

Д-р БРАНИСЛАВ ПЕТРОНИЈЕВИЋ

PB $\frac{13}{267}$

НОВО ИЗВОЂЕЊЕ НЕЕВКЛИДОВИХ ГЕОМЕТРИЈА

ИЗ СХХХIV КЊИГЕ ГЛАСА СРПСКЕ КРАЉЕВСКЕ АКАДЕМИЈЕ

БЕОГРАД
ГРАФИЧКИ ЗАВОД „МАКАРИЈЕ“ А. Д.
1928

Г-ну Др-у А. Тимомовићу,
Из поштовања и оданости,
Петронијевић

PB $\frac{13}{264}$

НОВО ИЗВОЂЕЊЕ НЕЕВКЛИДОВИХ ГЕОМЕТРИЈА

од

Д-ра БРАНИСЛАВА ПЕТРОНИЈЕВИЋА

514.13(04)



023473

НОВО ИЗВОЂЕЊЕ НЕЕВКЛИДОВИХ ГЕОМЕТРИЈА

ОД Д-РА БРАНИСЛАВА ПЕТРОНИЈЕВИЋА

(Приказано на скупу Академије Природних Наука 22. октобра 1928.)

1

Претходна примедба

Као што је познато, *Бољај* и *Лобачевски* засновали су неевклидову геометрију полазећи од V-ог Евклидовог постулата (кога су негирали), док су се најзнатнији претходници њихови, *Сакери* и *Ламберт*, ставили на једно општије становиште, које је допуштало и неевклидову геометрију без паралелне¹. *Сакери* и *Ламберт* поставили су познате три хипотезе (правог, оштрог и тупог угла), при чему је *Сакери* те хипотезе (као и своје доказе) засновао на равнокраком четвороуглу са два права угла, док је *Ламберт* четвороугао са три права угла употребио за исти циљ².

У овој расправи покушао сам дати једно ново елементарно извођење неевклидових геометрија у духу *Сакерија* и *Ламберта*³.

¹ И најуспелије новије засновање (евклидове и) опште геометрије, које је извео *Хилберт* на подлози једног опсежног система постулата (упор. *D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie*, 5-te Aufl. 1922), изостаје у овом погледу иза *Сакери-Ламбертовог* становишта. Јер у *Хилбертовом* систему постулата морају се извесни постулати реда (Anordnung) и везе (Verknüpfung) променити (упор. напр. *W. Dieck, Nichtenklidische Geometrie in der Kugelebene*, 1918, s. 13—17) да би Евклидов постулат једне паралелне могао бити замењен постулатом ниједне паралелне, док таква промена није потребна ако се Евклидов постулат замени постулатом двеју паралелних. Види о томе *F. Baldus, Nichtenklidische Geometrie*, 1927, стр. 147 у вези са стр. 72 и д.

² *Сакеријев* и *Ламбертов* спис прештампани су у *Engel-Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, 1895, s. 45—135 и s. 152—207.

³ Ово извођење називамо елементарним зато што оно одговара тзв. елементарном правцу извођења неевклидових геометрија. Као што је наиме познато, постоје углавном три правца тога извођења: *елементарни, мет-*

Моја полазна тачка је став о егзистенцији двеју правих са заједничком управном, а при мојим доказима, који су много простији од Сакеријевих и Ламбертових, употребљени су како Сакеријев тако и Ламбертов четвороугао. Даље, моје извођење разликује се од њиховог и у томе што ја нигде у својим доказима не употребљавам *Архимедов постулат*⁴; као и у томе што њихове три хипотезе замењујем постулатима једнаке, веће и мање управне.

У садашњем чланку извођење иде до ставова о еквидистанцији, дивергенцији и конвергенцији двеју правих са заједничком управном. У будућем другом чланку биће доказани ставови о правима које се секу и не секу и о паралелним и, у вези са тим доказима, биће на елементаран начин изведени, поред неевклидових геометријских система, и неархимедови геометријски системи (уколико су оправдани).

Извођење следује као низ теорема при чијем доказивању се, поред познатих ставова о конгруенцији троуглова, претпостављају да важе, поред постулата конгруенције, и неколики постулати реда и везе као и неколики од њих зависни ставови.

2

Теореме

Прва теорема односи се на праве које имају заједничку управну, друга на једнакост углова у двоправоуглом равнокраком четвороуглу, теореме 3—11 тичу се формулисања постулата, док се теореме 12—20 односе на доказ њихове општности.

ричко-диференцијални и пројективни (упор. напр. чланак Б. Боноле, „Ueber die Parallelen-theorie und über die nichteuklidischen Geometrien“ у „Fragen der Elementargeometrie“ hgb. v. F. Enriques, 1923, стр. 263, 274 и 285). Елементарним назива се тај начин зато што је се њиме служио Евклид при извођењу (евклидове) геометрије у својим „Елементима“. Има преставника неевклидове геометрије који тврде, да је тај начин извођења најтежи (упор. напр. М. Симон, *Nicht-euklidische Geometrie in elementarer Behandlung*, 1925, који каже (стр. 1): „Der elementargeometrische Standpunkt ist ja geschichtlich der ursprüngliche, aber er ist zugleich weitaus der schwierigste“).

⁴ И Ламберт у својим доказима показује очиту тенденцију да се ослободи од овог постулата. Али тек М. Дену и, после њега, Б. Боноли испало је за руком, да се при доказу извесних ставова опште геометрије ослободи потпуно Архимедовог постулата (в. о томе Б. Бонола, *Die nicht-euklidische Geometrie*, 3-te Aufl. 1921, S. 27—31).

Теореме 21—38 садрже ставове о суми углова у троуглу и четвороуглу. Напоследку у теоремама 39—44 одређују се односи у величини који постоје између углова и између управних у случајевима трију постулата.

Теорема 1

У равни да се свакој датој правој наћи друга права која са њом има заједничку управну.

Доказ. У једној тачци дате праве постоји једна (и само једна) управна на ту праву. Ова ће управна очевидно бити заједничка управна за дату праву и за праву која је управна на тој управној дате праве.

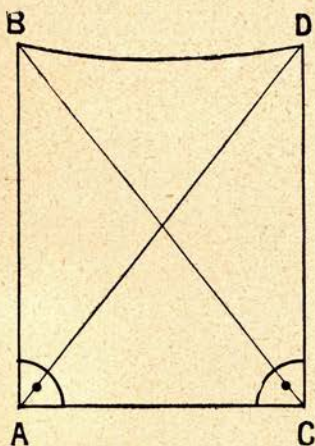
Теорема 2

Ако су у двоправоуглом четвороуглу незаједнички краци правих углова међу собом једнаки, једнаки су међу собом и друга два угла.

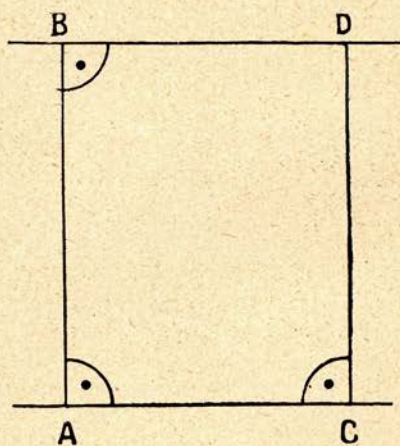
Доказ. У четвороуглу $ABCD$ (фиг. 1) $\triangle ABC$ конгруентан је са $\triangle ACD$ ($AB = CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle C = R$, $AC = AC$), одакле сле-
дује да је $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD$ и даље $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$. Услед тога је даље $\triangle ABD \cong \triangle BCD$ ($AD = BC$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$, $AB = CD$), одакле следује $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CDB$.

Теорема 3

Ако две праве имају заједничку управну и ако је друга управна по величини **једнака** са заједничком управном, у тро-



Фиг. 1



Фиг. 2

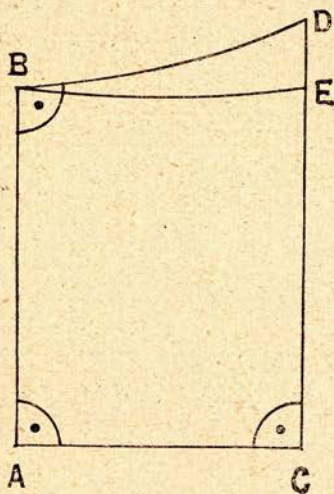
правоуглом четвороуглу који на тај начин постаје четврти угао је прав.

Доказ. Из теореме 2 следује непосредно да ће, ако је у троправоуглом четвороуглу $ABCD$ (фиг. 2 на 23 ој страни) $CD = AB$, $\sphericalangle CDB (= ABD)$ бити $= R$.

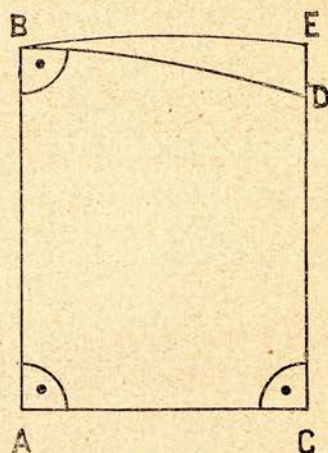
Напомена. Претпоставку, да је друга управна једнака са заједничком управном, назваћемо *постулатом једнаке управне*.

Теорема 4

Ако две праве имају заједничку управну и ако је друга управна **већа** од заједничке управне, у троправоуглом четвороуглу који на тај начин постаје биће четврти угао оштар.



Фиг. 3



Фиг. 4

Доказ. Пошто је по претпоставци $CD > AB$ (фиг. 3), нека је $CE = AB$. Тада ће с једне стране бити (по Евклиду I, 16) $\sphericalangle CEB > CDB$, а с друге стране (по теореме 2) $\sphericalangle CEB = ABE$. Према томе биће $\sphericalangle CDB (< CEB = ABE) < R$.

Напомена. Претпоставку, да је друга управна већа од заједничке управне, назваћемо *постулатом веће управне*.

Теорема 5

Ако две праве имају заједничку управну и ако је друга управна **мања** од заједничке управне, у троправоуглом четвороуглу који на тај начин постаје биће четврти угао туп.

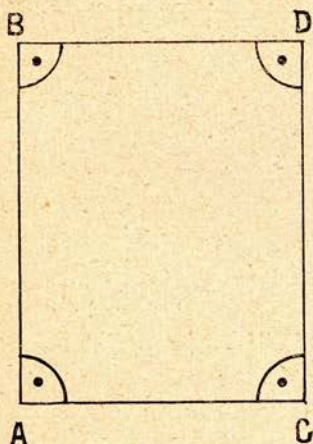
Доказ. Пошто је по претпоставци $CD < AB$ (фиг. 4 на 24-ој страни), нека је $CE = AB$. Тада ће с једне стране бити (Евклид I, 16) $\angle CDB > \angle CEB$ а с друге стране (по теореме 2) $\angle CEB = \angle ABE$. Према томе је $\angle CDB (> \angle CEB = \angle ABE) > R$.

Напомена. Претпоставку да је друга управна мања од заједничке управне назваћемо *постулатом мање управне*.

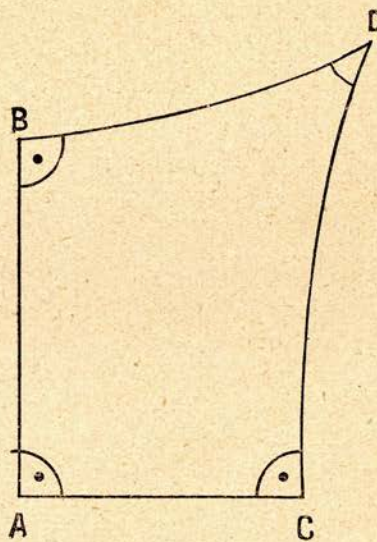
Теорема 6

Ако две праве имају заједничку управну и ако друга управна и са другом правом заклапа **їправ** угао, друга је управна по величини једнака са заједничком управном.

Доказ. Овде су могућа три случаја: или $CD > AB$ или $CD < AB$, или $CD = AB$ (фиг. 5).



Фиг. 5



Фиг. 6

Кад би било $CD > AB$, морао би, по теореме 4, $\angle CDB$ бити мањи од R , што противречи претпоставци.

Кад би било $CD < AB$, морао би, по теореме 5, $\angle CDB$ бити већи од R , што такође противречи претпоставци.

Према томе може једино бити $CD = AB$.

Теорема 7

Ако две праве имају заједничку управну и ако друга управна заклапа **ошїпар** угао са другом правом, ова друга управна мора бити већа од заједничке управне.

Доказ. Могућа су три случаја: $CD = AB$, $CD < AB$ и $CD > AB$ (фиг. 6 на 25-ој страни).

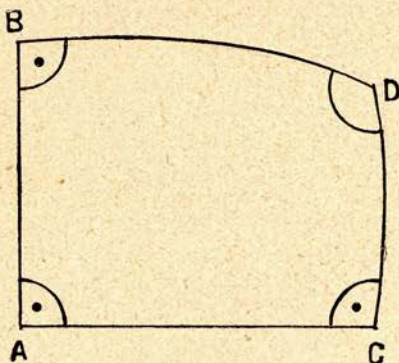
Кад би било $CD = AB$, морао би, по теореме 3, $\sphericalangle CDB$ бити $= R$, што противречи претпоставци.

Кад би било $CD < AB$, морао би, по теореме 5, $\sphericalangle CDB$ бити $> R$, што такође противречи претпоставци.

Према томе може једино бити $CD > AB$.

Теорема 8

Ако две праве имају заједничку управну и ако друга управна заклапа са другом правом *шуй* угао, ова друга права мора бити мања од заједничке управне.



Фиг. 7

Доказ. Три су случаја могућа: $CD = AB$, $CD > AB$ и $CD < AB$ (фиг. 7).

Кад би било $CD = AB$, морао би, по теореме 3, $\sphericalangle CDB$ бити $= R$, што противречи претпоставци.

Кад би било $CD > AB$, морао би, по теореме 4, $\sphericalangle CDB$ бити $< R$, што такође противречи претпоставци.

Према томе може једино бити $CD < AB$.

Теорема 9

Ако две праве имају заједничку управну и ако је друга управна једнака са заједничком управном, у троправоуглом четвороуглу који на тај начин постаје биће и други крак четвртог угла једнак са супротном страном.

Доказ. У троправоуглом четвороуглу $ABCD$ у фиг. 2 биће, по теореме 3, $\sphericalangle CDB = R$. По теореме 6 пак биће тада очевидно и $BD = AC$.

Теорема 10

Ако две праве имају заједничку управну и ако је друга управна већа од заједничке управне, у троправоуглом четворо-

$\angle EGB = ABG > CDG = EGD$), то бисмо имали $\angle EGB \cong EGD$, што је немогуће. Према томе не може EF бити $> AB$.

Претпоставимо, да је $EF < AB$ и направимо $EH = AB = CD$. Тада ће (у четвороуглу $ABHE$) бити $\angle ABH = EHB$ и (у четвороуглу $CDHE$) $\angle CDH = EHD$. Како је (Евклид I, 16) $\angle HDF > HBD$, то је $\angle CDH > ABH$. Према томе био би $\angle EHB < EHD$, док је с друге стране $\angle EHB > EHD$. Имали бисмо дакле да је $\angle EHB \cong EHD$, што је немогуће. Према томе EF не може бити $< AB$.

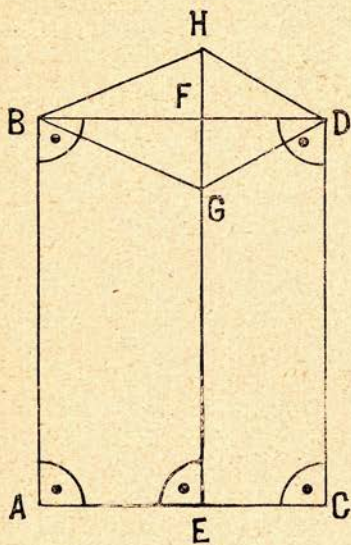
Како EF не може бити ни веће ни мање од AB , то је $EF = AB (= CD)$.

Пошто се пак доказ за управну EF да поновити за сваку управну ове врсте, то свака трећа управна ове врсте мора бити једнака са заједничком управном.

Други случај. Трећа управна налази се између друге две.

Постоје три могућности: $EF > AB$, $EF < AB$ и $EF = AB$ (фиг. 9).

Претпоставимо да је $EF > AB$ и направимо $EG = AB (= CD)$. Тада ће бити $\angle ABG = EGB$ и $\angle FGD = CDG$. Како је пак (Евклид I, 16) $\angle EGB > GFB$ и $\angle FGD > GFD$, то ће бити $\angle EGB + \angle FGD > 2R$. С друге стране пак имамо да је $\angle EGB + \angle FGD < 2R$ (пошто је $\angle EGB = ABG < R$ и $\angle FGD = CDG < R$). Према томе имали бисмо $\angle EGB + \angle FGD \cong 2R$, што је немогуће. EF не може дакле бити $> AB$.



Фиг. 9

Претпоставимо да је $EF < AB$ и направимо $EH = AB (= CD)$. Тада ће бити $\angle ABH = EHB$ и $\angle CDH = EHD$. Имали бисмо даље да је $\angle EHB + \angle EHD \leq 2R$, што је немогуће. Према томе EF не може бити $< AB$.

Остаје дакле једино да је $EF = AB$.

Пошто се пак доказ за управну EF да поновити за сваку другу управну ове врсте, то свака трећа управна ове врсте мора бити једнака са заједничком управном.

Трећи случај. Како се трећи формално могући случај, да се наиме трећа управна налази ван прве две али на супротној страни, своди на први (пошто се заједничка управна може сматрати за другу, а друга за заједничку), то је тиме наша теорема доказана у свој својој општности.

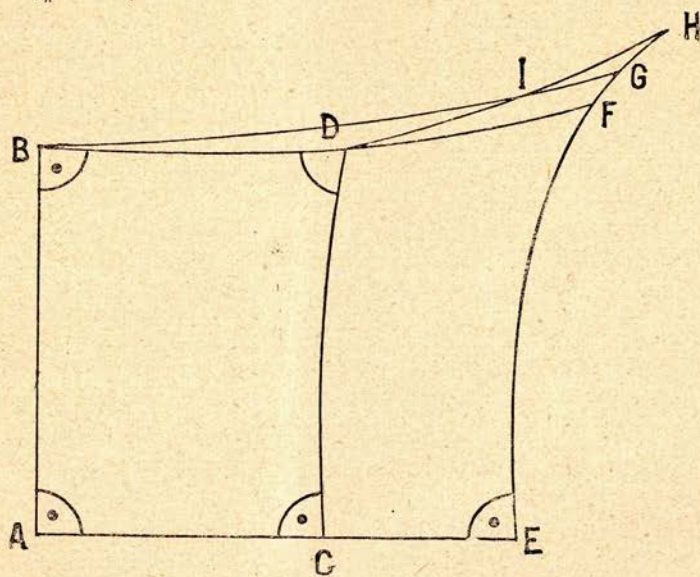
Теорема 13

Ако две праве имају заједничку управну и ако је друга управна већа од заједничке управне, тада ће и свака *шрећа* упра на бити *већа* од заједничке управне.

Доказ. Морамо, према положају треће управне, разликовати три случаја.

Први случај. Трећа управна налази се ван прве две, али на истој страни на којој је друга управна.

Овде постоје три могућности: $EF = AB$, $EF < AB$ и $EF > AB$ (фиг. 10).



Фиг. 10

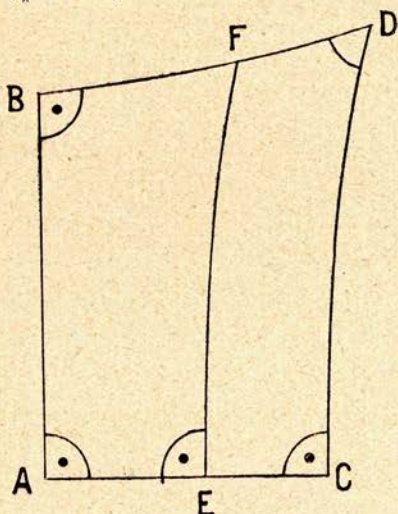
Кад би EF било $= AB$ тада би, по теорему 12 други случај, морало и CD бити $= AB$, што противречи претпоставци. EF не може дакле бити $= AB$.

Претпоставимо даље да је $EF < AB$ и направимо $EG = AB$ и $EH = CD$. Тада ће бити $\sphericalangle ABG = \sphericalangle EGB$ и $\sphericalangle CDH = \sphericalangle FHD$.

Како је пак $\angle HDF > \angle GBD$ то је (пошто је $\angle FDC > \angle$) $\angle ABG < \angle CDH$. Према томе би био $\angle EGB < \angle EHD$, док је с друге стране $\angle EGB > \angle EHD$. Имали бисмо дакле $\angle EGB \equiv \angle EHD$, што је немогуће. Према томе EF не може бити $< AB$.

Остаје дакле једино да је $EF > AB$.

Други случај. Трећа управна налази се између друге две (фиг. 11).



Фиг. 11

Кад би EF било $= AB$, тада би, по теореме 12 први случај, морало бити и $CD = AB$, што противречи претпоставци.

Кад би било $EF < AB$, тада би, то теореме 14 први случај, морало бити и $CD < AB$, што такође противречи претпоставци.

Према томе може једино EF бити $> AB$.

Напомена. При доказу друге могућности овога случаја ми се позивамо на први случај идуће теореме. Како се овај први случај идуће теореме доказује потпуно независно од теореме 13, то нема круга у нашем доказивању.

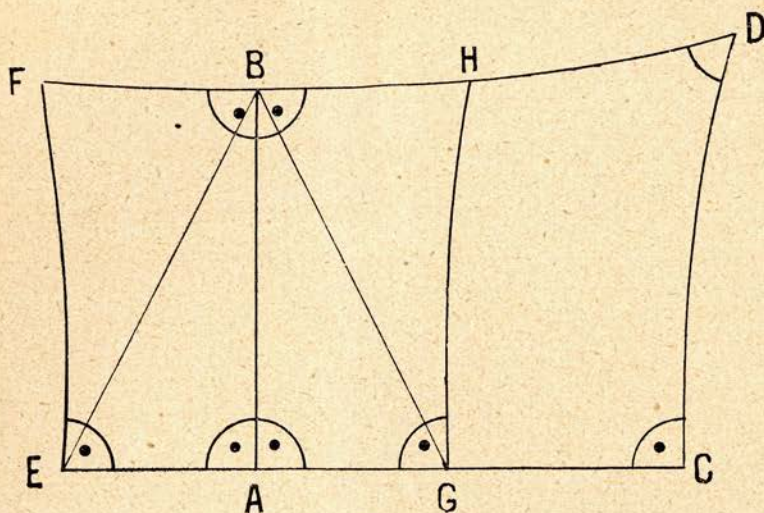
Трећи случај. Трећа управна налази се ван других двеју али на супротној страни.

Како се у овом случају увек може, на истој страни на којој је друга управна, наћи једна управна која лежи или између заједничке и друге управне или ван ових двеју а која је по величини једнака са трећом управном (ова једнакост следује, пошто је $AG = AE$, из конгруенције троуглова AEB и AGB и троуглова EFB и GHB — види фиг. 12 на следећој страни), то се трећи своди или на други или на први случај.

Теорема 14

Ако две праве имају заједничку управну и ако је друга управна мања од заједничке управне, тада је и свака трећа управна мања од заједничке управне.

Доказ. Према положају треће управне постоје три случаја.



Фиг. 12

Први случај. Трећа управна налази се *ван* других двеју, али на *истој* страни на којој је друга управна.

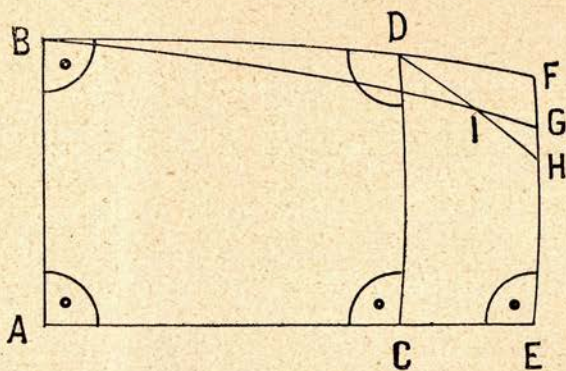
Или је $EF = AB$, или $EF > AB$ или $EF < AB$ (фиг. 13).

Кад би EF било $= AB$, морало би, по теорему 12 други случај, и CD бити $= AB$, што противречи претпоставци.

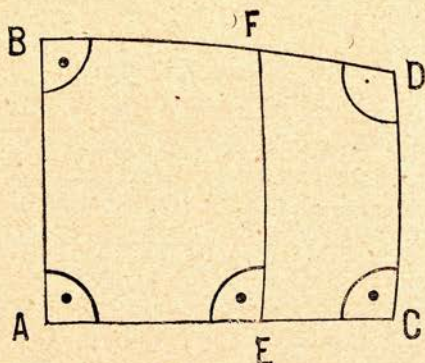
Претпоставимо да је $EF > AB$ и направимо $EG = AB$ и $EH = CD$. Тада је $\angle ABG = \angle EGB$ и $\angle CDH = \angle EHD$. Како је $\angle HDF > \angle GBF$, то је (пошто је $\angle FDC < \angle H$) $\angle ABG > \angle CDH$. Према томе би био $\angle EGB > \angle EHD$, док је с друге стране $\angle EGB < \angle EHD$. Имали бисмо дакле да је $\angle EGB \cong \angle EHD$, што је немогуће. EF не може дакле бити $> AB$.

Према томе EF (и свака трећа управна ове врсте) мора бити $< AB$.

Други случај. Трећа управна налази се *између* других двеју (фиг. 14).



Фиг. 13



Фиг. 14

Кад би EF било $= AB$, морало би, по теореме 12 први случај, и CD бити $= AB$, што противречи претпоставци.

Кад би EF било $> AB$, морало би, по теореме 13 први случај, и CD бити $> AB$, што противречи претпоставци.

Према томе EF (као и свака трећа управна ове врсте) мора бити $< AB$.

Трећи случај. Трећа управна налази се *или* других двеју али на *супротној* страни.

Пошто се у овом случају увек може, на истој страни на којој је друга управна, наћи једна управна која лежи или између заједничке и друге управне или ван ових двеју а која је по величини једнака са трећом управном, то се овај трећи своди или на други или на први случај.

Теорема 15

Ако је у **једном** троправоуглом четвороуглу страна која представља другу управну **једнака** са страном која представља заједничку управну, она ће бити једнака са овом у **сваком** таквом четвороуглу.

Доказ. Ако је у троправоуглом четвороуглу $ABCD$ (фиг. 15 на следећој страни) $CD = AB$, онда мора *прво*, по теореме 12, у сваком троправоуглом четвороуглу, чија је заједничку управну представљајућа страна AB и чија другу управну представљајућа страна лежи између (с обе стране у бесконачност продужених) правих AC и BD , страна која представља другу управну бити једнака са страном која представља заједничку управну.

Ако се поред теореме 12 узме у обзир и теорема 3, биће *друго* и у сваком троправоуглом четвороуглу уопште, чија се заједничку управну представљајућа страна налази између (с обе стране у бесконачност продужених) правих AC и BD и чија се основица налази или на дужи AC или на (с обе стране у бесконачност продуженој) правој AC , страна која представља другу управну једнака са страном која представља заједничку управну.

Теорема 16

Ако је у **једном** троправоуглом четвороуглу четврти угао **ирав**, онда је он то у **сваком** таквом четвороуглу.

Доказ. Следује из теорема 15 и 3.

Теорема 17

Ако је у **једном** троправоуглом четвороуглу страна која представља другу управну **већа** од стране која представља заједничку управну, она ће бити већа од ове у **сваком** таквом четвороуглу.

Доказ. Ако се пође од троправоуглог четвороугла у фиг. 3 мораће се, на основу једне фигуре сличне фигури 15, *прво* по теорему 13 закључити, да је у сваком троправоуглом четвороуглу, чија је заједничку управну представљајућа страна AB и чија другу управну представљајућа страна лежи између (с обе стране у бесконачност продужених) правих AC и BD , страна која представља другу управну већа од стране која представља заједничку управну.

Даље ће се, ако се пође од са четвороуглом $ABCD$ конгруентних троправоуглих четвороуглова, *друго* опет на основу теореме 13 закључити, да је у сваком троправоуглом четвороуглу, чија је заједничку управну представљајућа страна једнака са AB и чија се основица налази на (с обе стране у бесконачност продуженој) правој AC , страна која представља другу управну већа од стране која представља заједничку управну.

Даље се лако увиђа да је доказ дела, који одговара трећем делу доказа теореме 15-е, аналоган доказу овога трећег дела. А слично важи и за делове који одговарају четвртном и петом делу оног доказа.

На овај начин лако се увиђа, да теорема важи у свој својој општности.

Напомена. Краће да се теорема изразити и овако:

Ако постулат **веће** управне важи у **једном** случају, он мора важити у **свима** случајевима.

Теорема 18

Ако је у **једном** троправоуглом четвороуглу четврти угао **оштар**, онда је он то у **сваком** таквом четвороуглу.

Доказ. Следује из теорема 17 и 4.

Теорема 19

Ако је у **једном** троправоуглом четвороуглу страна која представља другу управну **мања** од стране која представља заједничку управну, онда је она мања од ове у **сваком** таквом четвороуглу.

Доказ. Кад се пође од троправоуглог четвороугла у фиг. 4 доказ се има извести, на основу једне фигури 15-ој аналоге фигуре а узимајући у обзир теореме 14 и 11, сасвим аналого доказу претходне теореме.

Напомена. Краће да се теорема и овако формулисати:

Ако постулат **мање** управне важи у **једном** случају, онда тај постулат важи у **свима** случајевима.

Теорема 20

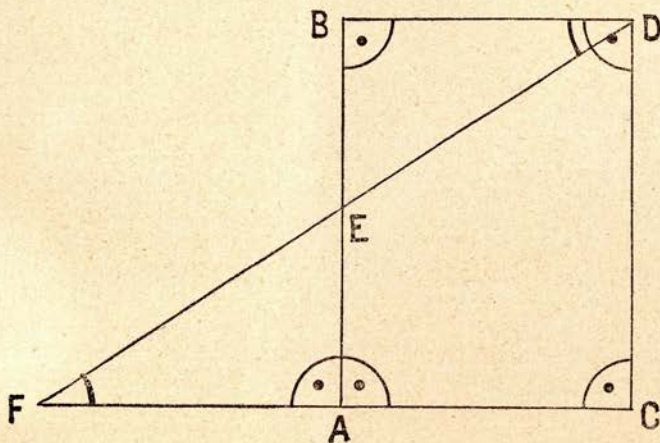
Ако је у **једном** троправоуглом четвороуглу четврти угао **шији**, онда је он то у **сваком** таквом четвороуглу.

Доказ. Теорема следује из теореме 19 е и теореме 5-е.

Теорема 21

Ако је у **једном** троправоуглом четвороуглу четврти угао **прав**, онда је у **једном** (у њему одговарајућем) правоуглом троуглу збир углова $= 2R$.

Доказ. У правоугломе троуглу FCD , који одговара тро-
правоуглом четвороуглу $ABCD$ (фиг. 16), збир углова зато је



Фиг. 16

$= 2R$, што је $\sphericalangle CFD = FDB$. Та једнакост следује из конгруенције троуглова AFE и BDE (пошто је по конструкцији $EA = EB$, $\sphericalangle AEF = BED$ и $\sphericalangle FAE = EBD = R$).

Теорема 22

Ако је у **једноме** правоугломе троуглу збир углова $= 2R$, онда је у **једноме** (у њему одговарајућем) троправоуглом четвороуглу збир углова $= 4R$.

Доказ. Истинитост теореме следује из $\sphericalangle EBD = EAF = R$ (фиг. 16), што опет следује из конгруенције троуглова BDE и AFE (пошто је по конструкцији $EF = ED$, $\sphericalangle AEF = BED$ и, опет по конструкцији, $\sphericalangle EDB = AFE$).

Теорема 23

Ако је у **једном** правоуглом троуглу збир углова $= 2R$, онда је тај збир $= 2R$ и у **сваком** правоуглом троуглу.

Доказ. Ако је у **једном** правоуглом троуглу збир углова $= 2R$, онда је, по претходној теореме, у **једном** (у њему одговарајућем) троправоуглом четвороуглу тај збир $= 4R$. По теорему 16 мора, ако је у **једном** троправоуглом четвороуглу збир углова $= 4R$, тај збир бити $4R$ у **сваком** таквом четвороуглу. Пошто пак сваком поједином троправоуглом четвороуглу одговара један правоугли троугао (и обратно), то и у **сваком** правоуглом троуглу мора (на основу теореме 21 која важи за сваки такав пар) збир углова бити $= 2R$.

Теорема 24

Ако је у **сваком** правоуглом троуглу збир углова $= 2R$, онда је и у **сваком** троуглу тај збир такође $= 2R$.

Доказ. Изводи се на познат начин разлагањем неправеоуглог у два правоугла троугла.

Теорема 25

Ако је у **сваком** троуглу збир углова $= 2R$, онда је у **сваком** четвороуглу тај збир $= 4R$.

Доказ. Седује разлагањем четвороугла на два троугла и узимањем у обзир претходне теореме.

Теорема 26

Ако је у **једном** троправоуглом четвороуглу збир углова $= 4R$, онда је тај збир $= 4R$ у **сваком** четвороуглу.

Доказ. Следује из теорема 21, 23, 24 и 25.

Теорема 27

Ако је у **једном** троправоуглом четвороуглу четврти угао **оштар**, биће у **једном** (у њему одговарајућем) правоуглом троуглу збир углова $< 2R$.

Доказ. Аналого доказу теореме 21-е, а на основу једне фигури 16 сличне фигуре.

Теорема 28

Ако је у **једном** правоуглом троуглу збир углова $< 2R$, биће у **једном** (у њему одговарајућем) троправоуглом четвороуглу збир углова $< 4R$.

Доказ. Аналого доказу теореме 22-е, а на основу једне фигури 16 аналоге фигуре.

Теорема 29

Ако је у **једном** правоуглом троуглу збир углова $< 2R$, биће у **сваком** правоуглом троуглу тај збир $< 2R$.

Доказ. Аналого доказу теореме 23.

Теорема 30

Ако је у **сваком** правоуглом троуглу збир углова $< 2R$, биће и у **сваком** троуглу збир углова такође $< 2R$.

Доказ. На познати начин.

Теорема 31

Ако је у **сваком** троуглу збир углова $< 2R$, онда је у **сваком** четвороуглу тај збир $< 4R$.

Доказ. На познати начин.

Теорема 32

Ако је у **једном** троправоуглом четвороуглу збир углова $< 4R$, тај је збир у **сваком** четвороуглу $< 4R$.

Доказ. Следује из теорема 27, 29, 30 и 31.



Теорема 33

Ако је у **једном** туправоуглом четвороуглу четврти угао **шуп**, онда је у **једном** (у њему одговарајућем) правоуглом троуглу збир углова $> 2R$.

Доказ. Аналого доказу теореме 21, а на основу једне фигури 16 сличне фигуре.

Теорема 34

Ако је у **једном** правоуглом троуглу збир углова $> 2R$, биће у **једном** (у њему одговарајућем) туправоуглом четвороуглу тај збир $> 4R$.

Доказ. Аналого доказу теореме 22, а на основу једне фигури 16 сличне фигуре.

Теорема 35

Ако је у **једном** правоуглом троуглу збир углова $> 2R$, онда је у **сваком** правоуглом троуглу тај збир $> 2R$.

Доказ. Аналого доказу теореме 23.

Теорема 36

Ако је у **сваком** правоуглом троуглу збир углова $> 2R$, онда је и у **сваком** троуглу тај збир $> 2R$.

Доказ. На познати начин.

Теорема 37

Ако је у **сваком** троуглу збир углова $> 2R$, онда је у **сваком** четвороуглу тај збир $> 4R$.

Доказ. На познати начин.

Теорема 38

Ако је у **једном** туправоуглом четвороуглу збир углова $> 4R$, онда је он то у **сваком** четвороуглу.

Доказ. Следује из теорема 33, 35, 36 и 37.

Теорема 39

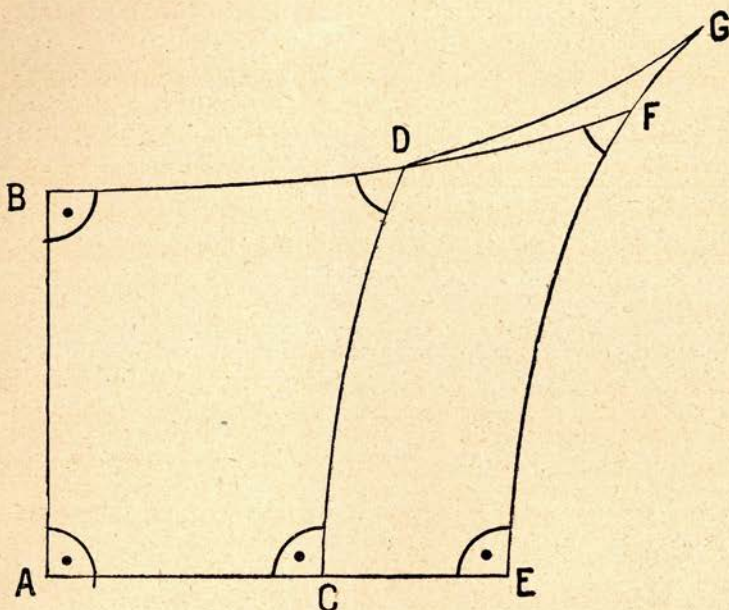
Ако две праве имају заједничку управну и ако важи постулат **једнаке** управне, биће у свима одговарајућим туправоуглим четвороуглима сви **четверћи** углови међу собом **једнаки**.

Доказ. Следује из теорема 12 и 3.

Теорема 40

Ако две праве имају заједничку управну и ако важи постулат **веће** управне, биће у одговарајућим троправоуглим четвороуглима сваки следећи **оштар** угао **мањи** од претходног.

Доказ. Могућа су три случаја: $\angle EFD = \angle CDB$, $\angle EFD > \angle CDB$ и $\angle EFD < \angle CDB$ (фиг. 17).



Фиг. 17

Кад би био $\angle EFD = \angle CDB$, морао би збир углова у четвороуглу $CDEF$ износити $4R$, што је по теорему 32 немогуће.

Кад би био $\angle EFD > \angle CDB$, морао би збир углова у четвороуглу $CDEF$ бити $> 4R$, што је опет по теорему 32 немогуће.

Према томе мора $\angle EFD$ бити $< \angle CDB$.

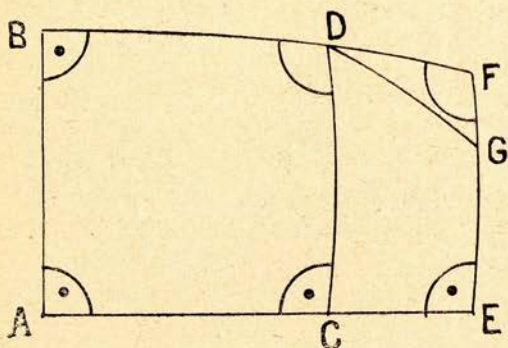
Пошто се исти доказ да применити и на сваки даљи оштар угао, то је тиме доказана општност теореме.

Теорема 41

Ако две праве имају заједничку управну и ако важи постулат **мање** управне, биће у одговарајућим троправоуглим четвороуглима сваки следећи **туп** угао **већи** од претходног.

Доказ. Могућа су три случаја: $\angle EFD = \angle CDB$, $\angle EFD < \angle CDB$ и $\angle EFD > \angle CDB$ (фиг. 18).

Кад би био $\angle EFD = \angle CDB$, збир углова у четвороуглу $CDEF$ морао би бити $= 4R$, што је по теорему 38 немогуће.



Фиг. 18

Кад би $\angle EFD$ био мањи од угла CDB , морао би збир углова у четвороуглу $CDEF$ бити $< 4R$, што је опет по теорему 38 немогуће.

Према томе мора бити $\angle EFD > \angle CDB$.

Како се исти доказ да применити и на сваки даљи туп

угао, то је тиме доказана општност теореме.

Теорема 42

Ако две праве имају заједничку управну и ако важи постулат **једнаке** управне, онда су те две праве свуда **јодједнако** удаљене једна од друге (оне су **еквидистантне**).

Доказ. Следује непосредно из теореме 12.

Теорема 43

Ако две праве имају заједничку управну и ако важи постулат **веће** управне, биће свака даља управна **већа** од ближе и праве ће се све више удаљавати једна од друге (**дивергираће**) на обема странама заједничке управне.

Доказ. Могућа су три случаја: $EF = CD$, $EF < CD$ и $EF > CD$ (фиг. 17).

Кад би било $EF = CD$, морао би (у четвороуглу $CEDF$) $\angle EFD$ бити $= \angle CDF$, што је немогуће, пошто је (по теорему 4 $\angle CDB < R$ па према томе) $\angle CDF > R$ а (по теорему 18) $\angle EFD < R$. Према томе не може бити $EF = CD$.

Претпоставимо ли да је $EF < CD$, направимо $EG = CD$. Тада би (у четвороуглу $CDEG$) био $\angle EGD = \angle CDG$. Како би пак с једне стране био $\angle CDG > R$ а с друге стране (по Евкл.

I, 16) $\angle EGD < R$, то би био $\angle EGD \cong R$, што је немогуће. Према томе не може бити ни $EF < CD$.

Остаје дакле једино да је $EF > CD$.

Теорема 44

Ако две праве имају заједничку управну и ако важи постулат **мање** управне, биће свака даља управна **мања** од ближе и праве ће се приближавати једна другој (**конвертираће**) на обема странама заједничке управне.

Доказ. Могућа су три случаја: $EF = CD$, $EF > CD$ и $EF < CD$ (фиг. 18).

Кад би било $EF = CD$, морао би (у четвороуглу $CEDF$) бити $\angle EFD = \angle CDF$, што је немогуће, пошто је (по теореме 5) $\angle CDB > R$ па према томе) $\angle CDF < R$ а (по теореме 20) $\angle EFD > R$. Према томе не може бити $EF = CD$.

Претпоставимо ли да је $EF > CD$, направимо $EG = CD$. Тада би (у четвороуглу $CDEG$) био $\angle EGD = \angle CDG$. Како би пак с једне стране био $\angle CDG < R$ а с друге стране (Евкл. I, 16) $\angle EGD > R$, то би био $\angle EGD \cong R$, што је немогуће. Према томе не може бити ни $EF > CD$.

Остаје дакле једино да је $EF < CD$.

Напомена. Теорема 44 утврђује само конвергенцију двеју правих са заједничком управном у случају постулата мање управне. Да се те праве секу (у једној или у двама тачкама), мора нарочито да се докаже.

DEDUCTION ELEMENTAIRE DES GEOMETRIES NON-EUCLIDIENNES

PAR Dr. B. PETRONIEVICS

(Résumé)

Tandis que *Lobatschewsky* et *Bolyai* avaient fondé la géométrie non-euclidienne en niant le cinquième postulat d'*Euclide* et en le remplaçant par le postulat des deux parallèles, leurs deux prédécesseurs les plus importants, *Sachéri* et *Lambert*, s'étaient placés sur un point de vue plus général qui embrasse aussi la géométrie riemanienne.

Dans le présent travail, l'auteur se place sur le point de vue de *Sachéri Lambert*. Son point de départ, c'est l'existence, dans le plan, de deux droites ayant une perpendiculaire commune et sa figure fondamentale est identique à celle de *Lambert* (le quadrilatère trirectangle). Mais il remplace les trois hypothèses de *Sachéri Lambert* (l'hypothèse de l'angle droit, de l'angle aigu et de l'angle obtus) par les postulats correspondants de la (deuxième) perpendiculaire égale, supérieure et inférieure (à la perpendiculaire commune), un procédé par lequel les preuves des propositions se simplifient considérablement et deviennent indépendantes du postulat d'*Archimède* aussi bien que du principe de continuité.

La première partie du travail que nous publions ici se compose d'une série ininterrompue de 44 propositions. De ces propositions, la première se rapporte à l'existence de deux droites ayant une perpendiculaire commune, la deuxième à l'égalité des angles au sommet du birectangle isoscèle, les propositions 3-11 concernent la détermination des postulats, tandis que les propositions 12-20 en établissent la généralité. Les propositions 21-38 déterminent la somme des angles dans le quadrilatère et le triangle, et les propositions 39-41, la grandeur relative

des angles successifs formés par les perpendiculaires successives avec l'une des deux droites ayant une perpendiculaire commune. Enfin, les trois dernières propositions se rapportent à l'équidistance, la divergence et la convergence de deux droites pareilles.

Dans la deuxième partie qui sera publiée plus tard, seront introduites les droites non-sécantes et les parallèles et, en connexion avec elles, les systèmes géométriques archimédiens et non-archimédiens.



сѣмља

ИНТЕГРАЛЪ

Всѣхъ
всѣхъ
всѣхъ
всѣхъ
всѣхъ
всѣхъ



РАДИО - БЕОГРАД

$\lambda^{a m n} A$



