴⁾ Ако се стране правоугаоника у равни означе са a и b , а одговарајуће стране правоугаоника на површини једнаког остојања (која за q одстоји од равни) са a_1 и b_1 , биће (према формули у прим. 72): $a_1 = a \cosh \frac{q}{i}$ и $b_1 = b \cosh \frac{q}{i}$, дакле $a_1 b_1 = a b \cosh^2 \frac{q}{i}$. Према трме биће $a_1 b_1 : ab = \cosh^2 \frac{q}{i} : 1$, што је идентично са горњим изразом.

⁷⁵⁾ Ово тело аналого је правој призми у Евклидовом простору, чија је основа p а висина h . Његова је горња површина крива површина једнаког остојања у односу на равну основу p , а остојање обе ове површине $= q$.

⁷⁶⁾ Увођењем хиперболног синуса ова једначина добија облик: $\frac{1}{4} \pi i \sinh \frac{2q}{i} + \frac{1}{2} p q$.

⁷⁷⁾ Упореди напомену уз § 17.

⁷⁸⁾ Увођењем хиперболног синуса формула за површину круга добија облик: $\odot x = 4 \pi i^2 \sinh^2 \frac{x}{2i}$.

V. За површину $cabdc = u$ (ограничену L-линијом $ab = r$, овој ||-ој $cd = y$ и правим линијама $ac, bd = x$)

биће (фиг. 9) $\frac{du}{dx} \doteq y$ и (§ 24) $y = re^{-\frac{x}{i}}$, одакле интегралењем следује

$$u = ri \left(1 - e^{-\frac{x}{i}} \right).$$

Ако x постане бесконачно биће у S — систему $e^{-\frac{x}{i}} \doteq 0$ и $u \doteq ri$. У следећем подразумеваћемо под овом граничном вредношћу величину фигуре $tabn$.

На сличан наћин начи ћемо, ако је p једна фигура на површини F , да је простор ограничен од p и скупа оса повучених из тачака које се налазе на обиму фигуре p , раван $\frac{1}{2}pi$.

VI. Нека је $2u$ угао у средишту лоптине калоте z , нека је p периферија највећег круга, и лук fs (угла u) $= x$ (фиг. 10); тада ће бити (§ 25)

$$1 : \sin u = p : \bigcirc bc,$$

а одатле $\bigcirc bc = p \sin u$.

$$\text{Међутим је } x = \frac{pu}{2\pi} \text{ и } dx = \frac{pdu}{2\pi}.$$

Даље је $\frac{dz}{dx} \doteq \bigcirc bc$, дакле $\frac{dz}{du} \doteq \frac{p^2}{2\pi} \sin u$, одакле (пнтеграцијом) следује да је:

$$z = \frac{\sinvers u}{2\pi} p^2. ^{79)}$$

Замислимо површину F у којој се налази периферија p (која пролази кроз средиште f лоптине калоте); замислимо кроз af и ac равни $\overline{fem}$, $\overline{sem}$ које ће бити управне на F и сећи је по feg и se ; и посмoтpимо L — линију cd (која је у c управна на feg) и L — линију cf . Тада ће бити (§ 20) $cef = u$ и (§ 21) $\frac{fd}{p} = \frac{\sinvers u}{2\pi}$, према томе $z = fd \cdot p$. Али како је (§ 21) $p = \pi \cdot fdg$, то је $z = \pi \cdot fd \cdot fdg$. Како је даље (§ 21) $fd \cdot fdg = fc \cdot fc$, то је $z = \pi fc \cdot fc = \odot fc$ у F .

Нека је сада (фиг. 14) $bj = cj = r$, па ће бити (§ 30)

$$2r = i (Y - Y^{-1}),$$

према томе (§ 21)

$$\odot 2r (yF) = \pi i^2 (Y - Y^{-1})^2.$$

Тако исто је (IV)

$$\odot 2y = \pi i^2 (Y^2 - 2 + Y^{-2}),$$

дакле је $\odot 2r (yF) = \odot 2y$,⁸⁰⁾ па према томе је *површина лоптине калоте z равна површини круга чији је полупречник штешива fc .*

⁷⁹⁾ Sinvers значи $\arcsin$.

⁸⁰⁾ Што ће рећи да кругови, чије периферије у површини F и равни падају уједно (в. напомену уз § 18), имају једнаке површине.

Одавде следује да је површина целе лопте $= \odot fg = fdg \cdot p = \frac{p^2}{\pi}$, да се дакле површине лопти односе као квадрати периферија њихових највећих кругова.

VII. На сличан начин налази се, да је запремина кугле у систему S

$$= \frac{1}{2} \pi i^3 (X^2 - X^{-2}) - 2 \pi i^2 x,^{81)}$$

да је површина која постаје обртањем линије cd око ab (фиг. 12)

$$= \frac{1}{2} \pi i p (Q^2 - Q^{-2}),$$

и тело описано од cabdc

$$= \frac{1}{4} \pi i^2 p (Q - Q^{-1})^2.$$

Како се пак сви они резултати који су почев од IV досада добивени могу извести и без интегралења, што се овде зарад крајкоће изоставља.

Може се доказати, да је гранична вредност сваког израза који садржи писме i (и који је према томе заснован на хипотези да постоји i), када i постане бесконачно, један израз који изражава вредност у систему Σ (т. ј. у хипотези да не постоји i), осим ако једначине не постају идентичне. Али не сме се помислити, да се сам систем може да мења (јер је он по себи и у себи одређен), већ само хипотеза, која се сукцесивно све дотле може мењати докле се не дође до каквог апсурда. Претпостављајући дакле да у таквоме изразу писме i, у случају да постоји систем S, означава ону јединствену количину за коју је $J = e$, у случају да Σ постоји узеве се речена гранична вредност место датог израза. И очевидно је, да сви изрази који произилазе из хипотезе да систем S стварно постоји (у овом смислу) важе апсолутно, па и онда када је сасвим непознато дали постоји систем Σ или тај систем не постоји.

Тако напр. из израза добивеног у § 30 лако се (како помоћу диференцијалења тако и без њега) налази позната вредност у систему Σ , наиме $\odot x = 2\pi x$; из I (§ 31), пошто се изведу потребне трансформације, следује једначина

$$1 : \sin \alpha = c : a;$$

из II пак $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = 1$ и, према томе, $\alpha + \beta = R$;

прва једначина у III постаје идентична, па према томе важи и у систему Σ иако у њему ништа не одређује; из друге пак следује да је $c^2 = a^2 + b^2$.

Све су ово познате основне једначине равне тригонометрије у систему Σ .

⁸¹⁾ Увођењем хиперболног синуса ова формула добија облик: $\pi i^2 \sinh \frac{2x}{i} - 2 \pi i^2 x$.

Даље се налази (из §-а 32) за површину и запремину у III да су $\text{обе} = \pi r^2$; из IV следује да је $\odot x = \pi x^2$; из VIII за сферу полупречника x да је $= \frac{4}{3} \pi x^3$.

Теореме које се налазе на крају одељка VI такође су *безусловно истините*.

§ 33

Остаје нам још да изложимо, шта управо наша теорија хоће и значи (као што је обећано у § 32),

I. Дали постоји систем Σ или неки од система S , остаје неодлучено.
 II. Све што следује из *лажности* XI-е аксиоме (увек у *смислу* §-а 32) *апсолутно* важи, и у овом *смислу* не оснива се ни на *каквој хипотези*. Постоји дакле једна *равна тригонометрија a priori*, у којој *једино* остаје *непознат* систем који *стварно* постоји и остају непознате само *апсолутне* величине у изразима, док би очевидно, кад би била та величана позната у једном *једином* случају, цео систем тиме био фиксиран. Сферна тригонометрија пак апсолутно је заснована у §-у 26 (На површини F важи геометрија која је потпуно аналога равној геометрији у систему Σ).

III. Ако би било *устврђено* да Σ постоји, ништа у овом погледу неби остало непознато; ако би пак било *устврђено* да Σ не *постоји*, тада би (§ 31), ако би (напр.) стране x , y и праволинијски од њих захваћени угао били у *једном специјалном случају даћи*, очевидно било немогуће да се троугао апсолутно реши, т. ј. да се априори одреде остали углови и однос треће стране спрам двеју датих, сем ако би односи X , Y били нађени. Ово последње било би пак могуће само ако би била *конкретно даћа* дужина a за коју је одговарајуће A познато. Тада би i било *природна јединица дужине* (као што је e база природних логаритама). А како се, при претпоставци да је i познато, ова дужина може конструисати са бар за праксу највећом могућом приближношћу, биће доцније показано.⁸²⁾

IV. Јасно је да се, у смислу под I и II изложеном, може све у простору решити аналитичком методом модерних (која, употребљена у оправданим границама, заслужује високу похвалу).

V. Напошетку наклоњеним читаоцима неће бити неугодно да виде да се, у случају да не постоји Σ већ S , може конструисати праволинијска фигура која је равна кругу.⁸³⁾

Напомена. У одељцима I, II и III овај је параграф допуна другом одсеку претходног параграфа, чији је први одсек (у одељцима од I — VII) излагао формуле за површину и запремину у неевклидској геометрији у вези са одговавајућим једначинама линија.

⁸²⁾ Упор. § 38.

⁸³⁾ Друкчије речено, квадратура круга постаје у неевклидској равни могућа. Упор. § 43 и напомену 1 уз тај параграф.

§ 34

Из тачке d повлачи се $dm \parallel an$ на следећи начин (фиг. 12).

Из d нека се спусти $db \perp an$; нека се из макоје тачке праве $\overline{ab}$ подигне $ac \perp an$ (у dba), и спусти $de \perp ac$. Тада ће бити (§ 2) $\odot ed : \odot ab = 1 : \sin z$, ако се претпостави да је $dm \parallel bn$.

Али $\sin z$ није > 1 , и ab није $> de$.⁸⁴⁾ Према томе квадрант описан из средишта a у бас полупречником који је $= de$, имаће са $\overrightarrow{bd}$ или заједничку тачку b или тачку o . У првом случају биће очевидно $z = R$ ⁸⁵⁾ У другом случају пак биће (§ 25)

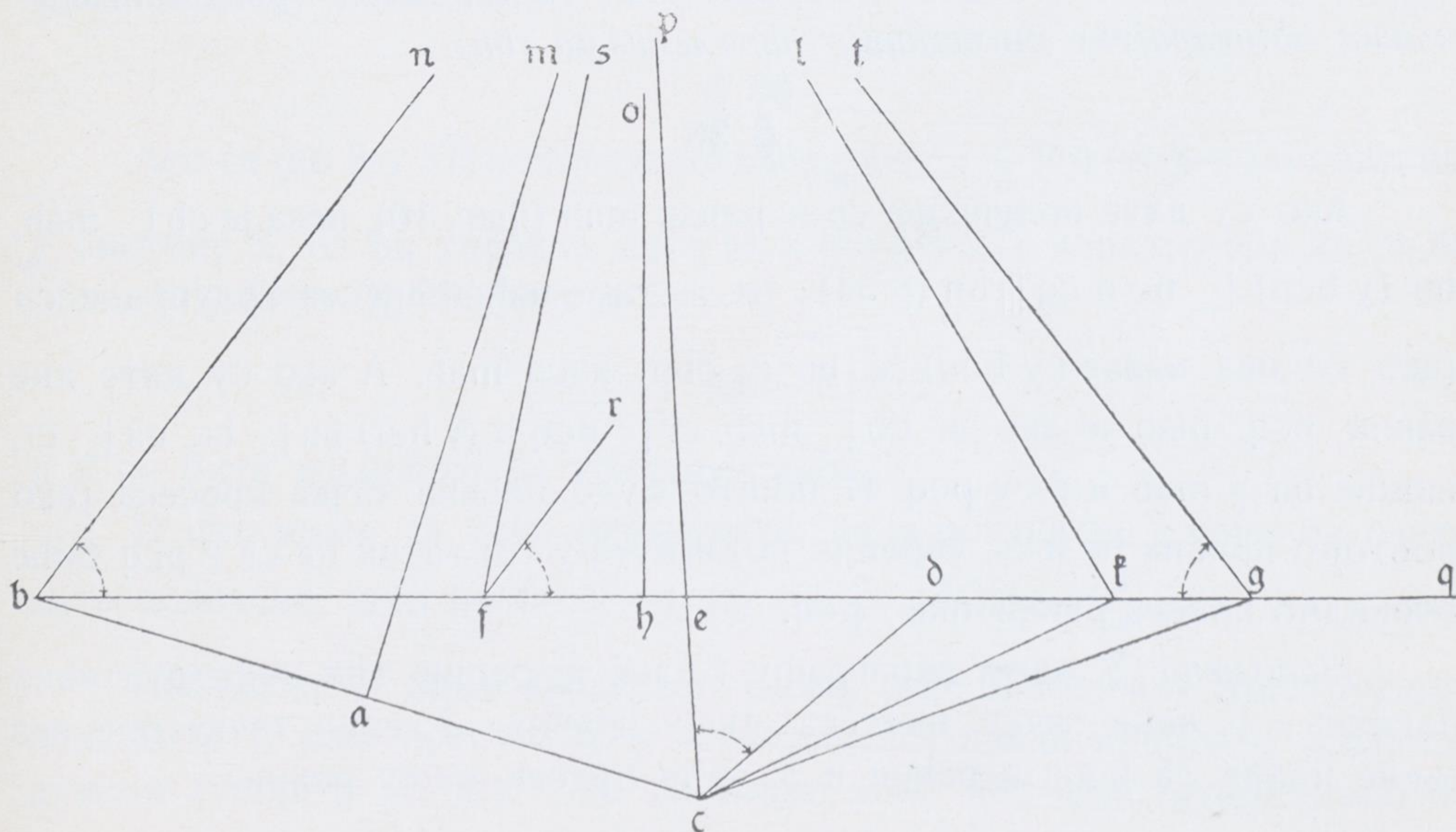
$$\odot ao (= \odot ed) : \odot ab = 1 \sin aob \text{ и } z = aob.$$

Ако се дакле направи $z = aob$, биће $dm \parallel bn$.

Напомена. У овом параграфу решио је Бољај конструктивни задатак, да се из дате тачке (d) повуче паралелна (dm) датој правој (bn). Задатак се може и овако формулисати: за дају дисјанцију паралелизма (db) конструисаши одговарајући угао паралелизма (z).

§ 35

Ако је дато S , на следећи начин да се повући права која је ујавна на једном краку оштриг угла а паралелна са другим краком (фиг. 18),



Фиг. 18

Нека је $am \perp bc$, и нека се узме $ab = ac$ тако мало (по §-у 19) да, кад се повуче $bn \parallel am$ (§ 34), буде $abn >$ од датог угла. Нека се даље повуче $cr \parallel am$ (§ 34) и нека су како pbq тако и pcd једнаки са датим углом. Тада ће

⁸⁴⁾ Како је $1 : \sin z \geq 1$, то је $\odot ed : \odot ab \geq 1$, дакле $ab \leq ed$.

⁸⁵⁾ Ово је Евклидов случај.

се $\overrightarrow{bq}$ и $\overrightarrow{cd}$ узајмно сећи. Јер нека $\overrightarrow{bq}$ (која *по конструкцији* пада у nb) сече cr у тачци e : тада ће бити (због тога што је $bn \simeq cr$) $ebc < ecb$, и $ec < eb$. Нека су $ef = ec$, $efr = ecd$, и $fs \parallel er$; тада ће fs падати у bfr . Јер пошто је $bn \parallel cr$, биће $bn \parallel er$ и $bn \parallel fs$ и даље ће бити (§ 14) $fbn + bfs < 2R = fbn + bfr$, дакле $bfs < bfr$. Стога ће $\overrightarrow{fr}$ сећи $\overrightarrow{er}$, дакле и $\overrightarrow{cd}$ сећи $\overrightarrow{eq}$ у једној извесној тачци d .⁸⁶⁾

Нека је сада $dg = dc$ и $dgt = dcr = gbn$; тада ће бити (пошто је $cd \simeq gd$)

$$bn \simeq gt \simeq cr.$$

Ако је k тачка L — линије осе bn , која пада на $\overrightarrow{bq}$ (§ 19), и kl оса, тада ће бити $bn \simeq kl$ и $bkl = bgt = dcr$, али и $kl \simeq cr$. Према томе ће очевидно тачка k пасти уједно са тачком g и бити $gt \parallel bn$.⁸⁷⁾ Ако се пак у средини праве bg подигне управна ho , биће конструисана $ho \parallel bn$.

Напомена. У овом параграфу Бољај је решио конструктивни задатак, да на једном краку (bq) датог оштрог угла (qbn) подигне управну (ho), која ће бити паралелна са другим краком (bn). Задатак се да друкчије формулисати и овако: *за даћи угао паралелизма (qbn) конструисаћи одговарајућу дисанцију паралелизма (bh).*

§ 36

Ако су дате полуправа $\overrightarrow{cr}$ и раван $\overline{tab}$ (фиг. 10), нека је $cb \perp \overline{tab}$, bn (у $\overline{bcr}$) $\perp bc$ и $cq \parallel bn$ (§ 34); па је тиме нађен пресек полуправе $\overrightarrow{cr}$ (ако се ова налази у bcq) са $\overrightarrow{bn}$ (у $\overline{cbn}$) и са $\overline{tab}$. А ако су дате две равни $\overline{rcq}$, $\overline{tab}$ и ако је $cb \perp \overline{tab}$, $cr \perp \overline{rcq}$ и (у $\overline{bcr}$) $bn \perp bc$, $cs \perp cr$, паће bn у $\overline{tab}$ и cs у $\overline{rcq}$. И пошто буде нађена тачка пресека (ако постоји) правих $\overline{bn}$ и $\overline{cs}$, управна подигнута у тој тачци на $\overline{cs}$ у $\overline{rcq}$ биће очевидно пресек равни $\overline{tab}$, $\overline{rcq}$.

Напомена. У овом параграфу Бољај је решио три конструктивна задатка: 1. наћи тачку пресека двеју правих; 2. наћи тачку пресека једне праве са једном равни и 3. наћи пресек двеју равни.

⁸⁶⁾ Пошто је наиме $\sphericalangle rfe = \sphericalangle ecd$, то се cd налази у истом положају у односу на полуправу $\overrightarrow{eq}$ у ком се fr налази у односу на er .

⁸⁷⁾ Како је cr (које је $\parallel bn$) оса граничне линије која пролази кроз тачке b и k , то је $\sphericalangle rsk = \sphericalangle lks$, т. ј. $kl \simeq cr$. Како је пак и $gt \simeq cr$, то ће kl (које је $\parallel bn$) пасти уједно са gt и бити $gt \parallel bn$ (пошто и k и g морају лежати на граничној линији која пролази кроз b и c).

§ 37

На $\overline{am} \parallel bn$ налази се тачка а која чини да буде $am \simeq bn$ (фиг. 7), ако се (по §-у 34) ван $\overline{bpm}$ конструише $gt \parallel bn$ и направи $bg \perp gt$, $gc = gb$ и $cp \parallel gt$, затим полураван $\overrightarrow{tgd}$ тако постави да са $\overrightarrow{tgb}$ заклапа исти угао који заклапа $\overrightarrow{pca}$ са $\overrightarrow{pcb}$ и (по §-у 36) потражи пресек $\overrightarrow{dq}$ полуравни $\overrightarrow{tgd}$, $\overrightarrow{pba}$, као и учини да буде $ba \perp dq$. Јер очевидно да ће, услед сличности L — линијских троуглова на површини F осе bn , бити $db = da$ и $am \simeq bn$.⁸⁸⁾

Из овога лако се увиђа (пошто су L — линије одређене својим *крајним тачкама*), да се могу наћи и крајне тачке четврте и средње пропорционале, и да се на овај начин све геометријске конструкције, које се у систему Σ изводе у равни, могу извести на површини F *без ујошребе XI-е аксиоме*. Тако напр. може се $4R$ поделити у произвољан број једнаких делова, ако се ова деоба да извести у систему Σ .

Напомена. У првом одељку овог параграфа Бољај је решио следећи конструктивни задатак: ако су дате две паралелне (am и bn), да се конструише права (ab), која ће са њима заклапати једнаке углове (dbn и dam).

§ 38

Ако се (по §-у 37) конструише напр. $nbq = \frac{1}{3}R$ и (по §-у 35) подигне, у систему S , на bq управна $am \parallel bn$ и (по §-у 37) конструише $jm \simeq bn$ (фиг. 14), биће (§ 28), ако је $ja = x$,

$$X = 1 : \sin \frac{1}{3}R = 2,$$

и x ће бити *геометријски* конструисано.

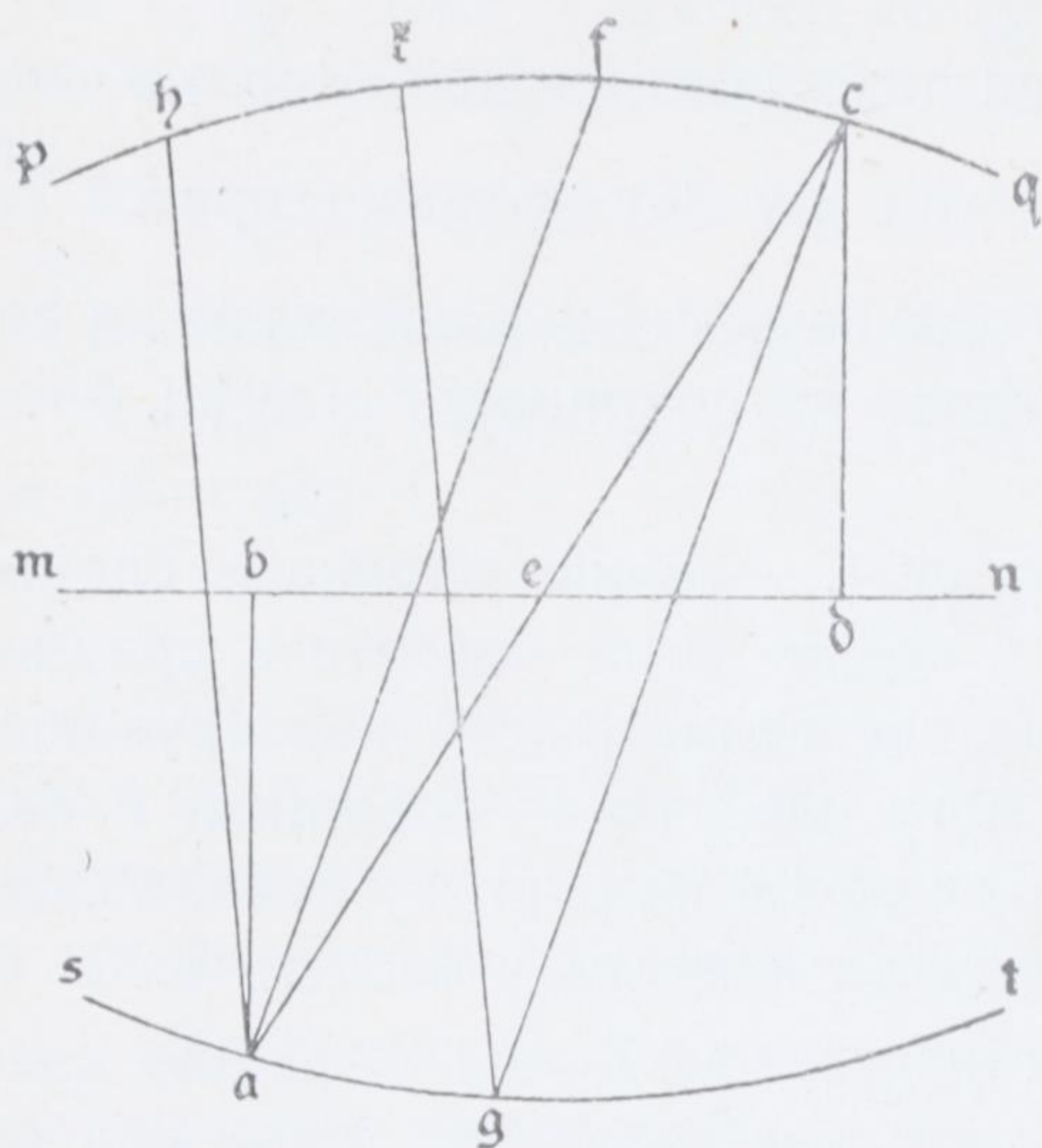
И nbq може се тако израчунати, да ja оступа од i мање од сваке дате количине, што ће бити случај ако је $\sin nbq = \frac{1}{e}$.

Напомена. У овом параграфу Бољај даје приближну конструкцију константе i , која преставља у неевклидској равни природну јединицу дужине (упор. § 33, III). Ако се наиме угао nbq конструише тако да износи $21^\circ 35'$ и $5''$, 63 биће $\sin nbq = \frac{1}{e}$ (упор. напомену 2 уз § 30).

⁸⁸⁾ У L — линијским троуглима (у фиг. 7) bdg и bac , који су слични (упор. напомену 1 уз § 21), биће $bg : bc = bd : ba$, а пошто је $bg = \frac{bc}{2}$ биће и $bd = \frac{ba}{2}$, дакле $bd = da$, а одавде следује да је и праволинијско $bd = da$. Пошто је $ba \perp dq$, то на основу §-а 8 следује да је $\sphericalangle dbn = \sphericalangle dam$.

§ 39

—Ако су (у равни) pq и $st \parallel$ са правом mn (§ 27) и ab, cd , које су управне на mn , једнаке⁸⁹⁾ (фиг. 19), биће очевидно $\triangle dec \equiv \triangle bea$ и углови (можда кривопростолинијски) $еср, еат$ такође конгруентни, као и $ес = еа$.



Фиг. 19

Ако је даље $cf = ag$, биће $\triangle acf \equiv \triangle sag$ и сваки од њих половина *четвороугла* $fagc$. Ако су $fagc, hagk$ два таква *четвороугла* над ag између pq и st , њихова једнакост увиђа се лако (као код *Евклида*), као и једнакост *троуглова* agc, agh , који имају заједничку *основицу* и чија *темена* леже у pq .

Даље су $acf = sag, gcq = cga$ и $acf + acg + gcq = 2R$ (§ 32), као и $sag + acg + cga = 2R$, тако да је у сваком оваком *троуглу* збир сва три угла $= 2R$.⁹⁰⁾

Било да ag (које је $\parallel mn$) пада уједно са правом ag било да не пада, јасно је да су како сами *праволинијски* *троугли* agc, agh тако и њихове *суме углова* међу собом једнаки.⁹¹⁾

§ 40

Једнаке *површине* *троугли* abc, abd (одсада *праволинијски*), који имају једну *сјрану* једнаку, имају једнаке *суме углова* (фиг. 20).

Јер нека mn пролази кроз *тачке* које *полове* ac и bc и нека је pq (која пролази кроз *тачку* c) $\parallel mn$; тада ће d падати у pq .

Јер ако полуправа $\overrightarrow{bd}$ буде секла $\overline{mn}$ у *тачки* e , а (§ 39) pq на *остојању* $ef = eb$, биће $\triangle abc = \triangle abf$ као и $\triangle abd = \triangle abf$, са чега ће d пасти уједно са f .

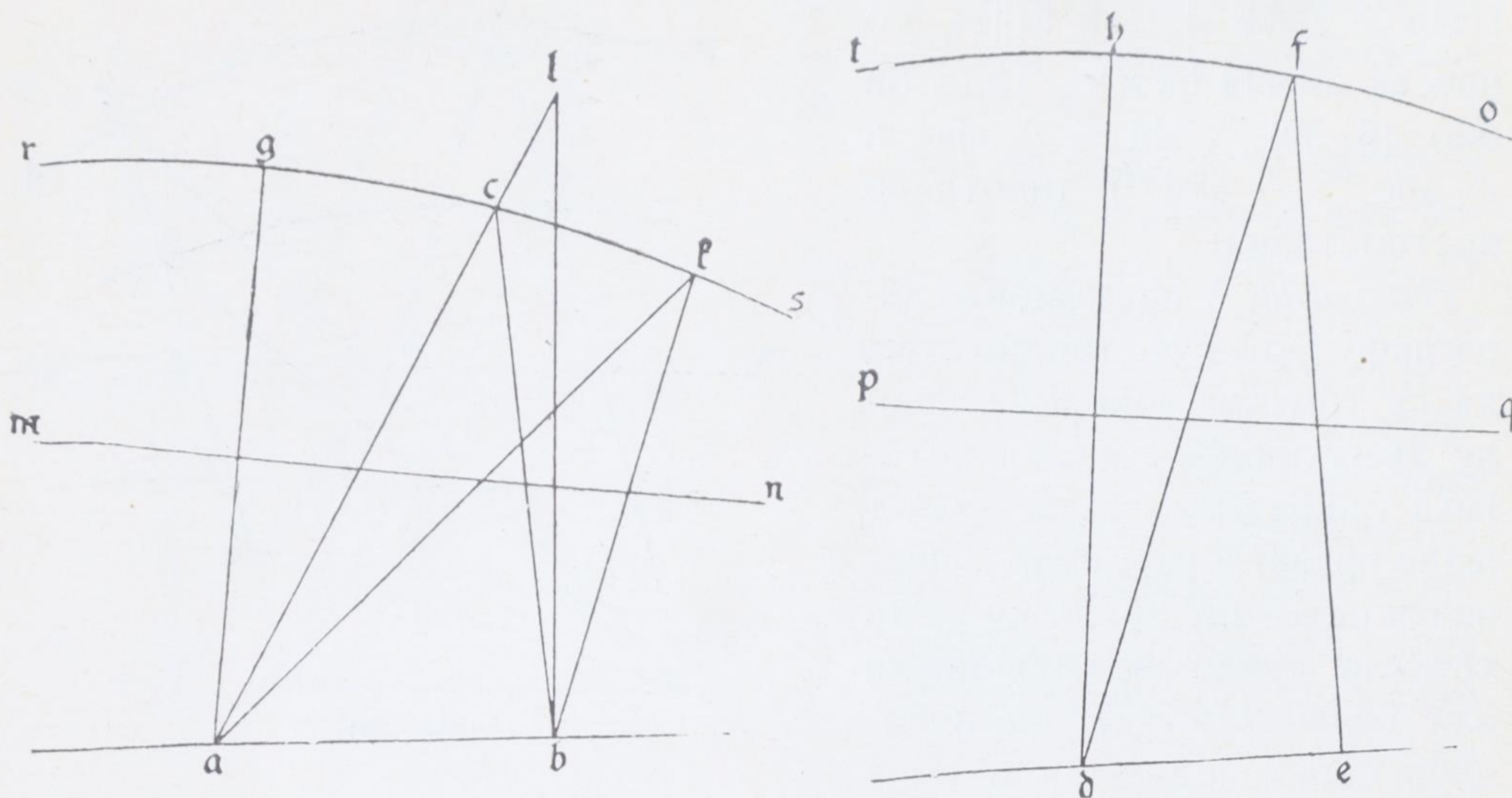
⁸⁹⁾ Друкчије речено, ако су pq и st *линије* једнаког *остојања* које подједнако *одстоје* од *праве* mn .

⁹⁰⁾ Према томе је у *троуглу* *фиг.* 19-е, који лежи између две *линије* једнаког *остојања* и чија је једна *страна* (ag у *фиг.* 19) *сегмент* *линије* једнаког *остојања* а друге две *стране* *праве* (ac, gc), збир *углова* $= 2R$.

⁹¹⁾ Ако *сегмент* *линије* једнаког *остојања* ag пада уједно са *правом* ag (у *фиг.* 19 треба *тачке* a и g спојити *правом* *линијом*), што је *Евклидов* *случај*, збир *углова* у *троуглима* agc, agh биће $= 2R$. Ако пак ag не пада уједно са *правом* ag , биће збир *углова* у *праволинијском* *троуглу* agc очевидно $< 2R$.

претходнога) ова два троугла, па према томе и троугли abc , abl , имати исти збир углова, одакле очевидно следује

$$bcl + blc + cbl = 2R.^{93)}$$



фиг. 21

Али (§ 31) сума углова у сваком троуглу износи, у систему S , $< 2R$. Тачка l пада дакле уједно са тачком c .

Напомена. У овом параграфу Бољај је доказао став, да је збир углова једнак у свима (праволинијским) троуглима који имају једнаку површину.

§ 42

Ако се комилементи збира углова до $2R$ у троуглу abc означи са u , а у троуглу def са v , биће $\triangle abc : \triangle def = u : v$ (фиг. 22).

Јер ако се сваки од троуглова acg , gch , hcb , dfk , kfe стави $= p^{94)}$, и $\triangle abc = mp$, $\triangle def = np$, и ако је s збир углова свакога од троуглова који је $= p$, биће очевидно:

⁹³⁾ Пошто се наине лако дâ показати да је, ако је збир углова у једном троуглу $= 2R$, тај збир у сваком троуглу $= 2R$, и ако је збир углова у једном троуглу $< 2R$, тај збир у сваком троуглу $< 2R$, и пошто би, ако је један троугао састављен из друга два (као што је $\triangle abl$ састављен из $\triangle abc$ и $\triangle bcl$), збир углова у целом троуглу могао бити једнак са збиром углова у једном од саставних троуглова (т.ј. збир углова у $\triangle abl$ једнак са збиром углова у $\triangle abc$) само ако би збир углова у троуглу уопште био $= 2R$, то би тај збир морао и у другом саставном троуглу ($\triangle bcl$) бити $= 2R$.

⁹⁴⁾ Друкчије речено, ако се троугли abc и def раставе у мање троугле, који ће сви бити по површини једнаки и $= p$.

$$2R - u = ms - (m - 1) 2R = 2R - m (2R - s)^{95})$$

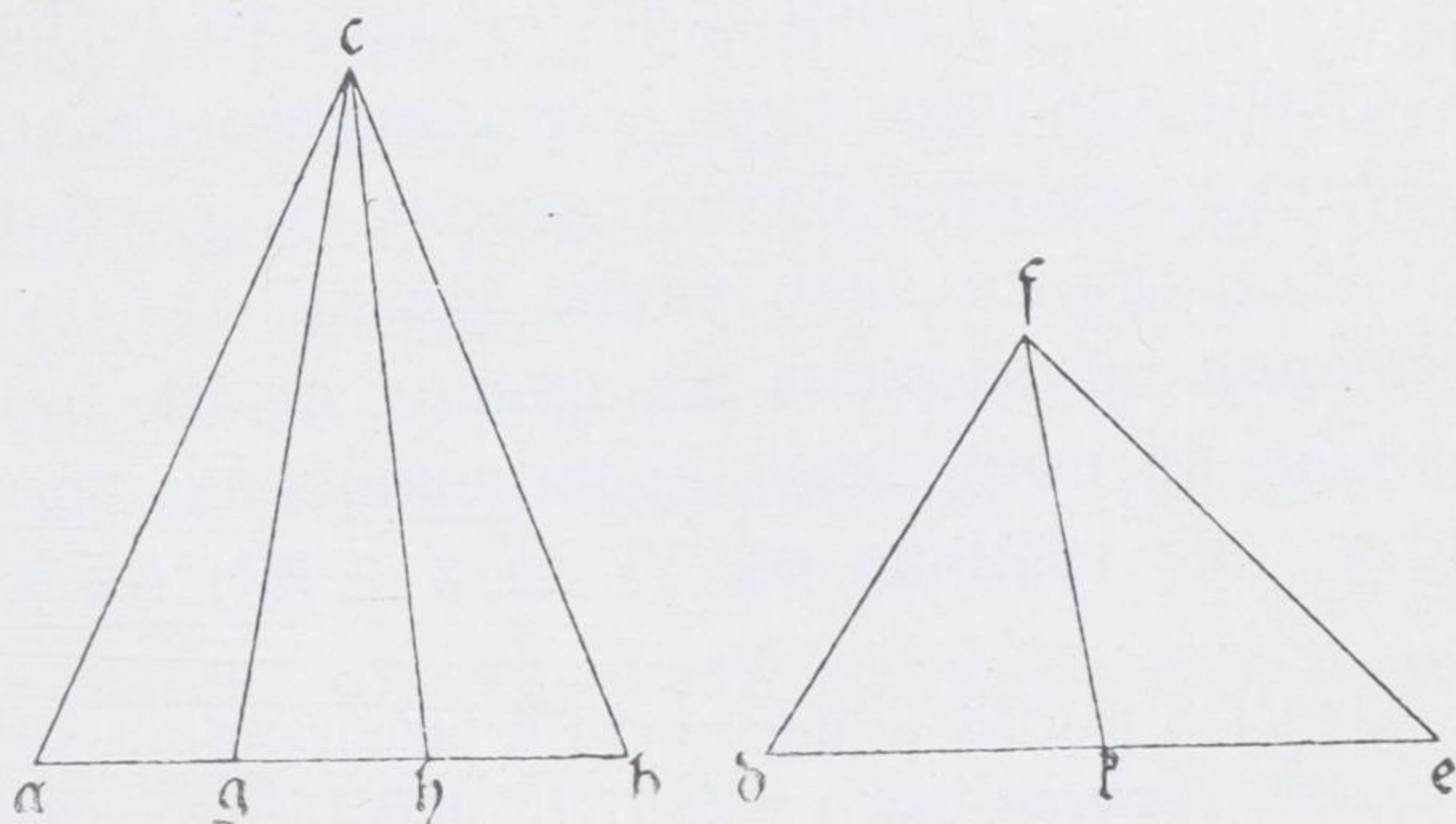
и $u = m (2R - s)$, као и $v = n (2R - s)$.

Према томе је

$$\triangle abc : \triangle def = m : n = u : v.^{96)}$$

Лако се увиђа да се став може проширити и на случај кад су троугли abc, def инкомензурабилни.

На исти начин се доказује, да се троугли на површини кугле односе као *ексцеси* збира њихових углова над $2R$. Ако су два угла сферног троугла прави, трећи z биће речени ексцес; али овај је тро-



фиг. 22

угао (ако се обим највећег круга означи са p) очевидно $= \frac{z p^2}{2\pi 2\pi}$ (§ 32, VI); према томе је сваки троугао, чији је ексцес $= z$, $= \frac{z p^2}{4\pi^2}$.

Напомена. У првом одељку овога параграфа Бољај је доказао став, да се површине два троугла у неевклидској равни односе као *дефекти* њихових збирова углова.

§ 43

Сада ћемо површину праволинијског троугла у систему S изразити збиром његових углова.

Ако ab (фигура 15) буде расло у бесконачност, биће (§ 42) $\triangle abc : (R - u - v)$ константно⁹⁷⁾. Али како $\triangle abc \doteq bacn$ (§ 32, V) и $R - u - v \doteq z$ ⁹⁸⁾ (§ 1), то је

$$bacn : z = \triangle abc : (R - u - v) = bac'n' : z'.$$

⁹⁵⁾ Збир углова у троуглу abc (т. ј. $2R - u$) биће очевидно раван збиру углова у троуглима acg, gch, hcb смањеном за збир углова у теменима g и h . Ако се збир углова у троуглима acg, gch, hcb , чији је број m , означи са s , биће (пошто је број тачака g, h и т. д. раван $m - 1$), $2R - u = ms - (m - 1) 2R$.

⁹⁶⁾ Пошто је $\triangle abc = mp$, $\triangle def = np$ и пошто је $m = \frac{u}{2R - s}$ и $n = \frac{v}{2R - s}$, то су $\triangle abc : \triangle def = m : n = u : v$.

⁹⁷⁾ Из формуле $\triangle abc : \triangle def = u : v$ (§ 42) следује $\triangle abc : u = \triangle def : v = \text{const.}$ Ако се ова константна вредност означи са λ , површина троугла са f , а дефект са u , биће очевидно $f = \lambda u$.

⁹⁸⁾ Како је наиме (фиг. 15) $\lim (R - u - v) = R - \lim u - \lim v = R - (R - z) = z$ то је $\lim (R - u - v) = z$.

Даље је очевидно $bdcn : bd'c'n' = z : z' = \operatorname{tg} z : \operatorname{tg} z'$ (§ 30).⁹⁹⁾
 Али за $y' \doteq 0$ имамо $\frac{bd'c'n'}{bac'n'} \doteq 1$ а тако исто и $\frac{\operatorname{tg} z'}{z'} \doteq 1$. Према томе је $bdcn : bacn = \operatorname{tg} z : z$.

Како смо нашли да је (§ 32)

$$bdcn = ri = i^2 \operatorname{tg} z, \text{ то је } bacn = zi^2 \text{ }^{100)}.$$

За сваки троугао, чији је z комплемент збира углова до $2R$ и који ће у будуће укратко бити означен са $\triangle$, биће према томе $\triangle = zi^2$.¹⁰¹⁾

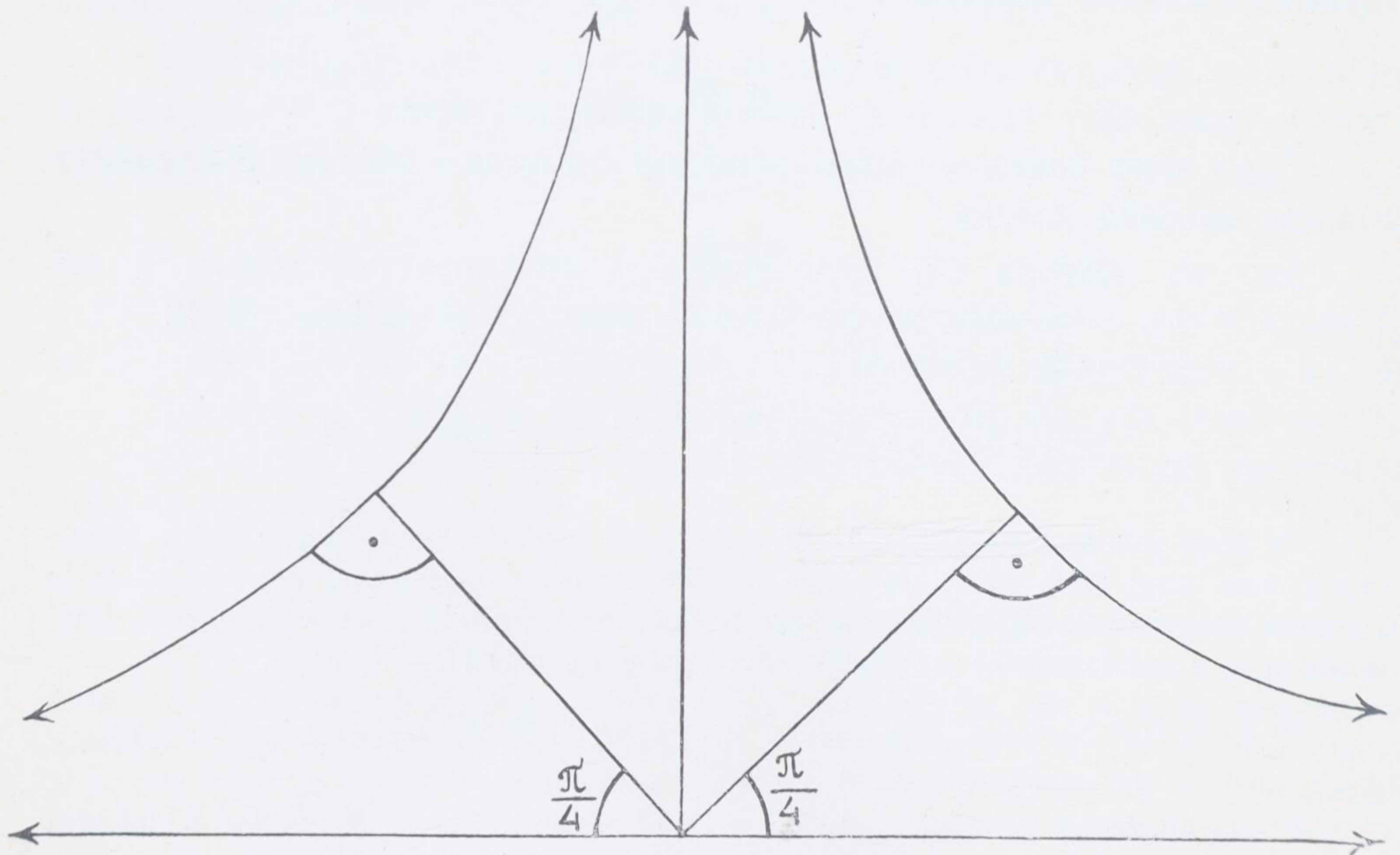
Одавде се лако увиђа да ће, ако је (фиг. 14) $or \parallel am$ и $ro \parallel ab$, површина обухваћена од правих or , st , bs (која је очевидно апсолутна граница за површине праволинијских троуглова који у бесконачност расту, или граница од $\triangle$ за $z \doteq 2R$) бити $= \pi i^2 = \odot i$ у F .¹⁰²⁾

⁹⁹⁾ По §-у 32 је $bdcn = ri$ и $bd'c'n' = r'i$, а по §-у 30 је $r = i \operatorname{tg} z$ и $r' = i \operatorname{tg} z'$.

¹⁰⁰⁾ Троугао $bacn$ у фиг. 15 представља *асимтоични* троугао чије се једно теме налази у бесконачности (пошто се паралелне cn и ab секу у бесконачности). Ако се са z означи комплемент угла паралелизма за дистанцију ac (коначну катету троугла), онда површина тога троугла $= zi^2$.

¹⁰¹⁾ Да је површина макаквог троугла неевклидске равни, ако се са z означи његов дефект, $= zi^2$, да се извести на следећи начин. Ако се површина троугла означи са f биће (упор. прим. 97) $f = \lambda z$; како из формуле за правоугли асимтоични троугао ($= zi^2$) следује да је $\lambda = i^2$, то је очевидно $f = zi^2$ за сваки троугао.

¹⁰²⁾ Да је површина асимтотичног троугла са *три* темена у бесконачности $= \pi i^2$, да се простије извести овако. Као што показује сл. 3', правоугли асимтотични



Сл. 3'

троугао са *два* темена у бесконачности састављен је из два правоугла асимтотична троугла са једним теменом у бесконачности, а асимтотични троугао са *три* темена

Ако ову граничну фигуру означимо са $\square$, биће даље (по §-у 30)

$$\pi r^2 = \operatorname{tg}^2 z \cdot \square = \odot r \text{ у } F (\S 21) = \odot s \text{ (по §-у 32, VI),}$$

ако се тетива ds означаи са s .

Ако се сада дати полупречник s круга у равни (или L -линијски полупречник круга у F) управном преполови, затим (по §-у 34) конструише $bd \parallel \simeq cn$, спусти управна са на db и подигне управна cm на са, добиће се угао z . Одавде да се (по §-у 37) *геометријски одредиши* $\operatorname{tg}^2 z$, пошто се за јединицу узме произвољно један L -линијски полупречник, *помоћу две униформне линије исте кривине*¹⁰³⁾ (које се, ако су дате само њихове крајне тачке, пошто се конструишу осе, могу узајмно мерити као праве линије и у овом погледу сматрати за идентичне са правим линијама).

Даље да се на следећи начин конструисати четвороугао, напр. правилни, који је $= \square$. Нека је (фиг. 23)

$$abc = R, bac = \frac{1}{2} R, acb = \frac{1}{4} R \text{ и } bc = x;$$

тада се да X (по §-у 31, II) изразити самим квадратним коренима и (по §-у 37) конструисати; а пошто је дато X , може се (по §-у 38, или и 29 и 35) одредити и само x .¹⁰⁴⁾ А осмоструки $\triangle abc$ очевидно да је $= \square$.¹⁰⁵⁾

у бесконачности из два асимптотична троугла са два темена у бесконачности. Пошто је, на основу формуле zi^2 , површина асимптотичног правоуглог троугла са једним теменом у бесконачности (у сл. 3') $= \frac{\pi}{4} i^2$, то је површина асимптотичног троугла са три темена у бесконачности (тзв. максималног асимптотичног троугла) $= 4 \cdot \frac{\pi}{4} i^2 = \pi i^2$,

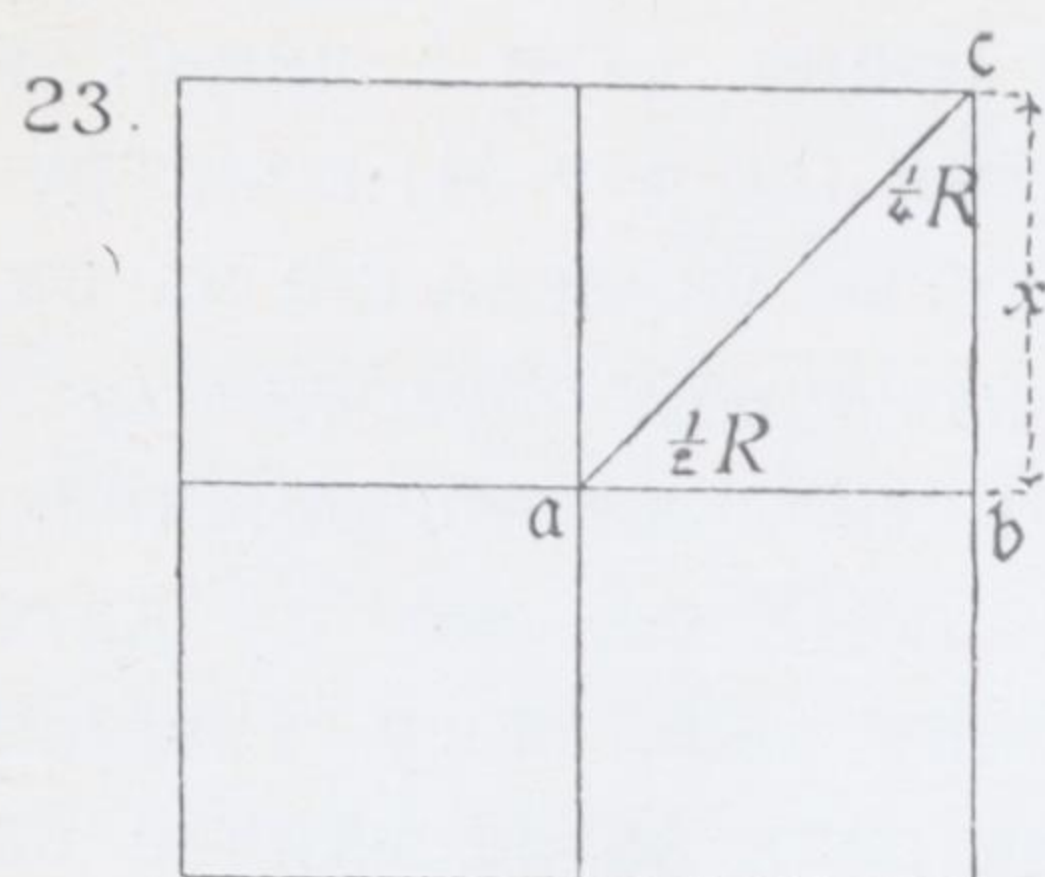
¹⁰³⁾ Ако се у правоуглом троуглу ABC (са правим углом у C) на граничној површини спусти из темена C управна CD на хипотенузу AB (читалац може лако сам конструисати дотичну фигуру) биће $AC^2 = AD \cdot AB$ и $BC^2 = DB \cdot AB$, према томе $AC^2 : BC^2 = AD : DB$. Ако се однос $AC : BC$ стави $= \operatorname{tg} z$, биће на овај начин (пошто је тада $AD : DB = \operatorname{tg}^2 z$) конструисано $\operatorname{tg}^2 z$.

$$\begin{aligned} &^{104)} \text{ На основу једначине } (\S 31, \text{ II}) \cos \alpha : \sin \beta = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}} \right) \text{ биће } \frac{\cos \frac{1}{2} R}{\sin \frac{1}{4} R} = \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{i}} + e^{-\frac{x}{i}} \right), \text{ одакле следује да је (пошто је } \cos \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ и } \sin \frac{1}{2} R = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}) \text{ је } \frac{x}{i} + e^{-\frac{x}{i}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \text{ и } e^{\frac{x}{i}} = X = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}}. \text{ Овај} \end{aligned}$$

последњи израз да се, пошто садржи само квадратне корене у себи, геометријски конструисати. Из X одређује се конструкцијом x слично конструкцији x -а у §-у 38 (Упор. *J. Frischauf*, *Absolute Geometrie nach Johann Bolayi*, 1872, § 63, s. 72 и д, и Anhang 11, стр. 96, као и *J. Frischauf*, *Elemente der absoluten Geometrie*, 1876, § 90, s. 94. Оба ова списа Фришауфа, иако престављају слободну обраду а не превод Апендикса, била су преводиоцу од знатне помоћи за разумевање текста, а послужила су му на више места и при коментарисању Апендикса).

¹⁰⁵⁾ Пошто је дефект $\triangle$ -а abc раван $\frac{\pi}{8}$, то је његова површина $= \frac{\pi}{8} \cdot i^2$. Према томе је површина квадрата (у фиг. 23) $= \pi i^2$

Према томе на овај начин круг у равни полујеречника s квадратиран је геометријски помоћу праволинијске фигуре и униформних линија исте врсте (које су, упоређене међусобно, еквивалентне са правим линијама);



Фиг. 23

иако истио је и круг на површини F комби-ниран на исти начин.¹⁰⁶⁾ Или је дакле исти-ниша XI-а Евклидова аксима или је могућа геометријска квадратура круга; иако остаје непознато која од ове две алтернативе одговара стварности.

Кадгод је $\text{tg}^2 z$ или цео број или рацио-налан разломак чији је именитељ (доведен на најпростији облик) или прост број об-лика $2^m + 1$ (где спада и $2 = 2^0 + 1$) или производ из произвољно много простих

бројева ове врсте, од којих се (са изузетком броја 2, који се једини може јавити произвољно много пута) сваки јавља само једанпут као фактор, тада је могуће, на основу теорије полигона славног Гауса (овог најве-личанственијег проналаска нашег и свих времена), конструисати једну праволинијску фигуру (и то само за речене вредности од z) која ће бити равна $\text{tg}^2 z \cdot \square = \odot s$.¹⁰⁷⁾ Јер подела $\square$ -а захтева (пошто се тео-рема §-а 42 да лако проширити на макакве полигоне) очевидно поделу угла $2R$, коју је (што се може показати) могуће геометријски извести само под реченим условом. У свима таквим случајевима оно што је напред речено лако доводи до циља. И свака праволинијска фигура да се геометријски претворити у правилни полигон од n страна, ако n има Гаусов облик.¹⁰⁸⁾

¹⁰⁶⁾ Т. ј. нађена је у неевклидској равни праволинијска фигура чија је површина једнака са површином круга у граичној површини.

¹⁰⁷⁾ Као што је познато, по Гаусовој теорији полигона правилни полигон од n страна да се конструисати шестаром и лењиром само ако се биномна једначина $x^n = 1$ (која преставља поделу кружне периферије на n једнаких делова) да решити сукце-сивним извлачењем квадратних корена. Ако је n прост број, то је могуће учинити само у оним случајевима када је n прост број облика $2^m + 1$ (при чему је m са своје стране потенција од 2, т. ј. $= 2^p$). Кад је пак n сложен број, тај сложен број мора бити $= 2^0 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \dots$ где су 3, 5, 17 ит.д. прости бројеви облика $2^m + 1$. На тај начин могућа је само конструкција правилних полигона од 3, 5, 17, 257 ит.д. страна, као и конструкција правилних полигона од 2^n и $2^n \cdot 3$, $2^n \cdot 3 \cdot 5$, $2^n \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$ итд. страна.

У случајевима у којима је могућа конструкција правилног полигона од n страна могуће је у неевклидској равни конструисати круг једнаке површине са једним полигоном само онда када је $\text{tg}^2 z$ или цео број или рационалан разломак $\frac{m}{n}$ (т. ј. раз-ломак у коме су m и n релативно прости цели бројеви). Најпростији је случај када је $\text{tg}^2 z = 1$, т. ј. када је $z = \frac{\pi}{4}$ (упор. напомену 2 уз § 30 и фиг. 2'): у овом случају праволинијска фигура, која има једнаку површину са кругом πr^2 , или је асимптотични троугао максималне површине (у фиг. 3') или квадрат (у фиг. 23). Ако је $\text{tg}^2 z = m > 1$

Још би остало (да би се предмет потпуно исцрпео) да се докаже да је немогуће (без икакве претпоставке) одлучити, дали систем Σ или један (и који) од система S стварно постоји. Али то ћемо оставити за другу згоднију прилику¹⁰⁹).

Напомена 1. У овом завршном параграфу свога Апендикса Бољај је најпре извео формулу за површину праволинијског троугла, па затим показао да је квадратура круга у неевклидској равни могућа. Као што је познато, та је квадратура у Евклидовој равни зато немогућа, што број π није корен једне алгебарске једначине која се да решити сукцесивним извлачењем квадратних корена, пошто је π трансцендентан број (т. ј. није уопште корен једне алгебарске једначине).

Напомена 2. Уз II-у свеску оригиналног издања Tentamen-а додао је отац Бољајев један додатак (Additamentum) Апендиксу (изашлом уз I-ву свеску Tentamen-а) који садржи 1 доказ да формуле равне (неевклидске) тригонометрије (пошто им се најпре да такав облик да стране у њима садрже фактор $\sqrt{-1}$) прелазе у формуле сферне тригонометрије кад се стране у њима поделе са $\sqrt{-1}$; и 2. извођење, да Питагорин образац Евклидове Геометрије $a^2 + b^2 = c^2$ следује из прве једначине под III у §-у 30 Апендикса. Како аутор Апендикса (упор. §32) примећује да се Питагорин образац да извести из друге а не из прве једначине под III, то морамо закључити да извођење из прве једначине припада првобитно Волфгангу Бољају. Тај се закључак потврђујд и чињеницом, да и писац Апендикса у немачкој обради његовој (н. н. м. стр. 201) тврди, да се Питагорин образац да извести из прве једначине.

Како према томе садржина Адитаментума не припада потпуно писцу Апендикса (иако ју Волфанг Бољај овоме приписује), то ми тај Адитаментум нећемо овде преводити. Читаоца, који се за њега интересује, упућујемо на издање Tentamen-а и Апендикса од стране мађарске Академије, као и на француски и енглески превод Апендикса.

онда је одговарајућа праволинијска фигура сложна из m оваквих најпростијих полигона. Ако је пак $\operatorname{tg}^2 z = \frac{m}{n}$, треба најпре конструисати правилни полигон од n страна чија је површина $= \pi i^2$, затим поделити га полупречницима повученим из средишта ка теменима на n једнаких троуглова, па ће праволинијска фигура сзстављена из m оваких троуглова бити по површини једнака са одговарајућим кругом.

¹⁰⁸) Односно овог претварања упор. примедбу Штекелову на стр. 273 у делу *W. und J. Bolayi, Geometrische Untersuchungen, Zweiter Teil, 1913 (hgb. v. P. Stäckel).*

¹⁰⁹) У немачкој обради Апендикса (публикованој у делу наведеном у претходној примедби) Бољај изрично тврди (стр. 201) да му је испало за руком да „са потпуном геометријском прецизношћу“ покаже, да се никада неће моћи утврдити стварна природа простора у односу на евклидски и неевклидски систем. Он то своје извођење није међутим нигде публикувао, а ни у његовим рукописима оно се није нашло.

