

12.704

СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLVII

Други разред

ФИЛОСОФСКО-ФИЛОЛОШКЕ, ДРУШТВЕНЕ И
ИСТОРИСКЕ НАУКЕ

80

Д-р БРАНИСЛАВ ПЕТРОНИЈЕВИЋ

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ КВОЦИЈЕНТ

и

ГЕОМЕТРИЈСКА МЕТОДА ГРАНИЦА

Прилог логици диференцијалног рачуна

БЕОГРАД
1933

ИНВ. бр. 12.704



ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ КВОЦИЈЕНТ И ГЕОМЕТРИЈСКА МЕТОДА ГРАНИЦА.

Прилог логици диференцијалног рачуна.

ОД
Д-ра БРАНИСЛАВА ПЕТРОНИЈЕВИЋА

(Приказано на скупу Академије философских наука 24 априла 1933 године)

1.

Диференцијални квоцијент функције једне променљиве $[y = f(x)]$, који се означава знаком $\frac{dy}{dx}$, може се схватити на два начина: или као чист симбол или као прави количник.

И у једном и у другом случају $\frac{dy}{dx}$ представља граничну вредност квоцијента диференција Δy и Δx , т. ј. и у једном и у другом случају је

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Али док по првом схватању $\frac{dy}{dx}$ не представља количник диференцијала dy и dx , већ чист симбол за одговарајућу граничну вредност (тако да се тај израз има читати не као „ dy кроз dx “ већ као „ dy по dx “), дотле је по другом схватању $\frac{dy}{dx}$ прави количник диференцијала dy и dx , који нису нуле већ бескрајно мале количине.

Прво схватање заступа огромна већина модерних математичких писаца (од Кошија до данас), а само спорадично јављају се и писци који заступају друго схватање. Као типичан преставник првог схватања има се сматрати математичар и филозоф Б. Болцано¹⁾ (*Bernard Bolzano*); а као преставника

¹⁾ Болцаново схватање изражено је у следећем цитату:

„Weil wir aber, wie nur eben angemerkt wurde, die abgeleitete Funktion einer abhängigen Grösse y in bezug auf ihre Veränderliche x erhalten, sobald wir in dem Ausdrücke

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

falls er erst so entwickelt wurde, dass weder Δx noch Δy irgendwo als Divisoren

другог схватања навешћемо Г. Ковалевског²⁾ (*Gerhard Kowalewski*).

erscheinen, das Δx sowohl als auch das $\Delta y = 0$ setzen; so dürfte es wohl nicht so unschicklich sein, die Abgeleitete durch eine Zeichnung, wie etwa folgende:

$$\frac{dy}{dx}$$

darzustellen, wenn wir hierbei erklären, *einerseits*, dass alle in der Entwicklung von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vorkommenden Δx , Δy oder die allenfalls statt ihrer angeschriebenen dy , dx als *blosse Nullen* angesehen und behandelt werden sollen; — *andererseits* aber, dass man die Zeichnung $\frac{dy}{dx}$ nicht etwa als einen *Quotienten* von dx in dy , sondern nur eben für ein *Symbol* der Abgeleiteten von y nach x anzusehen habe.

Dass einem solchen Verfahren noch keineswegs der Vorwurf gemacht werden könnte, es nehme Verhältnisse zwischen Grössen an, die gar nicht vorhanden sind (Null zu Null), ist klar; denn man will jene Zeichnung ja eben für ein *blosses Zeichen* angesehen wissen“ (уноп. *B. Boltzmann*, Paradoxien des Unendlichen, neu herausgegeben durch *Alois Höfler*, 1921, s. 67; прво издање 1850).

²⁾ Ово је схватање изражено у следећем цитату:

„Wir bezeichnen die Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x mit $f'(x)$. Diese Bezeichnung rührt von *Lagrange* her.

Das Produkt aus $f'(x)$ und einem Zuwachs h nennt man das *Differential* von $f(x)$ an der Stelle x und bezeichnet es nach *Leibniz* mit $df(x)$, so dass

$$df(x) = f'(x)h$$

ist. Man pflegt bei allen Funktionen dasselbe h zu benutzen, so dass insbesondere

$$dx = h$$

wird.²⁾ Infolgedessen dürfen wir schreiben

$$df(x) = f'(x)dx,$$

und daraus folgt $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

Die Ableitung ist also ein Quotient aus zwei Differentialen. Deshalb nennt man sie auch *Differentialquotient*“ (Види *G. Kowalewski*, Grundzüge der Differential — und Integralrechnung, 4-te Aufl., 1928, s. 55).

Овај цитат утолико је значајнији што *Ковалевски* сматра да је данас могуће „die Infinitesimalrechnung in völlig einwandfreier Weise aufzubauen“ и што својој књизи ставља у задатак да „in strenger Weise“ изложи основе диференцијалног и интегралног рачуна (н. и. м., Einleitung, s. 2).

И *П. Буџру* (*Pierre Boutroux*) заступа ово гледиште: „*Etant donné, en effet, la définition des différentielles, la dérivée $f'(t)$ ou y' doit être considérée comme étant un quotient véritable (rapport de l'infiniment petit dy à l'infiniment petit dt)*“ (Уноп. *P. Boutroux*, Les Principes de l'Analyse mathématique, t. II, 1919, p. 292).

И сам главни творац диференцијалног рачуна, *Лајбниц*, заступао је ово гледиште.

Али могу се навести и писци за које су оба схватања подједнако оправдана.³⁾

На први поглед изгледа као да је само прво гледиште логички конзеквентно и логички оправдано. Јер, пошто је $\frac{dy}{dx}$ гранична вредност количника $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, т. ј. његова вредност када Δx и Δy постану равни нули, изгледа да, ако хоћемо да избегнемо тврђење да је $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, морамо прибећи тврђењу, да је $\frac{dy}{dx}$ само симбол за ту граничну вредност и да у њему dy и dx немају самосталног значаја.

С друге стране опет ово гледиште пати од једне тешкоће која је у ствари несавладљива: ако у формули $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ dy и dx нису самосталне количине, прелаз од диференцијалног квоцијента на диференцијал функције није могућ. т. ј. није могуће ставити:

$$dy = f'(x)dx$$

(као што то без изузетка чине и преставници првог схватања), пошто у овој последњој формули dy и dx прѣстављају очевидно самосталне баскрајно мале количине (нису ни нуле ни чисти симболи).

Као што се види, док прво гледиште изгледа да једино одговара самој дефиницији диференцијалног квоцијента, дотле

³⁾ Тако у познатом уџбенику *Сеје-Шеферса* стоји: „Da $y = f(x)$ ist, können wir das Differential dy auch mit $df(x)$ bezeichnen, so dass wir für die Ableitung $f'(x)$ die von *Leibniz* herrührenden Darstellungsweisen

$$(3) \quad f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

haben. Diese Art der Darstellung der Ableitung als *Differentialquotient* ist die am meisten gebrauchte. Den Bruch $df(x) : dx$ kann man dabei von zwei verschiedenen Standpunkten aus auffassen, entweder wirklich als Quotienten von $df(x)$ und dx oder als ein Symbol, das den Grenzwert des Quotienten $\Delta y : \Delta x$ oder $\Delta f(x) : \Delta x$ zusammengehöriger Zunahmen von y und x bedeutet. Auch schreibt man die Formel (3) oft so:

$$df(x) = f'(x)dx \text{ oder } dy = f'(x)dx$$

wenn man die Nenner vermeiden will“ (*Serret-Scheffers*, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 6-te u. 7-te Aufl. Bd. I, 1915, s. 52—53).

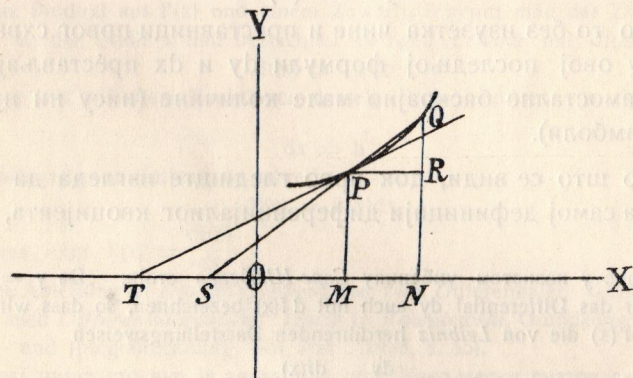
друго гледиште једино допушта прелаз од диференцијалног квоцијента на диференцијал. Како је немогуће избацити диференцијале из инфинитезималног рачуна (јер би тиме отпали не само тотални диференцијали, који су несумњиво самосталне количине, већ и цео интегрални рачун), то нам остаје једино да друго схватање тако формулишемо, да и оно одговара потпуно самој дефиницији диференцијалног квоцијента.

2

Како се ово последње може постићи на простији и убедљивији начин на основу геометријске методе граница него аналитичким путем, то ћемо се на овом месту ограничити на извођење помоћу геометријске методе.

Принцип геометријске методе граница писац је употребио у неколико својих ранијих радова.⁴⁾ Тај се принцип да укратко формулисати овако.

Нека је у фиг. 1 $OM = x$, $PM = y$, $ON = x + \Delta x$,



Фиг. 1

$QN = y + \Delta y$, P и Q тачке у којима секанта SQ сече криву, P тачка њене тангенте PT, MT њена субтангента. Тада

⁴⁾ Ти су радови:

1. Извођење диференцијалних квоцијената тригонометријских функција на основу геометријске методе граница, рад штампан у „Наставнику“ за 1909-у год.;

ће се, што се тачка Q буде више приближавала тачци P, и однос $\frac{QR}{PR} = \frac{PM}{MS}$ све више приближавати односу $\frac{PM}{MT}$, из чега следује, да је овај други гранична вредност првога, т. ј. да је $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{PM}{MS} = \frac{PM}{MT}$. Како је $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{PM}{SM} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то је $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{PM}{MT}$.

Као што се види, на основу геометријске методе граница израз $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ раван је количнику између ординате и субтангенте, т. ј. (ако субтангенту означимо са s_t).

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{s_t}.$$

Да је пак однос $\frac{PM}{MT}$ раван диференцијалном квоцијенту, одн. да је диференцијални квоцијент прави количник, да се показати на следећи начин.

Као што смо у фиг. 1 диференцију ординате криве озна-

2. *Déduction des dérivées de fonctions circulaires par la méthode géométrique des limites*, рад штампан у „L'Enseignement mathématique“, 1921 - 22, p. 195 — 208;

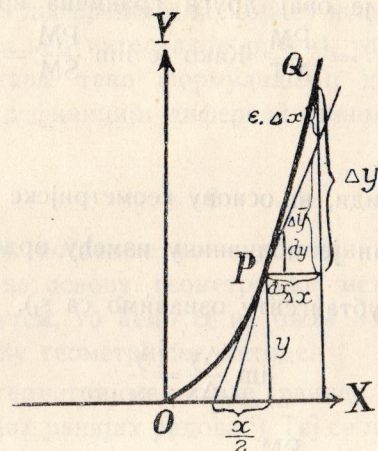
3. *Déduction géométrique de l'expression pour le rayon de courbure* (у сарадњи са J. M. Child-ом), рад штампан у „L'Enseignement mathématique“, 1921 - 22, p. 209—214;

4. *Déduction géométrique des dérivées supérieures des fonctions circulaires sinx et cosx* (у сарадњи са Др-ом И. Арновљевић-ем), рад штампан у „L'Enseignement mathématique“, 1923, p. 297—304; и

5. Извођење диференцијалних квоцијената израза $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ и $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ и $y = \sqrt{2ax}$ на основу геометријске методе граница, рад штампан у „Гласнику професорског друштва“ за 1926-у.

У овим радовима примењена је геометријска метода граница (чији су принцип формулисали Лајбниц и Даламбер) на чисто геометријско извођење диференцијалних квоцијената извесних релативно простих функција једне променљиве, као и на извођење израза за полупречник кривине.

чили са Δy , тако ћемо у фиг. 2 диференцију ординате одговарајуће тангенте, да би је разликовали од прве (чији је она први коначни сегмент), означити (стављањем хоризонталне



Фиг. 2

црте над y) са Δy . Напротив, бескрајно малу вредност диференције Δy означимо са $d\bar{y}$, док ћемо бескрајно малу вредност диференције Δy означити са dy .⁵⁾

Тада непосредно из фигуре 2 (у вези са фиг. 1) следује да је:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{PM}{MT} = \frac{y}{x/2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Према томе није $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ зато $= \frac{dy}{dx}$ што би dy и dx представљали симболички диференције Δy и Δx које су постале равне нули, већ зато што је коначна вредност, коју представља тај израз, равна количнику двеју коначних количина (ординате

⁵⁾ Логички конзеквентно би било бескрајно малу вредност од Δy означити са dy , а бескрајно малу вредност од $\Delta \bar{y}$ означити са $d\bar{y}$. Али како је већ усвојено и како је много практичније означавати диференцију ординате тангенте са dy , то се овде предлаже горње означавање.

Треба напоменути, да је Лајбниц при проналаску диференцијалног рачуна (напр. у своме писму Њутону из 1677-е год.) означавао диференцијале dy , dx и т. д. са $d\bar{y}$, $d\bar{x}$ и т. д., да би их разликовао од одговарајућих продуката dy , dx и т. д.

и субтангенте), а овај количник раван количнику коначних диференција Δy и Δx , а овај количник опет раван количнику бескрајно малих количина dy и dx . На основу геометријске методе граница следује дакле, да је диференцијални квоцијент прави количник диференцијала dy и dx .

Како је, на основу једначине дате криве, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$,

т. ј. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно једном аналитичком изразу који је опет само функција од x (није функција од x и Δx , пошто је Δx по претпоставци $= 0$), то је овим посредно утврђено, да је и $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ као правом количнику диференцијала.⁶⁾

3

До истог резултата доводи и посматрање тзв. Тајлоровог реда.

Као што је познато, непрекидна функција једне променљиве да се, под извесним специјалним условима (од којих је најважнији егзистенција извода), преставити бескрајним редом:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{f''(x)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(x)}{3!} \cdot h^3 + \dots,$$

одн. редом:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \frac{f''(x)}{2!} \cdot \Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!} \cdot \Delta x^3 + \dots,$$

или редом:

$$\Delta y = f'(x) dx + \frac{f''(x)}{2!} \cdot dx^2 + \frac{f'''(x)}{3!} \cdot dx^3 + \dots,$$

⁶⁾ Код простијих функција да се вредност израза $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ одредити како аналитичким тако и чисто геометријским путем. Тако се вредност израза

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x}$ да одредити како на основу геометријских особина параболе (види

о томе пише чланак наведен у примедби 4 под бројем 5) тако и чисто аналитички. У првом случају је $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} = \frac{y}{x} = x^2 : x = x$ (в. фиг. 2).

или редом:

$$\Delta y = dy + \frac{d^2y}{2!} + \frac{d^3y}{3!} + \dots^7),$$

где $f'(x)$, $f''(x)$ и т. д. представљају више изводе а d^2y , d^3y и т. д. више диференцијале.

Виши диференцијали одговарају бескрајно малим вредностима виших диференција Δ^2y , Δ^3y и т. д. Као што је наиме:

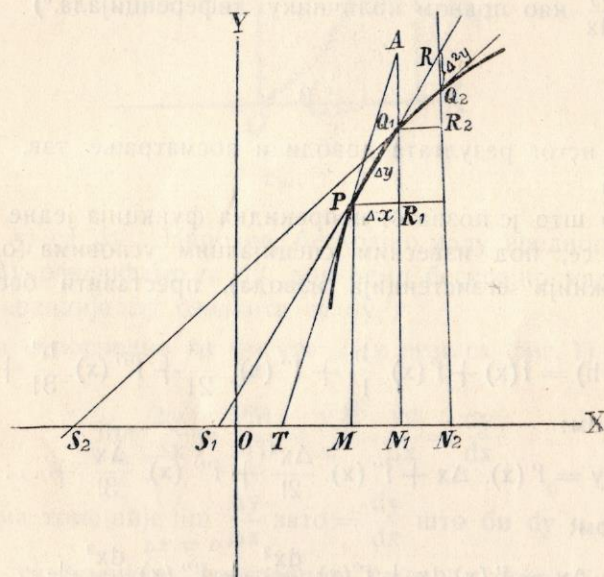
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

тако је:

$$\Delta^2y = \Delta f(x + \Delta x) - \Delta f(x) \text{ (упор. фиг. 3),}$$

$$\Delta^3y = \Delta^2 f(x + \Delta x) - \Delta^2 f(x),$$

и т. д.



Фиг. 3

А виши диференцијални квоцијенти:

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}, \dots$$

7) У другом од ова четири израза Δy и Δx означавају како коначне тако и бесконачно мале вредности диференција од y и x , док у трећем и четвртм Δy означава бескрајно малу вредност диференције од y , Δx бескрајно малу вредност диференције од x , а dy , d^2y , d^3y и т. д. диференцијале од y чија је вредност бескрајно мала.

престављају квоцијенте виших диференцијала и одговарајућих потенција диференцијала dx , који је константна количина (пошто је Δx по претпоставци — упор. фиг. 3 — константно).

Бескрајно мала вредност диференције од y (коју смо осначили са dy) преставља, као што се лако да увидети, прави диференцијал функције y : јер ако бескрајно мала вредност диференције од x преставља диференцијал од x , онда, логички узев, и бескрајно мала вредност диференције од y мора престављати њен диференцијал. Али како су диференцијалима назване бескрајно мале количине које се (у четвртм изразу) јављају на десној страни Тајлорове формуле⁸⁾ то ћемо, за разлику од ових последњих, dy назвати *ошћим* диференцијалом функције од x , док ћемо dy , d^2y , d^3y и т. д. назвати *посебним* диференцијалима њеним. Како се у бескрајном реду:

$$dy + \frac{d^2y}{2!} + \frac{d^3y}{3!} + \dots + \frac{d^ny}{n!} + \dots$$

8) Ако је непрекидна функција, која се развија у Тајлоров ред, цела рационална функција n -ог реда, њени виши диференцијални квоцијенти почев од $n + 1$ -ог биће равни нули и ред ће се састојати из коначног броја чланова, т. ј. биће:

$$\Delta y = dy + \frac{d^2y}{2!} + \frac{d^3y}{3!} + \dots + \frac{d^ny}{n!}$$

За $y = x^2$, функцију престављену у фиг. 2, ред ће се састојати само из два члана, т. ј. биће:

$$\Delta y = dy + \frac{d^2y}{2!},$$

одн. биће:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + f''(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{2}.$$

Како је, кад се стави

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \varepsilon$$

одн.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \varepsilon,$$

$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$ (упор. фиг. 2), биће (пошто је $f''(x) = 2$):

$$\varepsilon \cdot \Delta x = \Delta x^2$$

и

$$\Delta y = dy + \Delta x^2$$

одн.

$$dy = dy + (dx)^2.$$

немогу виши диференцијали, иако су бескрајно мале количине вишег реда, занемарити поред првог диференцијала као бескрајно мале количине првог реда,⁹⁾ то се општи диференцијал функције dy не може изједначити са првим посебним диференцијалом њеним.¹⁰⁾ Осим тога из егзистенције Тајлоровог реда следује самосталност егзистенције диференцијала, а самостална егзистенција диференцијала могућа је, као што смо видели, само ако су диференцијални квоцијенти прави количници диференцијала.

4.

Из свега досадашњег излагања дају се извести следећи општи закључци:

1. Схватање по коме је диференцијални квоцијент $\frac{dy}{dx}$ чист симбол за граничну вредност диференцијалног квоцијента $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ има се потпуно одбацити;

2. Диференцијални квоцијент $\frac{dy}{dx}$ има се схватити као прави количник диференцијала dy и dx ;

⁹⁾ У данашњем диференцијалном рачуну наиме не признаје се егзистенција актуално бесконачно малих количина (тзв. инфинитезимала), већ само егзистенција бескрајно малих количина у смислу неодређено малих коначних количина. А једна коначна количина не може се у прецизном рачуну занемарити макакo малу да је замислимо.

¹⁰⁾ А то се у ствари чини када се за први диференцијални квоцијент тврди, да је чист симбол за граничну вредност диференцијалног квоцијента. Доклегод су наиме $d\bar{y}$ и dy бескрајно мале количине оне су, према формули

$$d\bar{y} = dy + \frac{d^2y}{2!} + \frac{d^3y}{3!} + \dots + \frac{d^ny}{n!} + \dots,$$

количине различне једна од друге (упор. и фиг. 2, у којој је $\epsilon \cdot \Delta x = \Delta x^2$) и

$\frac{d\bar{y}}{dx}$ није $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. А када $d\bar{y}$ постане dy , онда је истина $\frac{d\bar{y}}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$,

али је тада и $\frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{0}{0}$.

3. При излагању диференцијалног рачуна треба најпре дефинисати извод формулом:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

па затим нарочито доказати да је $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, и

4. Треба разликовати општи диференцијал функције једне променљиве $[d\bar{y}$ или $d f(x)]$ од посебних диференцијала њених $(dy, d^2y, d^3y$ и т. д.).

