Библиотека Матице српске
III 17159

94

ЗАКОНИ ЦЕНТРАЛНОГ КРЕТАЊА

ПО ЊУТОНУ И ДРУГИМА

ОД
Д-ра БРАНИСЛАВА ПЕТРОНИЈЕВИЋА

СА 23 СЛИКЕ У ТЕКСТУ

ПРЕШТАМПАНО ИЗ „ГЛАСНИКА ПРОФЕСОРСКОГ ДРУШТВА“

БЕОГРАД,
1 9 3 3

ЗАКОНИ ЦЕНТРАЛНОГ КРЕТАЊА

ПО ЊУТОНУ И ДРУГИМА

ОД

Д-ра БРАНИСЛАВА ПЕТРОНИЈЕВИЋА

САА 23 СЛИКЕ У ТЕКСТУ

ПРЕШТАМПАНО ИЗ „ГЛАСНИКА ПРОФЕСОРСКОГ ДРУШТВА“

БЕОГРАД,

1 9 3 3

Инв. бр. 237573

Штампа „Планета“ - Београд - Добрачина ул. 55 - Телефон бр. 22-413

ГЕОМЕТРИСКО ИЗВОЂЕЊЕ ЗАКОНА И ФОРМУЛА ЗА ЦЕНТРАЛНО КРЕТАЊЕ

ПРЕТХОДНА ПРИМЕДБА

Као што је познато, *Њутон* је у својим „Принципима“[1] геометриски извео законе и формуле за централно кретање[2] и применио их на објашњење кретања небеских тела у Сунчаном систему[3], а *Лаплас* је те законе и формуле извео аналитички и дао им дефинитивну форму.[4]

У своме коментару на прва три одељка прве књиге Њутонових „Принципа“ *Фросш* је геометриске доказе Њуто-

---

[1]) Њутоново дело, чије је прво издање изашло 1687 год., биће у следећем цитирано по трећем оригиналном издању његовом изишлом 1726 год., чији наслов гласи: *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Auctore Isaaco Newtono, Eq. Aur. Editio tertia aucta et emendata. Londini, MDCCXXVI.

Од доцнијих коментарисаних издања Њутоновог дела од нарочитог је значаја, са свога опширног коментара, тзв. језуитско издање *Th. Le Seur — Fr. Jaquier*, које је први пут изишло у две свеске у Женеви 1739—40. Од значаја је и Волферсов коментар који иде уз његов немачки превод „Принципа“, публикован 1872 (и понова прештампан 1932-е).

[2]) Ово извођење налази се у првој књизи „Принципа“ (De motu corporum liber primus), нарочито у одељцима I, II, III, XI и XII.

[3]) Ова је примена изведена у трећој књизи „Принципа“ (De mundi systemate liber tertius), у одељцима Phaenomena и Propositiones.

[4]) У делу „Mécanique céleste“, livre II, ch. 1. О односу Лапласа према Њутону у овом погледу ево како се изражава *А. Хас* у своме делу „*Die Grundgleichungen der Mechanik*, dargestellt auf Grund der geschichtlichen Entwickelung“ (Leipzig 1914, s. 96): „Das war alles, was *Newton* über den Zusammenhang zwischen den *Kepler*schen Gesetzen und seinem Gravitationsprincipe in exacter Weise vorzubringen wusste; weiter reichte seine Macht nicht; denn er geriet in der Tat auf Schwierigkeiten, die er unter Benützung der von ihm streng befolgten *synthetischen Methode* nicht zu überwinden vermochte. Die *vollständige* Durchführung des von *Newton* nur fragmentarisch gegebenen Beweises ist erst auf *analytischem* Wege dem unsterblichen Schöpfer der „Mécanique céleste,“ ist erst *Laplace* gelungen, dessen Gedankengängen wir uns im folgenden im wesentlichen anschliessen wollen“.

нове јако упростио[5]. У следећим редовима пак писац је покушао, да тим упрошћеним доказима Фростовим дâ рационалнији облик, чиме је Њутоново геометриско извођење учињено много схватљивијим. Осим тога писац је покушао и да *„проблем једног тела“* одвоји потпуно од *проблема два тела*, чиме како Њутонови закони гравитације (закони гравитационог убрзања и закон гравитационе силе) тако и Кеплерови закони постају много разумљивији.

Излагање ће стога бити подељено у два дела. У првоме (део *A*) биће закони и формуле централног кретања једне материјалне тачке око друге изведени под претпоставком, да та материјална тачка *нема масе*; а у другоме (део *B*) биће изведени неколики закони и формуле централног кретања двеју материјалних тачака од којих *обе* имају масу. Сваки од ова два дела биће подељен у одељке и пододељке.

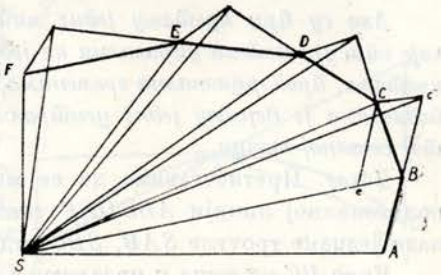
A

I

ГЕОМЕТРИСКО ИЗВОЂЕЊЕ ОСНОВНИХ ТЕОРЕМА

Ако на једну материјалну тачку дејствује централна сила, потези, који су управљени ка тачци у којој је седиште силе, налазиће се сви у једној истој равни и описиваће за једнака времена једнаке површине.

Доказ. Претпоставимо да материјална тачка, која се налази у тачци *A* (упор. фиг. 1), пређе дуж *AB* у јединици времена са извесном брзином која је независна од централне силе (чије је седиште у сталној тачци *S*). Кад ова неби дејствовала, материјална тачка би у идућој јединици времена, по закону инерције, прешла дуж *Bc* која је = *AB*. Али ако претпоставимо да, у тренутку када се материјална тачка налази у *B*, централна сила саопшти тој тачци један импулс (одн. брзину) који би је, да тачка нема почетне брзине, приморао да за јединицу времена пређе једнаким кретањем дуж *Be* (у правцу потега *BS*), тачка ће, по принципу паралелограма кретања (одн. повлачењем дужи *Cc*‖*BS*), пређи у јединици времена дуж *BC*.



Фиг. 1

Ова последња дуж налазиће се у истој равни у којој је *AB* (у равни троугла *SAB*), пошто је *Bc* продужење од *AB*, а *Be* се налази у истој равни у којој је *AB*.

Како је *Cc*‖*SB* биће (упор. *Еклид*, Елементи, књ. I, 37) $\Delta SBC = \Delta SBc$, и како је $\Delta SBc = \Delta SAB$, биће троугли *SBC* и *SAB* по површини једнаки. На исти начин биће даље $\Delta SDC = \Delta SBC$ итд.

Према томе јасно је, да ће у овом случају (тј. при полигоналном кретању) потези лежати сви у истој равни и да ће за једнака времена описивати једнаке површине (као и да ће у разним временима описане површине бити пропорционалне тим временима).

Али очевидно је, да ће исти став важити и при прелазу ка граници (тј. кад број страна полигоналне фигуре постане бесконачно велики а њихова величина бесконачно мала и кад дејствујућа централна сила постане непрекидна); друкчије речено, да ће и при криволиниском кретању описане површине бити пропорционалне протеклим временима.

(Упор. *Њутон*, Principia, liber I, sectio 2, propositio I, theorema I; и *Фрост*, p. 136—137).

Напомена 1. Као што се види, при доказу теореме, уколико се она односи на полигонално кретање, изрично се претпоставља, да постоји тзв. моментана сила, т.ј. сила која непосредно, у једном недељивом моменту, производи (коначну) брзину (не производећи убрзање).

Напомена 2. Као што је познато, ова теорема преставља проширени други Кеплеров закон.

[5]) Тај се коментар налази у Фростовој књизи: *Newton's Principia*, first book, sections I, II, III. With notes and illustrations and a collection of problems. By *Percival Frost*. Fifth edition, London 1900.

Сем Фростовим, писац се користио и делом Џ. Кокса: *Mechanics*. By *John Cox*. Cambridge, 1904 (нарочито главом: Ch. XXIV. Central Forces. The Law of gravitation).

2.

Ако су при кретању једне материјалне тачке површине, које описују потези управљени ка једној сталној тачци у равни кретања, пропорционални временима, таква материјална тачка подложна је дејству једне централне силе, чије је седиште у тој сталној тачци.

Доказ. Претпоставимо да се материјална тачка креће у полигоналној линији $ABCDEF$ тако да за иста времена прелази једнаке троугле SAB, SBC итд. (фиг. 1).

Како BC не лежи у продужењу дужи AB, то се ово одступање може, на основу закона инерције и појма силе, објаснити само претпоставком, да је постојала једна сила која је дејствовала на материјалну тачку кад се ова налазила у B (да није било тога дејства био би описан троугао SBc који је једнак троуглу SAB).

Како троугли SBC и SBc могу бити једнаки само ако је $Cc \| BS$ (*Евклид*, I,39), то је дејство силе на материјалну тачку у B могло бити управљено само у правцу који је паралелан са Cc, тј. у правцу BS (иначе се неби дао конструисати паралелограм $BeCc$ чија је дијагонала BC). На сличан начин следује из једнакости троуглова SBC и SCD, да је сила морала дејствовати у правцу CS итд. Како се сви ти правци секу у тачци S, ова тачка мора бити седиште (централне) силе.

Лако је увидети, да исти закључак важи и за криволиниско кретање (у коме је AB бескрајно мало и поклапа се са луком криве, а Bc лежи у правцу тангенте у тачци B), при коме централна сила мора непрекидно дејствовати.

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 2, prop. II, theor. II; и *Фрост*, p. 151—152).

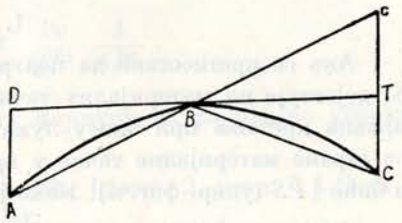
Напомена. Ова се друга основна теорема даје и овако изразити: *ако за кретање једне материјалне тачке у равни важи проширени други Кеплеров закон, њено кретање је централно.*

3.

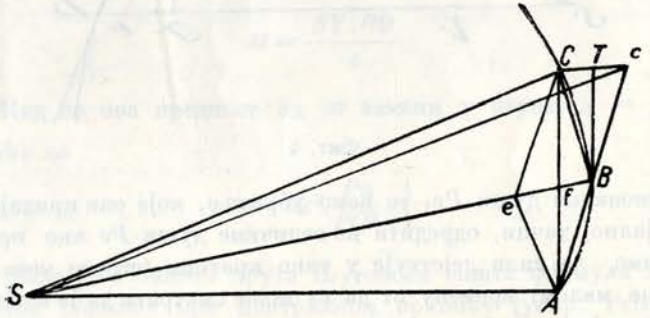
Одступање од правца кретања проузроковано дејством једне централне силе двапут је мање у криволиниском него у полигоналном кретању.

Доказ. Да би се доказао овај став треба најпре доказати следећу помоћну теорему: *ако су AB и BC два једнака лука једне криве, BT тангента у тачци B, $Bc = AB$ на правој Ac, биће $lim\ CT = \frac{1}{2}\ lim\ Cc$* (*фиг.* 2).

Ако се у фигури 2 повуче $AD \| Cc$, биће, пошто је $\Delta ABD \cong \Delta BcT$, $AD = cT$. Ако се даље та фигура допуни двама круговима, који додирују тангенту криве у тачци B и пролазе кроз тачке A и C, и у тим круговима повуку паралелно са AD и cT тетиве BV и BV' (које ће лежати у истој правој), биће с једне стране $lim\ AD\ .\ BV = AB^2$ а с друге $lim\ CT.\ BV' = BC^2$. Како је $lim\ BV = BV'$ (када тачке A и C падну уједно са тачком B и оба круга са кругом кривине у овој тачци) и $lim\ AB = lim\ BC$, биће и $\lim AD = \lim CT$. Како је пак $AD = cT$, биће напослетку $lim\ CT = lim\ cT = \frac{1}{2}\ lim\ Cc$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Као што показује фиг. 3, док је одступање од правца кретања при полигоналном кретању једнако дужи Be (одн. Cc), биће при криволиниском кретању то одступање равно дужи CT (пошто је TB тангента криве у тачци B). Како при прелазу ка граници Bc (које је $= AB$) постаје једнако са BC, биће како $lim\ AB = lim\ BC$ тако и $lim\ \widehat{AB} = lim\ \widehat{BC}$. Према томе биће, на основу помоћне теореме, и $lim\ CT = lim\ cT = \frac{1}{2}\ lim\ Cc$ или $lim\ fB = \frac{1}{2}\ lim\ eB$, чиме је трећа основна теорема доказана.

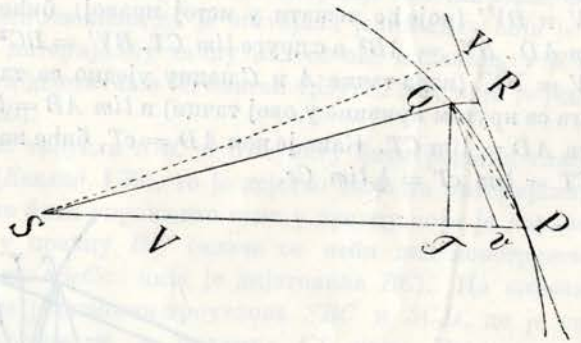
(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 2, prop. I, corollarium 4 и 3; и *Фрост*, p. 102—103 и p. 141).

II

ГЕОМЕТРИСКО ИЗВОЂЕЊЕ ФОРМУЛА ЗА РАДИЈАЛНО УБРЗАЊЕ ПРИ ОПШТЕМ ЦЕНТРАЛНОМ КРЕТАЊУ

1.

Ако се претпостави да централна сила, која се налази у S, дејствује на материјалну тачку која је у P, одступање од правца кретања при опису лука PQ (криволиниске путање) од стране материјалне тачке у времену t износиће $QR = P\varphi$ и биће $\parallel PS$ (упор. фиг. 4). Како је дејство централне силе про-



Фиг. 4

порционално дужи $P\varphi$, то ћемо убрзање, које она придаје материјалној тачци, одредити из величине дужи $P\varphi$ ако претпоставимо, да сила дејствује у тако кратком (строго узев бескрајно малом) времену Δt да се може сматрати да је константна. Тада ће, ако убрзање означимо са γ, бити (применом формуле за слободно падање тела: $s = \frac{1}{2} g t^2$, пошто је кретање једнако убрзано) $P\varphi = \frac{1}{2}\gamma (\Delta t)^2$, одакле следује: $\gamma = \frac{2P\varphi}{(\Delta t)^2}$

Ако се (фиг. 4) повуче $QT \perp PS$ и са c означи двострука вредност оне површине коју потег прелази у јединици времена, биће криволиниска површина $PSQ = \frac{1}{2} ct$. Како је површина троугла $PSQ = \frac{1}{2} SP.QT$ и како, при прелазу ка граници, криволиниска површина PSQ пада уједно са троуглом PSQ, биће $c.\Delta t = SP.QT$, а одавде:

$$\Delta t = \frac{SP.QT}{c}.$$

Кад се ова вредност од Δt замени у формули $\gamma = \frac{2P\varphi}{(\Delta t)^2}$ добиће се формула:

$$\gamma = 2c^2 \frac{P\varphi}{QT^2} \cdot \frac{1}{SP^2}.$$

која преставља прву општу формулу за радијално убрзање при централном кретању.

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 2, prop. VI, theor. V и cor. 1; и *Фросш*, p. 174—175).

2.

Ако се (фиг. 4) повуче $SY \perp PR$ биће $\Delta PSQ = \Delta PSR = \frac{1}{2} SY.PR$. Како при прелазу ка граници PR постаје једнако са луком PQ и троугао PSQ са криволиниском површином PSQ, биће $c.\Delta t = SY.PQ$, а одавде:

$$\Delta t = \frac{SY.PQ}{c}.$$

Кад се ова вредност од Δt замени у изразу $\gamma = \frac{2P\varphi}{(\Delta t)^2}$, добиће се

$$\gamma = 2c^2 \frac{P\varphi}{PQ^2} \cdot \frac{1}{SY}.$$

Овим је добивена друга Њутонова општа формула за радијално убрзање при централном кретању (упор. Principia, lib. I, sect. 2, prop. VI, theor. V, cor. 2; и *Фросш*, p. 175).

3.

Ако се (фиг. 4) из тачке P повуче (одн. одмери) у правцу PS тетива PV у одговарајућем кругу кривине, биће при прелазу ка граници $PV.QR = PQ^2$ [6], из чега (пошто

---

[6] Да је у кругу $PQ^2 = PV.QR$, да се доказати на следећи начин.

Из фиг. 5 (у којој је PR тангента у тачци P) види се да је $\measuredangle QVP = QPR$ (пошто је $\measuredangle NPV + VPQ + QPR = 90^0$ и $\measuredangle NPV + VPQ + QVP = 90^0$), са чега је $\Delta VPR \sim QPR$.

је $QR = P\varrho$) следује $PQ^2 = PV . P\varrho$. Кад се ова вредност од PQ^2 замени у формули претходног одељка, добиће се формула:

$$\gamma = 2c^2 \frac{1}{PV . SY^2}.$$

која представља трећу Њутонову општу формулу за радијално убрзање при централном кретању (упор. Principia, lib, I, sect. 2, prop. VI, theor. V, cor. 3; и *Фрост*, p. 175).

Напомена. Неби било тешко показати, да овој трећој формули Њутоновој одговара позната аналитичка формула за радијално убрзање при централном кретању:

$$\gamma = \frac{c^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}\right],$$

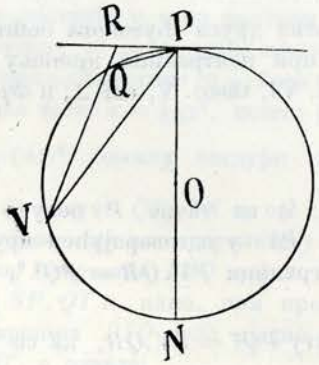
у којој је c она иста константа која се јавља и у Њутоновим формулама, а r и φ поларне координате.

4.

Ако са v обележимо линеарну брзину коју материјална тачка има у P (фиг. 4) биће $PQ = v . \Delta t$, одакле $v = \frac{PQ}{\Delta t}$. Тада из формуле:

$$\gamma = \frac{2Pv}{(\Delta t)^2} = \frac{2Pv}{PQ^2} \cdot \frac{PQ^2}{\Delta t^2}$$

Из ове сличности следује $PV : PR = PQ : QR$. Како при прелазу



Фиг. 5

ка граници постаје $QR \parallel PV$ и $PR = PQ = \widehat{PQ}$, биће и $PV . QR = PR^2 = PQ^2$.

следује заменом (пошто је и $PV . P\varrho = PQ^2$):

$$\gamma = \frac{2v^2}{PV},$$

чиме се добија четврта могућа формула за радијално убрзање при централном кретању (упор. *Фрост*, н. н. м., p. 175).

III

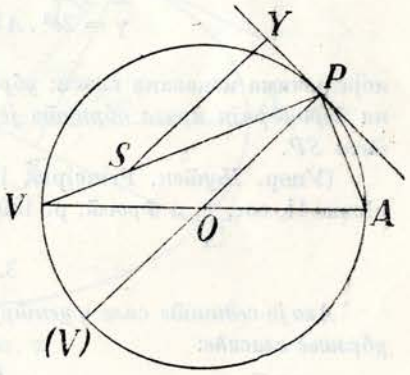
ГЕОМЕТРИСКО ИЗВОЂЕЊЕ ФОРМУЛА ЗА РАДИЈАЛНО УБРЗАЊЕ ПРИ ЦЕНТРАЛНОМ КРЕТАЊУ У КОНУСНИМ ПРЕСЕЦИМА.

1.

Ако је путања материјалне тачке круг са седиштем силе у равни круга, формула за радијално убрзање гласи:

$$\gamma = 2c^2 . AV^2 . \frac{1}{PV^3 . SP^2}.$$

Доказ. Нека је (фиг. 6) седиште силе у тачци S, материјална тачка у тачци P кружне периферије, PY тантента у тачци P, $SY \perp PY$, кроз S и P повучена тетива PV и из тачке V повучен пречник VA.



Фиг. 6

Како је $\Delta SPY \sim VAP$ (пошто из $\measuredangle OAP = OPA$ и $\measuredangle OPA = SPY$ следује $\measuredangle VAP = SPY$ и пошто је $\measuredangle VPA = SYP$), то је $SY : SP = VP : VA$, одакле следује:

$$SY^2 = \frac{SP^2 . PV^2}{AV^2}.$$

Кад се ова вредност од SY^2 замени у трећој Њутоновој формули за радијално убрзање:

$$\gamma = 2c^2 . \frac{1}{PV . SY^2}$$

добиће се горња формула:

$$\gamma = 2c^2 . AV^2 . \frac{1}{PV^3 . SP^2},$$

која се речима да изразити овако (пошто су c и AV константне количине): *радијално убрзање у кругу са седиштем силе у равни круга обрнуто је сразмерно производу из кубуса тетиве PV и квадрата потега SP.*

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 2, prop. VII, problema II, Idem aliter; и *Фрост*, н. н. м., p. 188).

2.

Ако је седиште централне силе на периферији круга, формула за радијално убрзање гласиће:

$$\gamma = 2c^2 . AV^2 . \frac{1}{SP^5}.$$

Доказ. Ако у фиг. 6 тачка S падне уједно са тачком V на периферији круга, биће $SP = PV$ и формула претходног пододељка претвориће се у формулу:

$$\gamma = 2c^2 . AV^2 . \frac{1}{SP^5},$$

која речима исказана гласи: *убрзање у кругу са седиштем силе на периферији круга обрнуто је сразмерно петом степену потега SP.*

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 2, prop. VII, problema II, cor, 1; и *Фрост*, p. 189).

3.

Ако је седиште силе у центру круга, формула за радијално убрзање гласиће:

$$\gamma = \frac{c^2}{SP^3}.$$

Доказ. Ако у фиг. 6 тачка S падне у средиште круга O, биће $2SP = PV = AV$ и формула првог пододељка претвориће се у формулу:

$$\gamma = \left[2c^2 . \frac{(2SP)^2}{(2SP)^3 . SP^2} = \right] \frac{c^2}{SP^3},$$

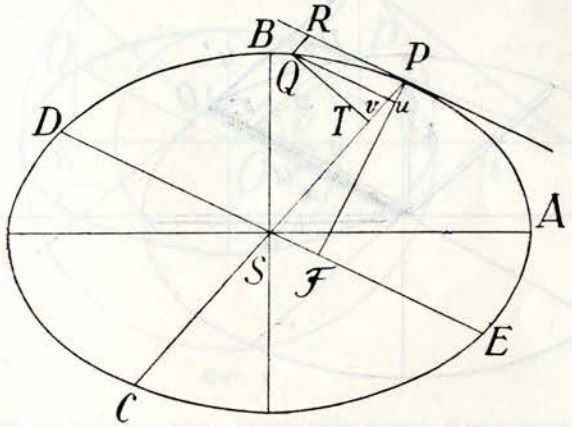
која исказана речима гласи: *ако је седиште силе у центру круга, радијално убрзање материјалне тачке обрнуто је сразмерно кубусу њеног одстојања од седишта силе.*

Напомена. Из ове последње формуле да се лако извести позната Хајгенсова формула за централно убрзање у кругу $\gamma = \frac{v^2}{r}$, у којој v означава линеарну брзину материјалне тачке која је константна. Како је у овом случају, као што ћемо доцније видети (упор. одељак VI-и), $c = vr$, формула $\gamma = \frac{c^2}{r^3}$ претвориће се у формулу $\gamma = \frac{v^2}{r}$.

4.

Ако је седиште централне силе у средишту елипсе, формула за радијално убрзање гласиће:

$$\gamma = \frac{c^2}{SA^2 . SB^2} . SP.$$



Фиг. 7

Доказ. Нека је у фиг. 7 S средиште елипсе, PC и DE њени коњуговани пречници, PR тангента у тачци P (у којој је материјална тачка која у времену t прелази лук PQ), $QR \| SP$ и $= Pv$, $PF \perp DE$, $Qu \perp PF$, и $QT \perp SP$.

Како је $\Delta vQT \sim SPF$ (пошто је $\measuredangle uQT = SPF$) биће:

$QT : Qv = PF : PS$, одакле:

$$\frac{QT^2}{Qv^2} = \frac{PF^2}{PS^2}.$$

Како је даље:

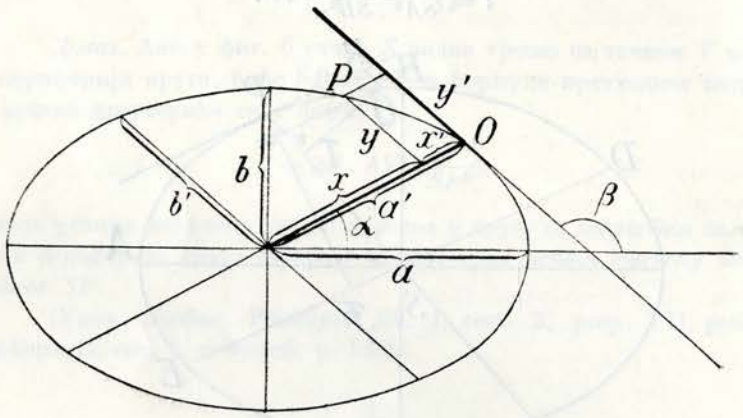
$$\frac{Q\varphi^2}{P\varphi \,.\, C\varphi} = \frac{SD^2}{SP^2} \text{ и}$$

$$PF \,.\, SD = SA \,.\, SB$$ [8])

[7]) Да је

$$\frac{O\varphi^2}{P\varphi \,.\, C\varphi} = \frac{SD^2}{SP^2}$$

следује из једначине $y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(2a'x' - x'^2)$ кад се у овој стави $y' = Q\varphi$, $x' = P\varphi$, $2a' - x' = C\varphi$, $b' = SD$ и $a' = SP$. А та једначина преставља једначину елипсе у косоуглом координатном систему, чија је једна оса пречник елипсе а друга одговарајућа тангента (упор. фиг. 8).



Фиг. 8

Она следује из једначине $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ (која преставља једначину елипсе у косоуглом координатном систему чије су осе коњуговани пречници елипсе $2a'$ и $2b'$ — упор. фиг. 8) кад се у овој x замени са $a' - x'$ (упор. фиг. 8).

[8]) Ова једнакост следује из става *да су паралелограми описани око елипсе тако, да су њихови додири са елипсом крајње тачке коњугованих пречника њених, сви по површини једнаки*, који се лако да извести из става *да су сви троугли, који постају*

то је:

$$\frac{OT^2}{Q\varphi^2} \cdot \frac{O\varphi^2}{P\varphi \,.\, C\varphi} = \frac{PF^2}{SP^2} \cdot \frac{SD^2}{SP^2} = \frac{SA^2 \,.\, SB^2}{SP^2}$$

одакле:

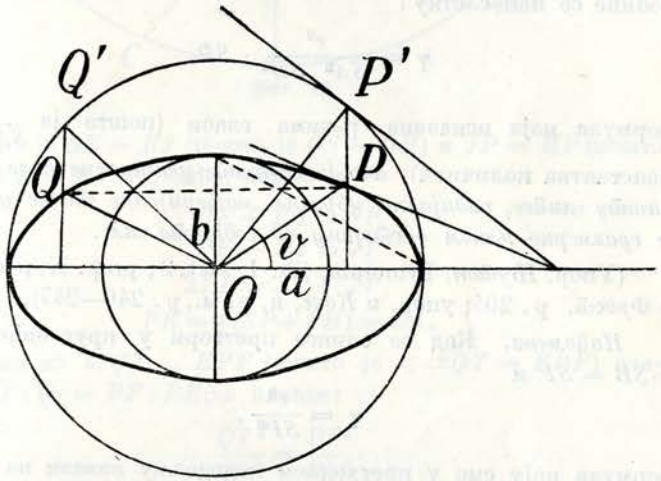
$$\frac{QT^2}{P\varphi \,.\, C\varphi} = \frac{SA^2 \,.\, SB^2}{SP^4}.$$

И како при прелазу ка граници постаје

$$lim\ C\varphi = 2SP$$

спајањем крајних тачака двају коњугованих полупречника е шипсе, по површини једнаки.

Овај последњи став пак може се доказати овако.



Фиг. 9

Ако се ексцентрична аномалија тачке P полупречника OP означи са φ (упор. фиг. 9) њене правоугле координате биће: $x_1 = a \cos \varphi$, $y_1 = b \sin \varphi$, а координате тачке Q коњугованог полупречника OQ (пошто је ексцентрична аномалија те тачке $= \varphi + 90^0$):

$$x_2 = -a \sin \varphi,\ y_2 = b \cos \varphi.$$

Заменом ових вредности у формули за површину троугла OQP:

$$J = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

биће та површина:

$$J = \tfrac{1}{2} ab,$$

што значи да је њена вредност константна.

биће:

$$\frac{QT^2}{P\varphi \,.\, C\varphi} = \frac{QT^2}{P\varphi \,.\, 2SP} = \frac{SA^2 \,.\, SB^2}{SP^4},$$

а одавде:

$$\frac{2P\varphi}{QT^2} = \frac{SP^3}{SA^2 \,.\, SB^2}.$$

Заменом ове вредности односа $\frac{2P\varphi}{QT^2}$ у првој Њутоновој формули за радијално убрзање:

$$\gamma = c^2 \,.\, \frac{2P\varphi}{QT^2} \cdot \frac{1}{SP^2}$$

добиће се напослетку:

$$\gamma = \frac{c^2}{SA^2 \,.\, SB^2} \cdot SP,$$

формула која исказана речима гласи (пошто је $\frac{c^2}{SA^2 \,.\, SB^2}$ константна количина): *ако је седиште централне силе у средишту елипсе, радијално убрзање материјалне тачке управно је сразмерно њеном одстојању од седишта силе.*

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 2, prop. X, probl. V; и *Фрост*, p. 204; упор. и *Кокс*, н. н. м., p. 246—247).

Напомена. Кад се елипса претвори у круг биће $SA = SB = SP$ и

$$\gamma = \frac{c^2}{SP^3},$$

формула коју смо у претходном пододељку извели на други начин.

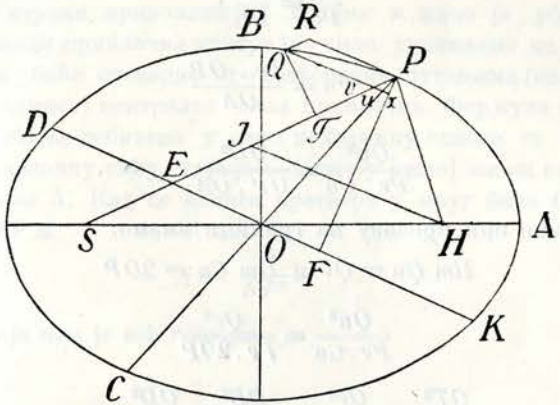
5.

Ако је седиште централне силе у једној жижи елипсе, формула га радијално убрзање биће:

$$\gamma = \frac{c^2 \,.\, OA}{OB^2} \cdot \frac{1}{SP^2}.$$

Доказ. Нека је у фиг. 10 S жижа елипсе у којој је седиште централне силе, PC и DK два коњугована пречника њена, PR тангента у тачци P (у којој је материјална тачка која под дејством силе прелази лук PQ), $QR \parallel SP$ и $= P\varphi$, $PF \perp DK$,

$Qx \perp PF$, $QT \perp SP$, u тачка у којој Qx сече PC, E тачка у којој OD сече SP, и $HJ \parallel OD$.



Фиг. 10

Како је $SE = EJ$ (пошто је $OS = OH$) и $JP = HP$ (пошто је $\measuredangle SPF = HPF$[9]), биће, пошто је

$$PE + ES = SP$$
$$PE - EJ = JP$$
$$2PE = SP + JP,$$
$$PE = \tfrac{1}{2}(SP + PH) = OA.$$

Како из $\Delta \varphi QT \sim EPF$ (пошто је $\measuredangle xQT = EPF$) следује $QT : Q\varphi = PF : PE$, а одавде:

$$\frac{QT^2}{Q\varphi^2} = \frac{PF^2}{PE^2},$$

и како је $PF \,.\, OD = OA \,.\, OB$[10]), биће:

$$\frac{QT^2}{Q\varphi^2} = \frac{PF^2}{PE^2} = \frac{PF^2}{OA^2} = \frac{OB^2}{OD^2}.$$

Како је даље:

$$\frac{Qu^2}{Pu \,.\, Cu} = \frac{OD^2}{OP^2} \text{ [11])}$$

---

[9]) Као што је познато, нормала у једној тачци елипсе полови угао који заклапају потези повучени из те тачке.

[10]) Упор. примедбу 8.

[11]) Упор. примедбу 7.

БИБЛИОТЕКА

и како из $\Delta Pu\varphi \sim POE$ следује:

$$\frac{Pu}{P\varphi} = \frac{PO}{PE},$$

одакле:

$$Pu = \frac{P\varphi \,.\, OP}{OA}$$

биће:

$$\frac{Qu^2}{P\varphi \,.\, Cu} = \frac{OD^2}{OP \,.\, OA}.$$

И како при прелазу ка граници имамо:

$$lim\ Qu = Q\varphi \text{ и } lim\ Cu = 2OP$$

биће;

$$\frac{Qu^2}{P\varphi \,.\, Cu} = \frac{Q\varphi^2}{P\varphi \,.\, 2OP}$$

и:

$$\frac{QT^2}{Q\varphi^2} \cdot \frac{Q\varphi^2}{P\varphi \,.\, 2OP} = \frac{OB^2}{OD^2} \cdot \frac{OD^2}{OP \,.\, OA},$$

а одавде:

$$\frac{2P\varphi}{QT^2} = \frac{OA}{OB^2}.$$

Заменом ове вредности односа $\frac{2P\varphi}{QT^2}$ у првој Њутоновој општој формули за радијално убрзање добиће се напослетку

$$\gamma = \frac{c^2 \,.\, OA}{OB^2} \cdot \frac{1}{SP^2},$$

формула која исказана речима (пошто је $\frac{c^2 \,.\, OA}{OB^2}$ константна количина) гласи: *ако је седиште централне силе у једној жижи елипсе, радијално убрзање материјалне тачке обрнуто је сразмерно квадрату њеног одстојања од седишта силе.*

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 3, prop. XI, probl. VI; *Фрост*, p. 220—21; и *Кокс*, p. 250—52).

Напомена 1. Као што се види, циљ овог Њутоновог доказа је у томе да покаже, да однос $\frac{2P\varphi}{QT^2}$ из прве опште формуле за радијално убрзање преставља код елипсе константну количину, тако да је убрзање зависно само од одстојања.

Напомена 2. У овом пододељку добивена формула да се речима изразити и овако: *ако важи први Кеплеров закон, радијално убрзање материјалне тачке обрнуто је сразмерно квадрату њеног одстојања од седишта силе.*

Напомена 3. Како се, као што је познато, правац убрзања произведеног дејством једне централне силе увек налази на конкавној страни криволиниске путање и како је убрзање које производи привлачна централна сила управљено ка седишту њеном, биће очевидно при затвореним путањама (као што су круг и елипса) централна сила привлачна. Формула за радијално убрзање добивена у овом пододељку односи се према томе на привлачну силу, чије је седиште у једној жижи елипсе.

Напомена 4. Кад се елипса претвори у круг биће $OA = OB = SP$ и

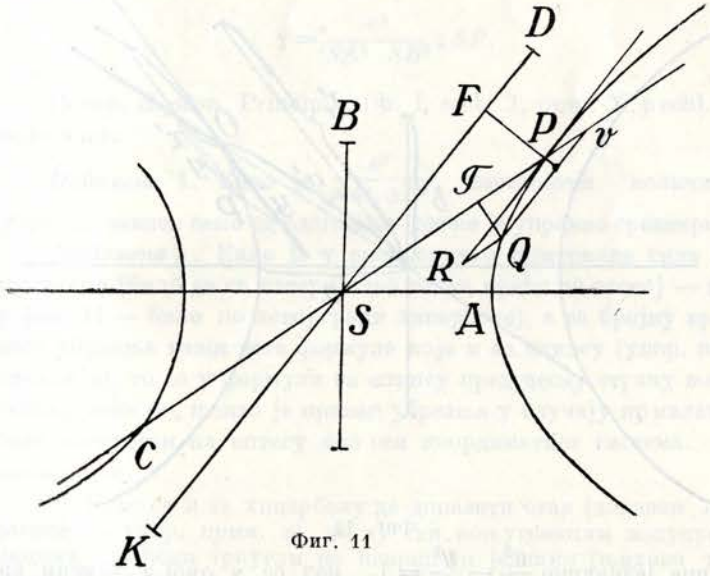
$$\gamma = \frac{c^2}{SP^3},$$

формула која нам је већ позната.

6.

Ако је седиште централне силе у средишту хиперболе, формула за радијално убрзање биће:

$$\gamma = \frac{c^2}{SA^2 \,.\, SB^2} \cdot SP.$$



Фиг. 11

Доказ. Нека је у фиг. 11 S средиште хиперболе, PC и DK коњуговани пречници, PR тангента у тачци P (у којој се на-

лази материјална тачка која у времену t прелази лук PQ), $QR \parallel SP$ и $= P\varphi$ (како се $P\varphi$ налази на конкавној страни криволиниске путање а управљено је супротно седишту силе, централна сила је одбојна), $PF \perp DK$ и $QT \perp SP$.

Из $\Delta \varphi QP \sim SPF$ (пошто је $\sphericalangle Q\varphi T = PSF$) биће $QT : Q\varphi = PF : PS$, а одавде:

$$\frac{QT^2}{Q\varphi^2} = \frac{PF^2}{PS^2}.$$

Како је

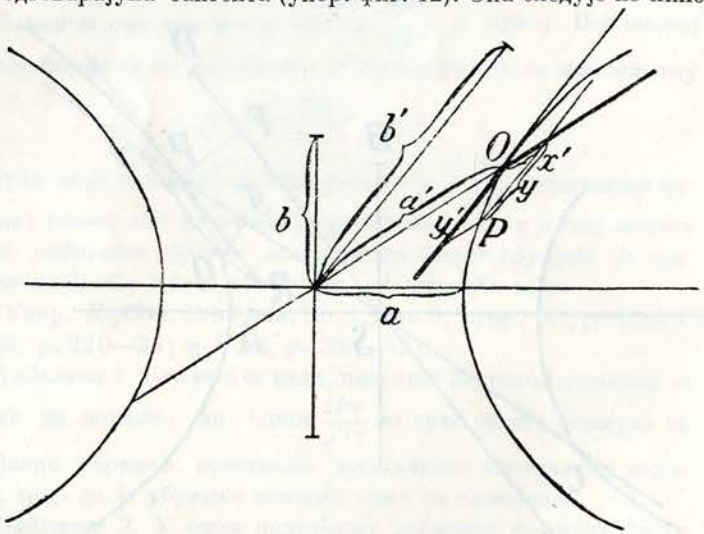
$$\frac{Q\varphi^2}{P\varphi \,.\, C\varphi} = \frac{SD^2}{SP^2} \quad ^{12)} \quad \text{и}$$

---

[12]) Да је и код хиперболе

$$\frac{Q\varphi^2}{P\varphi \,.\, C\varphi} = \frac{SD^2}{SP^2}$$

следује из њене једначине $y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(2a'x' + x'^2)$ кад се у овој стави $y' = Q\varphi$, $x' = P\varphi$, $2a' + x' = C\varphi$, $b' = SD$ и $a' = SP$. А та је једначина једначине хиперболе у косоуглом координатном систему, чије су координатне осе пречник хиперболе и одговарајућа тангента (упор. фиг. 12). Она следује из хипер-



Фиг. 12

болине једначине $\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$, кад се у овој x замени са $a' + x'$.

$$PF \,.\, SD = SA \,.\, SB \quad ^{12)}$$

биће:

$$\frac{QT^2}{Q\varphi^2} \cdot \frac{Q\varphi^2}{P\varphi . C\varphi} = \frac{PF^2}{SP^2} \cdot \frac{SD^2}{SP^2} = \frac{SA^2 \,.\, SB^2}{SP^4},$$

дакле:

$$\frac{QT^2}{P\varphi \,.\, C\varphi} = \frac{SA^2 \,.\, SB^2}{SP^4}.$$

И како је при прелазу ка граници $lim C\varphi = 2\,SP$ биће:

$$\frac{QT^2}{P\varphi \,.\, C\varphi} = \frac{QT^2}{P\varphi \,.\, 2SP} = \frac{SA^2 \,.\, SB^2}{SP^4},$$

а одавде:

$$\frac{2P\varphi}{QT^2} = \frac{SP^3}{SA^2 \,.\, SB^2}.$$

Заменом ове вредности односа $\frac{2P\varphi}{QT^2}$ у првој Њутоновој општој формули за радијално убрзање добиће се напослетку

$$\gamma = \frac{c^2}{SA^2 \,.\, SB^2} \cdot SP.$$

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 3, prop. X, probl. V, scholium).

Напомена 1. Како је $\frac{c^2}{SA^2 . SB^2}$ константна количина, убрзање зависи само од одстојања (овоме је управно сразмерно).

Напомена 2. Како је у овом случају централна сила репулзивна (било да се материјална тачка креће по десној — као у фиг. 11 — било по левој грани хиперболе), а за бројну вредност убрзања важи иста формула која и за елипсу (упор. пододељак 4), то се у формули за елипсу пред десну страну њену ставља знак —, пошто је правац убрзања у случају привлачне силе негативан на потегу као оси координатног система.

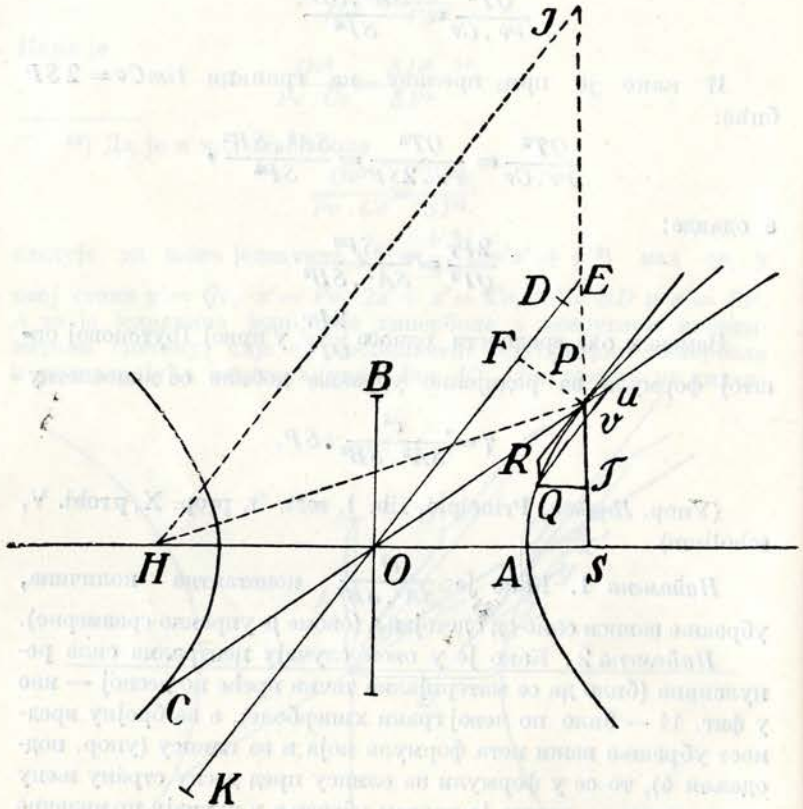
---

[13]) Како се и за хиперболу да доказати став (доказан код елипсе — упор. прим. 8), да су сви коњугованим полупречницима одређени троугли по површини једнаки (њихова површина $= \frac{1}{2}\,ab$), то и за хиперболу важи став, да су сви коњугованим пречницима описани паралелограми по површини једнаки.

7.

Ако је седиште централне силе у једној жижи хиперболе, формула за радијално убрзање биће:

$$\gamma = \frac{c^2 \,.\, OA}{OB^2} \cdot \frac{1}{SI^2}.$$



Фиг. 13

Доказ. Нека је у фиг. 13 S жижа хиперболе у којој је седиште централне силе, PC и DK два коњугована пречника њена, PR тангента у тачци P (у којој је материјална тачка која у времену t прелази лук PQ), $QR \parallel SP$ и $= Pv$, $PF \perp DK$, $QT \perp SP$, u тачка у којој Qv сече (продужено) PC, E тачка у којој (продужено) DK сече (продужено) SP и $HJ \parallel OE$.

Како је $SE = EJ$ (пошто је $OS = OH$) и $JP = HP$ (пошто је $\sphericalangle JPF = HPF$[14]) биће, пошто је
$EP = ES - PS = \frac{1}{2}(2ES - 2PS) = \frac{1}{2}[(JS - PS) - PS] = \frac{1}{2}(JP - PS)$,

$$EP = \tfrac{1}{2}(HP - PS) = OA.$$

Како из $\Delta vQT \sim EPF$ (пошто је $\sphericalangle QvT = FEP$) следује $QT : Qv = PF : PE$, а одавде:

$$\frac{QT^2}{Qv^2} = \frac{PF^2}{PE^2},$$

и како је $PF \,.\, OD = OA \,.\, OB$[15]), биће:

$$\frac{QT^2}{Qv^2} = \frac{PF^2}{PE^2} = \frac{PF^2}{OA^2} = \frac{OB^2}{OD^2}.$$

Како је даље:

$$\frac{Qu^2}{Pu \,.\, Cu} = \frac{OD^2}{OP^2}\ ^{16)}$$

и како из $\Delta Puv \sim POE$ следује:

$$\frac{Pu}{Pv} = \frac{PO}{PE},$$

одакле:

$$Pu = \frac{Pv \,.\, OP}{OA},$$

биће:

$$\frac{Qu^2}{Pu \,.\, Cu} = \frac{OD^2}{OP \,.\, OA}.$$

И како при прелазу ка граници имамо:

$$\lim Qu = Qv \quad \text{и} \quad \lim Cu = 2OP$$

биће:

$$\frac{QT^2}{Qv^2} \cdot \frac{Qv^2}{Pv \,.\, 2OP} = \frac{OB^2}{OD^2} \cdot \frac{OD^2}{OP \,.\, OA},$$

а одавде:

$$\frac{2Pv}{QT^2} = \frac{OA}{OB^2}.$$

---

[14]) Код хиперболе (за елипсу упор. прим. 9) нормала у једној тачци полови суплемент угла који заклапају потези повучени из тетачке.

[15]) Упор. примедбу 13.

[16]) Упор. примедбу 12.

Заменом ове вредности односа $\frac{2P\varphi}{QT^2}$ у првој Њутоновој општој формули за радијално убрзање биће напослетку:

$$\gamma = \frac{c^2 . OA}{OB^2} \cdot \frac{1}{SP^2},$$

формула која исказана речима (пошто је $\frac{c^2 . OA}{OB^2}$ константна количина) гласи: *ако је седиште силе у једној жижи хиперболе, радијално убрзање материјалне тачке обрнуто је сразмерно квадрату њеног одстојања од седишта силе.*

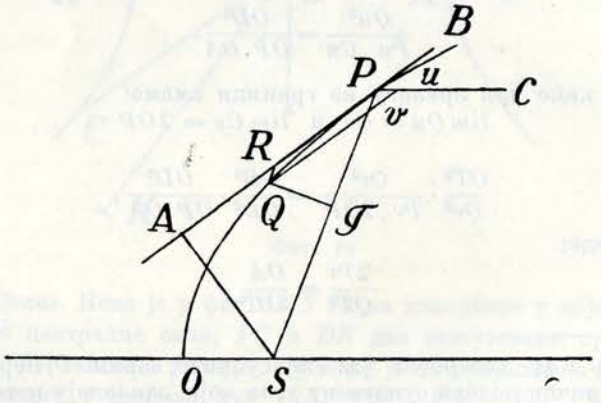
(Упореди *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 3, prop. XII, probl. VII).

Напомена. Како је при кретању материјалне тачке по десној грани хиперболе — као у фиг. 13 — централна сила привлачна, формула за радијално убрзање у овом случају је потпуно идентична са одговарајућом формулом код елипсе, дакле у *оба* случаја правац убрзања негативан. При кретању материјалне тачке по левој грани хиперболе тај је правац позитиван, јер је централна сила репулзивна.

8.

Ако је седиште централне силе у жижи параболе, формула за радијално убрзање биће:

$$\gamma = \frac{c^2}{2OS} \cdot \frac{1}{SP^2}.$$



Фиг. 14

Доказ. Нека је у фиг. 14 S жижа параболе у којој је седиште централне силе, PC пречник, PR (одн. AB) тангента у тачци P

(у којој се налази материјална тачка која у времену t прелази) лук PQ), $QR \parallel SP$ и $= P\varphi$, $QT \perp SP$ и $AS \perp AB$, u тачка у којој $Q\varphi$ сече PC.

Како је $\Delta \varphi P u$ равнокрак (пошто је $\sphericalangle SPA = CPB$[17] и Qu паралелно AB), биће $P\varphi = Pu$.

Како из $\Delta \varphi QT \sim PSA$ (пошто је $\sphericalangle Q\varphi T = APS$) следује $QT : Q\varphi = SA : SP$, а одавде:

$$\frac{QT^2}{Q\varphi^2} = \frac{SA^2}{SP^2},$$

и како је:

$$SA^2 = SO . SP^{18}),$$

биће:

$$\frac{QT}{Q\varphi^2} = \frac{SA}{SP^2} = \frac{SO . SP}{SP^2} = \frac{SO}{SP}.$$

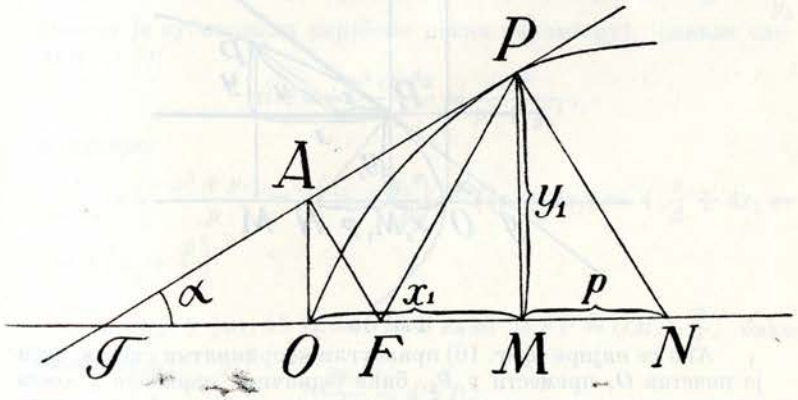
---

[17]) Као што је познато, тангента у једној тачци параболе заклапа једнаке углове са потегом и пречником повученим из те тачке.

[18]) Ова формула исказана речима гласи: *управна из жиже на тангенту параболе средња је пропорционала између одстојања жиже од тачке додира тангенте с параболом и одстојања жиже од темена параболе.*

Тај се став да доказати овако.

Како је (фиг. 15) $OT = OM$ (пошто теме параболе полови њену суптангенту) и како је (према дефиницији параболе и



Фиг. 15

Како је даље:

$$Qu^2 = 4SP \,.\, Pu$$ [19])

и како је при прелазу ка граници $lim\ Qu = Qv$ биће:

$$\frac{OT^2}{Qv^2} \cdot \frac{Ov^2}{Pv} = \frac{SO}{SP} \cdot 4SP,$$

а одавде:

$$\frac{2Pv}{QF^2} = \frac{1}{2SO}.$$

Заменом ове вредности односа $\frac{2Pv}{QT_2}$ у првој Њутоновој

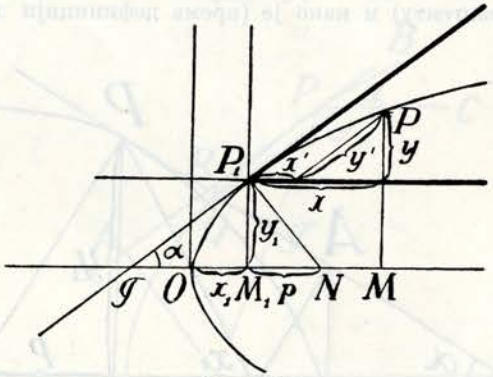
параметра) $FP = OM + \frac{p}{2} = OM + OF$, то је $FP = FT$. Из $\triangle AFT \cong AFP$ пак следује да је $AT = AP$, а одавде (и из $OT = OM$) да је $AO \parallel PM$ (тј. са нормалом из тачке P) и $\sphericalangle AOF = 90^0$. Напослетку из $\triangle AOF \sim (AOT \sim)\ AFP$ следује: $FP : AF = AF : OF$.

[19]) Да је $Qu^2 = 4SP \,.\, Pu$ следује из једначине

$$y'^2 = \frac{2p}{sin^2\alpha} \cdot x',$$

кад се у овој стави $y' = Qu$, $x' = Pu$ и $\frac{2p}{sin^2\alpha} = 4SP$.

Једначина $y'^2 = \frac{2p}{sin^2\alpha} \cdot x'$ преставља једначину параболе у косоуглом координатном систему чија је једна оса тангента а друга пречник параболе (упор. фиг. 16). Та се једначина из једначине $y^2 = 2px$ да извести на следећи начин.



Фиг. 16

Ако се најпре (фиг. 16) правоугли координатни систем, чији је почетак O, премести у P_1, биће једначина параболе у овом новом правоуглом систему (кад се у једначини $y^2 = 2px$ стави $x = x_1 + x'$ и $y = y_1 + y'$):

$$y'^2 + 2y_1 y' - 2px' = 0.$$

општој формули за радијално убрзање биће напослетку:

$$\gamma = \frac{c^2}{2SO} \cdot \frac{1}{SP^2},$$

формула која исказана речима (пошто је $\frac{c^2}{2SO}$ константна количина) гласи: *ако је седиште централне силе у жижи параболе, убрзање је обрнуто сразмерно квадрату одстојања материјалне тачке од седишта силе.*

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 3, prop. XIII, probl. VIII).

Ако се сада координате y' и x' поново означе са x и y, биће у косоуглом координатном систему чија је ординатна оса тангента параболе у тачци P_1 (ако се координате тачке P у њему означе са y' и x'):

$$x = x' + y' \cos\alpha$$
$$y = y' \sin\alpha.$$

Кад су ове вредности замене у једначине $y^2 + 2y_1 y - 2px = 0$, добиће се једначина: $y'^2 \sin^2\alpha + 2y_1 y' \sin\alpha - 2px' - 2py' \cos\alpha = 0$, а одавде, пошто је $y_1 \sin\alpha = p \cos\alpha$ (што следује из формуле $tg\alpha = \frac{p}{y_1}$ — упор. фиг. 15):

$$y'^2 = \frac{2p}{sin^2\alpha} \,.\, x',$$

Да је пак $\frac{2p}{sin^2\alpha} = 4SP$ да се доказати овако,

Ако су (фиг. 15) y_1 и x_1 координате тачке P у правоуглом координатном систему чији је почетак у темену, биће $tg\,\alpha = \frac{p}{y_1}$ (пошто је субнормала параболе равна параметру), одакле следује да је:

$$sin^2\alpha = \frac{p^2 \cos^2\alpha}{y_1^2} = \frac{p^2}{p^2 + y_1^2},$$

а одавде:

$$\frac{2p}{sin^2\alpha} = 2 \,.\, \frac{p^2 + y_1^2}{p} = 2\left(p + \frac{y_1^2}{p}\right) = 2(p + 2x_1) = 4 \,.\, \frac{p}{2} + 4x_1 =$$
$$= 4\left(x_1 + \frac{p}{2}\right).$$

Како је у фиг. 15 $x_1 = OM$ и како је $FP = OM + \frac{p}{2}$, биће напослетку:

$$\frac{2p}{sin^2\alpha} = 4\,FP.$$

IV

ИЗВОЂЕЊЕ ЊУТОНОВОГ ЗАКОНА ГРАВИТАЦИОНОГ УБРЗАЊА:

$$\gamma = \frac{C}{r^2}$$

ИЗ ФОРМУЛА ЗА РАДИЈАЛНО УБРЗАЊЕ У КОНУСНИМ ПРЕСЕЦИМА И ТРЕЋЕГ КЕПЛЕРОВОГ ЗАКОНА.

1.

Ако га кретање двеју или више материјалних тачака у концентричним круговима, у чијем се средишту налази централна сила, важи трећи Кеплеров закон (тј. ако је однос $\frac{r^3}{T^2}$ *константна количина), њихово радијално убрзање зависиће само од одстојања и биће одређено формулом* $\gamma = \frac{C}{r^2}$.

Доказ. Ако имамо две концентрична круга чији су полупречници r_1 и r_2, биће, на основу формуле за радијално убрзање у кругу $\gamma = \frac{c^2}{r^3}$ (упор. III, 3), с једне стране:

$$\gamma_1 = \frac{c_1^2}{r_1^3} \quad \text{и} \quad \gamma_2 = \frac{c^2}{r_2^3},$$

а с друге стране, на основу трећег Кеплеровог закона $\frac{r^3}{T^2} = K$,

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = K \quad \text{и} \quad \frac{r_2^3}{T_2^2} = K.$$

Како је даље, на основу формуле $\frac{c}{2} = \frac{r^2\pi}{T}$ (где је $\frac{c}{2}$ јединица површинске брзине а T периода),

$$c_1 = \frac{2r_1^2\pi}{T_1} \quad \text{и} \quad c_2 = \frac{2r_2^2\pi}{T_2},$$

биће:

$$\gamma_1 = \frac{4r_1^4\pi^2}{T_1^2 \cdot r_1^3} = 4\pi^2 \cdot \frac{r_1^3}{T_1^2} \cdot \frac{1}{r_1^2} \quad \text{и}$$

$$\gamma_2 = \frac{4r_2^4\pi^2}{T_2^2 \cdot r_2^3} = 4\pi^2 \cdot \frac{r_2^3}{T_2^2} \cdot \frac{1}{r_2^2}.$$

Али како је по претпоставци

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2} = K,$$

то је:

$$\gamma_1 = 4\pi^2 \cdot \frac{K}{r_1^2} \quad \text{и} \quad \gamma_2 = 4\pi^2 \cdot \frac{K}{r_2^2}.$$

или, ако се стави $4\pi^2 . K = C$,

$$\gamma = \frac{C}{r^2}.$$

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 2, prop. IV, cor. 6 и scholium).

Напомена. За концентричне кругове у којима се крећу материјалне тачке без масе могућ је безброј закона убтзања сличних Њутоновом, који одговарају законима сличним трећем Кеплеровом.

Доиста из формуле за радијално убрзање $\gamma = \frac{c^2}{r^3}$ и закона $\frac{r^n}{T^2} = K$ лако се да извести формула:

$$\gamma = \frac{C}{r^{n-1}}.$$

За $n = o$ биће $\gamma = C . r$, за $n = 1$ биће $\gamma = C$, за $n = 2$ биће $\gamma = \frac{C}{r}$ и т. д.

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 2, prop. IV, cor. 7).

2

Ако га кретање двеју или више материјалних тачака у елипсама са једном заједничком жижом, у којој је седиште централне силе, важи трећи Кеплеров закон (т. ј. ако је однос $\frac{a^3}{T^2}$ *константан), њихово радијално убрзање зависиће само од одстојања и биће одређено формулом* $\gamma = \frac{C}{r^2}$.

Доказ. Ако имамо две елипсе са једном заједничком жижом чије су велике полуосе a_1 и a_2, мале полуосе b_1 и b_2, а потези r_1 и r_2, биће с једне стране (на основу формуле за радијално убрзање у елипси $\gamma = \frac{c^2 . a}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2}$):

$$\gamma_1 = \frac{c_1^2 . a_1}{b_1^2} \cdot \frac{1}{r_1^2} \quad \text{и} \quad \gamma_2 = \frac{c_2^2 . a_2}{b_2^2} \cdot \frac{1}{r_2^2},$$

а с друге (на основу трећег Кеплеровог закона $\frac{a^3}{T^2} = K$):

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}.$$

Како је даље, на основу формуле $\frac{c}{2} = \frac{ab\pi}{T}$ (где је $ab\pi$ површина елипсе),

$$c_1 = \frac{2a_1b_1\pi}{T_1} \text{ и } c_2 = \frac{2a_2b_2\pi}{T_2},$$

биће:

$$\gamma_1 = 4\pi^2 . \frac{a_1^3}{T_1^2} \cdot \frac{1}{r_1^2} \text{ и } \gamma_2 = 4\pi^2 . \frac{a_2^3}{T_2^2} \cdot \frac{1}{r_2^2}$$

Али како је по претпоставци

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = K$$

то је:

$$\gamma_1 = \frac{4\pi^2 . K}{r_1^2} \text{ и } \gamma_2 = \frac{4\pi^2 . K}{r_2^2},$$

или, ако се стави $4\pi^2 . K = C$,

$$\gamma = \frac{C}{r^2}.$$

Напомена 1. Из формуле за радијално убрзање у елипси $\gamma = \frac{c^2 . a}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2}$ следује, кад се стави $c = \frac{2ab\pi}{T}$, формула:

$$\gamma = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 . r^2},$$

а одавде формула:

$$a^3 = \gamma \cdot \frac{T^2 . r^2}{4\pi^2}.$$

Напомена 2. Ако је седиште силе у центру елипсе, биће за две елипсе са заједничким средиштем с једне стране (на основу формуле $\gamma = \frac{c^2}{a^2 . b^2} \cdot r$):

$$\gamma_1 = \frac{c_1^2}{a_1^2 . b_1^2} \cdot r_1 \text{ и } \gamma_2 = \frac{c_2^2}{a_2^2 . b_2^2} \cdot r_2,$$

а с друге, ако се стави $T^2 = K$,

$$T_1 = T_2.$$

Како је тада (на основу формуле $\frac{c}{2} = \frac{ab\pi}{T}$)

$$\gamma_1 = \frac{4\pi^2}{T_1^2} \cdot r_1 \text{ и } \gamma_2 = \frac{4\pi^2}{T_2^2} \cdot r_2$$

и (по претпоставци)

$$T_1^2 = T_2^2 = K,$$

то је $\left(\text{кад се стави } \frac{4\pi^2}{K} = C\right)$

$$\gamma = C . r.$$

Као што је показао *Њутон* (упор. Principia, lib. I, sect. 3, prop. X, cor. 2 и Волферсов превод, прим. 16, стр. 580) из особина елипсе следује, да је овде претпоставка $T_1 = T_2$ нужна и једино могућа.

3

Ако за кретање двеју или више материјалних тачака у хиперболама са једном заједничком жижом, у којој је седиште централне силе, важи проширен трећи Кеплеров закон (т. ј. ако је однос $\frac{c^2}{p}$ константан), њихово радијално убрзање зависиће само од одстојања и биће одређено формулом $\gamma = \frac{C}{r^2}$.

Доказ. Како је хипербола отворена линија те нема периоде оптицања, трећи Кеплеров закон не важи за хитерболе са заједничком жижом. Али кад се у формули за убрзање $\frac{c^2 . a}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2}$ (упор. III, 7) стави $\frac{b^2}{a} = p$ (p је параметар, одн. ордината у жижи хиперболе) и претпостави да је однос $\frac{c^2}{p}$ у равним хиперболама са заједничком жижом константан, т.ј. $\frac{c^2}{p} = C$, важиће, као што се лако да извести, и за хиперболу формула:

$$\gamma = \frac{C}{r^2}.$$

Напомена 1. Претпоставка $\frac{c^2}{p} = C$ преставља тзв. *проширени* трећи Кеплеров закон, пошто у елипсама са једном заједничком жижом из те претпоставке следује трећи Кеп-

леров закон. Ако је наиме $\frac{c^2}{p}$ одн. $\frac{c^2 . a}{b^2} = C$, онда је и $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = C$, дакле и однос $\frac{a^3}{T^2}$ константан.

Напомена 2. Како је и парабола отворена линија, то ће и за разне параболе са заједничком жижом важити формула $\gamma = \frac{C}{r^2}$ кад се претпостави, да је и у њима $\frac{c^2}{p}$ (одн. $\frac{c^2}{2SO}$ — упор. II!, 8 = C.

V

ИЗВОЂЕЊЕ ТРЕЋЕГ КЕПЛЕРОВОГ ЗАКОНА ИЗ ФОРМУЛА ЗА РАДИЈАЛНО УБРЗАЊЕ У КОНУСНИМ ПРЕСЕЦИМА И ЊУТОНОВОГ ЗАКОНА ЗА ГРАВИТАЦИОНО УБРЗАЊЕ.

1.

Ако за радијално убрзање двеју или више материјалних тачака које се крећу у концентричним круговима, у чијем се средишту налази централна сила, важи Њутонов закон гравитационог убрзања $\gamma = \frac{C}{r^2}$, *за њихово кретање важиће трећи Кеплеровзак он* $\left(\frac{r^3}{T^2} = K\right)$.

Доказ. Ако имамо два концентрична круга чији су полупречници r_1 и r_2, биће с једне стране (на основу формуле за радијално убрзање у кругу $\gamma = \frac{c^2}{r^3}$):

$$\gamma_1 = \frac{c_1^2}{r_1^3} \quad \text{и} \quad \gamma_2 = \frac{c_2^2}{r_2^3},$$

а с друге (на основу Њутоновог закона гравитационог убрзања $\gamma = \frac{C}{r^2}$):

$$\gamma_1 = \frac{C}{r_1^2} \quad \text{и} \quad \gamma_2 = \frac{C}{r_2^2}.$$

Како је даље, на основу формуле $\frac{c}{2} = \frac{r^2\pi}{T}$,

$$c_1 = \frac{2r_1^2\pi}{T_1} \quad \text{и} \quad c_2 = \frac{2r_2^2\pi}{T_2},$$

биће:

$$\gamma_1 = \frac{4r_1^4\pi^2}{T_1^2 . r_1^3} = 4\pi^2 \cdot \frac{r_1^3}{T_1^2} \cdot \frac{1}{r_1^2}$$

и

$$\gamma_2 = \frac{4r_2^4\pi^2}{T_2^2 . r_2^3} = 4\pi^2 \cdot \frac{r_2^3}{T_2^2} \cdot \frac{1}{r_2^2}.$$

Али како је по претпоставци

$$4\pi^2 \cdot \frac{r_1^3}{T_1^2} \cdot \frac{1}{r_1^2} = \frac{C}{r_1^2} \quad \text{и} \quad 4\pi^2 \cdot \frac{r_2^3}{T_2^2} \cdot \frac{1}{r_2^2} = \frac{C}{r_2^2},$$

то ће бити напослетку:

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2}$$

или

$$\frac{r^3}{T^2} = K.$$

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect.2, prop. IV, cor. 6 и scholium),

Напомена. Из формуле за радијално убрзање у кругу $\gamma = \frac{c^2}{r^3}$ и формуле $\gamma = \frac{C}{r^{n-1}}$ (упор. напомену у пододељку 1 претходног одељка) лако је извести да ће бити:

$$\frac{r^n}{T^2} = K.$$

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 2, prop. IV, cor. 7).

2.

Ако за радијално убрзање двеју или више материјалних тачака које се крећу у елипсама са једном заједничком жижом, у којој је седиште централне силе, важи Њутонов закон гравитационог убрзања $\left(\gamma = \frac{C}{r^2}\right)$, *за њихово кретање важиће трећи Кеплеров закон* $\left(\frac{a^3}{T^2} = K\right)$.

Доказ. Ако имамо две елипсе са једном заједничком жижом, чије су велике полуосе a_1 и a_2, мале полуосе b_1 и b_2, а потези r_1 и r_2, биће с једне стране (на основу формуле за радијално убрзање у елипси $\gamma = \frac{c^2 . a}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2}$):

$$\gamma_1 = \frac{c_1^2 \cdot a_1}{b_1^2} \cdot \frac{1}{r_1^2} \quad \text{и} \quad \gamma_2 = \frac{c_2^2 \cdot a_2}{b_2^2} \cdot \frac{1}{r_2^2}$$

а с друге (на основу Њутоновог закона гравитационог убрзања $\gamma = \frac{C}{r^2}$):

$$\gamma_1 = \frac{C}{r_1^2} \quad \text{и} \quad \gamma_2 = \frac{C}{r_2^2}.$$

Како је даље, на основу формуле $\frac{c}{2} = \frac{ab\pi}{T}$,

$$c_1 = \frac{2a_1 b_1 \pi}{T_1} \quad \text{и} \quad c_2 = \frac{2a_2 b_2 \pi}{T_2},$$

биће:

$$\gamma_1 = 4\pi^2 \cdot \frac{a_1^3}{T_1^2} \cdot \frac{1}{r_1^2} \quad \text{и} \quad \gamma_2 = 4\pi^2 \cdot \frac{a_2^3}{T_2^2} \cdot \frac{1}{r_2^2}.$$

Али како је по претпоставци

$$4\pi^2 \cdot \frac{a_1^3}{T_1^2} \cdot \frac{1}{r_1^2} = \frac{C}{r_1^2} \quad \text{и} \quad 4\pi^3 \frac{a_2^3}{T_2^2} \cdot \frac{1}{r_2^2} = \frac{C}{r_2^2},$$

биће напослетку:

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}$$

или

$$\frac{a^3}{T^2} = K.$$

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 3, prop. XV у вези са prop. XIV).

3.

Ако за радијално убрзање двеју или више материјалних тачака које се крећу у хиперболама са заједничком жижом, у којој је седиште централне силе, важи Њутонов закон гравитационог убрзања $\left(\gamma = \frac{C}{r^2}\right)$, *за њихово кретање важиће проширени трећи Кајлеров закон* $\left(\frac{c^2}{p} = C\right)$.

Доказ. Из формула: $\gamma = \frac{c^2 a}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2}$ и $\gamma = \frac{C}{r^2}$ лако је извести да је:

$$\frac{c^2 a}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{C}{r^2}$$

или

$$\frac{c^2}{p} = C.$$

Напомена. Исто извођење важи очевидно и за параболу (упор. напом. 2 у под. 3 претходног одељка), а да се применити и на елипсу (упор. напом. 1 из под. 3 претходног одељка).

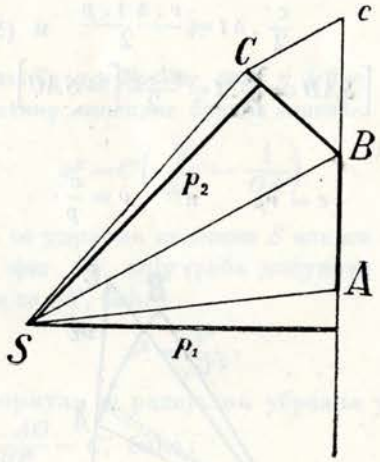
VI

ГЕОМЕТРИСКО ИЗВОЂЕЊЕ ФОРМУЛА ЗА ЛИНЕАРНУ БРЗИНУ ПРИ ОПШТЕМ ЦЕНТРАЛНОМ КРЕТАЊУ И ПРИ ЦЕНТРАЛНОМ КРЕТАЊУ У КОНУСНИМ ПРЕСЕЦИМА

1.

Линеарна брзина при општем централном кретању обрнуто је сразмерна управној на тангенту криволиниске путање спуштену из средишта силе.

Доказ. При полигоналном централном кретању линеарне брзине у тачкама A, B, C итд. (в. фиг. 17) пропорционалне су



Фиг. 17

основицама AB, BC итд. троуглова ABS, BCS итд. Како су сви ови троугли по површини једнаки (упор. теорему I,1) биће, ако се са p_1, p_2 итд. означе управне из тачке S на основице троуглова, $\frac{AB.p_1}{2} = \frac{BC.p_2}{2}$ и т д., дакле $AB : BC = p_2 : p_1$,

дакле основице обрнуто сразмерне управним p_1, p_2 и т д. Према томе биће и одговарајуће линеарне брзине у тачкама A, B, C и т д. обрнуто сразмерне овим управним.

Како ће при прелазу ка граници основице лежати у правцу тангенти на криволиниску путању (упор. фиг. 3), то ће и код кроволиниске путање линеарне брзине у појединим тачкама бити обрнуто сразмерне управним на одговарајуће тангенте.

2.

Линеарна брзина у једној тачци криволиниске путање равна је при централном кретању количнику из двоструке јединице површинске брзине и управне спуштене из седишта силе на одговарајућу тангенту.

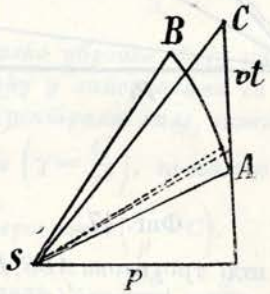
Доказ. Ако двоструку јединицу површинске брзине означимо са c (види II, 1), а линеарну са v, биће (на основу претходне теореме, теореме I, 1 и њеног доказа):

$$\frac{c}{2} \cdot \Delta t = \frac{v \cdot \Delta t \cdot p}{2} \quad \text{и (упор. фиг. 18)}$$

$$\left[SAB = \right]\frac{c}{2} \cdot t = \frac{vt \cdot p}{2}\left[= SAC\right],$$

одакле следује:

$$c = vp \quad \text{и} \quad v = \frac{c}{p}.$$



Фиг. 18.

(Упор. *Њутон*, Principia, lib, I, sect. 2, prop. I, cor. 1; и *Фросш*, н. н. м., p. 142—3).

3.

Ако је седиште централне силе у средишту елипсе, формула за величину линеарне брзине гласиће:

$$v = \mu . SD.$$

Доказ. Како је $v = \frac{c}{p}$ и $PF.SD = p.SD = AS.SB$ (упор. фиг. 7 и примедбу 8) биће:

$$v = \left[\frac{c}{p} = \frac{c \cdot SD}{p \cdot SD} = \right]\frac{c}{AS \cdot SB} \cdot SD,$$

или, ако се $\frac{c}{AS \cdot SB}$ као константна количина означи са μ,

$$v = \mu \cdot SD,$$

формула која, изражена речима, гласи: *линеарна брзина у елипси са седиштем централне силе у средишту директно је пропорционална одговарајућем коњугованом полупречнику.*

4.

Ако је седиште централне силе у једној жижи елипсе, формула за величину линеарне брзине гласиће:

$$v^2 = C\left(\frac{2}{SP} - \frac{1}{OA}\right).$$

Доказ. Ако се управна из жиже S елипсе на тангенту у тачци P (упор. фиг. 10, коју треба допунити повлачењем те управне) означи са SY, биће:

$$v^2 = \frac{c^2}{SY^2}.$$

Кад се у формули за радијално убрзање у елипси (упор. III, 5) стави $\frac{c^2 \cdot AO}{BO^2} = C$, биће:

$$c^2 = \frac{C \cdot BO^2}{AO}.$$

Како је у елипси (упор. фиг. 19)

$$SY^2 = \frac{OB^2 . SP}{HP}$$

(што следује из пропорције $SY^2 : OB^2 = SP : HP$, а ова из

пропорција $SY : SP = HZ : HP$[20]), $SY : HZ = SP : HP$, $SY^2 : SY.HZ = SP : HP$ и из пропорције $SY.HZ = OB^2$ [21]) биће:

$$v^2 = \left[\frac{c^2}{SY^2}\right] = \frac{C\,.\,HP}{AO\,.\,SP}.$$

Како је према дефиницији елипсе $HP + SP = 2\,AO$, то ће напослетку бити:

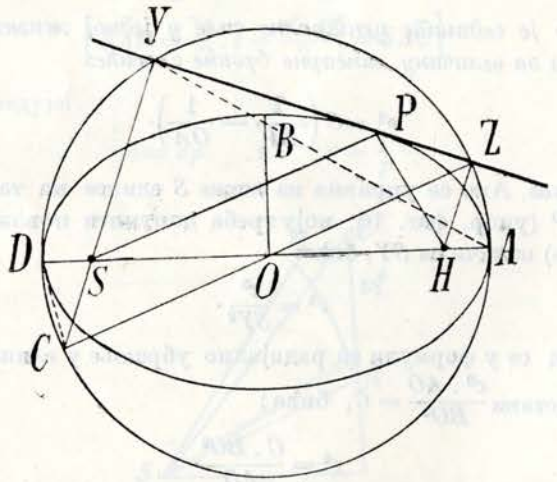
$$v^2 = \left[\frac{C\,.\,HP}{AO\,.\,SP} = \frac{C\,(2AO - SP)}{AO\,.\,SP} =\right] C\left(\frac{2}{SP} - \frac{1}{AO}\right),$$

---

[20]) Како су SY и HZ управне из жижа S и H елипсе (упор. фиг. 19) на њену тангенту у тачци P и како тангента заклапа једнаке углове са потезима SP и HP, то из сличности троуглова SYP и HZP следује горња пропорција.

[21]) *Да је производ управних спуштених из жижа елипсе на њену тангенту константан и раван квадрату мале полуосе*, да се показати на следећи начин.

Као што је познато, ако је YZ тангента елипсе у тачци P, а SY и HZ управне спуштене из жижа на тангенту, тачке Y и Z налазиће се на главном кругу елипсе (упор. фиг. 19).



Фиг. 19

Како је $\sphericalangle CYZ$ прав, то ће права CZ бити пречник главног круга, а из подударности троуглова OSC и OHZ следовати да је $SC = HZ$. Како даље из сличности троуглова SCD и SYA следује пропорција $SY : SA = SD : SC$ а одавде $SY\,.\,SC = SA\,.\,SD$ и како је $SA\,.\,SD = (a + c)(a - c) = a^2 - c^2 = b^2$, то је напослетку $SY.HZ = OB^2$.

или

$$v^2 = C\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 3, prop. XVI, cor. 6; и *Фрост*, p. 233 у вези са p. 224).

Напомена 1. Кад се у овој формули стави $a = \infty$, добиће се формула за линеарну брзину у параболи:

$$v^2 = \frac{2C}{r},$$

а кад се стави $a = r$ формула за линеарну брзину у кругу:

$$v^2 = \frac{C}{r}.$$

Према томе је „параболска брзина“ већа од „циркуларне“ за $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$

Напомена 2. Из опште формуле за линеарну брзину $v = \frac{c}{p}$ следује за круг (пошто је у овоме $p = r$) још и формула:

$$v = \frac{c}{r} \text{ и } c = vr.$$

5.

Ако је седиште централне силе у средишту хиперболе, формула за линеарну брзину биће:

$$v = \mu\,.\,SD.$$

Доказ. Како је $v = \frac{c}{p}$ и $PF\,.\,SD = p\,.\,SD = AS\,.\,SB$ (упор. фиг. 11 и примедбу 13) биће:

$$v = \frac{c}{AS\,.\,SB}\cdot SD,$$

или, ако се стави $\frac{c}{AS\,.\,SB} = \mu$,

$$v = \mu\,.\,SD.$$

6.

Ако је седиште централне силе у једној жижи хиперболе формула за линеарну брзину гласиће:

$$v^2 = C\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right).$$

Доказ. Као код елипсе биће и код хиперболе (упор. фиг. 13 коју треба допунити повлачењем управне SY):

$$v^2 = \frac{c^2}{SY^2} \text{ и } v^2 = \frac{C \,.\, HP}{SP \,.\, AO}.$$

Како је према дефиницији хиперболе $HP - SP = 2AO$, то ће бити:

$$v^2 = C\left(\frac{2}{SP} + \frac{1}{AO}\right)$$

или

$$v^2 = C\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right).$$

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 3, cor. 6).

7.

Ако је седиште централне силе у жижи параболе, формула за линеарну брзину гласиће:

$$v^2 = \frac{2C}{SP}.$$

Доказ. Ако се са SA означи управна из жиже на тангенту параболе (упор. фиг. 14) биће:

$$v^2 = \frac{c^2}{SA^2}.$$

Кад се у формули за радијално убрзање (упор. III, 8) стави $\frac{c^2}{2SO} = C$ биће $c^2 = 2\,C.OS$.

Како је даље $SA^2 = SO.SP$ (упор. примедбу 18) биће:

$$v^2 = \frac{2C \,.\, OS}{SP \,.\, SO} = \frac{2C}{SP},$$

или

$$v^2 = \frac{2C}{r},$$

чиме је ова формула и директно изведена.

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 3, prop. XVI, cor. 6).

VII

ДОКАЗАТИ ГЕОМЕТРИСКИМ ПУТЕМ ДА СЕ ЈЕДНА МАТЕРИЈАЛНА ТАЧКА МОРА КРЕТАТИ У КОНУСНИМ ПРЕСЕЦИМА АКО ЗА ЦЕНТРАЛНУ СИЛУ, КОЈА НА ЊУ ДЕЈСТВУЈЕ, ВАЖИ ЊУТОНОВ ЗАКОН ГРАВИТАЦИОНОГ УБРЗАЊА.

Доказ. Ако из једне дате тачке P полазећа материјална тачка са датом брзином у датом правцу стоји под утицајем једне централне силе чије је седиште у тачци S, претпоставимо

да је њена путања један конусни пресек чија је жижа тачка S. Тада ће, према раније доказаним теоремама (упор. IV, 1—3 у вези са теоремама III, 3, 5, 7 и 8), за централну силу важити Њутонов закон гравитационог убрзања $\gamma = \frac{C}{r^2}$. Како је пак немогуће да једна иста материјална тачка са истом брзином и истим правцем брзине под утицајем исте централне силе опише д в е разне путање, то њена путања, пошто је централна сила по претпоставци подложна Њутоновом закону $\gamma = \frac{C}{r^2}$, мора бити конусни пресек.

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 3, prop. XVII у вези са prop. XIII, cor. 1).

Напомена. Као што се види, овај је Њутонов доказ индиректан. Како постоји директан аналитички доказ теореме,[22]) то ће морати постојати и директан геометриски доказ. У своме коментару *Фрост* даје наместо Њутоновог један други индиректан доказ (н. н. м. prop. XVII, p. 237—239), у коме је употребљена четврта општа формула за радијално убрзање (упор.

---

[22]) Тај аналитички доказ гласи укратко овако. Кад се у аналитичкој формули за радијално убрзање при општем централном кретању (упор. II, напом. 3)

$$\gamma = \frac{c^2}{r^2}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\,\varphi^2} + \frac{1}{r}\right]$$

стави $\frac{1}{r} = u$ и $\gamma = \frac{C}{r^2}$, добиће се диференцијална једначина другог реда:

$$\frac{d^2 u}{d\,\varphi^2} + u = \frac{C}{c^2},$$

чије је потпуно решење (кад се стави $\frac{C}{c^2} = \frac{1}{p}$):

$$u = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\varphi,$$

одакле следује:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

а ово је општа поларна једначина конусних пресека.

II, 4). *Фросш* истина даје и један директан доказ теореме (н. н. м., p. 241—2), али се овај његов доказ не може сматрати да је чисто геометриски. Тако да потпуно задовољавајући директан геометриски доказ још није нађен.[23])

VIII

ИЗВОЂЕЊЕ ЊУТОНОВОГ ЗАКОНА ГРАВИТАЦИОНОГ УБРЗАЊА

$$\gamma = k \cdot \frac{M}{r^2},$$

ОДН. ДОКАЗ ТЕОРЕМЕ ДА ЈЕ УБРЗАЊЕ ЈЕДНЕ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ, НА КОЈУ ДЕЈСТВУЈЕ ЦЕНТРАЛНА СИЛА КОЈА ОПАДА СА КВАДРАТОМ РАСТОЈАЊА, УПРАВНО СРАЗМЕРНО МАСИ КОЈА ПРИВЛАЧИ А ОБРНУТО СРАЗМЕРНО КВАДРАТУ РАСТОЈАЊА.

Доказ. Као што је познато, из трећег основног Њутоновог закона кретања следује да убрзање зависи само од масе која производи убрзање, а да не зависи ніуколико од масе на којој се производи убрзање[24]). Према томе убрзање једне материјалне тачке ма са коликом масом, на коју дејствује једна централна сила, биће исто са убрзањем једне материјалне тачке без масе. Пошто централна сила по претпоставци опада са квадратом растојања, то ће, ако са M означимо масу у којој је седиште централне силе, убрзање материјалне тачке (без масе или с масом), на коју дејствује таква централна сила, бити очевидно пропорционално количнику $\frac{M}{r^2}$. Али како се маса

[23]) Да је Њутонов индиректни доказ недовољан, упореди о томе и примедбе *Ф. Розенбергера* (Ferd. Rosenberger) у делу: Isaac Newton und seine physikalischen Principien, 1895, s. 183—4. Упор. и примедбу 4.

[24]) Трећи Њутонов закон кретања, кратко формулисан, гласи: *акција и реакција двеју маса, које дејствују једна на другу, једнаке су и супротно управљене* (упор. Principia, одељак Axiomata sive leges motus, lex III, p. 14). Ако масе означимо са m_1 и m_2, њихова убрзања са γ_1 и γ_2, биће према овом трећем закону (упор. и одсек *B*, одељак IV) $m_1\gamma_1 = m_2\gamma_2$, одакле следује $\gamma_1 : \gamma_2 = m_2 : m_1$, тј. *убрзања су обрнуто сразмерна масама које их производе* (упор. и E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung, 6-te Aufl., 1908 s. 230—233). Друкчије речено, ако се фактор пропорционалности у овом (општем) случају означи са χ, биће $\gamma_1 = \chi . m_2$ и $\gamma_2 = \chi . m_1$.

мора бројно изразити у јединицама масе, а растојање у јединицама растојања, то ће фактор пропорционалности у овом случају претстављати очевидно убрзање које јединица масе производи на јединици растојања. Ако то убрзање означимо са γ_1, биће према томе убрзање на растојању r, које ћемо означити са γ_r, одређено формулом $\gamma_r = \gamma_1 \cdot \frac{M}{r^2}$; или, ако се γ_1, које је константно, означи са k, формулом: $\gamma = k \cdot \frac{M}{r^2}$.

Напомена 1. Ако бисмо теорему ограничили на материјалну тачку без масе, пропорционалност њеног убрзања са количником $\frac{M}{r^2}$ следовала би непосредно из самог појма масе (као фактора који производи убрзање). А даље би, увођењем фактора пропорционалности, на исти начин као и горе следовала формула $\gamma = k \cdot \frac{M}{r^2}$.

Напомена 2. Како је с једне стране $\gamma = \frac{C}{r^2}$, а с друге $\gamma = k \cdot \frac{M}{r^2}$, то је $C = kM$. А како је C или $= 4\pi^2 \cdot K$ (где је $K = \frac{^3}{T^2}$) или $= \frac{c^2}{p}$, то је $4\pi^2 K = kM$ и $\frac{c^2}{p} = kM$.

Напомена 3. Константа k преставља тако звану *универзалну гравитациону константу* и равна је убрзању од 6, 685. 10^{-8} см. у секунди (тј. равна 15.000.000-ом делу сантиметра у секунди).

B

I

ИЗВОЂЕЊЕ ЗАКОНА И ФОРМУЛА ЗА ЦЕНТРАЛНО КРЕТАЊЕ ДВЕЈУ МАТЕРИЈАЛНИХ ТАЧАКА СА МАСОМ, КОЈЕ СЕ ПРИВЛАЧЕ, ОКО ЗАЈЕДНИЧКОГ ТЕЖИШТА.

1.

Извођење формула за одстојање маса од заједничког тежишта

Ако масе материјалних тачака означимо са m_1 и m_2, њихово растојање једне од друге са r, одстојања тачке m_1 и m_2

кугластог исечка који дејствује на материјалну таку A ван њега, на растојању OA нека је тачка B узета тако да постоји пропорција $OB : \rho = \rho : OA$, PBN нека је мали конус чија је најдужа страна PB а елементарна површина PN база, PQ нека је мала кружна површина на кугли описаној из тачке B полупречником PB која одговара бази PN, и нека је ω просторни угао PBQ у средишту B.

Како је мала кружна површина чији је пречник PQ равна елементарној површини PN помноженој са $\cos\alpha$, и како је она прва $= PB^2 \cdot \omega$[25]), биће ова друга $= \frac{PB^2 \cdot \omega}{\cos\alpha}$. Ако се са μ означи маса кугластог исечка за јединицу запремине а са f привлачна сила елементарног делића у тачци P на материјалну тачку A, биће стога (пошто је запремина елементарног делића у P равна $\Delta\rho \cdot \frac{PB^2\omega}{\cos\alpha}$):

$$f = k\mu \cdot \Delta\rho \frac{PB^2 \cdot \omega}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{PA^2} = k\mu \,.\, \Delta\rho \frac{\omega}{\cos\alpha} \cdot \frac{PB^2}{PA^2}.$$

Како из $\Delta OBP \sim OAP$ следује

$$PB : \rho = PA : a$$

одн.

$$PB : PA = \rho : a$$

биће:

$$f = k\mu \,.\, \Delta\rho \frac{\omega}{\cos\alpha} \cdot \frac{\rho^2}{a^2}.$$

Ако компоненту силе f у правцу OA означимо са f_a биће даље:

$$f_a = f\cos\alpha = k\mu \,.\, \Delta\rho \,.\, \omega \,.\, \frac{\rho^2}{a^2}.$$

---

[25]) Као што, ако са l означимо лук круга са полупречником r, из

$$l : 2r\pi = \varphi : 2\pi$$

следује

$$l = r\varphi,$$

тако ће, ако са s означимо део куглине површине који одговара просторном углу ω, из

$$s : 4r^2\pi = \omega : 4\pi$$

следовати

$$s = r^2\omega.$$

Како је

$$\Sigma f\cos\alpha = k\mu\Delta\rho \,.\, \frac{\rho^2}{a^2} \,.\, \Sigma\,\omega = k\mu\Delta\rho \,.\, \frac{\rho^2}{a^2} \,.\, 4\pi$$

и како је, ако масу целокупног кугластог исечка означимо са M,

$$M = \mu \,.\, \Delta\rho \,.\, 4\rho^2\pi$$

биће напослетку:

$$\Sigma f\cos\alpha = k \,.\, \frac{M}{a^2}.$$

А ова формула исказана речима (пошто се компоненте сила f нормалне на правац OA очевидно узајамно потиру— упор. фиг. 23) гласи:

Кугласти исечак дејствује својом гравитационом силом на материјалну тачку ван њега тако као да се целокупна маса његова налази концентрисана у средишту дотичне кугле.

Како се кугла може замислити да се састоји из неизмерно много (одн. бескрајно много) хомогених кугластих исечака мале (строго узев бескарајно мале) дебљине, то иста теорема важи и за привлачну силу једног кугластог тела хомогене масе (као и са масом која постепено расте или опада идући од периферије ка центру) на материјалну тачку ван њега. А одавде се лако да извести и горња основна теорема.

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 12, prop. LXXI. Горњи доказ, који је много простији од Њутоновог, изведен је према доказу који се налази у делу: *A. Höfler*, Physik, 1904, Leitaufgabe 48a, s. 840—841).

VI

ПРИМЕНА НА СУНЧАНИ СИСТЕМ

1

Центар планетских и центри сателитских кретања.

Како су Сунце, планете и сателити готово потпуне кугле, то се при посматрању њихових привлачних сила и кретања која из ових следују њихове масе замишљају (на основу теореме претходног одељка) да су концентрисане у њиховим средиштима и њихова растојања сматрају да су идентична са растојањима средишта њихових кугала.

Стварни центар кретања небеских тела Сунчаног система налази се у заједничком тежишту маса тих тела.[26]) Али како Сунце својом масом далеко надмаша укупну масу свих осталих тела Сунчаног система (његова маса је 750 пута већа од масе свих осталих планета), то се то заједничко тежиште налази у унутрашњости саме Сунчеве кугле (иако ближе њеној површини него њеном средишту). Стога се масе планета (и сателита) дају занемарити у упоређењу са масом Сунца и заједничко тежиште кретања тела Сунчаног система ставити у само средиште Сунчеве кугле. У овом случају Сунце (одн. средиште његове кугле) постаје центар планетских кретања. На сличан начин, занемаривањем масе сателита у упоређењу са масом дотичне планете, планете (одн. средишта њихових кугала) постају центри сателитских кретања.

Али Сунце се може и на други начин схватити као центар планетских кретања. Ако се наиме ставимо на релативистичко становиште (упор. B, II) и масе планета придамо маси Сунчевој, Сунце(одн. средиште његове кугле) постаће опет (и то сада релативни) центар свих планетских кретања. Могли бисмо истина на овом становишту и Земљу или ма коју другу планету објавити за центар кретања Сунца и свих осталих планета, али би одступање од стварности у овом другом случају било много веће него што је оно у првом случају.

(Упор. *Њутон*, Principia, liber tertius, phaenomena и propositiones, и то prop. I, II, III и V, као и prop. XI, XII и XIII, у вези са phaenomenon I—VI).

2.

Кеплерови закони

Као што је познато, Кеплерови закони гласе:

1. *Путање планета су елипсе, у чијој се једној жижи налази Сунце*;

2. *Потези планетских путања описују у једнаким временима једнаке површине*; и

[26]) Пошто се наиме појам заједничког тежишта двеју маса (упор. B, I, 1) да применити и на n маса (упор. *Њутон*, Principia, Axiomata sive leges motus, cor. IV и lib. I, sect. 11, prop. LXIV).

3. *Кубови великих полуоса планетских путања (одн. планетских средњих одстојања од Сунца) пропорционални су квадратима планетских периода.*

Као што је показао *Њутон*, први Кеплеров закон само је специјалан случај опште теореме по којој се једна материјална тачка (а планета се може идентификовати са материјалном тачком која се налази у средишту њене кугле и има масу планете), на коју дејствује централна сила која опада са квадратом растојања, мора кретати у конусним пресецима (упор. A, VII). Стога ова општа теорема Њутонова (одн. тврђење да се тела Сунчаног система крећу у конусним пресецима) претставља тзв. *проширени први* Кеплеров закон.

Њутон је даље показао да је и други Кеплеров закон само специјалан случај опште теореме, по којој при кретању једне материјалне тачке, на коју дејствује централна сила, потези управљени ка седишту централне силе морају описивати за једнака времена једнаке површине (упор. A, I, 1) и која стога претставља *проширени други* Кеплеров закон.

Напослетку *Њутон* је показао да је и трећи Кеплеров закон само специјалан случај *проширеног трећег* Кеплеровог закона који гласи: *површинске брзине планета (и комета) пропорционалне су квадратним коренима из параметара њихових путања око Сунца* (упор. A, IV, 3).

Напомена. Први Кеплеров закон изражава се аналитички формулом:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi},$$

која преставља поларну једначину елипсе. Али како је то у исто доба и поларна једначина хиперболе и параболе, њом је аналитички претстављен и проширени први Кеплеров закон.

Други Кеплеров закон изражава се аналитички или формулом:

$$r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = c,$$

или, простије (ако се са S означи површина пређена у времену t), формулом:

$$S = \frac{1}{2} ct.$$

Трећи Кеплеров закон или се изражава формулом:

$$a_1^3 : a_2^3 = T_1^2 : T_2^2,$$

или (прецизније) формулом:

$$\frac{a^3}{T^2} = K \text{ (види ниже пододељак 4).}$$

3

Њутонов закон свеопште гравитације.

Из другог Кеплеровог закона (у вези са првим и са теоремом о привлачењу кугластих тела) *Њутон* је закључио, да планете одступају од тангенте својих криволиниских путања под утицајем привлачних централних сила чије је седиште у средишту Сунчеве кугле и да сателити одступају од тангенте својих криволиниских путања под утицајем централних сила чије је седиште у средиштима планетских кугала (упор. Principia, lib. III, prop. I—V у вези са phen. I—VI).

Из првог Кеплеровог закона *Њутон* је закључио, да те централне силе морају (на основу теореме доказане у А, III, 5) у свакој *појединачној* елиптичкој путањи опадати са квадратом растојања дотичне планете или сателита од седишта централне силе.

А из трећег Кеплеровог закона *Њутон* је напослетку закључио (на основу теорема доказаних у А, IV), да и у *разним* елиптичким (одн. кружним, хиперболичним и параболичним) путањама централне силе зависе само од растојања, или, друкчије речено, да су све те централне силе по физичкој природи својој само разне манифестације једне исте привлачне централне силе.

Да је ова привлачна централна сила, која одржава планете у њиховом путањама око Сунца и сателите у њиховим путањама око одговарајућих планета, идентична по својој физичкој природи са Земљином тежом (gravitas), тај је закључак *Њутон* потврдио својим тзв. Месечевим рачуном (Mondrechnung), који у модернизираној форми гласи овако. Ако пређени пут у првој секунди при слободном падању тела на површини Земљиној (одн. половину убрзања g) означимо са s_1, биће одговарајући пут s_2 на даљини Месечевој (чије средње одстојање од Земље износи 60 полупречника Земљине кугле) одређен формулом

$s_2 = \frac{s_1}{60^2}$ и износиће $\frac{4{,}89 \text{ м}}{3600} = 0{,}00135$ м. у секунди. Тај исти пут износиће с друге стране, ако се (при претпоставци да је Месечева путања кружна) у Хајгенсовој формули $s_2 = \frac{2r\pi^2}{T^2}$ (упор. А, III, напомена 3) r изрази у метрима а T у секундама (тј. стави $\frac{2r\pi^2}{T^2} = \frac{2.385000000.3{,}1416^2}{23616000}$), 0,00136м. у секунди, чиме је закључак Њутонов потврђен (упор. Principia, lib. III, prop. IV).

Ако се даље узме у обзир и зависност од масе (упор. *Њутон*, Principia, lib. III, prop. VII у вези са lib. I, prop. LXIX и са lex III), онда се долази до Њутоновог закона свеопште гравитације који гласи:

„Свака два тела (одн. свака два материјална делића) у Васиони привлаче се гравитационом силом, која је управно сразмерна њиховим масама а обрнуто сразмерна квадрату њиховог растојања“, и који се аналитички изражава формулом (ако масе тела означимо са m_1 и m_2 а њихово растојање са r — упор. В, IV):

$$f = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Напомена. Из нашег ранијег излагања (у *А*, IV и VIII и у В, IV) следује, да се имају разликовати следећа три Њутонова закона гравитације у ширем смислу:

1. Њутонов закон гравитационог убрзања изражен формулом $\gamma = \frac{C}{r^2}$ (у којој је $C = 4\pi^2 . K$ — упор. следећи пододељак).

2. Њутонов закон гравитационог убрзања изражен формулом $\gamma = k . \frac{m}{r^2}$ (у којој је k гравитациона константа); и

3. Њутовон закон гравитационе силе изражен формулом $f = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$. Само овај трећи закон преставља Њутонов закон гравитације у ужем слислу, али његова формула претпоставља у ствари формуле прва два закона (које смо стога назвали првим и другим Њутоновим законом гравитационог убрзања).

4.

Константе Сунчаног система

Од константи Сунчаног система најважније су ове четири:

1. Константа површинске брзине $\frac{c}{2}$ (упор. А, II, 1);

2. Константа трећег Кеплеровог закона $\frac{a^3}{T^2}$, коју означавамо са K;

3. Константа $4\pi^2 . K$, коју означавамо са C (упор. A, IV); и

4. Гравитациона константа, коју означавамо са κ.

Прва константа константна је за путању једне дате планете или једног датог сателита, али је различна за разне планетске и сателитске путање. Она се јавља у формули првог Њутоновог закона гравитационог убрзања $\gamma = \frac{c^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}$ (упор. А, IV, 3).

Константа $\frac{a^3}{T^2}$ има исту вредност за све планете Сунчаног система (то је константа планетског система), али је њена вредност различна у разним сателитским системима. Ако се велике полуосе путања двеју планета (напр. Земље и Марса) изразе у сантиметрима а њихове периоде у секундама, биће $K = 3{,}29810^{24}$ (ако се пак велика полуоса Земљине путање стави $= 1$ а периода изрази у средњим сунчаним данима, биће $K = 7496.10^{-9}$).

Константа $4\pi^2 . K$ има у планетском систему бројну вредност $1{,}321 \cdot 10^{26}$ (за $K = 3{,}298 \cdot 10^{24}$) и јавља се у формули првог Њутоновог закона гравитационог убрзања $\gamma = \frac{C}{r^2}$ (упор. А, IV). Како је $C = \kappa M$ (пошто је с једне стране $\gamma = \frac{C}{r^2}$ а с друге — упор. А, VIII — $\gamma = k . \frac{M}{r^2}$), где је κ гравитациона константа а M маса Сунца, и како је $\gamma = \frac{4\pi^2 . K}{r^2}$ (упор. А, IV, 2 напомена 1), то C преставља и убрзање које маса Сунца производи на јединици растојања (тј. убрзање које маса Сунца, концентрисана у средишту његове кугле, производи на растојању од једног сантиметра). То убрзање износи према томе $1{,}321.10^{26}$ сантиметара у секунди.

Бројна вредност гравитационе константе наведена је раније (упор. А, VIII напомена 3 и В, IV, напом. 4): она износи $6{,}685.10^{-8}$.

На основу наведеног лако је увидети да је

$$\frac{c^2}{p} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = 4\pi^2 . K = C = k . M.$$

5.

Одредба масе Земље, Сунца и планета

Маса Земље да се израчунати у грамовима масе на следећи начин. Како се маса Земље може сматрати да је концентрисана у средишту Земљине кугле, она се да израчунати из величине убрзања g (слободног падања тела на површини Земљиној) и величине полупречника Земљине кугле на основу формуле:

$$g = k \cdot \frac{m}{r^2},$$

одакле следује:

$$m = \frac{g r^2}{k}.$$

Кад се наиме у овој последњој формули стави $g = 981$ см., $r = 637 \cdot 10^6$ см. и $\kappa = 6{,}685.10^{-8}$ добиће се да је $m = 6.10^{27}$ грама масе.

Маса Сунца да се такође одредити у грамовима масе на основу формуле $C = \kappa . M$, одакле следује $M = \frac{C}{k}$. Кад се наиме у овој последњој формули стави $C = 1{,}321.10^{26}$ (упор. претходни пододељак) и $\kappa = 6{,}685.10^{-8}$ добиће се да је $M = 1{,}976 \cdot 10^{33}$ грама масе.

Маса Сунца у јединицама Земљине масе да се израчунати на следећи начин. Ако се убрзање које Сунце производи на средњем одстојању Земљином a од њега означи са γ, биће (ако се маса Сунца означи са S):

$$\gamma = k . \frac{S}{a^2}.$$

Како је убрзање на површини Земљиној g (ако се са E означи маса Земљине кугле) одређено формулом $g = k \frac{E}{r^2}$, биће:

$$\frac{S}{E} = \frac{\gamma a^2}{g r^2},$$

одакле следује:

$$S = E \cdot \frac{\gamma a^2}{g r^2}.$$

Кад се у овој последњој формули стави: $\gamma = 0{,}592$ см. у секунди[27]), а $= 14865.10^9$ см., $g = 981$ см. и $r = 637.10^6$ см. добиће се да је $S = 329000.E$ (и $E = \frac{S}{329000}$).

Масе оних планета које имају сателите дају се израчунати на основу формуле:

$$\frac{M_1 + m_1}{M_2 + m_2} = \frac{A_1^3}{t_1^2} : \frac{A_2^3}{t_2^2}$$

(упор. B, IV напомена), у којој су M_1 и M_2 масе двеју планета, m_1 и m_2 масе одговарајућих сателита, A_1 и A_2 велике полуосе сателитских путања, а t_1 и t_2 периоде сателита.

Ова формула употребљава се обично за израчунавање масе једне планете (која има сателите) у упоређењу са масом Сунца, и то на следећи начин. Ако се напр. хоће да одреди маса Јупитера, ставиће се у њој $M_1 = S$ (маса Сунца), $m_1 = E$ (маса Земље), $M_2 = J$ (маса Јупитера) и $m_2 = s$ (маса једног од сателита Јупитерових, напр. трећег), чиме ће се добити формула:

$$\frac{S+E}{J+s} = \frac{a^3}{T^2} : \frac{A^3}{t^2}.$$

Али како се маса Земље може занемарити наспрам масе Сунчеве и маса сателита Јупитеровог наспрам масе Јупитера (маса трећег сателита, који је највећи, не износи ни 10.000-ти део масе Јупитерове), добиће се упрошћена формула:

$$\frac{S}{J} = \frac{a^3}{T^2} : \frac{A^3}{t^2}.$$

Кад се у овој последњој формули стави $\frac{a^3}{T^2} = 7496.10^{-9}$ (упор. претходни пододељак) и $\frac{A^3}{t^2} = 7141.10^{-12}$ (где је A изражено у јединицама од a, а t у средњим сунчаним данима), биће $\frac{S}{J} = 1049$, одакле следује да је $S = 1049 . J$ и $J = \frac{1}{1049} . S$

Напомена. *Њутон* је први одредио масу Јупитерову и нашао да она износи 1067-и део масе Сунчеве (упор. Principia, lib. III, prop. VIII, cor. 2).

Д-р Б. Петронијевић

---

[27]) Из формуле:

$$\gamma = \frac{k . M}{r^2} \text{ (где је } M = S, \text{ а } r = a)$$

следује наиме, кад се стави $k.M = 1{,}321.10^{26}$ а $r = 1{,}4865{,}10^{13}$ $(= a)$, да је $\gamma = 0{,}592$ сантиметара у секунди.

Примедба. У прошлом чланку поткрале су се следеће крупније штампарске грешке.

На стр. 829 ред 2 одозго стоји:

$$\frac{QT^2}{Q\varphi^2} = \frac{Q\varphi^2\, PF^2}{P\varphi\, .\, C\varphi SP^2} \cdot \frac{SD^2}{SP^2} = \frac{SA^2\, .\, SB^2}{SP^4}$$

место:

$$\frac{QT^2}{Q\varphi^2} \cdot \frac{Q\varphi^2}{P\varphi\, .\, C\varphi} = \frac{PF^2}{SP^2} \cdot \frac{SD^2}{SP^2} = \frac{SA^2\, .\, SB^2}{SP^4}.$$

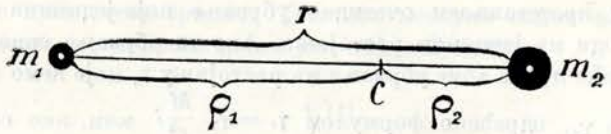
На стр. 834 ред 13 одоздо стоји $\frac{2p}{sin^2\alpha} \cdot x' = 4SP$

место: $\frac{2p}{sin^2\alpha} = 4SP.$

На стр. 835 ред 13 одоздо стоји $y' = \frac{2p}{Sin\alpha} \cdot x$

место: $y'^2 = \frac{2p}{sin^2\alpha} \cdot x'.$

од заједничког тежишта C са ρ_1 и ρ_2 (упор. фиг. 20), биће (на основу теореме о статичким моментима):



Фиг. 20.

$$m_1 \rho_1 = m_2 \rho_2$$

или

$$\rho_1 : \rho_2 = m_2 : m_1,$$

одакле следује:

$$\rho_1 : r = m_2 : (m_2 + m_1) \text{ и } r : \rho_2 = (m_2 + m_1) : m_1,$$

одн.

$$\rho_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot r \text{ и } \rho_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot r,$$

а ово су тражене формуле.

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 11, prop. LVII у вези са одељком Axiomata sive leges motus, cor. IV, p. 19).

2.

Извођење општих формула за убрзање двеју маса које се привлаче.

Ако убрзање масе m_1 означимо са γ_1 а масе m_2 са γ_2, биће на основу опште формуле:

$$\gamma = \chi \cdot f(r)$$

и формула (које следују из горњих формула за ρ_1 и ρ_2):

$$r = \rho_1 \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_2} = \rho_2 \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1},$$

$$\gamma_1 = \chi m_2 \cdot f\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \cdot \rho_1\right)$$

и

$$\gamma_2 = \chi m_1 \cdot f\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \rho_2\right),$$

а то су тражене опште формуле убрзања.

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 11, prop. LXI).

3.

Извођење формула за убрзање при претпоставци да привлачна сила расте са одстојањем.

Ако се у општој формули $\gamma = \chi . f(r)$ стави $f(r) = r$ биће, на основу изведених општих формула за γ_1 и γ_2,

$$\gamma = \chi . (m_1 + m_2) . \rho_1 \text{ и } \gamma_2 = \chi . (m_1 + m_2) . \rho_2,$$

или уопште

$$\gamma = \chi . (m_1 + m_2) . \rho,$$

формула која исказана речима гласи: *убрзање сваке од двеју маса у овом случају управно је сразмерно како суми обеју маса тако и одстојању сваке од њих од заједничког тежишта, у коме се обе масе налазе привидно уједињене.*

На основу ове теореме лако се да увидети, да ће се обе масе, ако немају почетних брзина или ако правац њихових почетних брзина пролази кроз тежишта, приближавати једна другој; а да ће, ако њихове почетне брзине заклапају угао са правом која их спаја, описивати елиптичне путање око заједничког тежишта, чије ће средиште лежати у тежишту.

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 11, prop. LXI).

Напомена 1. Као што показује формула $\gamma = \chi . (m_1 + m_2) . \rho$, у овом случају проблем два тела сведен је на *два* проблема једног тела, пошто је кретање материјалних тачака *са масом* сведено на кретање материјалних тачака *без масе* око заједничког тежишта, у коме се привидно налази концентрисана сума њихових маса m_1 и m_2.

Напомена 2. Неби било тешко показти да ће и три или више материјалних тачака са масом, при извесним одређеним условима њихових почетних брзина, описивати елиптичне путање око њиховог заједничког тежишта, ако њихово убрзање расте са растојањем. Друкчије речено, „проблем n тела" у овом случају је решљив, одн. решен (упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 11, prop. LXIV).

4.

Извођење формула за убрзање при претпоставци да привлачна сила опада са квадратом растојања.

Ако се у општој формули $\gamma = \chi . f(r)$ стави $\chi = k$ и $f(r) = \frac{1}{r^2}$,

биће, на основу општих формула за убрзање изведених у пододељку 2,

$$\gamma_1 = km_2 \cdot \left[1 : \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \cdot \rho_1\right)^2\right] = k \cdot \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{1}{\rho_1^2},$$

$$\gamma_2 = k \cdot \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{1}{\rho_2^2}.$$

Као што показују ове формуле, убрзање масе m_1 обрнуто је сразмерно квадрату њеног одстојања ρ_1 од заједничког тежишта а управно сразмерно маси $\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$ која се привидно налази у тежишту; а убрзање масе m_2 обрнуто је сразмерно квадрату њеног одстојања ρ_2 од заједничког тежишта а управно сразмерно маси $\frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$ која се привидно налази у тежишту. Према томе за свако од ових убрзања важи други Њутонов закон гравитационог убрзања, из чега следује да ће масе m_1 и m_2, при одређеним условима почетних брзина, описивати око тежишта као заједничке жиже један од конусних пресека, при чему ће се (што следује из саме дефиниције тежишта) обе масе налазити увек на једној правој која пролази кроз (релативно) непомично тежиште (упор. фиг. 21).

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 11, prop. LXIII, probl. XXXIX; и *J. M. F. Wright*, A Commentary on Newton's Principia in two volumes, London 1833, vol. II, Supplement to section XI, p. 7).

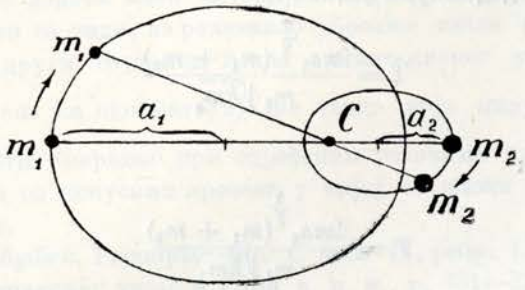
Напомена 1. Као у случају претходног пододељка, и овде је „проблем два тела" сведен на два „проблема једног тела".

Напомена 2. Док је под претпоставком, да је привлачна сила управно сразмерна одстојању, проблем n-тела потпуно решљив (упор. напомену 2 у претходном пододељку), дотле се, под претпоставком да је привлачна сила обрнуто сразмерна квадрату отстојања, не само неда решити општи проблем n-тела, него се неда егзактно решити, ни елементарно-геометриским ни аналитичким путем, ни проблем три тела. Само приближно решење оба ова проблема могуће је (упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 11, prop. LXV и LXVI).

5.

Извођење формула за величину великих полуоса елипси које описују, при претпоставци опадања привлачне силе са квадратом растојања, обе масе око заједничког тежишта.

Ако велике полуосе ових елипси (упор. фиг. 21) озна-



Фиг. 21.

чимо са a_1 и a_2, биће, на основу формуле $a^3 = \frac{T^2 r^2}{4\pi^2} \cdot \gamma$

(која следује из формуле $\gamma = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 r^2}$ — упор. IV,2, напомена 1)

и формула за убрзање изведених у претходном пододељку (пошто је периода оптицања T у оба случаја очевидно иста) с једне стране:

$$a_1^3 = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2} \cdot k,$$

а с друге

$$a_2^3 = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2} \cdot k.$$

Напомена. Из ових формула следује и пропорција:

$$a_1^3 : a_2^3 = m_2^3 : m_1^3,$$

или:

$$a_1 : a_2 = m_2 : m_1,$$

која исказана речима гласи: *велике полуосе елипси, које описују под горњом претпоставком материјалне тачке око заједничког тежишта, обрнуто су сразмерне њиховим масама.*

6.

Извођење формуле за величину заједничке периоде за коју две масе описују елипсе око заједничког тежишта при-

претпоставци привлачне силе која опада са квадратом растојања.

Ако велике полуосе елипси означимо са a_1 и a_2 (упор. фиг. 21) а заједничку периоду са T, биће (на основу формула за величину великих полуоса a_1 и a_2 изведених у претходном пододељку) с једне стране:

$$T = \frac{2\pi a_1^{\frac{3}{2}} (m_1 + m_2)}{m_2 \cdot \sqrt{km_2}}$$

а с друге:

$$T = \frac{2\pi a_2^{\frac{3}{2}} (m_1 + m_2)}{m_1 \sqrt{km_1}}.$$

Напомена. Обе се ове формуле дају извести и из опште формуле за периоду при елиптичном кретању $T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{km}}$, која следује из формула $\gamma = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 r^2}$ и $\gamma = \frac{km}{r^2}$.

(Упор. *Рајт*, A Commentary etc. vol. I, p. 231 и vol. II, p. 9).

II

ИЗВОЂЕЊЕ ФОРМУЛА ЗА ЦЕНТРАЛНО КРЕТАЊЕ ДВЕЈУ МАТЕРИЈАЛНИХ ТАЧАКА, КОЈЕ СЕ ПРИВЛАЧЕ ПО ЗАКОНУ ГРАВИТАЦИОНОГ УБРЗАЊА, ЈЕДНЕ ОКО ДРУГЕ, КАДА СЕ ЈЕДНА ОД ЊИХ НАЛАЗИ У РЕЛАТИВНОМ МИРУ.

1.

Извођење формуле за релативно убрзање једне материјалне тачке у односу на другу која релативно мирује.

Ако убрзања маса m_1 и m_2, која оне узајамно једна другој придају, означимо са γ_1 и γ_2, биће по претпоставци:

$$\gamma_1 = \frac{km_2}{r^2} \text{ и } \gamma_2 = \frac{km_1}{r^2} \text{ (упор. фиг. 20).}$$

Ако масу m_2 будемо сматрали да релативно мирује а да се маса m_1 креће око ње, биће релативно убрзање γ масе m_1 очевидно равно збиру убрзања γ_1 и γ_2, одакле следује формула:

$$\gamma = \left[\gamma_1 + \gamma_2 =\right] k \cdot \frac{m_1 + m_2}{r^2}.$$

Иста формула важиће и за релативно убрзање масе m_2, ако масу m_1 будемо сматрали да релативно мирује.

У оба случаја изгледаће дакле да је маса материјалне тачке која се креће додата маси материјалне тачке која мирује. Како, као што се види, за релативно убрзање тачке која се креће важи други Њутонов закон гравитационог убрзања $\left(\gamma = \frac{k\,m}{r^2}\right)$, она ће око материјалне тачке која мирује морати описивати (наравно при одређеним условима почетних брзина) један од конусних пресека у чијој се жижи налази ова последња.

(Упор. *Њутон*, Principia, lib. I, sect. 11, prop. LVIII и cor. 2 те пропозиције; упор. и *Рајт*, н. н. м., p. 331—32).

Напомена. Као што се види, и овде је проблем два тела сведен (или боље рећи растављен) на два „проблема једног тела".

2.

Извођење формуле за величину велике полуосе елипсе, коју материјална тачка која се креће описује око тачке која релативно мирује.

Ако је конусни пресек који маса m_1 описује око масе m_2 елипса и ако велику полуосу те елипсе означимо са A_1, биће, пошто из

$$a_1 : a_2 = m_2 : m_1$$

следује

$$a_1 : (a_1 + a_2) = m_2 : (m_1 + m_2),$$
$$A_1 = a_1 + a_2$$

и

$$A_1 = \frac{a_1 (m_1 + m_2)}{m_2}.$$

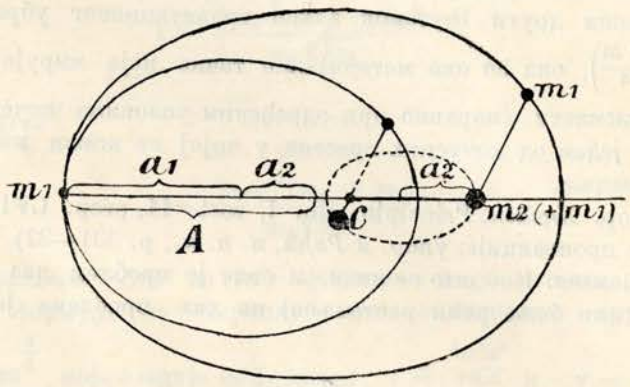
На сличан начин следоваће, у случају да маса m_2 описује око m_1 елипсу чија је велика полуоса A_2, да је

$$A_2 = a_1 + a_2$$

и

$$A_2 = \frac{a_2 (m_1 + m_2)}{m_1}.$$

Према томе је $A_1 = A_2$, што значи да ће, било да мању или да већу масу сматрамо да је у релативном миру, описана елипса имати исти облик и величину (са чега ћемо њену велику полуосу означити са A). При описивању ове елипсе релативни положај обеју маса остаће у сваком тренутку очевидно исти какав је био при њиховом кретању око заједничког тежишта (упор. фиг. 22 са фиг. 21).



Фиг. 22.

3.

Извођење формуле за величину периоде у елипси коју описује једна материјална тачка око друге која је у релативном миру.

Са разлога наведеног при крају претходног пододељка периода ове елипсе биће иста са периодом елипси које обе материјалне тачке описују око заједничког тежишта. Према томе биће, на основу формула за периоду изведених у пододељку I, 6 и формуле

$$A = \frac{a_1 (m_1 + m_2)}{m_2} = \frac{a_2 (m_1 + m_2)}{m_1}$$

изведене у претходном пододељку,

$$T^2 = \left[\frac{4\pi^2 a_1^3 (m_1 + m_2)^2}{k \cdot m_2^3} = \right] \frac{4\pi^2 A^3}{k (m_1 + m_2)}$$

или

$$T = \frac{2\pi A^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k (m_1 + m_2)}}.$$

(Упор. *Рајт*, н. н. м., vol. II, p. 9).

Напомена. Из ове последње формуле следује и следећа формула за величину велике полуосе дотичне елипсе:

$$A^{\frac{3}{2}} = \frac{T \cdot \sqrt{k (m_1 + m_2)}}{2\pi}.$$

III

ИЗВОЂЕЊЕ ТЗВ. ПОТПУНОГ ТРЕЋЕГ КЕПЛЕРОВОГ ЗАКОНА.

Ако се две масе m_1 и m_2, за чије привлачење важи Њутонов закон гравитационог убрзања, крећу око једне треће релативно мирујуће масе M у елипсама чије су велике полуосе a_1 и a_2, биће (на основу формуле $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = k(M+m)$, која следује из формула $\gamma = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 r^2}$ и $\gamma = k \cdot \frac{M+m}{r^2}$ и ако не водимо рачуна о узајамном дејству маса m_1 и m_2 једне на другу):

$$\frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2} = k(M + m_1) \text{ и}$$

$$\frac{4\pi^2 a_2^3}{T_2^2} = k(M + m_2).$$

Кад се први од ових израза подели другим, добиће се:

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} : \frac{a_2^3}{T_2^2} = \frac{M + m_1}{M + m_2}$$

или

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{M + m_1}{M + m_2},$$

а одавде:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2 (M + m_1)}{T_2^2 (M + m_2)}.$$

Напомена. Ако је m_1 маса која се креће око релативно мирујуће масе M_1, а m_2 маса која се креће око релативно мирујуће масе M_2, следоваће на сличан начин формула:

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} : \frac{a_2^3}{T_2^2} = \frac{M_1 + m_1}{M_2 + m_2}.$$

IV

ИЗВОЂЕЊЕ ТЗВ. ПОТПУНОГ ЊУТОНОВОГ ЗАКОНА ГРАВИТАЦИЈЕ:

$$f = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

ОДН. ИЗВОЂЕЊЕ ТЕОРЕМЕ, ДА ЈЕ ГРАВИТАЦИОНА СИЛА, КОЈОМ ДВЕ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ ДЕЈСТВУЈУ ЈЕДНА НА ДРУГУ, УПРАВНО СРАЗМЕРНА ЊИХОВИМ МАСАМА А ОБРНУТО СРАЗМЕРНА КВАДРАТУ ЊИХОВОГ РАСТОЈАЊА.

Ако убрзања, која масе m_1 и m_2 придају једна другој, означимо са γ_1 и γ_2, биће, на основу другог Њутоновог закона гравитационог убрзања,

$$\gamma_1 = \frac{k.m_2}{r^2} \text{ и } \gamma_2 = \frac{k.m_1}{r^2}.$$

Како је према трећем основном Њутоновом закону кретања $m_1\,\gamma_1 = m_2\,\gamma_2$, биће:

$$m_1\gamma_1 = m_2\gamma_2 = \frac{k \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Ако производ из масе и убрзања, који у Механици називамо силом, означимо са f, биће напослетку:

$$f = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

чиме је горња теорема изведена.

Напомена 1. Као што се лако да увидети, изрази акција и реакција, употребљени у раније наведеној формулацији трећег основног Њутоновог закона кретања (упор. прим. 24), значе силе којима две масе дејствују један на другу. Према томе тај се закон може и овако формулисати: *две масе дејствују једна на другу силама које су једнаке и супротно управљене.*

Напомена 2. Док је, као што смо видели (упор. доказ теореме VIII у одсеку *A*), убрзање γ зависно само од масе која га производи а независно од масе на којој се производи, дотле је обрнуто, при истом убрзању, величина силе $m\gamma$ (одн. сила $m\gamma$) зависна само од величине масе на којој се производи.

Напомена 3. Израз сила употребљава се у Механици у једном ужем и у једном ширем значењу: тај израз значи како појединачни производ $m\gamma$ тако и способност произвођења дејства мерених тим производом. Тако *Њутон* замишља да је једна дата маса седиште гравитационе силе која на разне друге масе производи дејства пропорционална производу m. И у изразу централна сила, сила је употребљена у ширем значењу.

Напомена 4. Док константа k у формули $\gamma = k\frac{m}{r^2}$ значи убрзање које јединица масе производи на јединици растојања (упор. *A*, VIII, напомена 3), дотле k у формули $f = k\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ значи силу којом јединица масе привлачи јединицу масе на јединици растојања и која износи $6{,}685.10^{-8}$ дина. Као што се види, апсолутна бројна вредност константе k у оба случаја је иста.

V

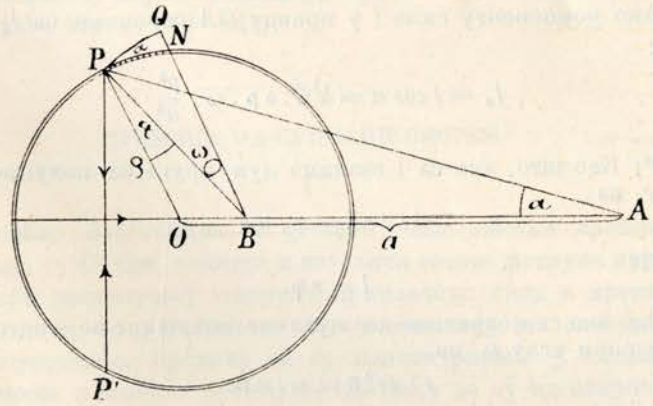
ПРИВЛАЧЕЊЕ КУГЛАСТИХ ТЕЛА

За привлачење кугластих тела важи следећа теорема:

Две материјалне кугле привлаче се својом гравитационом силом тако као да су њихове масе концентрисане у њиховим средиштима.

Ова теорема доказује се на основу одговарајуће теореме за један у погледу масе хомоген кугласт исечак (Kugelschale). А ову помоћну теорему доказујемо на следећи начин.

Нека је (упор. фиг. 23) O средиште кугле (одн. њеног највећег круга) чији је полупречник ρ, $\Delta\rho$ нека је дебљина кугластог исечка, *P* тачка у којој се налази елементарни делић



Фиг. 23.

ПРЕГЛЕД САДРЖИНЕ

Страна

Претходна примедба 3

ПРВИ ДЕО (А)

Геометриско извођење основних теорема. — Геометриско извођење формула за радијално убрзање при општем централном кретању. — Геометриско извођење формула за радијално убрзање у конусним пресецима. — Извођење првог Њутоновог закона гравитационог убрзања $\left(\gamma = \frac{C}{r^2}\right)$ из формула за радијално убрзање у конусним пресецима и трећег Кеплеровог закона. — Извођење трећег Кеплеровог закона из формула за радијално убрзање у конусним пресецима и првог Њутоновог закона гравитационог убрзања. — Геометриско извођење формула за линеарну брзину при општем централном кретању и при централном кретању у конусним пресецима. — Геометриски доказ теореме да се једна материјална тачка мора кретати у конусним пресецима ако за централну силу, која на њу дејствује, важи први Њутонов закон гравитационог убрзања. — Извођење другог Њутоновог закона гравитационог убрзања $\left(\gamma = K \cdot \frac{m}{r^2}\right)$ . . . 4

ДРУГИ ДЕО (В)

Извођење закона и формула за централно кретање двеју материјалних тачака, које се привлаче, око заједничког тежишта. — Извођење формула за централно кретање двеју материјалних тачака, које се привлаче по другом Њутоновом закону гравитационог убрзања, једне око друге када се једна од њих налази у релативном миру. — Извођење тзв. потпуног трећег Кеплеровог закона. — Извођење тзв. потпуног Њутоновог закона гравитације $\left(f = k \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}\right)$. — Привлачење кугластих ела. — Примена на Сунчани систем . . . 43

БИБЛИОТЕКА