

Д-р БРАНИСЛАВ ПЕТРОНИЈЕВИЋ

КРИТИЧКЕ ПРИМЕДБЕ НА ФОНТЕНЕ- ЛОВУ ТЕОРИЈУ БЕСКРАЈНИХ БРОЈЕВА

ИЗ СХХХIV КЊИГЕ ГЛАСА СРПСКЕ КРАЉЕВСКЕ АКАДЕМИЈЕ

БЕОГРАД
ГРАФИЧКИ ЗАВОД „МАКАРИЈЕ“ А. Д.
1929

Господину епископу бачком
Иринију,

Из поштована и оданости,
24-VIII-1929. Петронијевић.

КРИТИЧКЕ ПРИМЕДБЕ НА ФОНТЕНЕЛОВУ
ТЕОРИЈУ БЕСКРАЈНИХ БРОЈЕВА

од

Д-ра БРАНИСЛАВА ПЕТРОНИЈЕВИЋА

Поклон библиотека
др Иринија Ћирића и Стевана Ћирића

КРИТИЧКЕ ПРИМЕДБЕ НА ФОНТЕНЕЛОВУ ТЕОРИЈУ БЕСКРАЈНИХ БРОЈЕВА

ОД Д-РА БРАНИСЛАВА ПЕТРОНИЈЕВИЋА

(Приказано на окупу Академије Природних Наука 31. децембра 1928)

У в о д

У својој расправи „*Sur les nombres infinis de Fontenelle*“, која је публикована 1917-е год. у „*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*“ (vol. XXVI, serie 5^o, 1^o sem., fasc. 5^o) ја сам детаљно изложио Фонтенелову теорију бескрајних бројева, коју је овај публиковао у своме делу „*Eléments de la Géométrie de l'Infini*“, Paris, 1927, и упоредио је укратко са модерним теоријама Кантора и Веронезеа.

У овој расправи хоћу да додам неколике своје критичке примедбе на све три теорије. Тим критичким примедбама додаћу и критичке примедбе неколиких ранијих писаца на Фонтенелову теорију, које нису само од историјског интереса. Да би се пак све те критичке примедбе разумеле, биће најпре укратко резимиране све три теорије. На тај начин расправа ће се састојати из три одељка.

1.

Кратак поглед на основне тезе Фонтенелове, Канторове и Веронезеове теорије бескрајних бројева

По Фонтенелу најмањи бескрајни број ∞ преставља број свих коначних бројева. Тај је број последњи члан бескрајног низа ових бројева.

По Кантору најмањи бескрајни број ω преставља редни тип (Ordnungstypus) бескрајног низа свих (редних) коначних бројева, и лежи ван овог низа.



По Веронезеу најмањи бескрајни број ∞ преставља број сегмената на бескрајној правој, која се може поделити на коначан број бесконачно великих сегмената.

Док је по Фонтенелу $\infty \pm n = \infty$, а по Кантору $\omega - 1 = \omega$, али $\omega + 1 > \omega$, дотле је по Веронезеу $\infty - n < \infty$ а $\infty + n > \infty$.

Док је по Фонтенелу $\frac{\infty}{n} < \infty$ а $\infty \cdot n > \infty$ (пошто је $\infty + \infty = 2\infty$), дотле је по Кантору $\frac{\omega}{n} = \omega$, али $\omega \cdot n > \omega$ (док је $n \cdot \omega = \omega$), а по Веронезеу (као и по Фонтенелу) $\frac{\infty}{n} < \infty$ и $\infty \cdot n$ (одн. $n \cdot \infty$) $> \infty$.

Бескрајни низ бесконачно великих бројева већих од ∞ постаје по Фонтенелу тиме што серија бескрајних бројева $1\infty, 2\infty, 3\infty \dots$ води бескрајном броју ∞^2 , серија $1 \cdot \infty, \infty^2, \infty^3 \dots$ бескрајном броју ∞^∞ и т. д.

По Кантору бескрајни низ бесконачно великих бројева већих од ω постаје на основу два принципа: 1. на основу принципа додавања јединице претходном броју и 2. на основу стављања граничног бескрајног броја $\alpha = \lim_{v} a_v$, где је a_v низ бројева типа ω . Код Кантора постоји и један трећи принцип, што овде само спомињемо.

Веронезе изводи бескрајни низ бесконачно великих бројева већих од ∞ тиме што принцип, којим је извео овај последњи број, примењује коначно и бесконачно много пута.

По Фонтенелу серија $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \frac{1}{n} \dots$ води исто тако бесконачном малом броју $\frac{1}{\infty}$ као што серија $1, 2, 3, \dots n \dots$ води стављању првог бесконачног броја ∞ . И као што постоје бескрајно велики бројеви већи од ∞ , тако постоји и бескрајан низ бесконачно малих бројева $\frac{1}{\infty^2}, \frac{1}{\infty^3}, \frac{1}{\infty^\infty}$ и т. д.

По Кантору не постоје бескрајно мали бројеви, јер серија $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{n}$ не води нужним начином стављању бескрајно малог броја $\frac{1}{\omega}$.

По Веронезеу постоје (као и по Фонтенелу) бескрајно мали бројеви. Први бескрајно мали број одговара сегменту праве линије у односу на који један коначни сегмент преставља

први бесконачни број ∞ . На сличан начин постоји у бескрајно малом сегменту првог реда бескрајно мали сегмент другог реда и т. д.¹

2.

Критичке примедбе на поменуте три теорије о бескрајним бројевима

Да бисмо дали прецизну критику ових теорија, потребно је направити једну претходну логичку дистинкцију која се обично не прави. Треба наине разликовати оно што је *формално могуће* од онога што је (у правом смислу) *логички могуће*. Један апстрактни објект формално је могућ ако нема никакве противречности у самој дефиницији тога објекта. А апстрактни објект само је онда и логички могућ, ако не само његова дефиниција није противречна већ ако ни замисао једног таквог објекта не повлачи за собом никаквих противречних конзеквенција. Квадратни круг не само што је један логички немогућ објект, већ је то и један формално немогућ објект, пошто је дефиниција једног таквог објекта противречна. Бескрајни број свих крајних бројева истина је формално могућ, пошто из формалне могућности *сваког* коначног броја следује и формална могућност *свих* коначних бројева. Али једнакост дела са целином је једна конзеквенција замисли тога броја, која је противречна и која стога тај број чини логички немогућим².

Ако сада будемо ову дистинкцију применили на три поменуте теорије констатоваћемо, да су основни појмови Канто-

¹ Опширније излагање све три теорије налази се у горе наведеној расправи, где се налазе и детаљне индикације одговарајућих места у делима аутора.

Своју теорију изложио је Фонтенел у делу: B. Fontenelle, Elements de la Géométrie de l'Infini. Paris, 1727.

Канторова теорија најбоље је изложена у његовом класичном чланку: G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, изашлом у „Mathematische Annalen“ Bd. 46 и Bd. 49.

Веронезеова теорија налази се изложена у његовом делу: G. Veronese, Fondamenti di Geometria. Padova 1891 (ово је дело преведено на немачки под насловом „Grundzüge der Geometrie von mehrereu Dimensionen etc“, Leipzig, 1894).

² Да ова противречност постаје још видљивија ако се примени Веронезеов критеријум једнакости бескрајних скупова, о томе види мој спис „Die typischen Geometrien und das Unendliche“, 1907. s. 41 и д.

рове и Веронезеове теорије формално могући, док Фонтенелова теорија садржи у себи и формалних противречности.

Фонтенелов број ∞ , уколико је последњи члан природног низа бројева, преставља један формално противречан појам, пошто у низу коначних бројева не може, по самој дефиницији тога низа, постојати последњи члан.

Веронезов број ∞ нема у себи никакве формалне противречности, пошто претпоставка једне бесконачне праве која је делива на коначан број делова нема ничега противречног у себи. Али тај је број за мене логички немогући, и то у једном вишем степену него Канторов број ω : не само наиме што Веронезов број ∞ садржи (као и Канторов ω) противречност једнакости целине и дела, него он садржи у себи и противречност скока коначног у бесконачно, пошто се бројеви $1, 2, 3, \dots n, \dots$ и бројеви $\frac{\infty}{2}, \frac{\infty}{3}, \dots \frac{\infty}{n}, \dots$ морају сусрести на правој чији су они сегменти¹.

Канторов број ω не садржи ову последњу противречност зато што је (пошто тај број преставља редни тип једног бескрајног скупа који има првог али нема последњег члана) права линија без тачке у бесконачности његов геометријски корелат.

Бескрајни број Фонтенелов ∞ хоће да је у исто доба и редни тип аритметичког скупа крајних бројева без последњег члана и редни тип сегмената једне бескрајне праве са тачком у бесконачности, и само стога што тај број хоће да је синтеза и Канторовог броја ω и Веронезеовог броја ∞ , он је и формално немогући.

Формална противречност Фонтенеловог броја ∞ може се изразити и овако: пошто је ∞ последњи члан бескрајног низа коначних бројева, то би томе последњем члану морао претходити непосредно један коначан број, а тиме бисмо одмах имали скок коначног у бесконачно и претпостављени бесконачни број био би у ствари коначан².

¹ Да овај скок мора постојати, ја сам показао у чланку „Ueber die Unmöglichkeit unendlich grosser Geraden mit einem Endpunkt im Unendlichen“, који је изашао у „Annalen der Naturphilosophie“, 1911 (s. 365 f. и прим. 14 s. 366). Упор. и расправу „Основни ставови Метафизике. Први део“ у „Гласу Срп. Краљевске Академије“ књ. CXXXIII, стр. 23 (став 24).

² Фонтенел и сам признаје ову противречност, али тежи да је избегне на један начин који ту противречност уводи у једном новом (само привидно рационалнијем) облику.

Признање противречности лежи у овим речима (ор. с. р. 58, § 181): „Il semble que ∞^2 , dernier terme de A (A означава скуп свих коначних бројева), en devrait être le seul terme infini précédé immédiatement d'un terme fini. Car... on n'a conçu que A avait un dernier terme infini ou ∞ , que parceque le nombre de ses termes finis étant ∞ , ce même ∞ devoit aussi exprimer son dernier terme“.

Али Фонтенел налази, да у A мора постојати још бескрајних бројева сем ∞ . Бех сам збир свих чланова овог скупа (ор. с. р. 58 у вези са § 124), који је $= \frac{\infty^2}{2}$, преставља један бескрајни број који је мањи од ∞ . Да пак тај низ мора садржавати бескрајно много бескрајних бројева, изводи Фонтенел „априори“ на овај начин (ор. с. р. 59): „Puisque A est une progression arithmétique, dont le derrier terme est ∞ , son terme de milieu est $\frac{\infty}{2}$, Infini après lequel il ne peut y avoir que des Infinis plus grands. De même le terme de son premier quart est $\frac{\infty}{4}$, encore infini... Enfin n étant un nombre fini quelconque, & si grand qu'on voudra, & l'intervalle entre 1 & ∞ étant divisé en ce nombre n de parties, on trouvera toujours qu'il n'y aura que la 1^{re} n^{me} partie qui puisse avoir des termes finis...“ Фонтенел дакле претпоставља да се A може поделити на n једнаких делова и он ту претпоставку сматра за евидентну (што она, узглед буди речено, нимало није).

Скок коначног у бесконачно, који би постајао у скупу A кад би ∞ био једини бесконачни број у њему, избегава, као што се види, Фонтенел претпоставком бескрајних бројева облика $\frac{\infty}{n}$. Али он тај скок поново уводи, и то као дефинитиван, на тај начин што замишља све чланове скупа A подигнуте на квадрат, чиме коначни бројеви постају бесконачни. Ево те његове дедукције (ор. с., р. 63, § 196): „Concevons maintenant que tous les termes de A sont élevés au quarré, ce qui donne A^2 , (а то је) $1, 4, 9, 16, \& c$ ∞^2 . Il est visible que A^2 a autant de termes que A .

Je represente les deux Suites aux yeux, pour mieux faire voir leur correspondance.

A	1.	2.	3.	4.	& c	n	nn	B	Infinis	∞ .
A^2	1.	4.	9.	16.	& c	nn		C	Infinis	∞^2 .

La ligne BC marque dans A la separation des termes finis d'avec les Infinis, desorte qu'à la gauche de BC ils sont tous Finis, & à sa droite Infinis, et en même temps elle marque dans A^2 qu'au moins à sa droite ils seront tous Infinis, car les Infinis de A ne peuvent qu'augmenter dans A^2 par l'élevation au quarré.

Soit nn le plus grand quarré fini qui soit dans A , & posé par conséquent à la gauche de BC , & tout auprès. Il sera aussi dans A^2 ... Mais il sera dans A^2 sous n sa racine, & n est dans A , fort éloigné de nn , & d'autant plus que n est plus grand. Mais nn est le plus grand quarré fini possible, & dans A^2 il

3.

Критичке примедбе ранијих писаца на Фонтенелову теорију

У овом одељку изнећемо главне критичке примедбе тројице ранијих писаца на Фонтенелову теорију бескрајних бројева: *Маклорена*, *Гердила* и *Ашара*.

Славни енглески математичар *Маклорен* (*Mac Laurin*) у своме чувеном делу „*Treatise on the Theory of Fluxions*“, *Introduction*, излаже и критикује Фонтенелову теорију на више страна¹.

У својој критици Фонтенелове теорије *Маклорен* се показује не само као противник Фонтенелових бројева, него и као противник актуелно бесконачнога уопште. Фонтенеловој теорији пребацује *Маклорен* пре свега концепцију бесконачног броја

у а encore loin de nn à la ligne BC . Donc dans A^2 il n'y a plus de termes finis après nn , ou bien il y a dans cette Suite un vuide depuis nn jusqu'à la ligne BC , de sorte que tous les termes finis qui sont dans A depuis n jusqu'à la ligne BC , n'ont point de correspondants ou de quarrés dans A^2 , ce qui est manifestement impossible. Donc après nn , il vient dans A^2 les Infuis, & A^2 en a plutôt que A .”

Скок коначног у бесконачно, иако у једном новом облику, постаје овде очевидан, што *Фонтенел* признаје даље следећим речима: „Mais si cela est, les Infuis qui seront dans A^2 depuis nn jusqu'à la ligne BC seront donc de quarrés de termes finis correspondants qui étaient dans A depuis n jusqu'à la ligne BC , or comment des quarrés de termes finis peuvent-ils être infuis?...“ (ор. с., р. 64).

На последње питање *Фонтенел* даје један одговор који нас зачуђава: „J'avoue que du premier coup d'oeil cette difficulté est accablante, & elle m'aurait fait abandonner tout ce Système de l'Infini, si je n'avais vu un grand nombre de fortes raisons qui la diminuaient... & qui m'engagent d'admettre l'étrange Paradoxe de termes finis devenus infuis par l'élevation au quarré.“ (ор. с., р. 64).

Међу овим разлозима наводи *Фонтенел* изрично и скок коначног у бесконачно у првобитном смислу: „Les Finis que je suppose qui deviennent Infuis; ne le deviennent que dans le passage obscur & incompréhensible, & cependant constant, du Fini à l'Infini...“ (ор. с., р. 65).

Али парадокс који допушта *Фонтенел* у својој теорији (бесконачан број који постаје из коначног подизањем на квадрат) преставља у ствари осуду на смрт те теорије.

¹ Као што је познато, *Маклорен* је најзнатнији представник Нутнове теорије флуксија у области инфинитезималног рачуна. Ми ћемо у следећем цитирати његово горе наведено главно дело по француском преводу који је изашао 1749. Критика Фонтенелове теорије налази се у Уводу т. I, р. XLI—XLVI.

∞ као последњег члана природног низа бројева (ор. с., р. XLII), затим налази немогућом тезу коначног броја који постаје бесконачан подизањем на квадрат (р. XLIV), као и комплементарну тезу о коначним разломцима који постају бескрајно мали подизањем на квадрат¹. Али разлози које наводи *Маклорен* не могу се увек сматрати за оправдане.

Гердил је своју критику изложио у чланку: „*Essai d'une demonstration mathématique contre l'existence éternelle de la matière et du mouvement, deduite de l'impossibilité démontrée d'une suite actuellement infinie de termes, soit permanents, soit successifs*“, који је први пут штампан у Паризу 1760² (критика Фонтенелове теорије налази се у § 1 и 2, р. 263—276).

И ако доцнија од *Маклоренове*, *Гердилова* критика Фонтенелове теорије потпуно је независна од ове (види о томе *Гердил*, ор. с., р. 264) и у извесним правцима детаљнија. Осим оне три тачке које дискутује *Маклорен*, *Гердил* се још нарочито занима бројевима $\infty - n$ и $\frac{\infty}{n}$, од којих *Фонтенел* означава ове последње знаком α ³. Како бројеви α по правилу не стоје у

¹ Појам бескрајно мале количине уводи *Фонтенел* на следећи начин (ор. с., р. 116, § 324): „1 étant pris pour représenter en general la grandeur finie, plus le nombre par lequel je le divise est grand, plus je le diminue, desorte que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c sont des grandeurs toujours décroissantes. Donc à la fin $\frac{1}{\infty}$ sera une grandeur infiniment petite, ou, ce qui est la même chose. l'Infiniment Petit est une partie du Fini résultante d'une division poussée à l'infini, ou une partie infinitième du Fini. comme 1 est une partie infinitième de ∞ .“

Теза о коначним разломцима који подизањем на квадрат постају бескрајно мали, изражена је код Фонтенела у овом ставу (ор. с., р. 125, § 358): „*Donc il y a des grandeurs finis indéterminables en petitesse*, comme il y en a de finis indéterminables en grandeur. c'est à dire, que comme celles-ci élevés à une puissance finie montent d'ordre, les autres baissent, & la seule analogie d'opposition aurait suffi pour le faire conjecturer“.

Да би се потпуно разумео овај став Фонтенелов, треба цитирати и један ранији његов став (ор. с., р. 66 и д., § 198): „*J'appelle Finis indéterminables, les termes finis de A qui deviennent infuis dans A² par l'élevation au quarré...*“

² Овај је чланак прештампан у: *card. G. S. Gerdil, Opere edite ed inedite, Roma MDCCCVI, t. IV*. Критика Фонтенелове теорије налази се у овој свесци р. 261—286 и ми ћемо је у следећем цитирати из ове свеске.

³ Бројеви облика $\infty - n$ не постоје по Фонтенелу, пошто је по њему $\infty \pm a = \infty$ (ор. с., р. 31, § 87-89).

одређеном односу са ∞^1 и како је сума свих чланова природног низа бројева $= \frac{\infty^2}{2}$ а сума половине ових чланова $= \frac{\infty^2}{8}$, то Гердил у својој критици долази до следећег закључка (I. с., р. 276): „Ако коефицијенти 1, 2, 3, etc. природне аритметичке прогресије $\frac{\infty}{\alpha}, \frac{2\infty}{\alpha}, \frac{3\infty}{\alpha}$ морају повећавањем у броитељу једанпут достићи неодређени бесконачни број α^3 , они га могу достићи тек после бесконачног броја чланова, чија ће сума износити $\frac{\infty^2}{2}$ а половина $\frac{\infty^2}{8} \dots$ Према томе неће бити могуће тврдити за бесконачан број α , као што није било могуће то тврдити ни за ∞ , да је први бесконачни број који долази непосредно после свих коначних бројева“⁴.

Да пак број $\frac{\infty}{n}$ постоји, изводи Фонтенел овако (ор. с., р. 32, § 93): „La moitié d'une grandeur, son tiers, enfin toute aliquote, & plus généralement toute partie déterminable, est grandeur par rapport à son Tout, donc toute: partie déterminable de l'Infini est infinie...“

¹ Ево како Фонтенел мотивише ово тврђење (ор. с., р. 59-60, § 183): „Comme ils naissent de la division qu'on a faite de l'intervalle qui est entre 1 & ∞ en un nombre fini n de parties, les α qui sont à la tête de chaque division sont des $\frac{\infty}{n}, \frac{2\infty}{n}, \frac{3\infty}{n}, bc \dots$ Et comme n n'est qu'une expression générale & indéterminée d'un nombre fini, il faut regarder les α en general comme n'ayant à ∞ qu'un rapport indéterminable...“

² Упор. Фонтенел, ор. с. §§ 124 и 125, р. 38.

³ Да коефицијенти горње прогресије расту до бесконачног броја α у скупу A , то тврђење овако доказује Фонтенел (ор. с., р. 61-2, § 191): „... il faut concevoir A divisée en un nombre α de parties, au lieu qu'elle l'était en un nombre fini n . Chaque division contiendra un nombre $\frac{\infty}{\alpha}$ de termes, nombre fini..., & cela doit être, puisqu'il y a une infinité de divisions. Les termes qui seront à la tête de chaque divisions, seront... $\frac{\infty}{\alpha}, \frac{2\infty}{\alpha}, \frac{3\infty}{\alpha}, &c$, le dénominateur α étant toujours le même, & ces termes seront toujours finis. Mais comme dans ces expressions les coefficients 1, 2, 3, &c du numérateur ∞ sont toujours croissants, il en viendra enfin un qui sera α , & on aura $\frac{\infty \alpha}{\alpha}$, terme infini, puisque $\frac{\infty}{\alpha}$ est fini...“

⁴ Да у скупу A постоји један први бесконачни број α , који долази после свију коначних бројева (што у ствари значи једно ново признање скока коначног у бесконачно), то своје тврђење доказује овако Фонтенел (ор. с., р. 62, § 191): „... Jusqu'à cet $\frac{\infty \alpha}{\alpha}$ (види претходну примедбу) tous les termes de A auront été finis, et pour en trouver un nombre infini, je n'ai qu'à concevoir que le α du numérateur, qui doit alors être le 1^{er} de tous les α , était à une distance infini de 1, premier terme de A ...“

Гердилова критика утолико је оправдана што с правом указује на једну од основних тешкоћа у Фонтенелевој теорији бескрајних бројева, наиме на тешкоћу која произилази из тога што ∞ губи своју јединствену позицију првог бесконачног броја, ако се претпоставе бројеви облика $\frac{\infty}{n}$.¹

Критика Ашарова (F. Achard) налази се у његовом чланку: „Reflexions sur l'infini mathématique“, који је публикуван у „Memoires de l'Académie royale des Sciences de Berlin. Classe mathématique, année 1745“ (Berlin 1746, р. 144—154). Ашар не улази у математичке детаље Фонтенелове теорије, његова критика се ограничава на неколике принципијелне тачке. Али она је интересантна са свога становишта чисто номиналистичкога у погледу појмова количине и броја, на основу којег закључује да је бесконачно зато немогуће „што онемогућује сваку могућност увећавања и смањивања“ (н. н. м. стр. 147). Она нарочито истиче фундаменталну противречност бескрајних бројева Фонтенелових, скок коначног у бесконачно (р. 149). А као одлучан доказ против ових бројева она износи неслагање са принципом једнакости једне целине са свима деловима узетим заједно. Ако једна коначна количина није количина у односу на бесконачну количину, „на који начин учиниће ми се схватљивим да су делови једне целине... једнаки с овом целином под претпоставком да је број ових делова доиста бесконачан? Да би се то омогућило мораће се признати или да број ових делова

¹ Прави смисао критике Гердилове састоји се у тврђењу да, као што бесконачни број ∞ није могао остати једини бесконачни број који долази после свих коначних бројева, да исто тако ни први бесконачни број облика $\frac{\infty}{n}$ не може остати једини бесконачни број који би долазио после свих коначних бројева, већ да морамо даље претпоставити и бесконачне бројеве облика $\frac{\infty}{n}$ и т. д. до у неодређену бесконачност, чиме је појам Фонтенеловог првог бесконачног броја у ствари уништен. Сличну критику ја сам применио (независно од Гердила) на Веронезеов први бесконачни број (упор. пој спис „Die typischen Geometrien und das Unendliche“, 1907, s. 53-5). Ако се претпостави (било Фонтенелов било Веронезеов) први бесконачни број као корелат бесконачно велике праве са тачком у бесконачности (конзеквентно схваћен, Фонтенелов први бесконачни број има у ствари за свој геометријски корелат бесконачно велику праву без тачке у бесконачности), онда се стоји пред овом логичком дилемом: или признање скока коначног у бесконачно (алтернатива коју акцентира Фонтенел) или уништење појма првог бесконачног броја ∞ .

није бесконачан, или да је коначно количина у односу на бесконачно услед једнакости која ће постојати између једног и другог“ (p. 151).

Завршна примедба

Као што излази из свих у одељцима 2 и 3 наведених критичких примедба, Фонтенелова теорија бесконачних бројева нема као математичка доктрина никакве позитивне вредности.

Али њена историјска вредност ипак је знатна. Прво стога што је то први покушај једне теорије бескрајних бројева. И друго зато што су се вероватно друге две модерне теорије, Канторова и Веронезова, ако не директно а оно индиректно (преко других писаца) користиле њоме¹.

¹ У својој у Уводу наведеној расправи ја сам о историјској улози Фонтенелове теорије написао следеће редове: „Као што се из напред наведеног види, теорија Фонтенелова може се сматрати као заједничка база дивергентних теорија Кантора и Веронезеа, и било би интересно знати да ли су се и у којој мери творци нових теорија, бар негативно, инспирисали својим претходником. Што је ван сумње, они знају за његову теорију јер је цитирају оглађујући се од њених конзеквенција... Али није немогуће претпоставити, на основу постојећих сличности, да су како Кантор тако и Веронезе утврдили принципе својих теорија тежећи да избегну флагрантне противречности у које је била запала теорија славног француског академичара“.

Веронезе, који је имао у својим рукама рукопис моје расправе пре њеног штампања, додао је поред овог пасажа следеће редове:

„Note pour Mr. Petronievics

J'ai connu la Th. de Fontenelle après que j'avais établi la mienne; et peut-être la connaissance précédente (ова је реч нечитко написана) de cette théorie aurait pu me détourner de l'étude de la mienne.

G. Veronese“.

Иако је ова белешка била намењена мени лично ипак, после смрти знаменитог математичара, сматрам да је умесно да је публикујем као историјски документ којим се утврђује независност Веронезеове од Фонтенелове теорије.

REMARQUES CRITIQUES SUR LES NOMBRES INFINIS DE FONTENELLE.

PAR Dr. B. PETRONIEVICS

(Résumé)

Dans une note „*Sur les nombres infinis de Fontenelle*“ publiée dans „*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*“ 1917 (vol. XXVI, serie 5^a, 1^o sem. fasc. 5^o) j'avais exposé la théorie des nombres infinis de Fontenelle (publiée dans son ouvrage „*Eléments de la Géométrie de l'Infini*“, Paris, 1927), en la comparant avec les théories modernes de Cantor et de Veronese.

Dans le présent travail je donne d'abord (dans la section 1) un court résumé des trois théories en question, j'ajoute après quelques remarques critiques de ma part sur ces théories (section 2), et enfin j'expose les remarques critiques des trois auteurs antérieurs (de Mac Laurin, de Gerdil et d'Achard) sur la théorie de Fontenelle.

Ces remarques critiques peuvent être résumées de la façon suivante. D'abord les miennes propres.

Pour dûment critiquer de pareilles constructions abstraites, il faut faire une distinction logique préalable, qu'on n'est pas habitué à faire. Il faut distinguer ce qui est *formellement possible* de ce qui est *logiquement possible*. Un objet abstrait est formellement possible s'il n'y a aucune contradiction dans la définition même d'un tel objet. Un tel objet est logiquement possible, si non seulement sa définition comme telle n'implique aucune contradiction, mais si aussi les conséquences de la position mentale d'un tel objet n'en implique aucune. Le cercle carré est un objet non seulement logiquement impossible, mais il n'est même pas formellement possible, la définition d'un tel objet étant en elle-même contradictoire. Le nombre infini de tous les nombres finis est formellement possible, car *chaque* nombre fini étant formellement possible, leur ensemble *comme tel* le doit être aussi. L'impossibilité logique du nombre ω ne peut donc pas être déduite

de la définition même de ce nombre, mais seulement des *conséquences* qui suivent de sa position mentale. Or, je crois que l'égalité d'une partie avec le tout forme une telle contradiction du nombre ω , que le concept de ce nombre est logiquement impossible, quoique formellement tout à fait possible.

Si nous appliquons maintenant cette distinction aux trois théories, nous constaterons, que les concepts principaux des théories de *Cantor* et de *Veronese* sont formellement possibles, tandis que dans la théorie de *Fontenelle* il y a même des contradictions formelles.

Le nombre ∞ de *Fontenelle*, en tant que dernier terme de la suite naturelle des nombres, est un concept formellement contradictoire, la suite naturelle des nombres ne possédant par définition de dernier terme.

Le nombre ∞ de *Veronese* n'implique au contraire aucune contradiction formelle, la supposition d'une ligne droite infinie divisible en un nombre fini de parties n'étant point contradictoire comme telle. Mais je le tiens néanmoins pour logiquement impossible, et même dans un degré supérieur que le nombre ω de *Cantor*: le nombre ∞ de *Veronese* contient non seulement (comme le nombre ω de *Cantor*) la contradiction de l'égalité du tout avec une de ses parties, mais aussi la contradiction du passage immédiat du fini à l'infini, les nombres 1, 2, 3, ... n ... et les nombres ∞ , $\frac{\infty}{2}$, $\frac{\infty}{3}$, ... $\frac{\infty}{n}$, ... devant avoir un point de rencontre sur la ligne droite dont ils représentent les segments.

Le nombre ω de *Cantor* est exempt de cette dernière contradiction parce que, étant le type d'ordre d'un ensemble infini qui possède un premier mais pas de dernier terme, son image géométrique est une ligne droite qui se prolonge infiniment dans une direction, sans qu'il existe un point de cette droite qui soit infiniment éloigné de son commencement.

Le nombre ∞ de *Fontenelle* veut être à la fois le type d'ordre d'ensemble arithmétique des nombres finis sans dernier terme, et le type d'ordre des segments d'une ligne droite avec un point à l'infini, ce qui est contradictoire et impossible. Et c'est pour cette raison que ce nombre contient une contradiction formelle.

La critique de *Mac Laurin* se trouve dans son ouvrage *Treatise on the Theory of Fluxions*, Introduction (traduction française, 1749, t. I, p. XLI—XLVI). Dans cette critique *Mac Laurin*

se montre non seulement l'adversaire des nombres infinis de *Fontenelle*, mais ses arguments sont dirigés en même temps contre l'infini actuel en général. A la théorie de *Fontenelle* il reproche sa conception de ∞ comme dernier terme de la suite naturelle des nombres (p. XLII), sa thèse du nombre fini devenant infini par l'élévation au caré (p. XLIV), la thèse correspondante des fractions finies devenant infiniment petites par l'élévation au carré (ib.). Pourtant, les arguments qu'invoque à ce sujet *Mac Laurin* ne sont pas toujours valables.

La critique de *Gerdil* se trouve exposée dans son article:

„Essai d'une démonstration mathématique contre l'existence éternelle de la matière et du mouvement, déduite de l'impossibilité démontrée d'une suite actuellement infinie de termes, soit permanents, soit successifs“, 1760 (réimprimé dans *Opere edite ed inedite*, Roma, 1806, t. IV). Quoique postérieure à celle de *Mac Laurin*, la critique de *Gerdil* en est tout-à-fait indépendante (comp. *Gerdil*, l. c. p. 264) et à certains égards plus détaillée. En plus de trois points discutés par *Mac Laurin*, *Gerdil* s'occupe des nombres $(\infty - n)$ et $\frac{\infty}{n}$ de *Fontenelle*, que celui-ci désigne par le signe ∞ . Ces nombres n'ayant en général, d'après *Fontenelle*, qu'un rapport indéterminable à ∞ , et la somme de tous les termes de la suite naturelle étant $\frac{\infty^2}{2}$, la somme de la moitié de ces termes étant $\frac{\infty^2}{8}$, *Gerdil* arrive dans sa critique à la conclusion suivante: „Si les coefficients 1, 2, 3 etc de la progression naturelle arithmétique $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{2\infty}{\infty}$, $\frac{3\infty}{\infty}$ etc doivent en augmentant au numérateur, parvenir une fois à l'indéterminé ∞ , ils ne peuvent du moins y parvenir qu'après un cours infini.... On ne pourra donc non plus dire de l'infini ∞ que de l'infini ∞ , qu'il est le premier infini qui vient immédiatement après les termes finis de la suite...“ (l. c., p. 270).

Cette critique pénétrante de *Gerdil* relève une difficulté fondamentale dans la doctrine de *Fontenelle*, en montrant que son nombre ∞ perd sa position unique de premier nombre infini, si l'on suppose des nombres de la forme $\frac{\infty}{n}$.

La critique d'*Achard* (publiée dans „Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Berlin. Classe mathématique. Année 1745“,

p, 143—254) n'entre point dans les détails mathématiques de la doctrine de Fontenelle. Mais néanmoins elle est intéressante par le point de vue purement nominaliste quant aux concepts de la grandeur et du nombre, d'où elle conclut, que l'infini est impossible parce qu'il „bannit toute possibilité d'augmentation et de diminution“ (l. c., p. 147). *Achard* insiste sur la contradiction fondamentale dans la théorie de *Fontenelle*, le passage du fini à l'infini (l. c., p. 149). Et enfin il avance contre ses nombres, comme argument décisif et bien original, leur contradiction au principe d'égalité d'un tout à toutes ses parties prises ensemble. Si une grandeur finie n'est pas grandeur par rapport à une grandeur infinie, alors „de quelle manière on s'y prendra pour me faire comprendre que les parties d'un Tout... sont égales à ce Tout dans la supposition que le nombre de ses parties est réellement infini? Pour y parvenir on se trouvera dans la nécessité d'accorder, ou que le nombre de ces parties n'est pas infini, ou bien que le fini est grandeur par rapport à l'infini à cause du rapport d'égalité qu'il y aura entre l'un et l'autre....“ (l. c., p. 151).
